ALEXANDRE PROCA

(1897-1955)

OEUVRE SCIENTIFIQUE PUBLIÉE

ISBN 2-9502854-0-6

Les conséquences philosophiques de la théorie des quanta

Touchant de près par son objet même à des problèmes fondamentaux, la théorie des quanta dans sa forme récente a eu une influence marquée ~~dans~~ ~~sur~~ certains ~~chapitres~~ de la philosophie.

La raison profonde de ce bouleversement a été l'introduction du discontinu dans la science du mouvement, c'est-à-dire dans une discipline qui était jusqu'alors essentiellement une discipline du continu. Les diverses conséquences en ont été dégagées par une pénétrante analyse portant en premier lieu sur le sens qu'on doit donner aux termes "connaissance du monde physique" en particulier à l'échelle atomique ou nucléaire.

D'une façon générale, la sanction de l'expérience est capitale pour toute théorie physique; pour que le schéma qu'elle propose puisse être considéré comme décrivant un phénomène naturel, il faut que les résultats qu'on en tire soient en accord avec les résultats des mesures expérimentales. Le problème de la mesure des grandeurs physiques s'est trouvé ainsi posé dès le début en mécanique quantique et son examen attentif a entraîné la modification d'un certain nombre de nos anciennes conceptions.

Table des Matières

INTRODUCTION

Cet ouvrage commémoratif, établi à l'occasion du cinquantenaire de la découverte par Alexandre Proca des équations relativistes représentant les particules de spin entier - équations universellement connues sous le nom "d'équations de Proca", a pour but de rassembler à l'intention de la communauté scientifique contemporaine l'ensemble de son oeuvre restée jusqu' ici éparse sous forme d'articles de périodiques ou de publications diverses.

Il a paru aussi utile de compléter ce volume par une bibliographie couvrant la période 1955-1986 destinée à regrouper, sans pour autant viser à une exhaustivité nécessairement illusoire, les principaux travaux s'appuyant sur la contribution d'Alexandre Proca au développement de la recherche scientifique et mettre ainsi en relief les répercussions de ses travaux sur la physique depuis sa disparition.

La très grande majorité des publications reproduites ici est en français puisque la France fut le pays d'élection où il effectua presque toute sa carrière. Certaines, toutefois, sont en roumain - sa langue natale. On trouvera, à la suite du texte original, une traduction en français destinée à en faciliter la lecture et à pallier aux imperfections d'une reproduction que la vétusté des textes originaux a parfois rendu problématique.

L'évolution de la pensée d'Alexandre Proca au cours de ses recherches se perçoit mieux lorsqu'on regroupe ses travaux par grands thèmes. C'est l'optique adoptée ici de préférence à une présentation strictement chronologique. Il se trouve toutefois que la chronologie est, dans l'ensemble, respectée.

La section "documents additionnels" contient des textes non nécessairement publiés mais ayant le mérite de faire percevoir la manière dont Alexandre Proca concevait, entre autres, l'enseignement de la physique théorique. De plus amples informations sur la réalisation pratique et la portée des concepts exprimés en ces documents additionnels sont donnés dans les pages qui suivent sous le titre: "Alexandre Proca, sa vie, son oeuvre scientifique".

La réalisation effective de ce volume n'aurait pu être sans l'aimable autorisation de reproduire des Maisons d'Edition et le concours pratique de nombreux collègues et amis. Qu'ils en soient tous ici remerciés.

Georges A. Proca

ALEXANDRE PROCA
SA VIE, SON OEUVRE SCIENTIFIQUE.

Il y a toujours audace de la part d'un fils à vouloir se faire biographe en ce qui concerne son Père: en général, au moins deux tiers de l'existence évoquée échappe au souvenir par antériorité naturelle et le témoignage personnel du fils ne peut couvrir, au mieux, que les années de l'âge mûr.

Toutefois, un fils possède un avantage inestimable. Il a vécu familièrement et en famille auprès d'un être d'exception. Il perçoit de l'intérieur la réalité sous-jacente à certains faits ou événements là où le biographe externe ou appointé ne pourrait qu'exprimer des probabilités.

J'userai de ce privilège en cette commémoration avec discrétion et retenue comme mon Père, par sa vie, me l'a enseigné.

Les pages qui suivent sont écrites d'une position doublement privilégiée. Par un choix décisif de mon Père j'ai pu naître français. "Né en France de Père français". De plus éduqué en France dont j'ai reçu la culture.

Mais, par mes parents, je suis aussi roumain. Cette double appartenance est précieuse car, à trente ans de la disparition de mon Père, je peux discerner combien le choc de ces deux cultures a pesé sur sa vie.

Il ne s'agira pas ici d'être apologétique - ce serait automatiquement suspect - ni d'être polémique: ce serait manquer à l'exemple que mon Père m'a laissé en héritage et à sa noblesse intrinsèque.

Mais il s'agit de compléter l'information qui a pu être transmise, correctement ou non, en ce qui concerne certains faits, certains événements, de mettre en lumière pourquoi certains traits de caractère, les actions qui en ont dérivé, la manière dont elles ont été conduites, ont pu peut être paraître incompréhensibles.

En un mot il s'agit de restituer la plénitude de la dimension humaine d'Alexandre Proca à ceux qui n'ont pas eu le privilège de le connaître personnellement.

Alexandre Proca est né le 16 Octobre 1897 dans une famille de Bucarest où foisonnent mathématiciens, médecins, hommes de lettres et poètes. Son Père, par exemple ,était ingénieur ancien élève de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris et auteur de divers articles mathématiques ou techniques publiés dans les mêmes revues scientifiques roumaines où son fils Alexandre se fera connaître plus tard.

Des années "scolaires", dont il est de tradition de ne rien dire dans une biographie, il faut cependant retenir que, déjà, se manifestent une capacité d'assimilation et de réflexion personelle qui amèneront mon Père dès l'âge de 17 ans (1914) à devenir correspondant de la "Gazeta Matematice" fondée en 1895. Il est alors encore lycéen au lycée Gheorghe Lazar de Bucarest où il terminera ses études secondaires en 1915. Toutefois sa collaboration à la Gazeta Matematice se poursuivra jusqu'en 1917 alors qu'il a déjà fréquenté pendant un an la Faculté des Sciences - bien sûr en section mathématiques - durant l'année 1915-1916.

Mais, à part le remarquable enseignement que ses professeurs ont su lui donner et dont la qualité a permis l'éclosion de ses dons mathématiques et physiques, il est un autre aspect des années de formation de la plus haute importance: que ce soit dû à l'environnement familial en sa composante littéraire ou à l'enseignement du lycée, il demeure qu'Alexandre Proca, à 17 ans, a acquis la maîtrise - en plus du roumain - du français, de l'anglais, de l'allemand, toutes langues qu'il parle et écrit à la perfection.

Sa culture générale déjà vaste ne cessera, dès lors, de s'élargir: lorsque mon Père se "reposait" c'était toujours avec un livre entre les mains ... et toujours un très bon livre.

En 1917, la mobilisation générale l'appelle sous les drapeaux. Il est admis à l'Ecole Militaire des Officiers de Réserve, à Iasi où il "fait ses classes" et au début Avril 1917, sorti premier de sa promotion, il est envoyé au front dans une section du Génie où il combattra jusqu'au premier Juin 1918. A la démobilisation il a le grade de Sous Lieutenant.

Pour son patriotisme et sa sensibilité, c'est un crève coeur que de retrouver la famille en zone occupée où les conditions sont mauvaises. L'écho de ses sentiments et pensées en cette année 1918 nous est conservé dans la "Scrisoarea catre tineri", en français "lettre aux jeunes" publiée par le journal Dacia. C'est aussi une pièce d'anthologie importante car c'est le premier document publié que nous possédions et qui soit une prise de position.

Mais il faut se remettre à étudier. Le 15 Octobre 1918 commencent les épreuves du concours d'entrée à l'Ecole des Ponts et Chaussées. Mon Père sera reçu second d'une promotion de quelques soixante jeunes gens dont à peu près la moitié avait servi, comme lui, au front.

Au mois d'Août 1919, Alexandre Proca est reçu premier de sa promotion, un rang qu'il conservera tout au long de ses études.

L'enseignement devait s'étendre sur cinq ans. Toutefois, une loi de Juin 1920 transforme l'établissement en "Ecole Polytechnique" avec un curriculum plus riche et ramené à quatre ans. La Promotion Proca - car c'est ainsi que désormais elle s'appelle - est autorisée à se répartir en trois sections au choix des étudiants. Elle est considérée comme ayant déjà effectué la deuxième année de l'ancien régime. Mon Père choisit l'électromécanique.

Deux événements importants marquent cette année 1920. D'abord une magistrale série de conférences prononcées devant collègues et Professeurs sur "le principe de relativité d'Einstein". Ensuite, une mission accomplie pendant deux mois à Philadelphie (USA) aux Usines de locomotives Baldwin. Il semble bien que, à la suite de ce stage, le gouvernement roumain aie effectivement procédé à l'achat de motrices électriques.

Enfin, en 1922, à l'âge de 25 ans, Alexandre Proca devient Ingénieur, ayant passé son diplôme avec la mention "très bien", Major de sa promotion et Major absolu de toutes les promotions de cette année là.

Que fait un jeune lauréat, brillant, bien connu de la haute société de Bucarest? Il entre dans l'industrie privée. Laquelle ? Voyez son curriculum: il a fait de l'électromécanique. Ce sera la Societé Electrique de Cîmpina qui aura l'honneur de compter mon Père parmi ses ingénieurs à peu près pendant un an (1922-1923). Le résultat est immédiat. Mon Père se rend compte que l'efficacité de l'exploration pétrolière et du travail dans les mines peut être sensiblement améliorée par l'usage de techniques électriques dont il se fait aussitôt le promoteur ardent. Il en résultera deux mémoires en roumain et une synthèse en français, cette dernière publiée par la Revue Générale de l'Electricité (Vol.16, p861-872, Nov.29, 1924 - non reproduite dans cet ouvrage).

En même temps qu'il entre dans l'industrie privée, mon Père est nommé Assistant à l'Ecole Polytechnique auprès de la chaire d'Electricté et Electrotechnique dont le titulaire était N. Vasilescu Karpen. C'est aussi en 1920 que mon Père devient rédacteur du "Buletinul de matematicà purà si applicatà" qui deviendra quelques années plus tard le "Bulletin de Mathématiques et Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest"

Automne 1923. Soudain c'est le tumulte dans Bucarest: il paraît que Alexandre Proca, malgré des perspectives enviables de carrière, lâche tout et s'en va à Paris.

La raison profonde de ce choix tient en quelques mots que je lui ai entendu prononcer bien plus tard:

"J'ai quelque chose à dire en Physique".

Et pour cette vocation, qui automatiquement exclut les badinages de salon et l'impérialisme des capitaines d'industrie, mon Père va tout risquer: l'incompréhension des siens, le dépit des industriels, une existence paisible......

En somme, il part en exil.

Octobre 1923, Paris. Premières difficultés: Le Secrétariat de la Sorbonne ne peut pas reconnaître les diplômes de mon Père faute d'équivalence officielle. Un problème à résoudre d'urgence et avec élégance.

L'élégance ?, cette pierre de touche de tout ce que faisait ou entreprenait mon Père, se manifestera par le fait que en 1924, après avoir télescopé en un an ce qui normalement en requiert quatre, mon Père était Licencié ès Sciences avec, aux examens des notes à faire tourner la tête à des générations d'étudiants: Pas une seule note qui soit inférieure à 17.5/20. Et cela de la part d'un roumain inconnu affrontant la fine fleur du corps enseignant français.

Un trait du caractère de mon Père apparaît en filigrane dans des documents retrouvés de cette époque: la modestie. Elle se traduit ici par l'existence de cahiers de cours. On eût pu penser que connaissant à fond les matières enseignées, mon Père se serait dispensé d'assister aux cours pour hanter les bibliothèques.

Non point; car ce qui l'intéressait était l'aspect pédagogique des présentations, le commentaire impromptu qui éclaire d'un jour nouveau un principe physique. Et les notes, prises au fil de la plume, sont en français élégant.

La valeur, même enrubannée de modestie, se remarque: A peine a-t-il son diplôme que Madame Curie offre à mon Père, en 1925, de venir travailler à l'Institut du Radium. Il a 28 ans.

Dans une biographie due à Monsieur G. Andonie (voir bibliographie) on trouve l'écho de l'estime que son travail - à l'époque de nature essentiellement expérimentale - lui avait déjà valu. A l'occasion d'une visite au Laboratoire effectuée par un ancien condisciple de mon Père, Madame Curie s'exprime en ces termes: "J'ai plaisir à connaître un compatriote et ami de Monsieur Proca car, ainsi, je peux transmettre à cet ami combien je suis satisfaite de la contribution de Monsieur Proca à notre Institut. Chaque fois que j'ai un problème scientifique difficile qui demande beaucoup de patience, compétence, habileté expérimentale et méticulosité, je m'adresse à Monsieur Proca. Et lui, chaque fois, réagit avec des solutions qui sont à ma convenance, me satisfont, et - toujours - fournissent des résultats précis. Vous pouvez être fiers, vous les roumains, d'avoir un chercheur scientifique ayant la valeur de Monsieur Proca."

Le résultat d'un des travaux verra le jour en 1926 sous la forme d'un Compte Rendu à l'Académie des Sciences, publié en collaboration avec D.K. Yovanovitch :

"Sur les rayons bêta lents du Mésothorium".

En rétrospective, cette année 1926 revêt une importance exceptionnelle.

Il semblerait, d'un côté, que les qualités d'expérimentateur de mon Père remarquées par Madame Curie aient provoqué quelque jalousie chez certains travailleurs du Laboratoire et aient résulté en des avatars étranges survenus à des appareillages qu'il avait mis au point, laissé en fonctionnement, et retrouvés inexplicablement hors d'usage.

C'est aussi, et surtout, l'époque où se décide la création de l'Institut Henri Poincaré sous l'impulsion du Professeur Birkhoff de Harvard avec l'aide de la Fondation Rockefeller comme du baron de Rothschild. Sa raison d'être était - est toujours - de donner un lieu à la physique mathématique et à la physique théorique en France afin de permettre l'enseignement des théories les plus récentes.

Consciemment ou inconsciemment mon Père perçoit aussi, grâce à son inimitable capacité de synthèse, la mutation qui secoue la physique. Il se rend compte que les problèmes à résoudre ne sont plus tellement de type purement mathématique mais requièrent plutôt la formulation d'idées, d'hypothèses physiques sur la nature de la matière ou des phénomènes. Il ne s'agit plus de systématiser des connaissances mais d'imaginer des solutions nouvelles.

Plus obscure peut être, mais certainement sous jacente est aussi la perception que "l'adolescence scientifique" est terminée. La synthèse personnelle de tout ce qu'ont enseigné, conseillé, discuté avec lui les "grands modèles" est en train de s'achever.

Perspicace, Madame Curie se rend compte de cette évolution et, avec désintéressement, favorise la transition vers une orientation différente des travaux confiés à mon Père.

A 29 ans, au mitan de sa vie, Alexandre Proca va désormais appliquer toute son énergie à la physique théorique.

Les premiers travaux à caractère théorique portant la marque personnelle de mon Père paraissent en 1928 et traitent principalement de mécanique quantique. D'emblée, son approche originale de la dynamique - en quatre publications hautement intercorrélées - a montré que, si la lumière possède bien des propriétés ondulatoires, la théorie des quanta elle-même exige la périodicité de la lumière tout en lui attribuant une structure discontinue. Elle peut donc être considérée comme constituée par des photons sans qu'elle cesse pour celà d'être cohérente. En fait la condition de cohérence est une condition de quanta.

Il est assez remarquable que le tout premier mémoire, soumis en Décembre 1927 au "Journal de Physique et le Radium", contienne déjà en germe cette réflexion sur la nature du temps qu'il continuera tout au long de sa vie. Il est aussi remarquable que dès ces premiers travaux, par exemple dans le fascicule "sur la théorie des quantas de lumière", il parvienne au rang de précurseur par sa manière de démontrer mathématiquement la possibilité d'un espace-temps discontinu.

Mais une autre facette de ses réflexions concerne l'énergétique et l'Equation de Schroedinger. Il y rapproche l'atomicité des actions de l'atomicité des entropies et montre que l'Equation de Schroedinger n'est qu'un cas particulier d'une équation plus générale.

Surtout, les implications physiques sont importantes: un mouvement quelconque ne se fait pas nécessairement par ondes de phase au sens de De Broglie-Schroedinger.

Au passage, et comme en se jouant, mon Père introduit un nouvel outil mathématique: les probabilités imaginaires.

C'est la première fois que mon Père publie un article où il se démarque nettement des conceptions ondulatoires. Dans une situation institutionelle telle que celle régnant alors en France et où l'émiettement de la recherche est extrême, tout "chef de file" est porté à devenir sourcilleux envers quiconque ne partage pas intégralement ses vues. C'est dire que publier un article où l'on ose seulement montrer que les théories ondulatoires ne sont pas nécessairement tout, équivaut à faire preuve d'anticonformisme vis à vis des thèses professées par L. de Broglie.

Ce sont là des considérations de "diplomatie scientifique" ou de "politique du jeune chercheur" auxquelles mon Père ne pense même pas. De même, plus tard, il demeurera stupéfait qu'on puisse lui dire - en donnant au mot politique son sens habituel - "Ne pas faire de politique, c'est encore une politique".

Pour lui ce qui compte - et comptera toujours - c'est de faire avancer la science et de le faire en donnant toujours le meilleur de soi même. Donc, de se réjouir de tout nouveau travail de qualité qui aide à mieux pénétrer les arcanes de l'Univers et qu'il sera, sans doute, possible un jour d'intégrer à d'autres travaux.

Et c'est cette volonté de "servir" qui pousse mon Père à accepter des tâches non directement liées à ses recherches propres: il faut bien que quelqu'un du métier donne un coup de main pour aider à diffuser les progrès de la pensée scientifique. Jusqu'à la deuxième guerre mondiale il sera collaborateur pour la mécanique ondulatoire à la revue d'analyse et de critique mathématique "Zentralblatt fuer Mathematik und ihre Grenzgebiete". Il sera aussi "Lecteur" des "Cahiers de Physique Théorique".

Plus immédiatement, en cette année 1929 où ses liens avec l'Institut Henri Poincaré vont se resserrant, il accepte la charge de rédacteur, puis rédacteur en chef de la "Revue d'Acoustique" qui vient d'être fondée. L'année suivante, il recouvre les mêmes fonctions pour ce qui concerne les "Annales de l'Institut Henri Poincaré". Il conservera cette responsabilité jusqu'à ce que les forces le trahissent.

C'est littéralement à bout de bras que mon Père a tenu ces publications et il devait tout faire lui même sans aucun secrétariat. Le niveau des publications est dû à sa double action de filtre des mémoires reçus et instigateur d'une correspondance nourrie avec des auteurs potentiels. La qualité de la présentation, la perfection de la réalisation doivent beaucoup à son sens de l'esthétique mais aussi et surtout à son attachement à la minutie dans la correction des épreuves. Au delà de tout cela, (et seuls les proches pouvaient en avoir connaissance car les bénéficiaires en faisaient rarement mention) l'abnégation à mettre au point les manuscrits de manière à rende lisible ce que l'auteur exprimait confusément. Il accomplissait ce labeur ingrat patiemment et dans le respect absolu de la pensée d'autrui.

Pour en revenir à l'Institut Poincaré - dont la construction est entreprise en 1928 - il est opérationnel en 1929 du moins en certains éléments fondamentaux: l'amphithéâtre Darboux existe; le papier à en-tête aussi. C'est dans ces conditions que A. Einstein vient y effectuer une conférence le 8 Novembre suivie d'une discussion le 12 Novembre. L'audience est sévèrement limitée "suivant le désir de M. Einstein lui même aux professeurs et aux étudiants en Physique Mathématique des Etablissements d'Enseignement Supérieur". C'est au titre du Laboratoire Perrin que mon Père reçoit une "invitation strictement personnelle".

Le résumé du contenu de ces sessions se retrouve dans un texte "La nouvelle théorie d'Einstein" paru au Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et Appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest.

L'année 1930 est riche d'événements. Alexandre Proca a beau avoir à son acquis un nombre non négligeable de publications, il est encore simple Licencié ès Sciences. Il lui faut maintenant un Doctorat. Ce sera L.de Broglie qui, en choisissant un sujet de thèse sur l'électron de Dirac, orientera les recherches et publications pour les années suivantes.

Dès Juillet 1930, en deux notes à l'Académie des Sciences et un mémoire au Journal de Physique (le dernier connu publié en tant que membre de l'Institut du Radium) mon Père apporte des nouveautés notables. L'Equation de Dirac est rendue symétrique; une généralité plus grande est introduite restituant à l'électron un caractère tensoriel; une interprétation physique immédiate est donnée aux 16 degrés de liberté de l'électron. De plus il introduit la notion de probabilités tensorielles ou hypercomplexes.

C'est au milieu de cette intense activité scientifique que se place un événement capital: il est fortement suggéré que mon Père prenne la nationalité française. Les promoteurs de cette proposition se font forts de faire aboutir la demande dans les délais les plus brefs.

A priori rien ne l'y obligeait: la situation internationale est sereine; il pourrait envisager, une fois terminé le Doctorat, de retourner en Roumanie.

D'une autre côté, accepter la nationalité française c'est marquer un ferme propos d'entreprendre en France une carrière universitaire. Et hier comme aujourd'hui cela signifie que mon Père vise le Professorat. Or il sait aussi que les règles françaises ne permettent pas à un étranger - fût il professeur dans son pays - d'être nommé à une chaire universitaire française. Un obstacle que l'on pourrait ultérieurement lui opposer, se trouverait ipso facto écarté. Du moins le croit-il.

En outre, accepter la nationalité française, ce serait marquer sa reconnaissance à la France pour lui avoir donné la possibilité concrète de s'exprimer en Physique.

Mais, par ailleurs, prendre la nationalité française c'est aussi renoncer à la Roumanie et cette fois de manière définitive...

En Janvier 1931 mon Père reçoit la nationalité française mais, par bonheur, la Roumanie n'en devient pas pour autant plus lointaine. Elle devient même particulièrement proche et d'une manière toute personnelle puisque le 30 Octobre, Marie Berthe Manolesco devient Madame Alexandre Proca.

En 1931, mon Père continue ses recherches sur l'électron. Il travaille désormais à l'Institut Henri Poincaré.

S'il publie peu aux Comptes Rendus et au Bulletin de Mathématiques et de Physique de Bucarest, il travaille en revanche beaucoup. Il entreprend (en collaboration avec Jean Ullmo) une traduction en français des "Principes de la mécanique quantique" de Dirac à laquelle il ajoute, spécialement pour cette traduction française, un appendice intitulé "les crochets de Poisson en mécanique classique".

En Octobre 1931, la Caisse Nationale des Sciences fondée par Jean Perrin et qui constitue l'un des prédécesseurs de l'actuel Centre National de la Recherche Scientifique lui alloue une Bourse de Recherches.

Celles ci commencent à dépasser le cadre strict de l'étude de l'électron de Dirac. Dans une note aux Comptes Rendus "sur la théorie du rayonnement" et prenant comme base de raisonnement un point de vue inverse de celui adopté par Schroedinger et de Broglie, il démontre l'existence d'un spin pour les photons.

En 1932, il développe ses conceptions du rayonnement ce qui l'amène à proposer une explication possible de la différence de masse entre le proton et l'électron.

Il s'intéresse bien sûr à tous les aspects de la physique contemporaine bien qu'il ne publie pas nécessairement hors de certains domaines. Cependant on sait qu'il a été invité à présenter une conférence à l'Université de Leyde, le 19 Octobre 1932. Le titre en était: "le neutron et la théorie de Heisenberg". En un sens cette conférence marque, pour mon Père le début de ce qu'on pourrait appeler la période des "grands voyages" dont il sera parlé plus loin.

En 1933, à l'occasion d'une thèse brillante où il introduit pour l'électron de Dirac la notion de dérivée par rapport au temps propre, il obtient de nouvelles intégrales premières du mouvement et interprète physiquement les résultats mathématiques obtenus. Le Président du Jury était Jean Perrin; les examinateurs, L.Brillouin et L. de Broglie.

Fait assez exceptionnel et qui témoigne de l'intérêt suscité par cet ouvrage, la thèse est reprise en texte intégral aux Annales de Physique publiées à l'époque par Marcel Brillouin, Jean Perrin et Aimé Cotton.

Le néo Docteur ès Sciences était déjà passablement original pour soutenir sa thèse après avoir déjà quelques 18 publications à son actif. Il va l'être encore plus en obtenant des financements pour aller travailler à l'étranger.

C'est, en effet, une approche assez rare de la part des jeunes physiciens français de cette époque; si rare qu'on a pu dire que, entre 1920 et 1940, ceux qui ont quitté le pays peuvent se compter sur les doigts d'une seule main.

C'est ainsi que mon Père est envoyé en mission par le Ministère des Affaires Etrangères auprès du Professeur Schroedinger, à Berlin, où il demeurera un an. Puis, grâce à une bourse de la Fondation Rockefeller, il passera plusieurs mois, en 1934, à Copenhague auprès de Niels Bohr et son équipe.

Durant la période berlinoise, il met en chantier la traduction de l'ouvrage de Schroedinger "Mémoires sur la Mécanique Ondulatoire". Elle sera éditée par Alcan à Paris et son intérêt est que Schroedinger lui même a écrit un texte pour introduire la version française, a ajouté au texte original des notes inédites, enfin a revu lui même l'ensemble.

Pour ce qui est de la période de Copenhague - où il rencontre de nombreux physiciens parmi lesquels Heisenberg et Gamov - elle lui est l'occasion de se fortifier dans ses convictions profondes, de s'imprégner d'un certaine manière d'être et de vivre la physique. A ceci s'ajoutait le rayonnement personnel de Niels Bohr et sa famille avec lesquels, sur le plan humain, mon Père était en résonance naturelle. Il est simplement dommage que ce séjour ait dû être écourté à la suite d'une maladie inopinée.

Pour être complet en ce qui concerne l'année 1933, il faut aussi mentionner que mon Père avait mis au point une traduction de la thèse de H.A. Lorentz et qui était destinée à paraître dans les "oeuvres complètes" publiées par la Fondation Teyler à Haarlem, Pays Bas.

En Juillet 1933, alors qu'il a été Boursier de Recherches depuis deux ans, mon Père devient "Chargé de Recherches". Il conservera ce grade jusqu'en 1939.

Maintenant que le Docteur ès Sciences Alexandre Proca est de nouveau libre de choisir lui même ses thèmes de recherche, une nette inflexion se marque. Le grand thème est maintenant le photon et les Equations de Maxwell.

Encore une fois, il utilise un outil nouveau pour la physique quoique connu des mathématiciens: les dérivées d'ordre fractionnaire. Il les appliquera à la mécanique quantique du photon. Puis par une remarquable technique de décomposition du vecteur gradient d'univers, il parvient à trouver une solution des Equations de Maxwell qui ne dépend que d'un seul "potentiel". Or la décomposition peut aussi se faire de manière à aboutir à des théories à deux ou quatre composantes qui représentent des approximations de plus en plus fines. Chacune de ces approximations apporte sa moisson de résultats nouveaux. Pas moins de sept publications sont consacrées à ce thème.

Ayant approfondi l'analyse des électrons et des photons, il faut tirer le bilan. Celui ci sera particulièrement fructueux: il hisse le nom de Proca, d'un coup, en la compagnie de ceux qui ont fait une découverte absolue, définitive; de celles qu'un Prix Nobel généralement sanctionne comme ce fut le cas pour Bohr, Dirac, De Broglie, Yukawa pour ne citer que quelques contemporains.

L'analyse à laquelle se livre mon Père au plan physique aboutira en effet aux "Equations de Proca" qui datent de 1936.

En raison de leur importance tant du point de vue de la Physique que des répercussions qu'aura ce nouveau groupe de publications (qui couvre une période allant - en gros - de 1936 à 1941) sur la vie de mon Père, il est essentiel de bien préciser les conditions du problème posé et les conséquences des solutions découvertes. A cet effet, les lignes qui suivent sont directement tirées de la "Notice sur les titres et travaux scientifiques de Mr Alexandre Proca" qu'il écrivit en 1950 au moment où il postulait à une Chaire Universitaire en des circonstances sur lesquelles j'aurai à revenir.

" L'étude des électrons négatifs d'une part, et des
" photons de l'autre, met inévitablement en parallèle une
" différence capitale entre les deux théories: dans la
" première l'énergie de la particule apparaît avec un

" double signe tandis que dans la seconde l'énergie est
" essentiellement positive, différence parallèle
" d'ailleurs à la différence des spins. De plus, le
" photon a une masse nulle, ce qui complique encore la
" situation. Je me suis attaché alors à étudier les
" équations relativistes les plus simples pouvant
" représenter des électrons de masse non nulle, à énergie
" essentiellement positive et, en outre, différents des
" particules représentées par l'équation de Gordon (spin
" zéro).

" Les équations répondant à ces conditions ont une
" forme qui se rapproche de celle des équations de
" Maxwell. La fonction d'onde est vectorielle, les
" particules représentées ont donc un spin unité et ne
" sont donc pas des électrons de Dirac: nous savons
" aujourd'hui que ce sont des mésons. En effet, à peu
" près à la même époque Yukawa avait proposé son
" explication des forces nucléaires qui avait suscité un
" vif intérêt. L'application qu'il en avait faite
" utilisait cependant l'équation de Gordon pour décrire
" la particule d'échange et les résultats qu'il obtenait
" étaient en contradiction non seulement quantitative,
" mais même qualitative avec les résultats de
" l'expérience dans le domaine nucléaire. Cela était
" d'autant plus fâcheux que l'on trouvait dans les
" rayons cosmiques précisément la preuve expérimentale de
" l'existence de la particule prévue.

" Cependant, la particule d'échange ayant un spin
" unité, les fonctions d'ondes devaient avoir un
" caractère vectoriel. On suggéra alors l'utilisation
" des équations que j'avais obtenues et qui portaient
" précisément sur des vecteurs, pour décrire le mouvement
" du méson. Kemmer, en Angleterre, entreprit cette étude
" avec un succès complet. A l'heure actuelle ces
" équations sont universellement adoptées pour l'étude
" des mésons, sous le nom, d'ailleurs, d'"Equations de
" Proca".

" Elles constituent le type des équations des
" particules à spin entier, tout comme celles de Dirac
" sont le type correspondant aux spins demi-entiers; et
" il n'y en a pas d'autres, ainsi que le montre l'analyse
" des types de représentations du groupe de Lorentz."

Les solutions au problème fondamental posé par mon Père sont explicitement présentées dans deux notes aux Comptes Rendus: "Sur la théorie du positon" et "Sur les équations fondamentales des particules élémentaires" complétées par le mémoire au Journal de Physique "Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs".

Les applications liées aux mésons sont contenues, en 1938, dans l'article "Théorie non relativiste des particules à spin entier" publié au Journal de Physique et dans l'article "Equations d'ondes approximatives pour des particules à spin unité" publié aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Roumanie. En 1939 on trouve deux travaux en collaboration avec S. Goudsmit "Sur la masse du mésoton et des autres particules élémentaires" aux Comptes Rendus et "Sur la masse des particules élémentaires" au Journal de Physique. En 1941, deux notes aux Comptes Rendus traitent des "Intégrales premières dans la théorie du mésoton" et "Intégrales premières du mouvement du mésoton".

L'autre groupe d'applications est représenté en 1936 par une note aux Comptes Rendus "Sur les photons et les particules charge pure" complété, en 1937, par un article au titre presque identique au Journal de Physique.

Les répercussions de ces travaux sur la vie de mon Père ne sont peut être pas encore très perceptibles mais les éléments du drame à venir sont déjà réunis.

La racine en est ce fait inéluctable que les Equations de Proca sont le prototype des équations représentant des particules de spin entier. Elles s'appliquent donc au photon et ce d'une manière qui, une fois de plus, n'est pas dans la ligne des travaux de L. de Broglie. Elles ont, on serait presque tenté de dire, l'audace d'être une approche indépendante. Enfin elles ont une importance pratique car elles ont donné son véritable sens à l'hypothèse de Yukawa.

Quels qu'aient été les sentiments de L. de Broglie, on est amené à constater qu'ils se sont traduits, en un premier temps, par un silence total rompu semble-t-il une fois seulement en 1946. Dans une contribution à la revue Experientia (Vol.II, 1, 1946) intitulée "L'activité du centre de théories Physiques de l'Institut Henri Poincaré pendant les dernières années" on trouve ces lignes:

" Dans une suite de travaux effectués de 1933 à 1939,
" j'ai pu obtenir ce résultat en employant une "méthode
" de fusion" et constituer ainsi une mécanique
" ondulatoire du photon satisfaisante et en accord avec
" la théorie quantique des champs électromagnétiques.
" Ainsi que je l'ai ensuite montré, cette mécanique
" ondulatoire du photon n'est qu'un cas particulier de la
" théorie générale des particules à spin, théorie
" générale qui comprend la théorie du méson, autre
" particule de spin 1, et probablement aussi celle du
" graviton qui paraît être une particule de spin 2.
" Mes travaux sur la théorie du photon et celle plus
" générale des particules à spin ont orienté les
" recherches de plusieurs de mes jeunes collaborateurs
" qui ont fait eux-mêmes des travaux importants sur ce
" sujet: j'en parlerai dans un instant.

" Mais je dois signaler auparavant, qu'en 1936 M.
" ALEXANDRE PROCA qui travaillait aussi à l'Institut
" Henri Poincaré, a obtenu, indépendamment de mes
" recherches, des équations applicables à une particule
" de spin 1 chargée électriquement. Ces équations
" concordent avec celles de ma théorie du photon quand on
" néglige la charge de la particule. Les équations de M.
" PROCA ont pu ensuite être utilisées dans la théorie du
" méson, ce qui les a rendues célèbres à l'étranger. M.
" PROCA a poursuivi depuis d'intéressantes recherches sur
" les particules élémentaires."

On peut se demander pourquoi L. de Broglie a ajouté "à l'étranger" à la fin du texte cité. Après tout, les Equations de Proca ont été découvertes en France et mon Père en avait la nationalité ...

On reste songeur aussi lorsqu'on rapproche quelques faits. En premier lieu, l'hypothèse de Yukawa a été couronnée d'un Prix Nobel (en 1949) alors que le travail qui avait donné son sens à cette hypothèse - les Equations de Proca - n'y est pas associé. Ensuite, depuis le Prix Nobel qui consacrait les découvertes de L. de Broglie (en 1929) il n'y en a plus eu d'autre en France au titre de la Physique. Or, il est de tradition que d'éventuels candidats soient présentés au Jury par un Prix Nobel de même nationalité - s'il en existe - et de préférence dans la même discipline ou une discipline affine.

N'est ce pas la dialectique - mortelle - de la rivalité qu'ont déclenché les Equations de Proca et la célébrité qu'elles confèrent à leur auteur? Il faudra attendre le troisième acte et dernier pour le savoir.

Outre les travaux déjà mentionnés, mon Père publie, en 1939, une "Equation symbolique...." aux Comptes Rendus que l'on peut considérer comme une charnière entre le cycle précédent de publications et celui qui est sur le point de commencer. Il publie par ailleurs une analyse "sur la longeur fondamentale attachée aux particules élémentaires" aux Comptes Rendus et, au Journal de Physique, un mémoire sur le calcul des spineurs.

En même temps la célébrité croît. Dans son rapport annuel de 1938 au Ministre de l'Education Nationale, mon Père signale - tout en sollicitant sa nomination comme Maître de Recherches - que pas moins de huit articles ont été publiés durant cette même année 1938 concernant les Equations de Proca.

Les signataires? Yukawa, Sakata, Taketani, Froehlich, Heitler, Kemmer, Bhabha, Wentzel. (individuellement ou en collaborations diverses).

Indépendemment de ces travaux de recherches personnelles, mon Père traduit les "Fondements Mathématiques de la Mécanique Quantique" de Von Neumann. L'ouvrage paraîtra en 1946 chez Alcan. Pour moi cette traduction est colorée d'un signification particulière: elle correspond, en effet au premier souvenir que j'aie de mon Père en tant que représentant d'une variété différente d'êtres humains, suprêmement fascinante, perçue dès cette époque comme "supérieure". Il m'a été possible, plus tard, d'identifier cette variété avec une certaine qualité d'être ou mieux, une élévation spirituelle particulière propre aux très grands physiciens et que mon Père partageait indubitablement, parmi ceux que j'ai connus personellement à la maison, avec N. Bohr, P. Dirac, H. Yukawa par exemple.

Avant d'en terminer avec cette phase de son existence, il faut aussi signaler que mon Père était devenu Secrétaire de la Société Française des Electriciens et Secrétaire de la Conférence Internationale des Grands Réseaux Electriques. Ce seront là les seules fonctions officiellement attribuées qu'il lui sera donné de tenir à titre tant soit peu permanent.

Marque particulière de sa célébrité, il est invité en 1939 à participer au Congrès Solvay, le plus fermé des cercles scientifiques où l'on n'est admis que sur invitation.

Eté 1939. C'est la mobilisation. Mais en matière de Défense Nationale, pas plus qu'à l'Education Nationale seize ans plus tôt, il n'est reconnu d'équivalence. Pas même lorsque le grade de Sous Lieutenant a été mérité sur le front roumain au cours de la 1ère guerre mondiale. Mon Père rempoche son brevet de Sous Lieutenant et ressort du bureau de mobilisation simple soldat ... de deuxième classe, il est vrai. Il sera envoyé à Clermont Ferrand.

Cette période ne dure que peu de temps. A Paris on s'est aperçu du gâchis: On fait valoir qu'un spécialiste des Equations de Maxwell peut être mieux employé aux Transmissions. Pratiquement, et pour une brève période, mon Père sera Ingénieur en Chef à la Radiodiffusion Française.

L'armistice nous trouve à Toulouse où un certain nombre de services gouvernementaux avaient été transférés. Prenant ensuite une courageuse décision, mon Père décide de retourner à Paris. Pour la deuxième fois de sa vie il se retrouve en zone occupée.

Quelques travaux paraissent durant cette période de 1940 à 1943. Ils aboutissent à des modèles possibles de particules dont l'un retiendra particulièrement l'attention: celui d'un "électron" considéré comme un système non conservatif.

En 1943, des collègues portugais sont d'abord surpris puis intrigués de recevoir, à répétition, des correspondances de mon Père d'une banalité stupéfiante, au moins en apparence. Mais les collègues portugais, fins mathématiciens et amateurs - comme mon Père - de romans policiers ne tardent pas à comprendre comment il faut entendre ces lettres: En clair le message est que mon Père ne peut plus agir en France occupée et qu'il serait opportun de l'inviter au Portugal à effectuer une série de cours.

Dès lors les portugais se mettent en mouvement et, entre invitations formelles réitérées et visas de durée incompatibles, commence une chasse frénétique à la "fenêtre de lancement". Elle survient enfin et, après diverses péripéties où mon Père risque plusieurs fois la confiscation de ses papiers scientifiques quand ce n'est pas l'arrestation, nous finissons par arriver à Lisbonne au cours de l'été 1943.

Les cours auront lieu à l'Université de Pôrto et, pour la première fois de sa vie mon Père enseignera comme membre de la Faculté, aux côtés des professeurs portugais et amis Braga, Gomez, Sarmento de Beires, Fernando de Sà, Costa.

Par une exquise délicatesse, c'est à mon Père que revient l'honneur d'inaugurer le Séminaire de Physique Théorique et de professer les deux premières séances. Des 47 séances prévues au programme, il en assurera effectivement le quart.

Dans un très intéressant mémorandum, daté d'Avril 1944, mon Père, tout en faisant rapport sur les activités du Séminaire indique - avec sa discrétion coutumière - sa conception de l'enseignement de la physique théorique et suggère les voies à suivre pour l'année suivante. La lecture de ce document, surtout en corrélation avec un autre de même nature écrit après la guerre, donne irrésistiblement l'impression que c'est mon Père qui, en fait, a été l'âme de ces cours et a suggéré à ses collègues une méthode de réalisation.

C'est vers la fin de cette période - peut être l'une des plus heureuses de sa vie profesionnelle - que se manifestent les physiciens français partis en Amérique au début des hostilités ou bien ayant rejoint l'Angleterre lors de l'épopée de l'eau lourde ou en d'autres circonstances. La Royal Society de Londres et L'Amirauté Britannique lui proposent de contribuer à l'effort de guerre des Alliés.

Bien entendu, mon Père accepte. De ses activités en tant que Membre de la Mission Scientifique Française tout au long de notre séjour en Angleterre, mon Père n'a jamais rien dit car elles étaient couvertes par le secret militaire. Mais je sais qu'il considèrera comme de vraies "vacances" les rares fois où il pourra aller, avec nous, rendre visite à Dirac près d'Oxford.

Du point de vue scientifique, une seule note publiée dans Nature reprend l'aspect des particules fondamentales non conservatives.

En ce qui concerne ses recherches personnelles, le retour à Paris après la Libération marque le début d'une nouvelle orientation. Frappé par le fait qu'une bonne partie des équations relativistes pouvant représenter des particules élémentaires a été ignorée, mon Père entreprend une étude systématique des formes possibles où les opérateurs sont des spineurs et non plus des tenseurs. Il montre en particulier que l'on peut décomposer l'espace-temps en deux espaces spinoriels sous-jacents ou bien décomposer l'espace des moments.

Toutes les publications jusqu'en 1955 seront désormais consacrées à ces problèmes en examinant tour à tour divers aspects: suggestions concernant de nouvelles particules (1946); désintégrations mésoniques (1947-1948); transmutations de particules élémentaires avec ou sans changement de spin (1949-1951); théories à flèche de temps orientée dans un seul sens (1946); problèmes de "cut-off" (1951); particules de très grande vitesse (1955); interférences (1955); mécanique du point chargé et principes d'équivalence (1955).

Tout au long de cette suite de publications on remarque un souci de retour aux sources, d'approfondissement de la réflexion physique au niveau des fondements mêmes de la mécanique, au niveau de la nature du spin et de la charge électrique.

Corrélativement, il est nécessaire de mettre au point des outils mathématiques adaptés qui requièrent cependant une sûreté de main exceptionnelle à la création comme à l'usage. Et ici, où l'on ne sait s'il faut plus admirer la finesse de la réflexion physique ou l'habileté mathématique, il n'est peut être pas exagéré de faire un parallèle entre les grands chorals de Leipzig dûs à J.S. Bach - auxquels on pourrait faire correspondre les "Equations de Proca" - et l'Art de la Fugue - auquel les travaux de cette dernière période font penser invinciblement jusque dans leur incomplétude tragique.

Travaillant à l'extrême frontière de la pensée physique, il n'est guère étonnant que le nombre des publications de cette dernière période soit apparemment réduit - une dizaine en tout.

C'est que mon Père se refusait absolument à publier tant qu'il n'avait pas tout vérifié. Non seulement la matière était ardue (et même pour un esprit aussi délié que le sien il arrive que l'on tâtonne) mais encore il considérait comme un devoir absolu de probité de ne pas risquer, par négligence, d'induire en erreur ceux qui, après lui, utiliseraient ses résultats de bonne foi.

D'où son mécontentement, en particulier, pour une publication "sabotée" - au Journal de Physique (sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. J.Phys.Rad. Serie VII, Vol VII, No.8, p347-353, Août 1936) dont la version corrigée est reproduite ailleurs dans cet ouvrage commémoratif.

D'où des milliers de pages - et combien de temps - consacrées à la vérification point par point de la cohérence et de l'exactitude sous tous aspects de ce qu'il affirmait.

Encore ne s'agissait-il pas seulement de vérifier "a posteriori". Ce souci intervenait à tout moment.

Une facette d'un travail (je ne dis même pas une publication) débutait en général par quelques pages de texte pur, exemptes de toute formule mathématique, où mon Père définissait la tâche, indiquait quel devrait normalement en être le résultat et esquissait la méthode qu'il entendait suivre. Il en découlait ensuite page après page de calculs pas à pas virtuellement dénués du moindre texte. A chaque étape, la vérification. On peut dire, sous une forme un tant soit peu paradoxale, qu'il trouvait d'abord et cherchait ensuite.

Ce même souci de perfection se retrouve dans la rédaction des textes à publier où l'on remarque toujours le soin mis à expliquer clairement et de manière non ambigue ce qui est énoncé. Plus précieux encore, les transitions délicates sont toujours explicitées que ce soit au niveau du raisonnement physique ou à celui des transformations mathématiques.

Au plan humain, le retour d'Angleterre correspond à un choc profond reçu quand il a repris contact avec la jeunesse scientifique française. Des fibres anciennes ont vibré qui n'avaient peut être plus résonné depuis 1918, depuis la "lettre aux jeunes". Il perçoit le contraste saisissant entre le potentiel des jeunes chercheurs français et l'avance prise ailleurs en recherches physiques en seulement quelques années. Dès lors, il n'est PAS possible de laisser cette jeunesse s'enliser; il n'est PAS permis que les physiciens "à l'étranger" continuent à porter des jugements sévères sur le niveau des travaux français sans réagir vigoureusement et cela, même si l'on n'est pas titulaire d'un poste clef ... mais simple Directeur de Recherches ayant à peine accédé à ce grade.

De cet impératif moral naît le "Séminaire Proca". De 1946 à 1955 il contribuera à former, à faire connaître, à "mettre en selle" une fraction non négligeable de ceux qui, au cours des trente ans révolus depuis la disparition de mon Père, ont été amenés à professer, à guider, à forger la physique française.

Pour être éclairé sur les buts, le recrutement, les méthodes de travail du Séminaire, il suffit de méditer le mémorandum adressé par mon Père, en 1954, au Professeur Gaston Dupouy alors Directeur Général du CNRS. Il est intéressant de le comparer avec celui, rédigé au Portugal, dix ans auparavant.

Ce qui frappe dès l'abord c'est que, contrairement à la tendance traditionnelle française, mon Père fait porter ses efforts sur "le souci constant d'intégrer les travailleurs du Séminaire dans la grande famille internationale des physiciens théoriciens".

Son crédit personnel auprès de nombreux scientifiques, l'amitié que beaucoup lui portaient, font que l'on voit soudain apparaître au Séminaire Proca la fine fleur de la physique contemporaine. La liste en est éloquente: Born, Dirac, Hamilton, Heitler, Kaellen, Von Karman, London, Moeller, Ozaki, Pauli, Peierls, Pend, Rabi, Racah, Riesz, Rosenfeld, Tomonaga, Van Hove, Weisskopf, Wouthuysen, Yukawa.

A titre posthume s'y ajouteront Bethe et Wheeler.

Mais à côté des célébrités consacrées, une large place était faite aussi à de "jeunes" étrangers. C'est ainsi que Aage Bohr, Araki, Demeur, Géhéniau, Flowers, Fubini, Matthews, Moshinski, Pryce, Salam, Umezawa, entre autres feront une ou plusieurs conférences au Séminaire Proca.

Est-ce à dire que mon Père avait constitué un forum où l'estrade serait exclusivement réservée aux étrangers? En aucune façon. Les personalités scientifiques françaises actuelles, qui à un titre ou un autre firent une ou plusieurs conférences au Séminaire Proca sont à titre d'exemple non exhaustif - Abragam, Bloch, Costa de Beauregard, d'Espagnat, Horowitz, Jean, Jouvet, Lévy, Leprince Ringuet, Marty, Michel, Messiah, Meyer, Perrin, Nataf, Schatzmann, Schwartz, Trocheris, Yvon ....

Plus préciseméent encore, un certain nombre d'étudiants du Séminaire Proca ont décidé de préparer leur thèse de Doctorat sous la direction de mon Père. J'ai retrouvé dans la bibliothèque celles de Prentki - ultérieurement Professeur au Collège de France - ; de Jouvet, Jean, Nataf, Madame Benoist - ultérieurement

Professeurs à la Faculté des Sciences - ; de Fabre, Rideau, Visconti qui ont suivi d'autres voies. Il se peut qu'il y en ait d'autres dont la trace m'échappe.

D'autres caractéristiques du Séminaire Proca sont tout aussi fondamentales. Il s'agit de sortir la physique française de l'isolement où les vicissitudes de la guerre - certes - mais aussi un certain claustrophobisme l'avaient plongée. Fait sans précédent, mon Père organise, en 1948, une participation massive des étudiants du Séminaire à la première conférence internationale de Physique théorique après la guerre, à Birmingham. Une dizaine d'étudiants - tous inconnus à l'époque - l'y accompagnent. Ils furent les seuls représentants de la France à ce congrès.

Quelques années plus tard, en 1954, à Glasgow on peut mesurer la portée de cette initiative: 17 français présents dont 9 du Séminaire.

Ce n'est pas tout. Mon Père a pu mesurer personnellement l'enrichissement inestimable qui résulte d'un séjour à l'étranger auprès de savants de valeur: c'est très exactement pour cela qu'il est venu en France 23 ans auparavant, qu'il a travaillé avec Bohr et Schroedinger. Il serait inconcevable que ses "poulains" du Séminaire soient privés d'opportunités similaires.

Et c'est pourquoi, mettant à nouveau son crédit scientifique au service des jeunes physiciens, dès 1948, il frappe à toutes les portes pour obtenir des crédits destinés à leur permettre de passer quelque temps en particulier auprès de M. Born (Edimbourg); N.Bohr (Copenhague); N. Rosenfeld (Manchester); W.Pauli (Suisse).

En 1953-54, la qualité des travaux produits par les étudiants du Séminaire est reconnue d'un niveau tel que ce sont les laboratoires étrangers qui vont commencer à s'adresser à mon Père pour le prier de "détacher" un de ses disciples....

Enfin, et pour la première fois, le Japon fait un pas décisif: sur invitation du Centre National de la Recherche Scientifique il envoie le Professeur Araki, de l'Université de Kyoto, pour un an auprès du Séminaire Proca. Ce devait être - après les "chercheurs d'échange" - le premier élément de la mise en place du "Professorat d'échange". La disparition prématurée de mon Père empèchera sa mise en oeuvre.

On le voit, le Séminaire Proca a rempli un rôle important, celui de catalyseur. Il a permis de regrouper des efforts qui autrement auraient été emmiettés. Il a contribué à renouveler la physique théorique française et lui redonner une place de premier plan au niveau international - le seul qui compte réellement - en commencant par une remise à niveau au plan européen.

Tout cela est l'oeuvre d'un homme seul qui ne pouvait compter que sur ses efforts personnels et la compréhension, l'appui financier, du CNRS, de la Direction des Affaires Culturelles au Ministère des Affaires Etrangères, de la Commission de l'Energie Atomique. Il ne pouvait utiliser les leviers institutionnels car il n'était titulaire d'aucune chaire, d'aucun poste clef. Il n'avait aucun budget jusqu'en 1954. Le Séminaire Proca est toujours resté - malheureusement - une initiative privée, à caractère quasi artisanal, et qui n'était en aucune manière requise de façon explicite par le mandat de Directeur de Recherches.

Ce Séminaire, où se tient-il? A l'Institut Henri Poincaré car c'est le seul endroit où mon Père puisse le tenir (il n'a pas d'autre lieu qui lui soit disponible car il n'a pas d'autre plateforme institutionnelle que son grade de Directeur de Recherches). C'est aussi l'unique endroit où il soit logique de tenir ce genre de Séminaire en raison de la vocation originelle de l'Institut.

Un seul problème, mais de taille: Au même lieu, L. de Broglie lui aussi tient un séminaire; depuis 1932 pour être précis. Et il arrive que certains jeunes qui suivent ou suivaient le séminaire de Broglie participent aussi au Séminaire Proca! Quand, de plus, le dit Séminaire Proca prend une orientation internationale et réussit alors que celui de L. de Broglie semble plutôt tourné vers la France seule, ce n'est plus de la simple "violation de territoire" mais apparemment une véritable provocation.

Un petit fait montre combien la situation est tendue. Jacques Prentki - qui deviendra plus tard professeur au Collège de France - a préparé sa thèse de Doctorat en s'appuyant sur le soutien qu'il trouve au Séminaire Proca et tout particulièrement son animateur. Lorsque le Jury est constitué, Président L. de Broglie, Prentki constate que Alexandre Proca ne figure pas parmi les examinateurs. On a fait brutalement jouer le fait que mon Père n'était pas Professeur titulaire à la Faculté des Sciences. Pour être administrativement exact, ce n'en est pas moins une vilenie. Il faudra tout le courage moral de Jacques Prentki - d'origine polonaise - et sa menace de ne pas soutenir sa thèse en l'absence de Alexandre Proca pour que l'on consente, du bout des lèvres, à se souvenir qu'un Jury peut comporter des membres invités.

En 1949, il y a une chaire de Physique vacante à la Sorbonne. Mon Père, tout naturellement se porte candidat, à la grande joie de tout un groupe de scientifiques parmi lesquels on compte nombre de Professeurs de la Faculté des Sciences. En effet, Alexandre Proca est le candidat "idéal".

Par souci de courtoisie - et pour ne pas manquer à la tradition - mon Père entreprend la série normale de visites protocolaires auxquelles l'on s'attend de la part d'un impétrant....

Il ne sera pas nommé Professeur. A sa place c'est J.L. Destouches qui obtient le poste car L. de Broglie est intervenu personnellement en sa faveur (c'était un de ses fervents disciples) auprès des mêmes électeurs et avec une insistance particulière auprès des électeurs "littéraires" a peine a-t-il eu vent que "Proca fait ses visites".

A l'Etranger c'est la stupeur. Personne ne peut comprendre. Les savants et amis écrivent, regrettent, demandent discrètement dans leurs lettres ce qui a bien pu se passer. Et mon Père se tait. Ce n'est qu'à ma Mère et à moi, son seul noyau familial, qu'il consentira à expliquer: De Broglie ne veut pas qu'il devienne Professeur à la Sorbonne.

Ce fut un coup rude...car il découvre soudain une autre face des gens. Une multitude de "petits faits" lui revient en mémoire, de "petites phrases" et de phrases petites.... Se pourrait-il que lui, si fin observateur de l'univers physique, se soit à ce point trompé sur l'humanité?

La révélation de la triste réalité - qu'elle se nomme chauvinisme ou ostracisme à l'égard d'un étranger (car un français naturalisé, apparemment, n'est pas un Français) - vient brutalement en 1950. C'est la Chaire de Léon Brillouin au Collège de France qui est devenue vacante. La chaire porte le titre de "Théories Physiques".

A nouveau, nombreux sont ceux qui pensent que Alexandre Proca est le seul candidat possible - à condition que la dénomination de la chaire soit conservée. En effet, en vertu d'une longue tradition du Collège de France toute Chaire est, à chaque fois, créée nouvellement en vue d'un candidat désigné.

Des actions sont prises dès la candidature officielle de mon Père, en Janvier 1950, pour assurer le maintien de la dénomination "Théories Physiques". Elles sont couronnées de succès par un vote du Collège des Professeurs. La nomination officielle de mon Père - qui doit faire l'objet d'un second vote - ne devrait pas poser, dès lors, de question. C'est du moins le sentiment général.

Mais des forces contraires se mettent à l'oeuvre, les mêmes qui avaient barré la voie de la Sorbonne.

Cela commence par des "suggestions" faites à des physiciens - non nécessairement théoriciens - de se porter candidats sans leur mentionner celle de mon Père: au nom des formes il faut à tout prix éviter une candidature unique. Certains, toutefois, qui avaient accepté en un premier temps, se récuseront en apprenant que mon Père est sur les rangs. Ils téléphoneront même à la maison pour s'excuser de s'être, par ignorance, présentés contre lui.

Cela continue par une étrange campagne électorale visant à convaincre les Professeurs - ceux là même qui avaient voté la re-création d'une Chaire de Théories Physiques - de "glisser" en faveur d'un candidat non plus théoricien pur mais mieux connu pour ses travaux en Physique expérimentale que pour sa contribution à la Physique Théorique.

Cela va même jusqu'à faire état, au jour du scrutin de nomination, d'une lettre émanant d'un futur Prix Nobel anglais ami de mon Père et où certains passages - pris isolément - pouvaient s'entendre comme un appui au candidat principal adverse J. Laval plutôt qu'un soutien à mon Père. Or son auteur ne savait même pas qu'il s'agissait de nommer un successeur à L. Brillouin mais croyait - parce qu'il ne pouvait voir comment on pouvait associer les candidatures de Laval et Proca pour un même poste - qu'il s'agissait d'une Chaire de Physique générale !

Tout cela peut paraître fantastique. Les faits sont hélas documentés et des témoins oculaires de la séance d'élection sont encore en vie.

Quand on ajoute que tous les candidats présentés en barrage à mon Père (J. Laval, Mme M.A. Tonnelat, G. Petiau) étaient "du groupe de De Broglie" de même que le falot personnage qui joua le rôle de chef d'orchestre au Collège de France pour cette peu reluisante opération, on a tout dit.

J. Laval emportera le vote décisif. Par la volonté de L. de Broglie, mon Père ne sera pas, non plus, Professeur au Collège de France.

C'est l'effondrement. Une terrible détresse morale serre la gorge de mon Père.

Ce qui le brise, c'est cette incompréhensible malignité orientée vers un but précis: l'empêcher de rayonner, de faire du bien de manière honorable et digne, de faire progresser l'humanité en ce qu'elle a de plus noble et qui devrait - de ce fait - être au dessus des petitesses humaines: la soif de comprendre la nature et l'essence de l'univers.

Ce qui augmente sa souffrance, c'est cette effroyable constatation que génie scientifique et rectitude ne vont pas nécessairement de pair.

Ce qui l'attriste, c'est que l'on puisse s'abaisser moralement et user d'expédients pour neutraliser un adversaire (ou rival?) Si encore cela était fait avec élégance......

Ce qui le foudroie - et j'emploie le mot en son sens le plus fort, son sens originel - c'est l'amer constat que cette assemblée lui a jeté à la face, comme un soufflet, le peu de cas qu'elle faisait de tout ce pour quoi il a vécu, l'a bafoué dans ce qui est le moteur de son existence; en un mot cette assemblée n'a même pas su ou voulu respecter son travail.

Héroiquement, mon Père, à nouveau, ne dira rien. Le seul commentaire qui lui ait échappé après avoir reposé le téléphone quand le verdict lui fut donnę a été "même pas au second tour"..Après quoi il se murera dans un silence délibéré sur tout ce qui touche à cette lamentable situation.

Il écrira toutefois diverses lettres. Depuis les Etats-Unis, le commentaire de L. Brillouin claque comme un coup de fouet:

"L'histoire du Collège est scandaleuse ! Ces intrigues personnelles et politiques dans la France d'après guerre me révoltent et m'indignent. Vraiment, le visage du pays ne se reconnait plus sous ces masques grimaçants."

Ma Mère et moi percevons bien qu'un ressort, un ressort vital, est brisé. L'enthousiasme est mort. Tout ce que mon Père fera par la suite sera fait par devoir et pour ne pas faillir à rester cohérent avec les valeurs spirituelles qui ont modelé sa vie.

Ce n'est, hélas, pas seulement l'enthousiasme qui est mort: les défenses de l'organisme cèdent. Sa santé s'altère. De manière incontrôlable sa gorge se serre douloureusment le rendant aphone. En 1953 on diagnostiquera un néoplasme du larynx qui l'emportera en 1955.

Il n'y a jamais eu aucun doute pour nous que la maladie en question a été déclenchée par les événements que je viens de rappeler. Une sorte de bombe à retardement, d'autant plus cruelle qu'il y a eu des circonstances - après le drame - où mon Père a été amené à jouer un rôle plus officiel. C'est ainsi qu'en cette même année 1950, il est officiellement chargé, en co-responsabilité avec P. Auger, d'organiser le Colloque de Physique Théorique du C.N.R.S. auquel prendront part plus de 150 physiciens dont 82 provenant de 14 pays étrangers.

C'est ainsi qu'en 1951 il a été Délégué de la France à l'Assemblée Générale de l'Union Internationale de Physique. En 1952 il assistera aux cérémonies du centenaire du Laboratoire Kamerlingh Onnes à Leyde et fera une tournée de conférences en Angleterre: Cambridge, Manchester, Birmingham. Son dernier voyage à l'étranger sera pour Dublin en 1954.

C'est aussi la période où s'amorcent les discussions pour l'étude d'un "Laboratoire International" qui deviendra le CERN à Genève. Mon Père pourra assister - comme "observateur" - à la deuxième session du "Conseil des Représentants pour l'étude d'un Laboratoire International".

Il est intéressant de remarquer que, dès 1954, les deux seuls physiciens théoriciens français à avoir été engagés au CERN sont des "anciens" du Séminaire Proca. Un troisième "ancien" sera engagé plus tard.

Déjà trop gravement malade, mon Père ne pourra se rendre à Genève pour une ultérieure Séance du Conseil. Je sais qu'il en a éprouvé beaucoup de chagrin.

En fait il a déjà subi, en 1953, une intervention chirurgicale. En 1954 il faudra procéder à l'ablation totale des cordes vocales. En Octobre 1955 c'est l'hospitalisation à long terme au cours de laquelle il faudra pratiquer une trachéotomie d'urgence.

Dans ces conditions, on se demande par quel miracle d'énergie il trouve la force de faire fonctionner le Séminaire tout au long de l'année 1954-55, de préparer l'année suivante, d'écrire les derniers articles publiés sous sa signature. Ils datent du 18 Octobre 1955, peu de jours avant son hospitalisation.

Après, il a aussi trouvé la force de faire deux sorties. La première pour aller, avec mon Mère, dans le petit jardin adjacent à l'Institut du Radium. La seconde fut pour l'ouverture du Séminaire 1955-56.

Ce fut Edmond Arnous qui lut le texte préparé (quand?) pour accueillir le Professeur Heitler. Et il faudrait le génie d'un Michel Ange pour représenter l'adieu muet de mon Père à Heitler depuis la porte, un signe discret qui souhaite bonne chance tout à la fois dans l'immédiat et "in aeternum". Et Heitler, sans s'interrompre, reçoit le message, comprend tout, et d'un inimitable mouvement de la main renvoie "Bonne chance à toi, ami. Merci. A très bientôt....ailleurs".

La dernière synthèse dans ce temps est accomplie. Alpha et Oméga des lieux de sa vie scientifique de découvreur, l'Institut du Radium et l'Institut Henri Poincaré ont désormais reçu leur congé. Proca s'en va. Délibérément il s'en va. Ce n'est pas la matière et ses ondes qui ont triomphé mais bien l'esprit. Cet esprit qui concevait l'espace-temps comme discontinu.

Discontinuité: 13 Décembre 1955.

OEUVRE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE

I. RELATIVITE; MECANIQUE QUANTIQUE GENERALE

Principiul Relativitatei.
Bul.Soc.Politec.din Romania.
Vol XXXIV, No.7-8, p453-472; Jul-Aug 1920
Vol XXXIV, No.11-12, p868-885; Nov-Dec 1920

Teoria Generalà a Relativitatei.
Bul.Soc Politec.din Romania.
Vol XXXVI, No.10-12, p483-513; Oct-Dec 1922
Vol XXXVII, No.4-6, p132-158; Apr-Jun 1923

Interférences des Quantas de Lumière.
J.Phys.Rad.; Vol.IX, Ser.VI, No.2, p.73-80; Feb 1928

Quelques Réflexions sur les Fondements de la Dynamique.
La Cinquième Dimension.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.186, p739-741; Mar 19, 1928

Autres Réflexions sur la Dynamique. Interférences.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.186, p1097-1100; Apr 23, 1928

Sur la Théorie des Quantas de Lumière.
Coll.Suggestions Scientifiques; No.2, p1-96; 1928
Librairie Scientifique Albert Blanchard Ed.

Sur une Extension de la Notion de Probabilité.
Bul.Soc.Stiinte (Cluj); Vol.IV, p362-364; Dec 5, 1928
et
Matematica (Cluj); Vol.2, p22-24; 1929

L'Equation de Schroedinger et l'Energétique.
J.Phys.Rad.; Vol.X, Ser.VI, No.1, p1-14; Jan 1929

La Nouvelle Théorie d'Einstein.
Bull.Math.Phys. pures et Appliquées; Ecole Polytechnique Bucarest; Vol.II, No.1, p   ; 1930

Les Crochets de Poisson en Mécanique Classique.
Appendice à la traduction française de:
Les Principes de la Mécanique Quantique.
Dirac P.A.M.; Documentation sur la Physique;
Vol.21, p302-310; 1931; Presses Universitaires de France.
(Traduction assurée par A.Proca et J.Ullmo)

Sur un Article de M.E.Whittaker, F.R.S. intitulé:
"les Relations entre le Calcul Tensoriel et le Calcul des Spineurs".
J.Phys.Rad.; Vol.VIII, Ser.VII, No.9, p363-365,
Sept 1937

II. THEORIE DE L'ELECTRON

Sur l'Equation de Dirac.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.190, p1377-1379; Jun 16, 1930

Sur l'Equation de Dirac. Les 16 Composantes
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.191, p26-27; Jun 30, 1930

Sur l'Equation de Dirac.
J.Phys.Rad.; Ser.VII, Vol.I, No.7, p235-248;
Jul 1930

Intégrales Premières de l'Equation de Dirac.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.193, p642-645; Oct 19, 1931

Sur une Nouvelle Caractéristique de l'Electron de Dirac.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.194, p691-693; Feb 22, 1932

Sur les Grandeurs Caractéristiques de l'Electron de Dirac.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.194, p836-838; Mar 7, 1932

Sur l'Interprétation de l'Opérateur x de Dirac.
Bull.Math.Phys.Pures et Appliquées; Ecole Polytechnique
Bucarest; Vol.II, No.3, Fasc.6, p185-190; 1931-1932

Quelques Observations concernant un Article Intitulé: "Sur l'Equation de Dirac".
J.Phys.Rad.; Vol.III, Ser.VII, no.4, p172-184;
Apr 1932

Sur la Théorie Relativiste de l'Electron de Dirac dans un Champ Nul.
Annales de Physique; Vol.XX, Ser.X, p347-440;
Nov 1933
(Thèse de Doctorat).

Sur la Définition du Champ Electromagnétique par des Potentiels et le Moment Magnétique de l'Electron.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.202, p641-642; Feb 24, 1936

Sur les Equations de Maxwell et le Moment Magnétique de L'Electron.
Soc.Française des Radioélectriciens. Congrès Annuel, 6eme Section; May 5, 1936

III. THEORIE DU PHOTON

Sur la Théorie du Rayonnement.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.193, p832-834; Nov 3, 1931

Sur une Explication Possible de la Différence de Masse entre le Proton et l'Electron.
J.Phys.Rad.; Vol.III, Ser.VII, No.2, p83-101; Feb 1932

Sur les Solutions des Equations de Maxwell pour le Vide.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.197, p1725-1727; Dec 26, 1933

Sur la Mécanique Quantique des Photons.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.198, p54-56; Jan 3, 1934

Mécanique Quantique des Photons. Approximation de Pauli.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.198, p452-454; Jan 15, 1934

Ondes et Photons. I. Approximation de Schroedinger.
J.Phys.Rad.; Vol.V, Ser. VII, No.1, p6-19; Jan 1934

Ondes et Photons. II. Approximation de Pauli.
J.Phys.Rad.; Vol.V, Ser. VII, No.3, p121-125; Mar 1934

Ondes et Photons. III. Approximation de Dirac.
J.Phys.Rad.; Vol.V, Ser. VII, No.4, p157-166; Avr 1934

Sur les particules qu'on peut Associer à la Propagation d'une Onde de Lumière.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.198, p643-645; Fev 12, 1934

IV. PARTICULES ET MESONS

Sur la Théorie du Positon.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.202, p1366-1368; Avr 20, 1936

Sur les Equations Fondamentales des Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.202, p1490-1492; Mai 4, 1936

Sur la Théorie Ondulatoire des Electrons Positifs et Négatifs.
J.Phys.Rad.; Vol.VII, Ser.VII, No.8, p347-353;
Aout 1936

Sur les Photons et les Particules "Charge Pure".
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.203, p709-710; Oct 19, 1936

Particules Libres. Photons et Particules "Charge Pure".
J.Phys.Rad.; Vol.VIII, Ser.VII, No.1, p23-28;
Jan 1937

Théorie Non Relativiste des Particules à Spin Entier.
J.Phys.Rad.; Vol.IX, Ser.VII, No.2, p61-66; Fev 1938

Equations d'Onde Approximatives pour des Particules à Spin Unité.
C.R.Acad.Sci.Roumanie; Vol.II, No.4, p356-359;
Mar 11, 1938

Sur une Equation Symbolique groupant les Equations du Mésoton (Electron Lourd), celles de Kemmer, de Klein-Gordon et les Equations du Photon de L.de Broglie.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.207, p1182-1183;
Dec 12, 1938

Sur la Masse du Mésoton et des Autres Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.208, p884-885; Mar 20, 1939
(en collaboration avec S. Goudsmit).

Sur la Longueur Fondamentale Attachée aux Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.208, p1074-1075; Avr 3, 1939

Sur la Masse des Particules Elémentaires.
J.Phys.Rad.; Vol.X, Ser.VII, No.5, p209-214; Mai 1939
(en collaboration avec S.Goudsmit).

Sur un Type de Particules Elémentaires dont Les Fonctions d'Onde Satisfont à l'Equation de Klein Gordon.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.210, p563-564; Avr 15, 1940

Intégrales Premières dans la Théorie du Mésoton.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.212, p669-671; Avr 21, 1941

Intégrales Premières du Mouvement du Mésoton.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.212, p751-753; Mai 5, 1941

Sur la Théorie des Particules Matérielles et en particulier Sur les Electrons de Spin 1/2.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.214, p606-607; Mar 23, 1942

Sur les Propriétés d'une Nouvelle Particule Elémentaire.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.216, p337-339; Mar 8, 1943

Sur un Nouveau Type d'Electron.
Portugaliae Physica; Vol.1, No.2, p59-66; Sept 1943

Non Conservative Fundamental Particles.
Nature; Vol.154, p674; Nov 25, 1944

V. MECANIQUE SPINORIELLE

Sur les Equations Relativistes des Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.223, p270-272; Aout 5, 1946

New Possible Equations for Fundamental Particles.
Phys.Soc.Cambridge; Conference Report; Cambridge Conference
on Fundamental Particles; p180; 1947

Sur la Transmutation des Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.228, p298-300; Jan 24, 1949

Transmutation des Particules Fondamentales. Changement de Spin.
J.Phys.Rad.; Vol.12, p123-130; Fev 1951

Sur l'Espace-Temps des Particules Fondamentales et les Espaces Spinoriels Sous-Jacents.
Bulletin Scientifique Roumain; Institut Universitaire Roumain Charles Ier; Vol.1, p18-24; 1952

Mécanique du Point.
J.Phys.Rad.; Vol.15, No.2, p65-72; Fev 1954

Quantification en Mécanique Spinorielle.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.238, p774-776; Fev 15, 1954

Particules de Très Grandes Vitesses en Mécanique Spinorielle.
Nuovo Cimento; Vol.2, Ser.X, No.5, p962-971;
Nov 1, 1955

Interférences en Mécanique Spinorielle.
Nuovo Cimento; Vol.2, Ser.X, No.5, p972-979;
Nov 1, 1955

Sur la Mécanique Spinorielle du Point Chargé.
J.Phys.Rad.; Vol.17, No.2, p81-82; Fev 1956

Sur un Nouveau Principe d'Equivalence Suggéré par les Mécaniques Spinorielles.
J.Phys.Rad.; Vol.17, No.2, p83-84; Fev 1956

VI. TEXTES DIVERS

Sur les Rayons B Lents du Mésothorium.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.183, p878-880; Nov 15, 1926

De la Boule Atomique à la Centrale d'Energie.
Cosmos; Vol.1, No.3, p28-29; Nov 2, 1945

Les Conséquences Philosophiques de la Théorie des Quantas.
Conférence prononcée au Collège Philosophique, Paris; 1948

Commentaire sur les Théories récentes de Mr.L.de Broglie.
Atomes; Vol.4, No.45, p433; Dec 1949

Le Temps Discontinu (inédit; 1929 ?)

La Notion de Temps en Physique Théorique.
Conférence prononcée au Collège Philosophique, Paris; 1949

L'Aspect Physique du Problème de l'Origine de la Vie.
Conférence prononcée au Collège Philosophique, Paris; 1950

Paul Langevin. Notice Nécrologique.

Ce que nous devons à Einstein.
Le Figaro Littéraire; Avr 23, 1955

VII. DOCUMENTS ADDITIONNELS

Scrisoarea catre Tineri.
DACIA; p1, Dec 20, 1918.

Mémorandum concernant l'activité du Séminaire de Physique Théorique pendant l'année 1943-1944.
Université de Pôrto, Faculté des Sciences.
Avril 24, 1944.

Mémorandum: Le Séminaire de Physique Théorique du CNRS.
Paris, Novembre 1954.

TRADUCTIONS

Les Principes de la Mécanique Quantique.
DIRAC, P.A.M.
Documentation sur la Physique; Vol.21
Presses Universitaires de France; 1931
(translated jointly with J. ULLMO)

Mémoires sur la Mécanique Ondulatoire.
SCHROEDINGER, E.
Librairie Félix Alcan; 1933

Les Fondements Mathématiques de la Mécanique Quantique.
Von NEUMANN, J.
Librairie Félix Alcan; 1946

I

Relativité

Mécanique Quantique Générale

I. RELATIVITE; MECANIQUE QUANTIQUE GENERALE

I.1 Principiul Relativitatei.
Bul.Soc.Politec.din Romania.
Vol XXXIV, No.7-8, p453-472; Jul-Aug 1920
Vol XXXIV, No.11-12, p868-885; Nov-Dec 1920

I.2 Traduction française correspondante.

I.3 Teoria Generalà a Relativitatei.
Bul.Soc Politec.din Romania.
Vol XXXVI, No.10-12, p483-513; Oct-Dec 1922
Vol XXXVII, No.4-6, p132-158; Apr-Jun 1923

I.4 Traduction française correspondante.

I.5 Interférences des Quantas de Lumière.
J.Phys.Rad.; Vol.IX, Ser.VI, No.2, p.73-80; Feb 1928

I.6 Quelques Réflexions sur les Fondements de la Dynamique.
La Cinquième Dimension.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.186, p739-741; Mar 19, 1928

I.7 Autres Réflexions sur la Dynamique. Interférences.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.186, p1097-1100; Apr 23, 1928

I.8 Sur la Théorie des Quantas de Lumière.
Coll.Suggestions Scientifiques; No.2, p1-96; 1928
Librairie Scientifique Albert Blanchard Ed.

I.9 Sur une Extension de la Notion de Probabilité.
Bul.Soc.Stiinte (Cluj); Vol.IV, p362-364; Dec 5, 1928
et
Matematica (Cluj); Vol.2, p22-24; 1929

I.10 La Mécanique Nouvelle (inédit ?).

I.11 L'Equation de Schroedinger et l'Energétique.
J.Phys.Rad.; Vol.X, Ser.VI, No.1, p1-14; Jan 1929

I.12 La Nouvelle Théorie d'Einstein.
Bull.Math.Phys. pures et Appliquées; Ecole Polytechnique Bucarest; Vol.II, No.1, p ; 1930

I.13 Les Crochets de Poisson en Mécanique Classique.
Appendice à la traduction française de:
Les Principes de la Mécanique Quantique.
Dirac P.A.M.; Documentation sur la Physique; Vol.21, p302-310; 1931; Presses Universitaires de France.
(Traduction assurée par A.Proca et J.Ullmo)

I.14 Sur un Article de M.E.Whittaker, F.R.S. intitulé: "les Relations entre le Calcul Tensoriel et le Calcul des Spineurs".
J.Phys.Rad.; Vol.VIII, Ser.VII, No.9, p363-365, Sept 1937

Principiul relativității

Conferință ținută la Școala Politecnică la 3 Iulie 1920

ALEX. PROCA
Elev în anul II al Școalei Politecnice

In vremurile acestea de revoluțiuni pe toate tărâmurile, de schimburi și prefaceri totale, nici știința nu a rămas mai în urmă.

Actualmente întreaga știință suferă și ea o prefacere radicală, care prin amploarea ei, prin varietatea domeniilor pe care le interesează, prin noutatea concepțiilor la care ne conduce, apare ca o revoluțiune, comparabilă cu puține altele din trecut, care preface unele din cunoștințele noastre actuale, înlătură cu totul altele, căutând să ne impue o nouă concepție a lumii exterioare, căutând să ne impue noi principii directoare în studiul ei.

Această revoluțiune a fost provocată de descoperirea unei legi absolut generale, pusă în adevărata ei lumină pentru întâia oară în 1905 de către *Albert Einstein*, profesor, întâi la Polytechnicum din Zurich și actualmente director al unui Institut de cercetări fizice din Berlin, lege care a fost numită de ei *principiul relativității.*

Influența pe care aceste cercetări au avut-o, nu numai asupra domeniului special din care au luat naștere, dar și asupra tuturor ramurilor științei, se poate explică până la un oarecare punct, cercetând cu deamănuntul caracteristicile acestui principiu, în comparație cu acele ale altor legi generale admise astăzi în știința.

De pildă să luăm principiul conservării energiei; el constitue una din cele mai generale legi: e aplicabil tuturor fenomenelor; *Ostwald* l'a extins până în ultimele limite ale domeniului lui de existență; dar aci, în psihologie, în filosofie, etc..., legea conservării energiei nu ne mai dă nimic nou, nu ne poate mai [illegible] întru nimic cunoştinţele noastre actuale, căci în aceste domenii, astăzi, pentru ca o lege să fie absolut generală, ea trebue să fie pur calitativă (de ex. de tipul principiului lui *Carnot*).

Nu tot aşa e cu principiul relativităţii; acesta ne dă relaţi şi legi cantitative extrem de fecunde, pe care le leagă intim cu o lege generală calitativă; reunind astfel laolaltă însuşirile deosebite ale celor două principii amintite mai sus şi mărindu-şi astfel domeniul în care el se poate aplicà; şi această consideraţie vă poate face să vă daţi seama, şi mai bine, de imensa sa influenţă, de importanţa sa considerabilă şi de adevărata revoluţie pe care ar produce-o acceptarea integrală a acestui principiu fundamental.

Principiul relativităţii domină în primul rând toată aşa numita filozofie naturală, reînnoind-o în unele puncte, completând-o, uneori dărâmând discipline întregi, cum e cazul cu mecanica raţională, şi aducând uneori rezultate noi din cele mai paradoxale, pe care de multe ori însă le verifică experienţa. Suntem în momentul deosebit de important în istoria lumii, când se clădesc temelii noi, când se forjează instrumenţe mai perfecţionate pentru o ştiinţă viitoare, mai coprinzătoare decât cea de azi. Dar spre deosebire de alte cazuri, aci nu e numai atât; principiul relativităţii are şi un aport filozofic, metafizic, imediat utilizabil, care este poate şi cel mai important, căci el a provocat de fapt toată schimbarea la care asistăm azi. Trecând peste graniţele ştiinţelor exacte principiul relativităţii intervine în însăşi cugetarea noastră pentru a ne sili să cercetăm din nou datele primitive ale experienţei, să abandonăm unele noţiuni, să creăm altele, să prefacem într'un cuvânt felul nostru de a gândi. Şi, din acest punct de vedere, studiul în sine al unui astfel de principiu aplicabil fenomenelor cugetărei omeneşti, poate aveà o influenţă considerabilă asupra acestei cugetări însăşi.

Intr'adevăr, în enunţul său cel mai simplist principiul relativităţii spune că: *toate sunt relative*. Adevăr banal, evident, — veţi zice — îl invocăm de atâtea ori în raţionamentele, în discuţiunile noastre. Aşa e; şi totuşi dacă le am cerceta cu mai multă atenţie am constata cât de puţin suntem pătrunşi de adevărul acestei afirmaţiuni, de atâtea ori repetată, cât de mult absolut [illegible] în concepţiile, în raţionamentele, în judecăţile [illegible]
[illegible] acceptarea *integrală* [illegible]

relativităţei? Ar însemna pur şi simplu, din acest punct de vedere, eliminarea oricărui absolut din concepţiile noastre, adică o prefacere radicală a felului nostru de a gândi; şi ori care ar fi atitudinea cugetării omeneşti in faţa acestei probleme, de aci înainte, fapt e că principiul a pus această problemă, care îşi aşteaptă soluţia sa într'un fel sau altul.

Mai mult, dela început principiul relativităţii atacă două din noţiunile fundamentale fără de care nu ne putem închipui fenomene, spaţiul şi timpul; el arată că ideea pe care ne-o facem astăzi despre spaţiu şi timp este eronată şi că ea trebue modificată în sensul unei contopiri a celor două noţiuni, privite până acum ca independente şi ireductibile, într'una singură, care singură reprezintă o realitate fizică. Prin aceste consideraţiuni la care ajungem prin experienţă şi raţionament, realitatea ne pune în faţa unei probleme metafizice a cărei soluţie atârnă de acceptarea sau de respingerea principiului relativităţii.

Pentru e exprima în mod sugestiv progresul de ordin filozofic datorit principiului relativităţii, un profesor al Universităţii din Geneva [1]) clasează diversele ştiinţe după numărul de noţiuni primordiale ireductibile, cu care lucrează fiecare şi care după dânsul sunt în număr de şease; numărul, spaţiul, timpul, materia, viaţa şi cugetarea.

Pasul înainte realizat de principiul relativităţii constă în aceea că el reduce la cinci numărul acestor noţiuni primordiale independente, contopind într'una singură, timpul şi spaţiul; — dar în aceelaş timp am mai putea spune că, pentru prima oară în mod efectiv el indică posibilitatea unui studiu al anumitor probleme de ordin filozofic, — care să poată profita de cercetări precise făcute în domeniul ştiinţelor exacte, alcătuind un început de legătură între domeniile care sunt cercetate prin experienţă şi raţionament şi acelea pe care gândirea omenească le explorează numai prin intuiţie.

Cu dreptate poate scri atunci *Chwolson*: [2]) „Revoluţia pe care a provocat-o în vremea sa, înlocuirea concepţiei geocentrice a universului prin cea heliocentrică, este mică şi neînsemnată în comparaţie cu aceea la care trebuea să se aştepte omenirea, dacă recunoaşte în toată generalitatea lui principiul rela-

1. Ch. Eug. Guye.
2. Lehrbuch der Physik 4. Cap. 5 Vieweg

tivităţii, dacă se pătrunde de adevărul lui şi dacă il foloseşte ca piatră fundamentală pentru o nouă concepţie a lumii".

In cele ce urmează vom căuta să schiţăm în linii generale şi în fugă ideile fundamentale ale acestui principiu al relativităţii, fără a ne conduce după ordinea istorică ci urmărind a da numai o idee asupra concepţiilor fundamentale care formează temelia edificiului măreţ al teoriei relativităţii.

Vom cerceta în primul rând corelaţia dintre spaţiu şi timpul fizic de care am vorbit şi care formează una din cele mai geniale idei ale lui Einstein; vom trece apoi la exprimarea în limbaj precis a acestei corelaţii şi a principiului relativităţii după *Minkowsky*, rezultate de o extremă eleganţă şi de o mare însemnătate, deoarece au permis lui Einstein generalizarea formală a principiului său. Ne vom opri ceva mai puţin asupra consecinţelor trase din principiul relativităţii, — mai totdeauna paradoxale, — foarte importante, dar care nu intră în cadrul ideilor generale, pe care ni l'am impus, — pentru a trece la una din cele mai frumoase şi mai grele probleme: studiul fenomenului gravităţii şi de aci la generalizarea principiului relativităţii la principiul relativităţii universale, desigur cea mai vastă, cea mai îndrăzneaţă şi poate şi cea mai importantă din legile care guvernează universul nostru.

Principiul relativităţii răspunde in primul rând la întrebarea: „Există mişcare absolută, există timpul absolut, există spaţiul absolut?

Nu ne vom opri mai mult asupra sensului cuvântului „absolut" fiindcă discuţia ne-ar duce în alte domenii ale gândirii în care noţiunile sunt mai nebuloase, mai puţin precise decât în acele din care principiul relativităţii a luat naştere. Dar vom observa în treacăt că întrebarea de mai sus este cu totul echivalentă cu aceasta „Există mişcarea în sine?"; există timpul în sine independent de alte împrejurări?; există spaţiul in sine? Şi vedeţi cum dela început prin natura problemei speciale pe care işi propune s'o rezolve, principiul e în legătură cu unele din problemele cele mai mult frământate de mintea omenească şi vă închipuiţi în ce mod, studiat a parte în domenii bine definite, acest principiu ne-ar putea servi drept călăuză în asemenea chestiuni dificile.

La întrebarea de mai sus principiul relativităţii [illegible] [illegible] răspunde „nu", exprim[illegible] lucru în mod mai precis anume: „Nu există mişcare absolută, căci *nu putem deosebi* nici direct prin simţuri, nici prin orice fel de experienţă, *dacă sistemul în care ne aflăm este în repaos sau în mişcare* **rectilină şi uniformă**, adică cu viteză constantă. De exemplu: noaptea în cabina unui vapor pe mare, nu putem spune dacă vaporul stă, sau se mişcă. Fiecare a avut în tren iluzia că stă pe loc în timp ce stâlpii de telegraf aleargă înapoi; principiul spune că aceasta nu e numai o iluzie ci că e o caracteristică a fenomenelor: orice experienţă am face nu ne putem da seama de mişcarea sistemului în care ne aflăm, din cauză că legile după care au loc fenomenele naturale *sunt aceleaşi*, fie că studiem aceste fenomene în repaos, fie că noi împreună cu toate aparatele cu care facem experienţele, suntem în mişcare de translaţie rectilină şi uniformă.

De exemplu: las să cadă o piatră pe peronul unei gări: ea cade în linie dreaptă, după o anumită lege; las să cadă un corp greu într'un tren care se mişcă în palier şi aliniament cu viteza de regim: fiecare a făcut experienţa aceasta, corpul cade tot după o traectorie rectilină şi dacă am face măsuri, am constata *aceeaşi* lege de cădere.

Aşa dar teoria relativităţii pune ca principiu că:

Pentru un observator în repaos fenomenele naturale, au loc după aceleaşi legi ca şi pentru un alt observator care s'ar afla faţă de primul într'o mişcare de translaţie rectilină şi uniformă.

E de observat că prin fenomene naturale înţelegem ori şi ce fel de fenomene: mecanice, optice, electromagnetice, etc.

In special mişcarea pământului în jurul soarelui poate fi considerată, pe o porţiune relativ mică a traectoriei sale ca fiind rectilină şi uniformă. Atunci conform principiului relativităţii nu vom putea pune în evidenţă această mişcare de translaţie a pământului prin orice fel de experienţe făcute la suprafaţa sa.

Şi s'au făcut experienţe precise, optice, electromagnetice, de exemplu, aşa numita experienţă a lui Michelson (de care vom mai vorbi de altfel) toate fiind de acord cu principiul. De fapt în ordine istorică experienţa a precedat şi a provocat apariţia principiului relativităţii servind totodată ca o primă verificare experimentală a lui.

Pentru a evità confuziuni să precizăm puţin enunţul principiu'ul aşa cum l'am dat mai sus. Fie un observator aflat într'un sistem închis S, în repaos, într'o gară de ex. şi alt observator în

... S ... față de primul, rectiliniu și cu viteză ... ă, de exemplu în compartimentul unui tren ce trece prin gară. Acești observatori au aparatele necesare pentru a observa un același fenomen căderea corpurilor de exemplu: fiecare face experiența în camera în care se află. Principiul spune că *fiecare observator găsește în mod separat în camera lui aceiași lege a corpurilor. Fiecare în sistemul său.*

Dar dacă S vede printr'un artificiu oarecare experiențele lui O', el le va considera sub un alt aspect: dacă un observator pe peronul unei gări și altul în tren lasă să cadă o greutate, *fiecare* observă în experiența *sa* o traiectorie rectilină. Dar dacă cel de pe peron vede pe cel din tren lăsând să cadă o piatră pe fereastra vagonului *pentru el* traiectoria pietrei *celuilalt* va fi o parabolă.

Pătrunderea acestei observațiuni ne ajută mult să nu facem confuzii și să înțelegem unele consecințe paradoxale ale principiului.

In sfârșit să mai remarcăm, că în cele de mai sus n'am vorbit decât de mișcări rectilinii și uniforme; partea din teoria relativității care se ocupă exclusiv cu asemenea mișcări poartă numele de *teoria specială*, iar principiul corespunzător, principiul special al relativității; pentru moment deci ne ocupăm de această teorie specială a relativității, deci numai de mișcări rectilinii și uniforme urmând a indica momentul când vom lua în considerație și mișcările variate.

Așadar legile naturii sunt aceleași fie că observatorul care le descoperă e în repaos, fie că el se mișcă cu o viteză constantă. Pentru cei obișnuiți cât de puțin cu fenomenele fizice lucrul are un pronunțat caracter de evidență. In mecanica rațională principiul există chiar în forma în care l'am dat mai sus ecuațiile mișcării sunt aceleași fie că presupunem sistemul de axe de coordonate în repaos, fie că îl presupunem într'o translație rectilină și uniformă. In unele tratate el e enunțat în mod explicit sunt numele de: principiul relativității al lui Newton. Dacă am scri ecuațiile exactitatea lui s'ar proba imediat. Dar chiar așa, în mod intuitiv, ne putem da seama de valabilitatea lui ținând socoteală de faptul că în mecanica rațională mișcarea rectilină și uniformă, e oarecum echivalentă cu repaosul; de pildă legea de inerție. Mișcarea rectilină și uniformă ar fi un fel de repaos dinamic, — dacă am putea asocia aceste două cuvinte. —

repaos în sensul că o piatră odată aruncată *rămâne* în starea ei de mişcare, că viteza sa nu variază.

De fapt cel dintâi care a dat teoriei relativităţii forma pe care o are astăzi, A. Einstein, n'a făcut decât să generalizeze un principiu, care exista înainte în mod explicit în mecanică aplicându-l tuturor fenomenelor naturale, mecanice, electromagnetice şi oricare altele.

Principiul, cum am spus, era cunoscut cercetătorilor, cel puţin în anumite domenii ale ştiinţei; el are apoi caracterul acela de evidenţă care ne asigură că cunoaşterea lui intuitivă datează de mult de tot; niciunul din cercetătorii de până la *Einstein* nu-l scosese însă în evidenţă pentru a-l pune ca lege generală a tuturor fenomenelor fizice şi aceasta probabil tocmai din cauză că ei nu aflau un folos imediat din stabilirea acestei legi; interesul pur teoretic al expunerii unui asemenea principiu natural, n'ar fi mers la olaltă cu rezultatele pozitive, practice, utilizabile în ştiinţă. Şi astăzi dealminteri când cineva aude pentru prima oară enunţul principiului relativităţii aşa cum l'am formulat mai sus este foarte surprins şi se întreabă: „Cum a putut eşi din acest adevăr evident şi simplu întreaga revoluţie a ştiinţei de care s'a vorbit?" Şi are dreptate. Răspunsul e simplu. Principiul relativităţii nu lucrează singur, izolat, el e complectat de o serie de *idei anexe* foarte importante, unele mai însemnate ca însuşi principiul, care-i dau valoarea practică lăsându-i numai rolul de coordonator al unor elemente străine unele de altele în aparenţă.

In ştiinţă cu cât un principiu e mai general, cu atâta e în genere mai simplu, şi deci cu atât mai greu de aplicat unor fenomene complexe. Şi de aceia, dacă descoperirea principiului însuşi e de cea mai mare însemnătate, de o egală importanţă cel puţin sunt şi ideile anexe, absolut necesare, geniale uneori, care ne permit aplicarea şi utilizarea efectivă a principiului general. Legea conservării energiei a lui *Mayer* a avut nevoe de toate ideile geniale de amănunt ale unor *Helmholtz, Lord Kelvin*, etc., pentru a fi într'adevăr fecundă. Şi geniul lui *Einstein* se vădeşte tocmai aci în descoperirea ideilor anexe; iar ideia anexă cea mai însemnată care întrece în urmări însăşi principiul şi a cărei descoperire a provocat o adevărată revoluţie, cheea de boltă a întregei arcade, este ideia lui asupra timpului,

La un moment dat în mod experimental, — prin experienţe dintre care cea mai celebră e a lui *Michelson*, — s'a dovedit că principiul relativității din mecanică se aplică și fenomenelor electromagnetice, celor optice în particular; aplicându-l însă așa [illegible] era dat de mai înainte adică folosind ecuațiile mecanicei originale rezultatul nu era conform cu experiența. S'a căutat greșala calculului și *Einstein* a găsit-o în interpretarea greșită a noțiunei de timp.

Astfel s'a simțit nevoia de a înlocui noțiunea timpului așa cum o avem dela *Newton*, a timpului absolut.

Trebue să observăm dela început că principiul relativității studiază exclusiv așa numitul *timp fizic*, măsurabil; în ecuațiile mecanicei, ale fizicei, intervine o anumită variabilă, o anumită valoare, un număr, — determinabil printr'o mișcare etalon pendulară sau alta, — și pe care l numim „timp". Acest număr, această valoare o numim „timpul fizic" și *pe acesta* o studiază principiul relativității, studiul legăturii intime între acest timp și noțiunea intuitivă de durată trebue făcut în mod deosebit de oarece prezintă dificultăți speciale.

De fapt în două vorbe *Einstein*, conform principiului relativității crede că nu există timpul absolut și că, mai precis, e absurd să vorbim despre un „timp" comun la două puncte care ocupă poziții diferite în spațiu și nu sunt în repaos unul față de celălalt. Adică: numărul pe care l introduce în ecuațiile sale un fizician experimentând pe pământ și care ar represinta intervalul între două fenomene, *nu este acelaș, nu are aceeași valoare* cu timpul pe care îl folosește un alt fizician care experimentează într'un tren mișcat cu o viteză constantă și care privește acest timp ca represintând intervalul între *aceleași* fenomene de mai sus. *Intervalul de timp care se scurge între două fenomene nu atârnă numai de aceste două fenomene singure*; ci depinde și de observator, mai precis de locul in care se află și de viteza lui relativă. E absurd să vorbim de un interval de timp fără a specifica punctul din spațiu (in mișcare sau în repaus) din care îl socotim. E tot așa de absurd a spune că între două fenomene există un interval de timp invariabil ca și a defini perspectiva unui obiect fără a indica punctul de vedere din care o privim; și după cum există *o infinitate de perspective* ale *aceluiași* object variind cu punctul de vedere, tot așa *intervalul între două fenomene, mereu aceleași* poate avea *o infinitate de valori* după poziția și viteza observatorului. Toate cele ce urmează îmi fi it au de scop de a lămuri aceste lucruri.

In primul rând observăm din nou că aci vorbim numai de timpul fizic, măsurabil prin comparaţie cu un interval etalon. Cum se face această musurare; cu ajutorul *simultaneităţii*, al coincidenţei printr'un ceasornic. Dealtminteri toate consideraţiile noastre asupra timpului se produc la consideraţiuni asupra simultaneităţii a mai multor fenomene. Ce înseamnă de exemplu propoziţiunea: „Conferinţa a început la ora 9"? Pur şi simplu două fenomene: articularea primului cuvânt şi aşezarea acelor ceasornicului în poziţia care indică ora 9, — au fost fenomene simultane. Deci vorbind de timp vom simplifica de aci nainte problema, vorbind numai de *simultaneitatea a două fenomene*. E clar că astfel vom putea compara o durată cu o durată- etalon, rotaţia pământului etc., o durată nefiind decât intervalul dintre două simutaneităţi.

Acestea fiind expuse, care este modificarea pe care o aduce *Einstein*?.

Până azi, — şi chiar astăzi, — privim timpul ca o cantitate absolută existând în afară de fenomene şi de observator, — ca un mediu omogen — în care se situează fenomenele marcând astfel două puncte intre care rămâne un interval de timp bine definit, invariabil ori din ce punct l'am privi.

Negreşit, nu putem avea pretenţiunea ca în 5 minute să vă conving de exactitatea, — relativă a vederilor lui *Einstein* şi cu atât mai puţin să vă fac să abandonaţi noţiunea de timp absolut, atât de adânc înrădăcinată în felul nostru de a gândi, încât pare extrem de greu de a o lăsa la o parte. Voi cerca numai să scot în relief câteva chestiuni la care oricine poate medita şi căuta să dea un răspuns şi veţi vedea că răspunsul nu e aşa simplu cum pare la prima vedere. Voi expune apoi răspunsul lui *Einstein* şi veţi vedea că el e conform mai mult sau mai puţin chiar cu aşa numitul bun simţ, deşi în teoria relativităţii unde toate rezultatele sunt paradoxale „bunul simţ" nu mai are nici un rol.

Expunerea acestor soluţiuni a concluziilor sale ne va putea astfel conduce la o înţelegere a ideilor sale, dacă nu la o convingere precsă.

Iată o întrebare: Ce sens are fraza aceasta: „în acest moment *simultan* aci şi în Ploeşti se aprinde o lumină electrică?"

Care e conţinutul precis al cuvantului „simultan" din care provine toată dificultatea?, care e definiţia simultaneităţii pentru două fenomene care se petrec în două puncte ale spaţiului?

Pentru a rezolva problema s'o punem aşa: Ne propunem să aprindem simultan două lumini aci şi în Ploeşti. Cum vom proceda? Iată un mod care vine cel dintâi în minte. Luăm două ceasornice, două pendule de precizie de exemplu şi aci în B. le facem să meargă sincron, lucru care teoretic nu prezintă nici-o dificultate. Transportăm una la Ploeşti cu un operator; apoi la o oră anumită pe care fiecare operator o citeşte pe pendula lui ambii operatori aprind lumina. Fenomenele care se petrec între B şi P sunt ele *simultane*? Nu. Pentru simultaneitate ar trebui ca pendulele să meargă sincron şi nu avem nici-o probă că sincronismul stabilit la început când ambele pendule sunt în B, se va menţine când vom transporta una din pendule din P în B. Nimic nu ne asigură că prin simplul fapt al deplasării în spaţiu sincronismul nu s'a deranjat. Ba chiar *suntem siguri* de contrariu. P fiind la o altă latitudine ca B., pendulele nu vor merge la fel în ambele puncte şi nu va exista sincronism. Cine ştie încă ce alte cauze mai deranjează sincronismul?

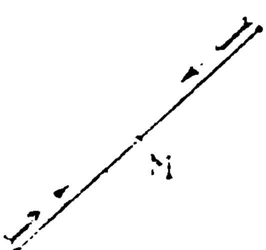
Din experienţa de mai sus nu putem trage nici o concluzie.

Cum definim atunci simultaneitatea?

Pentru cazul când punctele B şi P sunt în repaos relativ, avem o portiţă de scăpare în următorul fapt *experimental*: *lumina se propagă în orice direcţie cu o viteză constantă*: $c=3.10^5$ *km sec. ori din ce sursă luminoasă ar lua naştere.*

Să reţinem acest fapt căruia Einstein în prima sa lucrare din 1905 ia dat numele de principiul constanţei vitezei luminii şi pe care l'a folosit pentru a clădi teoria relativităţii speciale.

Dacă e aşa luăm mijlocul M al drumului dintre B şi P şi



B

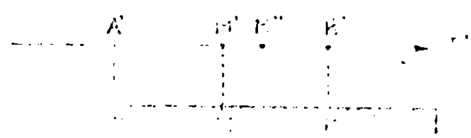
P să aşezăm în M un observator cu un sistem de oglinzi cu care să poată vedea în acelaş timp şi pe B şi pe P. Aprindem lămpile; dacă observatorul M vede *simultan* lumina din B şi lumina din P, vom zice că în B şi P aprinderea lămpilor se face simultan. Intr'adevăr viteza de propagare este aceiaşi în ambele fenomene. Deci *prin definiţie: două fenomene care cu loc în două puncte diferite în spaţiu dar în repaos relativ A şi B sunt simultane dacă razele de* [illegible] *dacă semnalele luminoase care pleacă din A şi B se întâlnesc numai în M, mijlocul lui A B.*

In acest mod am redus o simultaneitate a două fenomene care se petrec în A şi B la o simultaneitate a 2 fenomene (impresionare a retinei sau plăcii fotografice de către undele luminoase) unde nu mai există nici o ambiguitate.

Aşadar am definit simultaneitatea pentru 2 fenomene ce au loc în puncte *în repaos unul faţă de altul.*

Să trecem acum la cazul când avem de comparat, fenomene ce se petrece în două sisteme în mişcare de translaţie uniformă unul faţă de celălalt, de exemplu peronul gării şi un tren în mişcare. Inutil să mai urmăm aceaşi cale căci ne vom putea da seama imediat că e absurd să vorbim de simultaneitate a două fenomene unul pe peron şi altul în tren constatând că: *două fenomene care apar unui observator depe peron simultane apar unui observator antrenat odată cu trenul ca petrecându-se în momente diferite.*

Fie în A şi B *pe peron* două lămpi electrice, care se aprind *simultan* (deci razele de lumină se întâlnesc în M mijlocul lui AB' MA = MB). Lămpile pot fi văzute şi de un observator din tren.



Trenul fiind în mişcare de tranzlaţie rectilina şi uniformă toate legile naturale pentru observatorii antrenaţi cu trenul vor fi aceleaşi ca şi în repaos conform principiului relativităţii; *în special definiţia simultaneităţii va fi aceiaşi.*

Aşa fiind fie T trenul în mişcare în faţa peronului; în momentul când A se aprinde în faţa sa se află un punct A' al trenului când B se aprinde în faţa sa trece un punct anumit B' al trenului. Fie in tren M' mijlocul segmentului A'B' şi un observator aşezat cu sistemul său de oglinzi; acest M' nu e fix căci trenul se mişcă spre dreapta cu viteza v.

Lămpile se aprind simultan pe peron: un observator din M le vede în acelaş timp căci razele de lumină se întâlnesc în M. *Dacă M' ar fi fix* şi observatorul din tren ar vedea deodată ambele lumini; *dar M' se mişcă* spre dreapta cu viteza v, aşa că până să ajungă lumina la el, el a ajuns în punctul M''. *El vede atunci lumina din B' mai devreme decât lumina din A'*, căci lumina are de parcurs cu aceiaşi viteză c în primul caz B'M'' în doilea segmentul *mai mare* A' M''.

...vatorul antrenat odată cu trenul vede întâi B aprinzându-se înainte de A'; pentru el fenomenele aprinderii nu mai sunt simultane.

Aşa dar fenomenele simultane pentru un observator de peron nu mai sunt simultane pentru un observator din tren. Nu mai are sens să vorbim de simultaneitate independentă de sistemul în care ne găsim: trebue totdeauna să specificăm de unde considerăm fenomenul, din tren sau de pe peron. Şi dacă e aşa, dacă simultaneitatea atârnă de sistemul în care suntem, atunci *şi un interval de timp, o durată* (separată de două simultaneităţi) *va atârna de sistemul de referenţă.*

Pe peron intervalul de timp care separă aprinderea lămpilor este *zero*; căci pentru M fenomenele sunt simultane, în tren intervalul de timp între *aceleaşi* fenomene este *mai mare*, e pozitiv căci M' vede întâi pe B' şi apoi pe A' şi acest interval e cu atât mai mare cu cât viteza v e mai mare.

Deci intervalul de timp între două fenomene atârnă de observator de poziţia lui în spaţiu, de viteza sistemului în care se află. Nu mai are sens să vorbim despre timp fără a specifica locul în care-l socotim şi starea acestuia de mişcare sau repaos, timpul atârnă de locul în care îl măsurăm şi de viteza relativă în mişcarea uniformă adică în definitiv de un spaţiu împărţit printr'un timp din alt sistem de referenţă. Timpul apare în strânsă legătură cu spaţiul. *Nu putem concepe fără ambiguitate un timp absolut independent de spaţiu, acelaş pentru toate punctele*; nu există timp absolut, există numai *timp local.* Timpul nu se poate concepe fără spaţiu; la fel până la noi ordine, — în ştiinţă experimentală cel puţin — nu putem concepe spaţiu, întindere, fără mişcare, deci fără timp. Numai ansamblul acesta de două noţiuni spaţiu şi timp pot forma împreună o realitate fizică. Timpul completează oarecum spaţiul, *timpul ar fi o a patra dimensiune a spaţiului.*

Evident, că vorbind aşa, prin ultima propoziţiune n'am spus nimic mai mult decât în cele precedente, cel mult am făcut o figură de stil.

Chiar ca figură de stil însă, ea nu e nouă. După *Flammarion*, deja in 1777 *Diderot* vorbea de timp ca o a patra dimensiune a spaţiului.

Ca problemă filozofică, identitatea aceasta între timp ... şi spaţiu a fost studiată iarăşi şi unul din ...

„a vegue", filosofi francezi contemporani[1]) deosebeşte în ... noţiunea intuitivă de durată născută din senzaţia ... stărilor de conştiinţă, de „timpul ştiinţific", — ceeace am numit mai sus timpul fizic, — care apare ca un mediu omogen indefinit ce ne este dat *pe de întregul* dintr'odată, pentru a putea presupune că-l împărţim în intervale *cărora le atribuim o ordin de succesiune*: trebue să privim deodată mai multe intervale de timp pentru a putea spune care interval precede pe celelalte. In acest sens timpul nu apare cu acel caracter de durată pură, ci are mai mult caracterele omogenului care se chiamă spaţiu. Timpul ştiinţific se *spaţializează* sau cum spune el: timpul ştiinţific *nu durează*.

E aceiaşi distincţia fundamentală pe care trebue s'o presupunem prezentă în minte în totdeauna când studiem, cel puţin în stadiul actual, teoria relativităţii.

Dar în afară de aceste consideraţiuni cuvintele: „timpul o a patra dimensiune a spaţiului" au un înţeles propriu dacă le dăm semnificaţia lor precisă în domeniile în care ele au un sens precis. Dezvoltarea în acest sens a teoriei relativităţii a fost făcută de un profund geometru german Minkowski care a dat posibilitatea teoriei să se desvolte formal cu o rară eleganţă simetrie, a dus, formulând concluzia de mai sus, la puncte de vedere noi şi interesante şi a dat teoriei instrumentele analitice cu ajutorul cărora generalizarea ei este mult uşurată.

Nu va fi deci inutil să schiţăm în două cuvinte adevărata semnificaţie a celor exprimate în propoziţiunea de mai sus şi arătăm cum apare principiul relativităţii in această interpretare.

Câteva cuvinte lămuritoare sunt încă necesare.

Fie un sistem cartesian de coordonate S în repaos şi altul S' în mişcare de tranzlaţie rectilină şi uniformă, faţă de cel dintâi, într'o direcţie oarecare. Pentru simplificarea formulelor vom presupune că axele Ox coincid celelalte sunt paralele iar mişcarea se face cu viteza v spre x pozitiv aşa că la începutul mişcării originile coincid. Un acelaş punct M are în primul coordinatele xyz în cel de al doilea $x'y'z'$; intervalul care se scurge dela început până într'un anumit moment e măsurat de un observator din S prin ceasornice care îi indică timpul t'.

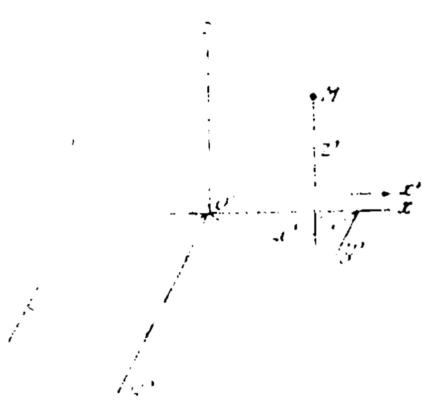
Redus la cea mai simplă expresie un fenomen se traduce

1) Bergson.

prin... un sistem de ecuaţii între coordonatele x,y,z, ale unui punct sau punctelor molecule, atom electron, punct al unei unde... magnetice etc... şi timp. Faţă de sistemul S legea acestui fenomen se exprimă deci prin ecuaţiile $f_1 (x,y,z,t)=0$...... Cum se va exprima acest fenomen dacă îl vom raporta la sistemul S'? Conform cu principiul relativităţii legile naturale sunt aceleaşi fie că le raportăm la S, fie că le raportăm la S'. Deci legea fenomenului faţă de S' se exprimă prin $f_1 (x', y', z', t')=0$..... *aceeaşi legătură* între *noile* coordonate.

Putem raţiona din punct de vedere matematic şi astfel:

Pentru observatorul în repaos avem legea exprimată de $f_1 (x, y, z, t)=0$..... Pentru a găsi legea pe care o constată observatorul S', n'avem decât să presupunem că sistemul S s'a pus



în mişcare cu viteza v: putem deduce atunci din ecuaţiile valabile pentru repaos pe acele valabile pentru mişcare *transformându-le* pe cele dintâi în mod convenabil, exprimând adică pur şi simplu că sistemul S s'a pus în mişcare. Această transformare se face înlocuind coordonatele în repaos x, y, z, t, prin funcţii anumite de coordonatele în sistemul în mişcare x', y', z', t'.

Formulele de transformare sunt foarte importante căci cu ajutorul lor aplicăm principiul relativităţii.

Forma lor poate fi diferită după felul cum analizăm fenomenul şi în special dacă adoptăm noţiunea veche de timp absolut a lui *Newton*, cum facem până azi, sau dacă folosim concepţia lui *Einstein*. Le vom da în ambele forme.

După *Newton*, concepţia veche a timpului absolut ne spune că timpul e acelaş în ambele sisteme $t=t'$. Apoi după figură se vede că:

$$1) \quad \left| \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \qquad \text{şi de mai sus}$$

. 2. Dacă însă utilizăm noţiunea timpului după *Einstein*, folosind numai principiul relativităţii şi al constanţei vitezei luminei putem deduce *formulele fundamentale* ale principiului special al relativității:

$$
2) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}
$$

în care c e viteza luminei

Formulele (1) fiind stabilite pe baza unei concepțiuni eronate a timpului fizic, sunt falșe; formulele (2) formează instrumentul analitic cu ajutorul căruia aplicăm principiul relativității. Anume: dacă $f_1(x'\ y',\ z',\ t') = o$... exprimă o lege naturală și dacă substituim în ea pe $x, y, z, t,$ scoase din (2) căpătăm tocmai $f_1(x'\ y'\ z'\ t') = o$... Cu alte cuvinte în limbaj matematic $f_1 = o$... e un invariant al transformărei (2), care se numește transformarea lui Lorentz.

Astfel în limbaj matematic principiul relativității se enunță spunând că: *Orice lege naturală e invariantă față de transformările lui Lorentz.*

Invariantul fundamental, — după cum se poate verifica este:

$$(3) \quad c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

care nu exprimă altceva decât faptul experimental pe care se bazează întreaga teorie specială a relativității, că lumina se propagă în orice împrejurări în unde sferice cu viteza c.

Așa fiind să punem după Minkowsky în (2) și (3)

$$u = ct\sqrt{-1} \qquad u' = ct'\sqrt{-1}$$

(3) ia forma

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = u'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Se constată după această înlocuire două lucruri:

În ecuaţiile lui Lorentz noua variabilă u care atârnă numai [illegible] joacă *absolut acelaş rol* ca şi coordonatele spaţiale x, y, z.

Transformarea lui Lorentz prin introducerea lui u ia o formă simetrică prezentând toate *caracteristicile unei schimbări de axe de coordonate rectangulare* (adică $\Delta = +1 \quad \Sigma\, \alpha_i\, \alpha_k = o$) şi aceasta nu numai pentru dispoziţia particulară a axelor pe care o [illegible] ci pentru cazul general.

Acestea fiind bine lămurite putem prinde mai bine şirul de idei al lui *Minkowsky*.

Am văzut că un fenomen e reprezentabil printr'o succesiune de valori ale variabilelor x, y, z, t. Să considerăm cu Mincowsky un spaţiu cu 4 dimensiuni raportat la un sistem de 4 axe [illegible] o, x, y, z, u şi numit *univers* (*Welt*). Pe aceste axe vom purta valorile x, y, z, u. Situaţia actuală a unei experienţe, reprezentată printr'un sistem dat de valori x, y, z, u, va fi reprezentată printr'un punct în Univers. Când coordonatele variază, pentru o succesiune de valori ale variabilelor, punctul descrie [illegible] şi această curbă defineşte fenomenul căci pentru [illegible] moment ea ne dă valorile corespunzătoare ale lui x, y, z.

[illegible] interpretarea lui Minkowsky *orice lege naturală e reprezentată printr'o curbă în spaţiul cu 4 dimensiuni în Univers*

Ce devine atunci principiul relativităţii?

Am văzut că transformarea lui Lorentz ia aspectul unei schimbări de coordonate. Principiul relativităţii spune că legile fenomenelor nu se schimbă când aplicăm transformarea lui Lorentz. Deci curba lui *Minkowsky* nu se schimbă când aplicăm aceste transformări; dar transformările (2) exprimă pur şi simplu *că schimbăm sistemul de coordonate rectangulare* la care e raportată curba în univers, iar (3) spune în special că, în cazul particular în care ne-am pus schimbarea se face păstrând origina. Deci dacă admitem universul cu 4 dimensiuni al lui Minkowsky principiul relativităţii nu spune altceva decât că: *fiecare lege naturală e reprezentată printr'o curbă şi că* **e indiferent la care sistem de axe rectangulare o raportăm;** forma şi proporţiile ei rămân aceleaşi. Sau dacă numim aceste sisteme de axe sisteme lorentziane putem spune pe scurt că:

Pentru descrierea fenomenelor, sistemele lorentziane sunt echivalente (Rougier).

Vedeţi cum sub această formă, principiul relativităţii apare şi mai evident ca o generalizare imediată a unor lucruri cunoscute, intuitive: în spaţiul geometric obişnuit, cu 3 dimensiuni, proprietăţile unei curbe, unei figuri geometrice, nu atârnă evident de sistemul particular de coordonate la care o raportăm. Şi tot aşa e indiferent dacă studiez căderea corpurilor faţă de 3 axe legate de plafonul camerei sau, faţă de alte 3 axe situate într'un colţ al ei. E o generalizare a unei proprietăţi cunoscute în spaţiul cu 3 dimensiuni la spaţiul cu 4 dimensiuni.

Astfel, prin această introducere de 4 coordonate x, y, z, u toate *problema fizică se reduce la o problemă de geometrie într'un spaţiu cu 4 dimensiuni*, şi am văzut, această a patra dimensiune u, care e în definitiv un timp, joacă în această teorie absolut acelaş rol ca şi coordonatele de spaţiu x, y, z. Şi, — deşi în genere se trece foarte repede asupra lui $\sqrt{-1}$ din expresia lui u, — trebue să observăm bine că u este într'adevăr o nouă dimensiune a spaţiului tocmai din cauza prezenţei simbolului i, care ne poate arăta că scalarul ct nu poate fi măsurat pe niciuna din cele 3 direcţii Ox, Ox, Oz sau pe vreuna intermediară, ci trebue socotit în sensul unei a patra axe, a patra dimensiune, şi anume normal pe toate celelalte trei.

Să revenim acuma din această excesie în spaţiul cu 4 dimensiuni mai aproape de *realitatea* cu care suntem obişnuiţi; subliniez realitatea pentru că din punct de vedere relativist, realitate şi aparenţă sunt noţiuni care se confundă.

Am văzut care este concepţia lui *Einstein* despre timp. Sprijinindu-se pe principiul relativităţii, pe principiul constanţei vitezei luminei şi folosind noţiunea de timp local, Einstein stabileşte formulele lui Lorentz pe o altă cale decât le găsise acesta. E foarte interesant de urmărit cum a ajuns geniul omenesc la această cucerire.

Pentru a explica insuccesul experienţei lui Michelson de care vom vorbi îndată, o mulţime de savanţi dau diverse explicaţii, fac felurite ipoteze: încet, încet el se apropie de explicaţiunea dată astăzi adică de principiul relativităţii. Ca într'o spirală şi se învârtesc în jurul punctului în care se află soluţia, apropiindu-se cu fiecare lucrare mai mult de el. Lorentz ajunge la transformările sale studiind fenomenele electromagnetice ale cazul corpurilor în mişcare. Mai mult întâlnind deseori în calculele sale expresia algebrică $t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ *îi dă chiar numele de timp local* (care atârnă de *t* şi *z*) fără a vedea in aceasta însă decât un fel prescurtat de a denumi o expresie algebrică. Incet, încet ei se apropie de soluţie, până când, în 1905, Einstein pătrunde in miezul problemei, intr'o sclipire de geniu vede ce e esenţial şi scoate in relief imediat principiul relativităţii completat cu concepţia nouă a noţiunii de timp, — tocmai *timpul local* al lui Lorentz, — principiu care pune în ordine fenomenele ce nu intrau în cadrele fizicei de atunci, dar care, o vom vedea îndată, răstoarnă, preface toată filosofia naturală, şi printr'o difuziune de neînfrânt, cea mai mare parte din concepţiile noastre actuale.

Rezultatele s'au dobândit treptat, treptat, s'au acumulat până la *Einstein*, chestiunea a fost studiată din toate părţile, prin paşi insensibili ştiinţa precisă s'a apropiat de ea atât de mult, încât apariţia unui geniu care s'o stăpânească deplin era oarecum necesară, în sensul automatismului ştiinţei al lui *Hertz*.

Intr'adevăr cercetările care privesc mişcarea relativă datează dela Newton, deşi dacă am vrea am putea găsi şi o dată cu mult anterioară; dar şirul de cercetări recente care au condus în mod necesar la principiul relativităţii au început cam din 1861 prin experienţe, totdeauna cu rezultat negativ, — întreprinse de numeroşi experimentatori, dintre care cel mai celebru e *Michelson* (1881), care căutau prin experienţe optice sau electromagnetice făcute la suprafaţa pământului să evidenţieze mişcarea de translaţie a acestuia faţă de eter.

Ipoteza că eterul e antrenat de un corp în mişcare este inadmisibilă; dacă admitem existenţa eterului trebue să-l presupunem in repaus faţă de pământ. In acest caz putem imagina experienţe făcute pe pământ, care să ne îngădue să observăm această mişcare. Aşa a raţionat *Michelson* şi a imaginat o experienţă optică de interferenţe care avea acest scop, Dar şi această experienţă foarte îngrijit executată, ca şi toate celelalte făcute în acest scop au dat un rezultat negativ; nici-o experienţă făcută în sistemul în mişcare, pământul, n'a putut evidenţia mişcarea sa faţă de eter, mişcarea sa absolută.

Lucrul era inexplicabil pe atunci. Toate sforţările ...

lor până la *Einstein* au avut de scop de a lămuri cauza acestui rezultat negativ.

S'au propus fel de fel de ipoteze până când Einstein a arătat că acest lucru e necesar, de oarece e conform cu principiul fundamental al relativităţii : e imposibil să ne dăm seama de mişcarea uniformă a unui sistem prin experienţe făcute chiar în interiorul său, pentru motivul că fenomenele sunt aceleaşi, fie că sistemul e în repaos, fie că e in mişcare. Iată deci cum a luat naştere principiul relativităţii dela o experienţă specială şi din nevoia de a explica insuccesul acelei experienţe. Dintr'un eşec într'un caz particular a eşit graţie geniului lui *Einstein* o teorie care trece cu mult peste graniţele cele mai întinse ale influenţei pe care ar fi avut-o experienţa singură.

Vom vedea mai târziu cum acest fenomen se repetă şi cum a doua oară, din cea mai mare dificultate a teoriei, din gravitaţie, datorită lui Einstein, avem astăzi cucerite domeniile cele mai stabile ale teoriei relativităţii, căci ele sunt verificate de experienţă.

Dar ceea ce e mai curios în toată această chestiune e faptul că un fizician cunoscut *A Righi* in 2 comunicări la Academia din Paris, în 1919, şi acum în Martie 1920 a adus un rezultat surprinzător ; intemeindu-se pe o teoremă simplă, inatacabilă, după dânsul el reia cercetarea experienţei care după raţionamentul lui Michelson, trebuia să conducă la o deplasare de benzi de interferenţă probând mişcarea de translaţie a pământului, şi arată că *o astfel de deplasare este, practic, imposibil de constatat.* Experienţa lui *Michelson* ca şi repetiţia ei de către Morley şi Miller au dar rezultate negative poate nu din cauză că principiul relativităţii face necesare aceste rezultate, ci pur şi simplu fiindcă instrumentele de azi nu ne dau posibilitatea să observăm acele deplasări. Experienţa lui Michelson, primul fapt experimental precis care a determinat apariţia principiului relativităţii, pierde caracterul ei de experienţă concludentă, nu mai poate fi considerată ca un experimentum crucis al principiului relativităţii.

Şi, vedeţi atunci toată splendida teorie a relativităţii tot progresul enorm, căci orice ar rămâne din paradoxele teoriei, există un progres imens, toate acestea sunt datorite de fapt unei *greşeli iniţiale*, unui raţionament falş al lui Michelson.

De multe ori însăşi imperfecţiunea metodelor noastre de cercetare, aproximaţiile şi chiar erorile noastre pot contribui la înaintarea ştiinţei ; adesea e un avantaj că nu suntem atât de cla-

[illegible] şi că nu avem aparate prea perfecţionate; dacă Michelson ar fi raţionat cum raţionează Righi astăzi, n'am fi avut poate astăzi principiul relativităţii; trebue să ne grabim a spune însă că în afară de această experienţă a lui Michelson există încă multe alte experienţe tinzând să probeze acelaş lucru şi care împreună cu verificările precise astronomice mai ales, formează bazele experimentale ale principiului relativităţii.[1])

(Va urma)

Principiul relativității[1])

Conferință ținută la Școala Politecnică la 3 Iulie 1920

ALEX. PROCA

Elev în anul II al Școalei Politecnice

Primul folos practic al principiului relativității a fost explicarea rezultatului negativ a tuturor încercărilor făcute în scop de a evidenția mișcarea pământului prin experiențe optice sau electromagnetice la suprafața sa. Experiențelor acestora li se căutase o explicare și ele fuseseră destul de complect studiate mai ales de H. A. Lorentz din punct de vedere electromagnetic. De fapt, principiul relativității s'a cristalizat din acest studiu al electrodinamicei corpurilor în mișcare.

Prima lucrare a lui *Einstein* dealtminteri: *„Zur Electrodynamik bewegter Körper"* publicată în Annalen der Physik 1905, conține două părți: una așa zisă cinematică, în care se expune principiul relativității, noua noțiune de timp și o mulțime de consecințe mecanice ale lor; a doua parte, partea electrodinamică în care Einstein aplică imediat principiul său teoriei electrodinamicei corpurilor în mișcare, ecuațiilor lui *Maxwell-Lorentz*, primele ecuații din fisică, îndeplinind condiția de a rămâne invariante față de transformările lui Lorentz.

Chiar acest prim memoriu atât de simplu, atât de clar și atât de frumos, conține o mulțime de consecințe, al căror număr lasă să se bănuiască fecunditatea noului principiu, consecințe cele mai multe paradoxale.

Nu intră în cadrul pe care ni l'am trasat, să studiem aceste

1) A se vedea începutul acestei conferințe în numărul 7–8 al „Buletinului" din acest an.

consecințe sau paradoxele care ar rezulta din teorie, dar pentru a da exemple, care să justifice cele afirmate până aci, vom enumera câteva din cele mai simple.

In primul rând am văzut că dacă admitem existența eterului, trebue să presupunem că el nu este antrenat de corpurile în mişcare, că e deci în repaos, în repaos absolut. Cum după principiul relativității nu există repaos absolut, *rezultă că nu există eter.*

Iată o concluzie care e cea mai greu primită de mulți savanți, în special fiind-că suprimând acest mediu, cărula timp de un secol i s'au atribuit proprietățile cele mai ciudate şi mai contradictorii pentru a putea explica un număr cât mai mare de fenomene, n'am avea pentru moment cu ce să-l inlocuim. De aceia multe sunt şi azi încercările de a admite principiul relativității şi în acelaş timp de a nu abandona eterul; chestiunea nu este încă rezolvată.

In al doilea rând radicalul din ecuațiile lui Lorentz ne poate face să bănuim că trebuie să avem întotdeauna $v < c$ căci altfel radicalul ar fi imaginar: *niciun mobil nu poate avea o viteză mai mare decât viteza luminei.* Vom vedea mai departe explicarea fizică: ar trebui o energie infinită pentru a da unui corp viteza luminei. Această viteză apare ca o valoare limită, ca o valoare critică şi ca o constantă universală în teoria specială a relativității. Nici un corp nu poate căpăta o viteză mai mare decât viteza luminei, *acțiunea instantanee la distanță e imposibilă.*

Dar dacă $v < c$, să ne închipuim că pe lângă pământ trece o cometă cu o viteză colosală $v = 290.000$ km. sec de pildă față de pământ, şi că în cometă un electron se mişcă față de cometă cu $v' = 20.000$ km./sec; care va fi viteza electronului față de pământ? Dacă am aduna vitezele $w = v + v' = 310.000$ am da peste o valoare mai mare ca $c = 300.000$ km. sec. Deci *vitezele nu se adună după regula pe care ne-o dă mecanica rațională;* principiul dă formula $W = \dfrac{v + v'}{1 + \dfrac{v\,v'}{c^2}}$, valoare care e totdeauna mai mică decât c când $v < c$, $v' < c$. Şi lucrul e explicabil: e just că într'o secundă cometa parcurge 290.000 km. şi că într'o secundă electronul parcurge 20.000 km. Dar după cum știm *„secunda" de pe pământ nu este aceiaşi, n'are aceiaşi va-*

Mare ca „secunda" de pe cometă, pentru un observator de pe pământ şi ne putem aştepta ca viteza să nu se adune. Intr'adevăr deducem din ultima ecuaţie a lui Lorentz:

$$\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

intervalul de timp e mai mare în sistemul mişcat.

Dar nu numai atât, o lungime e o diferenţă între două coordonate: din prima ecuaţie deducem:

$$l = l' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Deci o lungime, un corp în mişcare, măsurat din repaos apare mai scurt în sensul mişcărei sau cum se mai zice: *corpurile se scurtează în sensul mişcărei*: o sferă devine un elipsoid de revoluţie. Este celebra *contracţiune* în sensul mişcărei pe care Lorentz înainte de a cunoaşte principiul relativităţii, a presupus-o realizată în natură, pentru a explica rezultatul experienţei lui *Michelson*.

Ca ipoteză arbitrară rezultând din calculele algebrice şi care atribue fiecărui corp în mişcare o scurtare efectivă, ea e cel puţin singulară: ca o consecinţă a unui principiu general valabil şi care nu presupune existenţa *absolută* a unei deformaţiuni ea e admisibilă. Intr'adevăr e esenţial de observat că numai un observator care stă în repaos relativ constată scurtarea adică atribue lungimii un număr mai mic de unităţi, (care, ele, sunt în repaos) în timpul mişcărei decât dacă lungimea ar fi in repaos sau — ceea ce e tot una — dacă el împreună cu unitatea de măsură s'ar mişca cu aceeaşi viteză ca şi bara pe care o măsoară.

Nu are sens să vorbim de lungimea absolută a unei bare, deci nu are sens să vorbim de scurtarea efectivă absolută; pentru un observator în repaos lungimea în mişcare se scurtează faţă de lungimea în repaos, pentru unui mobil odată cu ea, ea îşi păstrează aceeaşi mărime pentru că avem repaos relativ sau cum se zice uneori pentru că şi instrumentele de măsură în mişcare s'au scurtat în acelaş raport.

Trebue întotdeauna să ne reamintim că am admis principiul relativităţii; dacă neglijăm acest amănunt sau dacă neglijăm ... din consecinţele sale, lucru foarte uşor dealminteri, cădem ... în paradoxe, care abundă în această teorie în care chiar rezultatele pozitive par la prima vedere paradoxe.

Am văzut că principiul paralelogramului vitezelor din mecanica raţională nu mai e aplicabil îndată ce admitem principiul relativităţii. Dealtminteri, şi rezultatul e fundamental, toată mecanica newtoniană nu mai e adevărată decât într'o primă aproximaţie când v este mic. Intr'adevăr legile naturale trebue să fie invariante faţă de transformările lui *Lorentz*; dar ecuaţiile mecanicei raţionale nu prezintă acest caracter de invarianţă, ele nu pot deci reprezenta fenomene naturale. *Explicaţia mecanică a universului e iluzorie.* Când v este mic faţă de c, dacă neglijăm pe $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ transformările lui *Lorentz* (2) se reduc la acele ale lui *Newton* (1). Mecanica raţională e aplicabilă vitezelor mici; ... de câte ori vom intra în domeniul vitezelor mari, în studiul ... nilor de pildă, etc., va trebui să folosim mecanica relativităţii.

Fără a mai vorbi astfel de anumite consideraţiuni ... culturii generale, atât de frumos expuse chiar aci de ... inginer *Manoilescu*, zărim motivul de ordin practic care ... răspunsul la întrebarea pe care şi-au pus-o mulţi de ... întru cât principiul relativităţii poate interesa pe ingineri? ... laţiunile teoretice care ne duc tocmai în domeniul metafizic ... au deaface cu practica inginerească.

Englezii nu gândase aşa: de curând revista *Engineering* avea articole asupra principiului relativităţii, apoi în Franţa la Societatea Electricianilor, compusă în majoritate din ingineri, *Langevin* ţine conferinţă asupra aceluiaş subiect; ... aminti toate articolele de popularizare în o mulţime de reviste străine, literare, ştiinţifice, educative. E absurd să pretinzi că poate şti ce calcule vor folosi inginerii de aci în zece-sprezece ani; dar e şi mai absurd să nu vadă cineva că ... mente inginerul lucrează efectiv cu viteze mari, n'ar fi să ... tim decât tuburile de raze x, lămpile cu 3 electrozi şi chiar ... cu incandescenţă, şi că un studiu al mişcărei electronilor în ... ceste aparate ar putea conduce la perfecţionări importante ... acestora. Şi studiul acesta este mecanica vitezelor mari, mecanica relativităţii, care înlocueşte aci mecanica Newtoniană.

Intregul edificiu admirabil al mecanicei raţionale pe ...

savanţii secolului trecut credeau că pot clădi o teorie coerentă a tuturor fenomenelor naturii, trebue aşa dar dărâmat şi reclădit din nou pe bazele teoriei relativităţii.

Planck şi *Einstein* păstrează din mecanică principiul celei mai mici acţiuni, pe el, pe principiul conservărei energiei şi pe principiul relativităţii caută să edifice întreaga teorie a fenomenelor naturale.

Dificultatea de a abandona teoriile familiare ale mecanicei şi noţiunile adânc înrădăcinate de timp absolut, etc. pare aşa de mare pentru unii savanţi, încât ei se încearcă a păstra teoria lui *Newton* şi a regăsi rezultatele teoriei relativităţii prin alte ipoteze, mai puţin revoluţionare. Ne putem întreba dacă acest procedeu e legitim, necesar sau folositor; dar ori cum, de oarece niciodată teoriile noastre nu vor putea pătrunde până în esenţa lucrurilor, ipoteză pentru ipoteză, poate că e preferabil să păstrăm principiul relativităţii, care s'a arătat atât de fecund până acum, decât să căutăm a-l reduce la ceva mai vechiu, examinat pe toate feţele, la procedee care nu ne mai pot folosi azi drept călăuză cu un succes tot atât de mare în cercetarea fenomenelor naturale.

Studiul mai aprofundat al schimbărilor de adus mecanicei pentru a o pune de acord cu principiul relativităţii ne duce la rezultate şi mai interesante.

Energia unui corp nu mai e exprimată prin $\frac{m v^2}{2}$ ci prin

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 + \frac{m v^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{m v^4}{c^2} + \ldots$$

Dacă $\frac{v}{c}$ e mic ne putem opri la al doilea termen; energia cu care lucrăm în mecanica raţională $\frac{m v^2}{2}$ este numai o mică parte din energia totală a corpului, care mai are şi o enormă provizie de energie latentă $m c^2$ din care probabil că scoate radiul enorma cantitate de energie pe care o răspândeşte prin radiaţie.

Când $v = c$ energia e infinită. Trebuie o energie infinită de mare pentru a da unui corp viteza luminei. Iata de ce viteza luminei apare ca o viteză critică, pe care nici-un corp nu o poate atinge.

Mai mult, se constată ca un rezultat necesar din ecuațiile stabilite că dacă un corp în mișcare absoarbe prin radiație o cantitate de energie E, energia sa totală crește cu $\dfrac{E}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

Energia cinetică totală este deci:

$$\frac{m\,c^2+E}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{\left(m+\dfrac{E}{c^2}\right)c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{(m+\mu)\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

punând $\mu=\dfrac{E}{c^2}$.

Un corp care absoarbe energie își mărește deci masa cu

$$\mu=\frac{E}{c^2}$$

In această teorie *masa* nu mai e o constantă [illegible] a corpului ci o *mărime variabilă*. Ea crește sau scade după cum corpul absoarbe sau radiază energie. E un fel de schimb între energia radiantă și masă, un schimb analog în aparență [illegible] cu acel între travaliu și energie potențială; acestea schimb[illegible] între ele ar putea fi de aceiași natură, inerția materiei ar fi datorită numai unei cantități mai mare sau mai mică de energie acumulată; în orice caz am putea măsura masa măsurând [illegible] cantitatea de energie pe care o are corpul: energia corp[illegible] dă o măsură a masei sale.

Și atunci cele două legi fundamentale ale filozofiei naturale *legea conservării maselor și legea conservării energiei se reduc la una singură*, legea conservării energiei. Ca urmare imediată legea conservării maselor in reacțiile chimice nu mai e exactă, când nu ținem seama de căldura desvoltată in reacțiune. Când 2 gr. H se combină cu 16 gr. O nu obținem tocmai 18 gr. apă ci ceva mai puțin, variațiune datorită dezvoltării de căldură.

Astfel se pot explica micile variațiuni cantitative care apar in unele legi ale chimiei.

In sfârşit, unei cantităţi de energie E îi corespunde o masă $\frac{E}{c^2}$ — *energia are o masă, energia posedă inerţie*, ceeace explică presiunea de radiaţie a lui Maxwell, — şi dacă mai admitem şi ipoteza quantelor după care energia radiată este emisă în unităţi discrete, în quante, şi dacă aplicăm acestea la energia luminoasă, ţinând seama că nu mai avem nevoe de eter, ne întoarcem din nou la ipoteza abandonată a emisiunei luminii a lui Newton. Şi unul din avantajele imediate este că putem considera lumina ca un proectil care deci va fi deviat de gravitate: *raza de lumină* dela o stea care trece pe lângă soare nu va fi o dreaptă ci *o linie curbă*. Prevederea lui Einstein a fost strălucit verificată de experienţă după cum vom vedea îndată, verificările specifice ale teoriei relativităţii venind mai toate din astronomie.

Vitezele mari se întâlnesc în infinitul mic, la electroni pe deoparte, în infinitul mare, în mişcarea astrelor pe dealta. Ce devine atunci mecanica cerească în noua lumină a teoriei relativităţii? De oarece legile ei sunt legile mecanicei Newtoniene, ca nu mai reprezintă decât o primă aproximaţie, şi toate calculele ei trebuesc refăcute pe baze noi.

Aci însă se prezintă o dificultate nouă şi care părea insolubilă: explicaţiunea gravităţii sau măcar găsirea unei legi mai precise care să dea seama de unele fenomene observate de mult, dar neconforme cu legea lui Newton. Punctele dificile erau două: în aparenţă gravitatea se propagă instantaneu, în contradicţie nu numai cu principiul relativităţii dar şi cu părerea admisă, mai nainte de apariţia acestuia, că în eter viteza de propagare a unei perturbări este finită; şi apoi faptul că gravitatea lucrează *la fel asupra tuturor corpurilor*: un fulg şi o bucată de plumb cad tot atât de repede în vid, proprietate misterioasă, constatată încă demult dar neexploatată, mai mult, fără analogie în cele cunoscute până azi.

După apariţia teoriei relativităţii mulţi s'au încercat să dea o teorie satisfăcătoare a gravitaţii sau cel puţin să concilieze principiul relativităţii cu faptele observate. Principiul aşa cum l-am anunţat mai înainte se dovedea neputincios să dea soluţia. I-a fost dat însă lui Einstein, ca, printr'o serie de noi idei anexe geniale, printr'o serie de concepţiuni din cele mai îndrăsneţe şi printr'o generalizare, care nu are analogie în ştiinţele naturii până azi, să formuleze legea universală care corespunde principiului special al relativității, să precizeze ideile noastre relativ la fenomenele misterioase ale gravitații și ca urmare să scoată din întreaga teorie legea generala intrinsecă a gravitații care guvernează întreg universul nostru.

Drumul parcurs este imens și poate o muncă de decenii să fie necesară pentru a deschide cale largă până la cele mai înalte culmi ale teoriei relativitații și a le explora cum trebue.

Einstein avansează prin salturi, fără să se preocupe de rezultatele intermediare, având, în aparență poate drept călăuză numai intuiția sa; rând pe rând el generalizează, introduce concepții noi, compară, judecă, cu o bogație de imaginație care te face să crezi că citești producțiile literare ale unui savant cu o fantezie extrem de bogată. Cu drept cuvânt se întreabă atunci cititorul, ajuns la sfârșit, ce valoare reală pot avea concluziile; condus de intuiția genială a autorului și neluând decât din când în când contact cu realitatea, el simte nevoia de a se controla cu experiența. Și această comparație e decisivă pentru teoria lui Einstein; fenomenele astronomice o confirmă cu o mare precisiune.

In 1915 în fața Academiei Berlineze el a dat explicația mișcării seculare a periheliului orbitei lui Mercur, fenomen inexplicabil până atunci, oricare ipoteze noi s'ar fi introdus ad-hoc; rezultatul calculului diferea cu 2" de observațiile astronomice. Din teoria sa generală Einstein a dedus că razele de lumină dela o stea fixă sunt deviate dela linia dreaptă în trecerea lor pe lângă soare: lucrul se poate observa în timpul eclipselor. La ultima eclipsă din 29 Mai 1919 Englezii au organizat 2 expediții pentru a cerceta fenomenul; rezultatele au confirmat în mod strălucit prevederea lui Einstein, lucru care a emoționat întreaga lume științifică, în special pe cea engleză. Societatea Regală a organizat o ședință specială consacrată discuțiunii acestei teorii a gravitații care se perfecționează formal pe zi ce trece. Presa engleză a consacrat multe articole acestei teorii; până și în reviste de educație se întâlnesc articole de vulgarizare.

Am spus că principiul special al relativitații, acel despre care a fost vorba până acum, nu mai este suficient. E nevoe de încă o idee anexă de aceiași valoare. In acest caz iată care sunt considerațiile, de o rară simplitate, care conduc la soluția problemei, idee căreia i se mai zice uneori, *principiul echivalenței*.

Am vorbit până aci de sisteme în mișcare uniformă și reinte, cu viteza constantă, *fără acceleraţie.* Ce se întâmplă când sistemul — să zicem un tren — se mişcă oricum, adică atunci când are acceleraţie? Ne-o spune experienţa: când trenul porneşte, cei din tren *rămân în urmă* oarecum şi sunt aruncaţi in partea opusă mişcării, până ce trenul îşi ia viteza de regim constantă; când el se opreşte cei din tren cad înainte.

Când un ascensor porneşte în sus avem senzaţia că, în momentul pornirii apăsăm pe podea, cântărim mai greu; şi aci, am rămas în urmă faţă de ascensor.

Să presupunem acum într'o cameră închisă peste tot, fără ferestre, — un fel de cabină de ascensor — un observator prevăzut cu instrumentele cele mai perfecţionate de cercetare, pe care le cunoaştem: să presupunem că în timpul somnului lui, transportăm această cameră undeva în spaţiu, *departe de orice centru de atracţie.* Faţă de nişte axe oarecare, cabina stă în repaos şi asupra ei *nu lucrează forţa gravităţii.* Să ne închipuim că de tavanul cabinei, în exterior legăm un fir şi că cineva, o forţă ... o cauză oarecare, trage de acest fir cabina *„în sus"* şi această se mişcă cu o acceleraţie constantă; să-i ... momentul acesta observatorul se deşteaptă.

... constata el? In fiecare moment se petrece acelaş ... care are loc când porneşte un ascensor sau un tren. In ... moment el „rămâne în urmă" faţă de cabină şi cum podeaua îl sileşte să meargă odată cu cabina, el va simţi ... într'un ascensor, va simţi *că apasă pe podea.* Dacă ... în mână şi îi dă drumul, acesta „rămâne în urmă" şi cum ... nu-l mai susţine *el cade în mişcare uniform accelerată faţă de cabină,* cu acceleraţia g. Pentru cine îşi reaminteşte ... lui D'Alembert fenomenul e foarte clar: din faptul ... toate obiectele din cabină sunt solicitate de o forţă de ... dirijată în jos şi producând tocmai acceleraţia g. Un ... deci lăsat liber, cade în cabină într'o mişcare accelerată cu acceleraţia g. Ce va gândi savantul nostru din cabina ermetic închisă? Va expune fenomenul aşa cum l'am presentat noi mai sus? Nicidecum; cabina e închisă şi el nu poate observa deplasări. El va zice pur şi simplu: constat că: dacă dau drumul unui corp el cade tras în jos de o cauză oarecare; constat că *asupra tuturor corpurilor din cabină, lucrează o forţă dirijată în jos*; sunt în repaos într'un câmp de forţe. Studiind fenomenul el ar vedea că această cădere se face cu accelerarea g, şi ar găsi în acest fenomen trăsătura caracteristică gravităţii: *forţa lucrează la fel asupra tuturor corpurilor independent de proprietăţile lor fizice.* Dacă ar da un nume cauzei care produce căderea, l-ar putea zice foarte bine „gravitate", în acelaş înţeles ca şi pe pământ.

Deci savantul nostru va zice: cabina e în repaos în câmpul de forţe al gravităţii. Dar, zice Einstein, el s'ar putea întreba: de ce nu cade cabina? Admiţând că ar deschide o fereastră şi că, neputând să vadă stelele, ar descoperi firul care trage cabina în sus şi ar constata că e întins, va trage concluzia că *el împreună cu cabina, sunt în repaos atârnaţi printr'un fir de undeva într'un câmp de forţe analog gravităţii. Deci observatorul din cabină e incapabil să deosebească dacă el e în realitate supus gravităţii sau dacă pur şi simplu sistemul în care se află el este în mişcare uniform accelerată.*

Problema de a decide care din aceste două alternative e cea „adevărată" n'are sens, căci fenomenele sunt aceleaşi, fie că sistemul de referenţă e în mişcare variată (şi nu e supus gravităţii) fie că el e în repaos dar asupra lui lucrează câmpul de forţe al gravităţii.

S'au altfel: *Câmpul gravităţii produce acelaş efect ca şi acceleraţia provenită dintr'o mişcare oarecare a sistemului;* cu alte cuvinte e un fel de *echivalenţă* între gravitate şi mişcarea variată.

Iată un rezultat fundamental întemeiat pe consideraţiuni foarte simple; trebue însă să observăm că această echivalenţă nu mai poate avea loc dacă aşa numita masă inertă nu e egală exact ca masa gravifică, adică dacă raportul dintre o forţă şi acceleraţie produsă asupra unui corp nu este exact egal cu raportul dintre forţa gravităţii şi intensitatea ei g, cu alte cuvinte dacă corpul opune rezistenţă, inerţie, diferită după cum e vorba de mişcări provocate de gravitate sau de forţa centrifugă de exemplu. Apoi nici nu mai e nevoe de adaos că teorema de mai sus nu stabileşte o identitate, ci numai o echivalenţă. Nu e demonstrat că orice câmp al gravităţii e produs în mod necesar în chipul de mai sus; pot exista câmpuri produse în alte moduri.

Principiul echivalenţei ne dă putinţa de a studia fenomenele într'un anumit câmp al gravităţii şi a încerca apoi să aplicăm rezultatele prin generalizare la oricare alt câmp; în acelaş timp el ne indică modul de a generaliza principiul relativităţii pentru a-l aplica în orice împrejurare.

De exemplu: cunoaştem mersul unui fenomen într'un sistem S în mişcare rectilinie şi uniformă. *Prin calcul*, prin transformări putem găsi cum apare acest fenomen într'un sistem S' care, faţă de primul S, este în mişcare variată, cu acceleraţie. Dar existenţa unei acceleraţii e echivalentă cu existenţa unui câmp al gravităţii; deci prin operaţia de mai sus am dobândit înfăţişarea fenomenului nostru în câmpul gravităţii.

Un exemplu: Fie un punct care în sistemul S' descrie uniform o linie dreaptă; în sistemul S', *deci în câmpul gravităţii* el va avea o mişcare în genere curbilinie şi variată. Dacă n'ar exista gravitatea o piatră aruncată ar merge drept; pe pământ ea descrie o parabolă.

Mai mult: dacă n'ar exista gravitate orice rază luminoasă [illegible] când se propagă într'un mediu omogen, dar cum [illegible] câmpul gravităţii (şi fiind energie are o inerţie), [illegible] *este curbă*: şi experienţa a confirmat în mod [illegible] rezultat paradoxal în aparenţă, la ultima eclipsă [illegible]

[illegible] punctul acesta să ne oprim puţin pentru a arunca [illegible] dobândite până acum şi în special asupra [illegible] aşa cum l'am expus în paginile precedente [illegible] consecinţelor pe care el însuşi le-a provocat, [illegible]

[illegible] relativităţii despre care am vorbit până acum şi care se numeşte, după cum am spus, principiul special al relativităţii [illegible] astfel:

[illegible] păstrează aceiaşi formă oricare ar fi sistemul [illegible] care raportăm fenomenele, fie că el e în repaos, fie [illegible] rectilinie şi uniformă.

[illegible] expus având în vedere 2 lucruri:

1. N[illegible] considerăm *decât mişcări rectilinii şi uniforme*, fără acceleraţie;

2. Admitem că lumina se propagă rectiliniu şi cu o viteză constantă.

[illegible] însă mai înainte asupra gravităţii ne arată că [illegible] gravităţii are un efect echivalent cu efectul unei [illegible] a sistemului de referenţă; într'un spaţiu supus [illegible] traectoria luminei e o curbă şi viteza ei nu mai e constantă.

[illegible] 2 constatări ne arată însă că cele două ipoteze pe care ne-am intemeiat ca să stabilim principiul special al relativității nu mai sunt valabile de indată ce suntem într'un câmp al gravității. In univers există gravitate; deci în universul nostru, principiul special, așa cum l'am expus, nu s'ar mai aplica. Și astfel se naște îndoiala legitimă dacă într'adevăr mai ... natură, legea generală a relativității sau dacă ea e aplicabilă ... și numai unui univers fictiv fără gravitate, ca acel pe care l'am considerat până acum, și în care n'am avea decât atacări ... lini și uniforme.

Am ajuns în cercetarea noastră la un moment decisiv ... care depinde acceptarea sau respingerea ulterioară a ... Suntem în următoarea dilemă:

a) *Sau nu există relativitate universală* și atunci ... voltările făcute până aci sunt aplicabile numai unui univers ... fără gravitate, fără accelerație;

b) *Sau există relativitate universală* și atunci principiul ... să fie aplicabil pentru orice fel de mișcare, fie variată ... formă, fără deosebire, adică legile naturii trebue să păstreze aceiași formă fie că sistemul de referență e în repaus, ... *într'o mișcare variată absolut oricare.*

Trebue să alegem între cele două posibilități: ... tâi o contrazice însă întrucâtva acum, un simț intim, o ... gere intuitivă, pe cea de a doua o contrazice raționamentul ... care l'am făcut mai sus și care ne spune că în cazul ... variate a sistemului de referență principiul special al r... nu mai e aplicabil.

Trebue să relevăm aceste contradicții din care una ... e aparentă.

In rezumat: pe deoparte existența unui principiu ... relativității implică valabilitatea sa pentru orice mișcare ... care ar fi natura ei; pe de altă parte: experiența și rați... ne spun că pentru mișcări variate principiul relativității ... aplicabil.

Atunci una din două: sau nu există relativitate universală, sau raționamentul nostru de mai sus e falș.

Chestiunea este de cea mai mare însemnătate pentru ... teorie și de o dificultate extremă. Și de data aceasta ... tot lui Einstein ca printr'o privire pătrunzătoare în procesul ... de generalizare să arate că de fapt *raționamentul pe care l'am f...*

e fals, fiindcă nu ține seama de anumite particularități care apar odată cu mișcarea variată.

Dificultatea pe care a invins'o acum Einstein e cam de aceiași natură cu aceia de care a fost vorba la stabilirea principiului special al relativității: inlocuirea noțiunei eronate a timpului; numai că în cazul de față este vorba de cealaltă noțiune fundamentală, de spațiu.

Acest „maestru al timpului și al spațiului" cum l'am putea numi, n'a adus de data aceasta o noțiune cu totul nouă, folosind însă în chipul cel mai neașteptat o noțiune găsită anterior în cercetări cu totul diferite, a găsit greșala raționamentului de mai sus și a indicat modul corect de aplicare al principiului relativității generalizat, care subsistă astfel pentru întreg universul nostru.

Iată în două cuvinte observația lui Einstein: ne bazăm pe remarca din teoria specială a relativității care ne spune că un corp într'o mișcare rectilinie și uniformă se scurtează în sensul mișcării.

Fie un sistem de trei axe rectangulare animat de o mișcare variată oarecare în spațiu; fie C traectoria originei pe care s'o presupunem în momentul de față tangentă la O x. Intr'un interval de timp infinit mic putem considera mișcarea ca uniformă și rectilinie; deci o bază de lungime egală cu 1 metru de pildă, așezată pe Ox, cu un capăt în O, se scurtează în acest interval; în același timp alte bare egale cu prima dar situate perpendicular pe ea, de ex. pe Oz, Oy, etc., rămân invariabile căci sunt normale traectoriei. Lungimile care ocupă o poziție intermediară au o scurtare medie. In momentul următor traectoria își schimbă direcțiunea și de exemplu poate fi tangentă la Oy; atunci metrul așezat pe Ox va rămâne invariabil, cel de pe Oy scurtându-se. In momentul următor *viteza se schimbă deci și scurtările diverselor lungimi variază: în mișcare scurtarea unei lungimi variază nu numai cu orientarea dar și cu momentul considerat.*

Dacă ne închipuim un solid K invariabil legat de triedrul S de referență, participând astfel la mișcare, constatăm că diversele lui părți se vor scurta unele mai mult, altele mai puțin, întâi într'o direcție apoi in alta, după o lege foarte complexă; *corpul solid se va deforma în mișcare*, nu numai într'o direcție ci în toate după o lege oarecare: *un solid în mișcare variată nu-și mai păstrează forma sa invariabilă.*

Dacă vom așeza într'o direcție oarecare fixă un metru gradat nu numai că metalul se va curba, dar el s... ... ... că lungimea unui centimetru dela un capăt nu va mai ... nere egală cu a unui centimetru dela celalalt.

Tot aşa un balon captiv, care nu e pe deplin umplut ... gaz şi care e supus unui vânt slab şi variabil, îşi schimbă ... ondulându-şi, după cum bate vântul, partea inferioară.

Care e concluzia imediată ce reese de aci?

Aceia că *şi triedrul de referenţă de trei axe rectilini ... deforma în mişcare*, axele rectilinii vor deveni curbe şi d... în unităţi egale trasate pe ele în repaos se vor transforma ... diviziuni neegale şi de neegalitate variabilă.

Nu vom mai putea folosi astfel un sistem cartezian de ... ordonate pentru a defini poziţia unui punct; nu vom mai ... vorbi de un sistem de referenţă solid, geometric, invariabil ... vând o mişcare de ansamblu bine definită, căci însuşi ... referenţă care defineşte poziţia punctului se deformează ... care. Nu mai raportăm punctul la un solid invariabil ... care nu are o formă bine definită, ci una variabilă, la o ... de referenţă, comparaţie sugestivă prin care Einstein ... facă intuitivă noţiunea aceasta a solidului deformabil ... care variată; şi o moluscă n'are o formă bine ... bilă în toate punctele sale, ia forma stâncei pe care ...

Iată deci un punct câştigat: în mişcarea variată nu ... folosi coordonatele cartesiane ci trebue să raportăm punctele ... o „moluscă de referenţă" deformabilă.

Acelaşi lucru se poate exprima şi în altfel: într'adevăr ... virtutea principiului echivalenţei, avem acelaşi rezultat dacă ... supunem că sistemul de referenţă S este în repaos în loc să ... în mişcare variată, dar că asupra lui lucrează un câmp al gravitătii variabil.

Un solid, de ex. un triedru de axe carteziane situat într'un astfel de spaţiu, în care lucrează gravitatea variabilă, se va deforma. Oricum, chiar dacă acest câmp al gravităţii ar fi ... în timp, dacă în acest spaţiu deplasăm din A în B un corp ... acesta *prin simplul fapt al deplasării se deformează*. Spaţiul ... care se exercită gravitatea nu mai este comparabil cu spaţiul nostru obişnuit al geometriei euclidiane, cu spaţiu euclidian. In acesta o figură îşi păstrează forma şi proprietăţile oricum am deplasa-o în spaţiu şi sistemul de coordonate cartesiane e utilizabil

In spaţiul gravitaţii nu e aşa: solidele geometrice nu mai sunt invariabile faţă de oricare deplasare, de ex. triunghiurile formate din drepte definite prin raze de lumină vor fi curbilinii, suma unghiurilor lor va fi $\lesseqgtr$ 180°, coordonatele cartesiene nu se vor mai putea aplica, etc., etc.

Intr'un cuvânt *spaţiul în care lucrează gravitatea este un spaţiu neeuclidian.* Apoi, dacă am considera şi a patra dimensiune a spaţiului şi am ţine seama că în mişcare intervalele de timp variază, am ajunge la acelaşi rezultat fundamental:

Spaţiul cu patru dimensiuni în care lucrează gravitatea este neeuclidian.

Cu aceste rezultate ne putem întoarce şi rezolva chestiunea pusă.

Raţionamentul făcut în consideraţiunile de mai inainte, este fals, de oarece el presupune că ne raportăm la un solid de referenţă absolut invariabil, indeformabil având o *mişcare de ansamblu bine definită* caz, in care am putea folosi coordonatele carteziane; or, după cum am văzut toate acestea sunt inexacte şi admiterea lor ne duce la concluzii greşite.

Există relativitate universală; dar aplicarea greşită a principiului ne-a dus la contradicţiune. Cum il vom aplica corect? Constatarea de adineaori asupra caracterului neeuclidian al spaţiului nostru, ne dă soluţia.

O representare concretă a unei geometrii neeuclidiene o avem considerând de ex. geometria figurilor pe o sferă sau pe o suprafaţă cu o curbură constantă de un semn oarecare.

Pe o sferă nu putem construi un sistem de axe carteziene, dar putem defini poziţia unui punct prin longitudine şi latitudine, prin coordonate curbilinii. *Aceasta e te soluţia pentru cazul general* al mişcării variate a sistemului de referenţă. Nu vom folosi coordonatele carteziane, ci coordonatele curbilinii sau coordonatele lui *Gauss* cum se mai numesc şi care nu sunt influenţate de caracterul neeuclidian al spaţiului, ca cele dintâi.

Einstein face să corespundă atunci fiecărui fenomen, fiecărei legi naturale un sistem de ecuaţii intre 4 coordonate gausiane luate in raport cu un sistem dat de coordonate curbilinii de referenţă.

Şi atunci, — aplicat in acest mod, — principiul relativităţii universale rămâne valabil şi se poate enunţa aşa:

Pentru exprimarea legilor naturii e indiferent care sistem *gausian de coordonate, îi folosim;* sau mai simplu: *pentru descrierea fenomenelor naturii sistemele gausiane sunt echivalente.* E indiferentă molusca de referență, pentru că dacă trecem dela un sistem gausian la altul, prin oricare transformare, ecuațiile care exprimă o lege a naturii rămân nealterate. Ele sunt invariante față de orice substituție care schimbă sistemul gausian de coordonate și reprezintă astfel un fel de *ecuații intrinsece* ale fenomenelor, independente de sistemul de referență.

Vedeți, în însăși ideea aceasta de dela'iu stă îndemnul la o prefacere, începută deja de mult, care se vădește acum mai mult ca oricând; întreaga fizică caută să-și exprime legile sale într'un limbaj intrinsec, independent de tot eșafodajul sistemelor de coordonate și care să fie în directă legătură cu fenomenul: e tendința actuală de a reveni în cercetările teoretice ale fizicei dela metoda analitică a lui Descartes la aceea a geometriei pure a lui Euclide.

In rezumat deci: există relativitate universală și desvoltările teoretice de mai sus ne indică mijlocul în care putem aplica acest principiu.

Desvoltările teoretice și indicarea căii de urmat, sunt însă deajuns: realizarea practică, mai ales aci unde ne putem înșela așa de ușor, este de o importanță capitală. Einstein face aplicația practică a acestor generalități dintr'o dată la legea cea mai generală din universul cunoscut la legea gravității. Prin generalizare și inducție el caută să dobândească ecuația intrinsecă verificată de mărimile caracteristice ale câmpului gravitației. Pornind dela ecuația lui Poisson, verificată de potențialul Newtonian:

$$\Delta V = -4 \pi \rho$$

pe care o generalizează, el ajunge prin calcule dificile la o ecuație tensorială satisfăcând principiul relativității generalizat, care ne dă legătura existentă între elementele ce definesc câmpul gravității și care într'o primă aproximație se reduce la ecuația de mai sus, stabilită în ipoteza atracției newtoniene.

Teoria aceasta matematică se desvoltă din punct de vedere formal, pe bazele puse de Einstein, pe zi ce trece mereu. Dar în special pentru ceeace privește atracțiunea și mișcarea corpurilor cerești, teoria poate da o nouă aproximație mai bună decât aceea a lui Newton, mai conformă cu observațiile precise astronomice.

[illegible] teoria relativităţii la mişcarea planetelor din sis- [illegible] s'a ajuns la o lege puţin diferită de aceea a lui Newton, dar care explică unele rezultate neclare până acum, ca, de exemplu, mişcarea periheliului lui Mercur. Legea lui Newton [illegible] stă la baza astronomiei actuale, trebue înlocuită cu alta; [illegible] e numai o primă aproximaţie. Toate calculele trebuesc [illegible] întreaga astronomie, partea care se întemeiază natural [illegible] lui Newton, trebue schimbată complet, pentru a-o pune de acord cu principiul relativităţii generalizat. Iată deci încă o disciplină, care caşi mecanica suferă o transformare completă.

Vedeţi dar, cum această lege, — aceste legi mai bine zis, căci, deşi scoase la iveală de un singur om într'un timp extrem [illegible], ele sunt mai multe, fiecare de o importanţă capitală, — vedeţi cum aceste legi revoluţionează toate domeniile în care pă- [illegible]. Aţi văzut cum plecând dela anumite consideraţiuni gene- [illegible], am trecut succesiv prin câteva domenii în care principiul [illegible] consecinţe neasteptate, foarte puţin în legătură cu conside- [illegible] primitive; apoi, deşi n'am enumerat decât în foarte mică [illegible] şi în treacăt, aplicaţiunile acestui principiu — care va avea [illegible] considerabilă asupra dezvoltării ulterioare a studiului [illegible] — totuşi v'aţi putut da seama, cred, de însemnătatea [illegible] de aspectul lui special, de caracteristicile sale, care îi re- [illegible] un loc deosebit între toate celelalte legi generale cunoscute [illegible]. Cele mai multe din concluziile la care ajunge sunt în- [illegible] paradoxale şi aceasta nu numai în anumite ramuri ale [illegible] ci aproape peste tot unde el este aplicabil; pe de altă [illegible] el este aplicabil în nenumărate împrejurări, ca să nu zi- [illegible] totdeauna, şi aceasta constitue iarăşi o latură caracteris- [illegible].

Studiile se urmează încă şi resultatele noi, unele decisive, experienţe, teorii parţiale, ipoteze noi, verificări apar mereu; nu [illegible] constatat însă niciodată şi poate că nici nu s'ar putea cons- [illegible] vre-o împrejurare în care principiul să nu se aplice, rămâ- [illegible] în acelaş timp valabil pentru celelalte cazuri descoperite până azi.

Legea este cu totul generală. O întâlnim nu numai în studiul ştiinţific, dar ea apare clar şi în fenomenele pe care le observăm în fiecare zi, în fiecare moment facem oarecum proba valabilităţii acestei legi.

Şi dacă fiecare din noi ar face acest lucru ori de câte ori s'ar prezenta ocazia, în orice observaţie accidentală, ca şi în studiile speciale; dacă cu tot dinadinsul am cerceta cele mai întortochiate cărări pe care s'a abătut spiritul omenesc, dornic de a cunoaşte natura şi legile ei, şi dacă am constata deplina, absoluta aplicabilitate a acestui principiu în toate fenomenele, în cele mai grandioase ca şi în cele mai mărunte, — atunci la lista deja foarte lungă a paradoxelor principiului relativităţii am mai putea adăoga încă un paradox; i-am zice supremul paradox al principiului relativităţii. Acesta:

„Există în univers un singur lucru absolut; şi acesta este tocmai principiul care ne spune că toate sunt relative".

LE PRINCIPE DE RELATIVITE

Conférence prononcée à l'Ecole Polytechnique
le 3 Juillet 1920

En ces temps de révolutions de toutes parts, de changements et métamorphoses totales, même la Science a suivi la tendance.

L'ensemble de la Science subit en ce moment une mutation radicale qui, par son ampleur la variété des domaines affectés, la nouveauté des concepts auxquels elle conduit, nous fait l'effet d'une véritable révolution ayant peu de points communs avec les mutations du passé. Elle transforme nombre de nos connaissances actuelles, fait disparaître certaines autres, s'efforce de nous imposer une nouvelle conception de la lumière et de nouveaux principes directeurs en vue de son étude.

Cette révolution fut causée par la découverte d'une loi absolument générale, mise en évidence sous son vrai jour pour la première fois en 1905 par Albert Einstein, professeur d'abord au Polytechnicum de Zurich et actuellement directeur d'un Institut de recherches physiques de Berlin. Cette loi fut appelée par lui "Principe de Relativité".

L'influence de ces recherches, non seulement au regard du domaine particulier qui leur a donné origine, mais aussi en ce qui concerne toutes les branches de la science, peut s'expliquer jusqu'à un certain point en analysant minutieusement les caractéristiques de ce principe et les comparant à celles des autres lois scientifiques générales aujourd'hui admises.

Par exemple, considérons le principe de conservation de l'énergie. Il constitue l'une des lois les plus générales applicable à tous les phénomènes. Ostwalt l'a étendu aux extrêmes limites de son domaine de validité. Mais en psychologie, philosophie etc, la loi de conservation de l'énergie n'apporte rien de nouveau, ne peut modifier en rien nos connaissances actuelles car, en ces domaines, de nos jours, une loi pour être absolument générale doit être de type purement qualitatif (par exemple du type Principe de Carnot).

Il n'en n'est pas ainsi pour le principe de relativité. Il nous fournit des relations et des lois quantitatives très fécondes intimement liées à une loi générale qualitative réunissant ainsi d'une part les spécificités propres à chacun des principes mentionnés plus haut et, d'autre part, élargissant par cette union même leur domaine d'application. Cette dernière considération vous permet de mieux réaliser l'immense influence, l'importance considérable, le caractère véritablement révolutionnaire d'une adhésion intégrale à ce principe fondamental.

Le principe de relativité domine tout d'abord tout le domaine habituellement connu sous le nom de philosophie naturelle, renouvelant certains aspects, complétant d'autres, abattant des disciplines entières comme c'est le cas pour la mécanique rationnelle et faisant apparaître certains résultats nouveaux des plus paradoxaux que l'expérience cependant vérifie fréquemment. Nous nous trouvons à un moment particulièrement important de l'histoire du monde où se construisent des fondements nouveaux, où se forgent des instruments plus perfectionnés en vue d'une science future plus complète que celle d'aujourd'hui. Mais, contrairement à d'autres situations, ici il y a plus. Le principe de relativité fournit une contribution philosophique, métaphysique, immédiatement utilisable et ceci est peut être l'aspect le plus important car il est à l'origine de tout le changement auquel nous assistons aujourd'hui. Dépassant les frontières des sciences exactes, le principe de relativité intervient par affinement de notre réflexion même pour nous contraindre à analyser de nouveau les données expérimentales primitives, à abandonner certaines notions, à en créer d'autres, à transformer en fin de compte notre façon de penser. Et, de ce point de vue, l'étude en soi d'un tel principe applicable aux phénomènes de la réflexion humaine peut avoir une influence extrême sur cette réflexion même.

En vérité, l'énoncé le plus simpliste du principe de relativité est que "toutes choses sont relatives". Vérité banale, évidente direz vous. Nous l'invoquons très souvent dans nos raisonnements, nos discussions. C'est ainsi; et pourtant si nous l'analysions plus attentivement nous nous rendrions compte combien peu nous sommes convaincus de la véridicité de cette affirmation répétée si fréquemment; nous verrions combien la notion d'absolu sous-tend encore nos conceptions, raisonnements, jugements.

Mais alors, que signifierait l'adhésion intégrale au principe de relativité? Cela impliquerait, purement et simplement de ce point de vue l'élimination de tout absolu dans nos conceptions c'est à dire une mutation radicale de notre manière de penser. Et quelle que soit l'attitude que prenne la réflexion humaine en face de ces problèmes, dorénavant il demeure que le principe a posé le problème et qu'il devra trouver une solution d'une manière ou d'une autre.

Mieux encore, le principe de relativité s'en prend à la racine de deux notions fondamentales sans lesquelles nous ne pouvons concevoir les phénomènes: l'espace et le temps. Il fait voir que l'idée que nous nous faisons de l'espace et du temps est erronnée et qu'elle doit être modifiée dans le sens d'une fusion de ces deux notions, considérées jusqu'à présent comme indépendantes et irréductibles, en une seule et qui seule représente une réalité physique. A travers ces considérations auxquelles nous parvenons par l'expérience et le raisonnement, la réalité nous met en face d'un problème métaphysique dont la solution dépend de l'acceptation ou du rejet du principe de relativité.

Pour exprimer de manière suggestive le progrès d'ordre philosophique auquel a conduit le principe de relativité, un professeur à l'Université de Genève (1) classe les diverses sciences en fonction du nombre de notions primordiales irréductibles sur lesquelles chacune s'appuie. Pour lui elles sont au nombre de six: les nombres, l'espace, le temps, la matière, la vie et la pensée. Le progrès réalisé par le principe de relativité consiste en ce qu'il permet de réduire à cinq ces notions fondamentales indépendantes, par fusion en une seule de l'espace et du Temps. Mais, en même temps, on pourrait dire, que pour la première fois il fait apparaître la possibilité d'une étude effective de certains problèmes d'ordre philosophique susceptibles de bénéficier de recherches précises effectuées dans le domaine des sciences exactes et établissant une ébauche de connection entre les domaines où la recherche s'effectue par raisonnement et expérience et ceux que la pensée humaine explore seulement à travers l'intuition.

Chivolson (2) peut alors à juste titre écrire: "La révolution qu'a causée en son temps la substitution de la conception géocentrique de l'univers par la conception héliocentrique est minime et de peu de signification par rapport à celle que l'homme doit s'attendre à éprouver s'il accepte dans toute sa généralité le principe de relativité, s'il se convainc de sa véridicité, s'il l'érige en pierre angulaire d'une nouvelle conception du monde".

Dans ce qui suit nous nous efforcerons d'esquisser à grands traits et en passant les concepts fondamentaux du principe de relativité, sans nous en tenir à leur genèse historique et nous attachant à ne donner que la

(1) Ch. Eug. Guye
(2) Lehrbuch der Physik 4. chap.5 Viewveg

quintessence des concepts fondamentaux qui constituent la base de l'édifice formidable de la théorie de la relativité. Nous analyserons tout d'abord la corrélation entre l'espace et le temps mentionnée plus haut et qui est l'une des idées les plus géniales d'Einstein. Nous exprimerons ensuite en langage précis cette idée et le principe de relativité selon la représentation de Minkowski, résultats d'une extrême élégance et riches d'enseignements. Nous nous pencherons un peu moins sur les conséquences déduites du principe de relativité - pas toujours paradoxales - et fort importantes mais qui n'entrent pas dans le cadre des idées générales que nous nous sommes assigné afin de passer à l'un des problèmes des plus intéressants et des plus ardus: l'étude du phénomène de la gravitation et de là à la généralisation du principe de relativité en principe de relativité universelle, assurément la loi la plus vaste, la plus hardie et peut être la plus essentielle des lois qui régissent notre univers.

Le principe de relativité fournit tout d'abord une réponse à la question: "Existe-t-il un mouvement, un temps, un espace absolus"?

Nous ne nous attarderons pas plus sur le sens du mot "absolu" car la discussion nous mènerait à d'autres domaines de la pensée où les notions sont plus nébuleuses et moins précises que celles qui ont vu naître le principe de relativité. Mais nous observerons en passant que la question de tout à l'heure est identiquement équivalente à celle-ci: "existe-t-il un mouvement en soi?". Existe-t-il un temps en soi indépendant d'autres circonstances?; existe-t-il un espace en soi? Vous voyez comment, dès le début, de par la nature particulière du problème que l'on se propose de résoudre, le principe est lié à divers problèmes parmi les plus débattus par l'esprit humain et vous concevez, s'il est étudié séparément dans des domaines bien définis, de quelle manière il pourrait nous servir de guide en de telles matières difficiles à traiter.

A la question posée, le principe de relativité, comme son nom l'indique d'ailleurs, répond par la négative et l'exprime de manière plus précise à savoir: "il n'existe pas de mouvement absolu car nous n'en pouvons rien discerner ni par les sens ni par n'importe quel type d'expérience dans la mesure où le système de référence où nous nous trouvons est au repos ou en mouvement rectiligne et uniforme c'est à dire de vitesse constante". Par exemple la nuit, dans une cabine de navire en mer, nous ne pouvons distinguer si le navire est immobile ou se meut. Tout le monde a eu, en train, l'illusion que le train reste immobile alors que les pòteaux télégraphiques défilent. Le Principe de relativité nous enseigne que ceci n'est pas seulement une illusion mais est une caractéristique des phénomènes:

quelle que soit l'expérience que nous réalisons nous ne pouvons nous rendre compte du mouvement du système où nous nous trouvons parce que les lois qui régissent les phénomènes sont les mêmes soit que nous étudiions ces phénomènes au repos soit que notre système avec tous les appareillages servant à l'expérience se trouve en mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Par exemple: si je laisse tomber une pierre sur le perron d'une gare, sa chute sera une ligne droite régie par une certaine loi. Si je laisse tomber un corps grave d'un train se déplaçant en palier et à vitesse de régime, le corps tombe encore selon une ligne droite comme tout le monde a pu le constater. Si nous effectuons des mesures, nous constaterons que la loi qui régit la chute est la même dans les deux cas. Ainsi la théorie de la relativité pose le principe suivant: " Pour un observateur au repos les phénomènes naturels suivent les mêmes lois que celles perçues par un second observateur en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au premier".

Il y a lieu d'observer que par phénomène naturel nous entendons n'importe quel type de phénomène : mécanique, optique, électromagnétique, etc.

En particulier le mouvement de la terre autour du soleil peut être considéré sur une portion suffisamment limitée de sa trajectoire comme étant rectiligne et uniforme. Dès lors, en conformité avec le principe de relativité nous ne pourrons pas mettre en évidence ce mouvement de translation de la terre à partir d'une quelconque expérience effectuée à sa surface. De telles expériences très précises, optiques, électromagnétiques ont été effectuées, par exemple l'expérience dite de Michelson (dont nous reparlerons ailleurs). Toutes ont donné des résultats en accord avec le principe. En fait, historiquement, l'expérience en question a précédé et suscité le principe tout en lui fournissant une première vérification expérimentale.

Afin d'éviter des confusions il est nécessaire de préciser quelque peu l'énoncé du principe sous la forme donnée ci-dessus. Soit un observateur placé dans un système fermé S au repos par exemple dans une gare. Soit un second observateur placé dans un système fermé S1 en mouvement - par rapport au premier - rectiligne et à vitesse constante par exemple un compartiment de train traversant la gare. Les deux observateurs sont dotés des appareils nécessaires à l'observation d'un même phénomène par exemple la chute des corps. Chaque observateur effectue l'expérience dans le système où il se trouve. Le Principe stipule que chacun des deux observateurs trouve séparément dans son laboratoire la même loi de chute des corps. Chacun des deux dans son système propre.

Mais si, par un artifice quelconque S voit l'expérience de S1, il la percevra d'une manière différente. Si un observateur sur le perron d'un gare et celui du train laissent tomber tous les deux un corps grave, chacun observera pour son expérience à lui une trajectoire rectiligne. Mais si l'observateur sur le perron observe celui du train en train de lâcher un corps grave par la fenêtre du wagon, la trajectoire de la pierre lancée par l'autre lui apparaîtra à lui comme une parabole.

La compréhension profonde du sens de ces observations nous aide considérablement à ne pas faire de confusions et à comprendre certaines conséquences paradoxales du Principe.

Pour terminer, remarquons que, dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des mouvements rectilignes et uniformes. La partie de la théorie de la relativité qui s'occupe exclusivement de ce type de mouvements se nomme la théorie spéciale et le principe correspondant, le principe spécial de relativité. Pour le moment donc, nous nous intéressons seulement à la théorie spéciale de la relativité, donc seulement aux mouvements rectilignes et uniformes nous réservant de préciser le point où nous envisagerons également des mouvements variés.

Ainsi donc les lois de la nature sont les mêmes que l'observateur soit au repos ou qu'il soit lui même en mouvement à vitesse constante. Pour quiconque a la moindre habitude des phénomènes physiques la chose présente un fort caractère d'évidence. En mécanique rationnelle le principe existe d'ailleurs sous la forme même que je lui ai donnée plus haut. Les équations du mouvement sont les mêmes que nous supposions le système d'axes de coordonnées au repos ou que nous le supposions en translation rectiligne uniforme. Dans certains traités le principe est énoncé explicitement sous le nom de principe de relativité de Newton. Si j'écrivais les équations sa vérification serait immédiate. Mais même ainsi, intuitivement, nous pouvons nous rendre compte de sa validité en nous souvenant que, en mécanique rationnelle, le mouvement rectiligne uniforme est de toutes façons équivalent au repos. Exemple: la loi d'inertie. Le mouvement rectiligne uniforme est une sorte de repos dynamique - si l'on peut associer ces deux mots - repos au sens que une pierre une fois lançée demeure dans son état de mouvement, sans variation de vitesse.

En fait, celui qui a donné à la théorie de la relativité sa forme actuelle, A. Einstein, n'a fait que généraliser un principe déjà existant explicitement en mécanique rationnelle et l'a appliqué à tous les phénomènes naturels mécaniques, électromagnétiques et n'importe quels autres.

Comme il a été dit, le principe était connu des chercheurs au moins dans certains domaines de la science et son caractère d'évidence garantit que sa connaisance intuitive est très ancienne. Toutefois aucun chercheur jusqu'à Einstein ne l'a mis en relief pour l'ériger en loi générale valable pour tous les phénomènes physiques et ceci est dû probablement au fait qu'ils n'ont justement pas perçu une utilité immédiate à établir cette loi; l'intérêt purement théorique de poser un tel principe naturel ne serait pas allé de pair avec des résultats positifs, pratiques, utilisables par la science. Et, au demeurant, lorsque quelqu'un entend pour la première fois l'énoncé du principe sous la forme que je lui ai donnée il demeure surpris et se demande: "comment donc se peut il que de cette vérité simple et évidente soit issue toute la révolution qui secoue la science et dont on a parlé ici" ? Il a raison. La réponse est simple. Le principe de relativité n'est pas mis en oeuvre tout seul, isolément. Il est complété par une série de concepts annexes extrêmement importants, dont certains sont plus remarquables que ceux associés au principe, qui lui donnent une valeur pratique et lui laissent seulement un rôle de coordination entre éléments en apparence étrangers les uns aux autres.

En science, plus un principe est général plus il est habituellement simple et donc d'autant plus délicat à appliquer à des phénomènes complexes. C'est pourquoi, si la découverte du principe en question est de la plus haute importance, les concepts annexes sont au moins d'une importance égale, absolument nécessaires, parfois géniaux car ils donnent la possibilité d'une application et usage effectifs du principe général. La loi de conservation de l'énergie de Mayer a eu besoin de toutes les idées détaillées et géniales de Helmholtz, Lord Kelvin etc avant de devenir réellement féconde. Le génie de Einstein apparaît justement ici en la découverte de concepts annexes et justement l'idée la plus remarquable qui dépasse par ses conséquences le principe même et dont la découverte a provoqué une véritable révolution, clef de voûte de l'édifice, est sa conception du Temps.

A un certain moment et de manière expérimentale - grâce à des expériences dont la plus célèbre est celle de Michelson - on a montré que le principe de relativité de la mécanique s'applique aussi aux phénomènes électromagnétiques en particulier optiques. Toutefois, en l'appliquant selon l'ancienne manière c'est à dire en utilisant les équations de la mécanique rationnelle, le résultat ne correspondait pas à l'expérience. On a recherché l'erreur de calcul et Einstein l'a trouvée au niveau d'une interprétation erronée de la notion de Temps.

Autrement dit, il s'est avéré nécessaire de remplacer la notion de temps telle qu'elle nous parvient depuis Newton c'est à dire la notion de temps absolu.

Nous devons tout d'abord observer que le principe de relativité s'intéresse exclusivement à ce que l'on appelle le temps physique, mesurable. Dans les équations de la mécanique, ou physiques, intervient une variable, une valeur, un nombre mesurable à l'aide d'un mouvement pendulaire étalon qui est appelé "Le temps". C'est ce nombre, cette valeur que nous appelons le "temps physique" et c'est lui qu'étudie le principe de relativité. L'étude des liaisons internes entre ce temps et la notion intuitive de durée doit être effectuée de manière particulière car elle présente des difficultés spécifiques.

En deux mots, Einstein considère - en conformité avec le principe de relativité - qu'il n'existe pas un temps absolu et que, plus précisément, il est absurde de parler d'un "temps" commun à deux points distincts de l'espace et qui ne sont pas au repos l'un par rapport à l'autre. Autrement dit, le nombre qu'introduit dans ses équations un physicien qui expérimente sur la terre ferme et qui est censé représenter l'intervalle entre deux phénomènes n'est pas le même, n'a pas la même valeur, que le temps utilisé par un autre physicien expérimentant à l'intérieur d'un train en mouvement à vitesse constante et qui considère ce temps comme représentant l'intervalle entre les mêmes phénomènes étudiés par le premier physicien. L'intervalle de temps écoulé entre deux phénomènes ne dépend pas seulement des deux seuls phénomènes mais aussi de l'observateur; plus précisément du lieu où il se trouve et de sa vitesse relative. Il est absurde de parler d'un intervalle de temps sans spécifier la position spatiale (en mouvement ou au repos) d'où nous le mesurons. Il est tout aussi absurde de dire qu'il existe entre deux phénomènes un intervalle de temps invariable que de définir la perspective d'un objet sans indiquer le point de vue d'où nous le regardons. Et comme il existe une infinité de perspectives pour un même objet lorsqu'on fait varier le point de vue, de même l'intervalle entre deux phénomènes - toujours les mêmes - peut avoir une infinité de valeurs selon la position et la vitesse de l'observateur. Tout ce qui va suivre a pour seul objet d'éclaircir ces notions.

Pour commencer, observons à nouveau que nous parlons ici du seul Temps physique mesurable par comparaison à un intervalle étalon. Comment s'effectue cette mesure? à l'aide de la notion de simultanéité, de coincidence, au moyen d'une horloge. En fait toutes nos considérations sur le temps dérivent de considérations concernant la simultanéité de divers phénomènes. Que veut dire par exemple la proposition: "cette conférence a commencé à 9 heures"? Simplement deux phénomènes: l'élocution du premier mot et la remise à l'heure de l'horloge sur la position 9 ont été des phénomènes simultanés. Désormais, pour simplifier, quand nous parlerons du temps nous ne parlerons que de la simultanéité de deux phénomènes. Il est dès lors clair que l'on pourra comparer une durée donnée avec une durée étalon, par exemple la rotation de la terre, etc, une durée n'étant que l'intervalle entre deux simultanéités.

Ceci dit, quelle est la nouveauté introduite par Einstein?

Jusqu'à maintenant - et aujourd'hui même - nous considérons le temps comme une quantité absolue existant indépendemment des phénomènes et de l'observateur, un peu comme un milieu homogène, dans lequel s'insèrent les phénomènes et donnant une étiquette à deux points entre lesquels s'écoule un intervalle de temps bien défini de quelque manière qu'on le considère.

Sans doute, nous ne pouvons avoir la prétention de vous convaincre en cinq minutes de l'exactitude des vues d'Einstein et encore moins de vous faire abandonner la notion de Temps absolu si profondément enracinée dans notre manière de penser qu'il paraît extrêmement difficile de l'abandonner. Je chercherai seulement à mettre en relief quelques questions sur lesquelles chacun pourra méditer et s'essayer à leur donner une réponse et vous verrez qu'elles ne sont pas aussi simples qu'il semble à première vue. Je vous exposerai ensuite la solution d'Einstein et vous verrez qu'elle est plus ou moins conforme avec ce qu'il est convenu d'appeler le bon sens bien que, en théorie de la relativité où tous les résultats sont paradoxaux, le "bon sens" ne joue plus aucun rôle. L'exposition de ces solutions nous permettra d'arriver à comprendre ses idées sinon à une conviction précise de leur véridicité.

Et maintenant une question : quel sens a la phrase suivante "en ce moment la lumière électrique s'allume simultanément ici et à Ploiesti"? Quelle est la signification précise du mot "simultanément" d'où naît toute la difficulté. Quelle est la définition de la simultanéité de deux phénomènes se produisant en deux points distincts de l'espace ?

Pour répondre à cette question, formulons la ainsi: nous nous proposons d'allumer simultanément deux lampes ici et à Ploesti, Comment allons nous procéder? Une méthode qui vient à l'esprit est la suivante. Prenons deux horloges, deux pendules de précision ici à Bucarest au lieu B. Faisons les fonctionner en synchronisme ce qui d'un point de vue théorique ne présente aucune difficulté. Transportons en une à Ploesti au lieu P avec un opérateur. Puis à une heure déterminée lue par chacun des opérateurs tous deux allument une lampe. Les phénomènes qui ont lieu en B et P sont-ils simultanés? Non. Pour qu'ils le soient il faudrait que les pendules soient restées synchrones et nous n'avons aucune preuve que le synchronisme établi en B s'est maintenu pendant le transport en P. Rien ne nous assure que le synchronisme n'a pas été perturbé par le simple effet du déplacement dans l'espace. En fait nous sommes certains du contraire et cela de manière manifeste. P se trouvant à une latitude différente de B les pendules ne vont pas battre de la même façon et le synchronisme est inexistant. Qui sait quelles autres causes peuvent elles aussi affecter le synchronisme?

De l'expérience proposée ci dessus nous ne pouvons tirer aucune conclusion. Comment définissons nous alors la simultanéité?

Pour le cas où les points P et B sont en repos relativement l'un à l'autre nous avons une échappatoire dans le fait expérimental suivant: la lumière se propage dans toutes les directions à une vitesse constante C=3.10**5 Km/s quelle que soit la source qui lui donne naissance.

Retenons ce fait qu'Einstein dans son premier ouvrage de 1905 a dénommé le principe de constance de la vitesse à laquelle se propage la lumière et qu'il a utilisé pour construire la théorie spéciale de la relativité.

Prenons le milieu M du segment BP et plaçons y un observateur avec un système de miroirs permettant de voir ensemble les points B et P. Allumons les lampes. Si l'observateur M voit simultanément la lumière de B et de P nous dirons que l'allumage des lampes a été simultané. En effet la vitesse de propagation est la même pour chacun des deux phénomènes. Donc, par définition, deux phénomènes ayant lieu en deux points distinct A et B de l'espace mais au repos l'un par rapport à l'autre sont simultanés si les rayons lumineux des deux signaux émis en A et B se rencontrent au point M milieu de AB.

De cette manière nous avons réduit la simultanéité de deux phénomènes ayant lieu en A et B à la simultanéité de deux phénomènes en un même lieu (excitation de la rétine ou impression d'une plaque photographique par des ondes lumineuses) auquel cas il n'y a plus d'ambiguité.

Nous avons ainsi défini la simultanéité pour deux phénomènes ayant lieu en des points au repos l'un par rapport à l'autre.

Passons maintenant au cas ou nous avons à comparer des phénomènes se produisant dans deux systèmes en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre par exemple le perron d'un gare et un train en mouvement. Il est inutile de s'appesantir car nous pouvons nous rendre compte immédiatement de l'inutilité de parler de simultanéité entre les événements précités en observant que deux phénomènes perçus comme simultanés par l'observateur sur le perron apparaissent comme ayant lieu à des époques diverses pour l'observateur entraîné par le train.

Plaçons en A et B sur le perron deux lampes électriques s'allumant simultanément (dont les rayons lumineux se croisent au point M milieu de AB). Les lampes sont visibles du perron comme du train. Puisque celui-ci est en mouvement de translation rectiligne uniforme, toutes les lois naturelles seront les mêmes pour l'observateur du train comme pour l'observateur au repos en conformité avec le principe de relativité. En particulier la définition de la simultanéité doit être la même.

Soit T le train en mouvement devant le perron. Au moment où la lampe A s'allume il lui correspond un point A' sur le train. De même quand B s'allume il lui correspond un point B'. Soit M' le milieu de A'B' où se trouve un opérateur muni de son système de miroirs. Ce point M' n'est pas fixe car le train se déplace en ligne droite à une vitesse V.

Lorsque les lampes s'allument simultanément sur le perron, un observateur en M les voit en même temps puisque les rayons lumineux se croisent en M. L'observateur en M' sur le train les verrait aussi en même temps à la condition que M' soit fixe. Mais M' se déplace sur une droite avec une vitesse V de sorte que pendant le temps nécessaire pour que la lumière lui parvienne le point M' s'est déplacé en M''. L'observateur voit alors la lumière de B' avant de voir celle de A' car la lumière doit parcourir avec la même vitesse, dans le premier cas la distance B'M'' et dans le second la distance plus grande A'M''. L'observateur situé dans le train voit d'abord la lumière de B' et ensuite celle de A' : pour lui le phénomène d'allumage des lampes n'est pas simultané.

Ainsi donc des phénomènes qui sont perçus comme simultanés par un observateur sur le perron ne le sont pas pour celui du train. Cela n'a pas de sens de parler de simultanéité indépendamment du système où l'on observe. Il faut toujours spécifier dans quel système on observe, sur le perron ou dans le train. Et s'il en est ainsi, dans la mesure où la simultanéité dépend du système d'observation, un intervalle de temps, une durée (bornée par deux simultanéités) dépendra de même du système de référence.

Sur le perron l'intervalle de temps séparant l'allumage des lampes est égal à zéro car pour M les phénomènes sont simultanés. Dans le train, l'intervalle de temps entre les mêmes phénomènes est plus grand et positif puisque M' voit d'abord B' et ensuite A' et cet intervalle est d'autant plus grand que la vitesse V est plus grande.

Donc l'intervalle de temps entre deux phénomènes dépend de l'observateur, de sa position dans l'espace, de la vitesse du système où il se trouve. Il n'y a plus de sens à parler du temps sans spécifier le lieu où il est mesuré et l'état de celui-ci en mouvement ou au repos. Le temps dépend du lieu et de la vitesse relative du mouvement uniforme en fin de compte d'un espace divisé par un temps appartenant à un autre système de référence.

Le temps apparaît comme étroitement lié à l'espace. On ne peut concevoir sans ambiguité un temps absolu, indépendant de l'espace, identique en tous points. Il n'existe pas de temps absolu; il existe seulement un temps local. Le temps ne peut se concevoir sans l'espace. De même et jusqu'à nouvel ordre - au moins en science expérimentale - nous ne pouvons concevoir l'espace, son extension, en l'absence de mouvement sans la notion de temps. Seule la réunion de ces deux notions, le temps et l'espace, peut constituer une réalité physique. Le Temps complète en un certain sens l'espace. Le Temps est une quatrième dimension de l'espace.

Il est clair que, en m'exprimant ainsi je n'ai rien dit de nouveau par rapport à ce qui précède, tout au plus ai-je fait une figure de style. Celle-ci n'est d'ailleurs pas neuve. Selon Flammarion, Diderot parlait déjà en 1777 du temps comme une quatrième dimension de l'espace.

En tant que problème philosophique, cette identité entre temps physique et espace a été étudiée et l'un des philosophes français contemporains les plus célèbres et plus en vogue (1) analyse de façon explicite la notion intuitive de durée issue de la succession des états de conscience, la distinguant du temps scientifique - ce que nous avons appelé le temps physique - apparaissant comme un milieu homogène indéfini donné dans sa totalité tout d'un coup. Pour pouvoir le découper en intervalles auxquelles nous attribuons un ordre de succession il est nécessaire d'observer ensemble plusieurs intervalles de temps afin de pouvoir déterminer lequel précède l'autre. En ce sens le temps n'apparaît pas avec un caractère de durée pure mais présente plusieurs des caractéristiques du milieu homogène appelé espace. Le temps scientifique se spatialise ou comme il le dit "le temps scientifique n'a pas de durée".

(1) Bergson

C'est cette distinction fondamentale que nous devons toujours avoir présente à l'esprit lorsque nous étudions la théorie de la relativité au moins en son état actuel.

Mais, en dehors de ces considérations les mots "le temps est une quatrième dimension de l'espace" ont une signification propre si nous leur donnons leur contenu précis dans les domaines où ils ont réellement une signification précise.

Le développement de la théorie de la relativité dans ce sens a été faite par un géomètre allemand d'une grande profondeur de vues, Minkowski, grâce auquel la théorie a pu être développée de manière formelle avec une rare élégance et symétrie. Il a formulé la conclusion trouvée plus haut, fourni des points de vue nouveaux et interéssants et établi les instruments analytiques à l'aide desquels la généralisation de la théorie est grandement facilitée.

Il ne sera dès lors pas inutile d'esquisser en quelques mots la véritable signification de ce qu'exprime la proposition mentionnée plus haut et de voir comment apparaît le principe de relativité à cette lumière.

Quelques clarifications sont encore nécessaires. Soit un système de coordonnées cartésiennes S au repos et un système S' en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au premier dans une direction quelconque. Pour simplifier les formules nous supposerons que les axes Ox coincident, que les autres sont parallèles et que le mouvement s'effectue dans la direction des x positifs en sorte qu'au début du mouvement les origines sont en coincidence. Un point M a pour coordonnées xyz dans la premier système et x'y'z' dans le second. L'intervalle de temps écoulé du début jusqu'à un instant déterminé est mesuré par un observateur de S' à l'aide d'une horloge qui indique un temps t'.

Réduit à son expression la plus simple, un phénomène se traduit par un système d'équations entre les coordonnées xyz d'un point ou ensemble de points, molécules, atomes, électrons, point d'une onde électromagnétique etc, ... et le temps. Au regard du système S la loi du phénomène s'exprime par les équations $f1(x,y,z,t)=0$. Comment s'exprimera ce phénomène lorsqu'on le rapporte au système S'? En conformité avec le principe de relativité, les lois des phénomènes sont les mêmes qu'elles soient exprimées par rapport au système S ou au système S'. Donc la loi du phénomène exprimée par rapport à S' sera $f1(x',y',z',t')=0$ soit la même relation mais entre les nouvelles coordonnées.

D'un point de vue mathématique nous pouvons aussi raisonner ainsi: pour l'observateur au repos il existe la loi exprimée par f1(x,y,z,t)=0. Pour trouver la loi correspondant à l'observateur S' il suffit de supposer que le système S s'est mis en mouvement avec la vitesse V. On peut déduire des équations valables au repos celles qui sont valables pour le cas du mouvement en les transformant de manière convenable exprimant purement et simplement que le système S' s'est mis en mouvement. Cette transformation s'effectue en remplaçant les coordonnées au repos x,y,z,t par des fonctions des coordonnées dans le système en mouvement x',y',z',t'.

Les formules de transformation sont très importantes car c'est par elles que l'on applique le principe de relativité.

Leur forme peut différer selon la manière où l'on analyse les phénomènes, en particulier selon que l'on adopte la notion ancienne de temps absolu de Newton ou que nous utilisions la conception d'Einstein. Nous les donnerons sous les deux formes.

1. Selon Newton, la conception ancienne du temps absolu stipule que le temps est le même dans les deux systèmes t=t'. on a:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

2. Si nous employons la notion de temps selon Einstein le seul recours au principe de relativité et à la valeur constante de la vitesse de la lumière permet de déduire les formules fondamentales du principe de relativité spéciale:

$$\chi' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où c est la vitesse de la lumière.

Les formules 1, basées sur une conception erronée du temps physique sont fausses. Les formules 2 constituent l'instrument analytique grâce auquel nous appliquerons le principe de relativité.

Si maintenant f1(xyzt)=0 exprime une loi naturelle la substitution des x,y,z,t par les valeurs tirées des formules 2 nous donne f1(x'y'z't')=0. En d'autres termes, en langage mathématique f1=0 est un invariant de la transformation 2 qui est appelée la transformation de Lorentz.

Egalement en langage mathématique, le principe de relativité s'énonce ainsi: toute loi naturelle est invariante par rapport à la transformation de Lorentz.

L'invariant fondamental est, comme on peut le vérifier:

3. $$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

qui exprime en tout et pout tout le fait expérimental sur lequel est basée toute la théorie spéciale de la relativité à savoir que la lumière se propage dans toutes les directions par ondes sphériques de vitesse c.

Si, suivant Minkowski nous posons dans les expressions 2 et 3

$$u = ct\sqrt{-1} \qquad u' = ct'\sqrt{-1}$$

l'expression 3 prend la forme

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = u'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

On constate après cette substitution que

a) la nouvelle variable u qui dépend du temps seulement joue exactement le même rôle que les coordonnées d'espace x,y,z.

b) la transformation de Lorentz prend une forme symétrique qui présente toutes les caractéristiques d'un changement d'axes de coordonnées rectangulaires (à savoir $\Delta = +1$ $E\,\alpha_i \alpha_k = o$) aussi bien dans le cas analysé ici que dans le cas général.

Ces points clarifiés, nous pouvons mieux suivre le fil des idées de Minkowski.

Nous avons vu qu'un phénomène peut être représenté par une succession de valeurs prises par les variables x,y,z,t. Considérons, avec Minkowski, un espace à 4 dimensions rapporté à un système de quatre axes rectangulaires O,x,y,z,u appelé Univers (Welt). Portons sur ces axes les valeurs x,y,z,u. La situation effective d'une expérience caractérisée par un ensemble donné de valeurs x,y,z,u sera représentée par un point de l'Univers. Lorsque les coordonnées varient, c'est à dire pour une succession de valeurs des variables, le point décrit une courbe. Cette courbe définit le phénomène car à chaque instant elle fournit les valeurs correspondantes de x,y,z. Donc selon l'interprétation de Minkowski toute loi naturelle est représentée par une courbe dans l'Univers à quatre dimensions.

Que devient alors le principe de relativité ?

On a vu que la transformation de Lorentz prend l'aspect d'un changement de coordonnées. Le principe de relativité stipule que les lois régissant les phénomènes ne changent pas quand on leur applique la transformation de Lorentz. Donc la courbe de Minkowski ne change pas non plus sous l'effet de cette transformation. Les formules 2 indiquent simplement que l'on change de système de coordonnées rectangulaires alors que 3 indique plus spécifiquement que dans le cas particulier où nous nous sommes placés, le changement se fait avec conservation de l'origine. Si l'on admet l'univers quadridimensionnel de Minkowski, le principe de relativité ne dit rien d'autre que: toute loi naturelle est représentée par une courbe indépendante du système d'axes auxquels elle est rapportée. Sa forme et ses proportions demeurent les mêmes.

On peut dire succintement en appelant ces systèmes d'axes des systèmes de Lorentz que "les systèmes de Lorentz sont équivalents pour la description des phénomènes" (Rougier).

Vous voyez comment, sous cette forme, le principe de relativité apparaît aussi comme une généralisation immédiate de choses connues et intuitives: dans l'espace géométrique ordinaire à 3 dimensions les propriétés d'une courbe, d'une figure géométrique ne dépendent évidemment pas du système d'axes de coordonnées auxquels on les rapporte. De même il est indifférent d'étudier la chute des corps par rapport à trois axes liés au plafond de la chambre ou à trois autres axes liés à un coin de la chambre. C'est une généralisation de propriétés connues pour l'espace à 3 dimensions au cas de l'espace à 4 dimensions.

De la sorte, l'introduction de 4 coordonnées x,y,z,u permet de réduire tout problème physique à un problème de géométrie dans un espace à 4 dimensions et on a vu que cette quatrième dimension, qui est en fin de compte un temps, joue dans cette théorie exactement le même rôle que les coordonnées d'espace x,y,z. Et, bien que en général on glisse rapidement sur la quantité -1 de l'expression de u, nous devons bien observer que u est véritablement une nouvelle dimension d'espace précisément à cause de la présence du symbole i. Il nous montre que le scalaire ct ne peut être mesuré sur aucune des trois directions Ox, Oy, Oz ni sur aucune intermédiaire mais doit être compté le long du quatrième axe, de la quatrième dimension et spécifiquement dans une direction normale aux trois autres.

Revenons de cette excursion dans l'espace à 4 dimensions plus près de la réalité à laquelle nous sommes habitués. Je souligne "réalité" parce que, du point de vue relativiste, la réalité et les apparences sont des notions interchangeables.

Nous avons vu quelle est la conception d'Einstein au sujet du temps. En se basant sur le principe de relativité, sur le principe de constance de la vitesse de la lumière et utilisant la notion de temps local, Einstein établit les formules de Lorentz par une voie différente de celle de Lorentz. Il est très intéressant de suivre comment le génie humain est parvenu à cette conquête.

Afin d'expliquer l'insuccès de l'expérience de Michelson dont on a parlé auparavant, un grand nombre de savants ont proposé diverses explications et fait toutes sortes d'hypothèses. Petit à petit ils se sont rapprochés de l'explication retenue à ce jour c'est à dire du principe de relativité comme en une spirale de plus en plus serrée autour du centre où se trouve la solution, chaque travail s'en rapprochant en peu plus. Lorentz parvient à ses transformations en étudiant les phénomènes électromagnétiques dans le cas de corps en mouvement. Mieux encore, rencontrant fréquemment au cours de ses calculs l'expression algébrique

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

il lui donne même le nom de Temps local

(dépendant de t et de z) sans y voir plus qu'une manière succinte de représenter une expression algébrique. Petit à petit, donc, les savants se rapprochent de la solution jusqu'à ce que, en 1905, Einstein atteint le coeur du problème et en un éclair de génie voit ce qui est essentiel et met immédiatement en relief le principe de relativité complété par une nouvelle conception de la notion de temps, justement le temps local de Lorentz, ce principe qui ordonne des phénomènes restés en dehors du cadre de la physique de l'époque mais qui, nous le verrons, retournent de fond en comble, révolutionnent toute la philosophie naturelle et, en raison d'une diffusion irrésistible, la plus grande part de nos conceptions actuelles.

Les résultats ont été obtenus peu à peu, se sont accumulés jusqu'à Einstein; la question a été étudiée sous tous ses aspects; à pas insensibles la science précise s'est rapprochée de la solution de plus en plus de sorte que l'apparition d'un génie qui s'en rende maître était en quelque sorte nécessaire au sens des automatismes scientifiques de Hertz.

En vérité les recherches sur le mouvement relatif remontent à Newton bien que, si l'on voulait, on pourrait en trouver de bien plus anciennes. Mais le flux de recherches récentes qui ont conduit de manière nécessaire au principe de relativité, ont débuté vers 1861 à l'occasion d'expériences dont les résultats ont dans tous les cas été négatifs. Entreprises par de nombreux expérimentateurs dont le plus célèbre est Michelson (1881) elles s'efforçaient par des méthodes optiques ou électromagnétiques effectuées à la surface de la terre de mettre en évidence un mouvement de translation de la terre sans recourir à l'éther.

L'hypothèse que l'éther est entraîné par un corps en mouvement est inadmissible. Si nous admettons l'existence de l'éther nous sommes obligés de le considérer comme au repos par rapport à la terre. En ce cas nous pouvons imaginer des expériences à effectuer à la surface de la terre qui nous permettent d'observer ce mouvement. Michelson a fait ce même raisonnement et a imaginé une expérience d'optique interférentielle dans ce but. Mais cette expérience exécutée très soigneusement a aussi donné un résultat négatif comme toutes les autres. Nulle expérience effectuée dans un système en mouvement, la terre, n'a été en mesure de mettre en évidence un mouvement propre par rapport à l'éther, un mouvement absolu.

La chose était à l'époque inexplicable. Tous les efforts des savants jusqu'à Einstein ont tendu à clarifier les raisons de ce résultat négatif. Toutes sortes d'hypothèses ont été proposées jusqu'à ce que Einstein montre qu'il est nécessaire puis qu'il est conforme au principe de relativité: il nous est impossible de nous rendre compte du mouvement uniforme d'un système à l'aide d'expériences effectuées dans ce système même pour la raison que les phénomènes sont les mêmes que le système soit au repos ou en mouvement.

Voici donc comment est né le principe de relativité, d'une expérience cruciale et de la nécessité de rendre compte de son insuccès. D'un échec sur un cas particulier le génie d'Einstein a tiré une théorie qui dépasse de loin les frontières les plus lointaines qu'aurait pu atteindre les conséquences de l'expérience seule.

Nous verrons plus loin comment cette situation s'est répétée et comment, pour la seconde fois, à partir de la plus grande difficulté de la théorie - la gravitation - nous disposons aujourd'hui des fondements les plus sûrs de la théorie de la relativité car ils sont vérifiés expérimentalement.

Mais le plus curieux est qu'un physicien connu A.Righi en deux communications à l'Académie des sciences de Paris, en 1919, et plus récemment en Mai 1920 a fait connaître un résultat surprenant. En se basant sur un théorème simple, inattaquable d'après lui, il reprend l'expérience qui selon le raisonnement de Michelson aurait dû conduire à un déplacement de bandes d'interférence démontrant ainsi le mouvement de translation de la terre. Il montre que ce type de déplacement est, en pratique, impossible à constater. Il se pourrait que l'expérience de Michelson comme sa répétition par Morley et Miller aient donné des résultats négatifs non pas parce que le principe de relativité rend nécessaire un tel résultat négatif mais, purement et simplement, parce que les instruments d'aujourd'hui sont incapables d'observer ces déplacements. L'expérience de Michelson, le premier fait expérimental précis à déterminer l'apparition du principe de relativité, perd son caractère d'expérience décisive et ne peut plus être considérée comme l'expérience cruciale du principe de relativité.

Et vous voyez alors toute la théorie splendide de la relativité, tout ce progès énorme (car quoi qu'il demeure des paradoxes de la théorie il existe néanmoins un progrès immense), tout cela serait dû à une erreur initiale, à un raisonnement faux de Michelson.

Bien souvent l'imperfection de nos méthodes de recherche, les approximations et même nos erreurs peuvent contribuer à l'avancement de la science. Fréquemment c'est un avantage car nous ne sommes pas assez clairvoyants ni ne disposons d'appareils assez perfectionnés. Si Michelson avait raisonné comme le fait Righi aujourd'hui nous n'aurions peut être pas aujourd'hui le principe de relativité. Nous nous hâtons de dire toutefois que de nombreuses autres expériences existent, indépendemment de celle de Michelson, tendant à démontrer la même chose et qui, au même titre que des vérifications astronomiques précises, constituent les bases expérimentales du principe de relativité (A l'heure actuelle le raisonnement de Righi est contesté par Jean Villey - voir Comptes Rendus T170,17,1920) de sorte que l'expérience de Michelson conserverait son caractère propre.

* * *

La première utilité pratique du principe de relativité a été de rendre compte du résultat négatif obtenu dans toutes les tentatives de mettre en évidence le mouvement de la terre à l'aide d'expériences optiques ou électromagnétiques. Ces expériences avaient été étudiées en profondeur par H.A. Lorentz sous leur aspect électromagnétique. En fait le principe de relativité s'est cristallisé à partir de l'étude de l'électrodynamique des corps en mouvement.

Le premier travail de Einstein, à savoir "Zur Electrodynamik bevegter Koerper" publié aux Annalen der Physik en 1905 se compose de deux parties. Une première à caractère cinématique où il expose le principe de relativité, la nouvelle notion de Temps et un certain nombre des conséquences qui en résultent. La seconde partie, à caractère électrodynamique, est l'application immédiate par Einstein de son principe à la théorie électrodynamique des corps en mouvement et aux équations de Maxwell-Lorentz, les premières équations de la physique à satisfaire la condition d'invariance par rapport aux transformations de Lorentz.

Déjà ce premier mémoire tellement simple, clair, élégant contient un grand nombre de conséquences dont le nombre laisse présumer la fécondité du principe nouvellement découvert et dont les conséquences sont pour la plupart paradoxales.

Il n'entre pas dans le cadre que nous nous sommes tracé d'étudier spécifiquement ces paradoxes qui dérivent de la théorie mais pour donner des exemples justifiant ce qui a été dit plus haut, nous énumérerons quelques uns parmi les plus simples.

Tout d'abord nous avons vu que si nous admettons l'existence de l'éther alors nous sommes obligés de reconnaître qu'il n'est pas entraîné avec les corps en mouvement car il doit être au repos absolu. Puisque, d'après le principe de relativité, il n'existe pas de repos absolu on en déduit que l'éther n'existe pas.

C'est une conclusion des plus difficiles à accepter par beaucoup de savants car la suppression de ce milieu auquel on a depuis un siècle attribué les propriétés les plus étranges et contradictoires afin de rendre compte d'un nombre croissant de phénomènes, laisse un vide qu'on ne sait combler pour le moment.

Les tentatives sont nombreuses ces temps ci pour s'efforcer d'admettre le principe de relativité et pour, en même temps, ne pas abandonner l'éther; la question n'est pas encore tranchée.

D'autre part, le radical des équations de Lorentz nous laisse présumer que l'on doit toujours avoir $v < c$ car autrement, le radical serait imaginaire: nul mobile ne peut atteindre une vitesse supérieure à celle de la lumière. Nous en verrons plus loin la signification physique: il faudrait dépenser une énergie infinie pour communiquer à un corps la vitesse de la lumière. Cette vitesse apparaît comme une valeur limite, une valeur critique et une constante universelle en théorie spéciale de la relativité. Comme aucun corps ne peut atteindre une vitesse supérieure à celle de la lumière, l'action instantanée à distance est impossible.

Mais si v < c supposons que le long de la terre passe une comète de vitesse colossale 290,000 km/s par exemple relativement à la terre. Supposons en outre que dans la comète, un électron se déplace par rapport à la comète à la vitesse de 20,000 km/s. Quelle serait la vitesse de l'électron par rapport à la Terre ?

Si l'on additionnait simplement les vitesses, w = v + v' = 310,000 km/s on obtiendrait une vitesse supérieure à c=300,000 km/s. Donc les vitesses ne se composent pas suivant les règles de la mécanique rationnelle.

Le Principe fournit la formule $$W = \frac{v + v'}{1 + \frac{v\,v'}{c^2}}$$

Valeur toujours inférieure à c avec v < c; v' < c. Le fait peut s'expliquer ainsi: il est vrai qu'en une seconde la comète parcourt 290,000 km/s et que durant le même temps l'électron parcout 20,000 km/s. Mais comme nous savons, la "seconde" sur la terre n'est pas la même, n'a pas la même valeur que la "seconde" sur la comète mesurée par un observateur sur la terre et on peut s'attendre à ce que les vitesses ne s'ajoutent pas. En effet, on déduit de la dernière équation de Lorentz:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'intervalle de temps est plus long dans le système en mouvement. Il y a plus; une longueur est une différence entre deux coordonnées. De la première équation nous déduisons:

$$l = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Donc une longueur, un corps en mouvement, mesurés au repos et en mouvement apparaissent raccourcis dans le sens du mouvement ou comme on dit les corps se contractent dans la direction du mouvement. Une sphère devient un ellipsoide de révolution.

C'est la célèbre contraction dans la direction du mouvement que Lorentz a supposée réalisée par la nature afin de pouvoir rendre compte du résultat de l'expérience de Michelson en l'absence d'une connaissance du principe de relativité.

En tant qu'hypothèse arbitraire dérivant de calculs algébriques et attribuant à chaque corps en mouvement une contraction effective, elle est pour le moins singulière.

En tant que conséquence d'un principe généralement valable et qui ne présuppose pas l'existence absolue d'une déformation, elle est acceptable. En effet il est essentiel de remarquer que seul l'observateur en repos relatif constate la contraction c'est à dire attribue à la longueur un moins grand nombre d'unités (qui, elles sont au repos) durant le déplacement que dans l'état de repos ou, ce qui revient au même, lorsqu'il se déplace ainsi que l'unité de mesure à la même vitesse que le corps ou la barre objet de la mesure.

Il n'y a pas de sens à parler de la longuer absolue d'une barre et donc il n'y a pas de sens à parler d'un raccourcissement effectif absolu. Pour un observateur au repos la longueur en mouvement diminue par rapport à la longueur au repos. Pour un observateur mobile avec la barre elle conserve sa longueur vis à vis de l'observateur car il y a repos relatif entre les deux ou, comme on le dit parfois, parce que les instruments de mesure en mouvement se sont raccourcis eux aussi dans le même rapport.

Il nous faut toujours nous souvenir que nous avons admis le principe de relativité. Si nous négligeons ce détail ou l'une de ses conséquences - chose fort aisée au demeurant - nous tombons immédiatement dans les paradoxes qui abondent dans cette théorie où même les résultats positifs apparaissent à première vue paradoxaux.

Nous avons vu que le principe du parallélogramme des vitesses de la mécanique rationnelle n'est plus applicable dès lors que l'on admet le principe de relativité. Au demeurant, et ce résultat est fondamental, toute la mécanique newtonienne devient valable seulement à titre de première approximation lorsque v est petit. En effet les lois naturelles doivent demeurer invariantes par rapport à la transformation de Lorentz mais les équations de la mécanique rationnelle ne présentent pas ce caractère d'invariance et donc ne peuvent représenter des phénomènes naturels. L'explication mécaniste de l'univers est illusoire. Lorsque v est petit devant c, les transformations de Lorentz se réduisent à celles de Newton en négligeant (v/c). La mécanique rationnelle s'applique aux faibles vitesses. Chaque fois que nous traiterons de vitesses élevées, dans l'étude des électrons par exemple, nous devrons utiliser la mécanique relativiste.

Sans plus parler de diverses considérations de culture générale, si bien exposées ici même par Monsieur l'ingénieur Manoilescu nous apercevons le motif d'ordre pratique qui justifie la réponse à la question que se sont posée de nombreuses personnes :en quoi le principe de relativité peut-il intéresser l'ingénieur? Les spéculations théoriques qui conduisent au domaine métaphysique n'ont rien à voir avec les pratiques de l'ingénierie.

Les anglais ne pensent pas de la sorte : récemment, la revue Engineering publiait des articles sur le principe de relativité. Par ailleurs, en France à la Société des Electriciens composée en majorité d'ingénieurs, Langevin tient une conférence sur le même sujet sans oublier tous les articles de vulgarisation dans une multitude de revues étrangères, littéraires, scientifiques, éducatives. Il est absurde de la part de quiconque de prétendre savoir quelles seront les mathématiques utiles aux ingénieurs d'ici à dix ou quinze ans. Mais il est encore plus absurde de ne pas voir que les ingénieurs opèrent effectivement de nos jours avec des vitesses élevées (pour ne citer que les tubes à rayons X, les lampes triodes voire la simple lampe à incandescence), et qu'une étude des mouvements électroniques dans ces appareillages pourrait conduire à des perfectionnements significatifs. Et cette étude est celle des vitesses élevées, de la mécanique relativiste qui remplace la mécanique newtonienne.

L'édifice entier et admirable de la mécanique rationnelle sur lequel les savants du siècle dernier pensaient pouvoir construire une théorie cohérente de tous les phénomènes naturels doit être abattu et reconstruit à nouveau sur les bases de la théorie de la relativité.

Plank et Einstein conservent de la mécanique le principe de moindre action. Ils s'efforcent à partir de ce principe, du principe de conservation de l'énergie et du principe de relativité d'édifier la théorie complète des phénomènes naturels.

La difficulté d'abandonner des théories familières de la mécanique et des notions aussi profondément enracinées que le temps absolu semblent si énormes à certains savants qu'ils tentent de conserver la théorie de Newton et de retrouver la théorie de la relativité par le truchement d'autres hypothèses moins révolutionnaires. Nous pouvons nous demander si ce procédé est légitime, nécessaire ou utile. Mais de toutes manière, puisque nos théories ne pourront jamais pénétrer jusqu'à l'essence des choses, alors tout bien pesé, il est peut être préférable de conserver le principe de relativité qui s'est révélé si fécond jusqu'à présent plutôt que de chercher à le réduire à quelque chose de plus ancien, connu sous toutes ses facettes ou à des procédés qui ne peuvent plus servir aujourd'hui de guide avec le même grand succès pour la recherche des phénomènes naturels.

L'étude plus approfondie des aménagements à apporter à la mécanique pour la mettre en accord avec le principe de relativité conduit à des résultats des plus ?

intéressants.

L'énergie d'un corps n'est plus exprimée par:

[illegible] démonstration ! (à étudier "approfondie" !!!)

$$\frac{m v^2}{2} \quad \text{mais par}$$

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 + \frac{m v^2}{2} + \frac{3}{8}\ \frac{m v^4}{c^2} + \dots$$

Pour v/c petit nous pouvons nous arrêter au second terme. L'énergie considérée par la mécanique rationnelle n'est qu'une faible fraction de l'énergie totale du corps sans compter l'énorme provision d'énergie latente mc d'où émane probablement l'énergie dissipée sous forme de radiations.

Lorsque v = c l'énergie est infinie.

Une énergie infiniment grande est nécessaire pour porter un corps à la vitesse de la lumière c'est pourquoi la vitesse de la lumière apparaît comme une vitesse critique qui ne peut être atteinte par aucun corps.

Mieux on constate, en tant que résultat dérivant nécessairement des équations obtenues, que l'absorption par un corps en mouvement d'une quantité E d'énergie par voie radiative entraîne l'accroissement de l'énergie totale selon l'expression:

$$\frac{E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

prouvé ! ?

L'énergie cinétique totale est donc:

$$\frac{m c^2 + E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left(m + \frac{E}{c^2}\right) c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(m + \mu)\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \mu = \frac{E}{c^2}$$

Un corps qui absorbe de l'énergie augmente sa masse de la quantité:

$$\mu = \frac{E}{c^2}$$

Dans cette théorie la masse n'est plus une constante caractéristique du corps mais une grandeur variable. Elle croît ou décroît selon que le corps absorbe ou émet de l'énergie sous forme radiative. Il y a là une sorte de transformation entre énergie radiative et masse un peu analogue en apparence à celle existant entre travail et énergie potentielle. En raison de leur transformation réciproque elles pourraient être de même nature. L'inertie de la matière serait due à la présence d'une plus ou moins grande quantité d'énergie accumulée. En tous cas on pourrait mesurer la masse d'un corps en déterminant la quantité d'énergie qu'il renferme; l'énergie du corps nous fournit une mesure de sa masse.

Et alors les deux lois fondamentales de la philosophie naturelle, la loi de conservation des masses et la loi de conservation de l'énergie se réduisent à une seule, la loi de conservation de l'énergie. Comme vérification immédiate, la loi de conservation des masses lors de réactions chimiques n'est plus rigoureuse car on ne tient pas compte de la chaleur dégagée lors de la réaction. Lorsque 2 grammes d'hydrogène se combinent à 16 grammes d'oxygène on n'obtient pas 18 grammes d'eau mais un peu moins, la différence étant due au dégagement de chaleur. Ainsi peut-on expliquer les faibles variations quantitatives qui apparaissent dans certaines lois chimiques.

Enfin, puisque à une quantité E d'énergie correspond une masse $\mu = \frac{E}{c^2}$, c'est que l'énergie est dotée de masse, l'énergie possède une inertie ce qui explique la pression de radiation de Maxwell. Si nous admettons aussi l'hypothèse des quantas selon laquelle l'énergie radiative est émise par unités discrètes, par quantas, et l'appliquons à l'énergie lumineuse en nous rappelant que nous n'avons plus besoin de l'éther, nous retrouvons l'hypothèse de l'émission lumineuse selon Newton, hypothèse que l'on avait abandonnée. L'un des avantages immédiats est que l'on peut considérer la lumière comme un projectile que la gravitation fera dévier. Le rayon de lumière issu d'une étoile et qui passe au voisinage du soleil ne sera plus une ligne droite mais une ligne courbe. La prévision d'Einstein a été pleinement vérifiée par l'expérience comme nous le verrons plus loin, les vérifications spécifiques de la théorie de la relativité provenant presque toutes de l'astronomie.

On rencontre de grandes vitesses d'une part dans l'infiniment petit, l'électron, et d'autre part dans l'infiniment grand, le mouvement des astres. Que devient alors la mécanique céleste à la lumière nouvelle portée par la théorie de la relativité ? Puisque les lois en sont celles de la mécanique de Newton et que cette dernière ne représente qu'une première approximation, tous les calculs doivent être repris sur de nouvelles bases.

Ici toutefois une nouvelle difficulté se présente et qui semblait insoluble: l'explication de la gravitation ou plutôt la découverte de lois plus précises capables de rendre compte de certaines phénomènes observés depuis longtemps mais non conformes à la loi de Newton. Les aspects délicats étaient au nombre de deux: en apparence, la gravitation se propage instantanément en contradiction non seulement avec le principe de relativité mais aussi avec l'opinion admise antérieurement à sa découverte, selon laquelle la vitesse de propagation à travers l'éther est finie. Le second point délicat est que la gravitation agit de la même manière sur tous les corps. Une plume et un morceau de plomb tombent à la même vitesse dans le vide, propriété mystérieuse, constatée depuis longtemps mais restée inexploitée, pire, sans analogie avec les autres propriétés connues à ce jour.

Après l'apparition de la théorie de relativité, de nombreux auteurs ont cherché à trouver une théorie satisfaisante de la gravitation ou du moins à concilier le principe de relativité et les faits observés. Le Principe tel qu'il a été décrit plus haut se révélait impuissant à fournir la solution. Il fut toutefois donné à Einstein, à l'aide d'une nouvelle série d'idées annexes géniales, grâce à une série de conceptions des plus hardies et grâce à une généralisation sans équivalent à ce jour en sciences naturelles, de pouvoir formuler la loi universelle correspondant au principe de relativité spéciale, de préciser nos idées concernant les phénomènes mystérieux de la gravitation et enfin d'extraire de la théorie entière la loi générale intrinsèque de la gravitation qui régit la totalité de notre univers.

Le chemin parcouru est immense et il se peut qu'un labeur de plusieurs décennies soit nécessaire pour élargir la voie jusqu'aux plus hauts sommets de la théorie de la relativité et pour l'explorer comme il se doit.

Einstein procède par sauts sans se préoccuper des résultats intermédiaires en n'ayant comme guide apparent que son intuition. Couche par couche, il généralise introduit des conceptions nouvelles, compare, juge, avec une richesse d'imagination qui fait penser que l'on est en train de lire les productions littéraires d'un savant doté d'une fantaisie débridée. A juste titre le lecteur parvenu à la fin se demande quelle valeur réelle peuvent avoir les conclusions. Conduit par l'intuition géniale de l'auteur et ne reprenant pas, de temps en temps pied avec la réalité, il éprouve le besoin d'effectuer un contrôle expérimental. Cette comparaison est décisive pour la théorie d'Einstein. Les phénomènes astronomiques la confirment avec la plus grande précision.

En 1915 devant l'Académie de Berlin il a fourni l'explication du mouvement séculaire du périhélie de Mercure sur son orbite, phénomène inexplicable jusqu'alors quelles que soient les hypothèses ad hoc introduites. Le résultats diffèrent seulement de 2" par rapport aux observations astronomiques. Einstein a déduit de sa théorie généralisée que les rayons lumineux issus d'une étoile fixe sont déviés lorsqu'ils passent au voisinage du soleil. Cela peut être observé au moment d'une éclipse. A l'occasion de la récente éclipse du 29 Mai 1919, les anglais ont organisé deux expéditions pour analyser le phénomène. Les résultats ont pleinement confirmé les prédictions d'Einstein ce qui a commotionné tout le petit monde scientifique et en particulier les anglais. La Société Royale a organisé une séance spéciale consacrée à la discussion de cette théorie de la gravitation dont le formalisme se perfectionne de jour en jour. La presse anglaise a consacré de nombreux articles à cette théorie. On trouve des articles de vulgarisation jusque dans les revues éducatives.

J'ai dit que le principe de relativité spéciale dont il s'est agi jusqu'ici était devenu insuffisant. Il faut y ajouter une idée annexe de même calibre. Voici quelles sont les considérations d'une rare simplicité qui conduisent à la solution du problème et que l'on appelle parfois le principe d'équivalence.

J'ai parlé jusqu'ici de systèmes en mouvement rectiligne uniforme, à vitesse constante sans accélération. Que se passe-t-il lorsque le système - disons un train - se meut de manière quelconque c'est à dire lorsqu'il existe une accélération? L'expérience nous le dit: lorsque le train s'ébranle les voyageurs demeurent en arrière et sont projetés dans la direction opposée au mouvement jusqu'à ce que le train atteigne sa vitesse de régime constante. Lorsque le train s'arrête, ils tombent vers l'avant.

Lorsqu'un ascenseur s'élève vers le haut nous avons la sensation que, au moment du départ nous appuyons sur le plancher, nous pesons plus lourd et ainsi nous restons en retard par rapport à l'ascenseur.

Supposons maintenant une chambre entièrement fermée dépourvue de fenêtres contenant un observateur muni des appareils de recherche les plus perfectionnés. Supposons que durant son sommeil nous transportions cette chambre quelque part dans l'espace loin de tout centre d'attraction. Au regard d'un système d'axes quelconque la cabine est au repos et nulle force de gravitation ne s'exerce sur elle. Supposons que sur la paroi extérieure on fixe un câble et que quelqu'un, une force constante ou une cause quelconque tire la cabine par l'intermédiaire du câble "vers le haut" de sorte qu'elle se déplace avec une accélération constante que nous dénommerons g. C'est à ce moment que l'observateur se réveille.

Que va-t-il constater? A tout instant se produit le même phénomène qui a lieu lorsque l'ascenseur démarre ou le train. A tout instant l'observateur "reste en arrière" par rapport à la cabine et puisque le plancher est bien obligé de suivre le reste de la cabine, l'observateur percevra ce que l'on perçoit dans un ascenseur c'est à dire qu'il appuie sur le plancher. S'il prend un corps dans sa main et le lâche le corps "restera en arrière" et comme rien ne le retient il tombera d'un mouvement uniformément accéléré par rapport à la cabine avec une accélération g.

Pour qui se souvient du principe de d'Alembert le phénomène est parfaitement clair: de par le mouvement tous les objets dans la cabine sont sollicités par une force d'inertie dirigée vers le bas qui génère précisément l'accélération g. Un corps laissé à lui même tombe dans la cabine avec un mouvement accéléré d'accélération g. Que va penser notre savant dans sa cabine hermétiquement close? Présentera-t-il le phénomène de la manière où nous l'avons exposé ci dessus? Pas le moins du monde. La cabine est close et il ne peut observer le déplacement. Il dira tout simplement: je constate que si je laisse un corps à lui même, il tombe vers le bas attiré par une cause quelconque; je constate que sur tous les corps de la cabine agit une force dirigée vers le bas; je suis au repos dans un champ de force. En étudiant le phénomène il verrait que cette chute s'effectue avec l'accélération g et trouverait dans ce phénomène la caractéristique de la gravitation: une force qui opère de la même manière sur tous les corps indépendamment de leurs propriétés physiques. S'il devait donner un nom à la cause qui produit la chute il pourrait parfaitement l'appeler "gravitation" en donnant à ce mot la même signification que sur la terre.

Donc notre savant dira: la cabine est au repos dans un champ de force. Mais, dit Einstein, il pourrait se demander pourquoi la cabine elle même ne tombe pas. En admettant qu'il ouvre une fenêtre et que, ne pouvant voir les étoiles il découvre l'existence du fil qui tire la cabine vers le haut et constate qu'il est tendu, il tirera la conclusion que la cabine et lui sont au repos attachés par un fil provenant de quelque part dans un champ de force analogue à celui de la gravitation. Donc l'observateur dans la cabine est incapable de distinguer s'il est réellement soumis à la gravitation ou si, tout simplement, le système où il se trouve est en mouvement uniformément accéléré.

La question de décider laquelle de ces deux alternatives est la "vraie" n'a pas de sens car les phénomènes sont les mêmes soit que le système de référence soit en mouvement varié (et non soumis à gravitation) ou qu'il soit au repos et que l'action de la gravitation s'exerce sur lui.

Autrement dit: le champ de gravitation produit le même effet qu'une accélération due à un mouvement quelconque du système. Il y a une sorte d'équivalence entre la gravitation et le mouvement varié.

Voici un résultat fondamental obtenu sur la base de considérations fort simples. Nous devons cependant observer que cette équivalence ne peut subsister si ce que l'on appelle la masse inerte n'est pas exactement égale à la masse grave c'est à dire si le rapport d'une force à une accélération exercée sur un corps n'est pas exactement égale au rapport entre la force de gravitation et son intensité g c'est à dire si le corps oppose une résistance, une inertie diverse de celle dont on parle, quand il s'agit de mouvements provoqués par la gravitation ou la force centrifuge par exemple. Ensuite de quoi il n'est même plus nécessaire d'ajouter que le théorème ci dessus ne définit pas une identité mais seulement une équivalence. Il n'est en effet pas démontré que n'importe quel champ de gravitation est nécessairement produit comme indiqué plus haut. Il peut exister des champs produits de manières diverses.

Le principe d'équivalence nous donne le pouvoir d'étudier les phénomènes dans un champ donné de gravitation et d'essayer ensuite d'appliquer les résultats à n'importe quel autre champ par généralisation. En même temps il nous indique une manière de généraliser le principe de relativité pour l'appliquer à n'importe quelle circonstance.

Par exemple nous connaissons l'évolution d'un phénomène dans un système S en mouvement rectiligne uniforme. Par le calcul, à l'aide de transformations nous pouvons trouver comment apparaît ce phénomène dans un système S' qui est en mouvement varié, avec accélération par rapport au premier. Mais l'existence d'une accélération est équivalente à l'existence d'un champ de gravitation. Donc l'opération mentionnée ci dessus nous fait obtenir le comportement du phénomène étudié plongé dans un champ de gravitation. Mieux encore, si la gravitation n'existait pas, tout rayon lumineux serait une ligne droite lorsqu'il se propage dans un milieu homogène; mais lorsqu'il traverse un champ gravitationnel (et étant constitué d'énergie il possède une inertie) tout rayon lumineux devient une courbe. L'expérience a confirmé de manière éclatante ce résultat paradoxal en apparence lors de la récente éclipse solaire de 1919.

Parvenus à ce point, faisons une pause pour jeter un coup d'oeil à ce que nous avons obtenu jusqu'à présent et en particulier sur le principe de relativité qui traverse maintenant une crise sévère en raison des conséquences mêmes dont il est l'origine.

Le principe de relativité dont on a parlé jusqu'ici et qu'on appelle, comme je l'ai dit, le principe de relativité spéciale peut s'énoncer de la manière suivante:

Les lois naturelles conservent la même forme quel que soit le système de référence auquel on rapporte les phénomènes qu'il soit au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Il a été exposé en tenant compte de deux particularités : 1) on ne considère que des mouvements rectilignes uniformes sans accélération et 2) on admet que la lumière se propage de façcon rectiligne et à vitesse constante.

Ce qui a été dit plus haut au sujet de la gravitation montre que n'importe quel champ de gravitation a un effet équivalent à celui d'un mouvement varié affectant le système de référence. Dans un espace soumis à la gravitation la trajectoire de la lumière est une courbe et la vitesse n'est plus une constante.

Ces deux constatations nons indiquent que les deux hypothèses sur lesquelles nous nous sommes appuyés pour établir le principe de la relativité spéciale ne sont plus valables dès lors que nous sommes placés dans un champ gravitationnel. Or la gravitation existe dans l'univers. Donc, dans notre univers le principe spécial tel qu'il a été décrit ne pourrait aucunement s'appliquer.

De là naît le doute légitime quant à l'existence réelle dans la nature d'une loi générale de la relativité ou si elle ne serait applicable que dans les seuls univers fictifs dépourvus de gravitation comme celui que nous avons considéré jusqu'ici et où n'existent que des liaisons rectilignes uniformes.

Nous sommes parvenus dans notre recherche à un instant décisif d'où dépend l'acception ou le rejet définitif de cette loi.

Le dilemme est le suivant:

a) ou bien il n'existe pas de relativité universelle et alors tous les développements précédents sont applicables seulement à des univers fictifs dépourvus de gravitation et d'accélération.

b) ou bien la relativité universelle existe et alors le principe doit être applicable à n'importe quel type de mouvement uniforme ou varié sans distinction c'est à dire que les lois naturelles doivent conserver la même forme que le système de référence soit au repos ou qu'il soit dans un état quelconque de mouvement varié absolu.

Il nous faut choisir entre les deux possibilités. La première se heurte maintenant toutefois à une perception intérieure, une conviction intuitive. La seconde se heurte au raisonnement effectué plus haut et qui nous spécifie que dans le cas de mouvement varié du système de référence le principe de relativité spéciale n'est plus applicable.

Nous devons reprendre ces contradictions dont l'une au moins est évidente.

En résumé: d'un côté l'existence d'un principe général de relativité implique sa validité pour n'importe quel mouvement quelle que soit sa nature; de l'autre, l'expérience et le raisonnement nous indiquent que dans le cas de mouvements variés le principe de relativité n'est plus applicable.

Alors de deux choses l'une: ou bien la relativité universelle n'existe pas ou bien notre raisonnement est faux.

La question est de la plus haute importance pour cette théorie et est d'une difficulté extrême. Et cette fois ci encore il a été donné à Einstein par une vision pénétrante du procédé même de généralisation de montrer que, en fait, le raisonnement employé est faux en ce qu'il ne tient pas compte de certaines particularités qui apparaissent lors d'un mouvement varié.

La difficulté qu'a vaincue Einstein en cette occasion est d'une nature similaire à celle dont il a été question lors de l'établissement du principe de relativité: le remplacement de la notion erronnée de temps. Sauf qu'ici il s'agit de l'autre notion fondamentale, l'espace.

Le "maître du temps et de l'espace" comme nous pourrions l'appeler nous a donné cette fois ci une notion entièrement nouvelle, utilisant de la manière la plus inattendue une notion découverte antérieurement au cours de recherches tout à fait autres. Il a trouvé l'erreur du raisonnement utilisé plus haut et fourni la manière correcte d'utiliser le principe de relativité généralisé qui subsiste encore aujourd'hui pour la totalité de notre univers.

Voici en deux mots la remarque de Einstein. Elle est fondée sur l'aspect de la théorie de la relativité spéciale qui stipule qu'un corps en mouvement rectiligne uniforme se raccourcit dans la direction du mouvement.

Soit un trièdre d'axes rectangulaires animé d'un mouvement varié quelconque dans l'espace. Soit C la trajectoire de l'origine que l'on supposera pour le moment tangente à Ox. Durant un intervalle de temps infinitésimal on peut considérer que le mouvement est rectiligne uniforme. Donc une longueur de 1 mètre par exemple dont une extrémité est en O disposée selon Ox se raccourcit pendant cet intervalle de temps. Durant le même temps d'autres barres de même longueur mais disposées à angle droit de la première, selon Oy et Oz par exemple ne subissent aucun raccourcissement car elles sont normales au mouvement. Des barres qui occuperaient des positions intermédiaires subiraient des raccourcissements apportionnés. A l'instant suivant la trajectoire change de direction et par exemple devient tangente à Oy. C'est alors le tour du mètre disposé le long de Ox de demeurer invariant alors que celui disposé le long de Oy se raccourcit. Si à l'instant suivant la vitesse change, les raccourcissements affectant les diverses longueurs seront différents. Donc, dans le mouvement, le raccourcissement d'une longueur dépend non seulement de son orientation mais aussi du moment attaché à cette longueur.

Si nous imaginons un solide K invariable lié au trièdre S de référence nous constatons que ses diverses parties vont se raccourcir les unes plus que d'autres d'abord dans une direction puis dans une autre selon une loi extrêmement complexe. Le corps solide va se déformer pendant le mouvement non pas seulement dans une direction mais dans toutes les directions suivant une certaine loi. Un solide en mouvement varié ne conserve plus sa forme invariable.

Si nous disposons dans une direction quelconque un mètre gradué, non seulement le mètre devient courbe mais il va se raccourcir de manière inégale de sorte que la longueur d'un centimètre à une extrémité ne sera en général pas égale à la longueur d'un centimètre à l'autre extrémité.

De même un ballon captif non entièrement rempli de gaz et soumis à un vent faible et variable change de forme et ondule en sa partie inférieure selon comme souffle le vent.

Quelle conclusion immédiate ressort de ceci? Que le trièdre de référence des trois axes rectilignes se déforme durant le mouvement. Les axes rectilignes deviennent courbes et les divisions égales tracées dessus au repos se transforment en divisions inégales d'inégalité variable.

On ne pourra plus utiliser un système d'axes cartésiens de coordonnées pour définir la position d'un point. On ne pourra plus parler d'un système de référence solide, géométrique, invariable et ayant un mouvement d'ensemble bien défini car c'est le trièdre même de référence qui se déforme lors du mouvement.

Nous ne rapportons plus la position du point à un solide invariable mais à quelque chose dont la forme n'est pas bien définie, est variable, une sorte de "pieuvre" de référence - comparaison suggestive par laquelle Einstein cherche à nous rendre intuitive la notion de solide déformable en mouvement varié - et une pieuvre n'a pas de forme bien déterminée, est mobile en tous ses points, prend la forme du rocher sur lequel elle se pose.

Voici donc un point acquis: en mouvement varié on ne peut plus utiliser les coordonnées cartésiennes mais on doit rapporter les points à une "pieuve de référence" déformable.

Ceci peut s'exprimer d'une autre manière. En vertu du principe d'équivalence, ou obtient les mêmes résultats en supposant que le système de référence S' est au repos et que il est soumis à un champ de gravitation variable.

Un solide, par exemple un trièdre d'axes cartésiens soumis à gravitation variable se déformera. De toutes façons, même si le champ de gravitation est constant dans le temps, et que dans cet espace on déplace de A en B un corps solide, alors du simple fait de ce déplacement le corps va se déformer. L'espace dans lequel s'exerce la gravitation n'est plus comparable à notre espace habituel celui de la géométrie euclidienne, l'espace euclidien. Dans l'espace euclidien une figure conserve sa forme et ses propriétés quelle que soit la manière dont on la déplace et le système de coordonnées cartésiennes est utilisable. Dans l'espace doté de gravitation, il n'en est pas ainsi. Les solides géométriques ne sont plus invariables au regard de n'importe quel déplacement. Par exemple des triangles formés de droites définies par des rayons lumineux deviennent curvilignes, la somme des angles sera plus grande ou inférieure à 180 degrés, les coordonnées cartésiennes ne peuvent plus s'appliquer etc.

En bref un espace soumis à gravitation est un espace non-euclidien. Si, de plus nous considérons la quatrième dimension de l'espace et nous souvenons que lors du mouvement les intervalles de temps varient eux aussi, nous arrivons au résultat fondamental suivant: l'espace quadridimensionnel soumis à gravitation est non-euclidien. Avec ces résultats nous pouvons retourner à résoudre la question posée. Le raisonnement effectué dans les considérations précédentes est faux en ce qu'il suppose que l'on se rapporte à un solide de référence absolu, invariable, indéformable et dont le mouvement d'ensemble soit bien défini, auquel cas on pourrait employer les coordonnées cartésiennes. Or, comme on l'a vu, tout cela est inexact et l'acceptation de ces hypothèses conduit à des conclusions fausses.

La relativité universelle existe mais l'application erronnée du principe a conduit à une contradiction. Comment l'appliquer correctement? La constatation de tout à l'heure sur le caractère non-euclidien de l'espace nous fournit la solution.

On a une représentation concrète d'une géométrie non-euclidienne en considérant par exemple la géométrie des figures sur une sphère ou sur une surface de courbure constante de signe quelconque.

Il n'est pas possible de construire sur une sphère un système d'axes cartésiens mais on peut définir la position d'un point par longitude et latitude, par coordonnées curvilignes. Ceci est la solution du cas général où le système de référence est en mouvement varié. Nous n'utiliserons pas les coordonnées cartésiennes mais des coordonnées curvilignes ou coordonnées de Gauss comme on les appelle et qui ne sont pas affectées par le caractère non-euclidien de l'espace comme les autres.

Einstein fait alors correspondre à tout phénomène, à toute loi naturelle un système d'équations entre 4 coordonnées gaussiennes prises par rapport à un système donné de coordonnées curvilignes de référence.

Alors, le principe de relativité appliqué de cette manière demeure valable et peut s'énoncer ainsi: l'expression des lois naturelles est indépendante du système gaussien de coordonnées utilisé ou plus simplement tous les systèmes gaussiens sont équivalents pour la description des phénomènes naturels.

La pieuvre de référence est indifférente car en passant d'un système gaussien à un autre quelle que soit la transformation, les lois exprimant une loi naturelle demeurent inaltérées. Elles sont invariantes au regard de n'importe quelle substitution modifiant le système gaussien de coordonnées et représentent donc une sorte d'équations intrinsèques des phénomènes, indépendantes du système de référence.

Vous voyez qu'en poursuivant cette idée en détail on trouve la source, l'impulsion d'une révolution commencée depuis longtemps et qui devient maintenant plus visible que jamais. Toute la physique s'efforce d'exprimer les lois qui la gouvernent en un langage intrinsèque indépendant de tout l'échafaudage des systèmes de coordonnées et en connexion directe avec le phénomène. C'est une tendance actuelle que de revenir en recherches théoriques physiques de la méthode analytique de Descartes à celle de la géométrie pure selon Euclide.

En résumé: la relativité universelle existe et les développements théoriques ci dessus nous indiquent le mode d'application du principe.

Les développements théoriques et l'indication des voies à suivre ne sont pas pour autant la fin. La réalisation pratique - et tout particulièrement là où nous pouvons nous tromper si facilement - est d'une importance capitale. Einstein obtient d'un coup comme application pratique de ces généralisations la loi la plus générale de l'univers connu, la loi de la gravitation. Par généralisation et induction il cherche à déterminer l'équation intrinsèque vérifiée par les grandeurs caractéristiques du champ de gravitation. En partant de l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel newtonien $\Delta V = -4\pi\varrho$ qu'il généralise, il arrive après des calculs laborieux à une équation tensorielle satisfaisant le principe de relativité généralisé et qui fournit la connexion existante entre les éléments définissant le champ gravitationnel et qui, en première approximation, se réduisent à l'équation donnée plus haut valable sous l'hypothèse de l'attraction newtonienne.

Cette théorie mathématique se développe d'un point de vue formel. Sur les fondements posés par Einstein on construit continûment. Plus particulièrement, en ce qui concerne l'attraction et le mouvement des corps célestes, la théorie peut fournir une approximation meilleure que celle de Newton plus conforme aux observations astronomiques précises.

En appliquant la théorie de la relativité au mouvement des planètes du système solaire on a abouti à une loi légèrement différente de la loi de Newton mais qui rend compte de certains résultats demeurés peu clairs jusqu'à présent comme par exemple le mouvement du périhélie de Mercure. La loi de Newton qui est à la base de l'astronomie actuelle doit être remplacée par une autre, l'ancienne n'étant qu'une première approximation. Tous les calculs sont à refaire; toute l'astronomie, au moins en sa partie qui se base naturellement sur la loi de Newton est à transformer intégralement afin de la mettre en accord avec le principe de relativité généralisé. Voici donc encore une discipline qui, à l'instar de la mécanique, subit une transformation complète.

Vous voyez donc comment cette loi, plus exactement ces lois, quand bien même elles furent mises en évidence par un homme seul en un intervalle de temps extrêmement court, chacune d'une importance capitale, révolutionnent tous les domaines où elles pénètrent. Vous avez vu comment, en partant de certaines considérations générales on est passé successivement à travers divers domaines où le principe portait à des conséquences inattendues fort peu en rapport avec les considérations primitives. Ensuite - et bien qu'on n'aie seulement dénombré une partie réduite des applications de ce principe, et seulement en passant, - vous avez pu vous rendre compte, j'espère, de sa signification, de son aspect particulier, de ces caractéristiques qui lui confèrent une place à part entre les autres lois générales connues à ce jour.

La plupart des conclusions auxquelles il aboutit sont invariablement paradoxales et ceci non seulement dans certaines branches de la science mais presque partout où il est applicable. D'un autre côté il est applicable dans un nombre incalculable de circonstances pour ne pas dire toujours et ceci constitue encore un autre aspect caractéristique.

Les études se poursuivent encore et des résultats nouveaux, certains décisifs, des expériences, théories partielles, nouvelles hypothèses, vérifications, paraissent sans discontinuer. On n'a toutefois jamais trouvé une seule circonstance où le principe ne s'applique pas tout en demeurant valable pour les autres cas découverts jusqu'à ce jour. Peut être est il impossible qu'il en soit autrement.

La loi est absolument générale. On la rencontre non seulement dans les études scientifiques mais elle apparaît clairement aussi bien dans les phénomènes observés quotidiennement. A tout instant nous vérifions d'une manière ou d'une autre la validité de cette loi.

Et si chacun d'entre nous faisait cela à chaque fois que l'occasion s'en présente à chaque observation accidentelle, comme à l'occasion d'études spécifiques; si, pour de bon il explorait les voies les plus tortueuses dont s'est détourné l'esprit humain, désireux de connaître la nature et ses lois; s'il constatait la pleine et absolue applicabilité de ce principe en tous phénomènes, les plus grandioses comme les plus minimes, alors à la liste déjà fort longue des paradoxes du principe de relativité on pourrait en ajouter un autre, je dirais le paradoxe suprême du principe de relativité à savoir:

"Il existe dans l'univers une seule chose absolue, c'est justement le principe qui nous enseigne que toutes choses sont relatives".

Teoria generală a relativității

Conferință scrisă pentru Soc. Studenților Școlii Politecnice

AL. PROCA
Inginer

Teoria lui Einstein, nu mai stă astăzi, între preocupările opiniei publice, pe planul întâi. Alte chestiuni i-au luat locul şi ocupă actualmente atenţia marelui public; în schimb în cercurile ştiinţifice se urmează o activă cercetare critică a teoriei, a punctelor ei slabe, a extensiunilor şi a consecinţelor ei.

Pentru o înţelegere mai deplină şi pentru formarea unei păreri obiective, situaţia de azi e preferabilă celei de eri; judecata şi spiritul critic sunt, în orice caz, mai libere, mai puţin influenţate de elemente străine, decât altădată; şi acest lucru îşi are importanţa sa, când e vorba de o teorie despre care s'a putut spune că îşi datoreşte succesul său numai unei „sugestiuni a maselor".

Am avut plăcerea să expun în faţa d-v. într'o conferinţă, câteva din ideile fundamentale ale teoriei lui Einstein [1]). N'am avut însă atunci posibilitatea să ating unele chestiuni decât în treacăt.

Imi propun astăzi să completez această lacună, expunând totodată teoria lui Einstein dintr'un punct de vedere diferit de cel adoptat în conferinţa precedentă. In acest chip conferinţa de

---

1) Vezi Al. Proca *Principiul relativităţii*, Bul. Soc. Politecnice 1920, Nr. 7—8 şi 11—12.

astăzi va completa pe cea dintâi; mă voi îngriji însă ca cei ce n'au asistat la prima să nu fie stânjeniţi de acest fapt în urmărirea celei de a doua.

Voi căuta în primul rând să fixez diferenţa faţă de punctul de vedere precedent lămurind câteva din aspectele noi, pe care le-a dobândit teoria relativităţii graţie unor descoperiri posterioare lucrărilor lui Einstein. Odată lămurit acest punct, voi căuta să analizez elementul fundamental al întregei teorii în noua ei înfăţişare, anume multiplicitatea cu 4 dimensiuni $x\ y\ z\ t$, adică ceeace se numeşte de obiceiu *spaţiul cu 4 dimensiuni* al teoriei lui Einstein. Această denumire e folosită curent de matematicieni; totuşi ea e incorectă şi poate provoca confuzii la cei nefamiliarizaţi cu acest fel de noţiuni. Cum în cazul nostru nu există pericol de confuzie, voi păstra această denumire tocmai fiindcă nu e riguros exactă, folosind această nepreciziune pentru a sprijini o analogie explicativă, menită să prezinte lucrurile într'un chip mai accesibil intuiţiei noastre Ca aplicaţie imediată voi trata problema gravităţii, după Einstein.

Apoi condus în mod natural de desvoltările precedente la un studiu mai aprofundat al spaţiului cu 4 dimensiuni, voi căuta să arăt care e procedeul matematic prin care se studiază efectiv acest spaţiu, şi în ce mod se aplică aceste calcule teoriei relativităţii. Revenind la fenomenele fizice voi semnala câteva consecinţe interesante ale teoriei şi desvoltările la care au dat loc. Mă voi ocupa apoi de o extindere foarte importantă, a teoriei datorită lui H. Weyl, şi cu aceasta voi termina expunerea teoriei generale a relativităţii. In fine, voi mai semnala principalele obiecţiuni care s'au adus acestei teorii, aşa că la sfârşit vom fi dobândit o privire de ansamblu asupra teoriei lui Einstein, expusă dintr'un punct de vedere care, foarte probabil, va rămâne cel clasic.

*
* *

Felul modern de a expune teoria relativităţii diferă mult de cel folosit mai înainte. Dela primul memoriu al lui Einstein el s'a schimbat, evoluând după cum evoluează de altfel expunerea oricărei teorii fizice, care se îmbogăţeşte mereu cu rezultate noi, şi care n'a ajuns încă la un aspect de ansamblu definitiv. Se pot distinge până acum 2 perioade în această evoluţie. In prima, al cărei punct de vedere l'am adoptat în conferinţa precedentă, expunerea urmărea ideile fundamentale prezentându-le în înlănţuirea lor logică; cu alte cuvinte expunerea avea caracterul unei analize a fenomenelor în vederea descoperirei unor anumite rezultate.

Cu totul altfel se prezintă lucrurile în stadiul actual al teoriei. Aceasta a ajuns în desvoltarea ei la un punct staţionar. S'au dobândit o serie de rezultate care au fost generalizate la extrem S'au descoperit apoi elementele fundamentale care permit coördonarea acestor rezultate într'un tot armonic. Aşa că, acum, ţinta oricărei expuneri este punerea în evidenţă a acestui tot armonic, înfăţişarea teoriei ca o construcţie de sine stătătoare, clădită în mod logic pornind dela o serie de fapte şi principii luate drept bază şi degajată de orice alte teorii parazite. Cu alte cuvinte o expunere modernă a teoriei relativităţii este o sistematizare, o rearanjare după un plan logic şi estetic a tuturor rezultatelor dobândite până aci,—într'un cuvânt o *expunere sintetică.*

Evoluţia aceasta este de altfel comună tuturor teoriilor ; procedeul de analiză, indispensabil descoperirii, face loc sintezei, absolut necesară pentru o expunere şi pentru o privire de ansamblu, care să aşeze definitiv teoria între celelalte discipline ale ştiinţei.

In cazul nostru particular mai există un motiv pentru ca lucrul să fie aşa: teoria generală a relativităţii este ea însăşi o vastă sinteză a fenomenelor fizice, o teorie care, strângându-le la olaltă caută să le deducă pe toate în chip uniform, dintr'un principiu unic.

I se zice într'adevăr „teoria relativităţii", dar conţinutul nu mai corespunde de loc cu titlul ei. De fapt azi teoria relativităţii generale trebue pusă în rândul teoriilor care caută să găsească ceeace se numeşte,—cu un cuvânt destul de impropriu,—o „explicaţie" *unică* a fenomenelor fizice.

In acelaş mod se căutau altădată „explicaţii" mecanice ale Universului; orice fenomen trebuia să fie reductibil la fenomene de mecanică, adică supuse unor legi care derivau din principiile fundamentale ale acestei discipline. După ce s'a constatat insuccesul acestei explicaţii s'a căutat o alta mai completă, explicaţia electromagnetică. Aceasta reducea fenomenele, în ultimă analiză, la fenomene electromagnetice elementare, înglobând pe lângă fenomenele considerate mai înainte şi pe acelea cărora nu li se putuse construi încă un model mecanic.

Sinteza realizată era astfel foarte completă. Aproape toate categoriile de fenomene fizice mai importante se puteau explica cu ajutorul acestei teorii electromagnetice. Rămăsese însă o excepție: fenomenelor gravității nu li se putuse găsi până acum câțiva ani niciun model.

Teoria generală a relativității le explică în fine și pe acestea și ne dă un model după care ne putem închipui mecanismul rămas atâta timp de nepătruns al fenomenului; apoi, printr'un procedeu analog, ea reușește să explice și fenomenele electromagnetice. In acest chip ea realizează cea mai completă sinteză a fenomenelor fizice, reunind printr'un element comun, într'o explicație unică și nouă, fenomene care după aparențe sunt fundamental deosebite între ele.

Pe măsură ce știința înaintează, adică pe măsură ce se descoperă și se cercetează fapte noi, o altă sarcină se impune savanților: aceia de a cataloga și de a clasa aceste fapte, aranjându-le în arsenalul cunoștințelor noastre în grupe, într'o ordine logică justificabilă, urmând în orice caz un fir conducător.

Am putea compara foarte bine aceste cunoștințe cu niște piese de muzeu; ele nu pot fi trântite unele peste altele la întâmplare ci trebuesc aranjate, clasate în ordine, ținând seama de înrudirea lor, de legăturile care există între ele.

Varietatea acestor clasificări este infinită, ele diferind prin elementul de legătură pe care îl considerăm. In teoria mecanică a universului acest element de legătură îl formau principiile și legile mecanicei, de care ascultau toate fenomenele; în cea electromagnetică ipotezele și ecuațiile electromagneticei; în teoria generală a relativității, elementul de legătură il formează principiile geometriei și *continuul cu 4 dimensiuni spațiu-timp*, care alcătuiește Universul.

Mai clar: Ansamblul tuturor punctelor din spațiul x, y, z, și a tuturor momentelor de timp t, formează din punct de vedere matematic un continuu cu 4 dimensiuni $x y z t$, pe care-l vom numi: universul, multiplicitatea sau spațiul cu 4 dimensiuni. *Acesta* este elementul de legătură în teoria lui Einstein, după cum se va vedea mai precis din lămuririle ce vom da mai departe.

Fiecare din clasificările de mai sus e mai coprinzătoare decât cea precedentă; în această privință e foarte interesantă o comparaţie între teoria mecanică a fenomenelor şi sinteza geometrică a lui Einstein. Şi în una şi în cealaltă folosim ca elemente fundamentale cele 4 cantităţi x, y, z, t. Dar câtă deosebire în rezultate! Câtă diferenţă în capacitatea de a „explica", datorită numai faptului că elementul de legătură şi punctul de vedere s'au schimbat.

Aşadar în rezumat teoria generală a relativităţii este o teorie care intră în categoria teoriilor de sinteză a fenomenelor, adică a acelor teorii care caută să dea o explicaţie unică fenomenelor naturale.

* * *

De fapt, o teorie care „explică" un fenomen nu este altceva decât descrierea unui „*model*" al acestuia adică a unei serii de fenomene elementare, — de natură determinată de caracterul teoriei, — şi al căror mecanism reproduce fenomenul dat cu absolut toate caracteristicile sale. De exemplu teoria ondulatorie a luminei dă un model mecanic al fenomenelor luminoase, căci ne putem închipui eterul vibrând în aşa fel încât să reproducă întocmai toate particularităţile luminei.

Un model, de orice natură, al fenomenelor gravităţii, trebue în acelaş mod, să fie un mecanism care să poată reproduce 2 caracteristice esenţiale ale acestor fenomene: 1) acţiunea gravităţii să se exercite cu aceiaşi intensitate asupra oricărui corp independent de natura lui şi 2) ea să se propage cu o iuţeală infinită. Niciun model mecanic sau electromagnetic nu poate realiza aceste condiţiuni; nu s'a putut deci explica gravitatea nici prin teorii mecanice, nici prin ipoteze electromagnetice.

Teoria generală a relativităţii prezintă şi ea un asemenea model; dar ceeace o deosebeşte de celelalte teorii este caracterul singular, neobişnuit, al elementului cu ajutorul căruia se realizează sinteza.

Intr'adevăr, în teoria mecanică a Universului, totul se putea reduce la *mişcare*, adică la un fenomen *fizic* elementar; tot aşa în celelalte teorii sintetice elementul de legătură era un fenomen sau o categorie de fenomene fizice simple. Spre deosebire de toate acestea elementul de legătură din teoria generală a relativităţii *nu este ceiace suntem obişnuiţi să numim fenomen fizic*;

elementele constitutive ale modelului nu sunt fenomene fizice. *Teoria relativității „explică" cu ajutorul unui element geometric*, cu ajutorul spațiului cu 4 dimensiuni; aceasta o deosebește de alte teorii de sinteză și în aceasta constă singularitatea ei.

Până azi spațiul și timpul interveneau în mod natural în fizică: orice fenomen trebuia să aibă loc *în* spațiu și *în* timp caracterul acestor noțiuni era însă acela al unor elemente inerte, pasive. *Ideia fundamentală și caracteristică a teoriei generale a relativității este tocmai introducerea spațiului* (mai precis a multiplicității cu 4 dimensiuni: 3 coordonate spațiale și una timp) *ca element activ, determinant al fenomenelor.*

Până azi spațiul era oarecum vasul în care s'ar petrece reacțiunile chimice pe care le studiem; meritul lui Einstein este de a fi arătat că și *substanța vasului* participă la orice reacțiune chimică într'un mod mai mult sau mai puțin pronunțat; că această acțiune are o importanță fundamentală și că poate explica fenomene rămase neexplicate până în prezent.

In ce mod se realizează cele ce am afirmat aci, vom cerceta îndată.

* * *

Așadar teoria generală a relativității ia ca element fundamental, cu ajutorul căruia „explică" fenomenele, multiplicitatea *v₄*. Grație lucrărilor lui Einstein și Weyl se poate construi, pornind dela acest element și sprijinindu-ne pe principiile geometriei, teoria fenomenelor fizice adică un model geometric al acestor fenomene. Această construcțiune, e însă geometrie pură; așa că în definitiv caracteristica teoriei relativității e o *geometrizare* a fizicei, o reducere la geometrie; și din acest punct de vedere mult mai nemerit ar fi să i se înlocuiască numele actual, cu acela de *teoria geometrică* sau *geometria fenomenelor fizice*.

Așa dar ideile lui Einstein au condus la o geometrizare a fizicei; acest fel de a formula concluzia arată lămurit tot aspectul singular, neobișnuit, caracteristic acestei teorii și explică de ce unii s'au întrebat dacă, în definitiv, e util să reducem fizica la geometrie, și mai întâi de toate dacă lucrul e posibil.

In această privință, nu trebue să uităm că, în genere, teoriile de sinteză sunt prea limitative; complexul extraordinar de divers al naturii nu poate fi prins în câteva ecuații care vor fi prea particulare ca să ne poată da indicaţiuni asupra tuturor fenomenelor pe care nu le cunoaştem încă.

O geometrizare a lumii e şi ea o limitare a câmpului de cercetări; cunoaştem într'adevăr de pe acuma, fenomene naturale care nu intră în schema acestei geometrii a lumii, de ex. fenomenele vitale. Aşa că la un moment dat şi această teorie geometrică a fenomenelor va trebui să cedeze locul alteia mai coprinzătoare decât ea. Azi teoria relativităţii constituie teoria de sinteză cea mai apropiată de idealul teoriei explicative unice; mâine e probabil că şi ea va deveni prea îngustă, ca şi oricare altă teorie de acest gen.

Cu alte cuvinte *nu* aceasta este latura caracteristică cea mai importantă a teoriei generale a relativităţii şi care să merite a ocupa într'un studiu primul plan; importanţa teoriei geometrice a lumii ca sinteză a fenomenelor e relativă la noi, la epoca noastră, poate la secolul nostru; ca teorie de sinteză, ea va fi poate abandonată cu totul într'un viitor îndepărtat. Ceeace e important sunt concepţiile noi, ideile noi şi felul nou de a utiliza pe cele cunoscute; ceeace e important e însăşi structura teoriei, aplicată acolo unde se poate aplica, şi studiată în vederea rezultatelor noi ce se pot obţine în anumite domenii, iar nu din punctul de vedere al unei sinteze generale pe care n'are s'o realizeze nici o teorie, niciodată.

Deaceia, nici nu vom insista mai mult decât am făcut până acum, asupra acestei caracteristici a teoriei, ci o vom folosi numai pentru a realiza o expunere cât mai adecvată subiectului.

Vom căuta însă să punem în lumină dela început rolul elementului fundamental al teoriei: multiplicitatea cu 4 dimensiuni *xyzt*, pe care o formează totalitatea punctelor din spaţiu şi a momentelor de timp.

Am expus în conferinţa precedentă modul în care s'a recunoscut importanţa fundamentală a reunirii elementelor spaţiale cu cele de timp, şi nu voi mai reveni asupra acestui lucru. E lucru clasic, cunoscut de toţi azi, că teoria relativităţii nu separă spaţiul de timp, că nu consideră deoparte spaţiul cu 3 dimensiuni *xyz* şi de alta timpul *t*, ci că le reuneşte şi studiază fenomenele naturale în *multiplicitatea xyzt*.

Acest „spaţiu cu 4 dimensiuni" posedă proprietăţi speciale în strânsă legătură cu fenomenele care au loc in el; vom începe deci studiul teoriei, cercetând mai de aproape acest element.

Dar mai întâi câteva cuvinte asupra dificultăților pe care le vom întâlni în drum.

* * *

In genere teoria lui Einstein e foarte greu de înțeles dintr'o broșură de vulgarizare.

Se zice adeseaori că această teorie e pur matematică și că deci nu poate fi înțeleasă decât de acei care stăpânesc deplin simbolismul matematic.

E, evident, așa, dacă vorbim de un studiu amănunțit și complet; dar dacă e vorba numai de înțelegerea teoriei, in liniile sale generale, de prinderea ideilor de bază, afirmațiunea este falșă. In primul rând teoria lui Einstein nu este o teorie matematică, ci o teorie fizică; simbolismul matematic nu e aci decât un instrument,—extrem de complicat și pe deasupra indispensabil,—dar, în definitiv, nimic altceva decât un instrument. In nici o altă teorie fizică nu s'a folosit atâta matematică, probabil fiindcă aci „modelul" fenomenelor e de natură geometrică; totuși teoria relativității rămâne în fondul ei o teorie fizică, și cel care o cunoaște cel mai bine, însuși Einstein, a atras în mod special atenția asupra acestui lucru, de curând în conferința sa dela Paris.

Ca urmare, ideile fundamentale ale teoriei pot fi expuse și într'un limbaj care să nu fie cel matematic. Ideile fundamentale sunt perfect inteligibile, admițând bineînțeles că cunoaștem noțiunile elementare ale fizicei și geometriei, că știm anume despre ce vorbim. Aceasta este într'adevăr piedica cea mai mare de care se izbește orice vulgarizator care vrea să expue teoria unui public absolut profan: el vorbește despre schimbări în concepțiile noastre actuale, când auditorul nu cunoaște de fapt care sunt acele concepții,—și face apel la noțiuni și interpretări noi, când publicului i-ar trebui poate lămurit mai întâi noțiunile cele vechi.

Cum, din fericire, nu suntem în situația aceasta, vom urmări ideile fundamentale, și veți vedea,—sper,— că, cu puțin efort, lucrurile se pot înțelege foarte ușor. Mai mult, veți constata, de exemplu, că în teoria lui Weyl (care completează teoria lui

Einstein), ideia fundamentală e de o atât de mare simplicitate încât nu numai că oricine o poate înţelege, dar ne dăm seama că oricine ar fi putut-o descoperi, fără să aibă neaparat vre-o cultură matematică deosebită.

Aşa fiind, îmi voi permite să încerc a vă expune calitativ ideile fundamentale ale teoriei cât voi putea mai clar şi cu cât mai puţine formule. Voi folosi în acest scop toate mijloacele, care îmi vor sta la îndemână şi în special voi folosi mult analogia.

Analogiile sunt periculoase când vrem să studiem mai aprofundat o chestiune, căci ele ne împiedică să facem efortu necesar înţelegerii ei; dar ele sunt extrem de utile,—atât pentru cei care abordează pentru prima oară o chestiune, ca şi pentru cei care o posedă în cele mai mici amănunte,—şi aceasta pentru că analogiile sunt făcute ca să sugereze. In primul caz, apropiind lucruri cunoscute de altele, necunoscute, ele ne uşurează înţelegerea acestora din urmă; în al doilea, comparând mecanisme deosebite în fond ne sugerează legături noi, ne pun uneori pe calea unor noi descoperiri.

Vom folosi deci şi noi analogiile şi anume le vom utiliza pentru a descrie modelul gravităţii după Einstein, cu alte cuvinte vom expune în acelaş timp şi teoria gravităţii, pentru ca discuţiunea să nu fie prea abstractă.

Odată ce vom fi dobândit, cu ajutorul analogiilor, certitudinea intuitivă că spaţiul poate juca un rol oarecare în mersul unui fenomen fizic, şi îndată ce vom cunoaşte un mecanism care să ne arate în ce chip s'ar putea petrece aceasta, ne va fi uşor să prindem adevăratele caracteristice ale teoriei generale a relativităţii şi să cercetăm, până în amănuntele lui, splendidul edificiu ridicat de Einstein.

*
* *

Am afirmat în introducerea pe care am făcut-o, că modelul fenomenelor naturale în teoria lui Einstein, era de natură geometrică, mai precis, *că spaţiul cu 4 dimensiuni xyzt era elementul care „explica" aceste fenomene.*

Am căutat să pun în evidenţă singularitatea acestei afirmaţiuni, absurdă la prima vedere.

Intr'adevăr, de noţiunea de fenomen natural se leagă o serie de alte noţiuni, care n'au nici cea mai mică legătură aparentă cu aceea de spaţiu: de exemplu forţa care provoacă fenomenul! Când o piatră cade zicem că există o forţă care o trage spre centrul pământului; ce legătură poate exista între această forţă şi spaţiu (sau între ea şi multiplicitatea xyzt)?

Aparent niciuna. Şi dacă nu există nici o legătură între *spaţiu* şi *forţă*,—care e „cauza" fenomenului,—*cum poate atunci acest spaţiu să „explice", prin proprietăţile sale, fenomenele?*

Să precizăm, ce trebue să înţelegem când afirmăm că, cu ajutorul spaţiului, (adică al multiplicităţii) xyzt, putem „explica" în teoria lui Einstein, fenomenele naturale.

A „explica" un fenomen este, cum am mai spus mai înainte, a ne închipui mecanismul său, cu alte cuvinte a imagina un model, care cu ajutorul unor fenomene mai simple să reproducă pe cel dat. Nici o altă condiţie nu se cere acestui model decât acela *de a reproduce toate caracteristicile fenomenului* pe care îl reprezintă. De ex. o explicare a luminii trebue să poată da seama de fenomenele interferenţei, difracţiei, etc.

In vechea teorie ondulatorie a luminii, explicam lumina cu ajutorul eterului. Senzaţiile noastre luminoase aveau drept cauză externă vibraţiunile eterului; lumina, ca fenomen extern, era deci chiar mişcarea acestui eter.

In mod analog în teoria lui Einstein explicăm, gravitatea cu ajutorul spaţiului şi proprietăţilor lui. Senzaţiile noastre gravifice şi *toate fenomenele gravitaţiei* îşi au obârşia în structura spaţiului, *sunt adică datorite unei proprietăţi a acestui spaţiu* şi anume —ca să anticipăm puţin,—sunt datorite curburii lui.

Cu alte cuvinte Einstein pretinde următoarele două lucruri, bizare la prima vedere:

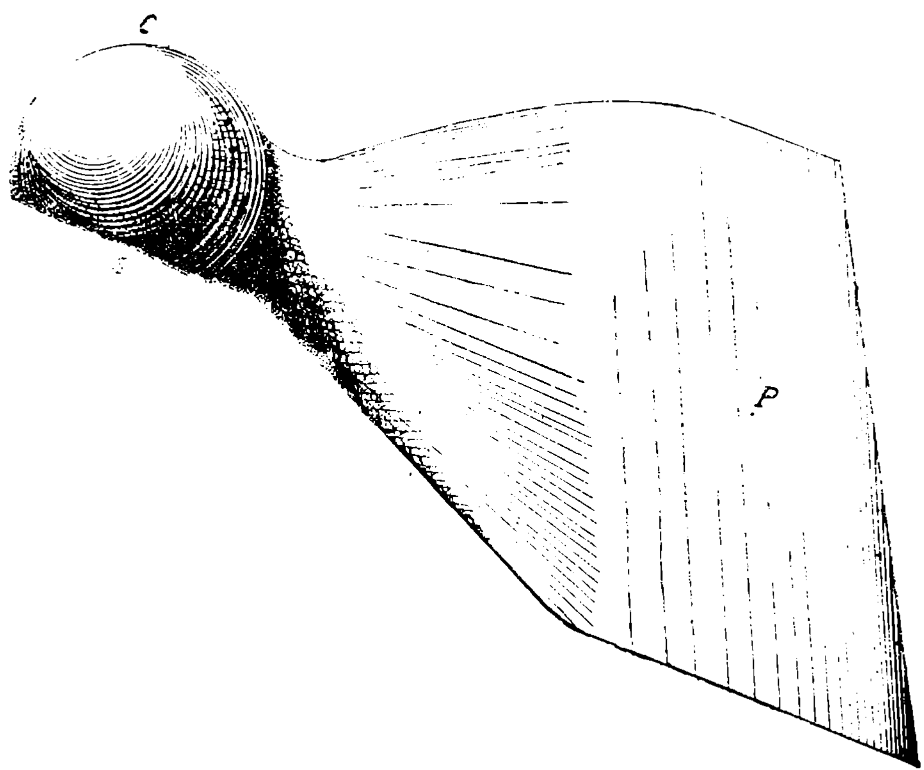
a) *Universul nostru*, adică spaţiul cu 4 dimensiuni în care ne aflăm, *n'are aceeaşi structură în toate punctele sale.*

b) *Această structură şi variaţiile ei se manifestă prin fenomene gravifice.*

E inutil să mergem mai departe, până nu vom fi înţeles aceste afirmaţiuni, lucru fără de care nu putem să înţelegem nimic din teoria generală a relativităţii. Voi căuta deci să arăt în primul rând, prin analogii că într'adevăr ne putem închipui un spaţiu care să n'aibă aceiaşi *structură* în toate punctele sale, şi să explic ce înseamnă aceasta; voi încerca apoi,—tot prin analogii,—să dovedesc în ce fel *spaţiul poate, prin proprietăţile sale pur geometrice, să determine fenomene fizice*, fapt fundamental, neîndeajuns studiat până azi, deşi e de o importanţă considerabilă.

*
* *

Am să procedez prin analogie. Şi fiindcă am să folosesc mereu o anumită analogie, să-mi daţi voe să o expun aci, la început, odată pentru totdeauna.



Să presupunem că ar putea exista fiinţe care să fie complet turtite, având astfel *numai 2 dimensiuni*, comparabile deci cu siluete tăiate dintr'o foaie de hârtie, sau de cauciuc mai bine, extrem de subţire.

Să considerăm *lumea cu 2 dimensiuni* în care se mişcă aceste fiinţe, adică *o suprafaţă de o formă oarecare din care aceste fiinţe nu pot eşi*. E esenţială această din urmă observaţie, care de altfel nu e decât o concluzie logică a ipotezei că ființele şi universul în care se mişcă au numai două dimensiuni. Ne putem închipui acest univers ca o foaie foarte subțire *în* care ele se deplasează, dar *din* care nu pot eşi.

Să presupunem că această foaie subțire are următoarea formă: e o calotă sferică C în jurul centrului sferei S, — pe care să-l numim „soarele", (nu ne interesează cum e în imediată apropiere de S); de aci încolo se racordează continuu printr'o suprafață de o formă oarecare până ce, destul de departe de S în regiunea P. suprafața devine plană; mai departe de P poate fi oricum, cilindrică de ex.

Acestea sunt ipotezele; să examinăm consecințele lor. Să presupunem că una din ființele noastre p'ate, care se află actualmente pe calota sferică C, merge pe suprafață până în regiunea plană P. *Ea nu poate eşi din suprafață.* Cât timp stă pe sfera C ea e îndoită, curbă; când trece pe planul P ea trebue să devie dreaptă; deci corpul ei suferă o schimbare pe care ea o poate constata. Dacă examinăm mai de aproape problema, constatăm că schimbarea e mult mai profundă decât s'ar părea la prima vedere, şi că ea e cu siguranță constatată. Intr'adevăr când acea siluetă tăiată dintr'o foaie foarte subțire de cauciuc trece de pe sfera C în planul P, nu e suficient să se desdoaie şi să devie dreaptă, ci e nevoe *să-şi lungească unele părți ale corpului şi să-şi contracte altele.* Tăiați o minge în două şi încercați să aplicați una din jumătăți pe o masă plană, aşa ca toate punctele ei să fie pe masă. E imposibil dacă nu întindem, dacă nu lungim cauciucul.

Deci în concluzie, *când ființa imaginară trece depe sferă pe plan corpul său se lungeşte pentru motivul că sfera nu e aplicabilă pe plan, adică nu e desfăşurabilă.* Acelaş lucru se întâmplă când transportul are loc în sens invers.

Aşadar o ***diferență de curbură*** a spațiului, în care se mişcă ființele noastre imaginare, se manifestă printr'o lungire sau o contractare şi printr'o îndoire a corpului lor.

Iată deci care sunt consecințele care decurg dintr'o singură poteză: aceia că lumea ființelor noastre era o suprafață oarecare curbă, cu 2 dimensiuni.

Să reținem bine amănuntele acestei analogii fundamentale, la care voi face apel în tot momentul, şi să ne întoarcem la teoria lui Einstein.

* * *

Am văzut că el afirmă că :

1) *Spaţiul cu 4 dimensiuni xyzt nu e acelaş, adică n'are aceeaşi structură în toate punctele sale.*

2) ***Proprietăţile acestui spaţiu pot determina fenomene fizice***, şi în special ele îl fac apt ca să fie utilizat în construirea unui model al fenomenelor gravităţii.

Dacă ne reamintim ficţiunea lumii cu 2 dimensiuni, lucrurile acestea devin uşor de înţeles.

Presupunem că în loc de spaţiul cu 4 dimensiuni din teoria lui Einstein, considerăm spaţiul cu 2 dimensiuni pe care l-am cercetat deja. Rezultatele vor fi analoage, până la un anumit punct.

Se vede atunci clar, în primul rând că ***spaţiul poate avea structuri deosebite în două regiuni date :***

Spaţiul în C (calota sferică) nu e identic cu cel în P (porţiunea plană), pentrucă de exemplu, (din punctul ***nostru*** de vedere) în P putem duce o linie dreaptă, dar în C nu.

Se vede apoi tot aşà de uşor că ***această diferenţă de structură a spaţiului poate cauza fenomene fizice, ca apariţia unei forţe de exemplu.***

Intr'adevăr să presupunem că fiinţa noastră care se află actualmente în partea plană P a spaţiului, ar fi formată dintr'o lamă subţire de oţel, ***elastică ;*** să presupunem că ea porneşte spre porţiunea curbă C a spaţiului. Cu cât se va apropia mai mult de „soarele" S, cu atât ea se va indoi mai tare, din cauza suprafeţei care e din ce în ce mai curbă.

De oarece o presupunem elastică, ***în ea se va naşte deci o tensiune, o forţă care cum vedem, se datoreşte numai şi numai faptului că spaţiul in C e mai curb decât in P.***

Sau, în general, să considerăm o fiinţă imaginară alcătuită tot aşa dintr'un material extrem de elastic ; când ea trece din P în C, de pe plan pe sferă, mai aproape de soare, corpul ei e nevoit să se îndese, să-şi micşoreze întinderea. In el se vor desvolta deci forţe elastice, datorite numai faptului că spaţiul e curb în regiunea C.

Sau, însfârşit. să presupunem că fiinţa noastră ar fi formată dintr'un resort spiral, ca acel al ceasornicelor, mult mai fin însă. Figura lui de echilibru e plană. Cât timp fiinţa se va găsi în porţiunea plană a spaţiului P, ea nu va simţi nimic anormal. Dacă ea se apropie de „soare", dacă ajunge adică în porţiunea sferică a spaţiului, resortul se deformează, căci nu poate eşi din acest spaţiu (spirala se poate deforma aşa ca să se aşeze pe sferă). Ea va căuta însă să revie la poziţia ei de echilibru, care e plană, deci centrul ei va căuta să se apropie de planul ultimei spire, cu alte cuvinte ***centrul ei va fi solicitat de o forţă îndreptată spre centrul sferei, adică spre soare.***

Fiinţa noastră, care nu-şi poate da imediat seama că spaţiul e curb, va afirma atunci că *este atrasă de soare*, în apropierea acestuia şi aceasta *cu atât mai mult cu cât apropierea este mai mare*. In realitate apariţia forţei ar fi datorită numai curburii spaţiului.

Savanţii lumii noastre ipotetice ar putea vorbi în acest caz de o acţiune atractivă la distanţă analoagă gravităţii ; în realitate fenomenul ar fi cu totul altul, *datorit numai curburii spaţiului.*

Şi pentru ca să şi poată da bine seama de acest nou aspect al lui, ei ar trebui să facă efortul de imaginaţie, de a eşi din spaţiul lor cu 2 dimensiuni şi a-l privi dintr'un punct exterior lui, — cu alte cuvinte ei ar trebui să introducă în ştiinţa lor un spaţiu care ar avea o dimensiune mai mult de cât cel obişnuit.

Se vede clar din exemplele precedente cum o proprietate *pur geometrică*, curbura spaţiului cu 2 dimensiuni în care se mişcă fiinţele noastre ipotetice, poate provoca ea singură apariţiunea unei *forţe*, adică a unui element care, aparent, n'are nici o legătură cu acest spaţiu,

Iată deci posibilitatea ca forma spaţiului, — să-i zicem mai precis structura lui, — să influenţeze asupra fenomenelor care se petrec în el, sau chiar să le provoace : apariţia forţei elastice în exemplul citat mai sus e datorită numai caracterului special al spaţiului în regiunea considerată.

In sensul celor de mai sus va trebui deci să fie înţeleasă afirmaţia făcută mai înainte, că „în teoria lui Einstein spaţiul nu e numai cadrul în care se petrec fenomenele naturale, ci că el are o influenţă oarecare asupra lor, că ia, prin proprietăţile sale, o parte activă la mersul lor.

Iată deci cum s'ar putea imagina mecanismul prin care spațiul influențează sau provoacă unele fenomene naturale. Trebue bine observat însă, că acest mecanism nu e cel real, în primul rând fiindcă el folosește spațiul cu 2 dimensiuni în loc de cel cu 4, pe care-l folosește teoria relativității. Apoi existența tensiunii elastice nu e indispensabilă, după cum am văzut; ea a fost introdusă numai pentru ca demonstrația să fie mai izbitoare. Nu trebuie să pierdem din vedere deci că analogia prezentată aci, n'are alt scop de cât acela de a ne familiariza cu un fapt real, pe care intuiția noastră refuza până acum să l prindă: faptul că *proprietățile spațiului pot fi în anumite împrejurări determinante pentru fenomenele naturale care au loc în interiorul lui.*

Exemplul dat demonstrează că o asemenea influență e posibilă; de aci și până la a presupune că o asemenea influență există și în natură, nu e de cât un pas pe care l-a făcut pentru prima oară Einstein prin teoria gravității pe care o vom cerceta în cele ce urmează.

* * *

Problema gravității a fost una din cele mai grele probleme pe care și le-au pus vreodată cercetătorii naturii și ea trebuit să aștepte până în zilele noastre pentru a putea căpăta o soluție satisfăcătoare.

Prea complexă ca să fie studiată în general, ea a fost atacată la început în cazuri particulare și astfel s'au stabilit anumite legi cantitative. Newton, — singurul care a cercetat cu succes problema și a rezolvat-o complet pe timpul lui, — a reușit să coordoneze cercetările făcute și să condenseze rezultatele într'o lege care era privită ca cea mai generală, cea mai exactă, și cea mai utilă lege care se descoperise vreodată.

Ea consta într'o relație, mai mult sau mai puțin empirică, dând seama foarte bine de faptele constatate, dar lăsând neatinsă chestiunea mecanismului intim al fenomenului. Acest mecanism rămăsese până în vremea noastră, tot atât de misterios ca și în vremea lui Newton; el nu era reductibil la nici un fel de complex de fenomene fizice elementare și chestiunea astfel pusă se prezenta ca o supărătoare problemă asupra unui fenomen cunoscut, pe care-l întâlnim la fiecare pas, dar asupra căruia avem atât de puţine cunoştinţe, în cât nici măcar pe departe nu ne putem închipui cam în ce fel s'ar petrece în realitate.

Eram reduşi să spunem că avem o acţiune la distanţă : mai precis două erau caracteristicile fenomenului, pe care nici un model fizic nu le putea reproduce :

1) Atracţia gravităţii se propagă cu o viteză enormă, infinită ;

2) Ea se exercită la fel, independent de natura fizică a corpurilor şi de ceeace numiam masa lor.

Ultimul fapt era în special de nepriceput. Orice forţă cunoscută am alege pentru ca să mişcăm un corp vom constata că e nevoe de o forţă mai mare ca să mişcăm un corp mai greu, în aceleaşi condiţii, — sau că o aceiaşi forţă mişcă mai dificil un corp greu decât unul uşor. Totuşi una singură din forţele pe care le cunoştea fizica veche nu se comporta astfel. Gravitatea nu face deosebire între un fulg sau o bucată de plumb. Experienţa era făcută de mult dar explicaţia nu se găsise încă. Se mai cunoştea o altă experienţă care arăta că această forţă are caractere foarte curioase. Dacă ne-am presupune într'un ascensor care cade spre pământ cu o acceleraţie de 9,81 m sec², am constata că, în acel ascensor *nu mai există gravitaţie*, căci, — după principiul lui D'Alembert, — forţa de gravitaţie ar fi anulată de forţa de inerţie şi corpurile ar rămâne în echilibru [1]).

Iată deci o forţă, gravitaţia, care are caractere aşa de singulare încât e foarte legitimă întrebarea dacă îi mai putem atribui numele de „forţă". E adevărat că nu putem da o definiţie clară a forţei ; cuvântul corespunde totuşi unei noţiuni foarte familiare intuiţiei noastre. Când zic că o forţă e aplicată unui corp îmi închipui, de exemplu, mâna mea, care cu ajutorul unei sfori sau a unui resort, trage de acel corp. Forţa apare prin contracţiunea muşchilor se propagă prin sfoară din aproape în aproape până la corp pe care-l deplasează ; şi îmi dau seama că sunt corpuri pe care le pot mişcă, dar că există altele pe care nici nu le-aşi putea urni din loc.

Gravitaţia nu prezintă aceleaşi caractere ; prin proprietăţile

1) Am explicat pe larg aceste lucruri în conferinţa precedentă. Experienţa amintită conduce la aşa numitul principiu al echivalenţei : orice câmp gravific poate fi socotit ca provocat de o mişcare accelerată convenabilă a sistemului.

sale ea pare că se îndepărtează de ceeace numim în mod curent „forţă" şi e probabil că unii cercetători au observat de mult lucrul acesta şi ar fi renunţat de grabă la concepţia gravităţei ca forţă atractivă, dacă ar fi avut cu ce s'o înlocuiască.

Pentru prima oară Einstein reuşeşte să realizeze acest lucru. Pentru el *gravitaţia nu e o forţă ca aceia pe care o putem exercita trăgând un corp*; el nu-şi închipue soarele legat de planete prin fire elastice în care se desvoltă forţe de tracţiune.

Această observaţie e esenţială pentru cele ce vor urma şi va trebui să o avem mereu prezentă în minte : gravitaţia *nu e o forţă în sensul obişnuit al cuvântului.*

Pentru Einstein *fenomenele gravităţei nu sunt altceva de cât aspectul sub care ni se prezintă proprietăţile geometrice ale universului, adică ale multiplicităţii cu 4 dimensiuni* $x\ y\ z\ t$.

In unele regiuni, în vecinătatea soarelui, de pildă, spaţiul e mai curb de cât în alte părţi; această curbură o constatăm, o simţim in fenomenele gravităţii care şi ele sunt mai intense în apropierea soarelui, de cât departe de el.

Atracţiunea gravităţii nu e o legătură între corpul atrăgător şi cel atras, o legătură ca aceia pe care ar realiza-o un fir elastic care le-ar reuni.

Nu există o asemenea legătură. Atracţia asupra unui corp este consecinţa imediată a faptului că în punctul în care se află actualmente acel corp, spaţiul este curb şi nu plan, euclidian.

Fenomenele gravităţei sunt datorite structurii spaţiului iar nici de cum unei acţiuni directe a corpului ceresc care atrage planetele sistemului său.

Lucrul pare straniu la prima vedere ; să ne reamintim însă analogia pe care am făcut-o mai înainte. Am văzut cum ne putem imagina o lume cu 2 dimensiuni, plană în depărtare şi sferică în apropiere de soare, în care se mişcă fiinţe imaginare, formate din resoarte spirale plane. In apropiere de soare, în porţiunea sferică a spaţiului, ele vor constata că centrul lor e atras spre soare. Cu alte cuvinte ele vor constata un fenomen de atracţie spre soare *deşi nu există nici o legătură între soare şi ele.* Atracţiunea e datorită numai faptului că spaţiul e sferic ; şi pentru fiiţele cu 2 dimensiuni această curbură se manifestă tocmai prin fenomene de gravitaţie.

Iată deci cum ne-am putea închipui această dependență între structura spațiului și fenomenele gravității. Inutil să mai repetăm că cele de mai sus sunt numai o analogie explicativă și că în teoria lui Einstein lucrurile nu se petrec exact așa. Vom schițà mai departe motivele științifice care ne obligă să facem legătura între fenomenele gravităței și structura spațiului în care au loc.

Deci, în rezumat, Einstein spune că gravitația nu e o forță în sensul obișnuit al cuvântului, căci nu există nicio legătură directă între corpul care atrage și cel care e atras. Fenomenele gravitației sunt datorite numai spațiului; existența lor e dovada curburii spațiului în punctul considerat. Toate caracteristicile fenomenului nu depind de cât de structura spațiului în vecinătatea punctului ales.

Și atunci, dacă e așà, caracterele neobișnuite ale acestor fenomene de gravitație se explică foarte simplu, condițiile pe care niciun model fizic nu le-a putut îndeplini, se îndeplinesc foarte ușor.

Prima caracteristică a gravității era faptul că atracțiunea se propagă instantaneu. In teoria lui Einstein afirmația nu mai are sens. De vreme ce, pentru un spațiu dat, nu avem nici o legătură între corpul care atrage și cel care e atras, e absurd să vorbim de propagarea de la unul la altul a unei acțiuni inexistente. Intr'un punct al spațiului M, gravitatea are caractere bine definite de structura spațiului în acest punct de exemplu o anumită intensitate. Să ne închipuim spațiul cu 2 dimensiuni de mai înainte. Când un corp ajunge în M, chiar în momentul în care sosește în M el e obligat să se conformeze curburii spațiului din acest punct, cu alte cuvinte să fie atras cu o anumită intensitate. Efectul e instantaneu. Dar despre propagare nu poate fi vorba.

Numai într'un singur caz putem vorbi în teoria lui Einstein despre propagarea gravității: atunci când *spațiul și-ar schimba el însuși forma*, adică curbura.

Vom neglija aci această eventualitate de vreme ce ne ocupăm cu spații care au o structură bine determinată și invariabilă.

In al doilea rând fenomenul gravității nu atârnă de natura materialului supus experienței. Lucrul e evident așa în modelul cu 2 dimensiuni pe care l-am prezentat. Gravitatea, care se traduce aci prin îndoirea, scurtarea sau lungirea corpurilor aşà ca ele să poată rămâne în spaţiu, nu depinde de natura corpului, ci cel mult de forma lui.

Iarăşi, adaog pentru ca să nu fie nici o confuzie, că cele de mai sus sunt numai analogii, şi că o analogie e departe de a fi o identitate.

Aşadar mecanismul imaginat de Einstein reproduce toate caracteristicile fenomenelor de gravitaţie. Explicarea acestora ca efecte ale unor particularităţi ale spaţiului xyzt este coherentă, logică în desfăşurarea ei şi pe deasupra consecinţele ei sunt verificate de experienţă.

Dar, în acest punct al expunerii, se naşte de sigur în mintea ascultătorului, o nedumerire: „Inţeleg, — ar putea zice el, — că curbura spaţiului poate provoca fenomene, apariţii de forţe de pildă. Exemplul dat mai înainte e destul de convingător. Mai admit apoi ca cel ce caută o explicaţie a unui fenomen să facă anumite ipoteze: altfel n'ar putea lucra; aşà fiind admit şi ipoteza lui Einstein după care multiplicitatea în care trăim, prezintă curbură în anumite puncte, curbură ce se va manifesta prin anumite fenomene. Dar nu văd de loc *de ce aceste fenomene ar fi numai decât fenomenele gravităţii şi nu alte fenomene,* de ex., cele electromagnetice. Evident şi aceasta e o ipoteză a lui Einstein. Faptul că toate particularităţile gravităţii se explică aşà de bine în schema prezentată, —cu alte cuvinte, faptul că ipoteza „reuşeşte",—este într'adevăr un motiv pentru a o preferà altora, dar nu ne poate lămuri de loc. Dacă într'adevăr ipoteza corespunde realităţii, trebue să existe o anumită legătură, între spaţiu şi gravitaţie, care ar trebui scoasă în evidenţă. In orice caz, pentru a judeca mai bine valoarea ipotezei, ar trebui să cunoaştem cel puţin etapele succesive prin care a trecut Einstein, pentru a ajunge până la ea".

Obiecţiunea e importantă; ea nu se cade să fie lăsată la o parte nici chiar intr'un prim studiu. Lucrul se va înţelege mai bine după ce vom cerceta mai aprofundat elementele cu ajutorul cărora se construeşte teoria, şi aceasta din cauză că în chestiunea de faţă, nemai putând folosi analogiile trebue să lucrăm efectiv cu spaţiul cu 4 dimensiuni, ceiace nu e întotdeauna comod.

Chestiunea e însă prea însemnată pentru a o neglija; vom deschide deci o mică paranteză pentru a o lămuri cât mai pe scurt*).

* * *

Pentru această lămurire e esenţial să ne reamintim două rezultate fundamentale ale teoriei, pe care le-am expus pe larg altă dată (conferinţa precedentă) şi pe care am să le reamintesc aci.

Am văzut că în reprezentarea lui Minkowski, desfăşurarea unui eveniment se poate urmări dându-se toate valorile coordonatelor spaţiale x, y, z la diferitele momente succesive t. Aceste numere purtate pe un sistem de axe coordonate în spaţiul cu 4 dimensiuni ne dau o curbă, care poate fi privită ca descriind fenomenul, de oarece ne permite să cunoaştem la fiecare moment t, poziţia punctului x, y, z. *Dacă această curbă e o linie dreaptă, mişcarea e rectilină şi uniformă; în caz contrar mişcarea posedă acceleraţie şi reciproc.* Acesta e primul rezultat ce trebue avut în vedere.

Al doilea este aşà numitul principiu al echivalenţei care spune că: *Din punct de vedere al efectelor produse, un câmp de gravitaţie e în totul echivalent cu o acceleraţie convenabilă, aplicată sistemului.* Deci pentru a studia fenomenele într'un câmp de gravitaţie dat, vom presupune că acesta nu există, dar că în schimb, aplicăm sistemului o acceleraţie convenabilă.

Acestea fiind precizate, e uşor de văzut care poate fi legătura între curba spaţiului şi fenomenele gravităţii.

Să zicem că vrem să studiem mişcarea unui corp lăsat liber într'un câmp de gravitaţie. Vom presupune atunci că nu avem de loc gravitaţie, dar vom aplica sistemului o anumită acceleraţie şi vom studia fenomenele. Să considerăm spaţiul cu 4 dimensiuni şi să ducem linia care ne dă mersul fenomenului. Dacă n'ar fi existat acceleraţie mişcarea corpului, lăsat liber, ar fi fost rectilină şi uniformă, deci linia reprezentativă ar fi fost o dreaptă; deoarece există acceleraţie linia e curbă. Existenţa acceleraţiei e însă echivalentă cu existenţa unui câmp de gravitaţie. Deci: *oridecâteori lăsăm*

*) Totuşi cititorul, căruia nu-i plac digresiunile, poate lăsà la o parte acest paragraf (care se termină la cele 3 asteriscuri următoare), fără nici o pagubă pentru înţelegerea restului.

să cadă un corp liber într'un câmp de gravitație linia reprezentativă a fenomenului în univers este curbă.

Putem considera mai multe corpuri lăsate să cadă liber, la diferite momente; toate liniile lor în univers, — care sunt geodezicele acestui univers, — vor fi curbe. Universul, spațiul cu 4 dimensiuni el însuşi, va fi ceiace am numit un spațiu „curb".

Viceversa să presupunem într'un Univers „curb" un punct care se mişcă pe o geodezică. Deoarece punctul se deplasează pe o curbă, mişcarea efectivă este o mişcare cu accelerație, accelerație pe care o putem înlocui printr'un câmp de gravitație. Deci oridecâteori punctul se mişcă într'o porțiune curbă a spațiului, el ne apare supus unui câmp de gravitație.

Iată deci cum s'ar putea explica dece, de curbura spațiului sunt legate fenomenele de gravitație şi nu alte fenomene. Punctul slab al acestei legături este principiul echivalenței, care, — după cum îi arată şi numele, — indică o echivalență, constatată foarte precis experimental, utilă pentru calcul dar care nu ne indică în mod sigur o identiate de natură. In stadiul actual al ştiinței însă, admiterea acestui principiu este complect îndreptățită.

Odată lămurite aceste lucruri să închidem paranteza şi să revenim la vechea ordine de idei,

* * *

Am dobândit în cele precedente un model geometric, care ne permite să ne dăm seama grosso modo, de mecanismul fenomenelor gravității; am utilizat o serie de analogii care, pedeoparte ne ajutau intuiția să prindă unele lucruri greu de conceput, şi pe de alta ne puneau la dispoziție un limbaj, — foarte vag, e adevărat, foarte neprecis, — dar suficient pentru ceiace ne propusesem.

Dacă vrem să părăsim analogiile şi să cercetăm direct chestiunea trebue să folosim un limbaj mai precis, limbajul matematic; fără el, nici nu putem defini în mod riguros elementele fundamentale ce intervin în fenomenele fizice de care am vorbit.

Nu vom expune aceste calcule aci: interesant însă e însuşi felul de a aplica acest calcul matematic teoriilor pe care le-am schițat mai sus. Şi cum analogiile pe care le-am indicat până acum ne pot ajuta să înțelegem până la un punct, ideile fundamentale care ne conduc în această cercetare matematică, să-mi daţi voie ca în câte-va cuvinte să caut a lămuri unele puncte ale acestei chestiuni.

Teoria gravităţii e o teorie geometrică. Deci instrumentul de calcul l-am putea găsi gata în cercetările de geometrie pură, dacă acestea s'ar fi întins în domenii conexe cu acel pe care-l explorăm. Aşa a şi fost in cazul de faţă. Incă odată cercetările de geometrie pură făcute fără nici un scop practic, şi-au căpătat o aplicaţie neaşteptată în probleme de o natură ceva mai apropiată de realitate.

Două sunt elementele caracteristice, fundamentale, ale calculului, corespunzând celor două aspecte caracteristice ale teoriei.

Aşà în primul rând, teoria de care e vorba aci se intitulează teoria relativităţii; principiul relativităţii cere, după cum ştim, ca ecuaţiile care exprimă mersul unui fenomen fizic *să fie independente de sistemul de referinţă.* Ele trebue să fie invariante faţă de orice schimbare de axe, trebue cu alte cuvinte să fie *ecuaţii intrinsece* ale fenomenului.

Această problemă, de a exprima ecuaţiile fizicei prin ecuaţii intrinsece, atrăsese atenţia matematicienilor mai demult şi aceştia desvoltaseră chiar un nou calcul numit „calcul tensorial", care permitea tratarea sistematică a problemelor de soiul acesta. Un tensor (vectorul e şi el un tensor), e un element matematic a cărui proprietate fundamentală e următoarea: Dacă el e nul într'un sistem de referinţă, ecuaţia $T = o$ e invariantă faţă de orice schimbare de axe; de exemplu: ecuaţia fundamentală a mecanicei, scrisă vectorial $m\gamma - F = o$, rămâne aceiaşi oricare ar fi sistemul de coordonate la care raportăm mişcarea. Deci, dacă reuşim să exprimăm mersul unui fenomen fizic, cu ajutorul unor ecuaţii de forma $T = o$, am găsit prin această operaţie ecuaţiile intrinsece ale fenomenului.

Aşà dar în primul rând în tratarea matematică a problemelor teoriei generale a relativităţii vom *folosi calculul tensorial.*

In al doilea rând, să ne reamintim analogia lumii cu 2 dimensiuni cu ajutorul căreia am căutat să ne explicăm teoria gravităţii. Am văzut că fenomenele de gravitaţie luau naştere din cauza faptului că suprafaţa care forma lumea cu 2 dimensiuni, era plană într'un punct şi curbă într'altul, adică euclidiană într'o parte şi neeuclidiană în alta.

Deci, *curbura spaţiului* va fi determinantă pentru fenomenele de gravitație; calculul matematic nu va avea aşa dar alt scop decât acela de a evalua această curbură a spațiului, cu ajutorul căreia vom putea studia cantitativ fenomenele de gravitație. Când trecem însă la spațiul cu 4 dimensiuni noțiunea de curbură devine mai complicată; ca să vorbim mai precis vom spune că: teoria matematică va avea ca țintă ***să precizeze structura spațiului în vecinătatea punctelor considerate.*** Toate cercetările geometrilor care au studiat teoretic structura spațiului vor putea fi utilizate, şi de fapt teoria relativității a folosit rezultate extrem de variate, începând cu cele dobândite de Gauss şi Riemann şi sfârşind cu acele ale geometrilor din ziua de azi.

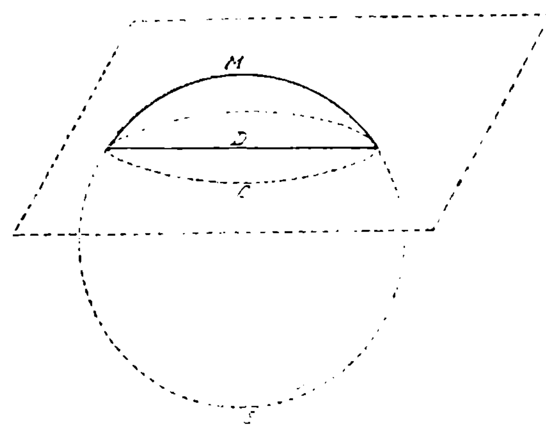
* * *

Să cercetăm puțin mai în detaliu, cum s'ar putea face acest studiu al structurii universului, adică a multiplicității cu 4 dimensiuni xyzt.

Vom proceda şi aci prin analogie, ca şi mai înainte; cele ce vom spune pentru o lume ipotetică cu 2 dimensiuni formată dintr'o suprafață obişnuită se va aplică (adică îşi va avea analogul) şi pentru multiplicitatea cu 4 dimensiuni care ne interesează,

In primul rând să observăm că trebue să studiem structura unui spațiu ***în care suntem coprinşi pe deantregul şi noi.*** Fie, de exemplu, un univers compus din suprafața unei sfere şi altul dintr'un plan (pe care să-l presupunem că tae sfera după un cerc C). *Noi* ne dăm seama că spațiul sferic are altă structură decât cel plan, fiindcă suntem ***în afară*** de amândouă, fiind-că le putem privi în ansamblul lor; dar se pune problema dacă şi ființele ipotetice cu 2 dimensiuui care ar trăi ***în*** aceste universuri ar putea distinge sfera de plan. Cu alte cuvinte putem cunoaşte structura unui spațiu prin măsurători făcute numai în interiorul lui?

Răspunsul e afirmativ. Iată un mijloc pe care l-ar putea utiliza ființele imaginare considerate. Planul taie sfera după cercul C. Curba C e un cerc atât pentru ființele care se află pe plan cât şi pentru cele de pe sferă, deoarece pentru ambele ea poate fi privită ca locul punctelor echidistante de un punct dat din spațiul respectiv. Diametrul acestui cerc fiind însă o linie coprinsă în spațiul respectiv este: un segment de dreaptă D pentru ființele plane, şi un arc de cerc mare M, ***de lungime mai mare ca segmentul*** *precedent* $M > D$, pentru ființele sferice. Să presupunem că în fie-care spațiu se măsoară lungimea cercului și a diametrului respectiv (operații care se fac fără a ieși din spațiul considerat) și că pe urmă fie-care face raportul lungimii la diametru. Ființele plane vor găsi ca valoare a raportului numărul π; cele sferice *vor găsi însă un alt număr*, căci lungimea diametrului a crescut, aceia a cercului rămânând invariabilă. Această diferență provine din diversitatea structurii spațiilor; deci, ea e un indiciu că această structură e una într'un caz și alta în cellalt.



Iată deci că se pot imagina procedee prin care, cu ajutorul măsurătorilor făcute într'un spațiu dat, să ne putem da seama de structura lui.

Odată ce avem această siguranță, trebue să atacăm mai științific chestiunea căutând care este elementul analitic pe care e necesar și suficient să ni-l dăm pentru a putea considera pe deplin cunoscută structura spațiului considerat.

* * *

Fie o suprafață oarecare. *Gauss*, care s'a ocupat cel dintâi cu asemenea chestiuni, a arătat că geometria pe o suprafață oarecare, — adică raporturile intre elementele măsurate pe însăși suprafața dată, — este complet definită dacă cunoaștem, pur și simplu, expresiunea depărtării ds între 2 puncte infinit vecine, în funcție de coordonatele lor față de un sistem $u\,v$, trasat pe suprafață :

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

Cunoscând pe ds putem calcula pe suprafața noastră lungimi, unghiuri, arii, putem găsi între ele relații caracteristice, cu un cuvânt putem să ne dăm seama de raporturile de legătură între diversele elemente ale suprafeței, adică de structura ei.

Iată deci elementul pe care-l căutam.

Lungimea ds nu atârnă evident de schimbarea sistemului de coordonate, e un invariant; E, F, G însă depind de această schimbare. Pentru a defini complet spaţiul e necesar şi suficient să dăm valorile E, F, G într'un anumit sistem de coordonate (U, V). Ansamblul numerilor E, F, G formează ceiace am numit un tensor *tensorul metric fundamental*, căci el defineşte ceiace se poate numi *metrica spaţiului*. Uneori cantităţilor E, F, G li se dă numele de ***potenţiale***.

Când schimbăm coordonatele (u, v) trecînd la (x, y) E, F, G devin $E^1 F^1 G^1$ aşà ca:

$$ds^2 = E^1\, dx^2 + 2\, F^1\, dx\, dy + G^1\, dy^2$$

S'ar putea întâmpla ca să găsim o astfel de transformare aşà ca noile valori să fie: $E^1 = G^1 = 1$ $F^1 = O$ şi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Pe de altă parte dacă am presupune dela început că suprafaţa dată este plană şi coordonatele carteziene am avea direct după cum ştim:

$$(2) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Deci, oridecâteori avem un spaţiu cu 2 dimensiuni definiprin forma diferenţială (1) şi reuşim printr'o schimbare de coordonate, să transformăm forma (1) în alta de tipul (2), putem afirma că spaţiul dat este sau un plan, sau se poate aplică pe un plan, ca un cilindru, de pildă. Mai precis, atunci când $ds^2 = dx^2 + dy^2$, vom zice că ***spaţiul e euclidian***, şi o definiţie în totul analogă cu cea de mai sus, o vom întâlni şi în studiul spaţiului cu 4 dimensiuni.

Aşà dar e suficient să cunoaştem valorile potenţialelor $E, F\ G$, pentru a putea defini structura spaţiului. Dar pentru studiul pe care-l avem în vedere un alt element este cel fundamental şi anume ***curbura suprafeţei*** *). Tot Gauss a pus în avidenţă acest element, care este un invariant, şi care se poate exprima numai cu ajutorul coeficienţilor E, F, G ai formei fundamentale.

Am văzut în analogia prezentată, că ceeace determina feno-

***) Definită ca limita raportului unghiului solid al normalelor, duse printr'un element de arie, la această arie elementară.**

menele de gravitaţie era curbura suprafeţei; în problema reală elementul pe care-l folosim pentru a descrie schimbarea de structură a multiplicităţii cu 4 dimensiuni, va primi tot numele de curbură şi nu va fi altceva decât generalizarea noţiunei de mai sus.

* * *

Am prezentat mai sus câteva observaţiuni asupra spaţiilor cu 2 dimensiuni, menite să ne ajute a prinde mai uşor cele ce vom afirma asupra multiplicităţilor cu 3 şi 4 dimensiuni.

Intrăm acum într'un domeniu care a fost explorat pentru prima oară de către Riemann, unul din mai profunzi gânditori ai veacului trecut, geniu dotat cu o putere de creaţie şi cu o intuiţie extraordinare.

Concepţia fundamentală a teoriei einsteiniene a fenomenelor are la bază rezultatele geometrice ale lui Riemann; fără aceste rezultate e probabil că teoria ar fi fost mult mai puţin cuprinzătoare decât este azi.

Riemann analizează foarte amănunţit noţiunea de multiplicitate.

Iată două feluri de spaţiu: o suprafaţă, — două dimensiuni, — şi un spaţiu cu 3 dimensiuni, acel în care trăim noi; ce putem spune despre fiecare din ele?

Ne putem închipui suprafaţa fie plană ($ds^2 = dx^2 + dy^2$), fie curbă de o formă absolut oarecare ($ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$). Dar spaţiul în care ne mişcăm nu ni-l putem închipui decât ca o multiplicitate de puncte, fiecare bine determinat dacă ne dăm cele 3 coordonate ale sale; în plus admitem că distanţa între două puncte infinit vecine este de forma:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

dacă alegem axele în mod covenabil.

Aşadar pentru intuiţia noastră spaţiul în care trăim e o multiplicitate cu 3 dimensiuni, pe care, conform formulei de mai sus, am considerat-o până azi euclidiană.

Dacă ne referim la cele două posibilităţi pe care le-am avut în cazul spaţiilor cu 2 dimensiuni (plan şi suprafaţă curbă) putem spune că intuiţia nu ne poate ajuta să ne închipuim decât un spaţiu care ar corespunde *planului* de mai sus; suntem în imposibilitate de a ne reprezenta spaţiul cu 3 dimensiuni care ar corespunde suprafeţei *curbe*.

Dar mai întâi există un asemenea spaţiu corespondent? Şi dacă există care ar fi procedeul prin care ne-am putea da seama de această existenţă, de vreme ce intuiţia nu ne e de niciun folos?

Problema astfel pusă ne conduce la analiza noţiunii de spaţiu, adică de multiplicitate cu mai multe dimensiuni, Analiza aceasta a fost făcută de Riemann în câteva pagini concise, viguroase, pline de idei de o considerabilă importanţă. care deabia astăzi sunt înţelese şi folosite pe deplin.

Riemann precizează întâi că un spaţiu, adică o multiplicitate continuă de puncte, nu e bine definită dacă ne dăm numai numărul său de dimensiuni, tot aşa după cum afirmând despre un spaţiu că are 2 dimensiuni nu putem şti dacă este vorba de o sferă sau de un elipsoid.

Pentru o definiţie completă trebue să ne dăm pe lângă numărul de dimensiuni (să presupunem în cazul nostru 4) şi structura adică relaţiile metrice intrinsece ale multiplicităţii.

Cunoaşterea acestor relaţii metrice se reduce în ultimă analiză la calcularea elementului liniar ds^2. Sub anumite condiţiuni acesta se poate exprima într'un sistem dat de coordonate x_1, x_2, x_3, x_4 printr'o formă diferenţială de ordinul al doilea :

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + \ldots\ldots + 2g_{12}\, dx_1\, dx_2 + \ldots\ldots \text{ adică}$$

$$ds^2 = gik\ dxi\ dxk \qquad (gik = gki) \tag{3}$$

gik pot avea valori oarecare. Deci şi spaţiul nostru cu 3 dimensiuni sau cel cu 4, pot avea alte structuri decât aceia pe care le-am atribuit-o până acum. Spaţiul euclidian (acel în care $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$) e numai un caz particular; în genere gik variază cu punctul considerat.

Există aşadar corespondentul suprafeţei curbe de care am vorbit mai înainte. *Spaţiul poate fi curb;* o anumită expresie matematică, riguros definită, calculată cu ajutorul coeficienţilor gik şi numită ***curbura*** spaţiului ne poate defini, în fiecare punct, relaţiile metrice intrinsece ale multiplicităţii considerate.

* * *

Aşadar un spaţiu oarecare poate fi curb. Dar un spaţiu curb poate avea fel de fel de forme; cine îi impune forma particulară pe care trebue să o ia?

Cu alte cuvinte ce anume hotărește dacă, de ex., spațiul curb e sferic sau parabolic ?

Să folosim iarăşi o analogie.

Ne putem închipui spatiul cu 4 dimensiuni ca analogul unei suprafeţe curbe (gik oarecare); când această suprafaţă se reduce la un plan (gik $=0$ şi 1) multiplicitatea corespunzătoare este ***euclidiană.***

Să presupunem că suprafaţa aceasta ar fi alcătuită dintr'o pânză foarte subţire, inextensibilă şi foarte flexibilă; ea are 2 dimensiuni dar n'are o formă bine definită, adică o anumită curbură într'un punct dat, căci putem lucra asupra ei modificând cum vrem această curbură.

Absolut acelaş lucru se petrece cu multiplicitățile cu mai mult de două dimensiuni.

Fie una cu 4 dimensiuni; știm că această condiție nu e suficientă pentru a defini complect un spaţiu; el rămâne amorf ca şi pânza de care am vorbit, dacă nu ne dăm şi pe $ds^2 =$ gik dxi dxk, adică în definitiv pe gik. Dar formele pe care le poate lua pânza sunt infinit de multe; cum putem preciza care va fi forma pe care o va lua efectiv? Sau: gik sunt elemente care pot lua orice valori; cum vom cunoaşte care sunt valorile pe care gik le iau efectiv în spaţiul nostru ?

Evident numai prin măsurători, *prin experienţă.*

De o multiplicitate dată nu se leagă în mod necesar o anumită serie de valori gik; ***relaţiile metrice intrinsece nu sunt definite de însuşi spatiul considerat, ele sunt impuse de altceva, din afară.***

Sau, după Riemann: „.... pricipiul raporturilor metrice ale unei varietăți continue nu e coprins în însuşi conceptul acestei varietăţi, ci trebue să vie din altă parte".

Pânza amorfă capătă o formă bine definită, când o întindem, când o agăţăm în diverse puncte, cu un cuvânt ***când exercităm o serie de forţe asupra ei.***

După Riemann acelaş lucru are loc cu o multiplicitate cu oricâte dimensiuni; relaţiile metrice intrinsece ale acesteia, nu sunt determinate de ea însăşi, ***ci de forţele de legătură***, „bindende Kräfte", care lucrează în ea. „....Trebue deci să căutăm fundamentul raporturilor metrice în afară [de multiplicitatea dată], în forţele de legătură ce lucrează în ea.

* * *

Riemann afirmă deci că un spaţiu oarecare poate fi curb şi că curbura o provoacă anumite forţe de legătură, al căror studiu, — o spune precis. — este de domeniul fizicei. Peste mai mult de 60 ani, pe calea deschisă de Riemann pătrunde Einstein, care utilizează vederile acestuia în domeniul fizicei, precizând natura acelor misterioase forţe de legătură: ele nu sunt altceva decât forţele de gravitaţie.

Deci curbura spaţiului e determinată de forţele de gravitaţie. Dar din experienţă ştim că prezenţa materiei provoacă în jur fenomene de gravitaţie. Deci, în definitiv, ***curbura spaţiului e determinată de materie***, de cantitatea şi de distribuţia ei. Prezenţa materiei modifică spaţiul amorf dându-i o anumită curbura după o lege bine definită, fixându-i cu alte cuvinte structura.

Strângând atunci laolaltă toate rezultatele dobândite până acum, putem formula concluzia generală următoare:

Universul e o multiplicitate cu 4 dimensiuni, care n'are aceiaşi structură în toate punctele sale; această diferenţă de structură se datoreşte prezenţei materiei; ea se manifestă prin fenomene de gravitaţie.

Dobândirea acestei concluziuni înseamnă în istoria ştiinţei un moment de o însemnătate deosebită, datorită în primul rând introducerii unui nou element fundamental pe care l-am numit în cele precedente „spaţiul activ".

Cum am accentuat şi mai înainte, spaţiul nu era până acum în fizică, decât cadrul rigid în care aveau loc fenomenele; noţiune de un caracter cu totul special, el nu era obiect de studiu decât în matematici şi în metafizică; structura lui era cea euclidiană bine definită şi invariabilă.

Iată însă că teoria generală a relativităţii ne sileşte să ne schimbăm in această privinţă felul de a vedea. Nu numai că spaţiul prin curbura lui influenţează fenomenele, dar multipliciatea amorfă cu 4 dimensiuni este la rândul ei influenţată de conţinutul ei material care o sileşte să se curbeze într'o anumită măsură, determinându-i ceiace Riemann numeà raporturile metrice intrinsece.

E o schimbare de punct de vedere foarte atrăgătoare, atât de atrăgătoare încât ea ne face să exagerăm poate, când căutăm să explicăm toate fenomenele cu ajutorul acestui nou element activ. In orice caz avem la dispoziţie pentru explicarea fenomenelor un nou element care le poate provocà sau influență. Și din acest punct de vedere putem spune că rezultatul cercetărilor lui Einstein este echivalent cu ***descoperirea unei noi forțe în natură;*** avem adică un nou element activ pe seama căruia putem pune o serie de fenomene ale căror cauze erau necunoscute până acum.

* * *

Urmărind aceste idei, se pot desvolta calculele teoriei pe bazele pe care le-am indicat mai sus, pentru a le aplicà apoi fenomenelor fizice și a dobândi concluziuni susceptibile de verificări experimentale.

Ecuațiile fundamentale sunt ecuațiile care definesc structura spațiului când se dă distribuția de materie.

Pentru stabilirea lor se folosește un principiu de minimum analog cu principiul lui Hamilton din mecanică.

Ceiace este însă interesant e faptul că aceste ecuațiuni ne conduc, ***fără nici o altă ipoteză suplimentară***, la 4 relații de condiție între elementele care caracterizează materia, relații care nu exprimă alt ceva decât ***legea conservării energiei*** și a conservării ***cantităților de mișcare***. Iată astfel aceste legi fundamentale rezultând ca niște consecințe ale legii generale a gravității; iată le deci conținute deja în această lege a gravității, ceiace constitue pentru unii încă un argument în favoarea acceptării teoriei lui Einstein.

Dacă facem oarecare ipoteze particulare, ecuațiile gravității se simplifică și dăm peste ecuația care dă legea gravității în teoria lui Newton. Noile ecuații coprind, ca o primă aproximație, pe acea a lui Newton. Revizuirea calculelor astronomice, cu ajutorul elementelor pe care ni le pune la dispoziție teoria relativității, ne va da rezultate mai exacte decât cele de până acum.

Dacă aplicăm ecuațiile pentru cazul particular când am avea o singură masă, — soarele, — care ar provoca fenomenele de gravitație, găsim că în jurul ei, spațiul se curbează așà că într'un plan el capătă o structură definită de:

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\theta^2 + \gamma dt^2$$

$\gamma = 1 - \frac{2m}{r}$, m masa soarelui, r, θ coordonate polare.

Acest ds^2 defineşte un spaţiu ale cărui geodezice le putem calcula şi care sunt curbe. Drumul unei raze de lumină e însă o astfel de geodezică; putem deci constata că razele de lumină trecând pe lângă soare sunt deviate din drumul lor, şi putem calcula această deviaţie. Acest rezultat este verificabil prin experienţă, şi de fapt el constitue acum cea mai puternică probă pe care o posedă teoria relativităţii că concluziunile ei se apropie destul de mult de realitate.

Se mai poate dovedi prin calcul că periheliul orbitelor planetare se deplasează, şi se poate calcula mărimea acestei deplasări; Einstein a făcut acest lucru pentru Mercur, şi valoarea calculată a fost aceia pe care o indicase mai înainte experienţa.

In sfârşit, din forma generală a lui ds^2 se mai poate trage concluzia că trebue să constatăm la un spectroscop oarecari diferenţe între spectrele unui aceluiaşi corp privit pe pământ şi pe soare. Efectul e însă mic şi experimentatorii nu sunt încă de acord asupra acestei chestiuni.

Acestea ar fi consecinţele teoriei susceptibile de a fi verificate prin experineţă. Eclipsa din **21** Septembrie a adus noi confirmări experimentale ale teoriei. Trebue să observăm însă că, in orice caz, elementele experimentale necesare pentru a judeca just valoarea unei teorii, sunt azi insuficiente în teoria relativităţii. E mai ales un contrast izbitor între acest număr restrâns de confirmării experimentale şi extraordinara desvoltare teoretică pe care a dobândit-o chestiunea.

Dealtminteri, chiar dacă n'ar exista nici o confirmare experimentală, splendidul edificiu al relativităţii generale ar rămâne una din cele mai admirabile creaţii ale spiritului omenesc.

De aceia nici noi nu vom insista mai mult asupra încercărilor de a justifica teoria prin experienţă, — ci vom trece mai departe spre a examina una din chestiunile cele mai interesante din punct de vedere speculativ, una din cele mai obscure, dar al cărui studiu aprofundat ar fi de cel mai mare folos pentru a situà noua concepţie a fenomenelor pe care ne-o impune teoria relativităţii, în istoria gândirii omeneşti.

(Va urma)

Asupra teoriei generale a Relativităţii [1])

AL. PROCA
Inginer

II

Am văzut în cele precedente cum spaţiul cu 4 dimensiuni, adică Universul, are o influenţă asupra materiei în sensul că e capabil să provoace fenomene de gravitaţie graţie curburii lui.

Am mai văzut însă că, la rândul ei, materia influenţează spaţiul, curbându-l.

Aşa dar prezenţa materiei provoacă curbura spaţiului; la rândul ei această curbură îşi manifestă apariţia prin fenomene de gravitaţie.

Există astfel un schimb continuu între materie şi spaţiu; ambii lucrează simultan, unul asupra celuilalt. Dacă într'un câmp de gravitaţie introduc un corp, nu numai că acest corp e supus acţiunii câmpului (care, de exemplu, îi schimbă mişcarea) dar *însuşi câmpul e modificat* de prezenţa corpului. Fenomenul e cunoscut din electricitate: dacă într'un câmp electric introducem un corp electrizat, acesta e supus unor anumite forţe, dar în acelaş timp şi câmpul electric e modificat.

Se stabileşte întotdeauna un echilibru; şi acţiunea spaţiului asupra unui corp, — depinzând de curbura lui, — depinde de distribuţia *întregei* cantităţi de materie care există în acest spaţiu, inclusiv corpul considerat. Dacă această distribuţie se modifică, — se schimbă şi acţiunea pe care o sufere corpul. Avem analogie completă cu fenomenul electric amintit.

---

[1]) Vezi No. 11—12, 1922.

Asemenea asemănări sunt destul de frecvente; studiul aprofundat al teoriei ne-ar putea indicà dealminteri în ce fel intervin în ea ideile dominante din fizica de azi, ne-ar prezenta-o ca ultimul termen al evoluţiei acestor idei, ca o generalizare extrem de îndrăzneaţă, dar care se sprijină pe ele şi care n'ar putea să aibă fără ele, însemnătatea pe care o are.

Am putea constata în acest fel cât de adevărată e afirmaţia că ştiinţa e în evoluţie continuă, automatică şi că cea mai extraordinară şi neaşteptată descoperire nu e decât rezultanta unei serii întregi de experienţe neinterpretate, de teorii bune sau falşe, de păreri, de suggestii, de insuccese pe care la un moment dat o minte genială le strânge la un loc, le coordonează şi le dă viaţă, descoperind în fine şi ultimul inel al lanţului de raţionamente care le leagă pe toate într'o teorie unitară şi armonioasă.

Să presupunem că nu mergem aşà departe şi că ne limităm la un caz simplu, la cazul soarelui care atrage o planetă.

Cum am văzut nu are sens să vorbim de o atracţie şi în general nu are sens să vorbim de o acţiune la distanţă. Procesul după care are loc aparenta atracţie e următorul: soarele curbează spaţiul înconjurător, tot aşà după cum un magnet ar provoca tensiuni în eter; planeta, situată într'un spaţiu curb, suferă influenţa directă a acestuia, influenţă care se manifestă prin devierea dela linia dreaptă. Aşa dar, de fapt, tot soarele acţionează asupra planetei dar nu direct (acţiunea la distanţă e imposibilă), ci din aproape în aproape, prin intermediul unui continuu special având rolul de intermediar, analog cu rolul eterului din vechea teorie a atracţiunilor magnetice.

Un corp provoacă în jurul lui un câmp gravific; întâlnim şi aci noţiunea de câmp, care dela Faraday, caută să pătrundă în toată fizica; aci însă e vorba de un câmp special, ale cărui linii de forţă ar fi geodezicele unui spaţiu cu 4 dimensiuni, din care una ar fi timpul, — un câmp de o natură cu totul neobişnuită.

Noţiunea de câmp îşi are origina în puternicul impuls de altădată, de a înlocui toată teoria fenomenelor cu acțiune la distanță prin teoria acțiunilor de contact. Dacă judecăm felul în care am tratat noțiunea de spațiu până acum, putem recunoaște în această tratare, o preocupare analoagă. Spațiul pe care-l cunoaștem până acuma, spațiul pasiv, euclidian, are proprietăți ce nu se împacă cu principiul care n-a făcut să abandonăm teoria acțiunilor la distanță.

Așa, în spațiul euclidian există corpuri solide, indeformabile; pot transporta un corp la o distanță orcât de mare fără ca el să-și schimbe forma sau proprietățile. Această independență față de drumul parcurs nu e în spiritul unei fizice care are la temelie principiul acțiunilor de contact, principiul continuității.

In teoria relativității însă se face un studiu mai aprofundat al noțiunii de spațiu în spiritul cercetărilor moderne. In general, un corp deplasat din A în B își modifică forma. Corpul care este acum în A nu e identic cu acelaș corp transportat în B la o distanță finită oarecare; ba chiar diferențele depind de drumul parcurs. O asemenea egalitate care în definitiv e o «acțiune la distanță», nu e posibilă decât în împrejurări cu totul speciale.

Noul mod de a privi spațiul e mai conform cu o cerință fundamentală a filozofiei naturale de azi, aceia a părăsirii orcărei ipoteze a acțiunilor la distanță.

In acest chip teoria relativității modifică anumite capitole ale științei pentru a le pune de acord cu principiile generale, cu acele idei dominante de care am pomenit mai înainte, — introducând mai multă unitate și mai multă armonie.

Vom mai lua un exemplu de asemenea modificare, interesantă mai ales prin consecințele ei.

* * *

Să considerăm principiul inerției și mișcarea plantelor.

Știința clasică spune: planetele aruncate în spațiu ar merge înainte cu o mișcare rectilină și uniformă, dacă n'ar exista atracția soarelui, care să le devieze în fiece moment, din drumul lor.

Dacă examinăm prima parte a acestei afirmațiuni, constatăm că ea nu e conformă cu principiul relativității.

Intr'adevăr, ce sens au cuvintele: «mişcarea e rectilină şi uniformă»? Faţă de care sistem de referenţă? Dacă se va găsi un observator pentru care mişcarea să fie într'adevăr de acest fel, pentru altul ea va fi curbilinie şi variată. Afirmaţia n'are sens precis. Proprietatea corpurilor pe care am numit-o inerţie, anume aceia de a perzista într'o mişcare rectilină şi uniformă n'a fost stabilită prin experienţă directă; ea rezulta dintr'o prelungire abstractă a acestor experienţe şi concluzia greşită la care acestea ne-au condus se datora, — cum vom vedea, — întinderii prea reduse a domeniului experienţelor noastre, care făceau ca spaţiul să ne apară euclidian.

Teoria generală a relativităţii modifică în chipul următor afirmaţia de mai sus.

Nu există atracţie din partea soarelui, deci nici *deviere* dela un drum drept; soarele n'are decât rolul de a curba spaţiul. In acest spaţiu curb planetele se mişcă *liber,* după geodezicele acestui spaţiu, tot aşà după cum un corp greu se mişcă pe un plan înclinat după linia de cea mai mare pantă.

Un corp lăsat liber într'un punct al spaţiului cu 4 dimensiuni va urma o curbă care este pentru spaţiul dat, ceeace este linia de cea mai mare pantă pentru planul înclinat, adică o geodezică, curba putând fi definită intriusec independent de sistemul de referenţă.

Pinciplul inerţiei modificat spune deci, *că un corp lăsat liber urmează geodezica punctului iniţial.*

El se mişcă, cu alte cuvinte, aşa cum îi permite spaţiul cu 4 dimensiuni în care se află. Deplasarea lui e comandată de curbura spaţiului; dintre toate mişcările pe care le-ar putea lua, el alege una anumită, determinată tocmai de structura spaţiului.

In acest chip principiul inerţiei pierde acel caracter misterios pe care-l avea în vechea lui formă.

El devine de fapt un principiu de minimum, exprimat în definiţia geodezicelor universului.

In sfârşit el arată că inerţia e şi ea datorită curburii spaţiului, cu alte cuvinte că această proprietate şi fenomenele de gravitaţie au aceiaşi cauză; că inerţia nu e decât un fel de manifestare a curburii spaţiului, cu alte cuvinte, că *inerţia şi gravitatea se confundă.*

* * *

Putem privi chestiunea şi din alt punct de vedere, care ne va duce la considerarea unei probleme extrem de importantă a fizicei trecute.

Dacă vrem să punem în mişcare un corp care e în repaos, acesta opune o rezistenţă datorită inerţiei. Acelaş lucru, — după vechiul fel de a vedea, — cu un corp liber în mişcare rectilină şi uniformă şi pe care am voi să-l deviem din drumul său.

Rezistenţa aceasta pe care o opune corpul unei variaţiuni de viteză este proporţională cu masa lui.

Putem avea astfel o indicaţie asupra felului cum se va opune un corp unei încercări de a-i schimba regimul permanent de mişcare, măsurându-i masa; concis putem spune că *masa unui corp măsoară inerţia lui,* — după cum ştim, de altfel.

Apare astfel în mod natural aci una din noţiunile care au provocat pe vremuri discuţii lungi şi fără nici un rezultat definitiv, anume noţiunea de *masă.*

Rând pe rând privită ca un număr reprezentând o cantitate de materie, ca un coeficient de inerţie, ca element determinat de o cantitate de mişcare, masa n'a putut fi definită în mod riguros, căci toate încercările se izbeau, sau de un cerc viţios sau de necesitatea introducerii altor elemente suplimentare, ele înşile foarte greu de definit.

Singurul lucru asupra căruia toţi cercetătorii erau de acord rezulta dintr'o convingere intuitivă, aceia că «într'un corp dat există ceva constant», formulă care ne scoate în relief proprietatea caracteristică ce se atribuia mai înainte masei. Poate nici unui element nu i s'a acordat în vechea fizică un caracter mai pronunţat de invarianţă. Pentru un corp dat masa era un număr fix, invariabil legat de corp şi reprezentând ceva indestructibil; în plus ea era o caracteristică a corpului, bine definită când corpul era dat şi deci independentă de existenţa sau neexistenţa altor corpuri în univers.

Intr'o ecuaţie de mecanică elementul masă este singurul element care o face să ţie seamă de caracterul material al corpurilor între care are loc fenomenul. Toată complexitatea extraordinară a proprietăţilor materiei care intră în joc într'un fenomen dat, trebue concentrată în acest număr; masa e astfel un coeficient rezumativ, sau după o expresie fericită [1]) masa este «rezumatul cunoştinţelor noastre [mecanice] despre materie».

Un fapt de experienţă, proporţionalitatea maselor cu greutăţile, dădea mijlocul de a calcula masa şi aducea astfel un sprijin puternic intuiţiei, care afirma existenţa reală a unui element aşa de greu de definit fără ambiguitate.

De fapt toate cercetările ulterioare n'au confirmat convingerea intuitivă, de care e vorba mai înainte; ele au fost folositoare numai întrucât au ajutat să se studieze particularităţile problemei, şi să se prepare terenul pentru acceptarea ideilor ce rezultă din studiul teoriei generale a relativităţii.

Azi, după această teorie, masa nu mai are caracteristica sa esenţială: invariabilitatea.

Ea îşi schimbă valoarea [2]) după cantitatea de energie pe care o posedă corpul. Ea nu mai constitue un coeficient fundamental propriu unui corp dat, ci depinde, cum vom vedea îndată şi de corpurile înconjurătoare.

Această noţiune pierde acum toate calităţile care o făceau utilă şi necesară în vechea mecanică şi în consecinţă nu mai poate servi, după cum a servit mai înainte, în studiul fenomenelor; ea rămâne totuşi o noţiune utilă pentru aplicaţiuni şi interesantă din punct de vedere pur ştiinţific, mai ales prin contrastul ce-l oferă noile proprietăţi paradoxale pe care i le-a descoperit teoria relativităţii, cu acelea pe care intuiţia i le-a atribuit dela Newton încoace. Am încercat în conferinţa precedentă să arăt că masa nu e un invariant, ci că depinde de starea energetică a corpului; nu voiu mai reveni asupra acestui lucru aci. In schimb voi insista asupra unei alte proprietăţi paradoxale, întrevăzută altă dată de critica pătrunzătoare a lui Mach şi

---

[1]) O. Onicescu, Revista Ştiinţifică Adamachi. Mai 1922.

[2]) Vezi conferinţa precedentă.

care acum apare clar la lumina teoriei generale a relativității.

Am văzut că masa măsoară inerția corpului, adică rezistența pe care o opune corpul liber când vrem să-l impiedicăm de a-și urma drumul său natural pe geodezica respectivă. Această inerție a corpului, care se confundă cu gravitatea, are drept origină curbura spațiului: un corp liber se mișcă pe geodezicele universului. Dacă universul își schimbă curbura, geodezicele se schimbă, deci inerția și deci masa (care o măsoară) se schimbă. Masa unui corp depinde așa dar de curbura spațiului în care se mișcă.

La rândul ei această curbură e provocată de o distribuție oarecare de materie în univers, așà că în definitiv putem spune că:

masa unui corp nu este o cantitate fixă care să depindă numai de acel corp; ea atârnă de distribuția tuturor celorlalte corpuri în univers.

Iată o concluzie într'adevăr paradoxală; nu numai că masa nu e un invariant când corpul în chestiune absoarbe sau emite energie, dar masa nici nu e bine definită chiar când ne-am da cantitatea de energie pe care o posedă corpul considerat. Trebue să ne dăm în plus și distribuția tuturor celorlalte mase din univers.

Ideea aceasta, care în definitiv nu e decât ideie *relativității masei,* e una din cele mai subtile și mai splendide idei care se întâlnesc în acest domeniu de cercetări, bogat de altfel în surprize de soiul acesta.

* * *

Am vorbit mai sus despre «toate masele din univers». Iată astfel că se pune o chestiune nouă. Pentru prima oară apare aci nevoia de a privi universul în ansamblul lui. Chestiunea prezintă un interes deosebit. Cercetările privitoare la ea au dus pe Einstein la o concepție foarte curioasă a lumii noastre și rezultatele, interesante și noi, merită să fie amintite.

După cum am arătat, în conformitate cu spiritul fizicei moderne, legile teoriei relativității sunt exprimate prin ecuații diferențiale, definind fenomenul numai într'un domeniu infinit mic din jurul unui punct dat. Dacă vrem să urmărim fenomenul într'un domeniu *finit* trebue să adunăm acţiunile din fiecare punct, să facem adică ceeace se chiamă *o integrare.*

Dar aci apare o dificultate: ca la orce integrare nu e suficient să ne dăm elementul diferenţial, ci avem nevoie şi de limite. Aceste condiţii la limită nu sunt coprinse în ecuaţia diferenţială, ci trebue să le impunem noi după situaţia specială fiecărui caz. Cu alte cuvinte, dacă vrem să studiem mersul unui fenomen într'un spaţiu dat de dimensiuni finite, avem nevoe să cunoaştem: 1) ecuaţia diferenţială respectivă şi 2) *mersul fenomenului pe frontiera domeniului considerat.*

De exemplu să presupunem că vrem să studiem universul în ansamblul lui cercetându-i structura provocată de o distribuţie de materie dată şi invariabilă în timp. Teoria generală a relativităţii ne dă ecuaţia diferenţială; mai trebue încă să cunoaştem condiţiile la limită adică *structura universului la marginile lui spaţiale adică la infinit.*

Iată o dificultate specifică acestui fel de probleme; suntem nevoiţi să facem ipoteze, şi încă ipoteze într'un domeniu în care ştim *din experienţă* că e foarte periculos să ne avântăm bazaţi numai pe intuiţie sau pe generalizări superficiale.

Intr'adevăr o mulţime de asemenea ipoteze asupra celor ce se petrec «la infinit» s'au dovedit neconforme cu realitatea deşi intuiţia noastră le atribuia un mare grad de certitudine; postulatul lui Euclide, — care în definitiv nu e decât o afirmaţie asupra felului cum se comportă două drepte la infinit, — este un exemplu frapant al acestei stări de lucruri.

Aşa dar trebue să fim prudenţi. Prima ipoteză care se prezintă spiritului e aceia că la infinit spaţiul e euclidian; dar şi această ipoteză, ca şi toate celelalte care s'au făcut, nu e acceptabilă; toate conduc la contraziceri. Aşa de greu a fost să se găsească o ipoteză convenabilă încât unii au propus chiar să se renunţe la ideia de a mai căuta ipoteze absolut generale aplicabile la infinit. resemnându-se să privească această problemă ca inatacabilă cu armele pe care ni le poate pune la dispoziţie ştiinţa de azi.

Felul în care Einstein a rezolvat problema poartă într'adevăr pecetea geniului său. Iată cam în ce constă soluţia.

Cu toate sforţările făcute a fost imposibil să se găsească o ipoteză convenabilă. Acest fapt ne poate face să ne gândim că dificultatea întâlnită ar putea fi o dificultate organică; că problema ar putea fi de aşa natură încât să fie o absurditate să mai căutăm care sunt condiţiile realizate pe graniţile domeniului considerat adică la infinit. In particular dificultatea de care e vorba aci ar dispărea dela sine dacă spaţiul considerat *n'ar avea graniţe,* dacă ar fi cu alte cuvinte nelimitat, căci atunci evident n'ar mai fi nevoie de condiţii la limită, Dar nu astfel de spaţiu fără limite, fără graniţe este un *spaţiu curb închis asupra lui însuşi* întocmai după cum, de ex. o sferă este un spaţiu 2 dimensiuni fără margini, nelimitat.

Iată deci cum suntem conduşi să încercăm dacă nu cumvà dificultăţile întâlnite pot fi înlăturate printr'o nouă ipoteză asupra construcţiei universului; şi cum această nouă ipoteză ne impune un spaţiu cu un aspect cu totul altul decât acela cu care eram obişnuiţi până acum.

După această ipoteză *lumea noastră e nelimitată în spaţiu; dar totuşi ea nu e infinită.*

Dacă fiinţele imaginare cu 2 dimensiuni pe care le-am folosit în analogiile precedente s'ar mişca pe suprafaţa unei sfere ele şi-ar putea da seama de faptul că lumea lor are o mărime finită, dar orcât ar merge ele nu s'ar izbi de vre-o frontieră. Acelaş lucru se petrece cu spaţiul nostru; el formează un continuu *curb,* închis, deci ilimitat, şi dacă am porni într'o anumită direcţie am putea să revenim la punctul de plecare fără să fi întâlnit nici-o barieră în drum.

Un spaţiu cu 3 dimensiuni închis asupra lui însuşi e greu de imaginat; posibilitatea teoretică a existenţei lui a fost însă pusă în evidenţă pentru prima oară tot de Riemann, care afirma pe vremea când nici nu se putea bănui ce importanţă vor avea în fizică cercetările sale geometrice, — că:

«proprietatea spaţiului de a nu aveà limite posedă deci o certitudine empirică mai mare decât aceia a orcărei alte date experimentale externe.

De aci însă nu urmează deloc că spaţiul e infinit».

Această concepţie a unui spaţiu, închis deci curb, finit dar nelimitat. a fost utilizată de Einstein pentru a da o imagine a universului în ansamblul lui.

Pentru a preciza ideia lui Einstein, să ne reamintim că am admis că spaţiul e curbat de către materie în jurul punctelor unde aceasta este aglomerată ; *în afară de această curbură locală,* spaţiul posedă o curbură de ansamblu, aceia despre care e vorba aci. O imagine care să ne concretizeze spaţiul în ansamblul lui, ar fi spaţiul cu,2 dimensiuni pe care-l constituie suprafaţa pământului. E finit şi nelimitat; prezintă, în mic, o mulţime de munţi şi văi (care ar corespunde curburilor provocate în diverse puncte de aglomerările de materie), dar în mare are totuşı forma aproximativă de elipsoid (şi *această* formă este cea care ar corespunde curburii de ansamblu de care a fost vorba în rândurile de mai sus).

De îndată ce densitatea medie a materiei în spaţiu este diferită de zero, -- şi se pare că «aşà e în realitate spaţiul capătă o curbură de ansamblu, devine finit şi nelimitat.

E de observat că aci am vorbit tot timpul de spaţiul propriu zis, de spaţiul cu 3 dimensiuni, căci de la început am socotit punctele la infinit, în *spaţiu,* nu în timp. Acest spaţiu posedă o curbură generală, are o formă de ansamblu închisă.

Problema care ni se pune imediat după aceasta este aceea a găsirii formei de ansamblu *a universului,* adică a multiplicităţii spaţiu-timp. Exprimată în alt mod problema revine în fond a căuta condiţii la limită în ceea ce priveşte timpul, revine adică la pretenţioasa încercare de a avea oarecari informaţii cât de vagi, asupra unui domeniu, a cărui natură nici n'o bănuim, dar căruia i-am dat totuşi numele, sonor şi neprecis, de: infinitul timpului.

Asupra acestui punct nu există încă acord. După Einstein universul este un fel de cilindru, curb în dimensiile sale spaţiale dar rectiliniu în direcţia axei timpului; după alţi autori universul are altă formă. Soluţia cea mai proba-bilă nu e încă găsită. Pare însă bine stabilit caracterul de *continuu închis* al spaţiului obişnuit. O mică modificare pe care Einstein a făcut-o ecuaţiilor teoriei le pune de acord cu noua concepţie şi permite a calcula ceea ce s'ar putea numi raza lumii noastre (în cazul când am asemăna-o cu o sferă), care ar fi cam de 10^{13} ori distanţa de la soare la pământ.

Evident Einstein nu-şi întemeiază ipoteza aceasta pe motivele pe care le-am dat la început, — care de altfel ar putea da numai o îndrumare şi nici de cum o motivare, — ci pe alte consideraţiuni izvorâte din greutăţile şi contrazicerile teoriei lui Newton şi asupra cărora nu vom insista aci.

De fapt dacă privim mai atent această trecere de la vechea concepţie a Universului în ansamblul lui—la cea nouă, recunoaştem în ea un proces, cu care de mult ne-a familiarizat studiul ideilor generale ale fizicei moderne, şi mai ales studiul teoriei relativităţii.

Avem aci, în fond, aceiaşi ideie ca aceia întâlnită la trecerea de la vechea concepţie euclidiană a spaţiului «plan», la aceia recentă de spaţiu «curb», — adică de la spaţiul ale cărui caracteristice într'un punct îl determină complect în orcare altul, la spaţiul ale cărui caracteristice îl determină numai în vecinătatea punctului considerat. Avem, cu alte cuvinte, aceiaşi idee fundamentală care a provocat trecerea de la fizica acţiunilor la distanţă la fizica acţiunilor de contact,—sau de la geometria plană care admite postulatul lui Euclide, la geometria eliptică a lui Riemann.

De fapt această trecere e un pas înainte în evoluţia normală a cunoştinţelor noastre despre spaţiu.

In această evoluţie se pot distinge clar trei etape.

In prima intuiţie afirma cu tărie că spaţiul e euclidian. Postulatul lui Euclide era un adevăr necontestat şi toţi cercetătorii căutau să-i dea o demonstraţie neatacabilă, convinşi că o asemenea demonstraţie se poate da.

In a doua etapă convingerea aceasta slăbeşte şi încet, încet matematicienii trec la punctul de vedere opus: postulatul lui Enclide nu e de loc necesar; el poate fi înlocuit, din punct de vedere al logicei geometrice, cu orcare altul, acesta putând servi tot aşa de bine ca temelie a unei geometrii coherente. Ceea ce a înşelat intuiţia atâta timp, e faptul că în natură nu avem realizat de cât spaţiul euclidian.

In sfârşit a treia etapă e caracterizată prin abandonarea acestei ultime convingeri; spaţiul pe care-l cunoaştem nu e euclidian de cât în cazuri particulare. Structura lui poate fi orcare şi geometriile, care altădată păreau simple speculaţiuni teoretice, sunt de fapt acele care corespund astăzi cel mai bine realităţii.

* * *

Acest din urmă fel de a vedea, — adică acela care se conformează tendinţei de a nu admite de cât acţiuni de contact,—tinde să devie general în Fizica de azi. Fără îndoială, consideraţiunile de mai înainte au fost influenţate de el. Şi este sigur că dacă am cerceta în mod critic întreaga teorie a relativităţii, şi am căuta să descoperim şi să înlocuim toate raţionamentele, ideile, ipotezele care n'ar fi în spiritul acesta,—am dobândi o teorie mai perfectă, o teorie care, în orce caz, ar avea mai multă coherenţă, mai multă unitate, şi mai puţine contraziceri.

O asemenea cercetare critică a fost făcută de H. Weyl şi rezultatul a fost surprinzător. Nu numai că teoria a câştigat mult ca unitate şi ca armonie, dar ea şi-a mărit extraordinar domeniul său, coprinzând într'o sinteză grandioasă atât fenomenele gravifice cât şi pe cele electrice. Vom cerceta această nouă dezvoltare a teoriei, în cele ce urmează.

* * *

Cu excepţia fenomenelor gravităţii, fenomenele fizice de natură cât de complexă, puteau fi reduse la fenomene elementare electrice, într'un mod mai mult sau mai puţin satisfăcător. Existau aşa dar două categorii distincte de fenomene, care n'aveau nici o legătură aparentă între ele: fenomenele gravifice şi cele electrice.

Cum am văzut, Einstein afirmă că origina tuturor schimbărilor pe care le numim fenomene de gravitaţie sau de mişcare, este curbura variată a universului. Weyel arată că acest univers are o structură cevà mai complicată de cât se presupunea, dar că tocmai această complicaţie ne îngăduie să privim şi *fenomenele electromagnetice ca fiind* *«provocate» de variaţia structurii acestui univers.* Toate feuomenele fizice pot fi considerate aşa dar ca pricinuite de proprietăţile metrice ale spaţiului, de curbura sa; toată fizica se reduce astfel la studiul proprietăţilor geometrice ale universului, realizându-se astfel o sinteză de o amploare necunoscută până acum.

Ideea fundamentală a lui Weyl este extrem de elementară.

Am văzut că la baza întregului edificiu pe care l-a clădit Einstein, stă un principiu fundamental, acceptat fără restricţie de toată lumea, principiul relativităţii: ecuaţiile fenomenelor sunt invariante faţă de schimbarea sistemului de coordonate.

Dar pentru a putea scri ecuaţia unui fenomen (căderea unui corp greu de ex.) e nevoie să alegem: 1) un sistem de axe coordonate şi 2) *o unitate de măsură.* Şi atunci, dacă ecuaţiilor fenomenului le impunem invarianţă faţă cu schimbarea axelor de coordonate, dece nu facem acelaş lucru şi în ceea ce priveşte unitatea de măsură ?

Evident e o lacună. *Dacă admitem că există relativitate generală, atunci trebue ca ecuaţiile fenomenelor să fie invariante atât faţă de schimbarea axelor de coordonate cât şi faţă de schimbarea unităţii de măsură.* Iată în simplicitatea ei ideea fundamentală a lui Weyl.

Să cercetăm acum mai de aproape această chestiune a unităţii de măsură, dintr'un alt punct de vedere, care să ne învedereze caracterul ei analitic, punând-o în legătură cu tendinţe de care am vorbit la sfârşitul paragrafului precedent, de a elimina orce «acţiune la distanţă» din cercetările fizice.

Fie universul cu 4 dimensiuni. Pentru a efectua măsurători în el trebue să ne hotărâm coordonatele şi unitatea de măsură. Deoarece considerăm universul care are structura cea mai generală trebue să definim *în fiecare punct al lui* o unitate de măsură (arbitrară), cu ajutorul căreia se vor face măsurătorile în imediata vecinătate a punctului considerat.

E esenţial de observat că a nu defini în fiecare punct o unitate de măsură (arbitrară), a presupune de exemplu că ne dăm o singură unitate pentru tot universul, înseamnă a face o restricţie în ceea ce priveşte structura acestui univers.

Fie un observator în A, care şi-a fixat în A unitatea lui de măsură, a construit-o dintr'o bară de metal, şi a măsurat cu ea elementul

$$ds^2 = \Sigma \, g_{ik} \, dx_i \, dx_k$$

Să presupunem că vrea să măsoare pe ds^2 în alt punct B la o oarecare distanţă, şi că vrea să utilizeze *aceiaşi* unitate de măsură. Cel mai simplu mijloc e să transporte din A în B bara lui de metal. Aceasta în genere se va deforma; în B ea va aveà o altă lungime pe care o va putea folosi ca unitate de lungime, fără ambiguitate. Dar se poate întâmpla ca transportând bara din A în B *pe două drumuri diferite. să obţinem două valori finale în B diferite;* cunoscând unitatea în A nu mai putem şti care e unitatea în B.

In general deci, n'are sens să vorbim despre aceiaşi unitate de măsură în puncte diferite ale universului. Când A şi B sunt la distanţă finită şi universul nu e supus nici unei restricţiuni, unitatea din A e absolut independentă de unitatea din B.

Cu alte cuvinte, în vechiul fel de a vedea, puteam compara fără ambiguitate două lungimi situate la o distanţă oarecare în spaţiu. Această posibilitate de comparaţie la distanţă nu este, după Weyl, conformă cu spiritul unei geometrii infinitezimale care are la bază aceiaşi idee fundamentală ca şi fizica acţiunilor de contact. Geometria corectă va fi aceia în care această comparaţie nu e riguros posibilă de cât între două puncte infinit vecine, adică geometria în care transportul unei lungimi între două puncte la distanţă finită se face din aproape în aproape, printr'o serie de acţiuni «de contact».

Aşa dar trebue să presupunem că putem alege în fiece punct unitatea de măsură sau, cum se mai zice, că putem «etalona» spaţiul. Dacă în universul pe care-l studiem nu putem face acest lucru, structura lui nu e cea mai generală posibilă şi el e supus în mod necesar unor restricţiuni. Legea care restrânge astfel generalitatea structurii universului este o lege geometrică având o semnificaţie fizică.

In particular, să presupunem că în universul nostru avem peste tot aceiaşi unitate de măsură (cazul teoriei lui Einstein studiată până acum); legea restrictivă corespunzătoare tradusă fiziceşte ne spune că în universul considerat nu există nici un fenomen electromagnetic.

* * *

Să examinăm consecinţele afirmaţiilor de mai înainte. Din cauza etalonării o lungime l transportată de la un punct la altul va suferi o variaţie oarecare. Se demonstrează că această variaţie (pentru o deplasare infinitezimală) este dată de $l\,d\varphi$, în care

$$d\varphi = \varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2 + \varphi_3\, dx_3 + \varphi_4\, dx_4 = \Sigma\, \varphi_1\, dx_1$$

Va fi deci suficient, pentru a-i urmări efectele, să ne dăm valoarea vectorului φ_i în tot universul.

Să presupunem dat un univers de o structură oarecare; un observator din acest univers poate să-şi fixeze în fiecare punct un sistem de coordonate şi o unitate de măsură şi să facă măsurători. Din aceste măsurători el va putea deduce structura spaţiului determinând pe deoparte potenţialele de gravitaţie g_{ik} din

$$ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

şi pe de alta potenţialele φ_i din

$$d\varphi = \Sigma\, \varphi_i\, dx_i$$

Cu alte cuvinte structura universului nu e complet determinată, cum credea Riemann, numai de coeficienţii g_{ik} ai formei $ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$; ea depinde şi de $d\varphi = \Sigma\, \varphi_1\, dx_i$.

Numai dacă ne dăm ambele forme ds^2 şi $d\varphi$ caracterizăm pe deplin structura universului considerat, care în acest caz e mai complicată de cât structura universului einsteinian.

Odată ce am făcut această modificare esenţială vom urma un drum exact paralel cu acel deschis de Einstein.

In teoria relativităţii defineam structura universului prin ds^2 şi îi cercetam geometria, calculându-i în special curbura (riemaniană).

Vom începe calculul definind universul prin ds^2 şi $d\varphi$ şi vom studia noua geometrie în acelaş mod, calculând de data aceasta şi *curbura metrică* (Streckenkrümung) $f_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i}$, element invariant care anulându-se arată că universul respectiv are structura universului din teoria generală a relativităţii.

Mai departe în teoria lui Einstein atribuiam o semnificaţie fizică curburii spaţiului. Aceasta dădea naştere câmpului de gravitaţie ale cărui componente se puteau deduce din g_{ik}. Elementele g_{ik} aveau o semnificaţie fizică.

In mod cu totul analog, vom atribui potenţialelor φ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ o semnificaţie fizică; ei vor da naştere unui câmp în jurul punctului considerat, ale cărui proprietăţi caracteristice se vor putea exprima în formă invariantă cu ajutorul curburii metrice

$$f_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i}$$

Şi tot aşà după cum anularea curburii în teoria lui Einstein caracteriza un spaţiu fără gravitaţie, tot aşa anularea curburii metrice f_{ik} va caracteriza un spaţiu din care au dispărut fenomenele cărora le dă naştere φ_i şi în care avem numai gravitaţie.

De ce natură vor fi aceste fenomene? In orce caz fenomene neconsiderate până acum în teoria lui Einstein. O ipoteză care se impune imediat este aceia că aceste fenomene sunt cele electromagnetice.

In primul rând ele nu intrau până acum în schema generală a teoriei lui Einstein. Apoi determinarea unui câmp electromagnetic necesită tocmai 4 cantităţi (3 pentru potenţialul vector, una pentru potenţialul scalar), care vor putea fi identificate cu cele 4 potenţiale φ_i. Atunci, după formula precedentă curbura $f_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i}$ va putea fi identtficată on câmpul electromagnetic; şi aceasta cu atât mai mult cu cât ştim că, pe deoparte, — fiziceşte vorbind, — pentru ca teoria lui Einstein să fie valabilă trebue să nu existe câmp electromagnetic în univers, — şi că pe de altă parte, din punct de vedere geometric, pentru a dobândi un univers de structură einsteiniană e necesar şi suficient să anulăm expresia curburii metrice, adică a aceluiaş câmp electromagnetic.

Suntem atunci îndreptăţiţi să tragem concluzia că *nu numai fenomenele de gravitaţie, dar şi cele electromagnetice pot fi privite ca manifestări ale structurii universului în care au loc.*

Dacă continuăm cu dezvoltarea teoriei după modelul teoriei relativităţii găsim ca analog al ecuaţiilor lui Einstein ecuaţiile bine cunoscute ale lui Maxwell; iar ca corespondent al identităţilor care ne dădeau legile conservării energiei, găsim ca o consecinţă pur analitică, *legea conservării electricităţii.*

Faptul că o concluziune dedusă matematic îşi are confirmarea fizică determinată pe cale experimentală, e încă un argument în favoarea ipotezelor de mai sus.

Weyl a dezvoltat matematic această teorie, căutând să condenseze cât mai multe rezultate într'un principiu analog cu acel al lui Hamilton.

Cu atât mai importantă apare o asemenea preocupare, cu cât elementul care pare a avea o semnificaţie absolută în această teorie, nu mai e curbura (analogul curburii riemaniene), ci ceeace se chiamă «acţiune», care e un *număr*, independent deci de orce sistem de referenţă. Această constatare scoate, pe deoparte, din nou în relief principiul fundamental al celei mai mici acţiuni şi permite, pe de altă parte, unele speculaţiuni cam riscate de altfel, asupra acestui număr în legătură cu teoria structurii discontinue a lumii, cu teoria quantelor.

In sfârşit era natural ca, o dată cu stabilirea pe noi baze a teoriei câmpului electromagnetic să se urmărească chestiunea aplicând-o mişcării electronului şi de aci să se încerce a ataca problema proprietăţilor electronilor îutr'un atom, adică problema materiei. Unele cercetări ale lui Weyl au fost îndreptate în această direcţie; se pare însă că rezultatul lor ar consta până acum în formarea convingerii că problema materiei e imposibil de rezolvat numai cu ajutorul teoriilor în care intervin exclusiv câmpuri, de orce natură ar fi ele.

In orce caz rezultatele pe care le-am amintit la început par astăzi bine stabilite; teoria lui Weyl completează admirabil teoria generală a relativităţii, dându-i caracterul pe care l-am semnalat la început, acela de teorie de sinteză.

* * *

Iată dar schiţate în trăsături generale ideile fundamentale şi principalele perfecţionări ulterioare ale teoriei generale a relativităţii.

Dezvoltarea ei armonioasă, ideile noi şi îndrăzneţe, estetica construcţiunii logice au provocat, încă dela apariţia ei în lumea ştiinţifică, entuziasm fără pereche la unii, — scepticism şi neîncredere la alţii. Când însă unele din prevederile lui Einstein au fost confirmate de observaţiuni, entuziasmul a depăşit limite pe care nu le mai atinsese de multă vreme.

Prin acelaş mecanism prin care o putere capricioasă şi absurdă face dintr'un om azi obscur, mâine o celebritate, teoria relativităţii a ieşit din lumea restrânsă a specialiştilor şi a devenit pentru câtva timp obiectul de preocupare al întregei opinii publice. Ea a fost de atunci studiată, expusă, lămurită, tălmăcită «pe înţelesul tuturor», de tot felul de autori, pentru un public demn uneori de admiraţie pentru perseverenţa sa. Entuziasmul a crescut enorm, şi cu rost şi fără rost. Paralel însă s'a dezvoltat deasemeni, cu rost şi fără rost, critica teoriei, adică atât critica ştiinţifică, obiectivă, cât şi acel soiu de critică personală mai rară în discuţiunile ştiinţifice care, discreditând opera, ţinteşte să reducă meritul şi să distrugă faima autorului.

Studiul complect al fenomenelor provocate de apariţia scrierilor lui Einstein se va prezinta desigur cercetătorilor viitori sub un aspect extraordinar de interesant.

Dar, lăsând la o parte această latură a chestiunii, să cercetăm şi câteva din principalele critici «ştiinţifice» aduse teoriei, pentru ca darea de seamă pe care am făcut-o până aci să fie cât mai complectă.

Nimic nu e mai util pentru a preciza o teorie nouă, pentru a delimita domeniul în care ea e valabilă, decât aceste critici care fôrmează oarecum fondul pe care ies mult mai bine în relief, toate amănuntele ei caracteristice. Adeseaori cercetarea criticilor contimporane cu apariţia unei noi teorii e chiar foarte utilă pentru descoperiri ulterioare. Intr'adevăr o asemenea descoperire corectează în genere un defect al teoriei, şi aceste defecte apar mult mai clar la început, când contrastul între vechiul fel de a vedea şi cel nou impus de teorie e mai mare, decât mai târziu când aceasta a fost acceptată pe deplin.

Aşa de exemplu legea lui Newton a fost acceptată şi întrebuinţată atâta timp, fără să se mai preocupe nimeni de defectul ei fundamental acela de a postula existenţa acţiunilor la distanţă; în scrierile contimporane şi imediat următoare apariţiei acestei legi însă, defectul acesta este scos foarte mult în evidenţă şi teoria socotită din cauza lui inacceptabilă.

Criticile aduse teoriei relativităţii se pot împărţi în mai multe categorii distincte.

Intr'o primă categorie am putea clasa pe acei savanţi care *nu pot,* sunt în imposibilitate organică, — am putea zice, — să accepte ideile fundamentale ale teoriei relativităţii. Fără nici o motivare riguroasă ei refuză să primească postulatele ei. Aşa, de exemplu, pentru ei afirmaţia că timpul şi simultaneitatea sunt absolute, are un caracter de evidenţă aşa de mare, încât nici nu mai poate fi pusă în discuţie; în consecinţă teoria relativităţii care tocmai pune în discuţie aceste lucruri porneşte pe o cale greşită.

Dar, din nenorocire, această teorie a relativităţii, deşi prost pornită, tot a ajuns la rezultate noi şi interpretări interesante, rezultate pe care le admit şi savanţii citaţi. De aci străduinţa acestora de a regăsi rezultatele amintite, fără a folosi însă teoria lui Einstein, fără a introduce niciun postulat nou. Aşa au apărut o serie de încercări, neîncoronate de succes de altfel, — de a găsi, cu orce preţ, contraziceri în teoria relativităţii şi de a dobândi totuşi rezultatele ei, utilizând numai mijloacele pe care ni le oferă ştiinţa clasică. Cel mai reprezentativ dintre aceşti savanţi ar fi elveţianul E. Guillaume; reuniunea dela Collège de France din Martie 1922 în care se discutau obiecţiunile aduse teoriei relativităţii, a consacrat definitiv insuccesul încercării sale.

In definitiv acest insucces are drept cauză incapacitatea relativă a autorilor de a alege ipotezele şi de a construi o teorie nouă, fără nici o contrazicere logică. O a doua categorie de critici se distinge de cea dintâi tocmai printr'o mai mare îndemânare în această privinţă.

Cu aceiaşi atitudine faţă de afirmaţiile teoriei relativităţii, caşi cei de mai sus, ei caută, să regăsească rezultatele ei, pe altă cale.

Cel mai însemnat dintre aceşti critici pare a fi savantul Lenard, din Heidelberg, care a construit o teorie foarte logică, dar care păcătueşte, — după părerea relativiştilor, — prin adoptarea unor ipoteze iniţiale stranii.

Anume, am văzut că, dacă eterul există el trebue să fie în repaos absolut; experienţa ne dovedeşte însă că acest lucru nu e conform cu realitatea. Lenard face ipoteza curioasă că eterul există şi că e în acelaş timp şi în repaos şi antrenat de un corp care se mişcă, tocmai în aşa mod încât să poată explica rezultatele dobândite prin teoria relativităţii. In orce caz, punctul de plecare poate fi greşit teoria însă prezintă mai multă seriozitate.

In aceiaşi categorie putem aşeza pe Sagnac, dela Paris, autor al unor încercări teoretice şi al primei tentative de a contrazice experimental teoria relativităţii.

De fapt, experienţa lui se explică foarte bine cu ajutorul teoriei lui Einstein; eroarea provenea din faptul că autorul aplica raţionamentele relativităţii restrânse într'un caz în care intervin mişcări accelerate.

Cele amintite mai sus nu sunt propriu zis critici, şi încă mai puţin critici ştiinţifice. In stadiul actual nu se poate aduce nici o obiecţiune serioasă construcţiunei teoriei relativităţii, după cum a arătat-o clar reuniunea dela Collège de France, convocată tocmai în scopul discuţiilor în contradictoriu cu autorul ei.

Ceeace se poate ataca sunt ipotezele şi postulatele care sunt la baza ei şi tocmai acest lucru îl fac autorii de care am pomenit mai sus. Dar în genere, motivele pentru a adopta o ipoteză sau a respinge un postulat sunt dobândite numai după o serie întreagă de experienţe, de încercări şi de observaţiuni; am văzut cât timp a trebuit savanţilor pentru a aduna motive suficiente care să-i îngăduie lui Einstein să abandoneze vechea concepţie a timpului şi spaţiului absolut. Putem deci bănui, — şi lucrul se confirmă cu prisosinţă, — că motivele învocate de autorii citaţi pentru a respinge teoria lui Einstein, nu au mare valoare.

Ceeace îi face să ia această atitudine nu sunt asemenea motive, ci mai degrabă o convingere intuitivă, nejustificabilă, rezultatul unui proces psihologic, care ia naştere din cauza fundamentalei nepotriviri a concepţiilor noi cu întreg felul lor de a vedea. Motivele acestea nu sunt însă natural destul de puternice ca să conteze într'o critică ştiinţifică obiectivă.

Cu totul altfel se prezintă lucrurile cu a treia categorie de autori care atacă problema în chip mai ştiinţific. Ei caută să probeze că rezultatele lui Einstein, — şi în special concluziile pe baza cărora se pot institui experienţe de verificare, — coprind prea mult arbitrar, adică s'ar putea să nu fie singurele la care ar fi putut ajunge Einstein pornind pe calea pe care a pornit.

Cu alte cuvinte teoria relativităţii porneşte pe un drum, care la un moment dat dă într'o răspântie de unde pleacă mai multe căi. Einstein a pornit înainte pe una din acestea, pe cea care se prezenta întâi şi care era mai uşor de urmat; mergând înainte el a ajuns la anumite rezultate. Dar tot aşa de bine el putea porni pe o altă cale şi atunci ar fi ajuns la rezultate cu totul opuse. Care din aceste două feluri de rezultate se apropie mai mult de realitate?

Cel mai reprezentativ dintre aceşti critici, Painlevé, într'o notă celebră pe vremea când a fost prezentată Academiei de Ştiinţe din Paris[1]), a afirmat între altele că expresiunea dată de Einstein pentru ds^2 nu este singura care se poate construi aşa ca să satisfacă condiţiilor impuse. Există din punct de vedere matematic o infinitate de alţi ds^2, pe care suntem tot atât de îndreptăţiţi să-i privim ca reprezentând structura universului în care ne aflăm. Deci concluziile pe care le trage Einstein din forma particulară a formulei sale nu mai au nici-o valoare, de vreme ce această

[1]) Comptes rendus de l'Ac. des Sciences 24 Oct. 1922.

formă particulară e arbitrară până la un anumit punct şi de vreme ce acele concluziuni variază cu ea.

Tot în această ordine de idei am putea aminti observaţiunile D-lui profesor Tr. Lalescu făcute într'o comunicare la Societatea de Ştiinţe din Bucureşti[1]). După Hertz, care caută să elimine conceptul de forţă, ceeaca înglobăm sub acest nume este manifestarea unei legături a corpului cu o serie de mase vizibile şi de mase ascunse, posedând mişcări observabile şi acunse.

In definitiv dacă presupunem pentru simplificare că nu există mase şi mişcări observabile, Hertz înlocueşte forţa, prin acţiunea maselor ascunse şi a mişcărilor ascunse.

Dar, fără a merge chiar aşa departe, Einstein face în teoria sa, cam acelaş lucru. Să ne reamintim într.adevăr principiul echivalenţei care spune că *efectul forţei de gravitaţie este identic cu acel al unei mişcări accelerate imprimate sistemului.* După D-l Lalescu, dacă admitem ideile lui Hertz, principiul echivalenţei apare numai ca o primă aproximaţie, ca ipoteza cea mai simplă dar care poate nu corespunde cu realitatea:

Einstein echivalează într'adevăr o forţă cu o mişcare ascunsă, dar el nu ţine seama de acţiunea maselor ascunse. Drumul urmat de Einstein e cel mai simplu. dar s'ar putea să nu fie cel mai conform cu natura lucrurilor.

In aceiaş ordine generală de idei am putea aminti aci de încercarea D-lui O. Onicescu dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, de a demonstra, că un anumit tensor, — folosit de Einstein pentru că are în mod exclusiv anumite proprietăţi caracteristice, — nu este singurul care se bucură de aceste proprietăţi.

Evident, afirmaţia particulară a lui Painlevé poate fi contestată, după cum a şi fost. Einstein însuşi, la Paris, a răspuns unei serii de obiecţiuui care se aduceau teoriei sale; nu e vorba aci de posibilităţi matematice, ci de o problemă fizică care are o soluţie bine determinată: pentru Einstein există o singură formulă de gravitaţie nu mai multe. Iar, în ceeace priveşte ideile D-lui Lalescu, s'ar

---

[1]) Ideile lui Hertz în legătura cu teoria lui Einstein. Marţi 22 Noemvrie 1921.

putea ridica obiecţiuni, în primul rând chiar în contra felului de a vedea al lui Hertz, sau s'ar putea aduce în sprijinul principiului echivalenţei experienţele extrem de precise ale lui Eötvös.

Dar lucrul n'are importanţă fundamentală. Ceeace rămâne în orce caz din aceste obiecţiuni, fie că ele sunt îndreptăţite fie că nu sunt, este însăşi semnificaţia atitudinei pe care a luat-o această categorie de critici faţă de teoria lui Einstein. Anume, opinia că domeniile învecinate cu această teorie nu sunt încă cercetate, fundaţiile pe care e clădită teoria nu sunt încă bine studiate şi e încă temerar să formulăm o judecată definitivă asupra ei. Concluzia logică este că toate domeniile noi, descoperite de geniul lui Einstein şi înrudite de aproape sau de departe cu teoria relativităţii, trebuesc cercetate, studiate complet pentru ca, lămurind astfel toate legăturile pe care le are teoria cu diversele discipline ale ştiinţei să o putem situà mai bine între acestea, în locul cel mai adecuat.

E mult adevăr în observaţiunea, — care se datoreşte îmi pare D-lui E. Borel, — că o judecată, obiectivă, justă şi sigură asupra teoriei relativităţii, nu vom putea avea decât atunci când ştiinţa va fi mai înaintată decât este azi, — poate de azi în zece ani. —

* * *

Iată deci cum se prezintă actualmente construcţia teoretică. formidabilă ca proporţii şi admirabilă ca frumuseţe, a teoriei generale a relativităţii. Am căutat să lămurim rând pe rând câteva din ideile ei fundamentale. Am căutat să punem în evidenţă pe cât am putut puternicul instrument de analiză pe care ni-l oferă aceste idei noi. Am văzut câte probleme pun, şi câte rezolvă ele; suntem departe de a le fi enumărat pe toate, şi nici nu putem şti la care alte probleme sau în ce alte domenii ele se vor aplica în viitor.

Chiar acum însă, pentru istoriograful ştiinţific şi pentru savantul, care-şi dă osteneala să cugete asupra mersului înainte al ştiinţei, apariţia teoriilor lui Einstein pune o serie de probleme foarte interesante.

Aşà e de pildă problema rolului preponderent, pe care-l joacă facultatea de intuiţie în anumit stadiu al cercetărilor ştiinţifice, nu numai în ceeace priveşte descoperirea de noi raporturi între fenomene, dar şi ca *fa tor determinant al atitudinei pe care o adoptă cercetătorul faţă de aceste fenomene.*

Iată de exemplu teoria lui Einstein. Ea este în definitiv o descriere a mecanismului după care au loc anumite fenomene naturale; ne dăm bine seama deci, că în acest caz *are sens* să vorbim despre o părere «obiectivă», a unui om de ştiinţă, acupra acestui mecanism. Fiecare din oamenii de ştiinţă care studiază teoria relativităţii are o asemenea părere, un fel de a vedea diferit dela unul la altul. Dacă cercetăm însă lucrurile mai de aproape ne dăm seama că acest fel de a vedea pare a nu fi determinat numai de elemente obiective. In formarea acestei păreri joacă un rol determinant un element de natură pur subiectivă. ceeace am numit mai sus destul de impropriu intuiţie, care în genere n'are nimic a face cu fenomenele considerate, ci depinde de educaţia ştiinţifică, de experienţa personală şi de talentul sau geniul cercetătorului.

Aşa unii din ei vor accepta teoria relativităţii căci felul de a vedea al lui Einstein se va potrivi bine în cadrul gândirii lor. Entuziasmaţi de splendida armonie a teoriei ei vor vedea în ea

«câteva acorduri din acea armonie a sferelor pe care au visat-o altă dată Pitagora şi Kepler». [1])

Din contră, altora intuiţia le va spune că Einstein a apucat pe o cale greşită; ei nu vor accepta teoria, deşi nu vor putea invoca în sprijinul atitudinei lor nici un motiv motiv de ordin logic sau experimental.

Convingerea lor e o convingere de natură intuitivă.

Exemplul cel mai caracteristic în această privinţă îl prezintă însuşi D-l Painlevé. Stăpân pe partea matematică a teoriei, — singura parte care îngreunează nematematicienilor critica ei, — el a cercetat-e întreagă, căutând să găsească o contrazicere, un punct slab în acest edificiu logic, şi n'a avut nici un succes.

Teoria relativităţii se prezintă. după însăşi expresiunea

---

[1]) H. Weyl Ramm. Zeit, Materie, I. Springer. — Sfârşit.

sa, ca un bloc de granit, întreg. fără nici o crăpătură, inatacabil. Şi totuşi... D-l Painlevé e în imposibilitate de a admite în ansamblul ei această teorie. Urmând comparaţia de mai sus, unii au zis că pentru D-sa, teoria relativităţii este într'adevăr un cub de granit puternic, inatacabil, dar care în loc să stea solid pe una din baze este aşezat numai pe unul din vârfurile sale.

Negreşit că această stare de lucruri, care apare la fiecare descoperire mai însemnată, îşi are cauza în faptul că nu posedăm încă suficiente date experimentale, că nu cunoaştem bine anumite fapte, şi că n'am studiat încă în de ajuns legăturile între terenul cunoscut al ştiinţei clasice, şi noile domenii descoperite de curând. Cât timp lucrurile vor sta aşà, intuiţia îşi va păstra rolul ei în determinarea felului nostru de a vedea, căci o judecată obiectivă are nevoie să se sprijine pe o mulţime de date pe care trebue să le cunoaştem şi intuiţia este tocmai facultatea care ne îngăduie să suplinim lipsa lor.

E absolută nevoie deci să se realizeze deziderattul de care vorbeam mai sus, acela de a studia cât mai aprofundat teoria relativităţii în legătură cu celelalte discipline ale ştiinţei. Prin natura lui lucrul acesta cere însă timp. In fiecare zi ies la iveală rezultate noi de amănunt, sau uneori de o importanţă mai mare, care toate contribue să clarifice problema.

Experimental cercetările se urmează asupra vibraţiilor atomilor în corpurile cereşti, pentru a verifica o prezicere al lui Einstein; uneori, ca anul acesta, se prezintă ocazia unor observaţii astronomice utile pentru a controla rezultatele anunţate.

Din punct de vedere teoretic cercetările sunt şi mai numeroase, îmbrăţişând toate capitolele teoriei relativităţii. Autorii lor sunt în majoritate matematicieni care studiază în ele însele teoriile matematice folosite de Einstein, aprofundându-le şi generalizându-le; se studiază şi se generalizează de ex. spaţiul: se vorbeşte acum nu numai despre spaţiu curb, dar şi despre spaţiu *cu torsiune.* Se pun în evidenţă simplificările la care a recurs Einstein sau Weyl şi gradul de generalitate al ecuaţiilor lor, etc. etc. Intr'un cuvânt, pe cărarea pe care a deschis-o Einstein cel dintâi, urmează o întreagă echipă de cercetători, care curăţă locul, îl nivelează, studiază împrejurimile şi încet, încet înlocuiesc cărarea spinoasă şi îngustă cu o şosea largă, frumoasă şi comodă.

Teoria lui Einstein se perfecţionează şi se complectează în fiecare zi; şi în oarecare măsură interesul pe care-l provoacă această teorie se datoreşte şi faptului că, în anume părţi ale sale, ea este «ştiinţă care se face» acum, care nu s'a cristalizat încă în formule mai mult sau mai puţin definitive.

La fiecare cotitură a drumului apar privelişti noi, rezultate interesante; ceeace cunoaştem prea puţin astăzi, se precizează mâine printr'o nouă descoperire sau chiar se schimbă cu totul.

Activitatea aceasta de descoperiri, de teorii parţiale şi ipoteze antagoniste, care zilnic apar ca să se confirme sau să se contrazică, până când din lupta lor iese la iveală adevărul căutat; străduinţa aceasta de a despica întunericul care învălue anumite secrete ale naturii şi satisfacţia de a vedea, intâi abia pâlpâind, o flacără care creşte mereu până ce ajunge să lumineze totul împrejur; efortul eroic pe care-l depun neîntrerupt talente şi genii, — formează un spectacol unic, de o măreţie neîntrecută şi care procură entuziaştilor emoţii, comparabile cu acelea provocate de orcare operă de artă adevărată. E în definitiv spectacolul, de o splendoare antică, legendară, al goanei după adevăr, al însuşi progresului umanităţii.

Am căutat în cele precedente să vă prezint teoria relativităţii, ca una care a oferit. şi oferă încă, mai mult decât orcare alta, priveliştea aceasta rară; deşi n'o puteam face decât stângaciu şi imperfect m'am încumetat totuşi să semnalez atenţiei Dv. aceste preocupâri, convins că nu există nimic mai frumos, mai plăcut şi mai demn de atenţie, decât urmărirea pas cu pas a acestei lupte fără răgaz, a acestor eforturi tenace pentru a smulge una câte una, cu multă trudă tainele naturii.

Şi acum ajuns, cu bunăvoinţa Dv. la sfârşitul acestei prea lungi conferinţe, în care am pomenit de atâtea ori numele lui Einstein, să-mi daţi voie să-l mai citez încă o ultimă dată, să-mi însuşesc cuvintele lui, şi, — ca o mulţumire pentru atenţia ce mi-aţi acordat astăseară, — să le tălmăcesc, aplicându-le Dv.

Vreau anume să amintesc de o prefaţă prin care Einstein prezintă publicului o lucrare a unui autor german asupra teoriilor sale.

Având ceva din farmecul pc care-l întâlnim numai în unele scrieri ale Evului Mediu, sfârşitul acestei prefaţe. — pasagiul la care vreau să mă refer, — sună cam aşà:

«Fie ca această cărticică să aducă cititorului mai multă bucurie!»

THEORIE GENERALE DE LA RELATIVITE

La théorie d'EINSTEIN n'entre plus, aujourd'hui, dans les préoccupations de l'opinion publique au même plan qu'auparavant. D'autres questions ont pris sa place et retiennent actuellement l'attention du grand public. Au contraire, on constate dans les milieux scientifiques d'actives recherches critiques sur la théorie, ses points faibles, son extension et ses conséquences.

Pour une meilleure compréhension et en vue de se former une opinion objective, la situation telle qu'elle se présente aujourd' hui est préférable à celle d'autrefois. Le jugement et l'esprit critique sont, en tout cas, plus impartiaux, moins influencés de considérations étrangères que précédemment et ce fait revêt une importance particulière s'agissant d'une théorie dont on a été jusqu'à dire qu'elle ne devait son succès qu'à une "autosuggestion des masses".

J'ai eu le plaisir de vous exposer lors d'une précédente conférence quelques-unes des idées qui sont à la base de la théorie d'EINSTEIN. Je n'avais alors toutefois eu la possibilité de traiter certains aspects qu'en les effleurant.

Je me propose aujourd'hui de combler cette lacune en exposant à nouveau la théorie d'EINSTEIN à partir d'un point de vue autre que celui adopté pour la conférence précédente. En ce sens, la conférence d'aujourd'hui complète la première mais je prendrai soin cependant que les absents à la première ne soient pas gênés de ceci au cours de la deuxième.

Je m'efforcerai tout d'abord de préciser en quoi consiste la différence entre le point de vue suivi ici par rapport au précédent en utilisant quelques aspects nouveaux que la théorie de la relativité a fait apparaître à la suite de découvertes postérieures aux travaux d'EINSTEIN. Une fois éclairci ce point, je chercherai à analyser l'élément fondamental de la théorie complète sous sa nouvelle forme;une certaine multiplicité à quatre dimensions x y z t, celle-là même que l'on appelle d'ordinaire l'espace à 4 dimensions de la théorie d'EINSTEIN. Cette dénomination est employée couramment par les mathématiciens. Elle est, toutefois, incorrecte et peut induire en confusion ceux qui ne sont pas familiers avec cette notion. Etant donné que, pour nous, il n'y a pas risque de confusion je conserverai cette dénomination précisément en raison du fait qu'elle n'est pas d'une exactitude rigoureuse, tirant parti de cette imprécision pour épauler une analogie explicative susceptible de présenter les choses sous une forme plus accessible à notre intuition. En application directe, je traiterai du problème de la gravitation selon EINSTEIN.

Puis, guidé naturellement par les développements précédents vers une étude plus approfondie de l'espace quadri-dimensionnel, je tenterai de montrer par quel procédé mathématique, on étudie effectivement cet espace et de quelle manière sont applicables ces calculs de la théorie de la relativité. Revenant alors aux phénomènes physiques, je signalerai quelques conséquences intéressantes de la théorie et les développements auxquels elle a donné lieu.

Ensuite, je traiterai d'une extension très importante, dont on doit l'aspect théorique à M. WEYL, et ceci achèvera l'exposé de la théorie de la relativité générale. Enfin, je signalerai les principales objections qui ont été faites à la théorie de sorte que, en fin de compte, nous aurons une vue d'ensemble de la théorie d'EINSTEIN exposée à partir d'un point de vue qui, très vraisemblablement, restera classique.

* * *

L'exposé moderne de la théorie de la relativité est sensiblement différent de celui que l'on adoptait antérieurement. Depuis le premier mémoire d'EINSTEIN il s'est modifié, évoluant comme, par ailleurs, tout mode d'exposition de n'importe quelle théorie physique qui s'enrichit constamment de résultats nouveaux sans avoir encore atteint un état de développement définitif. A ce jour, on peut distinguer deux périodes de cette évolution.

La première, dont j'ai adopté le point de vue lors de ma précédente conférence. L'exposé présentait les idées fondamentales dans leur enchaînement logique. En d'autres termes, l'exposé avait le caractère d'une analyse des phénomènes en vue de découvrir certains résultats bien déterminés.

Les choses se présentent de manière toute autre en l'état actuel de la théorie. Elle a atteint un état de stabilisation dans son développement. Toute une série de résultats ont été obtenus qui ont été généralisés à l'extrême. Ultérieurement, ont été découverts les éléments fondamentaux qui permettent la coordination de ces résultats en un tout harmonieux. De sorte que, maintenant, le but de tout exposé est la mise en évidence de cette harmonie globale, de cet aspect de la théorie en tant que construction édifiée logiquement, dérivant d'une série de faits et de principes pris pour base et dégagée de toute autre théorie parasite. En d'autres termes, un exposé moderne de la théorie de la relativité est une systémisation, un réarrangement selon un plan logique et esthétique de tous les résultats obtenus jusqu'ici - en un mot un exposé synthétique.

Cette évolution est d'ailleurs commune à toutes les théories. Le processus d'analyse, indispensable à la découverte cède le pas à la synthèse, absolument nécessaire à une description et une vue d'ensemble qui permette de fixer la place définitive de la théorie parmi les autres disciplines de la science.

Dans notre cas particulier, on trouve un motif supplémentaire pour qu'il en soit ainsi : la théorie générale de la relativité est en elle-même une vaste synthèse des phénomènes physiques, une théorie qui, les considérant en bloc cherche à les déduire tous, et de manière uniforme, à partir d'un principe unique.

On la nomme "Théorie de la relativité" mais son contenu ne correspond plus du tout avec cette définition. En fait, aujourd' hui, la théorie de la relativité générale doit être placée au nombre des théories qui s'efforcent de trouver ce qu'on appelle - d'un terme passablement impropre - une "explication" unique des phénomènes physiques.

On cherchait, de même, autrefois, des "explications" mécanistes de l'Univers ; chaque phénomène devait être réductible à des phénomènes mécaniques, c'est-à-dire soumis à des lois qui dérivaient des principes fondamentaux de cette discipline. Après avoir constaté l'insuccès de cette tentative on a cherché une autre explication plus complète : l'électromagnétique. Cette dernière réduit les phénomènes, en dernière analyse à des phénomènes considérés auparavant, ceux pour lesquels on n'avait pu encore construire un modèle mécaniste.

La synthèse qui en était résultée était d'ailleurs très complète. Presque toutes les catégories de phénomènes les plus importantes étaient susceptibles d'explicaiton à l'aide de cette théorie électromagnétique.

Seule demeurait une exception : les phénomènes de gravitation pour lesquels, jusqu'à ces dernières années, on ne savait trouver un seul modèle.

La théorie générale de la relativité en donne une explication et nous fournit un modèle à partir duquel nous pouvons imaginer le mécanisme demeuré si longtemps inconnu du phénomène. Ensuite, par un procédé analogue, elle parvient à expliquer aussi les phénomènes électromagnétiques. En ce sens, elle réalise la synthèse la plus complète des phénomènes physiques, réunissant par l'intermédiaire d'un élément commun, en une explication unique des phénomènes qui, à en croire les seules apparences, sont fondamentalement distincts.

Au fur et à mesure de la progression de la science, c'est-à-dire, à mesure que l'on découvre ou recherche de nouveaux faits, les savants sont soumis à une nouvelle obligation : celle de cataloguer et de classer ces faits, les disposant en groupes dans l'arsenal de nos connaissances, en un ordre logique, justifiable, fournissant en tout cas un fil conducteur.

On pourrait parfaitement comparer ces connaissances à des pièces de collection dans un musée. On ne peut les jeter, pêle-mêle, au hasard ; elles doivent être disposées, classées en ordre, en tenant compte de leur parenté et des liaisons qui existent entre elles.

Il existe une infinité de variétés de telles classifications, différant les unes des autres par l'élément de liaison considéré. En théorie mécaniste de l'univers, cet élément était représenté par les principes et les lois de la mécanique, que devaient respecter tous les phénomènes ; en théorie électromagnétique, c'étaient les hypothèses et les équations de l'électromagnétisme ; en théorie générale de la relativité, l'élément de liaison est constitué par les principes de la géométrie et le continuum quadridimensionnel de l'espace-temps, qui constitue tout l'univers.

Plus clairement dit : l'ensemble de tous les points de l'espace x, y, z et de tous les instants t du temps constituent, du point de vue mathématique, un continuum à quatre dimensions. C'est ce continuum qui est l'élément de liaison dans la théorie d'EINSTEIN,comme on le verra de façon plus précise à la suite des éclaircissements qui seront donnés plus loin.

Chacune des classifications indiquées ci-dessus englobe plus de phénomènes que celle qui la précède. En ce sens, il est très intéressant d'établir une comparaison entre la théorie mécaniste des phénomènes et la synthèse géométrique d'EINSTEIN.

Dans l'une comme dans l'autre, les éléments fondamentaux sont les quatre quantités x y z t. Mais quelle différence dans les résultats ! Quelle différence en capabilité "d'explication" due au seul fait que l'élément de liaison comme le point de vue ont été modifiés.

De sorte que, en résumé, la théorie générale de la relativité est une théorie qui entre dans la catégorie des théories de synthèse des phénomènes, c'est-à-dire de ces théories qui s'efforcent de donner une explication unique et générale des phénomènes naturels.

* * *

En fait, une théorie qui "explique" un phénomène n'est rien d'autre que la description d'un "modèle" de ce celui-ci, c'est-à-dire d'une série de phénomènes élémentaires - dont la nature est déterminée par le caractère de la théorie - et dont le jeu, la succession, reproduit le phénomène initial avec absolument toutes ses caractéristiques.

Par exemple, la théorie ondulatoire de la lumière fournit un modèle mécanique des phénomènes lumineux où nous pouvons nous imaginer l'éther vibrant en telle manière qu'il reproduise précisément toutes les particularités de la lumière.

Un modèle des phénomènes de la gravitation, quelle qu'en soit la nature doit, similairement, être un mécanisme capable de reproduire deux caractéristiques essentielles de ce phénomène :

1) l'action de la gravitation s'exerce avec la même intensité sur tout corps indépendamment de sa nature et,

2) se propage à une vitesse infinie. Nul modèle mécanique ou électromagnétique ne peut satisfaire à ces deux conditions. En conséquence, on n'a pas pu expliquer la gravitation ni par la théorie mécanique ni à partir des hypothèses de l'électromagnétisme.

La théorie générale de la relativité présente elle aussi un modèle mais ce qui la différencie des autres théories est le caractère singulier, inhabituel de l'élément par l'intermédiaire duquel s'effectue la synthèse.

En effet, en théorie mécaniste de l'Univers, il était possible de tout ramener au mouvement, c'est-à-dire à un phénomène physique élémentaire. De même, pour les autres théories synthétiques, l'élément de liaison était un phénomène ou une catégorie de phénomènes physiques simples. A la différence de tout ce qui précède, l'élément de liaison de la théorie générale de la relativité n'est pas ce que nous avons accoutumé d'appeler un phénomène physique ; les éléments constitutifs du modèle ne sont pas des phénomènes physiques. La théorie de la relativité fonde ses "explications" sur un élément géométrique, à l'aide de l'espace à 4 dimensions. Ceci la différencie des autres théories de synthèse et c'est en cela que consiste sa singularité.

Jusqu'à ce jour, l'espace et le temps apparaissaient en physique de manière naturelle ; chaque phénomène devait avoir lieu dans l'espace et dans le temps. Le caractère de ces notions, cependant, était celui d'éléments inertes, passifs. L'idée fondamentale et caractéristique de la théorie générale de la relativité est précisément l'introduction de l'espace (plus précisément une multiplicité à 4 dimensions, 3 d'espace et 1 de temps) en tant qu'élément actif, déterminant des phénomènes.

Jusqu'à présent, tout se passait comme s'il y avait une sorte de récipient à l'intérieur duquel avaient lieu les réactions chimiques qui font l'objet de l'étude. Le mérite d'EINSTEIN est d'avoir montré que la substance même du récipient intervient dans chaque réaction de façon plus ou moins prononcée, que cette interaction est d'une importance fondamentale susceptible d'expliquer des phénomènes restés actuellement incompris.

De quelle façon ce que nous venons d'affirmer se réalise, c'est ce que nous allons voir tout de suite.

* * *

Donc la théorie générale de la relativité considère comme élément fondamental, à l'aide duquel elle "explique" les phénomènes, la multiplicité x y z t. Grâce aux travaux d'EINSTEIN et de WEYL on peut construire, en partant de cet élément et s'appuyant sur les principes de la géométrie, une théorie des phénomènes physiques c'est-à-dire un modèle géométrique de ces phénomènes.

Cette construction est néanmoins de la géométrie pure de sorte que, en définitive, la caractéristique de la théorie de la relativité est une géométrisation de la physique, une réduction à la géométrie et, de ce point de vue, il serait préférable de remplacer son nom actuel en celui de théorie géométrique ou de géométrie des phénomènes physiques.

Les idées d'EINSTEIN l'ont donc conduit à une géométrisation de la physique. Cette manière de formuler la conclusion montre clairement tout ce qu'il y a de singulier, inhabituel, caractéristique dans cette théorie et fait comprendre pourquoi certains se sont demandés si, en définitive, il est utile de réduire la physique à la géométrie et si, avant toute autre considération, la chose est possible.

A ce sujet, il ne faut pas oublier que, en général, les théories de synthèse sont trop limitatives. L'extraordinaire complexe si divers de la nature ne peut être enfermé dans quelques équations qui seraient trop particulières pour pouvoir fournir des indications sur tous les phénomènes actuellement connus.

Une géométrisation du monde est, elle aussi, une limitation du champ de recherches. Nous connaissons en effet, dès à présent, des phénomènes qui ne s'insèrent pas dans le schéma de cette géométrie du monde, par exemple les phénomènes de la vie. Ce qui fait que, à un certain moment, cette théorie géométrique des phénomènes elle-même devra laisser place à une nouvelle théorie plus extensive. De nos jours la théorie de la relativité est la théorie de synthèse la plus voisine de l'idéal que constitue une théorie explicative unique. Demain, il est probable qu'elle deviendra elle-même trop étriquée comme n'importe quelle autre théorie de ce genre.

En d'autres termes ce n'est pas là le côté caractéristique le plus important de la théorie générale de la relativité qui mérite d'être étudié en premier lieu. L'importance de la théorie géométrique du monde en tant que synthèse des phénomènes est relative à nous, à notre époque, peut être complètement abandonnée dans un avenir indéfini. Ce qui est important ce sont les concepts nouveaux, les idées nouvelles, la nouvelle manière de les appliquer au domaine du connu ; ce qui importe, c'est la structure même de la théorie, appliquée à ce à quoi elle peut l'être et étudiée en vue des résultats nouveaux qui peuvent être obtenus dans certains domaines, mais non pas d'un point de vue de synthèse générale qu'aucune théorie ne réalisera jamais.

C'est pourquoi je n'insisterai pas plus que je ne l'ai fait jusqu'ici sur cette caractéristique de la théorie que je vais utiliser dans le seul but de construire un exposé adapté du mieux qu'il est possible au sujet traité. Au contraire, je chercherai à mettre en évidence dès le début le rôle joué par l'élément fondamental de la théorie, la multiplicité à quatre dimensions x y z t qui englobe la totalité des points de l'espace et des instants du temps.

J'ai indiqué, lors de la dernière conférence, de quelle manière on a reconnu l'importance fondamentale de la réunion des éléments spatiaux à ceux du temps. je ne reviendrai donc pas sur ce point. Il est classique, et connu de tous aujourd'hui que la théorie de la relativité ne sépare pas l'espace du temps, qu'elle ne considère pas, d'une part l'espace à trois dimensions x y z et le temps t de l'autre, qu'elle les réunit et étudie les phénomènes naturels dans la multiplicité x y z t.

Cet "espace quadri-dimensionnel" est pourvu de propriétés particulières en connexion étroite avec les phénomènes qui s'y produisent et nous commencerons donc l'étude de la théorie en scrutant de plus près cet élément. Mais auparavant, disons quelques mots des difficultés que nous rencontrerons en chemin.

* * *

En général, la théorie de EINSTEIN est très difficilement compréhensible à travers une publication vulgarisatrice. On dit parfois que cette théorie étant purement mathématique ne peut donc être entendue que de ceux-là seuls qui possèdent à fond le symbolisme mathématique.

Il en est évidemment ainsi s'il s'agit d'une étude fouillée et complète. Mais s'il n'est question que de comprendre la théorie, en ses grandes lignes, d'appréhender les idées de base, cette affirmation est fausse.

D'abord la théorie d'EINSTEIN n'est pas une théorie mathématique, c'est une théorie physique ; le symbolisme mathématique n'est ici rien de plus qu'un instrument - extrêmement compliqué et de plus indispensable - mais, en définitive, rien d'autre qu'un instrument. Dans aucune autre théorie il n'a été nécessaire d'utiliser autant les mathématiques, probablement en raison du fait que le "modèle" des phénomènes y est de nature géométrique. Toujours est-il que la théorie de la relativité demeure fondamentalement une théorie physique et celui qui la connaît le mieux, EINSTEIN tout le premier, a attiré l'attention de manière insistante sur ce point au cours de sa conférence à Paris.

Pour terminer, les idées fondamentales de la théorie peuvent s'exprimer en un langage qui n'est pas celui des mathématiques. Les idées fondamentales sont parfaitement intelligibles en supposant, bien entendu, une connaissance des notions élémentaires de la physique et la géométrie, que l'on sait de quoi l'on parle. C'est là, effectivement, la véritable pierre d'achoppement à laquelle se heurte le vulgarisateur qui désire exposer la théorie à un public absolument profane : il parle de changements survenus dans nos conceptions actuelles alors que l'auditeur ne sait pas, en réalité, quelles sont ces conceptions et il fait appel à des notions et interprétations nouvelles là où il faudrait peut être d'abord préciser au public les notions anciennes.

Puisque, par chance, nous ne sommes pas en pareil cas, nous allons passer en revue les idées fondamentales et vous verrez, du moins je l'espère, qu'un effort modéré permet de comprendre très aisément les choses. Mieux, vous constaterez, par exemple, que, en ce qui concerne la théorie de WEYL (complément de la théorie d'EINSTEIN) l'idée fondamentale est d'une simplicité telle que non seulement tout un chacun est en mesure de la comprendre mais on se rend compte que n'importe qui aurait pu la découvrir même sans avoir nécessairement une culture mathématique spéciale.

Les choses étant ce qu'elles sont, je me permettrai d'essayer d'exposer qualitativement les idées fondamentales de la théorie le plus clairement possible et avec le minimum de formules. J'emploierai dans ce but tous les moyens qui sont à ma disposition et en particulier, beaucoup d'analogies.

Les analogies sont dangereuses lorsque l'on veut approfondir une question parce qu'elle nous empêchent de faire l'effort nécessaire de compréhension mais elles s'avèrent extrêmement utiles, - autant pour ceux qui abordent un problème pour la première fois que pour ceux qui le connaissent dans ses moindres détails - et ceci parce que les analogies sont conçues pour suggérer.

Dans le premier cas, en rapprochant les choses connues, d'autres, inconnues, elles nous en facilitent l'intelligence finale. Dans le second cas, par la comparaison de mécanismes, au fond distincts, elle nous suggère de nouvelles liaisons et de temps à autre nous mettent sur la voie de découvertes nouvelles.

Nous utiliserons donc de nouvelles analogies et certaines d'entre elles seront utilisées à décrire le modèle de la gravitation selon EINSTEIN. En d'autres termes, nous exposerons en même temps la théorie de la gravitation afin d'éviter que la discussion ne devienne trop abstraite.

Une fois obtenue, à l'aide des analogies, la certitude intuitive que l'espace peut jouer un certain rôle dans le déroulement d'un événement physique et une fois connu un mécanisme qui nous indique de quelle manière cela peut se faire il nous sera aisé d'appréhender les véritables caractéristiques de la théorie générale de la relativité et de creuser, jusque dans les détails, le splendide édifice construit par EINSTEIN.

* * *

J'ai affirmé dans l'introduction que le modèle des phénomènes naturels en théorie d'EINSTEIN, était de nature géométrique, plus précisément que l'espace à 4 dimensions x y z t est l'élément qui "explique" ces phénomènes. J'ai cherché à mettre en évidence cette affirmation bien qu'à première vue, elle paraisse absurde.

En effet, de la notion de phénomène naturel découle une série d'autres notions qui n'ont pas le moindre rapport apparent avec celle d'espace : par exemple, la force qui fait apparaître le phénomène. Lorsqu'une pierre tombe, nous disons qu'il existe une force qui la tire vers le centre de la terre. Quel rapport peut-il y avoir entre cette force et l'espace (ou entre elle et la multiplicité xyz t).

En apparence, aucun, et s'il n'existe aucun rapport entre espace et force, lequel est la "cause" du phénomène? Et comment alors l'espace peut-il "expliquer" en vertu de ses propriétés, les phénomènes.

Précisons ce que nous signifions en affirmant qu'à l'aide de l'espace (c'est-à-dire la multiplicité x y z t) nous pouvons "expliquer" en théorie d'EINSTEIN, les phénomènes naturels.

"Expliquer" un phénomène c'est, comme je l'ai dit plus haut, imaginer son mécanisme propre, autrement dit imaginer un modèle qui, en se servant de phénomènes plus simples reproduise celui qu'on s'est donné. La seule condition que l'on impose au modèle est de reproduire toutes les caractéristiques du phénomène qu'il représente.

Par exemple, une explication de la lumière doit pouvoir rendre compte des phénomènes d'interférences, de diffraction, etc.

L'ancienne théorie ondulatoire de la lumière expliquait celle-ci à l'aide de l'éther. Nos sensations lumineuses avaient pour cause première extérieure les vibrations de l'éther. La lumière en tant que phénomène externe était donc le mouvement même de cet éther.

De manière analogue, en théorie d'EINSTEIN, on explique la gravitation à l'aide de l'espace et de ses propriétés. Nos sensations gravitationnelles et tous les phénomènes relatifs à la gravitation ont leur origine dans la structure de l'espace, c'est-à-dire sont dus à une propriété de cet espace et en particulier, en anticipant un peu, sont dus à la courbure de l'espace.

Autrement dit, EINSTEIN affirme les deux propositions suivantes, à première vue bizarres.

a) notre univers, c'est-à-dire l'espace à quatre dimensions où nous vivons ne présente pas en tous ses points la même structure ;
b) cette structure et ses variations se manifestent à travers les phénomènes gravifiques.

Il est inutile d'aller plus loin avant d'avoir bien compris ces affirmations faute de quoi il est impossible de rien comprendre à la théorie générale de la relativité. J'essaierai donc, en premier lieu de montrer, par des analogies, que nous pouvons véritablement imaginer un espace n'ayant pas la même structure, en chacun de ses points et en expliquer la signification.

Je tenterai ensuite, toujours à l'aide d'analogies, de prouver de quelle manière il est possible à l'espace, par le fait de ses propriétés purement géométriques, de déterminer des phénomènes physiques, fait fondamental encore jamais étudié jusqu'à aujourd'hui bien qu'il soit d'une importance considérable.

* * *

Je procéderai par analogie, et comme j'aurai besoin d'utiliser souvent une certaine analogie, permettez-moi de l'exposer ici, dès le début, une fois pour toutes.

Supposons qu'il puisse exister des êtres complètement plats ayant autrement dit seulement deux dimensions, donc comparables à des silhouettes découpées dans une feuille de papier ou mieux de caoutchouc infiniment mince.

Considérons un univers à deux dimensions dans lequel se meuvent ces êtres, c'est-à-dire une surface de forme quelconque et dont ces êtres ne peuvent s'échapper. Cette dernière observation est essentielle n'étant en somme qu'une conclusion logique de l'hypothèse selon laquelle les êtres et l'univers dans lequel ils se meuvent n'ont que deux dimensions. On peut imaginer cet univers comme une feuille très mince dans laquelle les êtres se meuvent mais dont ils ne peuvent sortir.

Supposons que cette feuille mince ait la forme suivante : c'est une calotte sphérique C au voisinage du centre de la sphère S que nous baptisons "soleil" (sa forme au voisinage immédiat de S ne nous intéresse pas); de là elle se raccorde continûment en une surface de forme quelconque jusqu'à ce que à une distance de S suffisante, elle devienne plane dans une région P. Au-delà de P elle peut être n'importe quoi, par exemple cylindrique.

Telles sont les hypothèses. Examinons-en les conséquences. Supposons que l'un de nos êtres plats qui se trouve sur la calotte sphérique C se déplace sur la surface jusqu'à la région plane P. Il ne peut sortir de la surface. Tout le temps qu'il reste sur la sphère il est ployé - courbe -. Lorsqu'il arrive sur le plan P il doit être plan. En conséquence, son corps doit dubir une modification qu'il peut constater. Si l'on examine le problème de plus près on constate que cette modification est bien plus profonde qu'il semblerait à première vue ; et qu'elle est à coup sûr perçue. En effet, lorsque la silhouette découpée dans une feuille mince de caoutchouc passe de la calotte C au plan P il n'est pas suffisant qu'elle se déploie et se redresse. Il lui faut allonger certaines parties de son corps et en contracter d'autres. Coupez une balle en deux et efforcez-vous d'appliquer l'une des moitiés sur une table plate de telle sorte que tous ses points soient en contact avec la table. Cela est impossible à moins d'étendre, d'allonger le caoutchouc.

Donc, en conclusion : lorsque notre individu imaginaire passe de la sphère au plan son corps s'allonge pour la raison que la sphère n'est pas applicable sur un plan, c'est-à-dire n'est pas développable. La même chose se produit si le passage s'effectue en sens inverse.

Ainsi, une différence de courbure de l'espace dans lequel se meuvent nos êtres imaginaires se traduit par une élongation ou une contraction et, en tout cas, par un endolorissement de leurs corps.

Voilà donc quelles sont les conséquences qui découlent de la seule hypothèse que le monde de nos individus était une surface quelconque courbe à deux dimensions.

Retenons bien les détails de cette analogie fondamentale à laquelle on fera appel à tout moment et revenons à la théorie d'EINSTEIN.

Nous avons vu qu'il affirme que

1) l'espace à quatre dimensions x y z t n'est pas identique à lui-même, c'est-à-dire n'a pas la même structure en chacun de ses points ;

2) les propriétés de cet espace peuvent déterminer des phénomènes physiques, et en particulier, le rendent apte à être utilisé pour construire un modèle des phénomènes gravitationnels.

En se souvenant de la fiction d'un univers à deux dimensions, les choses deviennent aisées à saisir. Supposons qu'en lieu et place de l'espace à quatre dimensions de la théorie d'EINSTEIN nous considérions l'espace à deux dimensions que nous avons déjà exploré ; les résultats seront analogues jusqu'à un certain point.

On voit clairement, tout d'abord, que l'espace peut avoir une structure différente en deux régions déterminées : l'espace en C (calotte sphérique) n'est pas identique à l'espace en P (portion plane), puisque, par exemple (de notre point de vue) en P il est possible de tracer une ligne droite et non en C.

On constate ensuite, tout aussi aisément, que cette différence de structure de l'espace peut provoquer des phénomènes physiques avec apparition de forces par exemple.

En effet, supposons que nos silhouettes qui se trouvent actuellement dans la région P plane de l'espace soient constituées d'une lame mince d'acier élastique. Supposons qu'elle se place sur la région C courbe de l'espace. Plus elle se rapprochera du "soleil" S et plus elle souffrira en raison de la surface qui est de plus en plus courbe.

Du fait que nous la supposons élastique, il apparaître en elle une tension une force qui, ainsi que nous le voyons, est due seulement au fait que l'espace en C est plus courbé qu'en P.

Considérons encore, en général, une silhouette imaginaire constituée d'une substance élastique à l'extrême. Lorsqu'elle passe de P à C, du plan à la sphère, plus près du soleil, son corps doit se tasser doit réduire son extension. En elle se développeront donc des forces élastiques dues au seul fait de la courbure de l'espace en C.

Ou, finalement, supposons que notre silhouette soit formée d'un ressort spiral comme celui des montres mais beaucoup plus fin. Sa forme d'équilibre est plane. Tout le temps qu'elle se trouve sur la portion plane P de l'espace elle ne percevra rien d'anormal. Lorsqu'elle s'approche du "soleil" c'est-à-dire lorsqu'elle atteint la sortie sphérique de l'espace le ressort se déforme puisqu'il ne peut sortir de l'espace (la spirale peut se déformer de façon à rester adhérente à la sphère). Elle cherchera cependant à retourner à sa position d'équilibre qui est plane et donc le centre s'efforcera de se rapprocher du plan des spires extérieures ; en d'autres termes le centre sera sollicité par une force dirigée vers le centre de la sphère c'est-à-dire vers le soleil.

Notre silhouette qui ne peut se rendre compte instantanément de ce que l'espace est courbe affirmera alors qu'elle est attirée par le soleil lorsqu'elle s'en rapproche et ceci d'autant plus qu'elle s'en rapproche davantage.

En réalité, l'apparition de la force est due uniquement à la courbure de l'espace.

Les savants de notre monde imaginaire pourraient parler en ce cas d'une action attractive à distance analogue à la gravitation. En réalité le phénomène est d'une toute autre nature dû seulement à la courbure de l'espace.

Et afin de bien se rendre compte de cet aspect nouveau de l'espace il leur faudrait faire un effort d'imagination, sortir de leur espace à deux dimensions et le considérer d'un point qui lui soit extérieur - en d'autres termes il leur faudrait introduire dans leur science un espace avec une dimension de plus que l'espace qui leur est habituel.

On voit clairement, d'après l'exemple précédent, comment une propriété purement géométrique, la courbure d'un espace à 2 dimensions dans lequel se meuvent nos êtres imaginaires, peut provoquer à elle seule l'apparition d'une force c'est-à-dire un élément qui n'a, en apparence, aucun rapport avec cet espace.

Voilà donc la possibilité que la forme de l'espace, disons plus précisément, sa structure, ait une influence sur les phénomènes qui s'y produisent ou même en soit la cause : l'apparition d'une force élastique dans l'exemple cité plus haut est due seulement au caractère particulier de l'espace dans la région considérée.

C'est donc en ce sens indiqué ci-dessus que l'on doit entendre l'affirmation énoncée précédemment que "en théorie d'EINSTEIN l'espace n'est pas simplement le cadre où se produisent les phénomènes naturels mais qu'il a une influence sur eux, qu'il prend, en raison de ses propriétés, une part active à leur déroulement."

Voici donc comment on pourrait imaginer le mécanisme selon lequel l'espace influence ou produit certains phénomènes naturels. Il faut bien observer cependant que ce mécanisme n'est pas celui de la nature elle-même d'abord parce que il doit faire appel à un espace à 2 dimensions au lieu de celui à 4 dimensions nécessaire à la théorie de la relativité. En outre, l'existence de tensions élastiques n'est pas indispensable comme on l'a vu. Celles-ci n'ont été introduites que dans le but de rendre la démonstration plus frappante.

Il ne faut pas perdre de vue que l'analogie présentée ici a pour seul but de nous familiariser avec un présent à admettre, que les propriétés de l'espace peuvent être en certaines circonstances déterminantes pour les phénomènes naturels qui s'y produisent. L'exemple cité démontre qu'une telle influence est possible. De là, à supposer qu'une telle influence existe aussi dans la nature il n'y a qu'un pas qu'a franchi pour la première fois EINSTEIN dans sa théorie de la gravitation que nous allons explorer dans ce qui suit.

*

* *

Le problème de la gravitation a été l'un des plus difficiles que se soient posés de tout temps les chercheurs et il a fallu attendre jusqu'à nos jours avant de lui trouver une solution satisfaisante.

Trop complexe pour être étudié d'une manière générale, il a été attaqué au début dans des cas particuliers, ce qui a permis de dégager quelques lois quantitatives.

NEWTON, le seul à avoir étudié le problème avec succès et à l'avoir résolu de manière complète en son temps - a réussi à coordonner les recherches effectuées et à condenser les résultats en une loi que l'on considérait comme la plus générale, la plus exacte et la plus utile que l'on ait découverte de tous les temps.

Elle consiste en une relation plus ou moins empirique, rendant fort bien compte des faits constatés mais laissant inabordée la question du mécanisme intime du phénomène. Ce mécanisme était resté jusqu'à notre époque tout aussi mystérieux qu'au temps de NEWTON. Il n'était réductible à aucun type de complexe constitué de phénomènes physiques élémentaires et la question, vue d'un autre angle, se présentait comme un insupportable problème concernant un phénomène connu que l'on rencontre à tout bout de champ, mais au sujet duquel on avait si peu d'information que, même de loin, on ne pouvait s'imaginer de quelle manière les choses se fassent en réalité.

On en était réduit à dire qu'il y a une action à distance. Plus précisément il y avait deux caractéristiques du phénomène qu'aucun modèle physique ne pouvait reproduire :

1) l'attraction de la gravitation se propage à une vitesse énorme, infinie ;

2) elle s'exerce de même façon, indépendemment de la nature physique des corps et de ce que l'on appelait leur masse.

Ce dernier fait était tout particulièrement incompréhensible. Quelle que soit la force de type connu que l'on choisisse pour mouvoir un corps, on constate qu'il est nécessaire d'appliquer une force plus intense pour mouvoir un corps plus lourd dans les mêmes conditions. Ou bien qu'une même force déplace plus difficilement un corps lourd qu'un corps léger. Toutefois, une seule des forces connues en physique ancienne faisait exception. La gravitation ne fait pas de différence entre le duvet et un morceau de plomb. On avait depuis longtemps effectué l'expérience mais on n'avait pas encore trouvé l'explication. On connaissait encore une autre expérience qui montre les propriétés curieuses de cette force. Si l'on se place dans un ascenseur qui tombe vers le sol avec une accélération de 9,81 m/sec/sec, on constate que, dans l'ascenseur, il n'existe plus de gravitation puisque, d'après le principe de d'ALEMBERT, la force de gravitation se trouve annulée par la force d'inertie et les corps restent en équilibre.

Voilà donc une force, la gravitation, qui présente des caractères tellement singuliers que l'on peut à bon droit se poser la question de savoir si on peut encore lui attribuer le nom de "force". Il est vrai que l'on ne sait pas donner une définition claire de la force. Le mot correspond cependant à une notion très familière à notre intuition.

Lorsque je dis qu'une force est appliquée à un corps, je m'imagine par exemple ma main, qui, par l'intermédiaire d'une ficelle ou d'un ressort tire ce corps. La force apparaît par les contractions des muscles, se propage dans la ficelle, de proche en proche jusqu'au corps qu'elle déplace.

Et je me rends compte qu'il existe des corps que je peux déplacer mais qu'il y en a aussi que je ne pourrais même pas remuer.

La gravitation ne présente pas de tels caractères. En vertu de ses propriétés, elle semble s'éloigner de ce que nous appelons couramment une "force" et il est probable que certains chercheurs ont remarqué cela depuis longtemps et auraient renoncé à saisir le concept de gravitation en tant que force attractive s'ils avaient eu avec quoi le remplacer.

C'est ce que, pour la première fois, EINSTEIN a réussi. Pour lui, la gravitation n'est pas une force de celles que nous pouvons développer en tirant un corps. Il ne s'imagine pas le soleil relié aux planètes par des fils élastiques dans lesquels se développent des forces de traction.

Cette observation est essentielle pour ce qui va suivre et nous devrons l'avoir constamment présente à l'esprit : la gravitation n'est pas une force dans le sens habituel du terme.

Pour EINSTEIN, les phénomènes de gravitation ne sont pas autre chose que l'aspect sous lesquel se présentent les propriétés géométriques de l'univers c'est-à-dire de la multiplicité à 4 dimensions x y z t.

Dans certaines régions, au voisinage du soleil par exemple, l'espace est plus courbé qu'ailleurs; cette courbure nous la constatons, nous la percevons dans les phénomènes gravitationnels lesquels sont eux aussi plus intenses au voisinage du soleil qu'au loin.

L'attraction gravifique n'est pas une liaison entre le corps attirant et le corps attiré, une liaison que l'on pourrait réaliser à l'aide d'un fil élastique qui les réunirait.

Il n'existe pas une telle liaison. L'attraction exercée sur un corps est la conséquence immédiate du fait que, à l'endroit où se trouve actuellement ce corps, l'espace est courbe et non plus, euclidien.

Les phénomènes gravitationnels sont dûs à la structure de l'espace mais il n'y a là rien de comparable à l'action directe d'un corps céleste qui attire les planètes de son système.

La chose paraît étrange à première vue ; souvenons-nous cependant de l'analogie que nous avons considérée précédemment. On a vu que l'on pouvait imaginer un espace à deux dimensions plan à grande distance et sphérique au voisinage du soleil dans lequel se meuvent des êtres imaginaires consitués de ressorts spirale plans. En se rapprochant du soleil, dans la zone sphérique de l'espace, ils constatent que leur centre est attiré par le soleil. En d'autres termes, ils constatent un phénomène d'attraction vers le soleil bien qu'il n'y ait aucune liaison effective entre le soleil et eux. L'attraction est due exclusivement au fait que l'espace est sphérique et pour les êtres à deux dimensions cette courbure se manifeste précisément par les phénomènes de gravitation.

Voici donc comment on peut s'imaginer cette dépendance entre la structure de l'espace et les phénomèmes de gravitation. Il est inutile de répéter que les considérations précédentes ne sont qu'une analogie explicative et que, en théorie d'EINSTEIN, les choses ne se passent pas exactement ainsi. Nous allons esquisser plus loin les raisons scientifiques qui nous contraignent à faire la liaison entre les phénomènes de la gravitation et la structure de l'espace où ils se produisent.

Donc, en résumé, EINSTEIN affirme que la gravitation n'est pas une force au sens habituel du terme, qu'il n'existe aucun lien direct entre corps attirant et corps attiré. Les phénomènes de la gravitation sont dûs exclusivement à l'espace au point considéré. Toutes les caractéristiques du phénomène ne dépendent que de la structure de l'espace au voisinage du point choisi.

Et alors, s'il en est bien ainsi, les caractères inhabituels de ces phénomènes de gravitation s'expliquent de manière très simple et les conditions qu'aucun modèle physique n'a pu remplir sont satisfaites très aisément.

La première caractéristique de la gravitation était le fait que l'attraction se propageait de façon instantanée. En théorie d'EINSTEIN, cette affirmation n'a plus de sens. A partir du moment où, pour un espace donné il n'y a aucune liaison entre corps attirant et corps attiré, il est absurde de parler de propagation de l'un à l'autre d'une action inexistante. En un point M de l'espace, la gravitation a le caractère bien défini de la structure de l'espace en ce point par exemple une certaine intensité. Imaginons l'espace à deux dimensions de tout à l'heure. Lorsque un corps arrive en M, au moment même où il y parvient il est contraint de se conformer à la courbure de l'espace en ce point, autrement dit, d'être attiré avec une certaine intensité; l'effet est instantané. Mais il ne peut plus être question de propagation.

Ce n'est que dans un seul cas que l'on peut parler en théorie d'EINSTEIN de propagation de la gravitation: lorsque l'espace lui-même change de forme, c'est-à-dire de courbure.

Nous négligerons ici cette éventualité puisque nous nous intéressons à des espaces dotés d'une structure bien déterminée et invariable.

En deuxième lieu, le phénomène de gravitation ne dépend pas de la nature du matériau soumis à l'expérience. Cela est évident dans le modèle à deux dimensions que nous avons présenté. La gravitation, qui s'y traduit par un endolorissement, raccourcissement ou élongation des corps, en sorte qu'ils puissent continuer à se trouver dans l'espace ne dépend pas de la nature du corps ni en plus de sa forme.

A nouveau, j'insiste pour qu'il n'y ait pas de confusion et que, tout ceci n'est qu'analogie et qu'une analogie loin d'être une identité.

Ainsi le mécanisme imaginé par EINSTEIN reproduit toutes les caractéristiques des phénomènes de gravitation. L'explication de celle-ci en tant qu'effets de certaines particularités de l'espace x y z t est cohérente, logique dans son développement et, de plus les conséquences en sont vérifiées par l'expérience.

Mais, parvenu à ce point de l'exposé, il naît à coup sûr dans l'esprit de l'auditeur une incompréhension "Je comprends, pourrait-il dire, que la courbure de l'espace est susceptible de provoquer des phénomènes, l'apparition par exemple, de forces; l'exemple cité plus haut est suffisamment explicite. J'admets de plus que lorsqu'on cherche une explication d'un phénomène on fasse certaines hypothèses; sans cela on ne pourrait travailler. Ainsi donc j'admets également l'hypothèse d'EINSTEIN d'après laquelle la multiplicité dans laquelle nous vivons présente une courbure en certains points, courbure qui se manifeste au travers de certains phénomènes. Mais je ne vois absolument pas pourquoi ces phénomènes seraient seulement des phénomènes de gravitation et pas d'autres, par exemple électromagnétiques.

Il est évident que c'est là également une hypothèse faite par EINSTEIN. Le fait que toutes les particularités de la gravitation s'expliquent si bien dans le schéma proposé, en d'autres termes, le fait que l'hypothèse "réussit" est effectivement un motif pour la préférer à toute autre, mais elle ne peut du tout nous éclairer.

Si véritablement l'hypothèse correspond à la réalité, il doit exister un certain lien entre l'espace et la gravitation qu'il faut mettre en évidence. En tout cas, pour mieux juger de la valeur de l'hypothèse, il faudrait au moins connaître les étapes successives par lesquelles est passé EINSTEIN avant d'y parvenir.

L'objection est de taille et il ne convient pas de la laisser de côté même lors d'un premier examen. Les choses se laisseront mieux comprendre lorsque nous examinerons de manière plus approfondie les éléments à l'aide desquels la théorie est construite et ceci parce que, pour traiter cette question, ne pouvant plus utiliser les analogies il nous faut opérer effectivement sur l'espace à 4 dimensions ce qui n'est pas toujours commode. La question est cependant trop importante pour qu'on la puisse négliger. Nous ouvrirons donc une petite parenthèse pour la traiter le plus brièvement possible.

*

* *

Pour cette clarification, il est essentiel de se remémorer deux résultats fondamentaux de la théorie qui ont été exposés plus à fond la dernière fois (lors de la conférence précédente) et que je dois rappeler ici.

On a vu qu'en représentation de MINKOWSKI, le déploiement évolutif d'un événement peut être suivi en se donnant la totalité des valeurs des coordonnées d'espace x y z aux divers instants successifs. Ces nombres, une fois reportés sur un système d'axes de coordonnées d'un espace à 4 dimensions sont les affixes des points d'une courbe laquelle peut être considérée comme une description du phénomène puisqu'elle nous permet de connaître à chaque instant la position du point x y z.

Si cette courbe est une ligne droite le mouvement est rectiligne et uniforme, s'il n'en est pas ainsi le mouvement est accéléré et réciproquement.

Ceci est le premier résultat qu'il faut avoir à l'esprit.

Le second est connu sous le nom de principe d'équivalence. Il stipule que: Du point de vue des effets produits, un champ de gravitation est intégralement équivalent à une accélération convenable appliquée au système. En conséquence, pour étudier les phénomènes dans un champ de gravitation, on supposera son inexistence mais, en contrepartie, on appliquera au système une accélération convenable.

Ces points étant précisés, il est aisé de voir quel peut être le lien entre la courbe tracée dans l'espace et les phénomènes de gravitation.

Considérons l'espace à 4 dimensions et traçons la courbe qui traduit l'évolution du phénomène. S'il n'y avait eu d'accélération, le mouvement d'un corps, supposé libre, eût été rectiligne et uniforme et donc la courbe eût été une droite. Puisqu'il existe une accélération, la ligne d'univers est courbe. L'existence d'une accélération est donc équivalente à l'existence d'un champ de gravitation. En conséquence: Lorsqu'on laisse choir un corps libre dans un champ de gravitation la ligne représentative du phénomène dans l'univers est une courbe.

Nous pouvons considérer plusieurs corps tombant en chute libre, à différents instants. Toutes leurs lignes d'univers - qui sont des géodésiques de cet univers - seront des courbes. L'Univers, l'espace à 4 dimensions lui-même sera ce que j'ai appelé un espace "courbe". Réciproquement, supposons dans un Univers "courbe" un point qui se déplace le long d'une géodésique. Puisque le point se déplace le long d'une courbe, le mouvement effectif est un mouvement accéléré, accélération que nous pouvons identifier à un champ de gravitation. Donc, chaque fois qu'un point se déplace sur une portion courbe de l'espace, il nous apparaît comme soumis à un champ de gravitation.

Voilà donc comment on peut expliquer pourquoi à la courbure de l'espace sont liés les phénomènes de gravitation et non d'autres phénomènes. Le point faible de cette connexion est le principe d'équivalence qui, ainsi que son nom l'indique, fait état d'une équivalence constatée de manière très précise au plan expérimental, utile pour le calcul, mais qui ne fait nullement état, de façon certaine d'une identité de nature.

En l'état actuel de la science, néanmoins, l'admissibilité de ce principe est parfaitement justifiée.

Ces points désormais éclaircis, fermons la parenthèse et revenons à notre propos antérieur.

Nous sommes parvenus, dans ce qui précède, à un modèle géométrique, qui nous a permis de nous rendre compte, grosso modo, du mécanisme des phénomènes de la gravitation. Nous avons utilisé une suite d'analogies qui, d'une part aidaient notre intuition à appréhender des notions difficiles à concevoir et par ailleurs, nous mettaient à disposition un langage - très vague, il est vrai, et imprécis - mais suffisant pour le but que l'on s'était proposé.

Si nous souhaitons renoncer aux analogies et examiner directement le problème, il est nécessaire de se servir d'un langage plus précis, le langage mathématique sans lequel nous ne pouvons même pas définir en termes rigoureux les éléments fondamentaux qui interviennent dans les phénomènes physiques dont nous avons parlé.

Je n'exposerai pas ici ces calculs : ce qui est intéressant, cependant, est la manière même d'appliquer ce calcul mathématique aux théories que nous avons esquissées ci-dessus; et puisque les analogies que nous avons mentionnées jusqu'ici ne peuvent aider à notre compréhension que jusqu'à un certain point, en ce qui concerne les idées fondamentales qui nous conduisent à cet examen mathématique, accordez-moi d'essayer en quelques mots d'éclaircir certains points concernant ces questions.

La théorie de la gravitation est une théorie géométrique. C'est pourquoi les instruments de ce calcul doivent donc pouvoir être trouvés tout prêts dans les recherches de géométrie pure si celle-ci s'est étendue à des domaines voisins de celui que nous explorons. Tel a bien été le cas en l'occurence. A nouveau, des recherches de géométrie pure, effectuées sans aucun but d'utilisation pratique ont trouvé une application inattendue à des problèmes d'une nature plus proche de la réalité.

Il existe en effet deux éléments caractéristiques fondamentaux de ce calcul et qui correspondent aux deux aspects caractéristiques de la théorie.

Ainsi, pour commencer, la théorie dont il s'agit s'intitule théorie de la relativité. Le principe de relativité exige, comme on sait, que les équations exprimant l'évolution d'un phénomène doivent être invariantes vis à vis de n'importe quel changement d'axes, doivent autrement dit être les équations intrinsèques du phénomène.

Ce problème, l'expression des équations de la physique par des équations intrinsèques avait attiré l'attention des mathématiciens depuis longtemps et ils avaient même développé un nouveau type de calcul appelé "calcul tensoriel" qui permettait un traitement systématique de problèmes de même espèce. Un tenseur (un vecteur est lui aussi un tenseur) est un élément mathématique dont la propriété fondamentale est la suivante : s'il est nul dans un système de référence, l'équation $T = 0$ est invariante vis à vis de tout changement d'axes. Par exemple : l'équation fondamentale de la mécanique écrite vectoriellement $MY - F = 0$, demeure sous cette forme quel que soit le système de coordonnées auquel on rapporte le mouvement. En conséquence, si nous parvenons à exprimer l'évolution d'un phénomène physique à l'aide d'une équation de la forme $T = 0$, on aura trouvé, par cette opération même les équations intrinsèques du phénomène.

Ainsi donc, en premier lieu, pour traiter mathématiquement les problèmes posés par la théorie générale de la relativité, nous nous servirons du calcul tensoriel.

En second lieu, rappelons-nous l'analogie des êtres à deux dimensions à l'aide de laquelle nous avons essayé de nous expliquer la théorie de la gravitation. Nous avons vu que les phénomènes de gravitation prenaient naissance du fait que la surface qui constituerait l'univers à deux dimensions était plane en un point et courbe en un autre, c'est à dire euclidienne dans une région, non euclidienne ailleurs.

C'est pourquoi la courbure de l'espace sera déterminante pour les phénomènes de gravitation. Le calcul mathématique n'aura de ce fait nul autre but que d'évaluer cette courbure de l'espace grâce à laquelle on pourra étudier de manière quantitative les phénomènes de la gravitation.

Cependant, lorsqu'on passe à l'espace à quatre dimensions, la notion de courbure devient plus complexe.

Pour nous exprimer de manière plus précise, nous dirons que la théorie mathématique aura pour .but de préciser la structure de l'espace au voisinage des points considérés. Toutes les recherches des géomètres qui ont étudié théoriquement la structure de l'espace pourront être utilisées et de fait la théorie de la relativité s'est servie de résultats extrêmement variés, à commencer par ceux obtenus par GAUSS et RIEMANN et terminant par ceux des géomètres contemporains.

*

* *

Examinons un peu plus en détail, comment peut s'effectuer cette étude de la structure de l'univers, c'est-à-dire de la multiplicité à 4 dimensions.

Ici encore, nous procéderons par analogies comme précédemment. Ce que nous pourrons dire concernant un monde hypothétique à 2 dimensions constitué d'une surface continue s'appliquera (c'est-à-dire possédera une correspondance) également pour la multiplicité à 4 dimensions qui nous intéresse.

Observons, tout d'abord que nous devons étudier la structure d'un espace dans lequel nous-mêmes sommes totalement immergés.

Soit, par exemple, un univers composé de la surface d'une sphère et un autre constitué par un plan (dont nous supposons qu'il est sécant à la sphère le long d'un cercle C).

Nous nous rendons compte que l'espace sphérique présente une structure différente de celle de l'espace plan puisque nous sommes situés à l'extérieur de chacun d'eux, que nous pouvons les considérer dans leur ensemble. Mais le problème se pose de savoir si les êtres hypothétiques à 2 dimensions qui vivraient à l'intérieur de cet univers pourraient distinguer la sphère du plan. En d'autres termes, pouvons-nous connaître la structure d'un espace à travers des mesures conduites seulement à l'intérieur de cet espace ?

La réponse est affirmative. Voici un moyen que pourraient utiliser les êtres imaginaires considérés. Le plan est sécant à la sphère le long d'un cercle C. Cette courbe C est un cercle aussi bien pour les êtres qui se trouvent sur le plan comme pour ceux qui se déplacent sur la sphère, d'où il résulte que pour les uns et les autres, elle peut être considérée comme le lieu des points équidistants d'un point donné de leurs espaces respectifs. Le diamètre de ce cercle étant cependant une ligne située dans chaque espace respectif est : un segment de droite D pour les êtres plans et un arc de grand cercle M de longueur supérieure au segment précédent M>D pour les êtres sphériques.

Supposons que dans chaque espace on mesure la longueur du cercle et du diamètre correspondant (opérations qui s'effectuent sans sortir de l'espace considéré) et qu'à la fin chacun calcule le rapport de cette longueur au diamètre. Les êtres plans trouveront pour valeur du rapport le nombre Pi, les êtres sphériques trouveront cependant un nombre différent, puisque la grandeur du diamètre a augmenté alors que celle du périmètre circulaire restait invariable.

Cette différence provient de la diversité des structures de l'espace et donc elle est un indice du fait que cette structure est d'un type dans un cas et différente dans l'autre.

Voici donc que l'on peut imaginer des procédés par lesquels, à l'aide de mesures effectuées à l'intérieur d'un espace donné, on peut se rendre compte de sa structure.

Maintenant que nous possédons cette certitude , nous devons attaquer la question d'un point de vue plus scientifique en recherchant quel est l'élément analytique qu'il est nécessaire et suffisant que nous nous donnions afin de pouvoir considérer comme totalement connue la structure de l'espace considéré.

*

* *

Considérons une surface quelconque. GAUSS, qui le premier s'est intéressé à des problèmes analogues, a démontré que la géométrie sur une surface quelconque (c'est-à-dire les proportions entre éléments mesurés sur la surface donnée elle-même) est entièrement définie si l'on connaît, en tout et pour tout, l'expression de l'élément de longueur entre deux points infiniment voisins en fonction de leurs coordonnées relativement à un système d'axes uv tracé sur la surface.

(1) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

connaissant ds il est possible de calculer sur notre surface les longueurs, les angles, les aires, nous pouvons trouver entre elles des relations caractéristiques, en un mot nous pouvons nous rendre compte des rapports, des liaisons entre les divers éléments de la surface, c'est-à-dire de sa structure. C'est donc là l'élément que nous recherchons.

Il est évident que la longueur ds ne dépend pas d'un changement de système d'axes de coordonnées, c'est un invariant. E, F, G, toutefois dépendent du système d'axes. Pour définir complètement l'espace, il est nécessaire et suffisant d'exprimer les valeurs E, F, G, pour un système de coordonnées particulier U, V (dont le choix est par ailleurs indifférent).

L'ensemble des nombres E F G forment ce que j'ai appelé un tenseur, le tenseur métrique fondamental puisque c'est lui qui définit ce qu'on pourrait appeler la métrique de l'espace. Parfois, on donne aux grandeurs E, F, G le nom de potentiels.

Lors d'un changement de coordonnées, de (U, V) à (x,y) EFG se transforment en E', F' G' de telle sorte que

$$ds^2 = E'\,dx^2 + 2F'\,dx\,dy + G'\,dy^2$$

Il pourrait se faire que la transformation soit telle que les nouvelles valeurs soient E'= G'=1 F'= O

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (2)$$

Par ailleurs, si nous supposons dès le début que la surface est plane et en coordonnées cartésiennes, on aura directement, comme on sait $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Donc, chaque fois qu'il est possible, à partir d'un espace à 2 dimensions défini par la forme différentielle (1) de transformer cette forme (1) en une forme du type (2), on peut affirmer que l'espace considéré est, soit un plan, soit peut être appliqué sur un plan comme un cylindre par exemple. Plus précisément, lorsque $ds^2 = dx^2 + dy^2$, on dira que l'espace est euclidien et on rencontrera une définition en tous points identique lors de l'étude de l'espace à 4 dimensions.

Ainsi, il est suffisant de connaître les valeurs des potentiels E F G pour pouvoir définir la structure de l'espace. Mais pour l'étude que nous avons en vue, il y a un autre élément fondamental qui s'appelle la courbure de la surface (*).

C'est encore GAUSS qui a mis en évidence cet élément qui est un invariant et peut s'exprimer par les seuls coefficients EFG de la forme fondamentale.

On a vu dans l'analogie qui vient d'être présentée que les phénomènes de gravitation sont déterminés par la courbure de la surface. Pour le problème réel, l'élément dont nous nous servirons pour décrire un changement de de structure de la multiplicité à 4 dimensions recevra encore le nom de courbure et ne sera rien d'autre que la généralisation de la notion présentée plus haut.

J'ai présenté ci-dessus quelques observations concernant les espaces à 2 dimensions destinées à nous aider à appréhender plus aisément ce que nous allons affirmer sur les multiplicités à 3 et 4 dimensions.

Nous pénétrons maintenant dans un domaine qui a été exploré en premier par RIEMANN l'un des penseurs les plus profonds du siècle dernier, génie doué d'une puissance de création et d'intuition extraordinaires.

L'idée fondamentale de la théorie d'EINSTEIN prend pour base les résultats de RIEMANN. En l'absence de ces résultats, il est probable que la théorie eût été moins qu'elle ne l'est aujourd'hui.

RIEMANN analyse très en détail la notion de multiplicité. Considérons 2 types d'espaces, une surface à deux dimensions - et un espace à 3 dimensions - celui dans lequel nous vivons. Que peut-on dire sur chacun d'eux. Nous pouvons imaginer que la surface soit plane

$$(ds^2 = dx^2 + dy^2),$$

ou soit courbe avec une forme absolument quelconque

$$(ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2).$$

Mais l'espace dans lequel nous nous déplaçons, nous ne pouvons nous l'imaginer que comme une multiplicité de points, chacun bien défini si nous nous donnons ses 3 coordonnées. Admettons en plus que la distance entre deux points infiniment voisins soit de la forme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

pour un choix convenable des axes.

Ainsi pour notre intuition, l'espace dans lequel

(*) définie comme limite du rapport entre l'angle solide des normales menées le long d'un élément de surface et l'aire de cet élément de surface.

nous vivons nous apparaît comme une multiplicité à 3 dimensions que, en conformité avec la formule ci-dessus, nous avons reconnu jusqu'à ce jour comme euclidienne.

Si nous nous reportons aux 2 possibilités que nous avons eues dans le cas d'espaces à 2 dimensions (plan et surface courbe) nous pouvons dire que notre intuition ne peut nous aider à imaginer qu'un espace qui corresponde au plan considéré plus haut. Nous sommes dans l'impossibilité de nous représenter un espace à 3 dimensions qui corresponde à une surface courbe.

Mais d'abord existe-t-il un tel espace correspondant et s'il existe par quel procédé pourrions-nous nous rendre compte de son existence du moment que notre intuition ne nous sert de rien.

Le problème ainsi posé nous conduit à l'analyse de la notion d'espace, c'est-à-dire de multiplicité à un plus grand nombre de dimensions. Cette analyse a été effectuée par RIEMANN en quelques pages concises; vigoureuses, remplies d'idées d'importance considérable. C'est aujourd'hui à peine qu'elles sont comprises et utilisées à fond.

RIEMANN précise d'abord qu'un espace c'est-à-dire une multiplicité continue de points n'est pas bien définie si on se donne seulement le nombre de ses dimensions, de la même manière qu'en affirmant d'un espace qu'il possède 2 dimensions, on ne peut savoir s'il s'agit d'une sphère ou d'un ellipsoîde.

En vue d'une définition complète il faut se donner, à côté du nombre de dimensions (supposons dans notre cas qu'il y en ait 4), la structure, c'est-à-dire les relations métriques intrinsèques de la multiplicité.

La connaissance de ces relations métriques se réduit en dernière analyse au calcul de l'élément linéaire ds . Sous certaines conditions, celui-ci peut s'exprimer dans un système de coordonnées x, x2, x3, x4, en une forme différentielle d'ordre 2

c'est-à-dire (3) $$ds^2 = g_{11}\, dx^2_1 + \ldots\ldots + 2g_{12}\, dx_1\, dx_2 + \ldots\ldots$$
$$ds^2 = gik\ dxi\ dxk \qquad (gik = gki)$$

gik peut avoir une valeur quelconque. En conséquence, même notre espace à 3 dimensions ou celui à 4 peut avoir une structure différente de celle qu'on lui a attribuée jusqu'à maintenant. L'espace euclidien (celui pour lequel $ds^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 + dx_4{}^2$) n'est qu'un cas particulier. En général gik varie selon le point considéré.

Il existe ainsi un équivalent à la surface courbe dont on a parlé antérieurement (l'espace peut être courbe, une certaine expression mathématique, définie rigoureusement, calculée à l'aide des coefficients gik et appelée courbure de l'espace, nous permet de définir en chaque point les relations métriques intrinsèques de la multiplicité considérée.

*

*   *

Ainsi un espace quelconque peut être courbe. Mais un espace courbe peut avoir toutes sortes de formes. Qu'est-ce qui lui impose la forme particulière qu'il lui faut adopter.

En d'autres termes, qu'est-ce qui décide si, par exemple, l'espace courbe est sphérique ou parabolique.

Servons-nous à nouveau d'une analogie.

Nous pouvons imaginer l'espace à 4 dimensions comme l'analogie d'une surface courbe (gik quelconque). Lorsque cette surface se réduit à un plan (gik = 0 et 1) la multiplicité correspondante est euclidienne.

Supposons que cette surface soit constituée d'une toile très fine, inextensible et extrêmement flexible. Elle a 2 dimensions mais n'a pas une forme bien définie, c'est-à-dire une certaine courbure en un point donné sur laquelle nous puissions travailler en modifiant cette courbure à notre gré.

C'est exactement la même chose qui se produit en ce qui concerne les multiplicités à plus de 2 dimensions.

Considérons en une à 4 dimensions. Nous savons que cette condition n'est pas suffisante pour définir complètement un espace, il reste amorphe comme la toile dont on a parlé si l'on ne se donne pas en même temps le c'est-à-dire en définitive gik, mais il existe une infinité de formes que peut prendre la toile. Comment pouvons-nous préciser quelle est la forme qu'elle prendra effectivement. Ou autrement : si les gik sont des éléments pouvant prendre n'importe quelle valeur comment connaîtrons-nous les valeurs que les gik prennent effectivement dans notre espace.

Bien évidemment seulement par des mesures; par la voie expérimentale.

A une multiplicité donnée n'est pas nécessairement liée une série donnée de valeurs gik. Les relations métriques intrinsèques ne sont pas définies par l'espace même considéré. Elles sont imposées par autre chose de l'extérieur.

Or, d'après RIEMANN, "le principe des rapports métriques d'une variété continue n'est pas contenu dans le concept même de cette variété, il doit provenir d'autre part".

La toile amorphe doit prendre une forme bien définie lorsqu'on l'étend, quand on la fixe en divers points en un mot lorsqu'on exerce une force sur elle.

D'après RIEMANN ceci se produit pour une variété à un nombre quelconque de dimensions. Les relations métriques de celle-ci ne sont pas déterminées par la variété elle-même mais par des forces de liaison "bindende Kraefte" qui s'exercent en elle. Il nous faut donc chercher la source des rapports métriques à l'extérieur (de la multiplicité considérée) dans les forces de liaison qui s'exercent en elle.

*

*   *

RIEMANN affirme donc qu'un espace quelconque peut être courbe et que la courbure induit des forces de liaison dont l'étude - il l'exprime de façon précise -, est du ressort de la physique. Après plus de 60 ans, sur la voie ouverte par RIEMANN c'est EINSTEIN qui s'avance, et utilise les vues de celui-ci dans le domaine physique, précisant la nature de ces mystérieuses forces de liaison: elles ne sont autres que les forces de gravitation.

Ainsi la courbure de l'espace est déterminée par les forces de gravitation mais, par l'expérience, nous savons que la présence de la matière induit à son tour les phénomènes de gravitation. Donc, en définitive, la courbure de l'espace est déterminée par la matière en quantité et au point de vue de sa distribution. La présence de matière modifie l'espace amorphe lui donnant une certaine courbure d'après une loi bien définie fixant, autrement dit, sa structure.

*

*   *

En rassemblant ensemble tous les résultats obtenus jusqu'ici, nous pouvons formuler la conclusion générale suivante : l'Univers est une multiplicité à 4 dimensions qui ne présente pas la même structure en tous ses points, cette différence de structure est due à la présence de matière; elle se manifeste par les phénomènes de gravitation.

L'obtention de cette conclusion représente dans l'histoire de la science un moment d'une importance exceptionnelle. Elle le doit, en premier lieu à l'introduction d'un élément nouveau fondamental que j'ai appelé, dans ce qui précède "l'espace actif".

Ainsi que j'y ai insisté auparavant, l'espace n'était jusqu'ici en physique que le cadre rigide où avaient lieu les phénomènes; notion d'un caractère tout à fait spécial, il n'était objet d'étude qu'en mathématiques et en métaphysique; sa structure était euclidienne, bien définie et invariable.

Voici cependant que la théorie générale de la relativité nous contraint à changer notre point de vue à cet égard. Non seulement l'espace en vertu de sa courbure influence les phénomènes mais la multiplicité à 4 dimensions est à son tour influencée par son contenu matériel qui la contraint de se courber d'une certaine façon déterminant ce que RIEMANN appelait les rapports métriques intrinsèques.

C'est un changement de point de vue fort attirant tellement fascinant qu'il nous incite peut être à exagérer lorsque nous cherchons à expliquer la totalité des phénomènes à l'aide de ce nouvel élément actif. En tout cas, nous avons à notre disposition pour expliquer les phénomènes, un élément nouveau qui peut les provoquer ou les influencer. Et, de ce point de vue, nous pouvons dire que le résultat des recherches d'EINSTEIN est équivalent à la découverte d'une nouvelle force dans la nature, c'est-à-dire nous disposons d'un nouvel élément actif sur le dos duquel nous pouvons mettre une série de phénomènes dont les causes étaient inconnues jusqu'à présent.

*

* *

Suivant ces idées, on peut développer les calculs de la théorie selon les bases qu j'ai indiquées plus haut pour les appliquer ensuite aux phénomènes physiques et en tirer des conclusions susceptibles de vérifications expérimentales.

Les équations fondamentales sont celles qui définissent la structure de l'espace lorsqu'on se donne la distribution de matière.

Pour les établir, on se sert d'un principe de minimum analogue au principe de HAMILTON en mécanique.

Ce qui, toutefois, est intéressant est le fait que les équations conduisent, sans aucune autre hypothèse supplémentaire, à 4 relations conditionnelles entre les éléments qui caractérisent la matière, relations qui n'expriment rien d'autre que la loi de conservation de l'énergie et la conservation de la quantité de mouvement. Voici donc ces lois fondamentales apparaissant comme conséquence de la loi générale de la gravitation, les voici donc contenues déjà dans cette loi de la gravitation, ce qui constitue pour certains un argument de plus en faveur de l'admissibilité de la théorie d'EINSTEIN.

Si nous faisons certaines hypothèses particulières, les équations de la gravitation se simplifient et fournissent des équations qui expriment la loi de gravitation en théorie de NEWTON. Les nouvelles équations comprennent, comme une première approximation, celle de NEWTON. La révision des calculs astronomiques à l'aide des éléments que la théorie de la relativité met à notre disposition, nous fournira des résultats plus exacts que ceux obtenus jusqu'ici.

Si nous appliquons les équations au cas particulier d'une masse solitaire, le soleil, qui provoquerait les phénomènes de gravitation, on trouve qu'à son voisinage l'espace se courbe de telle façon qu'il prend une structure définie par

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}dr^2 - r^2 d\theta^2 + \gamma dt^2 \qquad \gamma = 1 - \frac{2m}{r}$$

m masse du soleil r, θ coordonnées polaires Ce définit un espace dont les géodésiques peuvent être calculées et qui sont courbes. Le chemin d'un rayon de lumière est cependant une sorte de géodésique : on peut donc constater que les rayons de lumière passant au voisinage du soleil sont déviés de leur chemin et cette déviation est calculable. Ce résultat est vérifiable expérimentalement et, en fait, constitue la preuve la plus puissante à l'actif de la théorie de la relativité à savoir que ses conclusions se rapprochent assez bien de la réalité.

On peut encore prouver par le calcul que le périhélie des orbites des planètes se déplace et on peut calculer la grandeur de ce déplacement. EINSTEIN l'a fait pour Mercure et la valeur calculée s'est trouvée être celle que l'expérience avait indiquée au préalable.

Enfin, de la forme générale du ds 2 on peut tirer la conclusion qu'on doit constater au spectroscope certaines différences entre les spectres d'un même corps observé sur la terre et dans le soleil. L'effet est cependant petit et les expérimentateurs ne sont pas encore d'accord sur cette question.

Telles seraient les conséquences de la théorie susceptibles d'être vérifiées expérimentalement. L'éclipse du 22 Septembre a apporté de nouvelles confirmations expérimentales de la théorie. Il nous faut cependant observer que, en tout cas, les éléments expérimentaux nécessaires pour juger la vraie valeur d'une théorie sont, à ce jour, insuffisants en ce qui concerne la théorie de la relativité.

Il y a plutôt un contraste frappant entre ce nombre restreint de confirmations expérimentales et l'extraordinaire développement théorique que la question a suscité.

D'un autre côté, même s'il n'existait aucune confirmation expérimentale, le splendide édifice de la relativité générale resterait l'une des plus admirables créations de l'esprit humain.

C'est pourquoi nous n'insisterons pas plus sur les tentatives de justification expérimentale de la théorie - nous passerons plus loin en examinant une des questions les plus intéressantes du point de vue spéculatif, une des plus obscures mais dont l'étude approfondie nous serait de la plus grande utilité pour situer la nouvelle conception des phénomènes que nous impose la théorie de la relativité dans l'histoire de la pensée humaine.

Nous avons vu dans ce qui précède de quelle façon l'espace à 4 dimensions, c'est-à-dire l'Univers a une influence sur la matière en ce sens qu'il est capable de provoquer les phénomènes de gravitation en raison de sa courbure.

Nous avons vu cependant qu'à son tour la matière influence l'espace en le courbant.

Ainsi la présence de la matière provoque la courbure de l'espace et à son tour cette courbure mainfeste son apparition par les phénomènes de gravitation.

Il existe autrement dit une transformation continue entre la matière et l'espace; les deux produisent leurs effets simultanément l'un par-dessus l'autre. Si dans un champ de gravitation, on introduit un corps, non seulement ce corps est soumis à l'action du champ (qui, par exemple, en modifie le mouvement), mais le champ lui-même est modifié par la présence du corps.

Ce phénomène est connu en électricité : si, dans un champ électrique on introduit un corp électrisé, celui-ci est soumis à certaines forces mais en même temps le champ électrique est lui aussi modifié.

Il s'établit, dans tous les cas, un équilibre, et l'action de l'espace sur un corps, dépendant de sa courbure, dépend de la distribution de la totalité de la quantité de matière qui existe dans cet espace en y incluant le corps considéré.

S'il y a modification de cette distribution, l'action subie par le corps en est également changée. On retrouve une analogie complète avec le phénomène électrique qui vient d'être rappelé.

De telles ressemblances sont assez fréquentes. L'étude approfondie de la théorie pourrait nous indiquer autrement, de quelle manière les idées dominantes de la physique contemporaines y interviennnent et elle nous la présenterait comme le terme ultime de l'évolution de ces idées, comme une généralisation sur ces idées et qui, sans elles, ne pourrait avoir la moindre signification.

On pourrait constater, de ce point de vue, à quel point est vérifiée l'affirmation que la science est en évolution continue, automatique, et que la découverte la plus extraordinaire et inattendue n'est que la résultante d'une série complète d'expériences non interprétées, de théories justes ou fausses, d'impressions, de suggestions, d'insuccès qu'en un instant donné, un esprit génial rassemble, coordonne, découvrant en fin de compte le dernier maillon de la chaîne de raisonnements qui les relient toutes en une théorie unitaire et harmonieuse.

Supposons que nous ne nous avancions pas aussi loin et que nous nous limitions à un cas simple, au cas du soleil qui attire une planète.

Ainsi qu'on a vu, il n'y a pas de sens à parler d'attraction ni, en général, d'action à distance. Le procédé selon lequel une attraction apparente a lieu est le suivant : le soleil courbe l'espace similairement à un aimant qui provoquerait des tensions dans l'éther; la planète située dans un espace courbe subit l'influence directe de celui-ci, influence qui se manifeste par une déviation de la ligne droite. Ainsi, en fait c'est quand même le soleil qui agit sur les planètes, pas de façon directe (l'action à distance est impossible) mais bien de proche en proche, par l'intermédiaire d'un continuum spécial ayant un rôle d'intermédiaire analogue à celui de l'éther dans l'ancienne théorie des attractions magnétiques.

Un corps suscite en son voisinage un champ gravifique : nous rencontrons ici aussi la notion de champ qui, depuis FARADAY, s'efforce de pénétrer dans toute la physique. Ici cependant, il s'agit d'un champ particulier dont les lignes de forces seraient les géodésiques d'un espace à 4 dimensions l'une d'entre elles étant le temps, un champ de nature tout à fait inhabituelle.

La notion de champ tire son origine de l'impulsion puissante de tout à l'heure qui a remplacé toute la théorie des phénomènes à distance par la théorie des actions de contact.

Si nous considérons la manière dont nous avons traité la notion d'espace jusqu'ici nous pouvons reconnaître dans ce traitement une préoccupation analogue. L'espace que nous connaissons jusqu'à présent, euclidien, présente des propriétés qui ne s'accordent pas avec le principe qui nous a fait abandonner la théorie des actions à distance.

Ainsi, dans l'espace euclidien, il existe des corps solides indéformables; on peut transporter un corps à une distance aussi grande que l'on veut sans qu'il perde sa forme ou ses propriétés.

Cette indépendance vis à vis du chemin parcouru n'entre pas dans d'esprit d'une physique qui a pour fondement le principe des actions par contact, le principe de continuité.

En théorie de la relativité cependant se fait une étude plus approfondie de la notion d'espace dans l'esprit des recherches modernes. En général, un corps déplacé de A en B modifie sa forme. Le corps qui est en ce moment en A n'est pas identique à ce même corps transporté en B à une distance finie quelconque. De plus, même ces différences dépendent du chemin suivi. Une telle identité qui, en définitive, est une "action à distance", n'est possible que dans des conditions tout à fait particulières.

La nouvelle manière de concevoir l'espace est plus conforme à une exigence fondamentale de la philosophie naturelle contemporaine, celle d'écarter toute hypothèse d'action à distance.

Dans ce but la théorie de la relativité modifie certains chapitres de la science pour les mettre en accord avec les principes généraux, avec ces idées dominantes que nous avons mentionné précédemment, introduisant ainsi une unité supérieure et une meilleure harmonie.

Nous prendrons un exemple d'une telle modification intéressante à plus d'un titre en raison de ses conséquences.

*

* *

Considérons le principe d'inertie et le mouvement des planètes. La science classique établit que les planètes lancées dans l'espace se déplaceraient en suivant un mouvement rectiligne et uniforme s'il n'y avait pas l'attraction solaire qui leur imprime une déviation de chaque instant dans leur parcours.

En examinant la première partie de cette affirmation nous constatons qu'elle n'est pas conforme au principe de relativité.

En effet, quel est le sens des mots "mouvement rectiligne et uniforme", relativement à quel système de référence? S'il existe un observateur pour lequel ce mouvement apparaisse effectivement de ce type, pour un autre il paraîtra curviligne et varié. L'affirmation n'a aucun sens précis.

La propriété des corps, que j'ai appelée leur inertie, à savoir celle de rester constante lors d'un mouvement rectiligne et uniforme n'a jamais été établie par expérimentation directe; elle résulte d'un prolongement abstrait de ces expériences et la conclusion fausse à laquelle elle a conduit est due, comme on le verra,au domaine insuffisamment étendu de nos expériences qui nous faisait apparaître l'espace comme euclidien.

La théorie générale de la relativité modifie l'affirmation citée plus haut de la manière suivante.

Il n'existe pas d'attraction solaire donc aucune déviation du mouvement rectiligne. Le soleil n'a que le rôle de courber l'espace. Dans cet espace, les planètes se meuvent librement le long de ses géodésiques, de la même manière qu'un corps pesant se déplace sur un plan incliné le long de la ligne de plus grande pente.

Un corps libre en un point de l'espace à quatre dimensions suivra une courbe qui est, pour cet espace, l'équivalent de la ligne de plus grande pente pour un plan incliné, c'est à dire une géodésique courbe que l'on peut définir intrinsèquement et indépendamment du système de référence.

Le principe d'inertie modifié stipule donc qu'un corps en mouvement libre suit la géodésique relative au point initial.

Il se déplace, en d'autres termes, selon les possibilités que lui autorise l'espace à 4 dimensions dans lequel il se trouve plongé, ses déplacements sont gouvernés par la courbure de l'espace. Entre tous les mouvements qu'il pourrait prendre, il en choisit un déterminé précisément par la structure de l'espace.

En ce sens, le principe d'inertie perd ce caractère mystérieux qu'il avait sous sa forme ancienne. Il devient en fait un principe de minimum exprimé par la définition des géodésiques de l'univers.

Enfin, il indique que l'inertie est, elle aussi, due à la courbure de l'espace, autrement dit que cette propriété et les phénomènes de relativité participent de la même cause; que l'inertie n'est qu'un mode de manifestation de la courbure de l'espace; en d'autres termes que l'inertie se confond avec la gravitation.

On peut considérer la question également d'un autre point de vue qui nous conduira à considérer un problème extrêmement important de la physique du passé.

Si l'on veut mettre en mouvement un corps en repos, ce dernier oppose une résistance due à son inertie. Même chose, d'après l'ancienne conception dans le cas d'un corps en mouvement rectiligne et uniforme et que l'on voudrait dévier de son mouvement.

Cette résistance opposée par le corps à toute variation de vitesse est proportionnelle à sa masse.

Nous pouvons avoir un autre type d'indication sur la manière dont s'opposera un corps à une tentative de perturbation de son régime permanent de mouvement en mesurant sa masse. De façon plus concise on peut dire que la masse d'un corps est la mesure de son inertie comme on le sait d'ailleurs.

Ainsi s'introduit ici naturellement une notion qui est à l'origine, autrefois, de discussions longues et sans résultat définitif à savoir la notion de masse.

Tour à tour, considérée comme un nombre représentant une quantité de matière, comme un coefficient d'inertie, comme un élément déterminé d'une quantité de mouvement, la masse n'a jamais pu être définie de façon rigoureuse puisque toutes les tentatives butaient soit sur un cercle vicieux, soit sur la nécessité d'introduire des éléments supplémentaires, ceux-ci étant fort difficiles à définir.

La seule chose sur laquelle tous les chercheurs étaient d'accord résultait d'une conviction intuitive: celle que "dans un corps donné il y a quelque chose de constant" formule qui met en relief la propriété caractéristique que l'on attriuait anciennement à la masse. Aucun autre élément peut être n'a reçu, dans l'ancienne physique, un caractère d'invariance plus accusé.

Pour un corps donné la masse était un nombre fixe, invariablement lié au corps et représentant quelque chose d'indestructible. En plus, c'était une caractéristique du corps bien définie une fois spécifié celui-ci et donc indépendante de l'existence ou l'inexistence d'autres corps dans l'univers.

Dans une équation de mécanique, l'élément masse est le seul qui tienne compte du caractère matériel des corps entre lesquels se produit un phénomène. Toute la complexité extraordinaire des propriétés de la matière qui entre en jeu dans un phénomène donné doit être concentrée dans ce nombre, la masse est en somme un coefficient condensant ou, d'après une expression heureuse la masse est "le résumé de nos connaissances (mécaniques) concernant la matière".

Un fait expérimental, la proportionnalité des masses aux poids, donnait un moyen pour calculer la masse et apportait ainsi un soutien puissant à l'intuition laquelle affirmait l'existence réelle d'un élément aussi difficile à définir sans ambiguité.

En fait, toutes les recherches ultérieures n'ont pas confirmé la conviction intuitive dont il était question tout à l'heure, elles ont été nécessaires seulement en ce que elles ont contribué à l'étude des particularités du problème et à préparer le terrain en vue de faire accepter les idées qui résultent de l'étude de la théorie générale de la relativité.

Aujourd'hui, d'après cette théorie, la masse ne possède plus sa caractéristique essentielle, l'invariabilité. Sa valeur change d'après la quantité d'énergie possédée par le corps. Elle n'est plus un coefficient fondamental propre à un corps donné mais elle dépend comme on va le voir de suite, aussi des corps voisins.

Cette notion perd désormais toutes les qualités qui la rendaient utile et nécessaire dans l'ancienne mécanique et en conséquence, ne peut plus être utilisée comme par le passé pour l'étude des phénomènes.

Elle demeure cependant une notion utile pour les applications et intéressante d'un point de vue purement scientifique, plus particulièrement en raison du contraste que présentent les nouvelles propriétés paradoxales que la théorie de la relativité a dévoilées avec celles que l'intuition lui avait attribuées à partir de NEWTON et depuis.

J'ai tenté, dans la conférence précédente, de montrer que la masse n'est pas un invariant mais qu'elle dépend de l'état énergétique du corps. Je n'y reviendrai pas ici. Par contre, j'insisterai sur une autre propriété paradoxale entrevue autrefois par l'esprit critique pénétrant de MACH et qui apparaît maintenant parfaitement claire à la lumière de la théorie générale de la relativité.

Nous avons vu que la masse est la mesure de l'inertie d'un corps, c'est-à-dire la résistance qu'il oppose lorsqu'on cherche à l'empêcher de suivre son chemin naturel le long de sa géodésique.

Cette inertie du corps qui se confond avec la gravitation a son origine directe dans la courbure de l'espace : un corps libre se meut le long des géodésiques de l'univers. Si la courbure de celui-ci change, les géodésiques sont modifiées et donc l'inertie et la masse (qui la mesure).

Ainsi la masse d'un corps dépend de la courbure de l'espace dans lequel il se meut.

A son tour, cette courbure est issue de la distribution quelconque de la matière dans l'univers de sorte que l'on peut dire que : la masse d'un corps n'est pas une quantité fixe qui dépend seulement de ce corps; elle dépend de la distribution de tous les autres corps de l'univers.

Voilà une conclusion véritablement paradoxale. Non seulement la masse n'est pas un invariant lorsque le corps en question absorbe ou émet de l'énergie, mais la masse n'est même pas bien définie lorsqu'on s'est fixé la quantité d'énergie que possède le corps. Il nous faut en plus nous donner la distribution de toutes les autres masses dans l'univers.

Cette idée, qui n'est en somme que l'idée de la relativité des masses est l'une des plus subtiles et splendides que l'on rencontre dans ce domaine de recherches pavé par ailleurs en surprises de ce style.

*

* *

J'ai parlé plus haut de "toutes les masses de l'univers". Voici encore que se pose un nouveau problème. Pour la première fois apparaît ici la nécessité de considérer l'univers dans son ensemble. La question présente un intérêt extrême. Les recherches correspondantes ont mené EINSTEIN à une conception très curieuse de notre monde et les résultats intéressants et nouveaux méritent d'être rappelés.

Comme je l'ai montré, en conformité avec l'esprit de la physique moderne, les lois de la théorie de la relativité sont exprimées par des équations différentielles, définissant le phénomène seulement dans un domaine infiniment petit au voisinage d'un point donné.

Si l'on veut suivre le phénomène dans un domaine fini, il faut réunir les actions de chaque point, c'est-à-dire effectuer ce que l'on appelle une intégration.

Mais ici apparaît une difficulté : pour toute intégration il est insuffisant de se donner l'élément différentiel, on a besoin aussi des limites d'intégration. Ces conditions aux limites ne font pas partie de l'équation différentielle, il faut que ce soit nous qui les imposions d'après la situation particulière de chaque cas.

Autrement dit pour étudier l'évolution d'un phénomène dans un espace de dimensions finies, il nous faut connaître

1) l'équation différentielle

2) le comportement du phénomène aux limites du domaine considéré.

Par exemple, supposons que l'on cherche à étudier l'univers dans son ensemble, en recherchant la structure due à une distribution de matière donnée et invariable dans le temps.

La théorie générale de la relativité nous fournit l'équation différentielle mais il faut encore connaître la structure de l'univers aux limites de l'espace, c'est-à-dire à l'infini.

C'est là une difficulté spécifique à ce genre de problèmes, il nous fait faire des hypothèses et encore des hypothèses dans un domaine où nous savons, par expérience qu'il est très dangereux de nous aventurer sur la seule base de l'intuition ou de généralisations superficielles.

En effet, une multitude de telles hypothèses sur ce qui se passe "à l'infini" ont été avancées non conformes à la réalité bien que notre intuition leur eussent attribué un haut degré de certitude.

Le postulat d'EUCLIDE qui n'est rien d'autre qu'une affirmation sur le comportement de deux droites à l'infini, est un exemple frappant de cet état de choses.

Ainsi, nous devons être prudents. La première hypothèse qui vient à l'esprit est celle qu'à l'infini l'espace soit euclidien. Mais cette hypothèse-là, de même que toutes les autres qui l'ont précédée, n'est pas acceptable. Toutes, elles conduisent à une contradiction.

La difficulté de trouver une hypothèse convenable fut si grande que certains ont même proposé de renoncer à l'idée de continuer à chercher des hypothèses absolument générales qui soient applicables à l'infini, se résignant à considérer ce problème comme inattaquable avec les armes que la science contemporaine peut mettre à notre disposition.

La manière dont EINSTEIN a résolu le problème porte, en vérité, l'estampille de son génie. Voici en quoi consiste cette solution.

En dépit de tous les efforts passés, il a été impossible de trouver une hypothèse convenable. Ce fait peut nous faire penser que la difficulté rencontrée est peut être de nature organique, que le problème pourrait être d'une nature telle que ce serait une absurdité de chercher quelles sont les conditions réalisées aux frontières du domaine, c'est-à-dire à l'infini. En particulier, la difficulté dont il est question disparaîtrait d'elle-même si l'espace considéré n'avait pas de limites, qu'il soit illimité. Et il n'y a pas d'autre type d'espace sans limites, sans frontières, qu'un espace courbe fermé sur lui-même: que par exemple, une sphère est un espace à 2 dimensions sans bornes, illimité.

Ainsi, nous sommes conduits à rechercher si, par hasard, une nouvelle hypothèse sur la construction de l'espace ne pourrait pas alléger en quelque chose la difficulté rencontrée et de quelle manière cette nouvelle hypothèse nous impose un espace entièrement différent de celui auquel nous étions habitués jusqu'ici. D'après cette nouvelle hypothèse notre univers est illimité spatialement, toutefois il n'est pas infini.

Si les êtres imaginaires à 2 dimensions qui nous ont été nécessaires dans les analogies précédentes se déplaçaient sur la surface d'une sphère, ils pourraient se rendre compte que leur univers est de grandeur finie. Mais où qu'ils aillent ils ne seraient arrêtés par aucune frontière. La même chose se produit pour notre univers. Il constitue un continuum courbe fermé donc illimité et si l'on s'avançait continûment dans une même direction on pourrait revenir au point de départ sans avoir rencontré la moindre barrière en chemin.

Un espace à 3 dimensions fermé sur lui-même est difficile à imaginer. La possibilité théorique de son existence a cependant été mise en évidence pour la première fois par RIEMANN qui a établi autrefois, alors qu'on ne pouvait même pas soupçonner l'importance pour la physique de ses recherches en géométrie, que "la propriété de l'espace de n'avoir pas de limite relève par conséquent d'une certitude empirique supérieure à celle de toutes les autres données expérimentales modernes. Il ne découle cependant absolument pas de là que l'espace soit infini".

Cette conception d'un espace fermé et donc courbe fini mais non borné fut utilisée par EINSTEIN pour la première fois pour donner une représentation de l'univers dans son ensemble.

Pour préciser l'idée de EINSTEIN, souvenons-nous que nous avons admis que l'espace est courbé du fait de la matière au voisinage des points où elle est agglomérée. En dehors de cette courbure locale l'espace présente une courbure d'ensemble celle dont il est question ici.

Une image qui nous concrétiserait l'espace dans son ensemble pourrait être l'espace à 2 dimensions qu'est la surface de la terre. Il est fini et non borné, il présente à échelle réduite une multitude de montagnes et de vallées (qui correspondraient aux courbures dues en divers points à l'agglomération de matière), mais à grande échelle il a cependant la forme approximative d'un ellipsoîde (et cette forme est celle qui correspond à la courbure d'ensemble dont il a été question aux lignes précédentes).

A partir du moment où la densité moyenne de la matière est différente de zéro, et il semble qu'il en est bien ainsi en réalité, l'espace prend une courbure d'ensemble, devient fini et non borné.

Il faut observer que nous avons parlé ici tout le temps de l'espace proprement dit, de l'espace à 3 dimensions, puisque dès le début, nous avons pensé les points à l'infini dans l'espace et non dans le temps. Cet espace a une courbure générale, a une forme d'ensemble fermée.

Le problème qui se pose immédiatement ensuite est de trouver la forme d'ensemble de l'univers, c'est-à-dire de la multiplicité espace-temps. Exprimé d'une autre manière, le problème revient au fond à chercher les conditions aux limites en ce qui concerne le temps, et revient donc à la tentative prétentieuse d'avoir une quelconque information, aussi vague soit elle, en un domaine dont nous ne soupçonnons même pas la nature mais auquel nous avons cependant donné un nom sonore et imprécis : l'infini temporel.

A ce sujet, l'accord ne s'est pas encore fait. D'après EINSTEIN l'univers est une sorte de cylindre, courbe en ce qui concerne les dimensions d'espace mais rectiligne dans la direction de l'axe de temps. Selon d'autres auteurs, l'univers a une forme différente. La solution la plus probable n'a pas encore été trouvée. Le caractère de continuum fermé de l'espace habituel semble cependant bien établi. Une modification minime qu'EINSTEIN a introduite dans les équations les fait s'accorder avec la conception nouvelle et permet de calculer ce que l'on pourrait appeler le rayon de notre monde (dans le cas où il ressemblerait à une sphère) et qui serait de l'ordre 10**18 fois la distance de la terre au soleil.

Il est évident qu'EINSTEIN ne fonde pas cette hypothèse sur les motifs que nous avons données au début - sinon il pourrait donner seulement une direction de pensée et non une motivation - mais sur d'autres considérations issues des difficultés et des contradictions de la théorie de NEWTON et sur lesquelles nous ne réinsisterons pas ici.

En fait, si nous examinons avec plus d'attention le passage de l'ancienne conception de l'univers dans son ensemble à la nouvelle, nous y reconnaissons un procédé avec lequel l'étude des idées générales de la physique moderne nous a familiarisés depuis longtemps et plus particulièrement l'étude de la théorie de la relativité.

On a ici, au fond, la même idée que celle qui fut rencontrée au passage de l'ancienne conception euclidienne de l'espace "plan" à celle récente de l'espace "courbe". Nous avons en d'autres termes la même idée fondamentale qui a provoqué le passage de la physique des actions à distance à la physique des actions de contact ou de la géométrie plane qui admet le postulat d'EUCLIDE à la géométrie elliptique de RIEMANN.

En fait, ce passage est un pas en avant dans l'évolution normale de nos connaissances concernant l'espace. Dans cette évolution on peut distinguer clairement trois étapes.

D'abord, l'intuition affirme avec insistance que l'espace est euclidien. Le postulat d'EUCLIDE était une vérité incontestée et tous les chercheurs s'efforçaient d'en fournir une démonstration inattaquable convaincus qu'une telle démonstration était possible.

En deuxième étape, cette conviction s'affaiblit et insensiblement les mathématiciens passent au point de vue opposé. Le postulat d'EUCLIDE n'est absolument pas nécessaire. Il peut être remplacé, du point de vue de la logique mathématique, par n'importe quel autre pouvant aussi bien servir de fondement à une géométrie cohérente. Ce qui a fourvoyé pendant aussi longtemps l'intuition est le fait que, dans la nature, seul l'espace euclidien est réalisé.

Enfin, la troisième étape est caractérisée par l'abandon de cette ultime conviction.

L'espace que nous connaissons n'est euclidien que en certains cas particuliers. Sa structure peut être quelconque et les géométries qui, autrefois semblaient de simples spéculations théoriques sont, en fait, celles qui correspondent aujourd'hui le mieux aux réalités.

*

* *

Cette dernière façon de voir - à savoir celle qui se conforme à la tendance de n'accepter que les actions de contact - tend à se généraliser en physique contemporaine. Il n'y a pas de doute que les considérations précédentes en aient été influencées et il est certain que si l'on examinait de façon critique la théorie de la relativité tout entière, en cherchant à découvrir ou à remplacer tous les raisonnements, idées, hypothèses qui ne procèderaient pas de cet esprit - on obtiendrait une théorie plus parfaite, une théorie qui, en tout cas, aurait une meilleure cohérence, une plus grande unité et moins de contradictions.

Un tel examen critique a été fait par H. WEYL et le résultat en fut surprenant. Non seulement, la théorie a beaucoup gagné en unité et harmonie mais elle a élargi de façon extraordinaire son domaine, englobant dans une synthèse grandiose les phénomènes gravitationnels et les phénomènes électriques.

Nous examinerons ce nouveau développement de la théorie dans ce qui suit.

*

* *

A la seule exception des phénomènes gravitationnels, les phénomènes naturels aussi complexes soient-ils, pouvaient être réduits à des phénomènes élémentaires électriques d'une manière plus ou moins satisfaisante. Il existait ainsi deux catégories distinctes de phénomènes qui n'avaient pas le moindre lien apparent entre eux : phénomènes gravitationnels et électriques.

Comme on l'a vu, EINSTEIN pose que l'origine de tous les changements que nous appelons phénomènes de gravitation ou de mouvement est la courbure d'une variété de l'univers. WEYL montre que cet univers a une structure un peu plus compliquée qu'on ne le supposait mais justement que cette complication nous induisait à considérer les phénomènes électromagnétiques eux aussi comme provoqués par la variation de la structure de cet univers.

Tous les phénomènes physiques peuvent être considérés donc comme étroitement unis aux propriétés métriques de l'espace et de sa courbure. Toute la physique se réduit autrement dit à l'étude des propriétés géométriques de l'univers réalisant ainsi une synthèse inconnue jusqu'à ce jour.

L'idée élémentaire de WEYL est d'une extrême simplicité. Nous avons vu que la base de l'édifice entier construit par EINSTEIN est un principe fondamental, accepté sans restriction par tous, le principe de relativité. Les équations des phénomènes sont invariantes relativement à un changement de système de coordonnées.

Mais pour pouvoir écrire les équations d'un phénomène (la chute d'un corps pesant par exemple) il faut choisir

1) un système de coordonnées

2) une unité de mesure.

Et alors, si nous imposons aux équations du phénomène l'invariance vis à vis d'un changement d'axes, pourquoi ne ferions-nous pas de même en ce qui concerne l'unité de mesure ?

Il y évidemment une lacune. Si l'on admet que la relativité générale existe, alors il faut que les équations soient invariantes et vis à vis d'un changement d'axes et vis à vis d'un changement de l'unité de mesure.

Telle est, dans sa simplicité, l'idée fondamentale de WEYL.

Examinons maintenant de plus près la question de l'unité de mesure, d'un autre point de vue qui nous dévoile son caractère analytique le mettant en correspondance avec la tendance dont j'ai parlé à la fin du paragraphe précédent d'éliminer toute "action à distance" en recherches physiques.

Considérons l'espace à 4 dimensions. Pour y effectuer des mesures, nous devons décider des coordonnées et de l'unité de mesure. Puisque nous considérons un univers doué de la structure la plus générale il faut définir en chaque point une unité de mesure (arbitraire) à l'aide de laquelle on effectuera les mesures au voisinage immédiat du point considéré.

Il est essentiel d'observer que le fait de ne pas définir en chaque point une unité de mesure (arbitraire) présupposerait par exemple qu'on se donne une seule unité pour tout l'univers, ce qui signifie que l'on fait une restriction en ce qui concerne la structure de cet univers.

Soit, en A, un observateur qui s'est fixé, au point A son unité de mesure. Il l'a construite à partir d'une barre métallique et l'a utilisée pour mesurer l'élément

Supposons qu'il désire mesurer le ds 2 en un autre point B à une distance quelconque et qu'il souhaite employer la même unité de mesure. Le moyen le plus simple pour lui est de transporter de A en B sa barre de métal. En général, celle-ci va se déformer: en B elle aura une autre longueur que l'on pourra utiliser sans ambiguité comme unité de longueur. Mais il peut se faire qu'en transportant la barre de A en B en suivant deux chemins différents on obtienne deux valeurs finales en B différentes. Connaissant l'unité en A on ne peut plus savoir quelle est l'unité en B.

En général, donc, cela n'a pas de sens de parler d'une même unité de mesure en différents points de l'univers. Lorsque A et B sont à distance finie et que l'univers n'est soumis à aucune restriction, l'unité en A est absolument indifférente à l'unité en B.

En d'autres termes, dans l'ancienne conception, on pouvait comparer sans ambiguité deux longueurs situées à une distance quelconque dans l'espace. Cette faculté de comparaison à distance n'est pas, selon WEYL, conforme à l'esprit d'une géométrie infinitésimale qui a pour base les mêmes idées fondamentales que la physique des actions de contact. La géométrie correcte sera celle pour laquelle cette comparaison ne sera possible en toute rigueur qu'entre deux points infiniment voisins c'est-à-dire la géométrie pour laquelle le transport d'une longueur entre deux points à distance finie se fait de proche en proche à travers une série "d'actions" de contact.

Ainsi il nous faut supposer que l'on peut choisir en tout point une unité de mesure qui lui soit propre, comme on dit encore, que l'on peut "étalonner" l'espace. Si cette opération n'est pas possible dans l'espace que nous étudions, c'est que sa structure n'est pas la plus générale et qu'il est soumis nécessairement à certaines restrictions. La loi qui restreint cette généralité de la structure de l'univers est une loi géométrique qui a une signification physique.

★

★ ★

Examinons les conséquences des affirmations précédentes. En raison de l'étalonnage, une longueur l transportée d'un point à un autre supportera une certaine variation. On démontre que cette variation (pour un déplacement infinitésimal) s'exprime par $l\,d\varphi$, où

$$d\varphi = \varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2 + \varphi_3\, dx_3 + \varphi_4\, dx_4 = \Sigma\, \varphi_1\, dx_1$$

Il sera suffisant pour en suivre les effets de se donner les valeurs du vecteur de composantes φ_i dans tout l'univers.

Supposons un univers donné ayant une structure quelconque. Un observateur de cet univers peut se fixer en chaque point un système de coordonnées, une unité de mesure et effectuer des mesures. De ces mesures il pourra déterminer la structure de l'espace en déterminant d'une part les potentiels de gravitation gik de

$$ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

et d'autre part les potentiels φ_i $\quad d\varphi = \Sigma\, \varphi_i\, dx_i$

En d'autres termes, la structure de l'univers n'est pas complètement déterminée, comme le croyait RIEMANN par les seuls coefficients gik de la forme $ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$; Elle dépend aussi de $d\varphi = \Sigma\, \varphi_1\, dx_i$.

C'est dans le seul cas où on se donne les 2 formes ds2 et $d\varphi$ que l'on caractérise entièrement la structure de l'univers considéré lequel est dans ce cas plus compliquée que celle de l'univers einsteinien.

Une fois faite cette modifications essentielle nous suivrons un chemin exactement parallèle à celui ouvert par EINSTEIN.

En théorie de la relativité on définissait la structure de l'univers par le ds2 et on en examinait la géométrie en calculant en particulier sa courbure (riemannienne).

Nous commencerons ce calcul en définissant l'univers par son ds2 et son $d\varphi$ et nous étudierons la nouvelle géométrie de manière similaire en calculant cette fois aussi la courbure métrique (Streckenkruemung)

$$f_{ik} = \frac{d\varphi_l}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i}$$, élément invariant

qui, en s'annulant montre que l'univers correspondant a bien la structure requise par la théorie générale de la relativité.

Tout à l'heure, en théorie d'EINSTEIN, nous attribuions une signification physique à la courbure de l'espace. Elle donnait naissance au champ de gravitation dont les composantes pouvaient se déduire des gik. Les éléments gik avaient une signification physique.

De manière tout à fait analogue, on attribuera aux potentiels i (i - 1, 2,3,4) une signification physique. Ils donneront naissance à un champ au voisinage du point considéré dont les propriétés caractéristiques pourront s'exprimer sous forme invariante à l'aide de la courbure métrique

$$f_{ik} = \frac{d\varphi_l}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i}$$

Et, de même que l'annulation de la courbure en théorie d'EINSTEIN caractérisait un espace dépourvu de gravitation, l'annulation de la courbure métrique caractérisera un espace duquel auront disparu les phénomènes auxquels donnent naissance les et dans lequel il ne reste plus alors que la gravitation.

De quelle nature seront ces phénomènes? En tout cas, des phénomènes que la théorie d'EINSTEIN n'avait pas considérés jusqu'ici. Une hypothèse qui s'impose immédiatement est que ces phénomènes soient de nature électromagnétique.

D'abord, ils ne figuraient pas jusqu'ici dans le schéma général de la théorie d'EINSTEIN. Ensuite, la détermination d'un champ électromagnétique exige justement 4 quantités (3 pour le potentiel vecteur; 1 pour le potentiel scalaire) que l'on peut identifier avec les 3 potentiels. Dès lors, la formule précédente de la courbure fik, pourra être identifiée avec le champ électromagnétique et ceci d'autant plus que nous savons que d'une part - physiquement parlant - pour que la théorie d'EINSTEIN soit valable il faut qu'il n'existe pas de champ électromagnétique dans l'univers et d'autre part, du point de vue géométrique, pour obtenir un univers de structure einsteinéenne il est nécessaire et suffisant d'annuler l'expression de la courbure métrique c'est-à-dire celle qui correspond au champ électromagnétique.

Nous avons alors le droit de tirer la conclusion que non seulement les phénomènes de gravitation mais aussi ceux de l'électromagnétisme peuvent être considérés comme des manifestations de la structure de l'univers dans lequel ils ont lieu.

Si l'on poursuit le développement de la théorie selon le modèle de la théorie de la relativité on trouve, comme analogues des équations d'EINSTEIN, les équations bien connues de MAXWELL et même, comme les identités qui nous fournissaient les lois de conservation de l'énergie, nous trouvons comme une pure conséquence analytique la loi de conservation de l'électricité.

Le fait qu'une conclusion déduite mathématiquement a une confirmation physique basée sur les confirmations expérimentales est encore un argument de plus en faveur de l'hypothèse énoncée plus haut.

WEYL a développé mathématiquement cette théorie cherchant à condenser le plus possible de résultats en un principe analogue à celui de HAMILTON.

Une telle préoccupation apparaît d'autant plus importante que l'élément qui semble avoir une signification absolue dans cette théorie n'est plus la courbure (analogue à la courbure riemanienne) mais ce que l'on appelle "l'action" laquelle est un nombre, donc indépendant de tout système de référence. Cette considération fait ressortir en relief d'une part le principe fondamental de moindre action et permet d'autre part certaines spéculations, autrement quelque peu risquées, concernant ce nombre en liaison avec la théorie de la structure discontinue de l'univers et la théorie des quanta.

Enfin, il était naturel que, une fois établie sur de nouvelles bases la théorie du champ électromagnétique, s'ensuive la question de son application aux mouvements de l'électron et de là celle de chercher à traiter le problème des propriétés des électrons dans un atome, c'est-à-dire le problème de la matière. Une des recherches de WEYL a été dirigée dans cette direction. Il semble cependant que le résultat consiste jusqu'à présent en la formation de la conviction selon laquelle le problème de la matière est impossible à résoudre avec la seule aide de théories dans lesquelles interviennent exclusivement des champs quelle que soit la nature de ceux-ci.

En tout cas, les résultats que j'ai rappelés au début semblent aujourd'hui bien établis. La théorie de WEYL complète l'admirable théorie générale de la relativité lui conférant le caractère que j'ai signalé au début, celui de la théorie de synthèse.

*

* *

Voici donc esquissées en termes généraux les idées fondamentales et les principaux perfectionnements ultérieurs de la théorie générale de la relativité.

Son développement harmonieux, ses nouvelles audaces, l'esthétique de sa construction logique ont provoqué, dès son apparition dans le monde scientifique, un enthousiasme sans pareil chez les uns, scepticisme et incroyance chez d'autres.

Néanmoins, lorsque certaines des prévisions d'EINSTEIN furent confirmées par des observations, l'enthousiasme a dépassé des limites qui n'avaient pas été atteintes depuis longtemps.

Par le même mécanisme selon lequel un pouvoir capricieux et absurde fait d'un homme aujourd'hui obscur, une célébrité demain, la théorie de la relativité est sortie du monde restreint des spécialistes et est devenue pour quelque temps objet de préoccupation pour l'ensemble de l'opinion publique. Elle a été alors étudiée, exposée, éclaircie, expliquée "pour la compréhension de tous" par toutes sortes d'auteurs, pour un public, digne certaines fois d'admiration pour sa persévérance. L'enthousiasme a crù énormément avec raison et sans raison. Parallèlement, il s'est développé avec raison et sans raison une critique de la théorie, c'est-à-dire tout autant une critique scientifique objective que ce type de critique personnelle plus rare dans les discussions scientifiques qui, en discréditant l'oeuvre, vise à réduire le mérite, et à détruire la renommée de l'auteur.

L'étude complète des phénomènes provoqués par l'apparition des écrits de EINSTEIN présentera à coup sûr aux chercheurs futurs un aspect extraordinairement intéressant.

Mais laissant de côté cet aspect de la question examinons aussi quelques-unes des principales critiques "scientifiques" portées à la théorie afin que le compte rendu que j'ai donné ici soit plus complet.

Rien n'est plus utile pour préciser une théorie nouvelle, afin de délimiter le domaine à l'intérieur duquel elle est valable que ces critiques qui forment en quelque sorte le fond sur lequel ressortent mieux en relief tous ses détails caractéristiques.

Bien souvent, la recherche des critique contemporaines lors de l'apparition d'une théorie nouvelle est même très utile pour les découvertes ultérieures. En effet, une telle découverte corrige en général un défaut de la théorie et ces défauts apparaissent beaucoup clairement au début lorsque le contraste entre l'ancienne manière de voir et la nouvelle imposée par la théorie est plus grand que plus tard lorsqu'elle a été acceptée complètement.

Ainsi, par exemple, la loi de NEWTON a été acceptée et utilisée si longtemps sans que personne ne se préoccupe de son défaut fondamental, celui de postuler des actions à distance. Dans les écrits contemporains et qui ont suivi immédiatement l'apparition de cette loi, cependant, ce défaut est très bien mis en évidence et la théorie considérée, à cause de cela, comme inacceptable.

Les critiques adressées à la théorie de la relativité peuvent être réparties en plusieurs catégories distinctes.

Dans une première catégorie, on pourrait classer les savants qui ne peuvent pas ou qui sont dans une impossibilité organique - pourrait-on dire - d'accepter les idées fondamentales de la théorie de la relativité. Sans aucune motivation rigoureuse, ils refusent d'en accepter les postulats.

Ainsi, par exemple, pour eux l'affirmation que le temps et la simultanéité sont absolus présente un caractère d'évidence tellement ancré qu'elle ne peut même plus être mise en discussion. En conséquence, la théorie de la relativité qui justement met en discussion ces points s'engage sur une voie fausse.

Mais, par malheur cette théorie de la relativité bien que mal engagée est cependant parvenue à des résultats nouveaux et à des interprétations intéressantes que ces mêmes savants cités admettent. De là leur assiduité à retrouver les résultats en question sans pour autant utiliser la théorie d'EINSTEIN et sans introduire aucun postulat nouveau. Ainsi sont apparues une série de tentatives par ailleurs non couronnées de succès, de trouver, à tout prix, des contradictions de la théorie de la relativité et d'obtenir cependant ses résultats en utilisant les seuls moyens qu'offre la science classique. Le plus représentatif de ces savants serait le suisse E. GUILLAUME. La réunion du Collège de France de mars 1922 où l'on discutait les objections portées à la théorie de la relativité a consacré définitivement l'insuccès de ses tentatives.

En définitive, cet insuccès provient directement de l'incapacité relative des auteurs de choisir des hypothèses et de construire une nouvelle théorie sans aucune contradiction logique. La deuxième catégorie de critiques se distingue des précédentes précisément par une plus grande adresse sous ce rapport.

Avec la même attitude en face des affirmations de la théorie de la relativité, tout comme ceux cités plus haut, ils s'efforcent de retrouver ses résultats selon une autre voie.

Le plus notoire de ces critiques semble être le savant Lenard de HEIDELBERG qui a construit une théorie très logique mais qui pèche - d'après l'avis des relativistes - par l'adoption de certaines hypothèses initiales étrangères.

Précédemment, on a vu que, si l'éther existe il doit être au repos absolu; l'expérience nous enseigne cependant que cela n'est pas conforme à la réalité. Lenard fait l'hypothèse curieuse que l'éther existe et qu'il est à la fois au repos et entraîné par un corps en mouvement justement de telle façon que l'on puissse expliquer les résultats obtenus par la théorie de la relativité. En tout cas, le point de départ peut être faux mais la théorie est assez sérieuse.

Dans la même catégorie on peut mettre SAGNAC de Paris, auteur de certaines tentatives théoriques et de la première tentative de contredire expérimentalement la théorie.

En fait, son expérience s'explique fort bien à l'aide de la théorie d'EINSTEIN. L'erreur provenait du fait que l'auteur appliquait les raisonnements de la relativité restreinte à un cas où interviennent des mouvement accélérés.

Les cas que nous avons indiqués plus haut ne sont pas à proprement parler des critiques et encore moins des critiques scientifiques. Au stade actuel, on ne peut porter aucune objection sérieuse à la construction de la théorie de la relativité, comme l'a montré la réunion du Collège de France convoquée justement en vue de discussions contradictoires avec son auteur.

Ce que l'on peut attaquer, ce sont les hypothèses et les postulats qui sont à sa base et c'est justement cela que font les auteurs dont j'ai parlé plus haut. Mais en général, les raisons d'adopter une hypothèse ou de rejeter un postulat sont obtenues seulement à la suite d'une série complète d'expériences; d'essais et d'observations.

On a vu combien de temps il a fallu aux savants pour rassembler des motifs suffisants qui ont induit EINSTEIN à abandonner l'ancienne conception du temps et de l'espace absolus. On peut donc présumer - et la chose se confirme avec surabondance - que les motifs invoqués par les auteurs cités n'ont pas grande valeur.

Ce qui les fait adopter cette attitude n'est pas dû à ces motifs mais bien plutôt à une conviction intuitive, injustifiable, le résultat d'un processus psychologique qui a sa racine dans une incapacité fondamentale de considérer les conceptions nouvelles avec la totalité de leur manière de voir les choses. Ces motifs ne sont cependant pas assez puissants naturellement pour compter dans une critique scientifique objective.

Les choses se présentent tout différemment avec la troisième catégorie d'auteurs qui attaquent le problème avec un but plus scientifique. Ils cherchent à prouver que les résultats d'EINSTEIN - et en particulier les conclusions sur lesquelles on peut se fonder pour instituer des expériences vérificatrices - comprennent trop d'arbitraire, c'est-à-dire qu'il se pourrait qu'elles ne soient pas les seules auxquelles EINSTEIN aurait pu aboutir en s'engageant sur la voie qu'il a suivie.

En d'autres termes, la théorie de la relativité s'engage sur un chemin où, à un moment donné l'on débouche sur un carrefour d'où partent plusieurs voies, EINSTEIN s'est avancé sur l'une de ces voies - celle qui se présente d'emblée et qui était la plus aisée à suivre. Avançant, il a abouti à certains résultats. Mais il aurait tout aussi bien pu suivre une autre voie et aurait obtenu alors des résultats diamétralement opposés. Laquelle de ces deux sortes de résultats est la plus proche de la réalité?

Le plus représentatif de ces critiques, PAINLEVE, dans une note célèbre à l'époque où elle fut présentée à l'Académie des Sciences de Paris (*) a affirmé entre autres que l'expression de EINSTEIN pour le ds2 n'est pas la seule que l'on puisse construire en vue de satisfaire aux conditions imposées. Du point de vue mathématique, il existe une infinité de ds2 différents et qui ont tout autant de droits à être considérés comme représentant la structure de l'univers où nous vivons.

Donc, les conclusions que déduit EINSTEIN de la forme particulière de ses formules n'ont plus aucune valeur du fait que cette forme particulière est arbitraire jusqu'à un certain point et que, par ailleurs, les conclusions varient avec elle.

Dans le même ordre d'idées, on pourrait rappeler les observations de Monsieur le Professeur Tr. LALESCU présentées dans une communication à la Société des Sciences de Bucarest. D'après HERTZ qui s'efforce d'éliminer le concept de force, ce que nous englobons sous ce nom est la manifestation de certaines liaisons du corps considéré avec une série de masses visibles et de masses cachées, douées de mouvements visibles et cachés.

(*) C.R. Acad. Sci. Paris 24 octobre 1922

En définitive, si on suppose pour simplifier qu'il n'existe ni masses, ni mouvements visibles, HERTZ remplace la force par l'action des masses et des mouvements cachés.

Mais, sans aller aussi loin, EINSTEIN, dans sa théorie, fait quelque chose de semblable. Rappelons-nous, en effet, le principe de l'équivalence qui stipule que l'effet de la force de gravitation est identique à celui d'un mouvement accéléré imprimé au système. D'après M. LALESCU, en admettant les idées de HERTZ, le principe d'équivalence apparaît seulement comme une première approximation comme l'hypothèse la plus simple qui, peut être, ne correspond pas à la réalité; EINSTEIN rend équivalent, en effet, une force et un mouvement caché mais il ne tient pas compte de l'action des masses cachées. Le chemin suivi par EINSTEIN est le plus simple mais il se pourrait qu'il ne soit pas le plus conforme à la nature des choses.

Dans ce même ordre général d'idées, on pourrait se souvenir ici de la tentative de M.O. ONICESCU, de la Faculté des Sciences de Bucarest, de démontrer qu'un certain tenseur - employé par EINSTEIN parce qu'il est le seul à posséder certaines propriétés caractéristiques - n'est pas en fait le seul à jouir de ces propriétés.

Il est évident que l'affirmation particulière de PAINLEVE peut être contestée comme elle l'a été en effet. EINSTEIN, lui-même, à Paris, a répondu à une série d'objections que l'on portait contre sa théorie. Il ne s'agit pas ici de possibilitiés mathématiques mais d'un problème physique qui a une solution bien déterminée; pour EINSTEIN il y a une seule formule de gravitation et pas plus, Cependant, en ce qui concerne les idées de M. LALESCU, on pourrait élever des objections, en premier lieu contre la manière de voir même de HERTZ ou bien on pourrait appeler au secours du principe d'équivalence des expériences extrêmement précises de EOTVOS.

Mais ce point n'a pas une importance fondamentale. Ce qui reste en tout cas, qu'elles soient justes ou non, c'est la signification de l'attitude qu'a adoptée cette catégorie de critiques vis à vis de la théorie d'EINSTEIN. A savoir l'opinion que les domaines contigus à cette théorie ne sont pas encore examinés, que les fondations sur lesquelles s'appuie la théorie ne sont pas encore bien étudiées et qu'il est encore téméraire de porter un jugement définitif sur elles. La conclusion logique est que tous les domaines nouveaux découverts par le génie d'EINSTEIN et éclairés de près ou de loin par la théorie de la relativité doivent être examinés, complètement afin que, en éclaircissant ainsi tous les liens de la théorie avec les diverses disciplines de la science nous puissions la situer mieux parmi celles-ci, à la place la plus adéquate.

Il y a beaucoup de vrai dans l'observation - due il me semble à M.E. BOREL - qu'un jugement objectif, juste, et sûr concernant cette théorie ne pourra être donné avant le moment où la science sera plus avancée qu'aujourd'hui - peut être d'ici à 10 ans -

*

* *

Voici donc comment se présente actuellement la construction aux proportions formidables et admirables de beauté de la théorie générale de la relativité. Nous avons cherché à éclaircir les unes après les autres quelques-unes des idées fondamentales qu'elle contient.

Nous avons cherché à mettre en évidence autant que possible l'instrument puissant d'analyse que nous offraient ces idées nouvelles. Nous avons vu combien de problèmes elles posent et combien elles en résolvent. Nous sommes loin de les avoir tous énumérés et ne pouvons même pas savoir combien d'autres problèmes ou en quels autres domaines elle s'appliquera dans l'avenir.

Mais dès maintenant, pour l'historiographe scientifique comme pour le savant qui se donne la peine de réfléchir sur la marche en avant de la science l'apparition des théories d'EINSTEIN propose une série de problèmes très intéressants.

Ainsi, par exemple, le problème du rôle prépondérant que tient la faculté d'intuition à un certain stade des recherches scientifiques non seulement en ce qui concerne la découverte de nouveaux rapports entre phénomènes mais aussi comme facteur déterminant de l'attitude qu'adopte le chercheur vis à vis de ces phénomènes.

Regardons par exemple la théorie d'EINSTEIN. Elle est en définitive une description du mécanisme selon lequel se passent certains phénomènes naturels. On se rend bien compte alors que, dans ce cas il y a un sens à parler d'un sentiment "objectif" que l'homme de sciences peut avoir sur ce mécanisme.

Chacun des scientifiques qui étudient la théorie de la relativité a un tel sentiment; a une manière de voir qui diffère de l'un à l'autre.

Si nous examinons cependant les choses de plus près, on se rend compte que cette manière de voir semble ne pas être déterminée par de seuls éléments objectifs. Dans la formation de cette opinion il y a un élément de nature purement subjective qui joue un rôle déterminant. C'est ce que nous avons appelé plus haut, assez improprement, l'intuition, laquelle, en général n'a rien à voir avec les phénomènes considérés mais dépend de l'éducation scientifique, de l'expérience personnelle, et du talent ou du génie du chercheur.

Ainsi, certains d'entre eux accepteront la théorie de la relativité parce que la manière de voir d'EINSTEIN s'adapte bien au cadre de leur pensée. Enthousiasmés de l'harmonie splendide de la théorie ils y verront:

"quelques-uns des accords de cette harmonie des sphères qu'ont recherché autrefois PYTHAGORE et KEPLER".(*)

Au contraire, l'intuition d'autres leur dira que EINSTEIN est parti sur une voie fausse, ils n'accepteront pas la théorie bien qu'ils ne puissent invoquer à l'appui da leur attitude le moindre motif d'ordre logique ou expérimental.

Leur conviction est de nature intuitive.

L'exemple le plus caractéristique, en ce sens, est celui de M. PAINLEVE lui-même. Maître de la partie mathématique de la théorie - la seule qui rende difficile la critique pour les non-mathématiciens - il l'a examinée à fond cherchant à y trouver une contradiction, un point faible dans cet édifice logique et n'y a eu aucun succès.

La théorie de la relativité se présente, selon son expression même comme un bloc de granit monolithe, sans la moindre craquelure, inattaquable. Mais cependant M. PAINLEVE est dans l'impossibilité d'admettre cette théorie dans son ensemble. Suivant la comparaison donnée plus haut certains ont dit que, pour lui, la théorie de la relativité est en effet un cube de granit puissant inattaquable mais qui, au lieu de reposer fermement sur une de ses bases, se tient seulement sur l'un de ses sommets.

Il est sans aucun doute que cet état de choses qui apparaît plus significatif à chaque découverte a pour cause le fait que nous ne possédons pas encore suffisamment de résultats expérimentaux, que nous ne connaissons pas bien certains faits et que nous n'avons pas encore étudié suffisamment les liens entre le terrain connu de la science classique et les nouveaux domaines découverts récemment. Tout le temps que cet état de choses persistera, l'intuition conservera son rôle dans la détermination de notre manière de voir, parce que un jugement objectif a besoin de s'appuyer sur une

(*) H. WEYL Raum, Zeit, Materie I Springer (in fine) multiplicité de résultats qu'il nous faut connaître, et l'intuition est justement la faculté qui nous permet de suppléer à leur absence par la pensée.

Il est absolument nécessaire donc que se réalise le désideratum dont nous parlions plus haut, celui de l'étude la plus approfondie de la théorie de la relativité en liaison avec les autres disciplines de la science. De par sa nature cette étude demande du temps. Chaque jour apparaissent des résultats nouveaux, portant sur des détails, ou parfois d'importance plus grande et qui tous contribuent à clarifier le problème.

Du point de vue expérimental, les recherches se poursuivent concernant les vibrations des atomes dans les corps célestes en vue de vérifier une prédiction d'EINSTEIN. De temps à autre, comme cette année, se présente une occasion d'observations astronomiques utiles pour contrôler les résultats annoncés.

Au point de vue théorique, les recherches sont plus nombreuses, embrassant tous les chapitres de la théorie de la relativité. Leurs auteurs sont en majorité des mathématiciens qui étudient en elles-mêmes les théories utilisées par EINSTEIN les approfondissant et les généralisant. On cherche même à généraliser par exemple l'espace : on parle maintenant, non seulement d'espace courbe mais aussi d'espace avec torsion. On met en évidence les simplification auxquelles ont recours EINSTEIN ou WEYL et le degré de généralité de leurs équations, etc. etc. En un mot sur le chemin ouvert par EINSTEIN le premier suit toute une équipe de chercheurs qui nettoient le terrain, le nivellent, en étudient lentement le voisinage et remplacent lentement le chemin épineux et étroit par une chaussée large, belle et commode.

La théorie d'EINSTEIN se perfectionne et se complète chaque jour et en quelque mesure l'intérêt que suscite cette théorie est dû au fait qu'en certains de ses aspects elle est "la science qui est en train de se faire" en ce moment, et qui ne s'est pas encore cristallisée en formules plus ou moins définitives.

A chaque détour du chemin apparaissent des spectacles nouveaux, des résultats intéressants, Ce que nous ne connaissons pas assez aujourd'hui se précisera demain grâce à une nouvelle découverte ou se transformera du tout au tout.

Cette activité de découverte, de théories partielles, d'hypothèses antagonistes qui apparaissent quotidiennement pour confirmer ou contredire jusqu'à ce que, de leur lutte apparaisse la vérité recherchée; cette application à déchirer les ténèbres qui enveloppent certains secrets de la nature et la satisfaction de voir, au début à peine crépitant, un flamboiement qui grandit sans cesse jusqu'à illuminer tout alentour; l'effort héroïque que dépensent sans interruption les talents et les génies, tout cela forme un spectacle d'une splendeur antique légendaire, à la poursuite de la vérité, du progès même de l'humanité.

J'ai cherché dans ce qui précède à vous présenter la théorie de la relativité comme celle qui a offert, et qui offre encore, plus que toute autre ce spectacle rare. Bien que je ne l'ai pu faire que gauchement et de façon imparfaite j'ai eu cependant l'audace de signaler à votre attention ces préoccupations convaincu qu'il n'existe rien de plus beau, de plus plaisant, de plus digne d'attention que de suivre pas à pas cette lutte sans répit, de ces efforts tenaces pour arracher, un à un, avec baucoup de peine ses secrets à la nature.

Et maintenant arrivé, avec votre bienveillance, au terme de cette conférence trop longue, dans laquelle j'ai mentionné si souvent le nom d'EINSTEIN, permettez-moi de le citer une fois de plus, que je m'attribue ses paroles et, en guise de remerciement pour l'attention que vous m'avez accordée ce soir que je les interprète en vous les dédiant.

Je veux spécialement rappeler une préface par laquelle EINSTEIN présente au public un ouvrage d'un auteur allemand consacré à ses théories.

Porteuse d'une parcelle de ce sortilège que l'on rencontre seulement dans quelques oeuvres de Eva MEDIA, la fin de cette préface, le passage auquel je veux faire allusion, exprime à peu près ceci: "Puisse ce petit livre procurer au lecteur beaucoup d'allégresse".

INTERFÉRENCES DES QUANTA DE LUMIÈRE

par M. AL. PROCA.
Institut du Radium, Paris.

Sommaire. — L'auteur observe que, pour obtenir les conditions de quanta les plus générales, on n'utilise que les coordonnées d'espace et qu'on néglige systématiquement et sans aucune raison, la coordonnée temps. Il montre que si l'on fait jouer le même rôle à toutes les coordonnées on obtient :

a) *Pour un atome dans un état stationnaire*, les conditions de quanta classiques, définissant les niveaux d'énergie.

b) *Pour un atome de Bohr qui émet et absorbe, en régime permanent*, ces mêmes conditions, plus une autre qui exprime que la lumière, émise et absorbée, est cohérente, c'est-à-dire qu'elle est apte à provoquer des interférences.

La lumière émise peut donc être considérée comme constituée par des photons, sans qu'elle cesse pour cela d'être cohérente; ceci élimine la principale objection contre la théorie des quanta de lumière d'Einstein.

Le mécanisme même d'un atome émetteur implique la cohérence; *la condition de cohérence est une condition de quanta*. Par conséquent, on doit attribuer à la capacité d'interférence d'un train de photons le même degré de réalité qu'à l'existence des états stationnaires de l'atome.

Les règles de quanta et la théorie des photons d'Einstein semblent pouvoir gouverner désormais un domaine où il ne leur avait pas été possible de pénétrer jusqu'à présent.

1. La crise de la théorie de la lumière. — Les faits expérimentaux sur lesquels on peut baser une théorie de la lumière se divisent aujourd'hui en deux classes bien distinctes : d'une part, les phénomènes d'interférences et ceux qui s'y rattachent, et de l'autre, les phénomènes qui ont comme prototypes l'effet photoélectrique et l'effet Compton. Corrélativement, il existe deux théories antagonistes, irréductibles l'une à l'autre, qui ne peuvent expliquer chacune que les phénomènes d'une seule catégorie. Cet antagonisme est un des aspects du conflit, qui prend chaque jour plus d'ampleur en Physique, entre les concepts du continu et du discontinu, appliqués aux phénomènes naturels.

Les phénomènes de la première catégorie sont régis par des lois qui dérivent de la théorie classique de Maxwell. Suivant l'hypothèse de Fresnel, celle-ci envisage la lumière comme un phénomène vibratoire, dont l'élément essentiel est une onde continue. Au moyen de cette hypothèse, la phase est définie sans ambiguïté et la lumière est cohérente par définition.

La découverte de phénomènes ne rentrant pas dans le cadre de cette théorie a amené Einstein à proposer, en 1905, sa théorie des quanta de lumière. Suivant son hypothèse, la lumière se compose d' « atomes de lumière », de photons $h\nu$, voyageant isolés dans l'espace, émis au hasard, et, par conséquent, ne présentant pas la propriété de cohérence. De nouvelles découvertes expérimentales nous obligent aujourd'hui à admettre que la notion de photon n'est pas une pure fiction, qu'elle n'est pas seulement une hypothèse commode, mais qu'elle correspond effectivement à une réalité physique.

En même temps que l'expérimentation, la théorie d'Einstein s'est développée et s'est enrichie d'apports nouveaux; le progrès a été tel qu'aujourd'hui elle est devenue indispensable pour l'étude de tout un chapitre de la Physique moderne.

Toutefois, la lacune initiale subsiste : malgré tous les efforts faits pour fondre ensemble les ondes et les photons, cette théorie ne peut pas expliquer les phénomènes d'interférence. Il n'a pas encore été possible de trouver la raison pour laquelle les trains de photons sont cohérents, c'est-à-dire sont émis suivant un rythme déterminé.

Or, il nous semble que cette lacune n'est qu'apparente. L'incapacité de la théorie d'expliquer certains faits où la cohérence joue un rôle principal, provient simplement du fait qu'on a négligé, jusqu'à présent, une des données du problème. La solution que nous allons en donner n'introduit pour ainsi dire pas d'hypothèse nouvelle. Elle ne fait qu'utiliser dans ce domaine l'idée féconde de Minkowski sur l'identité du rôle que jouent les coordonnées d'espace et de temps. En analysant les faits à l'aide de cette conception, le problème de la théorie de la lumière se résout facilement, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

2. **Cohérence et quanta**. — Soit donc un atome émettant des photons en régime permanent. Pour qu'un phénomène d'interférence puisse avoir lieu, il faut, avant tout, *que l'émission soit cohérente*. Si en un point de l'espace, deux photons, issus du même atome et ayant parcouru des chemins différents, présentent une certaine différence de marche, il faut que celle-ci subsiste pour les photons qui suivent. Ceci exige que, sur un même rayon, les photons se suivent à des distances égales à la longueur d'onde λ, ou — ce qui revient au même — que deux émissions successives soient séparées par un intervalle de temps égal à

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\nu}.$$

Comme on peut le voir facilement, cette condition est trop restrictive. Il suffit, en effet, que es photons soient émis à des intervalles variables τ_i, mais *toujours égaux à un multiple entier de* T, $\tau_i = n \,.\, T$; statistiquement l'aspect des franges d'interférence sera le même.

Ceci indiqué, le principe de la solution proposée est le suivant. Observons qu'exprimer la cohérence de la lumière revient à dire que τ_i ne peut pas avoir n'importe quelle valeur, mais qu'il doit être un multiple entier de $T = \frac{1}{\nu}$. Cette limitation fait penser, par analogie, à celle que le premier postulat de Bohr impose à l'atome : celui-ci ne peut pas se trouver dans n'importe quel état mécaniquement possible, mais seulement dans un état stationnaire, bien défini par les conditions de quanta.

Nous croyons que la propriété qui impose à la lumière la cohérence est de même nature que celle qui restreint le nombre des états possibles de l'atome. *La condition de cohérence est une condition de quanta.*

Les conditions de quanta, connues, sont relatives à un atome qui ne rayonne pas et ne font intervenir que les coordonnées q et les moments p. Nous pensons que si l'on quantifie complètement le système formé par un atome *émetteur*, on trouvera, outre les conditions connues, une de plus, qui sera justement celle de la cohérence; elle contiendra le temps et sera le pendant des conditions de quanta classiques, qui ne contiennent que des coordonnées et des moments.

Nous allons donc écrire les conditions de quanta les plus générales et nous allons les appliquer à un atome qui rayonne en tombant d'un niveau E à un niveau E_1.

3. **Conditions complètes de quantification**. — L'énoncé le plus général des conditions de quanta, qui montre en même temps leur signification profonde, a été donné par Léon Brillouin (1); c'est son analyse que nous suivrons ici.

L'équation générale de Schrödinger d'un système quelconque étant

$$\text{div. grad.}\ \psi - \frac{4\pi i}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{8\pi^2}{h^2} F\psi = 0, \qquad (1)$$

(1) L. Brillouin. *J. Phys.*, t. 7 (1926), 353.

L. Brillouin pose

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}S}$$

Dans le cas d'un système conservatif, on a

$$S = Et + A\ (q),$$

E étant la constante de l'énergie, et $A\ (q)$, une fonction qui ne dépend que des coordonnées $q_1 \ldots q_n$, et a des déterminations multiples : en un point $q_i \ldots q_n$, elle est de la forme

$$A = A_0 + \sum m_i I_i,$$

m_i étant des entiers, et I_i, des constantes appelées périodes.

Suivant L. Brillouin, *les conditions de quanta s'obtiennent en égalant à nh les périodes de la fonction d'action $A\,(q)$*

$$I_i = n_i . h.$$

Cet énoncé ne vise que les systèmes à énergie constante. Mais l'équation (1) est valable aussi pour les systèmes à énergie variable. Pour ces systèmes, il est naturel de généraliser, en gardant l'énoncé du théorème, mais en y introduisant la fonction d'action complète S, à la place de $A\,(q)$.

Nous prendrons donc désormais, comme *conditions de quanta généralisées, les relations qui s'obtiennent en égalant à des multiples entiers de h les périodes de la fonction de Brillouin S, définie par l'équation en ψ de Schrödinger, quand on y fait*

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}S}$$

4. Périodes de la fonction S. — Avec ces conditions complètes :

a) *Si le système possède une énergie constante E*, on peut poser, comme L. Brillouin :

$$S = Et + A\ (q).$$

Les périodes de S seront alors identiques aux périodes de $A(q)$, puisque le terme $E.t$ n'en fournit pas de nouvelles. *Le nouvel énoncé redonne donc, dans ce cas, les valeurs classiques.*

b) *Si l'énergie du système est variable*, on ne peut rien affirmer *a priori*, ni même que le système est quantifié. Tout dépend des résultats d'une étude — à faire — sur les valeurs caractéristiques de l'équation (1). Mais *si nous admettons le deuxième postulat de Bohr, toute incertitude disparaît.*

Supposons, en effet, que le système demeure un temps τ_i dans un état stationnaire d'énergie E_2, et qu'il passe brusquement dans un autre état E_1, où il demeure τ_{i+1} et ainsi de suite. Tant que le système reste dans l'état E_2, il ne cesse d'être conservatif, nous sommes dans le cas précédent et nous pouvons écrire

$$S = E_2 t + A_2\ (q).$$

Nous sommes sûrs que $A_2(q)$ ne dépend pas du temps t et que ses périodes sont telles qu'*elles fournissent les mêmes conditions de quantification que celles de la fonction $A\,(q)$ définie précédemment.* Pour chaque intervalle τ_k de la vie de l'atome, nous pouvons écrire une relation de la forme

$$S = E_k t + A_k\ (q),$$

seul k étant différent.

Les périodes de $A(q)$ définissent les états stationnaires. Si donc S possède une autre période distincte de celles-là, elle ne pourra provenir que du terme $E_k . t$. C'est ce terme que nous devons examiner en détail.

5. **Cohérence. Cas particulier.** — Démontrons que *si l'on considère un atome de Bohr dont l'énergie varie périodiquement par quanta* $h\nu$, *le temps* τ *qui s'écoule entre une émission et une absorption est un multiple entier de* $1/\nu$.

La valeur de S pour un instant et une configuration donnés, est de la forme

$$S = S_1 + \sum m_i I_i. \qquad (m_i \text{ entiers})$$

On trouvera toutes les périodes en prenant les coefficients I_i des nombres entiers m_i. Pour trouver la valeur de S, nous partirons avec une détermination quelconque, d'un instant initial $t = t_0$ et d'une configuration donnée $q_1^0 \dots q_n^0$ et nous ferons évoluer le système jusqu'en $q_1 \dots q_n$, t.

Si nous faisons cette opération *en laissant les* q *constants*, les périodes classiques — celles de $A(q)$ — n'apparaîtront pas et il ne restera dans l'expression de S que la période qui nous intéresse, celle qui correspond à la variable temps. A cause de la séparation des variables q et t dans l'expression de S,

$$S = E_k . t + A_k(q)$$

la période calculée ainsi est justement la période cherchée, celle qui apparaîtrait si les b variaient.

Ceci étant posé, cherchons le diagramme de S en fonction de t, à q constants

$$S = E_k t + \text{const.}$$

Une observation est essentielle à ce sujet :

Dans les circonstances habituelles, si le temps varie d'une manière continue, *la fonction* S *reste continue, même si l'énergie varie brusquement de* E_1 *à* E_2.

En effet, le terme en t n'est pas $E_k t$, mais, en fait,

$$\int_{t_0}^{t} E_k \, dt$$

d'après l'équation de Jacobi. Ce terme reste continu en t, même avec E discontinu. S n'est d'ailleurs définie qu'à une constante additive près; l'adjonction de cette constante dans $\psi = e^{\frac{2\pi i}{k} S}$ ne change pas l'équation (1).

On peut encore considérer la fonction d'action classique S_0, première approximation de S. On a

$$S_0 = \int_{t_0}^{t} L \, dt,$$

L étant la fonction de Lagrange et l'intégrale étant prise sur une trajectoire, dans l'espace de configuration. *S est continue même si E varie brusquement*, pourvu qu'elle ne passe pas par l'infini, cas que nous excluons. Il est facile de former une fonction L' telle que

$$S = \int_{t_0}^{t} L' \, dt$$

et de répéter le même raisonnement point par point.

Avec ces observations, on trace aisément le diagramme de variation de S en fonction de t (fig. 1).

La pente de OA est E_2, celle de AB est E_1. Aux points A, B, ..., où E varie, S reste continue.

En un point M quelconque, la valeur de S sera

$$S = E_2 t + 2n.\tau (E_1 - E_2)$$

si M se trouve sur un segment parallèle à OA, c'est-à-dire si l'atome possède en ce moment l'énergie E_2; ou bien

$$S = E_1 t + (2n + 1) \tau (E_2 - E_1)$$

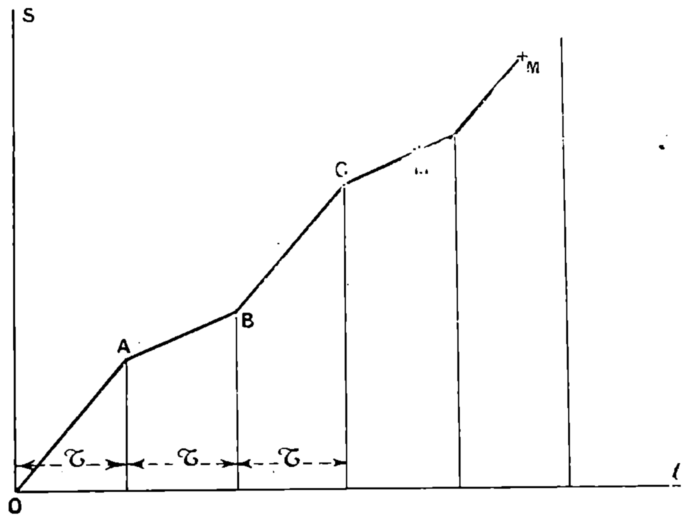


Fig. 1.

si M se trouve sur un segment parallèle à AB, c'est-à-dire si l'atome possède l'énergie E_1.

De toute façon, S est de la forme

$$\boxed{S = E_k t + m (E_2 - E_1) \tau} \qquad (m \text{ entier})$$

Pour une énergie et un temps donnés, S n'est pas fixée d'une manière univoque. Elle n'est déterminée qu'à une constante additive près, qui se présente sous la forme d'un produit de $\tau (E_2 - E_1)$ par un nombre entier. Par conséquent, l'expression $\tau (E_2 - E_1)$ est ce que nous avons appelé une période de S.

Une analyse plus approfondie montre que la nature de cette période est *identique* à celle des périodes de la fonction $A (q)$, c'est-à-dire ***aux expressions que nous posions égales à nh dans l'ancienne théorie des quanta.***

Cette nouvelle période nous fournira une nouvelle condition de quanta

$$\tau (E_2 - E_1) = nh$$

et avec

$$E_2 - E_1 = h\nu$$

(ν, fréquence émise),

$$h\nu\tau = n.h$$

il résulte

$$\boxed{\tau = \frac{n}{\nu} = n.T.}$$

Donc l'intervalle de temps qui s'écoule entre une émission et une absorption est un multiple entier de la période de la lumière émise. *A fortiori*, le temps qui s'écoule entre deux émissions le sera. Si donc la lumière est cohérente, la *distance entre deux quanta émis sera un multiple entier de la longueur d'onde.*

6. **Cohérence. Cas général.** — Soit un atome d'un corps incandescent, par exemple, émettant suivant les règles de Bohr. Supposons de plus que ce corps ait atteint un équilibre de régime. L'atome considéré recevra alors de l'énergie, par choc par exemple; il montera du niveau E_1 au niveau E_2 où il restera un temps τ_1, après quoi il retombera sur le niveau E_1 où il séjournera τ_2 secondes, et ainsi de suite. Si l'on représente la valeur de l'énergie en fonction du temps, le diagramme sera celui qu'indique la figure 2.

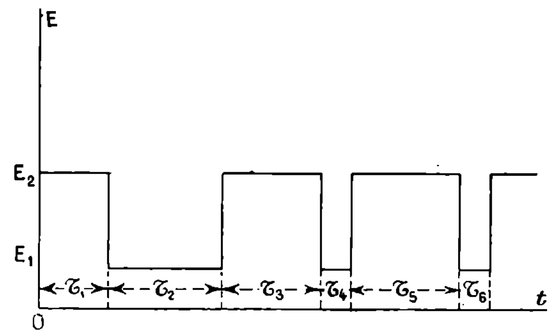


Fig. 2.

Les valeurs de τ_i, intervalle pendant lequel l'atome sera dans un des états E_1 ou E_2, ne suivront aucune loi; tout au plus pourrait-on établir une relation statistique, exprimant l'existence d'un régime permanent.

Une analyse exactement pareille à la précédente nous montre que l'expression de la fonction S est

$$S = E_1 t + (E_2 - E_1) \sum_i \tau_i \qquad i = 2, 4, 6, \ldots\ldots 2n,$$

ou bien

$$S = E_2 t - (E_2 - E_1) \sum_k \tau_k \qquad k = 1, 3, 5, \ldots\ldots (2n-1);$$

S n'est déterminée qu'à une constante additive près :

$$(E_2 - E_1) \sum_j \tau_j = h\nu \sum_j \tau_j = \sum_j h\nu . \tau_j .$$

Elle n'est plus à proprement parler « multipériodique », mais elle reste *indéterminée*, de la forme $S = S_1 + \Sigma h\nu\tau_j$. Or, *c'est là le fait essentiel qui permet la quantification.* Je dis que pour quantifier le phénomène, il suffit de poser

$$(E_2 - E_1)\,\tau_j = n \cdot h, \qquad (n \text{ entier})$$

Pour justifier cette affirmation nous nous servirons toujours de l'analyse de L. Brillouin.

Celle-ci repose, *comme toute la théorie moderne*, sur l'axiome que l'équation de Schrödinger doit avoir une solution ψ, finie, continue et à détermination simple. Or

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S}.$$

Si S est multipériodique

$$S = S_1 + \sum m_l I_l \qquad (m_l \text{ entiers})$$

ψ sera univoque si l'on pose $I_l = n_l h$ (n_l entiers), car l'indétermination de S sera compensée par la périodicité de l'exponentielle, en vertu de la relation (1)

$$\frac{2\pi i}{h} \sum m_l I_l = 2\pi i \sum m_l n_l.$$

Mais, si S est simplement indéterminée de la forme

$$S = S_1 + \sum k_j$$

ψ sera encore univoque, si l'on pose

$$k_j = n_j h. \qquad (n_j \text{ entiers})$$

car

$$\frac{2\pi i}{h} \sum k_j = 2\pi i \sum n_j.$$

Il résulte donc de cette analyse que nous devons poser

$$(E_2 - E_1)\,\tau_j = n_j h, \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

On peut remarquer qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de termes de la somme $(E_2 - E_1)\,\Sigma\tau_j$ qu'il faut égaler à nh. Car le nombre de termes étant arbitraire, on peut se limiter à un seul, et on tombe bien sur la condition précédente.

Cette condition donne, toujours avec $E_2 - E_1 = h\nu$

$$h\nu\tau_j = n_j . h$$

$$\boxed{\tau_j = \frac{n_j}{\nu} = n_j . T} \qquad (n_j \text{ entiers})$$

Donc entre une émission et une absorption consécutives (et *a fortiori* entre deux émissions) il s'écoule un temps, multiple entier de la période de la lumière émise ou absorbée. La distance entre deux quanta de lumière émis est donc un multiple entier de la longueur d'onde. *La lumière doit donc être cohérente.*

7. **Observations finales.** — Nous avons obtenu ce résultat en utilisant presque sans modification la théorie des quanta sous sa forme actuelle. Le seul apport nouveau a été une généralisation minime des conditions de quantification, en tenant compte d'une variable qu'on négligeait à tort jusqu'à présent, à savoir : le temps. En appliquant cette idée, on ne modifie pas la théorie, on la complète. Nous constatons qu'en ce domaine aussi, la conception de Minkowski sur le rôle de la variable temps se montre féconde en résultats.

On peut donc dire que l'explication de la cohérence était déjà contenue dans les postulats de Bohr et dans l'équation de Schrödinger. Mais ce n'est que pour avoir une plus grande généralité que nous avons utilisé dans ce qui précède l'équation de Schrödinger; le résultat obtenu est complètement indépendant de toute considération de mécanique ondulatoire. On peut arriver à rendre compte de la cohérence de la lumière en utilisant exclusivement les anciennes conditions de quanta, sous la forme de Schwarzschild-Sommerfeld (2). La théorie des quanta n'est donc nullement en contradiction avec les faits expérimentaux qui démontrent cette cohérence, avec les interférences par exemple. Tout au contraire, c'est elle qui exige l'existence de cette propriété de la lumière et qui, par conséquent, aurait pu faire prévoir ces expériences.

(1) Cf. L. Brillouin, *loc. cit.*

(2) Voir : *Sur la théorie des quanta de lumière*, collection des suggestions scientifiques, chez A. Blanchard, 3, rue de la Sorbonne à Paris.

Remarquons encore (cf. § 4), que les conclusions que nous avons tirées sont basées essentiellement sur le deuxième postulat de Bohr, qui seul nous a permis d'écrire

$$S = E_k t + A(q).$$

Tous les résultats de la théorie des quanta *et, en plus, la cohérence*, sont donc qualitativement compris dans les deux postulats de Bohr. On ne peut s'empêcher d'admirer l'intuition vraiment géniale qui a réussi à condenser en ces deux énoncés simples, les principes qui régissent un nombre immense, probablement la totalité, des phénomènes naturels.

Le théorème que nous avons démontré semble susceptible d'applications intéressantes. Il serait nécessaire de soumettre à une nouvelle étude — que nous ne tenterons pas ici — tous les problèmes où les photons interviennent et peut-être, en particulier, les statistiques du rayonnement. Ces applications ne se borneront certainement pas à des questions théoriques ; on peut s'attendre à ce que des résultats pratiques s'ensuivent. Ainsi, par exemple, il est à peu près certain, d'après les expériences de Bothe et Geiger, qu'il existe un couplage rigoureux entre le photon diffusé et l'électron de recul, dans le phénomène de Compton. Si donc la radiation diffusée est cohérente — ce qui est le cas —, on doit s'attendre à ce que l'émission corpusculaire qui l'accompagne le soit aussi. Pareillement, dans un atome en régime permanent, les absorptions se suivant à des intervalles nT, on doit s'attendre à ce que la même chose arrive si les photons incidents ionisent l'atome, c'est-à-dire s'ils provoquent l'effet photoélectrique. On est ainsi amené à penser que, vraisemblablement, *les rayonnements corpusculaires sont aussi cohérents*, et cela tant pour les photoélectrons que pour *le rayonnement* β *primaire des corps radioactifs* (à l'exception peut-être des rayons β nucléaires).

Nous avons montré dans ce qui précède, que l'émission des photons est cohérente. Pour que les franges d'interférence apparaissent, il faut encore préciser le mécanisme de l'action sur un écran de deux photons ayant une différence de marche donnée. Ceci nous conduit à analyser la structure intime d'un quantum de lumière. C'est ce que nous allons faire dans une autre publication.

Manuscrit reçu le 7 décembre 1927.

Paris. — Soc. Gén. d'Imp. et d'Éd., 17, rue Cassette.

PHYSIQUE GÉNÉRALE. — *Quelques réflexions sur les fondements de la dynamique. La cinquième dimension.* Note de M. **Al. Proca**, présentée par M. J. Perrin.

1. Considérons le mouvement d'un point. Un phénomène cinématique est complètement déterminé par les coordonnées x, y, z, ct et par les vitesses correspondantes. Un phénomène dynamique est décrit en utilisant les variables x, y, z, ct (coordonnées q) et les variables conjuguées p_x, p_y, p_z, E/c (coordonnées p). Dans les deux cas l'espace-temps semble suffire à la description des phénomènes. Or le passage cinématique-dynamique correspond à l'introduction de *forces* et de *masses*. Dans le schéma classique on tient compte de ces *deux* éléments au moyen d'*une seule* variable, l'énergie E; cela tient à ce qu'on regarde habituellement la masse comme constante. Mais dans le cas général il ne peut en être ainsi. Donc le problème dynamique doit comporter une nouvelle variable, à savoir la masse.

Cette remarque n'est pas nouvelle. En l'appliquant on a, cependant, toujours négligé un point essentiel; en effet, si l'on admet que la masse est une nouvelle variable indépendante du problème dynamique il faut, pour décrire complètement celui-ci, *introduire aussi la variable conjuguée de la masse*, ξ (1).

2. Les variables p, les moments, obéissent à des lois générales de conservation. Or *la masse se conserve;* il n'est donc pas douteux qu'il faille la ranger dans la catégorie des moments p. Le produit de deux variables conjuguées a les dimensions d'une action. Les dimensions de ξ seront L^2T^{-1}, par exemple vitesse $\times$ longueur. On peut donc poser $\xi = c\lambda'$ ou encore $\xi = v\lambda$, c étant la vitesse de la lumière, v celle du point matériel et λ la nouvelle coordonnée, homogène à une longueur. *Si l'espace-temps suffit*

(1) La considération des variables conjuguées se trouve déjà dans un très pénétrant travail de Klein (*Zeitschrift für Physik*, 46, 188, 1927). La variable introduite est la conjuguée de la charge électrique; l'auteur l'appelle la cinquième dimension et l'utilise pour fondre ensemble l'électromagnétisme et la relativité. Nous ferons remarquer que, si l'on attache une importance quelconque au numérotage des dimensions, il conviendrait plutôt de donner le nom de cinquième dimension à la variable ξ, qui se présente déjà dans l'étude de la dynamique, donc avant l'introduction de toute notion de charge électrique. La variable de Klein serait une sixième dimension, à moins que charge et masse ne soient deux aspects d'une seule et même notion.

pour l'étude de la cinématique, il n'en est plus de même pour la dynamique. L'étude complète de celle-ci doit se poursuivre dans un espace à cinq dimensions x, y z, ct et λ.

3. Cherchons une interprétation de λ. Les anciennes dynamiques, où ξ n'intervient pas, ne peuvent plus être utilisées (¹); par contre, la dynamique analytique reste en partie applicable, car elle est indépendante du nombre des variables et basée sur un principe de minimum certainement valable. Supposons donc (ce que l'expérience vérifie) que dans le mouvement uniforme la masse reste constante. L'équation de Hamilton $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ donne, avec $p = m$, $q = \xi$, $\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0$, H indépendante de ξ. L'action, définie par $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$, peut s'écrire $S = m\xi + w(zt)$. Ceci est absolument général. Introduisons maintenant la théorie des quanta sous la forme de Sommerfeld en égalant à nh les périodes de S. Si S a une période due à ξ, celle-ci provient du fait que ξ est elle-même multipériodique, à la façon d'un angle par exemple, $\varphi = 2\pi n + \varphi_1$. Soit Ξ cette période; posons $\Xi = v\Lambda$. On doit avoir

$$m\Xi = nh, \qquad mv\Lambda = nh, \qquad \Lambda = n\left(\frac{h}{mv}\right).$$

Or $\frac{h}{mv}$ représente la longueur d'onde des ondes de de Broglie. Donc, dans les conditions énoncées, *la nouvelle coordonnée λ est une variable angulaire dont la période est un multiple entier de la longueur d'onde des ondes de de Broglie.*

4. Pour $n = 1$ et avec $v = \Lambda.\nu$, $g = mv$, cette égalité devient $g = h\nu/v$. On voit ainsi quelle est l'origine de cette relation, que de Broglie, par une intuition géniale, avait choisie comme hypothèse pour préciser le rapport entre ses ondes et le point matériel. Elle dérive d'une condition de quanta; mais elle ne suppose nullement l'existence d'une *onde* qui remplirait tout l'espace. On est tenté de penser que l'onde de phase n'est pas, *dans le cas général*, l'élément essentiel qui permette de traiter les problèmes dynamiques que nous avons en vue. Ce qui est essentiel pour ces problèmes c'est l'introduction de la nouvelle dimension λ. *Les hypothèses de la mécanique ondulatoire sont donc trop restrictives;* elles introduisent la nouvelle coordonnée λ,

---

(¹) Il faut, en particulier, remarquer que le choix de m comme variable indépendante exclut toute relation générale, donnée *a priori*, entre la masse et l'énergie.

mais d'une manière incomplète, comme argument d'une fonction périodique.

La vérification expérimentale de l'existence des ondes de de Broglie ne démontrent pas, en fait, l'existence de ces ondes, mais simplement l'intervention de la nouvelle variable ξ. En effet elles ne confirment pas l'existence d'une fonction périodique, mais bien la relation $mv\lambda = nh$ ou $m\xi = nh$, qui peut se déduire sans faire appel à la théorie des ondes.

Mais, d'autre part, si le mouvement par ondes n'est pas général, il existe certainement un très grand nombre de phénomènes qui suivent cette loi; les succès innombrables de la mécanique ondulatoire le prouvent incontestablement. L'équation de Schrödinger définit, parmi tous les mouvements possibles, celui qui se fait par ondes. Elle n'a pas la généralité des équations hamiltoniennes, comme on le pense souvent aujourd'hui; ce n'est que l'équation d'un mouvement particulier, mais très fréquent. La mécanique ondulatoire occupe, dans une mécanique générale contenant ξ, une place analogue à celle qu'occupait la mécanique céleste dans la dynamique rationnelle classique.

PHYSIQUE GÉNÉRALE. — *Autres réflexions sur la dynamique. Interférences.* Note de M. **Al. Proca**, présentée par M. J. Perrin.

1. Dans une Note précédente (1) nous avons attiré l'attention sur la nécessité logique de compléter la dynamique du point matériel par l'intro-

(1) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 739.

duction d'une nouvelle coordonnée λ. Dans cette dynamique généralisée, la masse variable du point est simplement une coordonnée de l'extension en phase, du type p, puisqu'elle obéit à une loi de conservation. La variable conjuguée ξ, de ce moment, représente justement le produit de λ par la vitesse v du point $\xi = \lambda v$. L'introduction de cette nouvelle variable fournit une interprétation simple de la relation $mv\lambda = h$ qui constitue une hypothèse fondamentale de la théorie de de Broglie et que Dymond, Davisson et Germer ainsi que G. P. Thomson ont vérifiée expérimentalement.

2. Appliquons cette dynamique à un photon, que nous définirons de la matière habituelle :

$$\text{vitesse} = c, \qquad \text{énergie} = h\nu, \qquad \text{masse} = m = \frac{h\nu}{c^2},$$

toutes trois constantes dans le cas du vide.

Les équations de Hamilton restent valables

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Puisque la masse est constante, $\xi = c\lambda$ est une coordonnée cyclique et l'action s'écrit :

$$S = m\xi + S_1(xyzt), \qquad S = \frac{h\nu}{c} \cdot \lambda + S_1(xyzt).$$

S est, en général, multipériodique. Si Δ est une période de λ, $c\Delta$ est une période de ξ; les conditions générales de quantification donnent alors

$$\frac{h\nu}{c} \cdot \Delta = nh, \qquad \Delta = n\text{L},$$

ou

$$\text{L} = \frac{c}{\nu} = hc\ \text{énergie} = \text{longueur d'onde (suivant l'ancienne terminologie)}.$$

Donc, dans le cas envisagé, *la période de la variable λ, si elle existe, doit être égale à un nombre entier de longueurs d'onde de la lumière* que constituent les photons.

3. Ceci rappelé, considérons plus particulièrement les phénomènes de diffraction dans le vide, d'interférences par réflexion, etc., et en général *tous ceux pour lesquels on puisse affirmer que la grandeur de la vitesse du photon garde une valeur constante c.* Il existe entre le photon incident et le réseau, les miroirs, etc., une interaction. On ne connaît pas la forme de la fonction H qui la définit. Mais la relation fondamentale du photon nous

donne une précieuse indication sur la manière dont H dépend de m. En effet $m = \frac{h\nu}{c^2}$ peut s'écrire : *énergie* $= \mathrm{H} = mc^2$, même pour m variable. Adoptons donc une loi d'interaction de la forme $\mathrm{H} = mc^2 + \mathrm{V}(xyz, p_x p_y p_z)$, dans laquelle V est une fonction quelconque, généralement nulle, soumise à certaines conditions, mais qui, en tout cas, ne contient plus m. Dans ces conditions, les équations de Hamilton donnent $\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial m} = c^2$, $\frac{d\lambda}{dt} = c$, $\lambda = ct + \lambda_0$. Or le chemin parcouru par le photon est aussi donné par $s = ct + s_0$. Par conséquent, pour un photon, dans les conditions indiquées, la nouvelle variable λ a une interprétation simple : *λ a la même valeur que le chemin parcouru par le photon sur sa trajectoire.*

4. Si donc le dispositif expérimental est tel que λ admet une période Δ, celle-ci définira une certaine *différence de marche*. Dans ce cas, appliquer la théorie des quanta revient à écrire l'équation $\Delta = n.\mathrm{L}$, c'est-à-dire à poser qu'*une différence de marche déterminée est égale à un nombre entier de longueurs d'onde de la lumière incidente*.

Cet énoncé est le même que celui qui, dans la théorie classique, résout *tous les cas* connus d'interférences dans le vide : fentes, réseaux, miroirs, réseaux cristallins etc. Il a été obtenu par application directe des conditions de quanta à une dynamique généralisée, mais sans faire appel à la théorie ondulatoire. La formule de départ $mc\lambda = nh$, applicable aussi aux points matériels, est *la formule générale de la diffraction.*

Si l'on admet que l'introduction de la nouvelle variable est nécessaire logiquement, les expériences d'interférences dans le vide militent donc en faveur de l'acceptation de l'hypothèse fondamentale de la théorie des quanta, à savoir l'atomicité de l'action. *Ces expériences ne prouvent nullement que la lumière est constituée par des ondes*, comme on le croyait au siècle dernier; pour pouvoir analyser cette constitution il est indispensable d'avoir des résultats relatifs à l'*intensité* de la lumière. Elles démontrent simplement que la théorie des quanta elle-même exige la périodicité de la lumière, tout en lui attribuant une structure discontinue. Il faut remarquer qu'il n'y a aucune contradiction entre ces deux affirmations; il est évident en effet que *la discontinuité n'exclut pas la périodicité*. Bien au contraire, ces deux éléments sont souvent intimement liés en un principe unique : la suite des nombres entiers en est le meilleur exemple.

B.I.8

COLLECTION DE SUGGESTIONS SCIENTIFIQUES
publiée sous la direction de Léon Brillouin

SUR LA THÉORIE
DES
QUANTA DE LUMIÈRE

PAR

Al. PROCA

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD
3 ET 3 *bis*, PLACE DE LA SORBONNE

1928

A MONSIEUR LÉON BRILLOUIN

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

DEUXIÈME PARTIE

LES QUANTA DE LUMIÈRE

TROISIÈME PARTIE

LA COHÉRENCE DE LA LUMIÈRE

QUATRIÈME PARTIE

OBJECTIONS A LA THÉORIE DES QUANTA DE LUMIÈRE

Chapitre Premier

Intensité de la lumière

Chapitre II

Interférences

Société Française d'Imprimerie d'Angers. — 7-6-28.

Le présent essai tente de lever quelques-unes des difficultés qu'on rencontre lorsqu'on veut concilier les deux principales théories de l'optique, la théorie des ondes et celle des quanta de lumière.

Dans ce but les quanta de lumière sont considérés dans le vide, en l'absence de toute matière, le mécanisme même de l'émission étant laissé de côté.

L'hypothèse fondamentale mise en œuvre, est la suivante : un champ électrique ou magnétique a une structure discontinue.

La notion du champ étant intimement liée à celle d'espace-temps, les paragraphes 7 et 8 examinent les conséquences de l'adoption de cette hypothèse pour notre conception de l'espace-temps.

Pour utiliser cette hypothèse, on conserve la théorie de Maxwell, en y supposant les champs de l'onde discontinus. De cette façon, on peut utiliser les nombreuses vérifications expérimentales qui ont justifié le succès de la théorie de Maxwell ; d'autre part, on démontre qu'en vertu de l'hypothèse mentionnée, une onde de lumière se compose de paquets d'égale énergie, c'est-à-dire de quanta.

En adoptant l'hypothèse fondamentale, on admet implicitement que l'émission des quanta de lumière est cohérente, hypothèse accessoire qu'on élimine aussitôt, *en démontrant* qu'un atome qui émet suivant les règles de Bohr, fournit nécessairement des trains d'onde cohérents.

Les quanta de lumière sont ensuite analysés et leur structure est étudiée jusque dans les détails. En se basant sur cette analyse on calcule l'énergie du quantum et on trouve la relation générale entre cette énergie et la fréquence, relation qui contient celle de Planck $\varepsilon = h\nu$ comme cas particulier.

Il est ensuite montré, qu'*a priori* la relation $\varepsilon = h\nu$ ne peut convenir dans tous les cas ; il y a des phénomènes pour lesquels on doit employer la formule générale. On indique quelle est la différence entre ces phénomènes et ceux pour lesquels la formule de Planck est complètement suffisante.

On examine ensuite le problème des phénomènes d'interférence. Après avoir montré que le type du quantum adopté contient, par son choix même, les éléments nécessaires à une explication complète des interférences, on analyse plus en détail le phénomène. A ce propos, on étudie sommairement la structure d'une onde de lumière. Enfin, on montre qu'on peut rendre compte approximativement du phénomène au moyen de cette théorie, même pour les détails tels que la distribution d'énergie dans les franges.

L'explication proposée pour les phénomènes d'interférence suppose essentiellement qu'une frange noire apparaît par l'action simultanée de deux quanta convenablement décalés, tout comme dans la théorie classique. Les théories modernes admettent l'hypothèse plus simple que l'intensité des franges est proportionnelle à la densité des quanta au point considéré. Dans ce qui suit on n'approfondit pas cette divergence entre les deux théories ; l'expérience seule peut trancher le débat.

Les pages qui suivent sont surtout destinées à indiquer une méthode empirique permettant d'étudier un problème extrêmement ardu, celui de la *structure* d'un quantum de lumière.

PREMIÈRE PARTIE

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

—

1. — Introduction

Dès son apparition, l'hypothèse des quanta de PLANCK a profondément influencé nos conceptions des relations entre la matière et le rayonnement. Mais cette hypothèse n'a pu prendre la place, vraiment exceptionnelle, qu'elle occupe actuellement en Physique, que le jour où BOHR eut précisé, autant qu'il était possible, le mécanisme même de ces relations.

En ce qui concerne l'introduction de l'idée de discontinuité, ce que PLANCK a fait pour le mécanisme de l'émission, EINSTEIN a tenté de le faire pour le rayonnement. Dès 1905, il proposa l'hypothèse des quanta *de lumière*, suivant laquelle le rayonnement se compose de quanta isolés, indépendants et d'égale énergie $h\nu$, c'est-à-dire possède une structure granulaire.

Les services que cette conception a déjà rendus sont importants. Néanmoins, en l'examinant de plus près, on constate qu'elle manque de précision. On sent nettement la nécessité d'autres hypothèses supplémentaires, qui puissent la compléter de la même façon que les conceptions de BOHR ont complété l'hypothèse initiale de PLANCK. En particulier, elle ne donne pas d'indications sur la *structure* de ces quanta de lumière, indications qui seraient peut-être utiles pour l'étude des phénomènes d'interférence.

Les efforts pour combler cette lacune ne semblent pas dépourvus d'intérêt. En effet, la théorie des quanta de lumière, malgré ses imperfections, a acquis une place importante dans la Science ; son utilité s'accroît chaque jour davantage. Il suffit de rappeler les services qu'elle a rendus pour l'explication du phénomène photoélectrique, de la fluorescence et de l'effet Compton. Certaines expériences directes (BOTHE et GEIGER, BOTHE, COMPTON et SIMON, JOFFÉ et DOBRONRAWOFF) militent en sa faveur. Enfin, il est significatif de rappeler à ce sujet que même dans l'interprétation des phénomènes suivant les principes de la mécanique ondulatoire, on est conduit à ne pas abandonner l'hypothèse des quanta de lumière. Les recherches de L. DE BROGLIE, le créateur de cette nouvelle discipline, ont abouti finalement à une théorie *dualiste*, où les électrons et les quanta de lumière gardent leur individualité et sont simplement accompagnés d'une onde de guidage qui fixe leurs trajectoires.

La difficulté qu'on éprouve à adopter l'hypothèse d'EINSTEIN provient de l'antagonisme entre elle et la théorie ondulatoire classique. BOHR, KRAMERS et SLATER ont tenté, récemment, de raccorder formellement ces deux théories. L'idée neuve et caractéristique de leur essai consiste à nier la validité du principe de conservation de l'énergie à l'échelle atomique. Celui-ci conserverait donc seulement une valeur statistique, à l'instar du principe de Carnot. Mais, à la suite d'expériences qui fournissent des arguments assez puissants à l'appui de la théorie des quanta de lumière (*), il ne semble pas que cette idée puisse être acceptée (**).

D'autre part, au point de vue de l'antagonisme qui nous préoccupe, les travaux sur la mécanique quantique de

(*) BOTHE et GEIGER, *Z. f. Phys.*, 32, 639, 1925. BOTHE, *Z. f. Phys.*, 37, 547, 1926.

(**) BOHR, *Die Naturwissenschaften*, 14, p. 4, janvier 1926.

HEISENBERG, BORN, JORDAN et DIRAC, ainsi que ceux sur la mécanique ondulatoire, n'ont pu, jusqu'à présent du moins, nous fournir de solution satisfaisante. L. DE BROGLIE est cependant arrivé au résultat, en supposant qu'un quantum de lumière se compose à la fois d'un grain d'énergie $h\nu$ et d'une onde occupant tout l'espace ; suivant le phénomène envisagé, on doit introduire dans les calculs tantôt l'onde tantôt le photon $h\nu$. Cependant cette solution, qui est certainement juste dans ses grandes lignes présente une particularité gênante : l'explication cherchée est déjà contenue dans les hypothèses initiales puisque celles-ci introduisent des ondes ; par ce fait, elle ne nous dispense donc pas d'une étude approfondie de la question, surtout si l'on a en vue l'étude de la structure du quantum.

2. — But de cette étude.

En vue de concilier les deux points de vue antagonistes, le présent essai étudie la *structure du quantum de lumière.* L'intérêt de cette étude est évident. Une fois la structure du quantum connue, on pourra analyser les phénomènes d'une manière beaucoup plus précise, se rendre compte des contradictions apparentes qui subsistent et les lever. De même, il sera beaucoup plus facile d'imaginer le mécanisme atomique émetteur si l'on connaît la structure du quantum émis, et on peut espérer faire ainsi un pas de plus vers la solution complète du problème de l'émission.

On peut dire que, logiquement, à l'heure actuelle, c'est sur ce procédé que les théoriciens devraient concentrer leurs efforts (*). En effet, les magnifiques résultats de la

(*) Voir, par exemple, G. WENTZEL, *Zeitschrift für Physik*, 22, 193, 1924, qui essaie d'étudier le rayonnement, en prenant comme point de départ une de ses propriétés fondamentales, à savoir la capacité d'interférer.

mécanique ondulatoire ont permis de pousser très loin l'analyse des faits, du côté de la structure intraatomique. Mais l'étude de la structure du rayonnement a été moins développée. Il n'est pas douteux que lorsque celle-ci sera arrivée au même degré de perfection, il nous sera beaucoup plus facile de trouver la solution juste et de réaliser enfin l'unité dans ce domaine de la Science.

3. — Contradictions dans la théorie des quanta de lumière.

Les données expérimentales, sur lesquelles on peut s'appuyer pour étudier la structure du quantum de lumière, sont en très petit nombre ; on est toujours réduit à choisir entre des hypothèses plus ou moins justifiées.

Néanmoins, la part d'arbitraire que comporte ce choix n'est pas si grande qu'elle le paraît au premier abord. Il nous semble qu'il existe un guide très sûr, un critérium qui s'impose lorsqu'on veut améliorer la théorie de la lumière. Il apparaît dès que l'on met en évidence une lacune fondamentale, des théories qui tendent à rétablir l'unité dans l'explication du rayonnement, et à laquelle elles doivent d'ailleurs toutes leur insuccès.

En effet, on admet, d'une part, que la lumière est constituée par des quanta et a, par conséquent, une structure discontinue. D'autre part, il paraît certain que la lumière possède des propriétés de nature électrique et magnétique ; c'est un résultat qui découle de l'expérience et, peut-être, à l'heure actuelle, un des mieux établis. Mais il ne faut pas oublier que, dans la manière actuelle d'envisager les choses, la notion de champ électrique ou magnétique implique nécessairement la continuité.

Par conséquent, on admet que la lumière a une structure discontinue, tout en supposant que ses éléments constitutifs, les champs électrique et magnétique, sont continus et sans points singuliers, jusqu'à l'infini. Il est clair qu'il y a dans ces affirmations simultanées une contradiction fondamentale ; et on peut pressentir qu'en la levant, il serait possible d'établir une théorie cohérente des quanta de lumière, qui puisse englober tous les phénomènes physiques d'interférence et de diffraction.

4. — Hypothèse fondamentale. Champ constant.

L'hypothèse fondamentale qui s'impose est donc celle-ci : *un champ électrique ou magnétique a une structure discontinue ;* pour un champ statique *sa valeur est concentrée en des points bien déterminés,* en dehors desquels elle est nulle. Son aspect est celui d'un réseau cristallin, cubique, dans un espace euclidien, formé par les sommets d'un réseau de géodésiques dans un espace généralisé (*)

5. — Nécessité de cette hypothèse.

Une vue d'ensemble des phénomènes naturels peut comporter un certain degré d'approximation ; avant de décider s'il y a lieu de la conserver ou de la rejeter en bloc, il convient de l'améliorer et, en premier lieu, de la rendre *cohérente.* Il nous est impossible de procéder autrement.

Actuellement, la discontinuité semble être une conception qui s'impose pour les phénomènes physiques. C'est peut-être une conception erronée. Mais nous ne pourrons en

(*) Pour introduire complètement la notion de discontinuité pour un champ de vecteurs, il faut en outre admettre que les composantes de ces vecteurs varient par des multiples entiers d'une grandeur fondamentale. Par conséquent, cette notion implique une triple discontinuité : celle des points d'attache, celle des directions, et celle de la grandeur scalaire des vecteurs. Mais, pour les cas particuliers que nous envisagerons ici, cette définition complète est inutile.

juger définitivement tant qu'il subsistera, dans cette vue d'ensemble des phénomènes naturels, d'autres manières de voir antagonistes. Le défaut d'adaptation d'une théorie aux faits peut provenir de cet antagonisme tout autant que de l'insuffisance de la conception primitive ; avant de condamner une théorie, il faut détruire cet antagonisme, augmenter la cohérence, réaliser l'unité.

L'hypothèse proposée tend vers cette unité, et, par cela même, est très facilement acceptable. On pourrait même dire que nous sommes tout préparés à l'admettre. Nous sommes, en effet, habitués à considérer un champ de force comme un assemblage de tubes de force. J.-J. THOMSON (*) et H. STANLEY ALLEN (**) attribuent à ces tubes de force une existence objective qui en fait des éléments distincts les uns des autres. C'est un premier pas vers une discontinuité complète, qui, de cette façon, n'est pas du tout difficile à concevoir.

Nous allons l'admettre pour le moment et en tirer les conclusions essentielles (***).

(*) J.-J. THOMSON, A suggestion as to the structure of light. *Phil. Mag.*, 48, 737, 1924.

(**) H. STANLEY-ALLEN, Faraday's magnetic lines as quanta. *Phil. Mag.*, 42, 253, 1921, et 48, 429, 1924.

(***) J. PERRIN, dans *Les Atomes*, préface, p. xv, en discutant la notion de discontinu, envisage, à titre d'exemple, la possibilité d'un potentiel électrique discontinu.

M. BORN et P. JORDAN, *Zeitschr. f. Physik*, 34, 885, 1925, envisagent formellement les champs électriques et magnétiques comme représentables par des matrices. Mais les *éléments* de ces matrices sont des ondes *continues*, analogues aux ondes classiques. Enfin, tout récemment M. FERRIER, *Revue Générale de l'Électricité*, XXII, 1159, 1927, par ces considérations totalement différentes est parvenu à la conclusion que dans les systèmes électriques il existe nécessairement des « singularités libres » distinctes des charges électriques ponctuelles.

6. — Hypothèse fondamentale. Champ variable.

Un champ magnétique sera donc un ensemble de vecteurs, *en nombre fini dans un espace fini*, fixés dans l'espace en des points bien déterminés.

Admettons que, si le champ est variable, cette variation n'altère pas la distribution des points. Par hypothèse, le vecteur gardera donc son point d'attache et sa direction, tandis que son amplitude seule variera. Cette variation pourra-t-elle être continue? Nous avons admis que le champ évolue d'une manière discontinue lorsque les variables d'espace varient. N'en doit-il pas être de même lorsque *le temps* varie?

Nous sommes déjà habitués, depuis Minkowski, à l'identité du rôle que jouent les coordonnées de temps et celles d'espace. L'hypothèse que nous devons faire ici n'est pas nouvelle, c'est l'hypothèse fondamentale elle-même, que nous exprimerons désormais ainsi : *les champs H et E sont discontinus dans l'espace-temps de Minkowski.*

Par conséquent, nous nous imaginerons un champ variable de la manière suivante : A un moment donné le champ se présente comme un ensemble de vecteurs attachés à des points discrets de l'espace ; ce sera quelque chose comme des épingles fixées sur une pelote. Au moment suivant, les vecteurs attachés aux mêmes points auront d'autres longueurs ; les épingles auront été remplacées par d'autres de longueurs différentes. Entre ces deux moments les vecteurs sont nuls, les épingles auront disparu.

7. — Atomicités.

Notre hypothèse fondamentale précise seulement que le vecteur champ existe dans certains points de l'espace, à l'exclusion de tous les autres. Mais ceci n'implique *aucune* *limite supérieure quant à la valeur que peut avoir le vecteur champ en ces points.*

Examinons ce que devient, avec notre hypothèse, un champ uniforme sinusoïdal. A la place d'une succession continue de vecteurs, dont l'amplitude varierait sinusoïdalement, on en aura une suite discrète, ayant comme amplitudes les ordonnées de la sinusoïde, à certains instants déterminés (fig. 1). On peut appeler ces instants les « instants vivants » du temps.

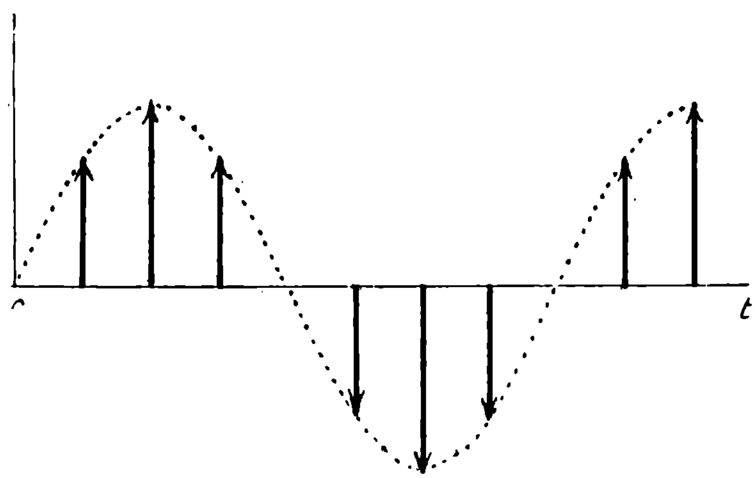


Fig. 1.

Ceci étant posé, on conçoit aisément que si la période de la sinusoïde diminue elle ne pourra pas devenir plus petite que l'intervalle entre deux instants vivants du temps, car le vecteur n'existe pas entre deux tels instants. C'est en ce sens qu'on peut parler d'un *atome de temps*. Corrélativement, il y aura un *atome d'espace* (à cause de l'homogénéité de l'espace et du temps), sorte de cavité élémentaire où l'on ne pourra pénétrer en aucune façon, et qui sera occupée, par exemple, par un électron ou un sous-électron.

Remarquons encore que, si l'observateur n'a conscience que de ce qui se passe pendant les instants vivants, la variation du champ sera absolument continue pour lui, et qu'il raisonnera, par conséquent, comme pour un champ sinusoïdal de la théorie classique. Pour que la discontinuité du champ lui apparaisse, il faut qu'au moins pour *un* instant vivant, le champ soit nul. Si le champ existe aux instants 1, 3, 5.., et est nul aux instants 2, 4, 6..., l'observateur le verra évidemment sous un aspect discontinu.

8. — L'espace.

Si l'on a longtemps attribué le caractère de continuité aux champs électriques et magnétiques, c'est parce qu'ils impliquent, dans leur définition même, la notion d'espace vide, qui est pour nous le type du continu objectif.

Lorsqu'on s'efforce de dégager les principes de la Physique des éléments qui y introduisent, d'une manière ou d'une autre, le continu, on se heurte toujours, en dernière analyse, au postulatum de la continuité de l'espace-temps.

L'évolution qui a conduit de la conception de l'action à distance à la description des phénomènes par des équations locales, montre bien la pénétration dans le domaine de la philosophie naturelle, d'une conception essentiellement métaphysique.

Cette évolution a été favorisée, d'une part, par le développement exagéré du calcul infinitésimal, d'autre part, par la géniale conception de « champ », due à Faraday.

C'est à défaut d'autre instrument aussi puissant et aussi fécond que l'analyse infinitésimale, qu'on a été naturellement amené à l'employer dans l'étude des phénomènes physiques. On a été obligé ainsi à faire l'hypothèse — plausible, mais surtout *nécessaire* — que les éléments réels considérés possédaient les caractéristiques des symboles mathématiques qui les représentaient. On a universellement attribué le caractère de continuité aux phénomènes naturels, sans autre argument d'ordre physique ; somme toute, on a procédé ainsi pour des raisons de commodité.

Aujourd'hui ce sont des données physiques qui nous imposent l'étude du discontinu. On a vu ainsi se développer la mécanique quantique de HEISENBERG, que BORN et JORDAN appellent « la vraie théorie du discontinu ». Mais, de nouveau, la conception des ondes de DE BROGLIE a ramené le débat sur le terrain du continu. La facilité avec laquelle SCHRÖDINGER a pu retrouver les résultats de la physique du discontinu, par les moyens de l'analyse classique, a donné à la mécanique ondulatoire une importance qui va grandissant chaque jour. Dans cette mécanique un mouvement n'intéresse pas seulement sa trajectoire, il devient un phénomène étendu à tout l'espace. On répand ainsi dans tout l'espace une propriété d'un corps matériel limité, par un processus assez analogue à celui qu'a employé autrefois Faraday en électricité.

Les idées de Faraday ont aussi contribué à nous imposer la conception de la continuité dans les phénomènes physiques.

En transportant certaines propriétés des corps dans l'espace environnant, on le fait participer, en quelque sorte, aux phénomènes physiques. L'élément physique se fond dans cet espace, en acquiert les qualités et les caractéristiques. Et comme l'espace intuitif est tout ce que nous connaissons de plus continu, les éléments physiques eux-mêmes jouiront de cette propriété essentielle. Dans ce cas, c'est notre expérience de tous les jours qui nous impose la même conclusion.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que les expériences qui nous ont conduit à postuler la continuité de l'espace-temps sont, somme toute, tout aussi grossières que la plupart de celles que nous savons réaliser.

Ce sont des expériences *à notre échelle* et qui ne nous permettent en aucune façon de conclure pour l'infiniment petit. Notre conception intuitive de l'espace, ainsi fondée, pourrait très bien être différente de l'espace physique réel, en ce qui concerne quelques-unes de ses qualités. Entre autres la continuité pourrait bien n'être qu'une propriété *de moyenne*, qui disparaîtrait dans les éléments d'espace suffisamment petits.

Cela est si vrai que l'on ne peut pas être d'accord aujourd'hui sur la nature du continu physique.

Il se peut qu'il soit identique au continu mathématique, mais il pourrait simplement n'être qu'un ensemble dense, renfermé dans le continu (*).

Il n'est pas identique au continu mathématique, mais s'en distingue par le fait que, pour discerner deux éléments, il faut une différence minimum, qui varie d'ailleurs, mais ne suit aucune loi (**).

Enfin le continu intuitif, par excellence, l'espace lui-même, pourrait très bien avoir une structure discontinue et n'être qu'une *variété discrète* (***).

Riemann est, en fait, le premier qui ait envisagé la possibilité d'une atomicité de l'espace.

Après avoir fait observer que, des propriétés métriques de l'espace « dans le grand » on ne peut tirer aucune conclusion pour ce qui concerne l'infiniment petit, il écrit :

(*) Poincaré, *Science et Hypothèse*, Flammarion, p. 34.

(**) Borel, *Rivista di Scienzia*, 1909, reproduit dans Borel, *l'Espace et le Temps*, Alcan, note III, p. 226.

(***) Riemann, *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, trad. Laugel. Gauthier-Villars, 1898, p. 297.

« *Il est donc très légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes à la Géométrie...*

« *La question de la validité des hypothèses de la Géométrie dans l'infiniment petit est liée avec la question du principe intime des rapports métriques de l'espace. Dans cette dernière question... on trouve l'application de la remarque précédente que, dans une variété discrète, le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette variété, tandis que dans une variété continue ce principe doit venir d'ailleurs. Il faut donc, ou que* LA RÉALITÉ SUR LAQUELLE EST FONDÉ L'ESPACE FORME UNE VARIÉTÉ DISCRÈTE (*) *ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui.* »

Ainsi, suivant Riemann, il n'est nullement absurde de supposer que la structure de l'espace soit discontinue. Ses raisonnements le conduisent à deux alternatives, *également possibles :* l'espace est une variété discrète ou une variété continue ; il ne choisit pas, et il remarque que ce sont les faits qui doivent décider.

Le texte cité a été souvent commenté ces derniers temps. On sait l'admirable parti qu'en a tiré EINSTEIN qui, admettant comme postulat la seconde alternative (l'espace, variété continue), a édifié le formidable édifice de la théorie de la gravitation universelle. Mais la première alternative (l'espace, variété discrète) n'a pas encore été examinée.

Dans la Physique actuelle, la théorie d'Einstein et celle des quanta ne peuvent être rejetées complètement, malgré tout ce qu'elles ont d'imprévu et de contraire aux idées acquises. Elles sont séparées par des cloisons étanches. On doit les admettre toutes les deux, mais on ne sait pas si

(*) Non souligné dans le texte.

elles sont compatibles, si elles s'opposent ou dérivent d'un même principe universel. On est en présence d'un de ces défauts d'unité, qui souvent marquent les périodes fécondes de l'histoire de la Physique.

La considération de l'atomicité de l'espace et des alternatives de Riemann fournit un point commun à ces théories si éloignées en apparence. Il pourrait se faire que l'étude approfondie de cette atomicité permît de rapprocher ces deux théories et de les éclairer d'un jour nouveau.

Pour cela il faudrait étudier d'une manière complète le concept d'un espace discontinu ; c'est dans ce sens que devraient peut-être se diriger les efforts des mathématiciens qui, actuellement, étudient les variétés d'espace, sous l'impulsion justement des théories d'Einstein. Ceci n'est pas seulement un *desideratum* de physicien ; c'est aussi l'opinion d'un mathématicien, M. Borel, qui écrit, à propos de l'introduction de la discontinuité dans la Géométrie : «... C'est une question que l'on trouvera peut-être prématurée, mais qu'il paraît cependant difficile de ne pas poser » (*).

9. — Le Temps.

Après ces considérations sommaires sur l'espace, une question se pose tout naturellement : si on admet l'hypothèse de la discontinuité de l'espace, que doit-on penser du temps?

S'il est plus ou moins facile d'imaginer un espace granulaire, il est presqu'impossible à notre entendement de se figurer un temps qui saute. Il est même opportun de se demander si la question posée a un sens.

Et pourtant, pour le physicien, l'hypothèse d'un temps

(*) Borel, *loc. cit.*, p. 127.

discontinu s'impose avec tout autant de force que celle d'un espace atomique. L'un et l'autre sont une conséquence, probablement irréductible, de la conception fondamentale des phénomènes naturels, que nous adoptons petit à petit, sous l'impulsion de la théorie des quanta. C'est un exemple frappant de l'état de choses auquel nous avons fait allusion au paragraphe 4. Engagés dans la voie où nous poussent les résultats expérimentaux qui ne peuvent s'interpréter que par la théorie des quanta, nous devons changer notre manière de voir, de façon à rendre la théorie plus cohérente qu'elle ne l'est à présent.

L'idée de temps et d'espace est justement de celles qu'il faut modifier pour les rendre conformes à la conception fondamentale. Cela est si vrai que la nécessité d'admettre la discontinuité du temps a été confusément sentie depuis longtemps.

Poincaré lui-même (*) l'avait signalé en passant, sans le résoudre et sans prendre parti pour ou contre une conception qui devait paraître beaucoup plus bizarre à l'époque qu'elle ne l'est aujourd'hui. Le problème a été attaqué de front, dans un essai qui vient de paraître, par MM. G. Fournier, Th. Coppel et D.-K. Yovanovitch (**). M. Palacios (***), dans un exposé original des principes de la théorie des quanta, a aussi rencontré le quantum de temps. M. Norman Campbell (****) a été, de même, amené à rapprocher les notions de discontinuité et de temps. Il considère ce dernier comme une grandeur purement statistique, analogue à la température, moyenne de grandeurs indépendantes qui n'ont plus le caractère tem-

(*) Poincaré, *Dernières Pensées*, p. 188.
(**) *Quelques suggestions sur la matière et le rayonnement.* Collection de suggestions scientifiques, A. Blanchard, Paris.
(***) M. Palacios, *Scientia*, déc. 1925.
(****) N. Campbell, *Phil. Mag.*, II, 1106, 1926.

porel, mais sont des probabilités de transition. M. v. RASCHEVSKY (*) a été conduit à une conception analogue. Enfin, M. ROBERT LÉVI (**) a utilisé la notion d'atome de temps pour établir les grandes lignes d'une théorie, englobant l'électromagnétisme et les quanta.

Aujourd'hui la relation établie entre le temps et l'espace suivant Minkowski et Einstein, nous permet beaucoup plus facilement d'admettre la discontinuité du temps si l'on a admis celle de l'espace.

De plus, cette double discontinuité étant admise l'expression de la vitesse d'un mobile sera de la forme $v = \frac{p \cdot \varepsilon}{q \cdot \tau}$ p, q entiers, ε et τ les atomes d'espace et de temps. Il est visible que, parmi toutes les vitesses exprimées par la formule ci-dessus, il en est une remarquable. C'est celle pour laquelle $p = q$ donc

$$c = \frac{\varepsilon}{\tau}$$

On pourrait peut-être rendre ainsi compte du rôle privilégié que joue la vitesse de la lumière dans certaines théories physiques. Et on observera que si l'espace-temps se déforme — s'il y a gravitation — ε et τ varient, donc la vitesse de la lumière change de valeur.

Enfin, ainsi que nous l'avons dit, admettre la discontinuité du temps est une nécessité, imposée par les idées générales qui nous guident aujourd'hui en Physique. POINCARÉ, le premier, a mis cette nécessité en relief. *Suivant lui, l'atome de temps est une conséquence directe de l'hypothèse des quanta,* plus précisément de cette proposition : « *Un système physique n'est susceptible que d'un nombre fini d'états distincts; il saute d'un de ces états à*

(*) v. RASCHEVSKY, *Zeitschr. für Physik*, 39, 153, 1926.
(**) R. LÉVI, *Comptes rendus* 183, 867, 1926 et 183, 1026, 1926.

l'autre sans passer par une série continue d'états intermédiaires. » On peut remarquer que si l'on applique sans modification ce principe général au cas de l'atome, on tombe justement sur la conception de Bohr qui est universellement admise aujourd'hui, ce qui implique l'acceptation intégrale de la conclusion de Poincaré...

***

La question de l'atomicité de l'espace et du temps n'est donc pas une hypothèse nouvelle. On la rencontre çà et là, tantôt comme suggestion vague, tantôt comme possibilité immédiate, tantôt comme paradoxe. Elle gagne néanmoins du terrain et on s'y habitue, parce qu'elle est une conséquence de notre manière actuelle d'envisager les mécanismes de la nature. Et, sans doute, l'appui considérable qu'elle trouvera dans la théorie des quanta la fera finalement accepter.

10. — Possibilité d'application de l'hypothèse fondamentale à la théorie des quanta de lumière.

La théorie ondulatoire de la lumière prévoit un très grand nombre de résultats expérimentaux avec une telle précision qu'on ne peut pas la rejeter complètement. Pour cette raison, toute théorie discontinue, tendant à rendre compte des mêmes résultats, doit réussir si elle se rapproche suffisamment de la théorie classique, ou si elle n'en altère pas l'idée fondamentale.

C'est ainsi par exemple que la théorie de Maxwell, tout en présentant les phénomènes sous un point de vue nouveau, riche en conséquences, n'a pas touché à l'idée fondamentale de la théorie de Fresnel.

Fresnel ayant reconnu que la lumière contenait, dans ses manifestations à notre échelle, quelque chose de périodique, transporta cette périodicité dans le phénomène élémentaire et en fit la caractéristique principale de son mécanisme.

On peut, aujourd'hui, procéder d'une manière tout à fait analogue, pour mettre d'accord la théorie des quanta de lumière avec certains résultats expérimentaux inexplicables autrement.

Nous avons reconnu la nécessité d'admettre, dans certains cas, une discontinuité dans le phénomène lumineux. Nous pouvons transporter cette discontinuité dans le phénomène élémentaire et nous serons conduits directement à admettre que les champs constituants de l'onde sont discontinus. L'hypothèse fondamentale se présente ainsi de la manière la plus naturelle, et le procédé est identique à celui de Fresnel.

Pour bénéficier des résultats acquis par la théorie classique nous allons donc procéder de la manière suivante : *nous prendrons comme base cette théorie et nous y remplacerons les champs continus par des champs discontinus.* Nous chercherons alors, dans la nouvelle représentation des phénomènes, les quanta d'énergie, qui apparaîtront tout naturellement, sans aucun artifice, et nous relierons les résultats ainsi obtenus avec ceux que l'expérience nous a fournis directement.

Ceci suppose que la théorie classique de la lumière est suffisamment souple pour admettre le changement radical que nous voulons lui imposer, sans que ses caractéristiques générales en soient altérées. Il est légitime de se demander si cela est possible *à priori*.

Or, cela semble possible en vertu de la remarque évidente que *la discontinuité n'exclut pas la périodicité.*

L'existence de cette périodicité de la lumière semble, à l'heure actuelle, de beaucoup plus certaine que l'existence même des quanta de lumière. Il est donc beaucoup plus satisfaisant pour l'esprit de partir de cette périodicité — qui est un *fait* incontestable — pour aboutir aux quanta de lumière, que de procéder d'une manière inverse, ainsi qu'on tente de le faire habituellement.

Quel que soit le mécanisme d'émission imaginé, il devra toujours pouvoir rendre compte de cette périodicité; c'est en cela que consiste la difficulté du problème de l'émission, dans l'hypothèse des quanta de lumière.

Une observation d'un autre genre permet aussi de donner une réponse affirmative à la question posée plus haut. On peut remarquer que, dans la théorie de Fresnel, les phénomènes d'interférence prouvent seulement que la lumière est périodique, mais ne donnent *aucune indication quant à la forme de la vibration.* On aurait pu construire une théorie (*) dans laquelle la vibration aurait eu, par exemple, une forme rectangulaire périodique et ainsi, peut-être, aurait-on été conduit à admettre finalement la forme de vibration discontinue qui intervient dans notre hypothèse fondamentale.

Il n'y aurait eu qu'une seule difficulté : la distribution d'énergie dans les franges d'interférence n'aurait plus été celle qu'on observe (**). Mais nous montrerons plus loin que cette difficulté disparaît, pour ainsi dire, d'elle-même, si l'on adopte l'hypothèse proposée.

En résumé, une théorie quantique de la lumière qui prendrait pour guide la théorie classique, ne paraît pas impossible, *à priori.* Il semble même que ce soit là le meilleur moyen d'attaquer le problème de la lumière. On

(*) Voir MACH, *Prinzipien der physikalischen Optik.* J.-A. Barth, 1921, p. 298 et suiv.

(**) MACH, *loc. cit.*, p. 299.

profite, en effet, de tous les résultats expérimentaux qui étayaient les théories classiques.

Pour y arriver, on n'utilise qu'une hypothèse, au demeurant, assez naturelle, et un principe d'analogie, qui n'est pas sans avoir des traits communs avec l'idée de correspondance de Bohr.

Nous allons examiner ce procédé en détail, dans ce qui va suivre.

DEUXIÈME PARTIE

LES QUANTA DE LUMIÈRE

---

1. — Représentation analytique des champs discontinus.

En attendant une notation plus adéquate, nous représenterons un champ par l'ensemble des valeurs que prend une expression continue, lorsque la variable évolue d'une manière discontinue.

Soit, par exemple, un champ uniforme dans l'espace, et périodique dans le temps. Les diverses valeurs qu'il prendra au cours du temps seront représentées par la formule :

$$(1) \quad \begin{cases} H = H_0 \sin 2\pi \dfrac{t}{T} & \text{pour } t = \tau,\ 2\tau,\ 3\tau, \ldots \\ H = 0 & \text{pour toute autre valeur de } t \end{cases}$$

τ étant l'intervalle élémentaire de temps.

On peut porter en ordonnées les valeurs de H aux instants vivants du temps et réunir les points ainsi obtenus. On aura une courbe polygonale inscrite dans une sinusoïde. Si on déplace cette courbe parallèlement à l'axe des t, d'un multiple entier de τ, il est clair que ce nouveau champ sera représenté par

$$H = H_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right)$$

avec

$$(2) \qquad \frac{T.\varphi}{2\pi} = n\,\tau \qquad n \text{ entier}$$

L'angle de phase varie d'une manière discontinue définie par (2).

Il faut remarquer qu'on ne peut pas s'imaginer la courbe mentionnée plus haut, déplacée d'un multiple non entier de τ. Ce serait en premier lieu, une impossibilité théorique puisqu'on ne peut pas atteindre des points dans l'intervalle entre deux instants vivants. En second lieu, quand même on déplacerait la sinusoïde d'une quantité $\frac{T\varphi}{2\pi} \not\equiv 0$ (mod. τ), les valeurs de H ne seraient plus les mêmes et on ne pourrait plus parler de différence de phase entre les deux champs, car ils ne seraient plus identiques.

2. — Étude d'un champ particulier.

Soit un champ dont la représentation graphique se réduit aux points maximum et minimum d'une sinusoïde de période T.

Il sera représenté par

$$(3) \quad \begin{cases} H = H_0 \cos 2\pi \dfrac{t}{T} & \text{pour } t \equiv 0 \ (\text{mod. } T/2) \\ H = 0 & \text{pour } t \not\equiv 0 \ (\text{mod. } T/2). \end{cases}$$

Le choix de la fonction cosinus est arbitraire. Ses propriétés n'interviendront pas dans les considérations sur le champ H.

Le champ H ne peut exister qu'aux instants vivants du temps. Donc la période sera assujettie — *comme toute grandeur* d'ailleurs — à une variation discontinue, donnée par

$$(4) \qquad T = 2k\tau$$

k entier et τ étant l'intervalle élémentaire de temps.

Supposons maintenant que le champ ne soit plus uniforme et qu'il dépende d'une deuxième variable indépendante x. Il s'introduira une différence de phase et son expression analytique sera

$$H = H_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\lambda}{x}\right)$$

Suivant la convention faite, H sera nul sauf quand l'argument sera un multiple de π, c'est-à-dire pour

$$\frac{t}{T} - \frac{\lambda}{x} = \frac{k}{2} \qquad k \text{ entier}$$

A un instant quelconque $t = p \,.\, T/2$ l'aspect de ce champ sera le suivant :

Dans le plan P_1 perpendiculaire à Ox, situé à la distance x de O, on aura un faisceau de vecteurs égaux et parallèles. Dans le plan P_2, situé à $x + \frac{\lambda}{2}$ de O, on aura un faisceau de vecteurs égaux, parallèles, mais de sens contraire aux précédents, et ainsi de suite périodiquement ; la période sera λ.

Après un intervalle élémentaire de temps τ, c'est-à-dire à

$$t' = p \,.\, \frac{T}{2} + \tau$$

au même endroit (même x), il n'y aura généralement rien (car l'argument ne sera pas multiple de π). Mais après ce même intervalle de temps $t' = p \,.\, \frac{T}{2} + \tau$ à l'endroit $x' = x + \frac{\lambda}{T} \,.\, \tau = x + c \,.\, \tau$ la valeur de l'argument sera la même, donc $H = H_0$. Par conséquent, *la même configuration* subsiste à l'instant vivant qui suit, seulement elle est déplacée de $c\tau$ dans la direction des x positifs.

Ce déplacement se fait donc par bonds successifs, de valeur $\varepsilon = c\tau$, correspondant aux sauts τ du temps. La longueur d'onde λ et la période T varient donc d'une manière discontinue.

$$T = 2k\tau$$
$$\lambda = 2k\varepsilon$$

3. — Quanta.

Procédons ainsi qu'il a été indiqué auparavant : suivons en tout point la théorie classique, en admettant toutefois que les champs qui y figurent soient discontinus.

Considérons une onde plane et supposons que ses champs électrique et magnétique aient précisément la structure du champs étudié au paragraphe 2 :

$$H = H_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad E = E_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$T = 2k\tau \qquad k > 1.$$

Le phénomène est identique dans tout le plan perpendiculaire à Ox.

A un moment donné, la distribution des vecteurs le long d'un axe Ox, normal à l'onde, sera celle indiquée par la figure 2 :

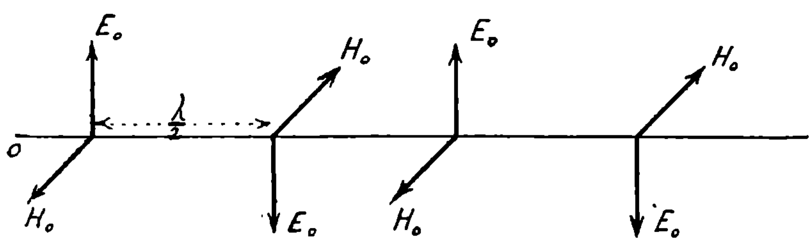


Fig. 2.

Suivant les indications du paragraphe 2, on peut trouver, à chaque instant t', la position des vecteurs H et E. Ceux-ci se déplacent dans les sens des x croissants, exactement comme dans la théorie classique. En procédant ainsi on trouve, *en un point fixe A* (voir la figure 2) :

Avant l'instant t : rien.

A l'instant t : le couple de vecteurs (H_0, E_0) perpendiculaires entre eux.

Après l'instant t : rien.

A l'instant $t + \frac{T}{2}$: le même couple (H_0, E_0), mais dirigé en sens contraire.

Après l'instant $t + \frac{T}{2}$: rien.

Par conséquent, pour un observateur en A, le couple (E_0 H_0) passe devant lui à l'instant t. Il n'est *ni précédé ni suivi par quelque chose;* de même, il n'y a pas d'autres vecteurs alentour dans une sphère suffisamment petite (car les champs sont aussi discontinus dans l'espace). *C'est un quantum* isolé. Il transporte une quantité d'énergie (dans l'hypothèse du quantum ponctuel, voir § 1, IVe partie) :

$$\frac{1}{8\pi}(E_0^2 + H_0^2) = U$$

Après $\frac{T}{2}$ secondes il passe devant A un autre quantum ponctuel, polarisé différemment, mais *transportant la même quantité d'énergie* U.

Donc en un point passent, toutes les T /2 secondes, des paquets d'énergie invariable U.

Ces quanta voyagent le long du rayon lumineux. En effet, d'après le § 2, l'ensemble des vecteurs se déplace vers les x croissants quand t varie.

Par conséquent, sur ce qu'on peut appeler une onde plane, on trouve des concentrations d'énergie en des points isolés. Un observateur immobile voit passer devant lui des paquets d'énergie constante. *C'est l'image même de la théorie actuelle des quanta de lumière.*

Dans ces conditions, peut-on parler d'une vitesse de propagation? D'après ce qui a été dit au § 2 la réponse est affirmative. En effet, au cours du voyage saccadé du quantum, *l'espace augmente à mesure que le temps fuit.* L'accroissement Δx de l'espace est toujours égal à ε et il concorde toujours avec un accroissement de temps *constant* lui aussi et égal à $\tau = \Delta t$. La quantité $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est ainsi bien définie et peut servir à mesurer l'analogue d'une vitesse de propagation, dont on voit immédiatement l'interprétation physique.

On déduit de la condition d'existence du vecteur H ou E, à savoir (§ 2)

$$\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} = \frac{k}{2} \qquad k \text{ entier}$$

$$\frac{\Delta t}{T} - \frac{\Delta x}{\lambda} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = c = \frac{\lambda}{T}$$

4. — Structure du quantum.

La manière dont nous avons attaqué le problème permet, pour la première fois, l'analyse de la structure du quantum, question d'une importance capitale pour l'étude complète des relations entre la matière et le rayonnement.

L'hypothèse que nous avons faite n'impose pas au quantum une structure déterminée jusque dans les détails. Elle est suffisamment élastique pour permettre un choix entre plusieurs alternatives, laissant à l'expérience le soin de la décision.

Deux conceptions sont en présence :

1° *Le quantum ponctuel.*

La conception du quantum d'énergie ponctuel a beaucoup de partisans à cause de sa simplicité apparente.

Dans notre hypothèse ce quantum est composé de deux vecteurs égaux, E et H, à angle droit. Il est *dirigé* (vecteur de Poynting) et d'orientation invariable dans l'espace, où il se meut par saccades avec la vitesse de la lumière c.

A une distance $\lambda/2$ (ou après $T/2$ secondes), vient un autre quantum de même énergie mais qui diffère du premier, en ce que, le vecteur de Poynting restant le même, la disposition des vecteurs H et E est inversée. C'est un quantum de même structure que le premier, mais qui aurait tourné de π, autour du rayon.

Pour plus de simplicité nous n'avons envisagé que le cas de la lumière polarisée rectilignement. Mais il est évident que pour trouver la représentation quantique générale de la lumière on peut procéder de la même façon : dans l'image classique on remplace les champs H et E par des champs discontinus et on obtient la structure du quantum correspondant. Les vecteurs considérés, donc le quantum lui-même, tourneront autour de la direction de propagation. Ainsi notre image fait correspondre au cas général d'émission un projectile quantique qui, tel un obus moderne, non seulement avance sur sa trajectoire mais tourne sur lui-même en même temps.

Poursuivant cette image, on pourrait comparer un corps lumineux à une série de mitrailleuses, placées l'une à côté l'autre et tirant en même temps. Chaque balle serait un quantum. Elle tourne sur elle-même ; dans chaque chapelet de balles, le mouvement de l'une d'entre elles est décalé sur le mouvement de celle qui précède et de celle qui suit. Si on suppose ce décalage égal à π on a justement l'image indiquée plus haut.

La conception du quantum ponctuel introduit la difficulté de l'existence de deux espèces de quanta différents. Mais, à la rigueur, une telle dualité ne devrait pas nous surprendre. N'en existe-t-il pas une dualité analogue en électricité? En tout cas, il convient de remarquer que la théorie des quanta de lumière d'Einstein, ne s'oppose nullement à cette différenciation. Elle suppose l'existence réelle des paquets d'énergie, mais ne distingue pas ces paquets entre eux.

Il peut se faire que ce double aspect soit inhérent à la nature des choses et qu'on puisse trouver une explication de ces deux espèces de quanta dans le mécanisme même de l'émission en les rattachant par exemple aux états initial et final de l'atome.

Mais si l'on n'admet l'existence que d'une seule espèce de quanta il faut adopter l'image du quantum spatial.

2° *Le quantum spatial.*

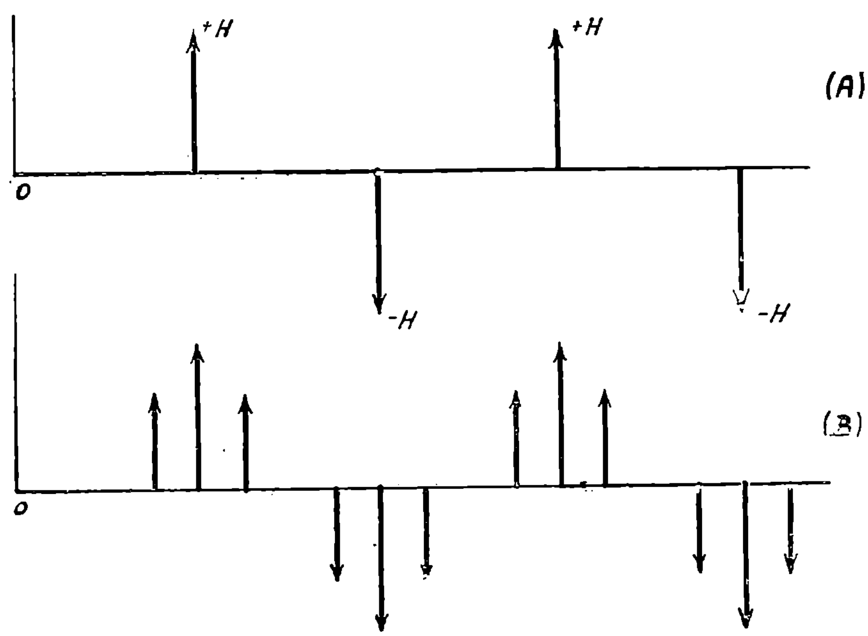


Fig. 3.

On rencontre assez souvent dans la littérature l'hypothèse que l'énergie du quantum est localisée dans un espace fini, ayant le plus souvent une dimension linéaire égale à λ.

Il faut observer que notre hypothèse fondamentale permettrait, si l'expérience l'exigeait, de rendre compte de cette particularité, et cela de deux manières différentes.

Tout d'abord nous avons supposé que les champs envisagés étaient de la forme A (voir fig. 3).

On pourrait les supposer de la forme B.

Si on prend comme énergie du quantum celle fournie par un triplet, les résultats sont les mêmes qu'auparavant, sauf que cette énergie est distribuée dans un volume fini.

Ou, en revenant à notre première manière de voir, on peut considérer un quantum comme composé de *deux couples de vecteurs* E et H, distants de λ. Les quanta seraient alors tous identiques ; ils auraient une dimension finie, proportionnelle à λ ; enfin, ils seraient filiformes, ayant une structure analogue à celle d'un dipole (*).

Le quantum doit comporter l'élément *fréquence;* par conséquent (puisque le quantum se meut avec la vitesse de la lumière) il devra contenir soit un élément de temps $(1/\nu)$ soit un élément d'espace (λ), en vertu de la relation $\lambda\nu = c$.

Il serait peut-être intéressant d'introduire l'élément temps ; mais comme il s'agit ici d'une discontinuité d'espace, nous allons admettre qu'il contient simplement, d'une certaine façon, l'élément λ. Quoi de plus naturel d'admettre qu'il occupe un espace cylindrique, de section constante et de longueur λ?

Les expériences actuellement connues ne permettent pas de choisir entre ces diverses structures. Néanmoins, les résultats de Bubb, de Kirchner et d'Auger indiquent nettement que l'émission d'un photoélectron par des rayons X polarisés est dirigée d'une façon générale dans le sens du vecteur E. Le fait que cette direction joue un rôle privilégié dans le phénomène photoélectrique — qui est justement un des phénomènes inexplicables sans la théorie des quanta — est un argument en faveur de l'hypothèse présentée ici.

Enfin, pour le choix définitif de la structure du quantum

(*) Voir aussi L. de Broglie, *Sur la théorie des quanta*, thèse, Paris, ou *Ann. de Phys.*, J.-F., 1925, p. 77.

il faut encore examiner les phénomènes de polarisation. Nous avons indiqué (§ 2) que la manière dont H et E sont discontinus a été choisis de façon à nous laisser une latitude suffisante pour adopter une assez grande variété de structures possibles. Seul un examen de tous les faits expérimentaux connus, poursuivi suivant la méthode que nous avons signalée plus haut, permettrait de fixer notre choix.

Nous ne tenterons pas cet examen ici et nous nous bornerons dans ce qui suit à ne considérer que la lumière polarisée rectilignement, en adoptant la structure du quantum spatial décrit dans le § 4.

TROISIÈME PARTIE

LA COHÉRENCE DE LA LUMIÈRE

Nous avons indiqué, dans ce qui précède, une méthode empirique pour choisir entre les différentes hypothèses relatives à la structure d'un quantum de lumière. Il suffit d'imaginer que les vecteurs H et E de la théorie de Maxwell sont discontinus et d'isoler dans l'espace un groupement d'énergie constante qui représentera le quantum.

Mais on aperçoit immédiatement l'objection qui peut être faite à cette manière de procéder. En effet, les quanta de lumière ainsi définis seront toujours distribués sur le rayon d'une façon régulière, *à des distances égales* (voir, par exemple, IIe partie, § 3).

Par hypothèse, ils sont émis suivant un rythme déterminé; *la lumière qu'ils constituent est donc cohérente par définition*. C'est d'ailleurs cette propriété qui nous permettra d'expliquer les phénomènes d'interférence, au moyen du quantum de lumière adopté (voir IVe partie, chap. II).

Ainsi, notre hypothèse fondamentale sur les champs H et E dans le vide, en contient implicitement une deuxième, qui, elle, est relative au mécanisme de l'émission. Nous ne pouvons donc pas prétendre à expliquer les interférences, puisque l'hypothèse de la cohérence est déjà contenue dans nos suppositions initiales. Il faut appliquer la méthode que nous avons indiquée, exclusivement pour déduire la structure du quantum de lumière, et démontrer ensuite *autrement*, que la lumière est cohérente.

Cependant, le fait de la cohérence présente une certitude expérimentale très grande. Il semble donc naturel de partir de cette certitude pour édifier la théorie de la lumière. Mais aujourd'hui, on adopte plutôt une tendance contraire : on veut *déduire* les phénomènes d'interférence, c'est-à-dire la propriété de cohérence, d'autres hypothèses ou axiomes posés préalablement. Cela paraît plus satisfaisant à l'esprit ; et quand on parle de l'antagonisme entre la théorie des quanta et la théorie ondulatoire on veut tout simplement dire qu'on ne peut pas déduire de la première, la propriété de cohérence de la lumière.

Notre étude serait donc, en quelque sens, incomplète, si nous ne nous efforcions pas de montrer que les trains de quanta de lumière que nous faisons intervenir sont effectivement cohérents. Le raisonnement sommaire que nous allons présenter tend à réduire cette propriété à d'autres que nous estimons aujourd'hui plus évidentes ; mais, dans notre esprit, c'est la certitude de l'existence d'une cohérence que nous mettons au premier plan et c'est elle qui servira plutôt à étayer la validité des raisonnements qui suivent.

1. — Cohérence et quanta (*).

Dans le cas idéal envisagé ici, l'hypothèse de la cohérence se traduit par la supposition que les quanta de lumière se suivent à des distances égales à la longueur d'onde λ ; ou — ce qui revient au même — que deux émissions successives se produisent à des intervalles de temps égaux à $\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\nu} = T$

Dans le cas réel cette condition est trop restrictive. Comme on le verra, par la suite, il suffit que les quanta de

(*) La première partie de la démonstration ci-après (§§ 1-6) a été publiée dans le *Journal de Physique*, t. IX, 1928, p. 73.

lumière soient émis à des intervalles variables τ_i, mais toujours *égaux à un multiple entier de T;* statistiquement l'aspect des franges d'interférence sera le même.

Ceci indiqué, le principe de la solution proposée est le suivant. Observons qu'exprimer la cohérence de la lumière revient à dire que τ_i ne peut pas avoir n'importe quelle valeur, mais qu'il doit être un multiple entier de $T = \frac{1}{\nu}$. Cette limitation fait penser, par analogie, à celle que le premier postulat de Bohr impose à l'atome : celui-ci ne peut pas se trouver dans n'importe quel état mécaniquement possible, mais seulement dans un état stationnaire, bien défini par les conditions de quanta.

Nous croyons que la propriété qui impose à la lumière la cohérence est de même nature que celle qui restreint le nombre des états possibles de l'atome.

La condition de cohérence est une condition de quanta.

Les conditions de quanta connues, sont relatives à un atome qui ne rayonne pas et ne font intervenir que les coordonnées q et les moments p. Nous pensons que si l'on quantifie complètement le système formé par un atome émetteur, on trouvera précisément outre les conditions connues, celle qui impose la cohérence ; elle contiendra le temps et sera le pendant des conditions de quanta classiques, qui ne contiennent que des coordonnées et des moments.

De cette façon, la propriété de cohérence résultera directement des deux postulats fondamentaux de Bohr. Il semble difficile aujourd'hui de réduire cette propriété à quelque chose de plus intuitif ou de mieux compréhensible.

Nous allons donc écrire les conditions de quanta les plus générales et nous allons les appliquer à un atome qui rayonne en tombant d'un niveau E_2 à un niveau E_1.

2. — Conditions complètes de quantification.

L'énoncé le plus général des conditions de quanta, qui montre en même temps leur signification profonde, a été donné par Léon Brillouin (*) ; c'est son analyse que nous suivrons ici.

L'équation générale de Schrödinger d'un système quelconque étant

$$\text{(1)} \qquad \text{div. grad. } \psi - \frac{4\pi i}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{8\pi^2}{h^2}F\psi = 0$$

Brillouin pose

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}S}$$

Dans le cas d'un système conservatif, on a :

$$S = Et + A(q)$$

E étant la constante de l'énergie et A (q) une fonction qui ne dépend que des coordonnées $q_1 \dots q_n$, et a des déterminations multiples : en un point $q_1 \dots q_n$, elle est de la forme

$$A = A_0 + \Sigma m_i I_i$$

m_i étant des entiers et I_i des constantes appelées périodes.

Suivant Brillouin, *les conditions de quanta s'obtiennent en égalant à* nh *les périodes de la fonction d'action* A (q)

$$I_i = n_i \,.\, h$$

Cet énoncé ne vise que les systèmes à énergie constante. Mais l'équation (1) est valable aussi pour les systèmes à énergie variable. Pour ces systèmes il est naturel de généraliser, en gardant l'énoncé du théorème, mais en y introduisant la fonction d'action complète S, à la place de A*(q)*.

Nous prendrons donc désormais, comme *conditions de*

(*) L. Brillouin, *Journal de Physique*, VII, 353, 1926.

quanta généralisées, les relations qui s'obtiennent en égalant à des multiples entiers de h, *les périodes de la fonction S, définie par l'équation en* ψ *de Schrödinger, quand on y fait*

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S}$$

3. — Périodes de la fonction S.

Avec ces conditions complètes :

a) *Si le système possède une énergie constante E,* on peut poser comme Brillouin :

$$S = Et + A(q)$$

Les périodes de S seront alors identiques aux périodes de $A(q)$, puisque le terme $E.t$ n'en fournit pas de nouvelles. *Le nouvel énoncé redonne donc, dans ce cas, les valeurs classiques.*

b) *Si l'énergie du système est variable,* on ne peut rien affirmer, *a priori,* ni même que le système est quantifié. Tout dépend des résultats d'une étude — à faire — sur les valeurs caractéristiques de l'équation (1). Mais *si nous admettons le deuxième postulat de Bohr, toute incertitude disparaît.*

Supposons, en effet, que le système demeure un temps τ_i dans un état stationnaire d'énergie E_2, et qu'il passe brusquement dans un autre état E_1, où il demeure τ_{i+1} et ainsi de suite. Tant que le système reste dans l'état E_2 il ne cesse d'être conservatif, nous sommes dans le cas précédent et nous pouvons écrire :

$$S = E_2 t + A_2(q)$$

Nous sommes sûrs que $A_2(q)$ ne dépend pas du temps t et que ses périodes sont telles, qu'*elles fournissent les mêmes conditions de quantification que celles de la fonction* $A(q)$

définie précédemment. Pour chaque intervalle τ_k de la vie de l'atome, nous pouvons écrire une relation de la forme

$$S = E_k \,.\, t + A_k(q)$$

seul k étant différent.

Les périodes de $A(q)$ définissent les états stationnaires. Si donc S possède une autre période distincte de celles-là elle ne pourra provenir que du terme $E_k \,.\, t$. C'est ce terme que nous allons examiner en détail, dans ce qui suit.

4. — Cohérence. Cas particulier.

Démontrons que *si l'on considère un atome de Bohr dont l'énergie varie périodiquement par quanta* $h\nu$, *le temps* τ *qui s'écoule entre une émission et une absorption est un multiple entier de* $\frac{1}{\nu}$.

La valeur de S pour un instant et une configuration donnés, est la forme :

$$S = S_i + \Sigma m_i I_i \qquad m_i \text{ entiers.}$$

On trouvera toutes les périodes en prenant les coefficients I_i des nombres entiers m_i. Pour trouver la valeur de S, nous partirons avec une détermination quelconque, d'un instant initial $t = t_0$ et d'une configuration donnée $q^0{}_1 \ldots q^0{}_n$ et nous ferons évoluer le système jusqu'en $q_1 \ldots q_n, t$.

Si nous faisons cette opération, *en laissant les q constants*, les périodes classiques — celles de $A(q)$ — n'apparaîtront pas et il ne restera dans l'expression de S que la période qui nous intéresse, celle qui correspond à la variable temps. A cause de la séparation des variables q et t dans l'expression de S, $S = E_k t + A_k(q)$, la période calculée ainsi est justement la période cherchée, celle qui apparaîtrait si les q variaient.

Ceci étant posé, cherchons le diagramme de S en fonction de t, à q constants : $S = E_k t + \text{const.}$

Une observation est essentielle à ce sujet :

Dans les circonstances habituelles, si le temps varie d'une manière continue, *la fonction S reste continue même si l'énergie varie brusquement de E_1 à E_2.*

En effet, le terme en t n'est pas $E_k t$, mais, en fait, $\int_{t_0}^{t} E_k . dt$ d'après l'équation de Jacobi. Ce terme reste continu en t même avec E discontinu. S n'est d'ailleurs définie qu'à une constante additive près ; l'adjonction de cette constante dans $\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S}$ ne change pas l'équation (1).

On peut encore considérer la fonction d'action classique S_0, première approximation de S. On a :

$$S_0 = \int_{t_0}^{t} L dt$$

L étant la fonction de Lagrange et l'intégrale étant prise sur une trajectoire, dans l'espace de configuration. *S est continue même si E varie brusquement,* pourvu qu'elle ne passe pas par l'infini, cas que nous excluons. Il est facile de former une fonction L′ telle que :

$$S = \int_{t_0}^{t} L' dt$$

et de répéter le même raisonnement point par point.

Avec ces observations on trace aisément le diagramme de variation de S en fonction de t (fig. 4).

La pente de OA est E_2, celle de AB est E_1. Aux points A, B..., ou E varie, S reste continue.

En un point M quelconque la valeur de S sera :

$$S = E_2 t + 2n\tau \ (E_1 - E_2)$$

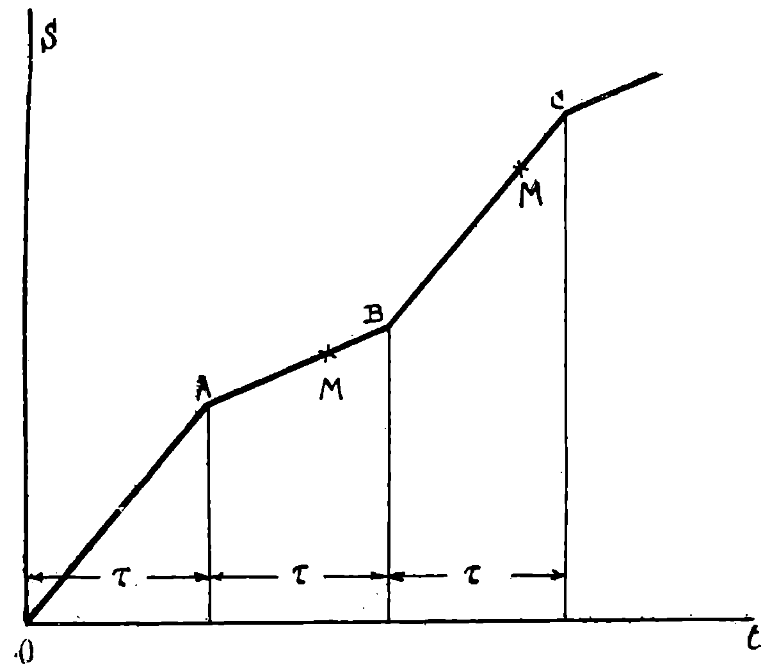


Fig. 4.

si M se trouve sur un segment parallèle à OA, c'est-à-dire si l'atome possède en ce moment l'énergie E_2, ou bien :

$$S = E_1 t + (2n + 1)\,\tau\,(E_2 - E_1)$$

si M se trouve sur un segment parallèle à AB, c'est-à-dire si l'atome possède l'énergie E_1.

De toute façon, S est de la forme

$$S = E_k t + m\,(E_2 - E_1)\,\tau \qquad (m \text{ entier}).$$

Pour une énergie et un temps donnés, S n'est pas fixée d'une manière univoque. Elle n'est déterminée qu'à une constante additive près, qui se présente sous la forme du produit de $\tau\,(E_2 - E_1)$ par un nombre entier. Par conséquent, l'expression $\tau\ (F_2 - E_1)$ est ce que nous avons appelé une période de S.

Nous justifieront plus amplement dans les paragraphes 8 et 9 ce mode de calcul. Nous y étudierons également la nature de cette période et nous montrerons qu'elle est *identique* à celle des périodes de la fonction A *(q)*, c'est-à-dire *aux expressions que nous posions égales à* nh, *dans l'ancienne théorie des quanta.*

Cette nouvelle période nous fournira une nouvelle condition de quanta :

$$\tau\ (E_2 - E_1) = nh$$

et avec $E_2 - E_1 = h\nu$ (ν = fréquence émise)

il résulte : $h\nu\tau = nh$

$$\tau = \frac{n}{\nu} = n\,.\,T$$

Donc l'intervalle de temps qui s'écoule entre une émission et une absorption est un multiple entier de la période de la lumière émise. *A fortiori*, le temps qui s'écoule entre deux émissions le sera. Si donc la lumière est cohérente, la *distance entre deux quanta émis sera un multiple entier de la longueur d'onde.*

5. — Cohérence. Cas général.

Soit un atome, d'un corps incandescent par exemple, émettant suivant les règles de Bohr. Supposons, de plus, que ce corps ait atteint un équilibre de régime. L'atome considéré recevra alors de l'énergie, par choc par exemple ; il montera du niveau E_1 au niveau E_2 où il restera un temps τ_1 après quoi il retombera sur le niveau E_1 où il séjournera τ_2 secondes et ainsi de suite. Si on représente la valeur de l'énergie en fonction du temps le diagramme sera celui qu'indique la figure 5.

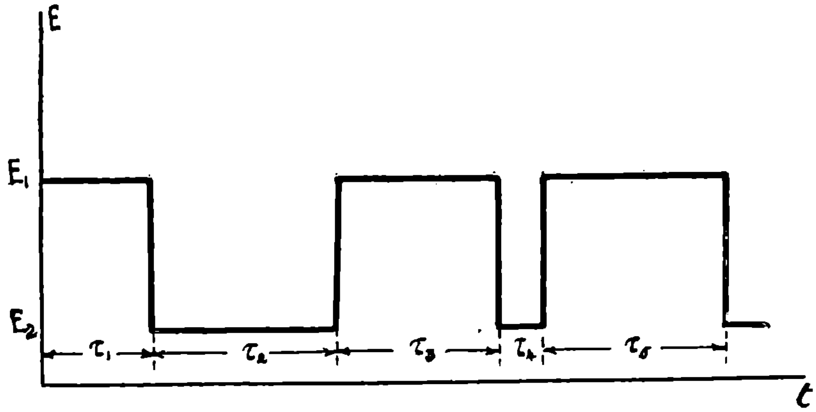


Fig. 5.

Les valeurs de τ_i — intervalle pendant lequel l'atome sera dans un des états E_1 ou E_2 — ne suivront aucune loi ; tout au plus pourrait-on établir une relation statistique, exprimant l'existence d'un régime permanent.

Une analyse exactement semblable à la précédente nous montre que l'expression de la fonction S est :

$$S = E_1 t + (E_2 - E_1) \sum_i \tau_i \qquad i = 2, 4, 6, \ldots\ 2n$$

ou bien

$$S = E_2 t - (E_2 - E_1) \sum_k \tau_k \qquad k = 1, 3, 5, \ldots\ 2n - 1$$

S n'est déterminée qu'à une constante additive près :

$$(E_2 - E_1) \sum_j \tau_j = h\nu \sum_j \tau_j = \sum_j h\nu \,.\, \tau_j \,.$$

Elle n'est plus, à proprement parler « multipériodique », mais elle reste *indéterminée*, de la forme $S = S_0 + \sum_j h\nu \,.\, \tau_j$. Or, *c'est là le fait essentiel qui permet la quantification Pour quantifier le phénomène, il suffit de poser*

$$(E_2 - E_1)\ \tau_j = n_j h \qquad n \text{ entier}$$

Pour justifier cette affirmation nous nous servirons toujours de l'analyse de Brillouin.

Celle-ci repose, *comme toute la théorie moderne*, sur l'axiome que l'équation de Schrödinger doit avoir une solution ψ, finie, continue et à détermination simple. Or,

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}S}$$

Si S est multipériodique $S = S_1 + \Sigma\, m_l I_l$ (m entiers), ψ sera univoque si l'on pose $I_l = n_l h$ (n entiers), car l'indétermination de S sera compensée par la périodicité de l'exponentielle, en vertu de la relation :

$$\frac{2\pi i}{h}\Sigma m_l\, I_l = 2\pi i\, \Sigma m_l\, n_l$$

(cf. L. Brillouin, *loc. cit.*).

Mais, si S est simplement indéterminée de la forme :

$$S = S_1 + \Sigma\, k_j$$

ψ sera encore univoque, si l'on pose :

$$k_j = n_j . h \qquad (nj \text{ entiers})$$

car

$$\frac{2\pi i}{h}\Sigma k_j = 2\pi i\, \Sigma n_j$$

Il résulte de cette analyse que nous devons poser :

$$(E_2 - E_1)\, \tau_j = n_j h \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

On peut remarquer qu'il n'y a pas d'ambiguité sur le nombre de termes de la somme $(E_2 - E_1)\, \Sigma\, \tau_j$ qu'il faut égaler à nh. Ce nombre de termes étant arbitraire, on peut se limiter à un seul, et on tombe bien sur la condition précédente.

Cette condition donne, toujours avec $E_2 - E_1 = h\nu$:

$$h\nu\tau_j = n_j . h$$

$$\boxed{\tau_j = \frac{n_j}{\nu} = n_j . T} \qquad \tau_j \text{ entiers}$$

Donc entre une émission et une absorption consécutives (et *a fortiori* entre deux émissions) il s'écoule un temps, multiple entier de la période de la lumière émise ou absorbée. La distance entre deux quanta de lumière émis est donc un multiple entier de la longueur d'onde. *La lumière est donc nécessairement cohérente.*

***

Nous avons obtenu ce résultat en utilisant presque sans modification la théorie des quanta sous sa forme actuelle. Le seul apport nouveau a été une généralisation minime des conditions de quantification, en tenant compte d'une variable qu'on négligeait à tort jusqu'à présent, à savoir le temps. En appliquant cette idée, on ne modifie pas la théorie, on la complète. Nous constatons qu'en ce domaine aussi, la conception de Minkowski sur le rôle de la variable temps se montre féconde en résultats.

On peut donc dire que l'explication de la cohérence était déjà contenue dans les postulats de Bohr et dans l'équation de Schrödinger. La théorie des quanta n'est nullement en contradiction avec les faits expérimentaux qui démontrent cette cohérence, avec les interférences par exemple. Tout au contraire, c'est elle qui exige l'existence de cette propriété de la lumière et qui, par conséquent, aurait pu faire prévoir ces expériences.

Remarquons encore (cf. § 3) que les conclusions que nous avons tirées sont basées essentiellement sur le deuxième postulat de Bohr, qui seul nous a permis d'écrire :

$$S = E_k . t + A_k(q).$$

Tous les résultats de la théorie des quanta *et, en plus, la cohérence,* sont donc qualitativement compris dans les deux postulats de Bohr. On ne peut manquer d'admirer l'intuition, vraiment géniale, qui a réussi à condenser en ces deux énoncés simples, les principes qui régissent un nombre immense, probablement la totalité, des phénomènes naturels.

6. — Conditions de quanta.

L'énoncé des conditions de quanta donné par L. Brillouin est tout à fait général et possède, nous semble-t-il, une signification profonde.

L'étude complète de cet énoncé serait certainement d'une grande utilité. Dans ce qui suit nous allons l'amorcer, dans le but de donner l'esquisse d'une méthode générale, qui pourrait être utilement employée à cet effet.

Cependant, pour des raisons de commodité, nos considérations ne porteront pas sur la fonction S de Brillouin, mais sur S_0, la fonction d'action classique, qui en est la première approximation :

$$S = S_0 - \frac{h}{2\pi i} S_1 + \ldots + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n S_n + \ldots$$

(cf. L. Brillouin, *loc. cit.*).

Les conclusions ne seront pas modifiées qualitativement, au moins dans la majorité des cas connus ; on sait, en effet, que dans la plupart des cas classiques, écrire les conditions de quanta revient à égaler à nh les périodes *de* S_0.

L'utilisation de S_0 nous facilitera l'énoncé des propositions générales et nous permettra de nous rendre compte du mécanisme de la quantification. On pourra examiner les équations écrites au paragraphe précédent, les retrouver d'une autre manière, et constater qu'elles sont légitimes. On pourra se rendre compte du caractère des conditions de Sommerfeld et *constater qu'on aurait pu en déduire la propriété de cohérence avant même que ne fût découverte l'équation de Schrödinger.*

Dans les paragraphes suivants, pour ne pas traîner un indice inutile, nous désignerons la fonction d'action classique S_0, par S. Nous n'utiliserons plus la fonction S de Brillouin ; aucune confusion n'est donc possible.

7. — Représentation de la fonction d'action.

Soit un système mécanique défini par les variables p_i, q_i ($i = 1, 2, 3,.. n$), fonctions du temps t, soit H (p, q, t) son énergie, S la fonction d'action et L (q, q', t) la fonction de Lagrange associée.

A cause des relations

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

et de l'équation de Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(p, q, t) = 0$$

on a évidemment

$$dS = \Sigma \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \Sigma p_k dq_k - H dt$$

et aussi

$$dS = L dt.$$

Si nous posons

$$t = q_{n+1}, \text{ et } H = p_{n+1}$$

on aura

$$dS = \sum_1^{n+1} p_i \, dq_i$$

fonction des $n + 1$ coordonnées q, et $n + 1$ moments quelconques.

Par définition, on a

$$S = \int_{t_0}^{t} L \, (q, q', t) \, dt$$

intégrale prise dans l'espace de configuration à n dimensions $q_1 ... q_n$, le long d'une trajectoire C, d'équation $q_i = q_i(t)$. Donc

$$S = \int_C (\Sigma p_i \, dq_i - H dt) \tag{2}$$

Considérons maintenant un espace (E_{2n+2}) à $2n + 2$ dimensions $p_1 ... p_{n+1}$, $q_2 ... q_{n+1}$. Un point (p_i, q_i) fixe l'état du système à un moment donné; l'évolution du système correspondant à une trajectoire C à partir d'un moment t_0 jusqu'au moment t, est représentée par une courbe Γ, d'équations $p_i = p_i(\tau)$, $q_i = q_i(\tau)$.

L'action S peut s'écrire :

$$S = \int_\Gamma \Sigma p_i \, dq_i \tag{3}$$

l'intégrale étant prise suivant Γ dans l'espace E_{2n+2}. En effet, cette expression signifie qu'on remplace p_i, q_i, par leurs valeurs sur la courbe Γ et qu'on intègre. Or, ces valeurs sont, par définition, les mêmes que les valeurs de q_i et $p_i = f_i(\dot{q},..)$ sur la courbe C. Donc

$$\int_\Gamma = \int_C$$

Dans (2), p_i est une fonction, dans (3) c'est une coordonnée.

Considérons maintenant le plan (p_i, q_i) et projetons la courbe Γ sur ce plan, « parallèlement » à E_{2n}. Soit Γ_i cette projection, dont les équations dans ce plan sont

$$p_i = p_i(\tau) \qquad q_i = q_i(\tau)$$

On a, suivant (3)

$$S = \sum \int_\Gamma p_i \, dq_i$$

Considérons le terme $\int_\Gamma p_i dq_i$. Pour le calculer, il faut substituer $p_i = p_i(\tau)$, $q_i = q_i(\tau)$ et intégrer; or, ces équations représentent Γ_i dans le plan (p_i, q_i). Donc

$$\int_{\Gamma} p_i dq_i = \int_{\Gamma_i} p_i dq_i$$

égale elle-même à une certaine aire attachée à Γ_i. La fonction d'action peut donc finalement s'écrire

$$S = \sum \int_{\Gamma_i} p_i dq_i = \sum \text{ aires } \Gamma_i = \text{somme des aires } \Gamma_i,$$

l'aire Γ_i étant l'aire comprise entre l'axe des q_i et la courbe Γ_i.

8. — Caractère de la fonction d'action.

Le résultat du paragraphe précédent est digne d'attention à plus d'un titre. Il donne une représentation de la fonction d'action, simple et commode pour les questions que nous avons en vue.

Il suffit d'imaginer, tracée dans E_{2n+2} la courbe Γ, qui caractérise le mouvement. Ses « projections » sur les divers plans p_i, q_i, sont les courbes Γ_i. La somme des aires planes, comprises entre les axes q_i et des tronçons correspondants de Γ_i représente la fonction S. Si Γ_i sont toutes des courbes fermées, S est égale à la somme de leurs aires.

De cette façon, on se rend aisément compte du caractère de la fonction S et de ses périodes.

S est l'intégrale d'une différentielle totale ; elle jouira donc des propriétés d'une telle intégrale. Elle pourra être multipériodique. On peut distinguer deux types de périodes, à savoir :

1° *Celles qui proviennent d'un point singulier* des p, exprimés en fonction des q', (p. ex. p_i infini, cas exclus en mécanique et dans ce qui suit) et

2° Celles qui proviennent simplement du fait *qu'on parcourt plusieurs fois une courbe fermée et que, par conséquent, l'aire totale est un multiple entier d'une aire déterminée.*

Cette constatation justifie la manière dont nous avons calculé et dont nous calculerons les périodes de S. En un point, S a des déterminations multiples

$$S = S_1 + \Sigma m_i I_i$$

Mais (si, p. ex. S ne dépend que d'une seule courbe Γ_i), la valeur de S entre deux points A et B de Γ est bien déterminée : c'est une aire de valeur connue. Si Γ_i est fermée, $S = \int_{AB} + m \, . \, \text{aire}\, \Gamma_i$, m étant le nombre de fois qu'on la parcourt et qui est connu si Γ est connue. L'aire $\int p_i dq_i$ de Γ_i est la période cherchée. Si donc nous pouvons mettre S sous la forme $S = S_1(q) + m \, . \, I$, telle que S_1 ne dépende pas de m, et I ni de m, ni des q, il est clair qu'on aura comme période l'expression I. Il y a indétermination apparente, car l'aire Γ_i peut se décomposer en plusieurs autres et on a

$$mI = 2m\left(\frac{I}{2}\right)$$

Mais cette indétermination est levée en choisissant pour m, le plus petit entier qui satisfasse à la relation ci-dessus.

Dans toute la théorie des quanta on n'a utilisé jusqu'à présent que des périodes de la deuxième catégorie.

Dans le paragraphe suivant nous allons examiner quelques cas particulièrement intéressants, pour arriver à traiter le problème de la cohérence.

9. — Périodes et quantification. Conditions de Sommerfeld.

1° *Supposons que* Γ *soit une courbe fermée;* les Γ_i le seront aussi. On aura évidemment

$$S = S_1 + m\Sigma A_i \qquad (m \text{ entier})$$

S aura donc une seule période distincte $I = \Sigma A_i$. C'est le cas de ce qu'on peut appeler les fonctions complètement périodiques.

On voit que chaque terme $\int_{\Gamma_i} p_i dq_i$ contribue à la valeur de la période I de S, pour une valeur déterminée. En général, cette intégrale n'est pas nécessairement égale à une période distincte de S. Il y a cependant des cas très étendus où cela a lieu et où la condition de quantification s'écrit sous la forme de Sommerfeld $\int p_i dq_i = nh$. Remarquons que dans le cas actuel les conditions de Sommerfeld entraînent automatiquement la condition $I = k \, . \, h$, k entier.

2° Supposons que Γ soit telle que seulement ses « *projections* » sur les plans (p_i, q_i) soient des courbes fermées. Ce cas est très général, car il y a une infinité (d'ordre n) de courbes répondant à la définition donnée. En particulier, *ce cas contient le cas des systèmes quasi-périodiques*, les coordonnées ayant toujours un mouvement de libration entre deux valeurs définies q^0_i et q^1_i.

S est multipériodique, car, si l'on parcourt Γ dans le même sens, on parcourra nécessairement plusieurs fois les courbes fermées Γ_i et S aura la forme

$$S = S_1 + \Sigma m_i A_i \qquad (m \text{ entiers})$$

La valeur des périodes dépend de Γ ; chaque terme y contribue pour $\int_{\Gamma_i} p_i dq_i$. Néanmoins il existe un cas général où ces périodes sont directement calculables et précisément égales à $A_i = \int_{\Gamma_i} p_i dq_i$.

Supposons, en effet, que les variables soient séparées. On sait que dans ce cas p_i dépend seulement de q_i. Donc

$\int_C p_i dq_i$ et $\int_{\Gamma_i} p_i dq_i$ sont indépendantes de C ou de Γ_i et ne dépendent que des valeurs limites q^0_i et q^1_i. L'ensemble de ces valeurs limites détermine dans E_{2n+2} deux points Q_m et Q_M.

Pour trouver S il n'est pas nécessaire de parcourir Γ ; il suffit de passer, par n'importe quel chemin, de Q_m en Q_M et y revenir, Or, ce passage peut se faire de façon à ce que la courbe parcourue se trouve tout entière dans une ou plusieurs variétés à deux dimensons « parallèles » au plan p_i, q_i, c'est-à-dire telle que pour tous ses points :

$$\begin{array}{ll} p_k = p_i & k = i \\ p_k = 0 & k \neq i \end{array}$$

Dans ce cas on aura simplement $S = n\int p_i dq_i = n \, . \, A_i$

A_i sera, *elle-même*, une période. Chaque terme fournira donc une période et pas seulement un apport additif. On pourra écrire $S = \Sigma n_i \int p_i dq_i$, les n_i étant des entiers arbitraires.

3° *Courbe* Γ *pseudo-hélicoïdale.*

D'autres courbes peuvent, semble-t-il, conduire à une fonction S multipériodique.

Dans les cas examinés, la multipériodicité apparaît par le fait que l'aire A_i se répète un nombre entier de fois ; les aires successives se recouvrent, Γ étant fermée. Mais cette condition n'est pas essentielle ; si ces aires égales se suivaient indéfiniment, accolées les unes aux autres, il semble que la périodicité doive subsister. Autrement dit, Γ_i peut ne pas être fermée ; il suffit que p_i soit périodique en q_i, comme dans la figure 6 par exemple.

Considérons donc une courbe Γ telle que sa projection Γ_i soit une courbe quelconque, périodique $p_i = f_1(q_i)$. Cherchons si elle conduit à une nouvelle période et calculons la valeur de celle-ci. Pour fixer les idées, raisonnons sur une sinusoïde

$$p_i = \mathrm{P} + \mathrm{P}_0 \sin q_i$$

et pour simplifier admettons que la période provienne exclusivement du terme $\int p_i\, dq_i$.

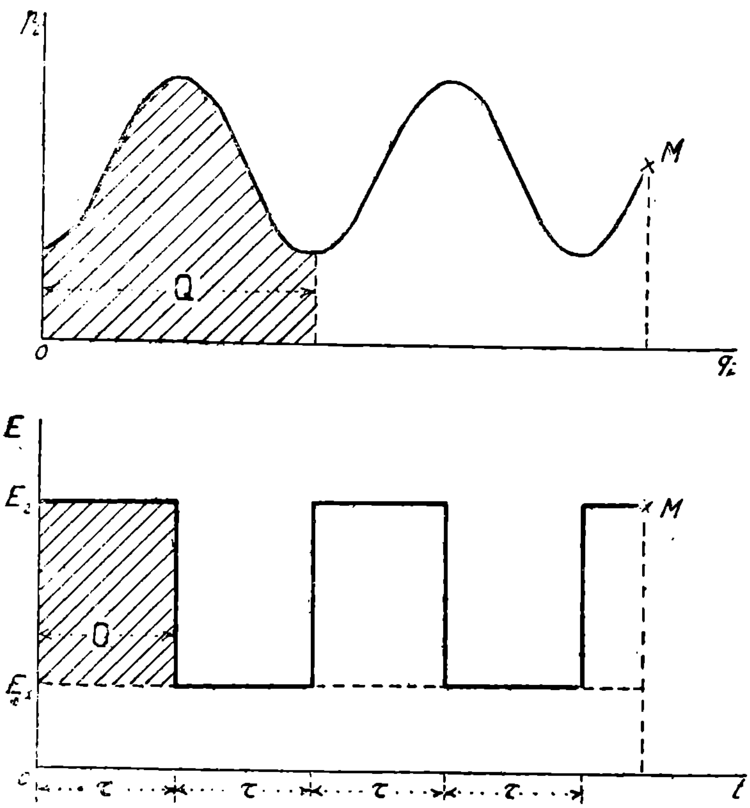


Fig. 6.

Dans l'aire que cette courbe définit, il apparaît tout naturellement une aire partielle qui se répète m fois (fig. 6)

$$\mathrm{R} = \int_0^{2\pi} p_i\, dq_i = \int_0^{\mathrm{Q}} p_i\, dq_i$$

Q étant, en général, la période de $f\,(q_i)$.

Doit-on conclure que la nouvelle période est justement R?

Pour répondre à cela, nous rappellerons que pour trouver la période il suffit de mettre S sous la forme

$$S = S_1\ (q) + m \,.\, I$$

avec :

a) m entier et minimum,

b) I constante, indépendante de m et q,

c) $S_1\ (q)$ indépendante de m.

S doit donc satisfaire formellement à :

$$\frac{\partial S}{\partial m} = \text{constante} = I = \text{période}$$

En tenant compte de ces conditions, on peut affirmer que l'aire $\int_0^Q p_i\, dq_i$, définie par la courbe $p_i = f_i\ (q_i)$, ne peut pas fournir une période. On a, en effet, pour S :

$$S = \int_0^{mQ} + \int_{mQ}^{q_i} = m \int_0^Q + \int_{mQ}^{q_i} = \int_{mQ}^{q_i} f(q_i)\, dq_i + m \,.\, R$$

Le second terme est bien de la forme m . I, *mais le premier contient toujours m;* donc R ne peut pas être une période.

La différence entre ce cas et les précédents provient de ce que les aires $\int_{\Gamma_i}$ sont indépendantes des axes, pour les courbes fermées, ce qui n'est pas le cas ici. Pourtant, une certaine périodicité étant manifeste, il peut se faire que dans certains cas particuliers il existe des périodes. Cherchons quelles sont les conditions pour que cela arrive.

Il faut, nous l'avons vu, que :

$$I = \text{constante} = \frac{\partial S}{\partial m}$$

Donc :

$$I = R - Q \,.\, f(mQ)$$

qu'on peut écrire :

$$Q \cdot f(mQ) = \int_o^Q - I = \text{fonction de } Q = \Phi\ (Q)$$

L'équation fonctionnelle $Q \cdot f(mQ) = \Phi(Q)$ admet comme seule solution : $f = p_i =$ constante.

Donc, dans le cas considéré il ne peut y avoir période, *que si le moment p_i est constant.* Dans ce cas F *(q)* étant la fonction primitive de *f(q)*, l'action s'écrit :

$$S = m\int_o^Q + \int_{mQ}^{q_i} = m\int_o^Q + F\ (q_i) - F\ (mQ)$$

$$\boxed{S = p_i q_i + m\left[\int_o^Q p_i dq_i - p_i Q\right]} \qquad (4)$$

En général, comme on le voit, le second terme est nul et S n'a pas de période. Mais deux cas d'exception peuvent se présenter, *l'un et l'autre* extrêmement importants.

A) p_i *continuellement constant.*

Dans ce cas l'action est proportionnelle à la variable q_i :

$$S = p_i \cdot q_i$$

En général, elle est à détermination simple, comme pour $q_i = t$. Mais si la variable q_i elle-même est périodique, si c'est une variable angulaire, $q_i = 2\pi \cdot m + \varphi_i$, S le sera aussi, et la nouvelle période sera $2\pi p_i$. *C'est le cas de l'oscillateur plan dans la théorie des quanta*, c'est le cas des variables angulaires.

B) p_i *est constant*, mais dans l'intervalle 0...Q, il saute, au moins une fois, d'une valeur constante p_i à une autre, toujours constante p_2 (fig. 6). En effet, dans ce cas, la parenthèse :

$$I = \left[\int_o^Q p_i dq_i - p_i Q\right] \qquad (5)$$

a une valeur différente de zéro, donc S admet une nouvelle période. C'est le cas de la variable $q_i = t$ et du moment $p_i = E$ d'un atome qui rayonne en régime permanent, cas que nous allons examiner de plus près.

10. — Applications.

La caractéristique des courbes Γ_i, que nous avons examinées dans le paragraphe précédent, est leur périodicité et l'existence des points à l'infini dans la direction q_i. Toutes les courbes fermées, examinées auparavant ont l'avantage de la simplicité, mais elles ne représentent pas *des systèmes mécaniquement possibles*. En effet, au moins une des variables, le temps $q_{n+1} = t$, aura toujours des points à l'infini. Par conséquent, Γ et Γ_{n+1} au moins, seront toujours des courbes non fermées. Cette circonstance n'apportera pas avec elle, en général, une nouvelle période ; par exemple, dans le cas d'un atome qui ne rayonne pas, on a simplement :

$$S = Et + A(q)$$

et l'apport du terme $E \cdot t$ est nul.

Mais, dans certaines circonstances, précisées plus haut, de nouvelles périodes font leur apparition, ce qui confère à ces cas une importance particulière.

Si on prend pour q la variable t, le temps, et pour moment l'énergie, $p_1 = E_1$, $p_2 = E_2$ on retombe sur le cas d'un atome, rayonnant suivant la loi de la figure 6, et que nous avons déjà examiné par une autre voie.

La formule (4), permet de calculer S ; on trouve

$$S = E_1 t + m\,(E_2 - E_1)\,\tau \quad \text{ou} \quad S = E_2 t - m\,(E_2 - E_1)\,\tau$$

suivant la position du point M. On retombe sur les mêmes formules par le calcul de l'aire comprise entre l'axe q_i et la courbe, en menant des parallèles par les points E_2 et E_1 (fig. 6).

En définitive, la période qui s'introduit est l'aire de la partie hachurée (fig. 6). La nouvelle condition quantique est celle qui précise la cohérence :

$$(E_2 - E_1)\ \tau = nh \qquad \tau = \nu = \frac{n}{\nu} = n.T$$

La conclusion est identique à celle obtenue antérieurement. Cela n'a rien d'étonnant, mais montre qu'*on aurait pu prévoir la propriété de cohérence en partant tout simplement des conditions de Sommerfeld*, sans faire appel à l'équation de Schrödinger.

Enfin, nous ferons une dernière remarque. Nous n'avons pas étudié tous les cas possibles ou analytiquement imaginables ; les résultats peuvent donc être complétés par généralisation. Examinons cependant plus spécialement un des résultats du paragraphe précédent.

On a trouvé que, pour une courbe Γ « pseudohélicoïdale », il ne pouvait y avoir de période que si elle était formée de *tronçons parallèles à* $0q_i$ Traduisant ceci pour le cas de la variable temps, $q_{n+1} = t$, et du moment énergie on doit conclure qu'il n'y a de période que *si l'énergie varie par sauts entre des niveaux constants, déterminés.* L'existence d'une période entraîne l'existence d'une condition de quanta, qui dans ce cas est celle de la cohérence.

On doit donc induire — sous la réserve d'une démonstration complète et rigoureuse — que, si l'on admet la théorie des quanta, *la lumière ne peut présenter des phénomènes d'interférences que si l'émission et l'absorption se font suivant les règles de Bohr. L'émission continue, l'énergie variant sinusoïdalement avec le temps, est incompatible non seulement avec l'équilibre du rayonnement, mais aussi avec l'existence de la cohérence.*

On voit donc combien on est loin d'une « contradiction » entre les deux tendances, quantique et ondulatoire, qu'on oppose actuellement l'une à l'autre dans la Science.

*
* *

Les paragraphes qui précèdent nous prouvent que la lumière est cohérente, et cela sans faire appel à notre hypothèse fondamentale énoncée au début. Nous pouvons donc utiliser désormais cette hypothèse, pour le choix d'un quantum pouvant conduire à une explication des interférences, sans crainte de tautologie.

QUATRIÈME PARTIE

OBJECTIONS A LA THÉORIE DES QUANTA DE LUMIÈRE

La théorie des quanta de lumière se heurte aujourd'hui à deux écueils importants : l'explication des phénomènes d'interférence et de ceux qui s'y rattachent, et le problème de l'intensité de la lumière.

Nous allons les examiner tour à tour, en commençant par le second et nous allons montrer que, pour le vide, l'introduction de notre hypothèse fondamentale conduit à des conséquences qui semblent pouvoir leur apporter une solution satisfaisante.

Pour développer ces conséquences, il nous faut parfaire notre analyse du quantum en calculant son énergie. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

CHAPITRE PREMIER

INTENSITÉ DE LA LUMIÈRE

§ 1. — La relation de Planck-Einstein.

Notre description de la structure du quantum est suffisante pour nous permettre de calculer son énergie. Il faut tout d'abord remarquer qu'il ne peut être question dans ce qui va suivre de déductions mathématiques rigoureuses, car il s'agit ici de champs concentrés en un point, tandis que tous les théorèmes établis en Electricité supposent des champs s'étendant à l'infini. Nous allons donc essayer de trouver l'expression de l'énergie du quantum et la justifier après de notre mieux.

Soit en général un phénomène périodique de fréquence ν.

Soit H l'action totale définie par :

$$H = \int_0^t E\,dt \qquad E = \frac{dH}{dt}$$

E étant l'énergie comprise dans un volume donné.

De $E = \frac{dH}{dt}$ on déduit, en prenant la moyenne pour une période,

$$\frac{H_1 - H_0}{T} = E$$

$$E = (H_1 - H_0) \cdot \nu = \Delta H \cdot \nu \tag{1}$$

ou ΔH peut dépendre aussi de ν.

Ceci pour n'importe quel phénomène périodique.

Planck pose que, pour le processus de l'émission :

$$H_1 - H_0 = nh = \text{constante.}$$

Les quanta de lumière eux-mêmes contiennent de toute façon quelque chose de périodique ; on peut leur appliquer l'équation (1). La difficulté consiste à calculer ΔH.

En *Optique classique* on aurait pour une propagation par ondes planes perpendiculaires à Ox, polarisées, l'énergie comprise dans un cylindre *immobile* de longueur dx et de section unité :

$$dE = dE_E + dE_M = \frac{A^2}{4\pi} sin^2\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) dx$$

si A est l'amplitude maxima du champ magnétique mesurée en U. E. M.

Pour l'action correspondante pendant une période on aurait :

$$\Delta H' = \int_0^T dE\, dt = \frac{A^2}{4\pi} dx \int_0^T sin^2\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) dt$$

$$\Delta H' = \frac{A^2}{4\pi} \cdot \frac{T}{2} \cdot dx$$

Pour un cylindre de longueur λ.

$$\Delta H = \frac{A^2}{8\pi} \lambda T = E_c T = \frac{E_c}{\nu} \qquad (2)$$

E_c étant l'énergie *comprise dans le cylindre*, car $E_c = \frac{A^2}{8\pi} \lambda$. Ceci serait la valeur de ΔH en Optique classique. Remarquons que, toujours dans ces conditions, E_c représente aussi l'énergie contenue dans un cylindre de mêmes dimensions *se deplaçant avec la vitesse* c.

Cherchons pour le quantum de lumière une expression qui soit analogue à (2).

Nous avons vu qu'un quantum peut être envisagé comme un cylindre de hauteur proportionnelle à λ ; sa section qui est constante sera déterminée par les dimensions de la maille du réseau spatial, que définissent les champs.

Soit σ cette section et $E = \varepsilon$ l'énergie du quantum ; on a

$$\Delta H = \sigma \,.\, T \,.\, E.$$

Par conséquent on pourrait prendre, par analogie, comme énergie du quantum :

$$\varepsilon = \Delta H \, . \, \nu = \frac{\sigma A^2}{8\pi} \, . \, \lambda \, . \, T \, . \, \nu \text{ et avec } \lambda\nu = c$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c\sigma}{8\pi}\left(\frac{A}{\nu}\right)^2 \nu}$$

et le facteur h de l'équation de Planck s'écrirait :

$$h = \frac{c\sigma}{8\pi}\left(\frac{A}{\nu}\right)^2$$

A étant la valeur du champ magnétique ponctuel en U.E.M., ou électrique en U. E. S.

Voilà donc une expression qu'on pourrait adopter pour ε.

On peut encore y arriver de la manière suivante :

La densité d'énergie pour un champ continu, d'amplitude A est :

$$\frac{A^2}{8\pi}$$

Nous admettons que la même expression mesure l'énergie de notre champ, autour d'un de ses points de discontinuité.

D'autre part, pour un champ continu, l'énergie est proportionnelle au volume. Ce n'est certainement pas le cas pour le champ discontinu considéré. Néanmoins, pour un quantum, il est clair qu'il faut fixer ses limites spatiales, sans quoi il contiendrait plusieurs points de discontinuité et l'énergie ne serait pas déterminée.

D'autre part, il existe dans le train des quanta de lumière une certaine périodicité, précisément égale à λ, ou à un multiple de λ ; il faut en tenir compte et il semble bien que, pourvu qu'on se borne à des volumes proportionnels à λ, l'énergie qui y est contenue sera proportionnelle à ce volume.

Bref, par analogie avec le cas classique, on écrira que l'énergie du quantum est égale à son volume multiplié par l'apport des points de discontinuité, chacun étant compté $\frac{A^2}{8\pi}$ pour chaque champ. D'après ce que nous avons dit au § 4, II[e] partie, le quantum affectera l'une des deux formes indiquées dans les figures 7 et 8.

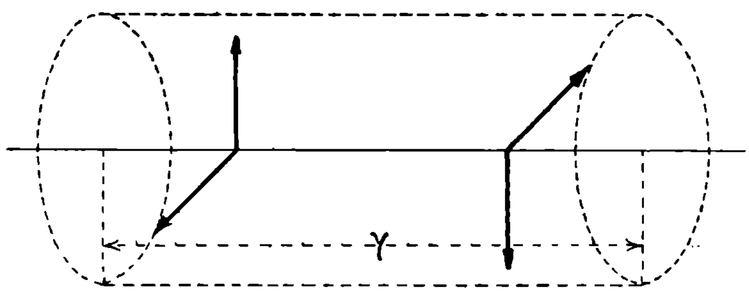


Fig. 7.

Dans ce cas, on aura :

$$\varepsilon = 4\,\frac{A^2}{8\pi}\,.\,\lambda\sigma = \frac{\sigma A^2 \lambda}{2\pi}$$

pour un quantum « spatial » ou bien :

$$\varepsilon = 2\,\frac{A^2}{8\pi}\,.\,\frac{\lambda}{2}\,.\,\sigma = \frac{\sigma A^2}{8\pi}\,\lambda = \frac{c\sigma}{8\pi}\left(\frac{A}{\nu}\right)^2 .\,\nu$$

pour un quantum ponctuel :

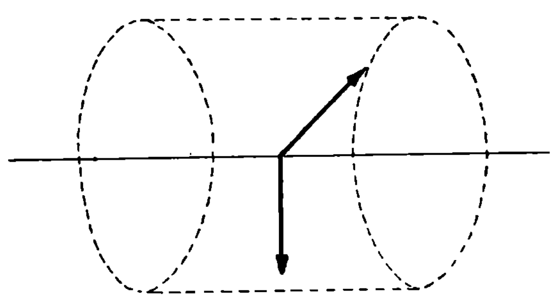


Fig. 8.

ou mieux *des quantités proportionnelles à celles-ci.*

Ainsi, nous considérons comme acquis, et c'est une hypothèse que nous allons prendre comme base, que *le facteur qui multiplie la fréquence dans l'expression de l'énergie du quantum est (à un facteur constant près) :*

$$\left(\frac{A}{\nu}\right)^2$$

de sorte que cette énergie élémentaire s'écrirait :

$$\boxed{\varepsilon = B\left(\frac{A}{\nu}\right)^2 . \nu}$$

B étant une constante et A mesurant l'intensité des champs électriques (en U. E. S.), ou magnétique (en U. E. M.) qui définissent le quantum.

2. — Discussion.

Ainsi, en adoptant le modèle de quantum proposé, la relation de Planck-Einstein :

$$\varepsilon = h\nu \tag{3}$$

est remplacée par la formule plus générale :

$$\varepsilon = B\left(\frac{A}{\nu}\right)^2 . \nu \tag{4}$$

qui introduit une nouvelle variable A, l'amplitude des champs constituant le quantum.

Cette formule est-elle absurde, *a priori*?

Remarquons tout d'abord que l'introduction d'une nouvelle variable dans la relation de Planck-Einstein, n'est pas contraire à l'esprit de la théorie des quanta de lumière.

En effet, ce n'est pas le grain d'énergie qui constitue une constante universelle, mais bien le quantum d'action. *Le grain d'énergie est variable,* puisqu'il dépend de la fréquence.

Une analyse plus approfondie nous a montré qu'il dépendait en réalité de deux variables, mais cette observation n'altère en aucune manière le caractère discontinu de la distribution de l'énergie.

Un autre motif assez puissant, d'ordre énergétique peut être invoqué pour justifier l'introduction d'une nouvelle variable dans la relation de Planck-Einstein.

On sait aujourd'hui assez bien comment se comporte dans certains cas un système isolé, au point de vue de l'énergie.

Dans tous les cas connus, l'expression de l'énergie dépend de *deux* termes, l'un qui mesure son intensité, l'autre qui évalue en quelque sorte sa capacité.

Il semble bien que, pour l'énergie des phénomènes périodiques, la fréquence soit un facteur d'intensité. L'expression de Planck-Einstein pour l'énergie du quantum, pose que son facteur de capacité est une constante. Il peut en être ainsi dans beaucoup de cas ; il en est certainement ainsi dans le cas de l'émission de la lumière dans le vide, car les lois de Bohr et de l'effet photo-électrique se vérifient expérimentalement. Mais ceci ne saurait être valable dans le cas général.

Outre la variable fréquence (quel que soit d'ailleurs son sens physique) *il faut s'attendre à en rencontrer une autre dans l'expression de l'énergie.*

On rencontre en énergétique des cas analogues.

L'énergie calorifique peut être exprimée par le produit cT. *Dans certains cas* c est une constante, mais cela n'est pas vrai en général. h est l'analogue de cette chaleur spécifique et peut donc ne pas être constante dans tous les cas.

Naturellement, ces considérations n'ont pas d'autre valeur que celles que possèdent toutes les analogies. De plus on ne peut pas savoir au juste si les considérations énergétiques, qui sont exactes pour des systèmes quelconques, sont encore valables pour le système simplifié que constitue un quantum de lumière. Néanmoins, elles indiquent nettement que la supposition initiale — à savoir, l'introduction d'une nouvelle variable dans la relation de Planck-Einstein — n'est pas *a priori* absurde.

Considérons maintenant les conséquences de cette hypothèse, ou plutôt de ce résultat déduit de l'hypothèse fondamentale, et essayons de voir si son introduction se justifie par certains avantages.

3. — La relation de Planck-Einstein (*suite*).

L'essentiel des conclusions des paragraphes précédents consiste dans la constatation que *la loi de Planck-Einstein* $\varepsilon = h\nu$ *peut ne pas s'appliquer dans certains cas.*

Ceci ne constitue nullement une difficulté pour la théorie des quanta ; il suffit de remplacer la relation $\varepsilon = h\nu$ par la relation $\varepsilon = B\left(\frac{A}{\nu}\right)^2 \nu$ qui est beaucoup plus générale. Ceci permet d'espérer encore que quelques-unes des objections, qu'on a soulevées contre la théorie des quanta de lumière, ne l'atteindront pas en réalité, et tomberont si on corrige la relation trop particulière (3).

Ainsi, par exemple, dans le cas de l'effet photoélectrique, la relation $\varepsilon = h\nu$ a été vérifiée expérimentalement par Millikan avec une grande exactitude ; elle ne peut être mise en doute. Mais, on peut concevoir qu'il existe des phénomènes pour lesquels elle ne soit plus suffisante et pour lesquels il faille absolument avoir recours à la formule plus souple (4).

Comme nous essayerons de l'expliquer plus loin, un de ces phénomènes serait l'absorption de la lumière par un écran matériel et, en général, *tout phénomène irréversible.*

Il faudrait alors, suivant cette manière de voir, classer les phénomènes en deux groupes :

Les uns du type photoélectrique, pour lesquels la loi de Planck-Einstein serait suffisante; d'autres pour lesquels il faudrait avoir recours à la formule (4), plus générale et qui contient la précédente comme cas particulier.

Ceci est-il plausible? Et, si *ceci correspond à la réalité, comment faire la discrimination entre ces deux groupes de phénomènes*?

4. — Caractéristique des phénomènes pour lesquels la relation de Planck-Einstein est applicable.

Pour répondre à ces questions, il faut rappeler qu'Ehrenfest a réussi à donner une interprétation des conditions de quantification générale de Sommerfeld, au moyen de la notion très intéressante d'*invariants adiabatiques.*

Les expressions de Sommerfeld $\int p_i dq_i = n_k\, h$, qui quantifient les mouvements de l'atome, sont des invariants adiabatiques.

Des constantes de la forme n_k interviennent toujours là où apparaissent les invariants adiabatiques. Le succès de l'hypothèse de Planck, qui attribuait à un résonnateur une énergie ε telle que :

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = nh$$

tient justement à ce que le premier membre est un invariant adiabatique et qu'il peut être, par conséquent, égalé à une constante. Il semble bien que ce soient ces invariants adiabatiques qui interviennent dans tout phénomène d'émission dans le vide.

Le résonnateur de Planck fait intervenir de tels invariants adiabatiques et, par conséquent, on a, pour lui, $\varepsilon = nh\nu$. On peut imaginer l'existence réelle de phénomènes, faisant intervenir les mécanismes du type du résonnateur de Planck ; le phénomène photoélectrique en est un exemple.

Mais les mécanismes du type Planck ne sont certainement pas les seuls possibles ; il en existe d'autres pour lesquels les « invariants » adiabatiques ne sont plus des constantes et il est assez probable qu'on doit ranger parmi eux le phénomène d'absorption par un écran matériel, pour lequel la dissipation d'énergie est, pour ainsi dire, évidente.

Pour ces phénomènes, il est donc indispensable d'employer la formule $\varepsilon = B\left(\frac{A}{\nu}\right)^2 \nu$ dans toute sa généralité.

Cette formule montre que pour le mécanisme du type Planck, *l'amplitude A varie proportionnellement à la fréquence,* ce qui est la plus simple relation qui puisse exister entre ces quantités.

5. — Absorption. Expérience de Taylor.

Le passage de la lumière à travers un écran, partiellement absorbant, est un phénomène où les atomes de cet écran jouent le rôle principal, et qui, par conséquent, est différent de ceux que nous nous sommes proposé d'étudier dans le présent essai.

Néanmoins, nous lui consacrerons quelques pages parce qu'il nous permettra de montrer de quelle manière on pourrait utiliser le résultat obtenu au paragraphe précédent notamment l'introduction de la nouvelle variable A dans la formule de Planck-Einstein.

Nous ferons allusion dans ce qui suit à une expérience remarquable de Taylor (*).

Cette expérience, qu'on oppose toujours à la théorie des quanta de lumière, consiste à obtenir des franges de

(*) *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 15, p. 114, 1909.

diffraction, même avec une intensité de lumière extrêmement faible. Or, pour réduire l'intensité, Taylor employait des écrans absorbants. C'est ce détail qui retiendra notre attention dans ce qui va suivre.

Il est clair, d'après ce que nous avons dit dans la IIIe partie, qu'on doit pouvoir obtenir des franges, même avec une intensité réduite, par exemple en supposant la source constituée par un seul atome, émettant un très petit nombre de quanta par seconde. En réalité même dans ce cas on n'observe pas les franges de la lumière émise par un seul atome, mais par une portion assez étendue de la source. De ce fait les conclusions tirées de l'expérience peuvent ne pas s'appliquer au cas idéal d'une source constituée par un seul atome ; c'est une circonstance qu'il ne faut pas oublier.

Les quanta de lumière se suivent à des intervalles de temps $m \,.\, \mathrm{T}$, multiples entiers d'un intervalle fondamental T. La distribution de ces intervalles sera régie par une loi de probabilités.

Or, l'apparition d'une frange (voir chap. II) exige la rencontre de deux quanta de lumière, émis à un intervalle donné $m \,.\, \mathrm{T}$ et présentant une différence de marche δ, constante et déterminée par le dispositif expérimental. On conçoit aisément qu'avec un temps de pose suffisant, par le jeu des probabilités, l'intervalle entre deux émissions arrive à être égal à celui requis pour l'apparition d'une frange, et cela un nombre suffisant de fois pour que la plaque photographique, qui intègre l'effet, soit impressionnée.

Cette explication vaut aussi pour l'expérience de Taylor, comme pour toutes les autres du même genre (*). Mais,

(*) Depuis que ces lignes ont été écrites une nouvelle et remarquable expérience a été réalisée par A. Dempster et F. Batho, *Phys. Rev.*, 30, 644, 1927. Elle prouve que de la lumière très faible, pour expliquer celle de Taylor nous aurions pu trouver un raisonnement différent. Ce raisonnement que nous exposons plus loin n'est pas satisfaisant, car il n'est pas général et nous oblige à adopter une nouvelle hypothèse. Mais il a l'avantage de suggérer des expériences nouvelles et de fournir des éléments utiles pour une éventuelle explication de leur résultat.

***

Nous appellerons, dans ce qui va suivre, *intensité* en un point, la quantité d'énergie qui passe par seconde à travers une surface égale à l'unité, située en ce point et normale à la direction de propagation.

Dans la théorie d'Einstein pour une lumière de fréquence ν, la quantité d'énergie ne peut être mesurée que par le nombre de quanta de lumière $nh\nu$ (n entier) et l'intensité, par ce nombre rapporté à l'unité de temps et de surface.

Ceci est une idée fondamentale, qu'on retrouve dans toutes les recherches théoriques effectuées jusqu'à présent sur les quanta de lumière (*). Elle correspond très probablement à la réalité.

provenant d'un seul atome, est capable de donner des franges sur une plaque photographique, pour un temps de pose suffisant. Cette belle expérience vient s'ajouter et compléter les tentatives connues, faites pour résoudre le problème de la cohérence de la lumière. Mais, en utilisant l'ingénieux dispositif expérimental adopté, elle serait susceptible, nous semble-t-il, d'une application intéressante. Il serait possible de construire la courbe du noircissement progressif de la plaque en fonction du temps dans des conditions invariables, c'est-à-dire mesurer la variation de l'effet, au lieu de n'en avoir qu'une valeur globale.

De cette façon, on pourrait peut-être obtenir une première indication sur la distribution des quanta de lumière le long du rayon lumineux et sur la probabilité d'un intervalle de valeur donnée, entre deux émissions successives, ainsi que de trancher la question si une frange noire résulte de la superposition ou de l'absence de quanta.

(*) Voir la dissertation de Gottingue de P. JORDAN, *Zeitschr. f.*

Considérons alors une source ponctuelle, dont l'intensité soit réduite au minimum, de façon à ce qu'elle n'émette qu'un *seul* quantum par seconde. Pratiquement, (et c'est le cas de l'expérience citée de Taylor), on peut obtenir ce résultat au moyen d'un écran suffisamment absorbant que nous supposerons sphérique et entourant la source.

Supposons le quantum dirigé, c'est-à-dire émis dans une direction donnée. Dans ce cas, *quelle direction prendra-t-il* ?

La source émet dans tout l'espace, ce qui est un fait d'expérience ; dans chaque direction la probabilité d'absorption est, évidemment, la même. Pour expliquer l'émission d'un quantum unique au delà de l'écran, il faut supposer que le mécanisme de l'absorption est tel, qu'il ne s'exerce que d'une manière statistique, permettant au quantum isolé de s'échapper tantôt dans une direction, tantôt dans la direction opposée.

La direction de ce quantum varierait ainsi, au maximum, de 2π, dans un angle solide de 4π.

Ou bien, on peut ne pas supposer le quantum dirigé.

Dans ce cas, il faut admettre qu'il remplit tout l'espace, à la manière d'une onde sphérique, quand il est seul, et qu'il se comprime pour occuper un volume moindre, lorsqu'il y en a plusieurs en présence. Il ne semble pas qu'une telle explication puisse être acceptée.

D'autre part, l'expérience nous apprend avec certitude que *les propriétés de la lumière sont les mêmes en deçà, ou au delà de l'écran*, quelle que soit la mesure dans laquelle cet écran affaiblit l'intensité. Par exemple, Taylor dans l'expérience déjà citée a pu constater que la lumière gardait une structure invariable, même lorsque son intensité était réduite à 10^{-16} ergs par centimètre cube, ce qui

Physik, 30, 304, 1924, qui contient, en outre, des indications bibliographiques étendues.

revient à peu près un quantum pour 10.000 centimètres cubes.

Pour expliquer l'apparition des franges dans cette expérience, on peut, évidemment, lui appliquer le raisonnement de la page 75 malgré que l'existence de l'écran introduise une complication non négligeable. Mais on peut raisonner autrement. On constate, que, tout au moins en ce qui concerne les effets d'interférence, *la distribution des quanta de lumière subsiste, même lorsque, apparemment, il ne passe plus qu'un seul quantum au delà de l'écran.*

Les choses se passent comme si le quantum unique, qui aurait traversé s'était scindé en plusieurs autres, qui seraient distribués de la même façon que la lumière incidente et qui auraient, évidemment, une énergie moindre que les quanta incidents.

Dans ce cas, deux explications sont possibles :

a) On peut imaginer que l'écran réémet des quanta ayant la même distribution que pour la lumière incidente, mais que, dans chacun de ces quanta, la fréquence baisse, juste ce qu'il faut pour rendre compte de la diminution d'énergie constatée. Or, on n'a jamais observé de diminution de fréquence par absorption ;

b) Ou bien, on peut supposer que le passage à travers l'écran ne modifie pas la distribution initiale, mais diminue l'énergie de chaque quantum dans une certaine proportion, *en agissant sur un autre élément que la fréquence.*

De toute façon, quelle que soit l'explication adoptée, il semble résulter inéluctablement des expériences citées, qu'un quantum qui a traversé un écran ne possède plus la même quantité d'énergie qu'avant de l'aborder, tout comme une particule matérielle est ralentie en traversant la matière.

C'est cette conséquence qu'il s'agit de soumettre à une vérification expérimentale.

On n'a pas trouvé de variation de fréquence par absorption comme on l'a constaté pour la diffusion. Mais, à notre connaissance, il n'existe pas de recherches systématiques à ce sujet dans le domaine X ou γ, où, justement, cette variation de fréquence n'est pas impossible, *a priori*.

Si l'énergie du quantum variait, sa fréquence restant constante, il faudrait recourir à la deuxième explication indiquée plus haut. Mais, dans ce cas, il serait absolument nécessaire de modifier la formule de Planck-Einstein $\varepsilon = h\nu$.

La fréquence ne diminuant pas au passage à travers l'écran, on admettra que la structure de l'onde reste la même (l'onde se réarrange à la sortie). De cette façon l'onde aura les mêmes propriétés qu'avant ; on expliquera la diminution de l'intensité, *par l'action de l'écran sur une nouvelle variable*. Cette nouvelle variable sera l'amplitude A, si l'on adopte, à la place de la formule de Planck-Einstein, la formule (4) : $\varepsilon = B\left(\frac{A}{\nu}\right)^2 . \nu$.

En résumé, cette formule est déduite directement du postulat fondamental. Son adoption ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire. De plus, elle contient deux variables, ce qui la rend plus souple et nous permet d'échapper à des objections, qui se présentent lorsqu'on examine des phénomènes ou intervient l'absorption. Bref, toutes ces raisons peuvent justifier son adoption. jusqu'à ce que l'expérience ait décidé.

6. — Autres phénomènes. Effet Compton.

D'autres phénomènes que l'absorption peuvent nécessiter l'emploi de la formule (4).

Si l'*effet Compton*, par exemple, en était un, il serait facile de vérifier expérimentalement l'hypothèse proposée. En effet, en reprenant le calcul désormais classique de Compton, mais sans expliciter les fréquences, on arrive à la formule suivante, dans laquelle ε est le quantum incident, ε' le quantum diffusé et φ l'angle de diffusion :

$$\varepsilon - \varepsilon' = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{mc^2}(1 - \cos\varphi) \text{ ou } \Delta\left(\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1 - \cos\varphi}{mc^2}$$

Si l'on admet que, dans ce phénomène, la fréquence seule varie (h = constante) on a la formule classique :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$$

la variation $\Delta\lambda$ étant indépendante de λ.

Mais, *si le phénomène n'est pas du type Planck*, la nouvelle variable A doit intervenir et h doit varier. Si alors on pose $\varepsilon = h\nu$, $\varepsilon' = h'\nu'$ on aura

$$\frac{\nu'}{h'} - \frac{\nu}{h} = \left(\frac{1 - \cos\varphi}{mc^2}\right)$$

et la variation $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ *ne sera plus indépendante de la longueur d'onde*. On aura

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{mc^2}(1 - \cos\varphi)$$

$$h\,\Delta\nu + \nu\Delta\,h = \frac{h^2\nu^2}{mc^2}(1 - \cos\varphi)$$

et en passant aux longueurs d'ondes

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) - \lambda\,.\,\Delta(\log h)$$

Par conséquent, si l'hypothèse de l'introduction d'une nouvelle variable est vraie, la formule de Compton doit contenir un terme correctif, dépendant de la longueur d'onde. Les données actuelles ne permettent pas de décider si ce terme correctif est différent de zéro. L'ordre de grandeur de ce terme exige un travail expérimental d'une grande précision, qui n'est pas encore fait.

Les développements qui précèdent mettent en relief un point important, qui n'est pas encore éclairci. En effet, il résulte de nos hypothèses fondamentales qu'il existe deux classes de phénomènes distincts : les phénomènes du type Planck, pour lesquels A est proportionnel à la fréquence, et ceux pour lesquels cette proportionnalité n'existe pas.

C'est cette constatation qu'il importe de vérifier expérimentalement en premier lieu. Si elle est conforme aux faits, il faudra en conclure que l'énergie d'un quantum est une fonction de deux variables, et, dans ce cas, on pourra utiliser la formule que nous avons proposée.

***

Nous allons examiner maintenant une autre catégorie d'objections ayant trait aux phénomènes d'interférences et nous allons essayer d'en donner une explication en adoptant l'hypothèse d'un quantum possédant la structure indiquée précédemment.

CHAPITRE II

INTERFÉRENCES

1. Possibilité d'une explication quantique des interférences.

Abordant l'examen de l'Optique, nous laisserons de côté les phénomènes qui comportent une réaction entre la matière et le rayonnement. Le présent essai n'étudie qu'une hypothèse concernant la structure de la lumière dans le vide. Le problème qui consiste à imaginer le mécanisme atomique, pouvant engendrer une radiation de structure déterminée, est tout autre et ne sera pas abordé ici. Nous commencerons par l'étude du phénomène d'interférence de deux sources synchrones, assez rapprochées.

Ainsi que nous l'avons mentionné dans l'introduction, toute théorie de ces phénomènes et de leurs analogues doit être calquée sur la théorie de Maxwell. Nous concevons, *à priori*, dans le cas actuel la possibilité d'établir une semblable théorie sur ces bases. En effet, la seule différence d'avec la théorie électromagnétique est la discontinuité des vecteurs employés ; on peut donc espérer qu'à l'aide d'un calcul de moyennes, on puisse arriver à retrouver les lois classiques et les résultats connus.

Étant donnée la manière dont nous avons défini la structure du quantum, il est clair que celui-ci *possède la propriété fondamentale qui provoque l'interférence.* Les premiers qui observèrent ces phénomènes, exprimèrent d'une manière suggestive (*) cette propriété, en disant qu'elle consistait en la possibilité que « de la lumière ajoutée à de la lumière produisît de l'obscurité ».

(*) Cf. Mach, *loc. cit.*, p. 298 et suiv.

La lumière, que nos quanta définissent, contient justement deux éléments opposés, qui ont la possibilité de détruire leurs effets, s'ils agissent simultanément sur un même atome. Il suffit que les champs opposés de deux quanta passent au même instant au même point, pour que, leurs effets s'annulant, il n'y ait plus de lumière. La condition essentielle pour que cela puisse arriver est que l'émission soit cohérente ; or, nous avons vu que, les quanta de lumière sont effectivement émis suivant un rythme déterminé.

Ceci indiqué, examinons, sous sa forme schématique, le phénomène d'interférence de deux sources ponctuelles.

Soit S et S′ les sources, que nous supposerons distinctes et en phase. Elles émettent des ondes sphériques, — en appellant *onde*, simplement la surface sur laquelle sont distribués les quanta issus à un moment déterminé des sources.

Comme dans la théorie classique, nous allons supposer que, dans la portion qui nous intéresse, les ondes sont planes ; c'est une approximation classique, tout à fait justifiée. Soit une onde Γ à la distance $D = k\lambda$ de S.

Au point O ($OS \perp O\Gamma$), le vecteur électrique E sera de même sens qu'en S, soit positif.

Sur toute cette onde, le vecteur E aura le même sens. Il apparaîtra seulement en des points discrets, distants entre eux de *d*. Il en sera de même pour le vecteur H.

Traçons, dans le plan du tableau, les cercles de rayons $D + k\frac{\lambda}{2}, D' + k\frac{\lambda}{2}$ ayant pour centres S et S′ et marquons les points ou les cercles, correspondant à deux ondes en phase, se rencontrent. En ces points, les couples de vecteurs E et H, ayant le même sens s'ajouteront, il y aura lumière. Ce seront les points pour lesquels

$$D - D' = m\lambda$$

Par contre, pour ceux qui satisferont à :

$$D - D' = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$$

il y aura obscurité.

Nous aurons donc des *points lumineux*, régulièrement distribués sur les branches d'hyperbole de la théorie classique. Ce seront les franges noires et blanches de cette théorie.

Ceci montre la possibilité d'une explication schématique des interférences.

Il nous faut indiquer maintenant qu'avec le modèle de quantum proposé, on peut améliorer cette explication, de manière à rendre compte des particularités du phénomène.

Il faut d'abord expliquer qualitativement l'apparence de continuité que présente un système de franges. Cette apparence est certainement due au jeu des grands nombres, mais d'une manière qu'il faut préciser.

Ensuite, il s'agit de rendre compte de la distribution d'énergie dans le système de franges. Ceci exige une hypothèse au sujet de la composition des champs discontinus que nous avons introduits. Il faut choisir cette hypothèse, de manière que le résultat coïncide avec les données de l'expérience, et examiner si elle est conforme à l'esprit de la théorie, si elle n'est pas trop improbable et si elle ne conduit pas à une contradiction.

2. — Structure de l'onde.

Dans le paragraphe précédent nous examinons le cas de deux sources synchrones. En réalité, on obtient des interférences en utilisant une seule source réelle, de très petites dimensions, et en superposant la lumière qu'elle émet dans deux directions distinctes. Implicitement, nous supposons donc que deux rayons émis par la même source ponctuelle sont toujours en phase. On touche ici au point faible de toute explication schématique du genre de celle que nous présentons ici. Les expériences d'interférence ne portent pas sur un seul atome. Elles indiquent en plus de la cohérence dont nous avons démontré l'existence, une certaine liaison de phase entre des atomes rapprochés; c'est une circonstance essentielle dont il faut tenir compte quand on veut vérifier la théorie.

Soit O la source, OMB et ONB les chemins que suivent les quanta de lumière jusqu'à l'endroit où ils donnent la frange blanche B. D'après ce que nous avons dit au § 3, II^e partie, les quanta se suivent à des distances égales. Mais on voit aisément que, pour obtenir des interférences, cette condition est inutile, *pourvu que les émissions suivant* OM *et* ON *soient en phase.*

Bien plus, les franges subsisteront, *même si le synchronisme n'est pas parfait*, pourvu que le déphasage ne dépasse pas certaines limites. En effet, si l'une des émissions est tantôt en avance, tantôt en retard sur l'autre, le maximum de lumière se déplacera dans l'espace des deux côtés du point B ; les franges s'élargiront et s'estomperont, mais elles ne disparaîtront que pour un déphasage suffisamment grand.

Bref, il est nécessaire d'admettre seulement un synchronisme statistique, pour pouvoir rendre compte des interférences. La surface passant par les positions actuelles des quanta, émis à un instant déterminé, aura en gros la forme sphérique, mais sera excessivement bosselée, avec des creux et des renflements très petits.

Il est évident que ce que nous avons dit pour deux sources synchrones est applicable à un atome, qui émet à des intervalles égaux à un nombre entier de fois la période de la lumière $\frac{1}{\nu}$. Le cas de deux émissions synchrones est un cas particulier de celui-là.

Après avoir examiné la distribution des quanta le long du rayon lumineux, il nous faut envisager leur distribution sur des surfaces orthogonales à ces rayons.

Pour une source ponctuelle les quanta de lumière, qui s'échappent à un moment donné, se trouveront, à un instant ultérieur, sur une surface sphérique, que nous appellerons « onde ». Loin de la source, une petite portion de cette surface est assimilable à un plan ; on a le cas le plus simple, celui des « ondes planes ».

Nous avons déjà examiné la structure des ondes planes. Sur le plan de l'onde, les quanta de lumière sont distribués d'une façon régulière, formant un réseau de points, la distance entre deux points voisins étant définie par l'équidistance des champs discontinus considérés.

Pour les ondes sphériques, qui apparaissent dans le cas des sources ponctuelles, il faut logiquement admettre la même distribution régulière des points, sur la sphère. Mais il est aisé de voir que pour avoir une image qui se rapproche de la réalité il faut absolument compléter cette description, en envisageant non pas seulement une onde unique, mais tout un train d'ondes. Ce que nous avons fait pour le moment de l'émission dans le temps il faut le faire pour la position du quantum dans l'espace.

On peut objecter à l'image ci-dessus une trop grande régularité.

L'émission de la lumière, dans les sources réelles, résulte le plus souvent, d'un phénomène de caractère nettement statistique, de l'incandescence par exemple. On ne trouve nulle part, dans l'image proposée, pas plus que dans l'image de la théorie classique, une manifestation de la loi des grands nombres.

A cette objection, on doit en ajouter une autre, beaucoup plus forte. C'est une objection fondamentale, que l'on peut faire à toute théorie de quanta de lumière dirigés. Si nous supposons que les quanta sont régulièrement distribués sur une onde sphérique, il résulte nécessairement du fait de la propagation rectiligne, que ces quanta s'éloignent l'un de l'autre. Un observateur éloigné peut à un moment donné se trouver *entre* deux quanta et ne plus apercevoir la source ; s'il se meut transversalement, il constatera que l'intensité de la lumière variera, que *la source scintillera.*

Quoi qu'il en soit, on peut éviter les objections ci-dessus en imaginant :

a) ou bien que la distribution des quanta sur l'onde est faite au hasard, ou bien que

b) cette distribution est géométriquement régulière et qu'elle demeure telle pour un nombre d'ondes successives assez grand ; mais que, à un moment donné, elle se trouve brusquement décalée sur un train d'ondes par rapport à la distribution sur le train d'ondes précédent. Si, par exemple, les trajectoires de deux quanta voisins forment les côtés d'un angle aigu, la trajectoire du quantum qui suit sera une droite à l'intérieur de cet angle. Ces sauts brusques, ces décalages se suivront à des intervalles de temps distribués au hasard et qui peuvent être assez courts par rapport à la seconde, sans que les fluctuations qui en résultent soient directement perceptibles (*).

En somme, nous avons, dans le premier cas, des ondes incohérentes et telles que la densité de quanta est constante en moyenne *sur l'onde.* Dans le second cas, il existe une sorte de cohérence, mais c'est la densité moyenne dans le temps, dans *un volume donné,* qui est constante.

C'est cette dernière hypothèse que nous adopterons comme la plus probable.

(*) On peut remarquer qu'on introduit de tels sauts brusques même en Optique classique, lorsqu'on veut rendre compte de l'état de polarisation de la lumière naturelle.

Elle revient, en somme, à admettre au moment de l'émission un couplage entre les quanta successifs et aussi entre les quanta voisins sur une même surface d'onde.

La nécessité de ce couplage a été souvent reconnue par d'autres chercheurs. Pour retrouver la loi de Planck dans le cas du rayonnement noir, les nouvelles statistiques, telle que celle de Bose, par exemple, ont besoin de la même hypothèse.

3. — Mécanisme de production des franges.

Considérons toujours deux sources synchrones rapprochées comme dans l'expérience de Fresnel, et analysons la manière dont apparaissent les franges.

Nous avons vu, au § 1, que ces franges sont dues au fait que les champs opposés de deux quanta contrarient leurs effets.

Remarquons, ce qui est évident, que ni les champs, ni les quanta, *ne se détruisent* dans le phénomène de l'interférence. Seuls les effets d'un quantum sur les atomes de l'écran seront contrariés ou favorisés par l'action d'un autre quantum et c'est cette circonstance qui fera apparaître les franges.

Ainsi *les quanta sont indépendants et inaltérables.* Ils peuvent se rapprocher, s'interpénétrer. Ils ne sont pas enfermés dans un volume limité par une paroi étanche; *le quantum est un couple de champs et non un atome matériel.*

L'expérience confirme cette manière de voir. En effet, considérons une onde qui traverse un foyer. Les quanta s'y accumulent; il y en aura, dont les champs se superposeront. Il n'en résultera pas pourtant un quantum plus grand, ayant comme champ la somme des champs partiels. Les quanta qui se sont rencontrés se disjoignent et continuent leur chemin, inaltérés, ou ayant tout au plus, tourné en vrille, en effectuant une rotation de 180°, ce qui rendrait compte du retard de $\frac{\lambda}{2}$ que subit la lumière passant par un foyer.

De même, réalisons l'expérience suivante : Formons les franges des miroirs de Fresnel sur un écran translucide P, que nous observons au moyen d'une loupe, en nous plaçant du côté opposé de la source. *Si nous enlevons l'écran nous continuerons à voir les franges.* Ceci prouve nettement que les quanta qui interfèrent sur P *ne se détruisent pas*, puisqu'ils sont capables de continuer leur chemin, d'être déviés par la lentille et de réinterférer sur le fond de l'œil. *Ces quanta agissent sur les atomes de l'écran* : aux endroits obscurs, un même atome étant sollicité en sens contraires, n'émet rien; aux endroits lumineux, l'action des quanta est concordante et l'atome est excité. *C'est l'écran* qui fait apparaître les franges; celles-ci indiquent la coexistence en certaines endroits de plusieurs quanta qui, eux, sont indépendants.

Cette observation est essentielle; elle permet d'échapper à des objections sérieuses.

En effet, d'après ce qu'on a vu, les franges apparaissent lorsqu'il y a un écran, dont les atomes diffusent la lumière (ce qu'elles sont lorsqu'il n'y a pas d'écran nous ne pouvons pas le savoir). Pour qu'il y ait émission de lumière il faut, suivant Bohr, *qu'un atome* soit intéressé; or, un atome occupe un espace énorme. Par conséquent, il est possible d'imaginer que deux quanta puissent, en une certaine mesure, contrarier leurs effets, *même si les champs correspondants ne sont pas, à un moment donné, attachés au même point de l'espace;* il suffit que la distance entre eux soit suffisante pour qu'ils intéressent le même atome. Il est vraisemblable que ce raisonnement est valable, en général, pour l'espace-temps; nous admettrons qu'il en est ainsi.

Le processus auquel nous faisons allusion n'a rien de nouveau ; chaque fois qu'on considère les phénomènes dans l'infiniment petit discontinu, on fait implicitement une hypothèse de ce genre pour passer aux effets macroscopiques.

Ceci étant posé, considérons deux sources synchrones A et B et un point M. A cause de la différence de marche les quanta de B passeront en M avec un certain retard sur ceux de A. Si ce retard a une valeur convenable, les champs des quanta seront appliqués aux mêmes points et s'ajouteront ou bien annuleront leurs effets.

Il y aura donc des franges dans tous les cas. Il y a toujours des points de l'espace situés sur les hyperboloïdes de la théorie classique, où l'on a alternativement de la lumière et de l'obscurité.

Entre ces points obscurs et lumineux la différence de marche sera telle que les champs ne seront ni coïncidants ni opposés. Néanmoins, après la dernière des remarques précédentes, au moins pour les faibles décalages, ces champs auront une action sur les atomes de l'écran et il apparaîtra de la lumière. Comme d'ailleurs il faut s'attendre à ce que cette action soit fonction du décalage, et comme celui-ci croît régulièrement de 0 à $\lambda/2$, on doit s'attendre à ce que la lumière varie entre les franges de 0 à un maximum. Il apparaîtra ainsi entre deux franges consécutives un dégradé de lumière, tel que nous le voyons réalisé expérimentalement.

L'apparence que présentent les franges d'interférence est due à un effet de cette nature, auquel s'ajoute probablement l'élargissement causé par la légère fluctuation de la distance entre les quanta sur leur trajectoire.

On peut finalement remarquer que, par notre hypothèse, on remplit automatiquement la condition que les quanta de lumière soient attachés séparément aux ondes qui interfèrent, même au moment où il y a interférence.

Expérimentalement Bothe a trouvé (*) que cette condition était réalisé pour les rayons X. On voit donc que notre explication n'est pas en contradiction avec ces expériences.

4. — Distribution d'énergie dans un système de franges.

On peut envisager la question d'un autre point de vue. Les champs de l'onde agissent sur les atomes de l'écran. Ce qu'on perçoit, c'est leur effet global. On peut considérer cet effet comme dû à un champ unique, c'est-à-dire on peut envisager, pour ce cas particulier, la *composition des champs discontinus,* malgré que ceux-ci ne soient pas appliqués au même point.

Soit un point entre deux franges. Pour ce point le décalage entre les deux champs sera inférieur à $\lambda/2$ et le diagramme sera le suivant :

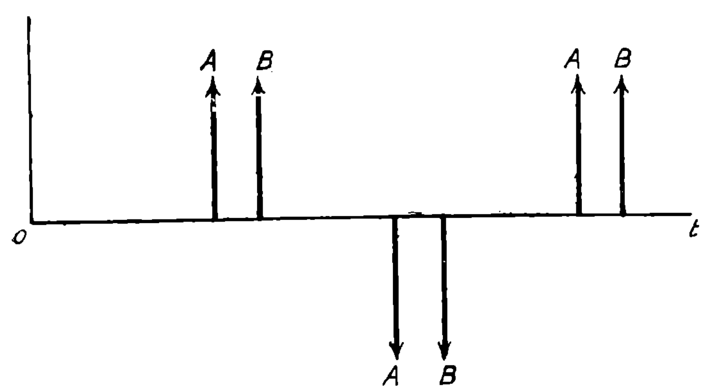


Fig 9.

Les atomes de l'écran subissent l'action combinée des champs A et B. *A priori,* rien ne nous indique comment vont se composer les champs égaux A et B décalés de δ ; il est seulement naturel de penser qu'ils s'annuleront où

(*) W. Bothe, *Zeitschrift für Physik,* 41, 332, 1927.

seront remplacés par un champ double, suivant qu'ils coïncident ou qu'ils sont directement opposés. Ainsi l'existence des franges est indépendante de la règle de composition. Seule l'expérience pourra décider quelle sera la règle de composition à adopter pour les champs spéciaux que nous employons. Pour préciser on pourra chercher quelle doit être cette règle pour que la distribution d'énergie entre les franges claires et obscures soit celle qui est indiquée par l'expérience.

Cherchons, par exemple, quelle doit être cette règle pour que la distribution d'énergie soit exactement celle qu'on calcule dans la théorie classique. En un point M défini par un retard δ cette énergie est proportionnelle à $\cos^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$:

$$E = 4A^2 \cos^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

Il suffira donc de poser comme règle que la somme des deux champs A, et $B = A$, est un champ d'amplitude :

$$C = 2A \cos \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

situé, par raison de symétrie, entre les deux autres.

Or, comme dans la théorie classique C représente la diagonale du parallélogramme construit sur A et B et dont l'angle entre A et B est égal à $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$, c'est-à-dire le retard angulaire.

La règle de composition des champs discontinus sera donc *la règle du parallélogramme*, la règle même de Fresnel, à cela près que, pour cette dernière, il faut s'imaginer un système de vecteurs tournant d'une manière continue à la vitesse $\omega = 2\pi\nu$ et prendre la projection sur un axe fixe, tandis qu'ici les vecteurs sont fixes.

Ainsi, pour retrouver dans notre hypothèse la loi classique de distribution d'énergie dans les franges, il suffit de considérer que les champs qui interviennent se composent suivant la loi de Fresnel.

Par conséquent, l'adoption de notre hypothèse, loin de nous conduire à des conclusions absurdes, nous amène à adopter une règle de composition des champs discontinus qui semble naturelle et qui est en accord complet avec l'expérience.

Nous adopterons, désormais, la règle du parallélogramme comme règle de composition pour les champs discontinus.

***

L'hypothèse fondamentale que nous avons adoptée au début, nous a permis de développer une théorie des quanta de lumière pour laquelle les principales objections qu'on a faites à la théorie actuelle ne sont plus valables.

L'existence des quanta d'énergie apparaît comme une conséquence naturelle de la structure discontinue imposée aux champs électrique et magnétique. L'explication des phénomènes d'interférence découle naturellement du caractère alternatif des champs envisagés, tout comme dans la théorie classique. Enfin, la structure du quantum permet de trouver une explication plausible pour certaines expériences ayant trait à l'absorption.

Le fait qu'une hypothèse unique permet de réunir dans un ensemble cohérent un certain nombre d'explications, en apparence antagonistes, est une forte présomption pour que cette hypothèse s'adapte bien à la réalité.

Il est indispensable de s'assurer directement par l'expérience de la valeur de cette hypothèse. Mais avant d'entreprendre cette vérification, il n'était peut-être pas superflu d'en montrer l'utilité au point de vue théorique. C'est ce qui a été tenté dans le présent essai.

BULETINUL SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE DIN CLUJ (ROMÂNIA)
BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE CLUJ (ROUMANIE)
Tome IV, 1re Partie, p 362 à 364.
5 déc. 1928.

SUR UNE EXTENSION DE LA NOTION DE PROBABILITÉ

par
Al. Proca
Docteur es sciences, à Paris.

Reçue le 29 oct. 1928.

1. — On peut faire sur la théorie des probabilités une remarque fondamentale. La notion primitive de probabilité a été généralisée de diverses manières. Suivant la définition adoptée par Borel dans son grand Traité, la probabilité d'un évènement est un nombre p, compris entre zéro et 1, et qui intervient dans les calculs conformément aux conséquences déduites de deux postulats fondamentaux, le principe des probabilités composées et celui des probabilités totales. Le nombre p peut être rationnel, irrationnel et transcendant. On a même introduit la notion de probabilité dans la théorie des fonctions, en l'identifiant à la mesure d'un ensemble(1).

Un point semble toutefois avoir été négligé. A notre connaissance, on n'a pas encore tenté la généralisation qui consiste *à attribuer à la probabilité p des valeurs imaginaires.* Cependant cette extension s'introduit d'elle même, tant au point de vue strictement mathématique, qu'au point de vue physique.

2. — Mathématiquement, les probabilités imaginaires apparaissent quand on inverse un problème du deuxième ordre, c'est-à-dire quand on cherche la probabilité de l'évènement simple, celle de l'évènement composé étant supposée connue. La valeur de p pour l'évènement-simple n'est pas toujours calculable directement: le cas d'un *dé pipé* ou d'une pièce de monnaie dissymétrique en est un exemple. L'introduction des probabilités imaginaires *est identique à l'introduction des points imaginaires en géométrie analytique;* on peut donc la considérer comme tout aussi légitime.

Considérons un exemple simple. Jouons à pile ou face avec une pièce de monnaie dissymétrique. La probabilité d'amener pile est inconnue; elle varie d'ailleurs avec la dissymétrie de la pièce. Soit P la

(1) Cf. Borel. Traité du calcul des probabilités, fasc. 1, Gauthier-Villars, Paris.

probabilité d'amener pile-face dans une partie de deux coups ; elle est égale à $P=p(1-p)$ ou

$$(1) \qquad p^2-p+P=0 \qquad p=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-P}$$

(1) représente une parabole ; les racines sont les points d'intersection avec la droite $P=\text{const.}$ Si l'on se donne une probabilité P convenable, $P<{}^1/_4$, nous avons deux points d'intersection *réels*, donc deux probabilités p correspondant à des évènements réalisables. Il en est de même pour $P={}^1/_4$ (cas ordinairement considéré, pièce symétrique). Mais pour $p>{}^1/_4$ il n'y a plus de point d'intersection ; en géométrie nous convenons de dire qu'ils existent, mais que leurs coordonnées sont imaginaires. La généralisation proposée consiste à admettre que, dans ce cas, les probabilités p continuent elles aussi à exister mais sont imaginaires. Cette généralisation se justifie par le fait que de telles probabilités semblent apparaître dans les équations de la physique mathématique.

3. — En résumé, le fait qu'un des postulats fondamentaux du calcul des probabilités introduit le *produit* de deux nombres, permet de retrouver les probabilités imaginaires par un processus identique à celui qu'utilise l'algèbre pour définir les nombres complexes. Mathématiquement, on peut espérer que cette branche du calcul des probabilités aura la même utilité que le chapitre correspondant de l'analyse. L'intérêt pratique immédiat provient du fait que si un évènement résulte de deux autres ayant des probabilités imaginaires conjuguées, sa probabilité sera réelle et pourra par conséquent avoir une interprétation physique.

4. — Il nous semble donc que la considération des probabilités imaginaires s'impose mathématiquement comme une généralisation indispensable. Mais de plus elle acquièrt un intérêt supplémentaire en s'introduisant tout naturellement dans certains problèmes physiques, en particulier, ceux de la mécanique ondulatoire.

On sait qu'en mécanique ondulatoire, il existe une équation universelle du mouvement, $F(\psi)=0$, portant sur un paramètre vibrant ψ. Physiquement on a interprété ce paramètre ψ de diverses manières. Mais la conception qui conduit aux résultats les plus cohérents est la suivante : ψ est une fonction complexe, telle que ψ' étant son imaginaire conjuguée, le produit $\psi\psi'$ représente la probabilité de présence d'un point dans une région déterminée de l'espace. Pour décrire le phénomène il suffit de connaître ψ. Or, on peut considérer ψ comme une probabilité imaginaire. Le phénomène réel est alors composé en fait de deux autres ayant les probabilités ψ et ψ', de telle façon que sa probabilité $\psi\psi'$ soit réelle.

Le fait fondamental consiste en ce que l'équation de SCHRÖDINGER, $F(\psi)=0$, — base de l'explication ondulatoire du phénomène réel, — *est relative à* ψ *et non pas à* $\psi\,\psi'$. Elle met donc au premier plan le phénomène composant qui a une probabilité imaginaire ψ. L'interprétation du mouvement dans la mécanique ondulatoire fait donc intervenir, attaché à tout phénomène réel, un évènement dont la probabilité est imaginaire.

L'étude détaillée de la manière dont cette probabilité s'introduit physiquement sera poursuivie autre part.

SUR UNE EXTENSION DE LA NOTION DE PROBABILITE

Note de l'Editeur:

Le texte précédent a été repris dans son intégralité dans la revue "Mathematica" (Cluj) Vol.1; p22-24; 1929 (parution 15 Jan 1930) et sous le même titre.

B.I.10

LA MECANIQUE NOUVELLE

Note de l'Editeur:

Il n'a pas été possible de retrouver la trace de la publication effective de ce texte apparemment destiné à la revue Natura.

La traduction française aux pages suivantes est basée sur un texte dactylographié en roumain et doit, jusqu'à preuve du contraire, être considérée comme relative à un texte inédit.

LA MECANIQUE NOUVELLE

Il y a 15 années paraissait dans "Natura" le premier article à être publié par une revue roumaine sur la théorie de la Relativité. L'article était signé de Mr V. Valcovici et porte le titre "la Mécanique nouvelle".

Et voici que, après 15 ans on commence à nouveau à faire une distinction entre Mécaniques, l'ancienne et la nouvelle. Cette fois pourtant la théorie de la relativité entre dans le cadre des mécaniques anciennes; c'est une autre discipline qui porte le nom de mécanique nouvelle. La revue "Natura" se fait, cette fois encore, un devoir d'être la première revue roumaine où apparaissent des indications générales sur ces nouvelles orientations de la Science.

L'article ci dessous est consacré à la mécanique nouvelle et est constitué de deux parties. La première passe en revue, brièvement, les théories atomiques modernes, chose indispensable pour la compréhension de la genèse et la structure de la mécanique nouvelle. La seconde partie est consacrée exclusivement à cette mécanique sous ses diverses formes. Malgré tous les soins apportés à ne traiter que les aspects indispensables, cet article est - pour ces raisons mêmes - d'une longueur inhabituelle.

Le lecteur indulgent voudra bien dépasser cet inconvénient en pensant à la difficulté d'exposer de manière claire et concise une théorie nouvelle sans faire appel au calcul mathématique lequel en constitue précisément la caractéristique et l'originalité.

★

1. Validité de la mécanique classique.

La Mécanique est une science expérimentale. D'innombrables expériences, entreprises dès la plus haute antiquité ont conduit à la formulation exacte de ses principes fondamentaux. Ses développements ultérieurs lui ont, toutefois, donné une forme mathématique si parfaite que ses origines expérimentales sont restées dans l'ombre.

D'autre part, cette science, issue d'expériences effectuées sur la terre, s'applique de manière rigoureuse jusque dans les zones du ciel les plus reculées. Les corps célestes, en leur mouvement, se soumettent aux mêmes lois que ceux, infiniment plus petits, avec lesquels nous effectuons des expériences en Laboratoire. Ce fait a conféré aux principes de la mécanique une validité universelle. Bien souvent ils ont été considérés comme pouvant s'appliquer à n'importe quel environnement et pendant longtemps les physiciens ont cherché à trouver une explication unique à tous les phénomènes naturels qui, de plus, se fonde uniquement sur les principes de la mécanique.

Il est aisé de voir que cette opinion, adoptée d'enthousiasme autrefois, est erronée. En fait, il est naturel que, aussi nombreuses soient les expériences et observations qui justifient une théorie, celle ci ne soit plus applicable à partir du moment où l'on sort du domaine propre aux expériences et observations considérées. Il n'y a donc pas à s'étonner que la mécanique doive, elle aussi, être modifiée dès lors que les phénomènes en jeu sont d'un ordre autre que ceux lui ayant servi de base.

MACH a préparé le retour à cette manière de voir rappelant l'origine expérimentale de la mécanique. EINSTEIN, par contre, a fourni le premier exemple théorique d'un environnement où les lois de la mécanique ne sont plus applicables. Nous connaissons même aujourd'hui deux environnements de ce type. Les lois de la mécanique classique ne sont plus applicables:

1) dans le cas d'un mobile dont la vitesse se rapproche de celle de la lumière (cas d'Einstein) et

2) dans le cas de déplacements intra-atomiques lorsque le volume où les mouvements ont lieu est petit par rapport aux volumes usuels.

Pour le premier cas, la théorie de la relativité donne une solution précise aux problèmes, et donc nous ne nous en occuperons pas ici. Pour le deuxième cas ni la mécanique classique ni la mécanique d'Einstein ne sont plus suffisantes. On a donc besoin d'une nouvelle mécanique adaptée à ces mouvements d'amplitude extrêmement faible, en d'autres termes on a besoin d'une micromécanique.

Nous allons examiner en détail comment s'est posé le problème, quelles ont été les solutions provisoires qu'on lui a données et quelles sont à ce jour les solutions admises qui constituent ce que j'ai appelé la "mécanique nouvelle".

2. La structure de l'atome.

Les modifications apportées à la mécanique classique que nous allons examiner dans ce qui suit ont été provoquées par l'étude des phénomènes intra-atomiques. Nous allons donc commencer par examiner les idées actuelles sur la structure de l'atome.

L'ancienne conception de l'atome, créée pour les besoins de la chimie, a subi des modifications importantes ces derniers temps. Autrefois l'atome était considéré comme la "particule ultime, indivisible, de la matière". Les recherches modernes, cependant, et spécialement celles sur la radioactivité, ont dévoilé, de manière incontestable que l'atome, à son tour, est constitué de plusieurs éléments.

L'hypothèse qui s'est avérée la plus féconde a été celle de RUTHERFORD. Elle peut se résumer en la formule suggestive suivante: l'atome est un système solaire en miniature. Tout atome est composé d'une partie centrale ou noyau (qui représente le soleil) entouré d'un nombre variable d'électrons qui gravitent alentour (et qui représenteraient les planètes).

Le noyau caractérise la substance en sa structure, son poids, sa charge électrique. Il diffère donc d'une substance à l'autre. Par contre, les électrons sont des particules identiques dans tous les corps, seuls varient leur nombre et disposition. L'electron est un atome d'électricité; un courant électrique est un courant d'électrons.

L'atome étant un système solaire en miniature on peut lui appliquer les méthodes de calcul de la mécanique céleste et comparer les conclusions des calculs avec les résultats expérimentaux. Cette comparaison a été faite et le résultat a été un désaccord complet entre théorie et expérience. Par conséquent, à l'intérieur de l'atome, la mécanique classique n'est plus applicable. La même chose se produit aussi avec la mécanique relativiste. Pour l'étude des phénomènes intra-atomiques on a donc besoin d'un autre instrument de calcul, d'une nouvelle mécanique.

3. Quantas.

La micromécanique a pour but de dépasser l'antagonisme rappelé ci dessus. Ses principes n'ont pas été dégagés d'un seul coup. Une étape intermédiaire a été nécessaire pour mettre au point les nouvelles lois qui devaient être synthétisées dans ces principes. La caractéristique de cette étape, dominée par les idées de N.BOHR, a été l'introduction systématique pour la representation des mécanismes intra-atomiques, de l'idée de discontinuité.

Nous allons examiner en détail cette affirmation. Avant de ce faire, toutefois, nous observerons que dans le cas de la micromécanique, la confrontation entre le calcul et l'expérience ne peut pas s'effectuer comme dans le cas de la mécanique habituelle. En effet, dans le cas de phénomènes intra-atomiques nous ne pouvons pas suivre le mouvement de chaque électron individuellement comme nous suivons le mouvement d'une planète. Nous avons néanmoins à disposition d'autres méthodes d'investigation et la principale est l'étude de la lumière émise par l'atome considéré.

Dans un corps incandescent, les modifications intra-atomiques sont fortement liées à la lumière émise par ce corps, en particulier sa fréquence c'est à dire sa couleur. En examinant donc les spectres d'émission des divers corps, on pourra tirer des conclusions sur les phénomènes ayant lieu à l'intérieur des atomes.

C'est pourquoi nous allons aborder le problème de la mécanique de l'atome en étudiant le problème de l'émission de lumière.

Soit, donc, un corps émetteur de lumière. Il pourrait sembler que cette émission aie lieu de manière continue, exactement comme l'émission d'un son.

Tous les savants étaient d'accord sur cet aspect jusqu'en 1900 lorsque PLANCK a introduit en Physique une hypothèse nouvelle, bizarre et cependant indispensable pour expliquer certains résultats expérimentaux, nommément l'hypothèse des quantas.

Planck présuppose que l'émission de lumière a lieu de manière discontinue. La lumière est projetée brusquement par tout corps lumineux, en paquets ou, comme on dit aujourd'hui, par quantas.

A première vue il est très difficile de nous imaginer ce genre d'émission discontinue. Une analogie peut cependant nous aider beaucoup à comprendre cette hypothèse. Considérons d'une part un lance-flammes comme ceux utilisés pendant la guerre et de l'autre une mitrailleuse. L'un et l'autre sont utilisés dans le même but; chacun opère pourtant de manière différente. D'un côté nous avons un jet continu de liquide qui s'enflamme. De l'autre la mitrailleuse projette les balles un à une, on pourrait dire, de manière discontinue. Le premier engin nous donne une image de l'ancienne conception du phénomène d'émission, le second nous montre l'émission par quantas. A ce jour toute la Physique moderne est dominée par l'hypothèse des quantas.

Planck avait imaginé l'hypothèse d'une émission discontinue mais il n'avait pas précisé le mécanisme par lequel cette émission s'effectue. Bohr a précisé le mécanisme en s'appuyant sur les idées de Rutherford concernant les structures atomiques et admettant comme hypothèse fondamentale la discontinuité des actions de ce mécanisme. Quand bien même cette idée de discontinuité se conçoit aisément elle n'en est pas moins complètement étrangère à la mécanique classique. En admettre la nécessité est implicitement équivalent à admettre la nécessité d'une révision de la mécanique newtonienne. C'est ainsi que s'est introduite la nécessité de modifier la mécanique classique. Les recherches dans cette direction ont conduit d'abord à la théorie de Bohr puis à la micromécanique actuelle.

4. La Théorie de Bohr, forme originelle.

En ce qui concerne la structure de l'atome, Bohr admet l'image de Rutherford d'un système solaire en miniature mais examine en détail le mouvement des planètes de ce système c'est à dire celui des électrons.

Bohr admet que les électrons gravitent autour de l'atome mais seulement de long d'orbites bien déterminées, caractéristiques de l'atome: en aucun cas un électron ne peut graviter sur une orbite intermédiaire. Entre toutes les trajectoires qu'un électron pourrait parcourir autour d'un noyau, il existe une série d'orbites privilégiées que les électrons parcourent effectivement.

Un électron donné ne peut donc se mouvoir que sur l'une des ces orbites. En échange il peut sauter brusquement d'une de ces orbites privilégiées à une autre. Lorsque un tel saut brusque a lieu, et seulement alors, l'atome émet ou absorbe de la lumière.

On peut exprimer la même chose autrement. Lorsque l'électron se déplace sur l'une de ces trajectoires, l'atome possède une certaine quantité d'energie dépendante de l'orbite parcourue. Au lieu de dire que l'électron est contraint de parcourir seulement certaines orbites, on peut dire que l'énergie de l'atome ne peut qu'avoir certaines valeurs, à l'exclusion des valeurs intermédiaires. L'atome ne peut exister que en certains états stationnaires. Lorsque l'atome passe de l'un de ces états à un autre (lorsque un électron saute d'une orbite à l'autre), la valeur de l'énergie varie brusquement et, seulement alors, l'atome émet de la lumière.

Ces hypothèses simples sont suffisantes pour rendre compte de toute une série de résultats expérimentaux. Pour les appliquer Bohr procède de la manière suivante. Il calcule la trajectoire d'un électron en suivant la mécanique classique. En conformité avec cette mécanique, une infinité de trajectoires sont possibles. De cette infinité, Bohr extrait les trajectoires effectivement parcourues c'est à dire les orbites privilégiées rappelées plus haut. En bref, Bohr effectue les calculs conformément à la mécanique newtonienne; après avoir obtenu le résultat, il le quantifie comme on dit c'est à dire il impose une série de conditions restrictives qui en réduisent la généralité. (Note 1)

Ainsi donc les résultats de la mécanique classique doivent être corrigés afin de pouvoir être appliqués aux atomes. Les corrections effectuées, certaines conditions de quantification, sont arbitraires au plus haut degré mais, de toute façon sont clairement contradictoires d'un point de vue formel avec les principes fondamentaux de la mécanique. Sur l'édifice d'une architecture si bien ordonnée et élégante de la mécanique rationelle, on ajoute une série de conditions hybrides qui gâchent l'harmonie stricte de l'ensemble et qui introduisent des contradictions inadmissibles du point de vue logique. En dépit de toutes ces imperfections la théorie de Bohr a eu un succès considérable en raison de ce qu'elle permettait d'expliquer toute une série de résultats expérimentaux qui ne pouvaient être interprétés autrement.

5. Théorie de Bohr, forme définitive.

La théorie de Bohr a été utilisée durant plus d'une dizaine d'années aux problèmes les plus divers. On a pu ainsi obtenir un grand nombre de résultats nouveaux, des cas sont apparus où cette théorie n'était pas applicable;

Note 1) Mathématiquement ces conditions reviennent à exprimer qu'une quantité donnée calculée selon les règles de la mécanique classique est un multiple entier d'une quantité fondamentale. Ainsi apparaissent dans cette théorie des nombres entiers qui expriment l'hypothèse de la discontinuité.

en un mot, il a été possible de vérifier le pouvoir d'investigation de cet instrument, le seul critère sur lequel on doive juger une théorie. Les recherches auxquelles nous faisons allusion ont permis de clarifier bien des points obscurs et ont mis en relief plus fortement certaines contradictions. Les savants sont parvenus à la conviction qu'il est impossible - en l'état actuel de la science - de parler de la position et du mouvement d'un électron sur sa trajectoire. En effet, ce mouvement ne peut pas être observé directement. Ce que nous observons, ce sont les propriétés globales de l'ensemble des trajectoires complètes, par exemple la lumière émise, et les calculs que nous faisons en partant de l'électron ne peuvent pas toujours expliquer les résultats expérimentaux.

En même temps, par ailleurs, la conviction s'est renforcée que les hypothèses initiales de Bohr contiennent une grande part de vérité et doivent être conservées, sous une forme modifiée, bien entendu. A l'heure actuelle ces hypothèses sont prises comme postulats fondamentaux de la théorie des quantas sous la forme abstraite suivante:

1) le système atomique n'est susceptible que d'un ensemble bien déterminé d'états stationnaires; chacun de ces états correspond à une valeur déterminée de l'énergie du système et ces valeurs forment une série discontinue. En d'autres termes, si A et B sont deux valeurs consécutives, l'énergie du système sera égale à A ou à B mais en aucun cas à une valeur intermédiaire.

L'atome qui se trouve en un état stationnaire et stable n'irradie pas d'énergie. N'importe quel changement de l'énergie du système consiste en une transition d'un état stationnaire à un autre. Nous voyons que dans cet énoncé toute référence à la trajectoire de l'électron a disparu.

2) la faculté d'émettre ou absorber une radiation de fréquence f est liée à la possibilité d'effectuer un saut entre deux états stationnaires. Si A et B sont des valeurs de l'énergie correspondant aux états initial et final, la fréquence de la lumière est déterminée par la différence entre ces énergies et précisément à travers la relation fondamentale

$$h.f=A-B$$

où h est une constante fondamentale, dite constante de Planck.

L'adoption de ces postulats est justifiée par les résultats qui en découlent.

6. La mécanique nouvelle.

Examinons maintenant la situation de la théorie avant l'apparition de la micromécanique.

On pourrait dire que la validité des postulats de Bohr a été reconnue de manière expérimentale. D'autre part pour les appliquer nous sommes obligés d'employer la mécanique classique, avec laquelle ces postulats sont incompatibles, et dont l'insuccès a été constaté de manière également expérimentale. Il est donc indispensable d'améliorer ou de remplacer la mécanique habituelle avec un autre instrument de calcul. Quelles seront les caractéristiques de cette nouvelle discipline?

Tout d'abord elle devra présenter une unité qui manque à la théorie de Bohr. Ses principes et postulats doivent former un tout cohérent et complet. En particulier les conditions de quantification qui ne doivent jamais apparaître comme quelque chose d'hybride, supplémentaire, ajouté; et être contenues dès le début dans ces principes.

La mécanique nouvelle doit introduire automatiquement la discontinuité dans les calculs, puisque nous avons vu que c'est là une caractéristique de la nouvelle manière de voir les phénomènes intra-atomiques.

La mécanique nouvelle doit se raccorder à la mécanique newtonienne dès lors qu'elle est appliquée à des éléments qui ne sont plus de dimensions atomiques: la mécanique classique doit être une approximation de la nouvelle mécanique.

Enfin, nous devons signaler encore une caractéristique qui n'est pas imposée à priori mais que la nouvelle mécanique présente néanmoins, étant donnée la manière selon laquelle les concepts se sont développés jusqu'à présent. J'ai rappelé précédemment que nous sommes aujourd'hui dans l'impossibilité de suivre en détail les phénomènes intra-atomiques. Il faut donc s'attendre à ce que la nouvelle discipline s'efforce de n'opérer que sur des quantités "directement observables". C'est ce qui s'est passé. La mécanique nouvelle calcule à l'aide d'éléments directement accessibles et seulement de manière indirecte peut elle donner des indications sur les structures atomiques. Sa situation, réglée par la théorie de Bohr, est analogue à celle de la thermodynamique réglée par la théorie cinétique des gaz.

D'une manière générale un phénomène est en train de se produire, qui a déjà eu lieu dans l'histoire des sciences, au début du XXème siècle mais qui s'effectue auhourd'hui en sens inverse. A l'époque il existait aussi deux disciplines: l'énergétique qui prenait en considération seulement des éléments globaux, directement accessibles, et ne se préoccupait pas du mécanisme interne des phénomènes, et l'atomisme qui, au contraire, avait comme but de disséquer l'atome et de considérer partout les éléments primordiaux. L'atomisme a triomphé. Aujourd'hui, cependant, nous sommes contraints à renoncer pour le moment de continuer de suivre le mouvement effectif des électrons dans les atomes et à ne considérer que les éléments globaux, isolés, autrement dit qui nous soient directement accessibles.

J'ai cherché plus haut à exposer les motifs pour lesquels la mécanique newtonienne, même corrigée grâce aux postulats de Bohr, n'est plus suffisante pour l'étude des phénomèmes intra-atomiques.

A ce jour il y a eu deux solutions proposées pour la remplacer. Elles semblent différer du tout au tout. Les points de départ et méthodes opératoires sont fondamentalement différentes. Toutefois il a été possible de démontrer que l'une des solutions peut se réduire à l'autre et que, donc, toutes les deux ne sont que deux facettes d'une même théorie. Le fait qu'en partant de deux points de vue opposés, en suivant des voies différentes, il a été possible d'arriver au même résultat doit conforter notre confiance en la valeur de la nouvelle discipline en voie de création et que j'ai appelée la mécanique nouvelle.

La première solution trouve son origine dans un mémoire de HEISENBERG dont la préoccupation était de créer une théorie qui ne fasse appel qu'à des quantités directement accessibles à l'observation. Elle fut mise au point par BORN et JORDAN et développée parallèlement par DIRAC.

La deuxième solution dérive des travaux de L. de BROGLIE qui s'efforce d'introduire en mécanique la conception ondulatoire du point matériel. Elle a été développée et sa véritable signification fournie par SCHROEDINGER.

Nous allons les examiner successivement dans les pages qui suivent.

*

* *

7. La solution de Heisenberg et Dirac.

L'idée fondamentale de Heisenberg et Dirac est la suivante: on peut développer une mécanique nouvelle conservant intacts les principes et les équations de la mécanique rationnelle mais en changeant le caractère des variables qui interviennent dans ces équations. En d'autres termes, soient $fi(p,q)=0$ les équations fondamentales de la mécanique classique; p et q par exemple sont des coordonnées c'est à dire, en définitive, des nombres qui expriment des distances mesurées le long d'axes réels. En mécanique nouvelle les équations fondamentales seront encore $fi(P,Q)=0$ mais cette fois ci P et Q ne sont plus des nombres et les quantités d'une nature autre que p et q.

Pour comprendre cette affirmation, le lecteur peut se souvenir qu'il existe entre les quantités avec lesquelles on travaille en Physique des différences fondamentales de nature. Par exemple une densité p est une quantité de nature différente de celle d'un champ électrique E. La densité est un nombre pur, ou comme on dit un scalaire cependant que un champ électrique est un vecteur c'est à dire représente en même temps un nombre, une direction dans l'espace et un sens. Un vecteur est quelque chose de plus qu'un scalaire puisque il comporte une partie de la notion d'espace. Une densité n'est pas de même nature qu'un champ électrique.

De manière analogue, Dirac fait l'hypothèse que P et Q ne sont pas de même nature que p et q. p et q sont des nombres: P et Q sont des nombres quantiques.

De quelle nature sont ces nombres quantiques? Comment pouvons nous les définir et comment les interpréter?

Pour les définir nous devons énumérer leur propriétés caractéristiques. En d'autres termes nous devons définir les opérations mathématiques fondamentales que nous pouvons effectuer avec ces nombres.

Ces opérations sont différentes de celles de l'analyse classique. L'addition suit les mêmes règles. En revanche la multiplication n'est plus commutative c'est à dire que la valeur du produit dépend de l'ordre des facteurs.

a x b est différent de b x a

Cette règle fondamentale a été le point de départ de toute la théorie. Heisenberg a reconnu le premier la nécessité d'introduire dans la mécanique de l'atome une relation qui était en fait une nouvelle règle de multiplication de deux quantités. Dirac prenant cette relation comme base a développé un nouveau mode de calcul de nombres quantiques qui s'est avéré l'un de instruments mathématiques les plus idoines à l'étude de la mécanique de l'atome.

En même temps Born et Jordan observaient que la multiplication de Heisenberg s'effectue selon une règle connue depuis longtemps par les mathématiciens à savoir la règle de multiplication des déterminants ou des matrices. En partant de cette simple observation ils ont développé une mécanique nouvelle analogue à celle de Dirac. Comme je l'ai dit, cette nouvelle discipline n'est, au fond, rien d'autre que la mécanique rationnelle classique dans laquelle les quantités en cause (coordonnées, moments), sont par hypothèse des matrices infinies. (Note 2)

En utilisant cette simple hypothèse concernant les variables qui figurent dans les équations, la mécanique nouvelle se développe de manière harmonieuse. Les conditions de quantification que j'ai rappelées dans la première partie découlent de manière naturelle des principes de base et n'apparaissent plus comme conditions restrictives ou privées de sens. La mécanique de l'atome acquiert une unité parfaite qu'elle n'avait pas jusqu'à présent.

D'autre part la mécanique nouvelle possède aux yeux de certains quelques autres avantages. En éliminant les coordonnées proprement dites, elle ne recherche pas directement le mouvement des électrons dans l'atome, un résultat que nous ne pourrions vérifier directement et certainement pas dans l'état actuel de la science. Et cependant les calculs nous permettent d'obtenir les conditions de quantifications qui nous sont, elles, directement accessibles. En d'autres termes, la nouvelle théorie ne se préoccupe pas du mécanisme des phénomènes à

Note 2) Une matrice est un ensemble constitué d'une double infinité de valeurs qui peuvent être regroupées en un tableau de la forme:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & .. \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & .. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. \end{matrix}$$

l'échelle atomique; elle y opère - comme une théorie énergétique - seulement au travers d'éléments que l'expérience peut atteindre directement. De plus, cette théorie est une "véritable théorie du discontinu" comme l'ont qualifiée leurs auteurs, chose fort satisfaisante aujourd'hui alors que l'idée de discontinu s'impose de plus en plus dans toutes les disciplines de la philosophie naturelle.

Voilà donc quelle est l'idée fondamentale de la "mécanique quantique". Partant d'une interprétation nouvelle des phénomènes naturels, Schroedinger a pu obtenir les mêmes résultats, utilisant, qui plus est, exclusivement l'analyse classique. Mieux encore, il a pu démontrer l'équivalence formelle entre les procédés de calcul employés par lui et ceux de la mécanique nouvelle baptisée mécanique ondulatoire et qui constitue la deuxième solution donnée aux difficultés rappelées au début. De cette théorie nous allons nous occuper dans les paragraphes suivants.

8. Solution de De Broglie - Schroedinger. Notions d'optique générale.

Pour esquisser la solution qu'ont donné de Broglie et Schroedinger aux problèmes posés nous allons employer une analogie optique utilisée d'ailleurs par les créateurs de la théorie nommés plus haut. Pour cela il est cependant nécessaire de rappeler certains travaux connus du domaine de l'optique.

Comme on sait, l'étude de l'optique s'effectue en deux grandes étapes: l'Optique géométrique et l'Optique physique. La première s'intéresse aux lois de la réflexion et la réfraction dans des milieux homogènes et dans l'hypothèse de la propagation rectiligne de la lumière. La seconde englobe tous les phénomènes que cette propagation rectiligne ne peut expliquer, par exemple les phénomènes d'interférences et de diffraction. En fait, l'Optique géométrique n'est qu'une première approximation de l'Optique physique; elle ne peut expliquer certains phénomènes. Par contre l'Optique physique a la faculté d'expliquer tous les Phénomènes y compris ceux de l'Optique géométrique.

Quelle est la raison pour laquelle l'une est plus exhaustive et a un pouvoir d'explication supérieur à l'autre? La différence consiste en ce fait que l'Optique géométrique utilise comme instrument de calcul le rayon lumineux alors que l'Optique physique utilise l'onde lumineuse.

La lumière se propage dans l'espace en ondes sphériques; l'onde lumineuse possède une réalité physique. Par contre c'est seulement dans certains cas que le rayon de lumière (la trajectoire de l'énergie lumineuse) peut être définie sans ambiguité. Quels sont ces cas? L'expérience nous montre que, chaque fois où la lumière rencontre sur son chemin des ouvertures ou des obtacles petits (de la dimension de la longueur d'onde), l'Optique géométrique n'est plus applicable. Lors de son passage à travers un trou de diamètre petit, la lumière se diffracte; la conception du rayon lumineux n'a plus aucun sens et l'Optique géométrique ne peut plus s'appliquer.

Ces aspects connus étant rappelés, retournons à l'examen du problème de la mécanique dans le cas plus simple du mouvement d'un point.

9. La mécanique ondulatoire.

Considérons le mouvement d'un point sur une trajectoire quelconque C. Le point de départ de la mécanique nouvelle est le fait suivant: du point de vue de l'Optique géométrique les lois de propagation de la lumière sont exactement les mêmes que les lois du mouvement d'un point matériel sur une trajectoire donnée. La trajectoire du point coincide avec le rayon de lumière. (Note 3)

Tous les problèmes d'Optique géométrique sont traités en fait comme si la lumière était constituée de points matériels qui se déplaceraient le long des rayons lumineux. L'analogie est tellement parfaite que Newton, qui ne connaissait pas les phénomènes d'interférences, a cru que, en réalité, la lumière était constituée de particules matérielles et a créé ainsi la théorie de l'émission lumineuse.

Newton admettait que la lumière se propage comme un système de points matériels. Les nouvelles théories conduisent à un renversement complet de ses conceptions: de Broglie et Schroedinger admettent, au contraire, qu'un point matériel a un mouvement analogue à celui de la lumière. Ou encore: d'après Newton le calcul des phénomènes optiques se réduit au calcul des mouvements de points matériels. D'après de Broglie et Schroedinger au contraire, le calcul des mouvements d'un point doit être

---

Note 3) ceci est mis en évidence du point de vue mathématique en exprimant l'identité des principes de Fermat et Maupertuis ce que de Broglie a très clairement mis en évidence.

réduit à celui d'un phénomène ondulatoire satisfaisant à des équations analogues à celles de l'optique.

Cette observation simple et élémentaire contient en germe toute la mécanique nouvelle. Ce qui suit sert seulement à la préciser en indiquant le sens dans lequel elle doit être entendue. Mais auparavant levons un doute qui s'est peut être fait jour dans l'esprit du lecteur.

10. Optique Physique et Optique Géométrique.

J'ai indiqué plus haut que la mécanique nouvelle préconise pour le calcul des mouvements d'un point l'emploi des méthodes de l'optique. Mais, dans le même paragraphe j'ai montré que du point de vue de l'Optique géométrique, la propagation de la lumière s'effectue suivant des lois identiques à celles de la propagation d'un point matériel. Donc, en apparence, les procédés de Newton et de Schroedinger seraient équivalents. Quel est alors l'avantage de la nouvelle mécanique?

La réponse est immédiate. Il ne faut pas perdre de vue, en effet, que l'équivalence dont il s'agit n'est effective que dans le seul cas de phénomènes qui sont l'objet de l'Optique géométrique. Pour tous les autres phénomènes, la méthode de Newton n'est plus applicable: il est nécessaire d'utiliser cet instrument pour l'étude des mouvements d'un point ou d'un système matériel. En d'autres termes nous sommes conduits à appliquer à la mécanique les méthodes de l'Optique physique.

Afin de mieux préciser cet aspect qui est fondamental, nous allons insister dessus encore un peu.

11. La Mécanique ondulatoire et la Mécanique classique.

En quoi consiste la supériorité des méthodes de l'Optique physique et quels résultats pouvons nous attendre de leur utilisation en mécanique rationnelle?

Considérons la situation actuelle de la mécanique en rapport avec l'optique. D'une part

1) l'Optique géométrique fonctionne avec des rayons de lumière. Elle n'est plus applicable en cas de phénomènes où interviennent des obstacles ou orifices petits de l'ordre de grandeur équivalent à celui de la longueur d'onde. En ces circonstances, l'Optique physique demeure applicable. Ceci est rendu possible par la considération des phénomènes du point de vue des ondes lumineuses.

D'autre part

2) la mécanique classique s'occupe des mouvements des points matériels. Elle n'est plus applicable dans le cas de phénomènes intra-atomiques c'est à dire quand les trajectoires sont contenues dans des zones spatiales restreintes, de la dimension d'un atome. En ce cas la mécanique classique doit être corrigée en introduisant des conditions de quantification.

Lorsque le problème est posé de cette manière on se pose immédiatement la question: le fait que la mécanique classique ne s'applique pas aux phénomènes intra-atomiques n'est il pas analogue au fait que l'Optique géométrique est inapplicable aux phénomènes d'interférences et de diffraction? Et est ce que éventuellement cette difficulté ne pourrait être dépassée en Mécanique de la même manière qu'elle a été dépassée en Optique c'est à dire en utilisant la théorie des ondes?

En d'autres termes, est ce que la considération des mouvements d'un point en tant que phénomène ondulatoire, ne pourrait pas conduire à une mécanique plus exhaustive qui engloberait aussi les phénomènes intra-atomiques régis par de mystérieuses conditions quantiques?

Telles sont les demandes auxquelles Schroedinger a répondu de manière affirmative. Ce qui est extraordinaire est le fait que, en appliquant la théorie des ondes, c'est à dire en utilisant la mécanique ondulatoire, Schroedinger a pu retrouver, sans aucun artifice, les conditions de quantification déterminées en leur temps par Bohr grâce à une intuition qui, sans exagérer, doit être considérée comme géniale.

La mécanique des quantas, qui jusqu'ici était une construction hybride, fait place désormais à une nouvelle théorie, harmonieuse et solide. Enfin, une grande partie des résultats des recherches en ces dernières années ce groupent et s'ordonnent de telle manière qu'elles peuvent se déduire d'un principe unique. D'autre part la discipline nouvelle nous fournit un point de vue neuf et nous indique une nouvelle conception des phénomènes atomiques dont l'importance et l'influence seront sûrement considérables en Sciences.

12. Méthodes de la mécanique ondulatoire.

Il serait impossible et sans aucune utilité d'examiner en détail ici les méthodes de calcul de la mécanique ondulatoire. Nous nous limiterons donc à indiquer la manière de procéder et, plus spécifiquement, nous chercherons à préciser selon quel mécanisme cette théorie parvient aux conditions de quantification de Bohr.

La mécanique ondulatoire procède par analogie avec la théorie ondulatoire de la lumière. La propagation de la lumière satisfait à des équations de propagation classiques et bien connues. Schroedinger postule que les phénomènes mécaniques satisfont eux aussi à une équation du même type, qui forme la base de la mécanique ondulatoire. (Note 4) De cette équation on déduit tous les résultats nouveaux de la mécanique. Considérons les conditions de quantification pour un atome d'hydrogène, constitué, comme rappelé, d'un noyau positif autour duquel gravite un électron négatif de masse m. L'ensemble possède une énergie potentielle connue, F=e/r , où e est la charge électrique de l'électron et r sa distance au noyau. Le mouvement de l'électron devra satisfaire à l'équation fondamentale dans laquelle on a remplacé P par F c'est à dire

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2}{h^2} m_o (E + \frac{e^2}{r}) \Psi = o$$

En résolvant cette équation on a toutes les indications concernant les phénomènes. Mais Schroedinger a observé qu'il n'est même pas nécessaire d'expliciter la résolution complète pour pouvoir dire que l'atome d'hydrogène satisfait au premier postulat de Bohr selon lequel l'énergie E ne peut prendre qu'une série discontinue de valeurs.

En effet, de manière purement mathématique et sans aucune hypothèse supplémentaire on démontre le résultat suivant: pour que l'équation (2) aie une solution finie

---

Note 4) Dans le cas plus simple, du mouvement d'un point matériel, cette équation a la forme suivante

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2}{h^2} m_o (E - P) \Psi = o$$

où

Ψ est un paramètre ondulatoire, l'oscillateur qui caractérise l'onde

- h est une constante universelle, constante de Planck
- m masse au repos du point matériel
- P Energie potentielle
- E Constante d'énergie du système qui en théorie de Bohr ne peut prendre que des valeurs multiples entières d'un quantum.

et continue il est indispensable que la constante E ne prenne que certaines valeurs formant une série discontinue. En calculant ces valeurs nous obtenons justement les valeurs des niveaux d'énergie calculés par Bohr en théorie des quantas. La concordance est extrêmement remarquable étant donné que les points de départ sont tellement éloignés l'un de l'autre.

Ainsi donc les conditions de quantification sont quelque chose d'organique, de naturel contenu dès le début dans l'équation fondamentale de la mécanique ondulatoire. Elles n'apparaissent plus comme conditions supplémentaires introduites dans le seul but de corriger la mécanique classique et dénuées de fondement justificatif.

En outre ces conditions qui apparaissent içi sous forme purement mathématique ont des significations et des analogues physiques. Elles peuvent s'interpréter comme conditions de résonance pour certaines ondes comme l'a montré de Broglie dès le début.

Nous connaissons en physique de nombreuses conditions analogues de résonance. Par exemple une corde vibrante ne peut le faire n'importe comment. Elle se divise en zones avec des noeuds et des ventres et cette division doit satisfaire à des conditions en tous points similaires aux conditions quantiques dans lesquelles, comme ici, les nombres entiers jouent un rôle essentiel.

Les conditions quantiques entrent de cette manière dans une catégorie de lois connues perdant ainsi leur caractère mystérieux et bizarre. En même temps l'introduction de nombres entiers en mécanique atomique devient intelligible; leur rôle ne paraît plus extraordinaire: ce rôle est similaire à celui que jouent ces nombres dans la détermination de l'angle qui correspond à un sinus donné par exemple.

13. Liaison avec la mécanique newtonienne.

J'ai dit dès le début que la mécanique nouvelle est une généralisation de la mécanique classique. Donc, en première approximation elle doit conduire à des résultats identiques qux résultats classiques. Il en est effectivement ainsi. (Note 5)

Le fait que, à la limite, l'équation fondamentale prend la forme de l'équation de Jacobi en mécanique classique nous induit à conclure que les ondes définies par existent non seulement dans le cas de phénomènes intra-atomiques mais encore dans le cas de mouvements classiques d'un point matériel. La mécanique ondulatoire nous oblige donc à tirer la conclusion que le mouvement d'un point visible est en réalité un mouvement d'ondes.

Ce résultat est en opposition avec le fait que nous constatons pas la présence des ondes mais celle d'un point matériel unique. Quelle est l'explication de cet antagonisme apparent?

La réponse de Schroedinger est remarquable par sa simplicité. Selon Schroedinger les ondes s'étendent sur tout l'espace. Toutefois, en chaque point l'énergie totale est petite et la présence des ondes ne peut être constatée. C'est seulement en un point de l'espace que les effets des ondes s'ajoutent et l'énergie devient sensible, précisément à l'endroit qu'occupe le mobile considéré. Celui ci apparaît donc comme une concentration d'énergie, comme une "gemme" d'ondes dont le feu s'étendrait à tout l'espace.

14. L'électron selon la conception de Schroedinger.

Considérons le mouvement d'un électron comme le mouvement d'un point matériel. Les ondes qui définissent le mouvement d'un point ne sont pas monochromatiques et ont des fréquences légèrement différentes les unes des autres (s'il s'était agi de lumière nous dirions que les diverses ondes lumineuses sont de couleurs différentes).

Note 5) A la limite (qui est atteinte lorsque h -> 0) l'équation (1) se transforme en l'équation classique de Jacobi.

$$\frac{1}{2\,m_0}\sum_{xyz}\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right)^2 + P = E$$

Cette équation, où E et P ont la signification donnée plus haut, se réfère au mouvement d'un point matériel par l'intermédiaire d'une "action" S. Le lien entre cette fonction et le paramètre définissant les ondes est donné par $\Psi\,(xyzt) = C \cos\frac{2\pi}{h}\,[Et - S]$

L'amplitude de chaque onde est petite. Toutefois l'amplitude résultante présente un maximum justement là où nous constatons la présence d'un point matériel. Lorsque ce groupe d'ondes se propage, le maximum se déplace. La vitesse des ondes n'est pas égale à celle du mobile. Le calcul montre cependant que la vitesse de groupe des ondes c'est à dire justement la vitesse à laquelle se déplace l'énergie de ces ondes est égale à celle du point mobile considéré.

Ainsi, la nouvelle mécanique nous conduit à concevoir un point matériel comme l'endroit où est concentrée l'énergie d'un groupe d'ondes qui s'étendent dans tout l'espace. Un mobile n'a donc plus d'individualité propre; il est "constitué" par des ondes grâce auxquelles il est en permanence lié à toutes les autres ondes de l'espace. De par l'existence des ondes qui le constituent, un point matériel "occupe" la totalité de l'espace. Cet environnement augmente le pouvoir d'analyse de la nouvelle mécanique par rapport à l'ancienne et lui consent d'obtenir des résultats nouveaux.

En même temps, cette conception du point matériel illumine pourquoi la mécanique classique n'est pas capable de mener à des solutions valides dans le cas de mouvements intra-atomiques. En effet, nous avons vu qu'un électron est, effectivement, le point de concordance en phase des ondes qui le définissent. L'énergie concentrée est maximale en ce point et alentour décroît rapidement mais non pas de manière brutale. En d'autres termes, cette agglomération d'ondes forme une sorte de gemme sans limite bien définie, ayant des dimensions petites, mais non infiniment petites. Le calcul montre que la dimension de cette gemme est de l'ordre de grandeur des atomes.

La mécanique rationnelle se représente l'électron comme un point et cherche à en étudier le mouvement à l'intérieur de l'atome. Au sens de la mécanique nouvelle cela est impossible: c'est un non sens en effet d'étudier le mouvement de cette gemme de forme mal définie le long de trajectoires tellement courtes qu'elles sont entièrement contenues en elle même. L'expression "trajectoire d'un électron à l'intérieur d'un atome" n'a pas de sens. De même sa trajectoire ne peut exister. Cette conclusion est en accord avec l'hypothèse de Heisenberg, lequel a développé sa théorie en partant justement de la supposition que ces trajectoires ne peuvent pas être observées.

Ainsi, en résumé, l'élément primordial de la nouvelle mécanique n'est plus le point matériel. Tout se décompose en ondes et les phénomènes mécaniques doivent être traités du point de vue de leur propagation.

Les choses étant telles, le problème immédiat qui se pose est le suivant: Que représente d'un point de vue physique ces ondes et quelle signification a le paramètre ψ qui vibre?

15. Nouvelles orientations.

Dans cette nouvelle partie nous entrons dans un domaine encore en cours d'exploration, où les résultats ne sont pas encore complètement assurés, où les opinions sont encore partagées et à l'exposé desquelles nous ne nous aventurerons pas. Nous indiquerons seulement certaines des directions dans lesquelles progressent les recherches actuelles.

En ce qui concerne le paramètre Ψ, Schroedinger le met en relation avec la densité électrique dans l'espace. Tout le monde n'est cependant pas d'accord avec sa conception. D'autre part d'ailleurs, la conception de l'électron selon Schroedinger telle que je l'ai exposée plus en détail ne remporte pas l'adhésion de tous les savants. Ces derniers temps en fait on constate une claire tendance à l'abandonner.

Nombreux sont ceux, parmi lesquels de Broglie lui même, qui continuent à considérer l'électron comme un point, comme un singularité dans une onde continue ou de nature particulière. Cette manière de voir conduit toutefois à une autre interprétation du paramètre ψ. A l'heure actuelle l'une des tendances les plus intéressantes semble être celle qui met en relation le paramètre ψ avec la probabilité qu'un électron se trouve à un instant donné en un point déterminé de l'espace (l'importance de cette conception réside dans le fait que cela met en évidence une nouvelle caractéristique de la mécanique ondulatoire et la rapproche de la Statistique).

La mécanique classique résoud le problème suivant: étant données certaines conditions initiales, trouver la position et la vitesse d'un point à un instant donné. Selon la nouvelle conception, la mécanique ondulatoire ne peut résoudre ce problème mais le peut pour un autre différent: étant données les mêmes conditions initiales quelle est la probabilité pour que le mouvement du point soit un mouvement donné et quelle est la probabilité pour que le mobile passe à un moment donné en un point de l'espace? Le paramètre ψ est en liaison étroite avec cette probabilité. Les résultats de la mécanique nouvelle auront donc toujours un caractère statistique.

Une autre direction selon laquelle se développe la théorie que j'ai exposée est un effort pour englober dans la mécanique ondulatoire l'electromagnétisme et la relativité desquels je n'ai pas parlé jusqu'ici. Suivant plus avant la splendide unification déjà entreprise, quelques savants se sont hasardés à déduire d'un principe unique à la fois les phénomènes mécaniques comme ceux de l'electromagnétisme et de gravitation. La méthode suivie dérive du procédé génial utilisé par Einstein en théorie générale de la relativité. Les solutions trouvées ne peuvent être considérées comme définitives. La voie par laquelle le problème a été abordé dérive d'une observation mathématique très intéressante encore que purement formelle. On a observé récemment que l'équation de Schroedinger peut s'écrire sous une forme remarquablement simple et symétrique dans un espace à cinq dimensions de structure particulière. Cette considération de la cinquième dimension a rendu possible jusqu'à un certain point la prise en compte de la théorie de la relativité et de l'électromagnétisme. De cette manière les nouvelles recherches s'efforcent de réaliser une synthèse aussi complète que possible de tous les phénomènes connus. Il est à peu près inutile de mentionner que cette dimension supplémentaire de l'espace n'a, du moins jusqu'à présent, aucune espèce de lien avec quelque élement physique connu que ce soit.

16. Conclusions.

J'ai examiné dans ce qui précède deux aspects de la nouvelle mécanique destinée à remplacer la mécanique classique qui s'est avérée insuffisante. La théorie de Heisenberg-Dirac, qui en forme l'un des aspects, adopte dès le début le point de vue de la discontinuité des phénomènes. Sa caractéristique est par conséquent un formalisme.

En définitive, aujourd'hui la physique théorique progresse sur une voie nouvelle en suivant une tendence que j'ai qualifiée "d'énergétique" analogue à la tendance qui existait à la fin du siècle dernier. Le triomphe des concepts de continuité est à peu près complet. La réaction c'est à dire l'adoption de tendances "atomistiques" et du concept de discontinuité ne va sûrement pas tarder. Il est probable que les recherches dans cette direction vont s'amorcer, du point de vue théorique, métaphysique, par l'étude de l'atome de temps. Il est difficile cependant de prévoir le développement ultérieur dans ce conflit.

L'article qui précède s'est efforcé d'esquisser, en traits généraux, l'état actuel d'un chapitre important de la Physique théorique. Il a voulu fixer les caractéristiques essentielles des théories les plus intéressantes qui sont apparues depuis la théorie de la relativité et celle de Bohr. Enfin cet article a cherché à montrer sur un exemple ce que les savants appellent une théorie "élégante", ce qui les enchante et fait leur délices. Et s'il sera parvenu à ouvrir l'esprit ne serait-ce que d'un seul lecteur à cette appréciation, alors il aura atteint son but.

L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER ET L'ÉNERGÉTIQUE

par M. Al. PROCA,
Institut du Radium, Paris.

Sommaire. — L'auteur reprend l'étude, tant de fois entreprise, des principes fondamentaux de l'Energétique, pour l'appliquer au phénomène que constitue le mouvement d'un point matériel. L'analyse de ces principes conduit, pour les transformations réversibles, à des énoncés précis, dont l'application fournit, d'une part les équations de Lagrange, et de l'autre, la fonction qui joue un rôle analogue à celui de l'entropie thermodynamique.

Pour le phénomène du mouvement, cette « entropie mécanique » n'est autre que l'action S; le principe d'Hamilton est alors simplement l'expression du principe de Carnot généralisé, appliqué à un cycle infiniment petit.

Ce résultat a deux conséquences importantes :

1° *Il rend plus facilement acceptable la mystérieuse hypothèse de l'atomicité de l'action*, clef de voûte de la théorie des quanta.

En effet, l'identification de l'action à une « entropie » range celle-ci dans la catégorie des *facteurs de capacité* d'une certaine forme d'énergie. Or, l'observation nous montre que chaque fois qu'un élément physique a une structure discontinue, il est, énergétiquement un facteur de capacité. L'atomicité de l'action rentre ainsi dans un principe général, le *principe de l'atomicité des entropies*; elle n'est pas plus imprévue, ni plus mystérieuse que l'atomicité de la matière ou de l'électricité.

2° Ce résultat permet de *traiter les problèmes d'intensité*, c'est-à-dire en fait, le problème de la répartition statistique d'un grand nombre d'éléments. A cette fin, on relie la probabilité de présence ψ d'un point en une région déterminée à l'entropie mécanique S par une relation qui généralise l'hypothèse de Boltzmann $S = k \log \psi$.

Des résultats simples montrent que la constante universelle k est égale à $h/2\pi i$, en accord avec la mécanique ondulatoire. Si on fait cette substitution dans l'équation de Jacobi que vérifie S, on retombe sur l'équation de Schrödinger, à condition d'admettre une relation supplémentaire (par exemple $\Delta S = 0$ pour un cas simple).

On peut ainsi obtenir l'équation de Schrödinger par un procédé direct et qui n'est pas exclusivement formel. Ce procédé montre que *cette équation n'est pas universelle*, mais simplement l'équation d'un mouvement particulier.

Les développements précédents ont le grave défaut de ne faire usage que des notions classiques ; on n'envisage pas, dans cet article, leur relation avec les nouvelles mécaniques, ni avec le principe d'indétermination de Heisenberg.

Incidemment, on introduit dans le cours des raisonnements une notion mathématique nouvelle : *la probabilité imaginaire*. Un paragraphe est consacré à l'analyse sommaire de cette notion et montre qu'on aurait pu la retrouver mathématiquement, sans hypothèse physique, par simple généralisation.

1. Introduction. — La synthèse de la Dynamique et de l'Optique est aujourd'hui presque achevée, grâce à l'introduction des nouvelles mécaniques. Celles-ci ont ouvert aux chercheurs un champ immense dont on a, à peine, commencé l'exploration. Une conséquence immédiate de cet état de choses est le fait qu'on a abandonné à peu près complètement les méthodes d'investigation classiques, reconnues insuffisantes, au moins dans le domaine qui nous intéresse aujourd'hui.

Il nous semble que cette disgrâce n'est justifiée qu'en partie ; ces mêmes procédés classiques, employés avec discernement, peuvent encore conduire à des conclusions intéressantes qu'il faudra, évidemment, justifier ou élargir au moyen des méthodes plus puissantes que l'on possède actuellement.

Dans cet ordre d'idées, nous avons pu montrer par exemple (1), que pour certains problèmes relatifs au point matériel et au photon, quelques-uns des résultats obtenus pouvaient s'interpréter facilement par la dynamique et la théorie des quanta *classiques*, sans faire appel ni aux hypothèses, ni aux méthodes de calcul des nouvelles disciplines. L'idée fondamentale de ces recherches est l'introduction — logiquement nécessaire — d'une nouvelle dimension λ, coordonnée conjuguée de la masse variable du point considéré.

Mais les problèmes traités dans ces notes ne concernent que le cas d'un point matériel unique : ce sont ce qu'on pourrait appeler des *problèmes de phase* : pour pouvoir attaquer les *problèmes d'intensité*, il faut considérer des nuages de points et étudier la dynamique des systèmes.

Dans ce qui va suivre, nous nous proposons d'esquisser brièvement la méthode par laquelle on peut y arriver. Pour cela, nous emploierons des notions et des procédés classiques. Cette exclusion systématique des nouvelles disciplines ne résulte pas d'une tendance injustifiée et absurde à les remplacer par quelque chose de plus élémentaire. Elle vise seulement à préparer l'investigation du fond *physique* de ces théories, souvent caché sous un symbolisme mathématique qui en rend l'accès difficile. D'ailleurs, la méthode suivie nous semble assez riche en conséquences pour présenter un intérêt en elle-même indépendamment de ses relations avec les questions qui sont aujourd'hui à l'ordre du jour.

2. **Energétique**. — Le procédé employé consiste à *appliquer les principes généraux de l'Energétique au phénomène que constitue le mouvement d'un point.*

Le problème des relations entre la mécanique et la thermodynamique n'est pas nouveau. Il s'est posé dès qu'on eût dégagé la signification générale des principes de la théorie mécanique de la chaleur. *Clausius* lui même s'en est occupé ; il cherchait une relation entre des grandeurs mécaniques, présentant une analogie formelle avec celle qui exprime le deuxième principe de la Thermodynamique. *Helmholtz* a tenté la même chose dans sa théorie des systèmes mono et polycycliques. Mais ces tentatives, ainsi que les innombrables autres qui suivirent, avaient pour but l'explication *mécaniste* des phénomènes calorifiques ; elles étaient, par cela même, vouées à un échec certain.

Cette préoccupation, qui hypnotisait les savants de l'époque, a eu aussi d'autres résultats ; en particulier, elle a empêché les chercheurs de poser d'une façon correcte le problème du mouvement, dans ses rapports avec l'Energétique.

On a en effet reconnu depuis longtemps que les deux principes fondamentaux de la Thermodynamique ont une portée qui dépasse de beaucoup les limites de cette discipline. Ajoutant à cette constatation d'autres remarques extrêmement générales sur le comportement des phénomènes naturels, on est arrivé à constituer une science d'une ampleur et d'une généralité inégalées, se rapprochant beaucoup de la *Physique comparée*, que souhaitait Mach (2).

Or, le mouvement est un *phénomène* au même titre que les autres et, *à priori*, rien ne s'oppose à ce que les méthodes de l'Energétique lui soient applicables. Le premier principe a une signification tout à fait claire en mécanique ; mais il n'en est plus de même pour le deuxième. On n'a pas encore mis en évidence la fonction qui est, — pour le phénomène « mouvement », — ce qu'est l'entropie pour les phénomènes calorifiques. C'est là un point dont les conséquences nous semblent extrêmement importantes.

Nous allons donc essayer d'appliquer au phénomène mouvement les deux principes généraux de l'Energétique. Quand on veut donner un énoncé tout à fait général de ces principes, on se heurte à des difficultés de toutes sortes (3). Cette application doit donc être faite avec beaucoup de circonspection et souvent un certain choix sera nécessaire entre les diverses alternatives possibles.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 186 (1928), p. 739 et t. 186 (1928), p. 1097.
(2) Mach, *La Mécanique*, p. 467 [Hermann, Paris].
(3) Cf. Poincaré, *Thermodynamique*, Préface.

3. **Le phénomène « mouvement »**. — Du point de vue de l'Energétique générale, un phénomène est un échange ou une transformation d'énergie. Soit un système thermodynamique subissant une transformation *réversible* (les seules à considérer dans ce travail), définie par une courbe C dans l'espace des n coordonnées a, b, c,.,. qui fixent son état. $\mathrm{d}H$, $\mathrm{d}Q$, $\mathrm{d}\mathfrak{T}$ étant les variations de l'énergie interne, de la chaleur et du travail, on a

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}\mathfrak{T}.$$

Une transformation de l'état A à l'état B, représentée par une courbe ACB, définit un phénomène calorifique; énergétiquement, celui-ci consiste en une transformation de chaleur en travail. C'est l'existence du terme $\mathrm{d}Q$ dans l'expression de l'énergie $\mathrm{d}H$ qui caractérise les phénomènes calorifiques.

Mais dans le phénomène que constitue le mouvement d'un système dynamique, il y a aussi transformation d'énergie. Nous savons en effet, *expérimentalement*, qu'il y a échange entre l'énergie cinétique et le travail. Soient p_i, q_i, $(i = 1, 2, ..)$ les coordonnées qui décrivent le mouvement, et h, son énergie au temps t. Dans « l'extension en phase complète », c'est-à-dire dans l'espace à $2n + 2$ dimensions (p_i, q_i, h, t), un point représentera un « *état* » *du système dynamique*. Une courbe ABC représentera un mouvement entre A et B. Le parallélisme avec la Thermodynamique est complet, car cette même courbe pourrait représenter l'évolution, entre A et B, d'un système *thermodynamique*, dont les paramètres a, b.... sont ici p_i, q_i. Nous ne différencions les deux cas qu'en spécifiant quelles sont les énergies qui se transforment l'une dans l'autre.

En premier lieu, il nous faut donc *définir* le phénomène mouvement, en indiquant quelles sont ces énergies. Pour donner des relations quantitatives, cette définition doit porter non seulement sur la *nature* de ces énergies, mais aussi sur leur expression analytique. De la même façon, en Thermodynamique, quand on veut appliquer les principes on doit expliciter les termes $\mathrm{d}Q$ et $\mathrm{d}\mathfrak{T}$. C'est l'expérience qui nous fournira ces indications.

Bornons-nous pour commencer aux systèmes holonomes et conservatifs. Dans ce cas, on est conduit à écrire en mécanique analytique :

$$H = \Sigma p_k \dot{q}_k - T + V,$$

T étant l'énergie cinétique, et V, l'énergie potentielle.

L'expression $\Sigma p_k \dot{q}_k$ est la force vive généralisée; lorsque T est homogène

$$2T = \Sigma p_k \dot{q}_k$$

et l'on a simplement

$$H = V + T.$$

Nous envisagerons le cas général en écrivant comme plus haut

$$H = \Sigma p_k \dot{q}_k - T + V \qquad \text{ou plutôt} \qquad H = \Sigma p_k \dot{q}_k - L$$

ou encore

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}\Sigma p_k \dot{q}_k - \mathrm{d}L \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Comme nous le verrons par la suite, le groupement des termes est indifférent pour l'application du premier principe; mais le deuxième nous conduit à adopter la décomposition (1) comme étant la plus probable.

Cette décomposition de l'énergie totale (1) définira donc énergétiquement le « mouvement d'un système ». C'est une *hypothèse*. Nous admettons qu'énergétiquement le mouvement d'un système consiste en « *la transformation du potentiel cinétique* (L) *en force vive généralisée* ($\Sigma p_k \dot{q}_k$) ». Le terme $\mathrm{d}L$ dans l'expression de l'énergie totale caractérise le phénomène « mouvement d'un système » de la même façon que la chaleur $\mathrm{d}Q$ caractérise les phénomènes calorifiques.

Avec cette définition du phénomène, appliquons les principes de l'énergétique.

4. Les deux principes fondamentaux de l'énergétique. — Soit un système thermodynamique tel que celui défini plus haut, qui évolue entre deux états A et B, suivant une transformation *réversible*, définie par la courbe C. Si T est la température absolue, les deux principes de la thermodynamique exigent que les intégrales

$$\int \mathrm{d}Q + \mathrm{d}\mathfrak{T} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

prises pour des cycles fermés, soient nulles, donc que

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}\mathfrak{T}, \qquad \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

soient des différentielles totales exactes. Cet énoncé peut être remplacé avec avantage par le suivant : *en général,*

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}Q + \mathrm{d}\mathfrak{T} \quad \text{et} \quad \int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

sont des fonctions de ligne; les principes cités exigent qu'elles soient des fonctions de point.

Ce dernier énoncé contient ce qui est essentiel dans les deux principes, à savoir que pour un phénomène calorifique, H et S sont des fonctions uniques et bien déterminées de l'état considéré. Il permet plus facilement de passer à l'énoncé correspondant de l'Énergétique générale, concernant des phénomènes quelconques.

Nous pouvons faire auparavant une remarque préliminaire. On voit aisément que, dans ce passage de la thermodynamique à l'énergétique, nous ne rencontrerons aucune difficulté à *généraliser le premier principe.* Car, pour la plupart les phénomènes nous savons calculer la fonction H d'énergie. Mais il n'en sera plus de même pour le deuxième principe; en effet, l'expression de la fonction analogue à S (l'entropie), n'est pas connue pour tous les phénomènes, car nous ne connaissons pas dans tous les cas quel est le facteur intégrant ($1/T$) de l'énergie caractéristique mise en jeu ($\mathrm{d}Q$). Pour certains phénomènes, il est aisé de trouver ce facteur intégrant : c'est l'*inverse du facteur d'intensité de l'énergie considéré* (par exemple, le potentiel électrique, etc.). Mais dans d'autres cas, par exemple le cas du mouvement, on ne peut pas apercevoir à première vue ce facteur. L'application du deuxième principe exigera donc la recherche de la fonction du point qui correspond à l'entropie; c'est ce que nous ferons au paragraphe 7.

5. Les équations de Lagrange. — Par définition, l'énergie caractéristique du mouvement est L et l'énergie totale se décompose suivant

$$H = \Sigma p_k \dot{q}_k - L.$$

Cette décomposition présente bien les caractères annoncés; chaque terme n'est pas une fonction de point mais dépend de la transformation. Les termes

$$\int_0^A \mathrm{d}\Sigma p_k \dot{q}_k \quad \text{et} \quad \int_0^A \mathrm{d}L$$

dépendent des valeurs que prennent les dérivées $\dot{q}_k$ en A, donc de la tangente à la courbe C par laquelle on y arrive. Si nous n'avions pas considéré des systèmes conservatifs, le dernier terme aurait été fonction de la courbe C pour une autre raison encore : il contient, en effet, le travail des forces extérieures, qui dépend dans ce cas de C.

Pour appliquer le premier principe, il faut écrire que H ne dépend pas de C. Il suffit évidemment qu'elle ne dépende pas des $\dot{q}_k$; donc $\partial H/\partial \dot{q}_k = 0$. Ceci nous donne les n relations connues

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}.$$

Appliquons le deuxième principe. En Thermodynamique, celui-ci exige que la quantité de chaleur $\mathrm{d}Q$, — énergie caractéristique du phénomène, — admette un facteur intégrant, à savoir $1/T$. Si nous le transportons tel quel en mécanique, il faut *écrire que* $\mathrm{d}L$ *admet un* *facteur intégrant* [1]. Nous ne connaissons pas de facteur de ce genre, mais il est trouver un qui nous conduise aux équations de Lagrange, *c'est le temps t.*

En effet, écrivons que $t.\,\mathrm{d}L$ est une différentielle totale exacte. On peut écr

$$t.\mathrm{d}L = \mathrm{d}\,(Lt) - L.\mathrm{d}t,$$

et puisque

$$H = \Sigma p_k \dot{q}_k - L$$

$$t.\mathrm{d}L = \mathrm{d}(Lt) - (\Sigma p_k \mathrm{d} q_k - H \mathrm{d} t).$$

Il suffit que la deuxième parenthèse soit une différentielle totale exacte. Or, p il faut que $\dfrac{\partial p_k}{\partial t} = - \dfrac{\partial H}{\partial q_k}$ ce qui donne $\dfrac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial L}{\partial q_k}$ et avec les relations fournies premier principe $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ les équations de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}.$$

6. **Objections.** — Cette transposition formelle du deuxième principe, quoi conduisant aux équations exactes, n'est pas satisfaisante, pour plusieurs raisons. En eff dans le cas considéré, — systèmes holonomes et conservatifs, — nous avons dans l'expression de l'énergie, non pas $\mathrm{d}L$, mais L, qui est *elle-même fonction de ligne*, dépendant de la transformation envisagée. Pour une généralisation logique, il faudrait, par multiplication avec un facteur convenable, faire apparaître, *à partir de* L, une fonction de point. D'autre part, en procédant comme il a été fait, on voit que finalement,

$$S' = \int t.\mathrm{d}L = Lt - \int L.\mathrm{d}t$$

serait aussi une fonction de ligne, à cause de Lt: l'application du deuxième principe, qui a justement pour but de faire apparaître une fonction de point, serait totalement illusoire.

De plus, dans l'ignorance où nous sommes au sujet du facteur d'intensité de L, nous aurions pu choisir à la place de t un autre facteur intégrant, pour faire apparaître les mêmes équations de Lagrange.

Par exemple il suffirait de multiplier L — fonction de ligne qu'on peut écrire $L\,(\mathrm{d}q,\, \mathrm{d}t)$ — avec le facteur $\mathrm{d}t$ et écrire que $L.\mathrm{d}t$ est une différentielle totale exacte $\mathrm{d}S$. Cette manière de procéder nous donnerait les mêmes équations du mouvement — que nous savons correctes — et nous fournirait en même temps la fonction de point S analogue de l'entropie thermodynamique. Dans ce cas, la fonction S, que nous appellerons désormais *entropie mécanique*, ne serait autre que *l'action* $S = \int L\ \mathrm{d}t$.

Ces observations prouvent que l'énoncé du deuxième principe, tel qu'on le rencontre en Thermodynamique, n'est pas utilisable en Énergétique si on ne connaît pas la quantité qui correspond à la température T. Tout en nous fournissant les équations du mouvement, il n'évite pas une certaine ambiguïté dans la détermination de l'entropie mécanique S. Or, c'est cette détermination qui est importante; une fois cette entropie connue, les équations du mouvement s'en déduiront facilement.

Un examen plus approfondi des deux principes de la thermodynamique nous montrera ce qui est essentiel dans le deuxième et comment il faut le généraliser.

[1] Dans une note, qui est probablement la plus récente sur cette question, Denina [*Elettricista*, t. 36, (1927), p. 162] adopte pour le deuxième principe de l'Energétique l'énoncé suivant :

« Pour une forme quelconque d'énergie W, il existe un facteur P, appelé facteur de tension, tel que

$$\int \frac{\mathrm{d}W}{P} = 0.$$

7. **L'entropie « mécanique »**. — Le premier principe affirme que dans une transformation réversible, l'énergie totale est déterminée en chaque point. Cette proposition peut être transportée sans changement en Énergétique.

Le deuxième principe affirme qu'il existe en dehors de l'énergie une autre quantité, l'entropie, qui est, elle aussi, bien déterminée en chaque point. L'extension de ce principe à l'Energétique conduit à *affirmer l'existence d'une telle quantité pour tous les phénomènes naturels.*

Or, pour la plupart des formes de l'énergie, on a reconnu depuis longtemps cette existence [5]. Pour chacune de ces formes d'énergie, on peut trouver une quantité analogue à l'entropie et pour laquelle on a une équation analogue à

$$\int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = 0$$

exprimant une loi banale de conservation.

Cette quantité se présente en général sous la forme d'un rapport entre l'énergie et le facteur d'intensité de celle-ci. C'est donc ce qu'on appelle un *facteur de capacité ou d'extensité,* et qui obéit à une loi de conservation tout comme l'entropie.

Il s'agit donc de trouver, pour le phénomène « mouvement », c'est-à-dire pour le phénomène dont l'énergie caractéristique est le potentiel cinétique L, *la quantité* facteur de *analogue à l'entropie thermodynamique*; en d'autres termes, nous cherchons quel est le capacité de l'énergie L.

Comme nous l'avons dit, c'est là le vrai problème et le but vers lequel tendent ces considérations. L'obtention des équations de Lagrange ne présente en fait qu'un intérêt secondaire. A cause de cela, et pour faciliter la recherche, nous aurons tout avantage à retourner le problème; nous supposerons le phénomène connu, donc les équations de Lagrange données et nous chercherons dans ces conditions, quelle fonction pourrait remplir le rôle de l'entropie mécanique.

Il s'agit donc de trouver, pour un phénomène représenté par un point qui parcourt une courbe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

avec les valeurs initiales p_k^0, q_k^0, t^0, h^0, une quantité, autre que l'énergie, obéissant à une loi de conservation, donc fonction de point.

Quand on pose le problème de cette façon la solution est immédiate.

En effet, *les équations du mouvement ont la propriété d'être les seules qui admettent comme invariant intégral complet, au sens de Cartan* [6], *l'expression* $\int \omega_\delta$ avec

$$\omega_\delta = \Sigma\, p_k \delta q_k - H \delta t. \qquad (1)$$

Cette propriété d'invariance fait apparaître une fonction remarquable : la différence $(\omega_\delta)_1 - (\omega_\delta)_0$ correspondant aux états initial et final [7]. Cette expression est une différentielle totale exacte δS, satisfaisant par conséquent aux conditions que nous avons imposées plus haut. *Or, la fonction qu'elle définit est identique à l'action S.*

8. **Action et entropie** — L'action apparaît ainsi d'une façon toute naturelle comme fonction analogue à l'entropie, comme entropie « mécanique », correspondant à un phénomène dont l'énergie caractéristique est le potentiel cinétique L.

Elle se présente sous un aspect qui a quelques vagues analogies de forme avec l'entropie thermodynamique. Par exemple, sa différentielle $L\,\mathrm{d}t$ est bien le produit de l'énergie par un facteur. Si on poursuit cette analogie, il faut admettre que *le facteur d'intensité* de cette forme particulière d'énergie qu'est le potentiel cinétique L, a les

(5) Cf. MACH, *Prinzipien der Wärmelehre*, p. 330.

(6) Cf. CARTAN, *Leçon sur les Invariants intégraux* [Hermann, Paris].

(7) E. CARTAN, *loc. cit.*, p. 31.

dimensions de l'inverse d'un temps. Ceci n'est pas une difficulté, ni une particularité étrange; à notre avis, c'est au contraire un résultat tout à fait satisfaisant. Nous connaissons en effet, des phénomènes mécaniques pour lesquels il en est ainsi. Pour les phénomènes oscillatoires, par exemple, de toute évidence, le facteur d'intensité est une fréquence, donc l'inverse d'un temps.

Considérons encore un autre aspect de la question.

Le principe de Hamilton $\delta S = 0$ signifie que la différence des valeurs de $\int L \, dt$ est nulle $\int_{ACB} - \int_{AC'B} = 0$, pour des trajectoires aboutissant aux mêmes points (dans l'espace généralisé qui contient le temps). En changeant le sens de parcours de la deuxième trajectoire, ce même énoncé signifie que l'intégrale $\int L dt$, prise le long d'un cycle infinitésimal est nulle. *Le principe de Hamilton n'est donc autre que le principe général de Carnot*, appliqué aux phénomènes mécaniques et pour un cycle infinitésimal de transformations réversibles. Il est cependant beaucoup plus général puisqu'il contient aussi le principe de l'énergie et qu'il fournit toutes les équations du mouvement.

Il est difficile de dire ce qui se passe dans le cas d'une transformation irréversible, la Dynamique n'admettant pas de telles transformations.

Remarquons cependant que *pour les systèmes non holonomes, l'égalité* $\int L \, dt = 0$, qui caractérise les transformations réversibles, *se transforme en une inégalité*. En effet, le principe de Hamilton' n'est applicable dans ce cas que sous certaines conditions; si la courbe d'aller AB est une trajectoire réellement parcourue par le système, et si l'on veut que $\delta \int L \, dt = 0$, la trajectoire de retour *ne sera pas compatible avec les liaisons* (8). Par conséquent, si les deux trajectoires sont compatibles avec les liaisons, on aura certainement $\delta \int L \, dt \neq 0$ et dans l'espace généralisé, l'intégrale le long d'un cycle fermé quelconque ne sera pas toujours nulle.

9. **Discontinuité de l'action.** — D'après ce qui précède, il nous semble qu'on est en droit de supposer que ce que nous avons dénommé « entropie mécanique » n'est autre que l'action classique.

On peut expliquer ainsi l'importance de cette fonction en mécanique analytique; en même temps, on a ce qu'on peut appeler une *interprétation physique de l'action*, que l'on a toujours considérée comme une fonction s'introduisant par simple nécessité mathématique.

Le fait de pouvoir interpréter physiquement l'action peut avoir aussi d'autres avantages.

Considérons par exemple une hypothèse fondamentale qui semble bien être la clef de voûte de toute l'interprétation moderne des phénomènes naturels : l'atomicité de l'action. Cette hypothèse indispensable a, — il faut le dire, — un caractère tout à fait mystérieux et singulier; elle est incompréhensible tant que l'on considère l'action comme une simple fonction mathématique, sans aucune signification physique. Mais, à la lumière des résultats obtenus, on peut suggérer une explication en faveur de cette hypothèse.

L'action est une entropie, donc un facteur de capacité de l'énergie L. Or, *chaque fois que nous avons constaté dans la nature la discontinuité d'un élément, il s'est avéré que cet élément était un facteur de capacité*, l' « entropie » d'une certaine forme d'énergie. L'électricité est discontinue: le facteur de capacité de l'énergie électrique est la quantité d'électricité. La matière est discontinue : le facteur de capacité de l'énergie de niveau (suivant l'ancienne conception) est la masse ou la quantité de matière. Suivant Bohr, la quantité de mouvement est discontinue dans les mouvements intraatomiques : or, la quantité de mouvement est un facteur de capacité, de l'énergie cinétique, par exemple. L'énergie elle-même, $E = nh.\nu$, est discontinue à cause du fait que son facteur de capacité nh est discontinu.

(8) Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics*, p. 450.

Par conséquent, on est fondé de penser que toutes ces constatations sont des aspects d'une loi générale, d'un *principe de l'atomicité des entropies : le facteur de capacité de toute forme d'énergie ne peut varier que d'une façon discontinue.*

De cette manière, *l'atomicité de l'action n'est pas plus mystérieuse ni plus incompréhensible que l'atomicité de la matière ou de l'électricité.*

10. Entropie mécanique et Thermodynamique. — En examinant le mouvement d'un système — d'une molécule par exemple — nous avons mis en évidence l'élément « *entropie mécanique* ». Si maintenant nous considérons un grand nombre de systèmes, — un gaz, — nous pouvons définir une « entropie thermodynamique ». « La chaleur n'étant qu'un mode de mouvement », on peut se demander si ces deux « entropies » ne sont pas liées par quelque relation simple déduite directement des lois de la mécanique.

Pour éviter toute confusion, une observation préalable est nécessaire. L'entropie thermodynamique est une quantité définie à partir de paramètres macroscopiques. L'entropie mécanique a été de même définie d'une manière strictement énergétique, sans aucune considération de mécanisme caché. Pour le mouvement du système, elle est aussi une quantité *macroscopique*. La forme d'énergie qui entre en jeu dans le phénomène du mouvement (L) est mise sur le même plan que la chaleur dans le phénomène calorifique.

Cependant, dans les théories de la chaleur, l'énergie calorifique est « expliquée », interprétée à l'aide de l'énergie des molécules. Le phénomène du mouvement est mis sur un autre plan que le phénomène calorifique: l'un explique l'autre. Pour passer donc de l'entropie mécanique à l'entropie thermodynamique, il faudra tenir compte de la manière dont on passe *du mouvement à la chaleur*. La relation cherchée dépendra de la manière dont on fait le passage des éléments microscopiques aux éléments macroscopiques.

Or, on connaît l'insuccès de toutes les tentatives d'explication strictement déterministe de la chaleur par le mouvement des molécules. Pour arriver à une explication correcte, il faut appliquer la statistique à des phénomènes élémentaires, qui ne suivent pas, en toute rigueur, les lois de la mécanique; en un mot, il faut recourir à une explication qu'on nomme quelquefois quasi-mécanique.

Les éléments qui composent le modèle d'un gaz, par exemple, obéissent en fait aux lois de la mécanique, mais les constantes arbitraires qui interviennent dans l'expression de ces lois changent brusquement un grand nombre de fois. Autrement dit, le système élémentaire ne parcourt pas une trajectoire généralisée complète dans l'extension en phase. Il en parcourt seulement un tronçon, après quoi il saute sur une autre trajectoire et ainsi de suite (9).

Or, notre entropie mécanique est définie pour une trajectoire *unique* dans l'extension en phase, tandis que pour le calcul de l'entropie thermodynamique il faut prendre en considération tous *les tronçons* parcourus. Il n'y aura donc pas de relation mécanique directe entre les entropies mécanique et thermodynamique.

S'il y en a une, elle sera vraisemblablement de nature statistique et elle contiendra aussi la température absolue. L'intérêt qu'elle peut présenter est sans rapport direct avec le but de cet article. Aussi ne nous occuperons-nous pas de l'établir, ni d'ailleurs de développer l'étude des questions multiples que soulève l'introduction de l'entropie mécanique. En revanche, nous nous attaquerons, dans le paragraphe suivant, à un problème d'un intérêt plus actuel, le *problème des intensités.*

11. Problèmes d'intensité. — Les résultats des paragraphes précédents ont, semble-t-il, un certain intérêt par eux-mêmes. Cependant nous ne développerons pas les recherches dans cette direction, mais nous essayerons de les appliquer aux *problèmes d'intensité*, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 1.

Nos hypothèses (10) supposent une discontinuité totale; par conséquent, ce qu'on

(9) Cf. par exemple, A. Smekal, *Handbuch der Physik*, Bd. 9, Theorien der Wärme, p. 196.
(10) Cf. aussi *C. R.*, t. 186 (1928) p. 739.

appelle *intensité* d'une grandeur sera nécessairement mesuré par le *nombre d'éléments* identiques qui constituent cette grandeur : l'intensité de la lumière sera, par exemple, mesurée par le nombre de photons. Un certain nombre — grand d'ailleurs — d'éléments étant en jeu, leur distribution réalisera une distribution d'intensité. Les problèmes d'intensité sont donc des problèmes *de statistique*; la grandeur fondamentale sera dans ce cas, la *probabilité de présence* d'un élément en un point considéré.

Ceci étant précisé, considérons un grand nombre de systèmes dynamiques se mouvant suivant la même loi, caractérisée, par exemple, par la forme de la fonction H. Supposons que le mouvement se fasse à partir d'une région A de l'espace généralisé — que nous appellerons « source » — vers une région B, que nous dénommerons « écran ». La probabilité d'une distribution en A étant donnée, la probabilité d'une distribution quelconque, également donnée, en B, sera déterminée si on connaît la loi du mouvement, donc H. *Mais si cette loi varie*, la probabilité d'une certaine distribution en B en sera évidemment fonction. La probabilité de présence d'un élément dans une région déterminée de l'écran sera fonction de la distribution en A (des valeurs initiales) et de la loi du mouvement. Quelle sera cette fonction? On est réduit à faire des hypothèses. Pour justifier l'hypothèse que nous allons choisir, généralisons les résultats de la thermodynamique comme nous l'avons déjà fait.

12. **Action et probabilité**. — Supposons que le point représentatif du système dynamique — situé dans la région considérée de l'écran — représente un système *thermodynamique*, un gaz pour fixer les idées, ses coordonnées étant les variables macroscopiques qui le définissent. Dans ces conditions, la « *probabilité de présence* » au point de l'écran considéré plus haut, devient simplement la *probabilité thermodynamique* de l'état *macroscopique* considéré.

Or, quand il s'agit d'un système thermodynamique — c'est-à-dire tel que le passage de A en B mette en jeu une forme spéciale d'énergie, *la chaleur* — la relation entre la probabilité thermodynamique et les variables macroscopiques est donnée simplement par l'hypothèse de Boltzmann : *le logarithme de cette probabilité est proportionnel à l'entropie S, le coefficient de proportionnalité étant une constante universelle.* Cette hypothèse peut nous servir de guide pour évaluer la probabilité de présence que nous avons envisagée plus haut. Il est, en effet, tout à fait naturel d'appliquer aux systèmes mécaniques une hypothèse semblable à celle Boltzmann, à savoir : *le logarithme de la probabilité de présence est égal à l'« entropie » correspondant à la forme d'énergie mise en jeu.* Pour le phénomène que nous envisageons, cette entropie n'est autre que l'action. Nous allons donc admettre que : *le logarithme de la probabilité de présence du point représentatif en un point donné de l'écran est proportionnel à l'action.*

$$S = k \log \psi. \tag{2}$$

On connaît les innombrables discussions sur la validité de cette hypothèse en Thermodynamique [11]. Sa transposition en Energétique constitue une nouvelle *hypothèse*, très vraisemblable d'ailleurs, et qu'il s'agira de vérifier par ses conséquences.

Il faut encore choisir la constante universelle k. Nous pouvons évidemment la poser *a priori* égale à une valeur convenable. Mais un raisonnement sommaire peut nous indiquer cette valeur; le fait qu'il conduit à un résultat identique à celui qui est classique en mécanique ondulatoire est de nature à nous confirmer la réalité de notre hypothèse primitive.

Nous avons admis comme postulat fondamental *l'atomicité de l'action* [12] et nous l'avons exprimée en égalant à nh les périodes de l'action S. Appliquons l'équation (2) à une

[11] Cf., par exemple, P. et T. Ehrenfest, Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung der Mechanik. [*Enzyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 4, 2 II, Heft 6] et aussi H.-A. Lorentz, *Les théories statistiques en Thermodynamique* [Teubner, (1916)].

[12] Cf. *C. R.*, loc. cit.

telle période, en tenant compte que ψ est nécessairement déterminée et que la période du logarithme est $2\pi i$. On a

$$nh = k'.n.2\pi i, \quad k' = \frac{h}{2\pi i}.$$

Mais comme le *sens* de la variation du logarithme n'est pas déterminé, on pourrait aussi avoir

$$k'' = -\frac{h}{2\pi i}.$$

on peut poser

$$S = k \log \psi_1 \quad \text{et} \quad S = -k \log \psi_2.$$

Si un astérisque indique la quantité imaginaire conjuguée, on peut écrire

$$S = S^* = k^* \log \psi_1^* = -k \log \psi_1^* = -k \log \psi_2, \quad \psi_2 = \psi_1^*.$$

on peut donc prendre la relation unique $S = k \log \psi$, pour déterminer ψ, en se rappelant que la solution complète se compose de ψ et de ψ^*

Nous prendrons donc dorénavant comme hypothèse la relation

$$\boxed{S = \frac{h}{2\pi i} \log \psi}$$

ou encore $\qquad \psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S} \quad$ ou $\quad \psi = e^{\frac{2\pi i}{h}(Et + S_0)}$

$$\psi = \psi_0 \, e^{\frac{2\pi i}{h} Et} \quad \text{avec} \quad \psi_0 = e^{\frac{2\pi i}{h} S_0}$$

dans le cas où il existe une intégrale de l'énergie.

13. **Digression sur les probabilités.** — La notion de probabilité a subi diverses généralisations qui ont sensiblement élargi son sens primitif. On nomme aujourd'hui *probabilité* d'un évènement un nombre compris entre 0 et 1, attaché à cet évènement et qu'on introduit dans les calculs par l'intermédiaire de deux postulats : le principe des probabilités totales et celui des probabilités composées [13].

Au point de vue physique, l'hypothèse de Boltzmann, supposée valable, permet l'évaluation de la probabilité. C'est ce que nous avons fait au paragraphe précédent pour un cas particulier. Or, dans ce cas, à cause du facteur complexe $k = \frac{h}{2\pi i}$, la grandeur que nous avons ainsi définie est une imaginaire. Il faut en conclure ou : 1° que l'hypothèse de départ est absurde, ou sinon 2° *qu'une « probabilité » peut avoir des valeurs imaginaires.*

Il ne nous semble pas que les hypothèses de départ soient attaquables, pour autant qu'on puisse poser cette question pour des *hypothèses*, arbitraires par définition. Par contre, malgré son aspect nouveau et imprévu, la deuxième alternative nous paraît tout-à-fait naturelle.

En effet, quoiqu'on n'ait pas rencontré jusqu'à présent les nombres complexes dans le calcul des probabilités, il n'en est pas moins évident que leur introduction s'impose quand on généralise la notion de probabilité. Pour préciser, ils apparaissent quand on inverse un problème du deuxième ordre. *Les probabilités imaginaires s'introduisent de la même façon*

(13) BOREL, *Traité du calcul des probabilités* [Gauthier-Villars, Paris].

et jouent le même rôle que les points imaginaires en géométrie. Un exemple simple nous le montrera [14].

Prenons une pièce de monnaie dissymétrique. On ne connaît pas la probabilité p d'amener pile. On sait seulement qu'elle est différente de $1/2$ et qu'elle varie avec la dissymétrie de la pièce. On joue des parties de deux coups. Soit P la probabilité d'amener la combinaison pile-face. On aura, par le principe des probabilités composées,

$$P = p\,(1 - p) \tag{3}$$

puisque la probabilité d'amener face est $1 - p$.

Supposons qu'on se donne la probabilité P de l'évènement composé et qu'on demande quelle est la probabilité p de l'évènement élémentaire qui le produit. Pour répondre à cette question, il suffira de résoudre l'équation (3) c'est-à-dire $p^2 - p + P = 0$. Géométriquement celle-ci représente une parabole ayant son axe parallèle à l'axe des P. Les racines cherchées sont les points d'intersection avec une droite Δ parallèle à l'axe des abscisses. On a

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - P}.$$

Si on se donne une valeur de la probabilité de l'évènement composé $P < 1/4$, on aura deux valeurs réelles de p satisfaisant au problème ; physiquement, cela signifie qu'on pourra piper la pièce de façon que la fréquence de l'évènement pile-face se rapproche de P pour un grand nombre de parties. Si on prend $P = 1/4$, on aura le cas de la pièce symétrique, $p = 1/2$. Mais, si $P > 1/4$ on n'aura plus de probabilité p réelle. Dans le premier cas la droite Δ coupe la parabole en deux points, dans le second elle lui est tangente, dans le dernier il n'y a plus de point d'intersection. Mais, dans ce cas, en géométrie, nous continuons à dire que les points existent mais ont des coordonnées imaginaires. *La généralisation que nous proposons pour les probabilités est identique à celle-ci.* Nous continuerons à dire que les probabilités p existent mais sont imaginaires quand $P > 1/4$.

On voit donc, par cet exemple simple, que la notion de probabilité imaginaire aurait pu intervenir en mathématiques par simple généralisation. Le fait qu'une hypothèse physique l'introduit automatiquement nous semble de nature à en accroître l'intérêt. On peut espérer que le calcul des probabilités tirera, de l'introduction des probabilités complexes, les mêmes avantages que tire la Géométrie de la considération des points imaginaires [15].

Cette notion permet aussi l'étude directe des phénomènes à probabilité réelle. Le raccord se fait par l'intermédiaire du principe des probabilités composées. Supposons, en effet, qu'un phénomène réel soit la résultante de deux autres ayant des probabilités imaginaires conjuguées ψ et ψ^* ; sa probabilité $\psi\,\psi^*$ sera donc réelle.

A la lumière de cette observation considérons les probabilités ψ que nous avons introduites dans le paragraphe précédent par la relation $S = k \log \psi$. Le fait que la constante universelle k peut avoir les valeurs $+\dfrac{h}{2\pi i}$ et $-\dfrac{h}{2\pi i}$ indique, comme nous l'avons montré, la présence de *deux* probabilités ψ et ψ^*. Si donc on passe par l'intermédiaire de ψ pour tirer des conclusions sur le phénomène réel, il faudra tenir compte en même temps de ψ et de ψ^*. Il est raisonnable de penser que ce phénomène réel est en quelque sorte composé de deux autres de probabilités ψ et ψ^* et qu'il aura par conséquent la probabilité *réelle* $\psi\,\psi^*$.

Nous verrons plus loin que, sous certaines conditions, on peut identifier ψ avec le paramètre vibrant ψ de l'équation de Schrödinger. Notre résultat est calqué sur les considérations modernes de mécanique ondulatoire, qui envisagent le produit $\psi\psi^*$ comme représentant une probabilité de présence.

(14) *Mathematica*, t. 2 (1929), p. 81 [Cluj. Roumanie].

(15) Pour la représentation formelle des probabilités par des nombres imaginaires, voir aussi, K. Bollert [*Zeitschrift für Physik*, t. 48 (1928), p. 98].

En résumé, nous poserons $S = \frac{h}{2\pi i} \log \psi$, ψ étant une probabilité imaginaire, qui est déterminée par le fait qu'on se donne la fonction S[16]. Pour en déduire la probabilité de présence réelle il faudra prendre le produit $\psi\psi^*$.

14. **Equation aux probabilités**. — Considérons de nouveau un système dynamique dépendant d'un nombre quelconque de paramètres. Il satisfait, comme on sait, à l'équation de Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0.$$

Si on lui adjoint l'équation $S = \frac{h}{2\pi i} \log \psi$, on en déduit :

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi . H\left[\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q}, q, t\right] = 0. \tag{4}$$

Cette équation est l'équation générale qui donne les probabilités imaginaires ψ. Elle permet le calcul des intensités et vaut pour tous les mouvements, sans exception. On constate aisément que *seulement pour des mouvements particuliers elle coïncide avec l'équation de Schrödinger.*

En effet, soit un point de l'espace ordinaire soumis à un mouvement obéissant aux lois de la mécanique newtonienne; si V est l'énergie potentielle, H sera de la forme

$$H = \frac{1}{2m_0} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(xyz).$$

Puisque $p_x = \frac{\partial S}{\partial x}$, ... l'équation de Jacobi est

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V = 0.$$

En posant

$$S = - Et + S_0(xyz),$$

on a

$$\frac{1}{2m_0} \sum \left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + V - E = 0.$$

Posons, pour passer aux probabilités,

$$S = \frac{h}{2\pi i} \log \psi$$

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}(-Et + S_0)} = \psi_0 \, e^{-\frac{2\pi i}{h} Et}$$

avec

$$S_0 = \frac{h}{2\pi i} \log \psi_0.$$

On a alors l'équation générale en ψ_0, *la distribution des probabilités dans l'espace*

$$\boxed{\sum \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} \psi_0^2 (E - V) = 0}$$

[16] Il ne faut évidemment pas perdre de vue que S, donnée par l'équation de Jacobi, n'est définie qu'à une constante près.

Mais de $S_0 = \frac{h}{2\pi i} \log \psi_0$, on déduit $\frac{\partial S_0}{\partial x} = \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial x}$

et
$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} = \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{\psi_0^2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)^2$$

donc
$$\sum \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)^2 = \psi_0 \Delta \psi_0 - \frac{2\pi i}{h} . \psi_0^2 \Delta S_0$$

et en remplaçant dans (4),
$$\Delta \psi_0 + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} (E - V) \psi_0 = \frac{2\pi i}{h} \psi_0 \Delta S_0.$$

Cette équation représente la loi générale donnant la distribution de ψ_0 en fonction des grandeurs mécaniques. Elle est toujours vérifiée. Mais *elle ne se réduit à l'équation de Schrödinger*
$$\Delta \psi_0 + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} (E - V) \psi_0 = 0$$

que si l'on a de plus
$$\Delta S_0 = 0$$

ou encore [17]
$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div.} p = 0.$$

De même, considérons un système quelconque à K degrés de liberté, classique en ce sens que son énergie cinétique puisse être représentée par
$$2T = \Sigma m^{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s.$$

En écrivant l'équation *générale* qui donne la distribution de ψ dans l'espace généralisé, on trouve qu'elle ne devient identique à celle de Schrödinger que si l'on a
$$\sum \frac{\partial}{\partial q^r} \left(m^{-1/2} m^{rs} \frac{\partial S}{\partial q^s}\right) = 0.$$

15. Observations finales. — Le procédé que nous employons consiste donc à partir de l'équation de Jacobi et à aboutir à celle de Schrödinger, en introduisant une condition supplémentaire. Mais le même calcul, *la même substitution*
$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S}$$

a déjà été utilisée par Léon Brillouin [18] et par Wentzel [19] qui, procédant inversement, ont retrouvé, en première approximation, l'équation de Jacobi à partir de celle de Schrödinger. Physiquement, ces deux manières de procéder sont essentiellement différentes, quoiqu'elles correspondent mathématiquement à la même substitution. Les auteurs cités partent de l'équation de Schrödinger qu'ils considèrent comme une équation générale, valable en tous cas. En faisant la substitution
$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S},$$

(17) Cf. Isakson [*Zeitschrift für Physik*, t. 44 (1927), p. 893] qui le premier, a signalé le fait que si l'on admet l'équation de Jacobi, il faut une condition supplémentaire pour qu'elle se réduise à celle de Schrödinger.

(18) L. Brillouin, *J. Phys.*, t. 7 (1926), p. 353.

(19) G. Wentzel, *Zts. f. Phys.*, t. 38 (1926), p. 518.

on peut la résoudre par approximations successives ; on constate alors que la première approximation conduit à l'équation de Schrödinger. Physiquement donc, le phénomène fondamental est la propagation par ondes, régie par cette équation ; la mécanique classique n'en donne qu'une description approchée. Par contre, dans notre manière de voir, nous ne faisons pas appel aux ondes; nous supposons une discontinuité totale et le phénomène fondamental est, chez nous, la propagation d'un grain, d'un point, dont les lois sont exprimées par l'équation de Jacobi. L'équation de Schrödinger ne résulte des équations générales du mouvement que si l'on impose une condition supplémentaire. Cette équation ne régit pas tous les mouvements imaginables. On est donc tenté de penser, comme nous l'avons fait dans notre première note [20], *qu'un mouvement quelconque ne se fait pas nécessairement par ondes de phase, au sens de Broglie-Schrödinger.*

Cela n'est vrai que pour des cas particuliers, très fréquents cependant, et notamment pour les mouvements intra-atomiques. Le mouvement par ondes n'est donc pas *nécessaire*, comme le suppose la mécanique ondulatoire. Les hypothèses de celle-ci sont donc trop restrictives.

On peut même préciser : elles présentent une double limitation, ou, si l'on veut, la conception présentée dans les notes citées est doublement plus générale que celle de la mécanique ondulatoire. Car, pour pouvoir passer de l'équation générale à celle de Schrödinger, il faut supposer qu'une certaine relation est remplie ($\Delta S = 0$, par exemple), mais de plus il est indispensable que H ait la forme classique, que l'énergie cinétique soit donnée par $2T = \sum m_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s$. Or ceci n'est pas vrai en général, comme nous l'avons montré dans la première de nos notes.

Cependant, ces vues d'ensemble ont comme point de départ la conception classique de la description des phénomènes, qui est celle de la mécanique analytique. Elles sont donc en contradiction avec les idées modernes et, en particulier, avec le principe d'indétermination de Heisenberg. Une discussion beaucoup plus approfondie est nécessaire pour en dégager l'essentiel ou pour les mettre d'accord.

(20) *C. R.*, loc. cit.

Manuscrit reçu le 19 juillet 1928.

Paris. — Société Générale d'Imprimerie et d'Edition, 17, rue Cassette.

EXTRAIT DU
BULLETIN DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE
PURES ET APPLIQUÉES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE BUCAREST

IIème ANNÉE (1930 1931). No. 1.

AL. PROCA

La nouvelle théorie d'Einstein

PHYSIQUE. — *La nouvelle théorie d'Einstein.*

Poursuivant ses recherches sur l'unification des théories de la gravitation et de l'électromagnétisme, EINSTEIN vient de franchir une étape importante. Après de longs tâtonnements, dont on peut suivre l'histoire détaillée dans les notes succesives parues aux *Sitzungsberichte der preussischen Akademie,* de Berlin, il est parvenu à asseoir d'une façon qui semble définitive les fondements de sa théorie. Bien plus, à l'heure actuelle, certains résultats d'une importance capitale, comme par exemple les équations du champ, semblent définitivement acquis. Un chapitre de cette nouvelle théorie est clos; il convient donc de s'arrêter un instant pour faire le point et dégager une vue d'ensemble des résultats obtenus.

D'ailleurs, cela a été fait par EINSTEIN lui-même dans un article qui va paraître aux *Mathematische Annalen* et aussi dans deux conférences qu'il a données en novembre 1929 à Paris, à l'Institut HENRI POINCARÉ. Il nous a semblé que l'exposé de cette théorie intéresserait les lecteurs de ce Bulletin; nous avons donc entrepris d'en donner un résumé dans ce qui suit, en nous inspirant de ces Conférences.

Ce résumé est divisé en deux parties: dans la première, nous rappelons des résultats connus de la relativité générale, qui nous permettront de caractériser la nouvelle théorie d'EINSTEIN et la situer dans l'ensemble de nos connaissances; dans la deuxième partie nous exposons cette théorie elle-même, dans sa forme la plus récente qu'EINSTEIN lui a donné dans ses Conférences de Paris.

I.

1. — Comme on le sait, l'idée fondamentale de la théorie de la gravitation consiste à relier les phénomènes de cet ordre à la structure de l'espace-temps. Ces phénomènes *physiques* sont simplement la manifestation de certaines caractéristiques *géométriques* de notre univers. Pour établir leurs lois il suffit donc d'étudier la structure de cet univers. La théorie d'EINSTEIN

ramène donc, à proprement parler, tout un chapitre de la Physique à la Géométrie. Cela paraît si naturel aujourd'hui qu'on ne s'attarde même plus à admirer le bond prodigieux que cette idée géniale a fait faire à notre entendement.

Mais on voit immédiatement que cette idée de base est infiniment plus riche qu'une hypothèse ordinaire, applicable seulement à un domaine particulier. En effet, si la structure de l'univers permet d'expliquer certains phénomènes physiques, rien ne limite *à priori* l'application de cette hypothèse à une seule catégorie de phénomènes. On peut logiquement penser que d'autres phénomènes puissent aussi être „expliqués" par la structure de l'univers. En particulier cela est vraisemblable pour tous ceux où intervient un „champ", comme par exemple les phénomènes électromagnétiques. Or, il paraît de plus en plus certain que tout ce qui n'est pas gravitation peut s'expliquer par l'électromagnétisme. (Les quanta ne rentrent pas encore dans ce schéma; mais la mécanique ondulatoire semble bien ramener l'étude des discontinuités à l'étude d'un „champ" et permettre ainsi une théorie unitaire).

L'explication géométrique fournit la possibilité d'un rapprochement entre ces phénomènes et ceux de la gravitation. Le but du nouveau travail d'Einstein est justement de réunir en une théorie unique, qu'il appelle „théorie unitaire des champs" ces deux catégories de phénomènes. Avant lui Weyl et Eddington avaient tenté cette synthèse en partant d'un autre point de vue; il sera utile d'examiner les solutions qu'ils en ont données pour mieux comprendre les caractéristiques de celle que propose Einstein.

2. — Quelle que soit la solution adoptée, elle doit nous donner le moyen de décrire simultanément le champ de gravitation *et* le champ électromagnétique. La théorie de la relativité générale étudie la structure de l'espace, mais ne peut en tirer que la description du champ de gravitation. Nous devons donc conclure que dans cette théorie nous avons introduit certaines restrictions ou certaines hypothèses simplificatrices qui limitent ses possibilités d'extension. Pour arriver à la solution du problème proposé il faut donc écarter ces hypothèses parasites et atteindre le degré de généralité nécessaire. Les solutions de Weyl, Eddington et d'Einstein ne diffèrent que par la manière dont elles lèvent ces restrictions.

3. — Considérons un continu à n dimensions. Un point P est défini par n nombres x^ν, un point voisin P' par les nombres voisins $x^\nu + dx^\nu$. Le vecteur infinitésimal PP' aura pour composantes dx^ν; tout vecteur de composantes proportionneles à dx^ν sera un *vecteur tangent en* P à la variété considérée, et l'ensemble des vecteurs tangents en P formera une multiplicité tangente à la multiplicité considérée.

L'étude de la structure du continu donné se fait au moyen de ces vecteurs tangents A^ν. Si le continu est amorphe, dénué de structure, il n'y a aucune relation entre les multiplicités tangentes en deux points différents P et P′. En nous donnant la connexion entre ces multiplicités tangentes, nous nous donnons plus ou moins complètement, la structure du continu considéré. Nous comparerons donc, en fin de compte, deux vecteurs A^ν en deux points voisins P et P′. Cette comparaison portera évidemment, d'une part sur les directions des vecteurs et, de l'autre, sur leur grandeur. Occuppons-nous d'abord des directions.

a) Considérons deux points voisins, P (x^ν) et P′ $(x^\nu + dx^\nu)$, et établissons une correspondance telle qu'à un vecteur A^ν_P en P, corresponde un autre vecteur $A^\nu_{P'}$ en P′; nous dirons par définition que la second vecteur est obtenu par un *déplacement parallèle* du premier. Ce choix *définit* donc, deux vecteurs *parallèles* en deux points voisins de notre multiplicité; celle-ci n'est donc plus dénuée de structure. Inversement, on peut dire que la structure de l'espace est telle que le vecteur A^ν_P déplacé parallèlement en P′, coïncide avec $A^\nu_{P'}$.

On voit facilement que les composantes $A^\alpha_{P'}$ peuvent s'écrire, si nous nous limitons au premier ordre

$$A^\alpha_{P'} = A^\alpha_P - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\mu_P \, dx^\nu \, .$$

(Nous nous conformons ici à la règle du calcul différentiel absolu et nous supprimons le signe Σ devant tout monôme contenant deux fois le même indice: $A_\rho \, dx^\rho$ signifier donc $\sum\limits_1^n A_\rho \, dx^\rho$). Les fonctions $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ qui définissent l'accroissement des composantes A^α dans un déplacement parallèle infinitésimal, peuvent servir pour caractériser, par leur valeur en chaque point, la structure de la variété. Ces fonctions sont *arbitraires*. Considérons cependant, deux vecteurs PQ, PR, de même origine P et de composantes infiniment petites, donc tels que leurs extrémités Q et R appartiennent également à la multiplicité tangente en P. *Il semble évident* alors, que l'extrémité Q′ de PQ déplacé parallèlement suivant PR, doive coïncider avec l'extrémité R′ de PR, déplacé parallèlement suivant PQ. Cette condition géométrique se traduit par la relation:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \, .$$

Dans la théorie de la gravitation on admet que les grandeurs $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ doivent satisfaire à cette condition; à part cela, elles sont tout à fait arbitraires (si la métrique n'est pas encore donnée). Il convient de noter que nous sommes en présence ici d'une hypothèse nouvelle, la symétrie des $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, qui restreint la généralité. Nous rencontrons donc ici pour la première fois une de ces restrictions que nous avons mentionnées plus haut.

Considérons maintenant un vecteur A^α en P et demandons-nous s'il existe en un point M, *à distance finie* de P, un vecteur qui lui soit parallèle. En cheminant sur une courbe C nous pouvons déplacer parallèlement le vecteur A_α, de proche en proche, jusqu'en M. Mais la direction du vecteur ainsi obtenu dépend des valeurs que prennent les $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sur la courbe C, donc du chemin parcouru. Il n'y a pas en M de vecteur *unique,* „parallèle" à A^α. Dans une variété dont la structure à été définie au moyen des $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ il n'y a pas, en général, de *parallélisme à distance finie,* ou de parallélisme „absolu". Ceci est une des caractéristiques importantes des multiplicités qu'utilise la théorie de la gravitation, c'est-à-dire des espaces riemanniens.

b) Revenons maintenant un peu en arrière, pour étudier la longueur des vecteurs en deux points voisins et examiner de quelle manière elle peut déterminer la structure de l'espace.

Quelle que soit la définition de la longueur d'un vecteur, l'hypothèse qui se présente la première à l'esprit quand on en étudie les variations, est la suivante: dans le déplacement parallèle du vecteur A^α de P en P', *la longueur de* A^α *ne change pas.* Si on déplace un vecteur de P en M, à distance finie, sa longueur restera la même, quel que soit le chemin parcouru de P en M. Il s'en suit que, dans ce cas, on peut comparer les longueurs de deux vecteurs situés à distance finie: *le transport des longueurs à distance finie est possible.*

Cette hypothèse simple est celle qu'on fait implicitement dans la théorie de la gravitation. La structure des variétés qu'utilise cette théorie est donc caractérisée, d'une part, par le *transport à distance* des longueurs et, de l'autre, par *l'absence de parallélisme absolu.* De telles variétés sont désignées sous le nom de variétés *riemanniennes,* si les $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ qui les caractérisent sont quelconques (mais symétriques en μ et ν). Un cas particulier remarquable est constitué par les variétés *euclidiennes.* Pour celles-ci les $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ satisfont à certaines conditions qui font que non seulement le transport des longueurs, mais aussi le déplacement parallèle à distance finie devient possible.

Weyl a cependant remarqué qu'on peut concevoir une multiplicité dans laquelle le transport à distance des longueurs ne soit plus possible; sa structure devra être plus compliquée, et cette complication nous permettra justement de disposer de fonctions nouvelles que nous utiliseront pour décrire le champ électromagnétique.

Dans ce cas il faudra *définir* un en point P' le vecteur B^α égal au vecteur A^α situé en P. Cette définition introduit *n* grandeurs φ_σ tout à fait analogues aux $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ et qui caractérisent la structure d'une variété réalisant la correspondance envisagée. Nous obtenons ainsi *l'espace de* WEYL, multiplicité ayant une structure plus complexe que les multiplicités riemanniennes classiques. Dans le cas de l'univers quadridimensionnel il y a juste quatre fonctions nouvelles φ_σ définies par la structure de l'espace. WEYL a proposé de les indentifier au potentiel électromagnétique (trois composantes pour le potentiel vecteur et une pour le potentiel scalaire). La structure de l'espace de WEYL détermine donc le champ gravifique par l'intermédiaire des fonctions $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ et le champ électromagnétique au moyen des φ_σ. Tel est le principe de la synthèse de WEYL.

On obtient une variété à structure encore plus compliquée, au moyen de l'observation suivante, due à EDDINGTON. Dans la théorie de WEYL, quand on déplace un vecteur sa longueur varie, mais cette variation est indépendante de l'orientation du vecteur. On peut se libérer de cette dernière restriction : le transport des longueurs ne dépendra pas seulement du chemin parcouru, mais aussi des directions successives du vecteur sur la courbe. On obtient ainsi *l'espace* d'EDDINGTON, variété beaucoup plus compliquée, qu'on utilise d'une façon analogue à l'espace de WEYL.

Tous ces espaces se caractérisent donc par l'impossibilité du transport des longueurs et du deplacement parallèle à distance finie.

4. — Pour mettre en lumière la différence entre la nouvelle théorie d'EINSTEIN et les précédentes, résumons les résultats que nous avons rappelés :

a) Pour l'espace *riemannien* le transport des longueurs est possible, mais le déplacement parallèle à distance finie ne l'est pas. En outre, les composantes $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ sont symétriques $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$.

b) Pour l'espace *euclidien* le transport des longueurs aussi bien que le déplacement parallèle à distance finie sont possibles. Cet espace est un cas particulier du précédent, les $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ (toujours symétriques) satisfaisant à certaines conditions.

c) Pour les espaces de WEYL et d'EDDINGTON, on ne peut parler ni de transport des longueurs ni de parallélisme à distance finie.

Par opposition aux précédents, l'espace qu'introduit EINSTEIN possède une structure qui permet tout aussi bien le transport des longueurs que le parallélisme absolu, mais qui, cependant, *n'est pas euclidien, parce que les composantes* $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ *ne sont plus symétriques* en μ et ν.

La théorie d'EINSTEIN se présente donc sous un aspect d'une simplicité remarquable. Cela est très satisfaisant au point de vue physique, parce qu'on limite de cette façon l'arbitraire de notre choix, tout en adoptant l'hypothèse la plus simple possible. En effet, si la comparaison des longueurs et des directions est possible à distance finie, nous n'avons plus à nous préoccuper de cette comparaison en des points infiniment voisins. Dans le cas contraire nous avons à choisir la loi de cette comparaison, et le nombre des alternatives logiquement équivalentes est grand. Nous n'en avons mentionné que quelques-unes, celles qui ont été conçues en vue d'une interprétation physique immédiate. Mais la question a été étudiée au point de vue purement formel par des mathématiciens, qui ont construit des géométries très diverses et non susceptibles à première vue d'interprétation immédiate; nous n'insisterons pas là-dessus. Il est cependant remarquable de constater que le type d'espace utilisé par EINSTEIN dans sa théorie, a déjà été rencontré, notamment par MM. WEITZENBÖCK et CARTAN, au cours de recherches indépendantes de toute idée d'application pratique. Plus particulièrement CARTAN a mis en évidence le fait fondamental que l'hypothèse de la symétrie des $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ n'est pas logiquement indispensable. Les espaces pour lesquels cette condition n'est pas remplie sont appelés des *espaces à torsion*. Il restait encore à choisir parmi ces espaces a torsion ceux qui sont susceptibles d'être utilisés en Physique, à donner une méthode simple pour les étudier et surtout à trouver les équations fondamentales; c'est ce qu'a réalisé EINSTEIN, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet exposé.

On peut se demander quel est le degré de complication de l'espace sur lequel s'est porté son choix. Au premier abord on pourrait être tenté de croire que c'est un espace intermédiaire entre une variété riemannienne et une variété euclidienne, mais il n'en est rien. On voit facilement [1]) qu'en fait, l'espace d'EINSTEIN a le même degré de généralité que l'espace de RIEMANN. L'espace euclidien est un cas particulier, soit de l'espace de RIEMANN soit de celui d'EINSTEIN. Dans ce dernier cas on l'obtient en écrivant que la torsion est nulle (les $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ symétriques) et dans le premier, en annulant le tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL, ce qui revient à admettre l'existence d'un parallélism absolu.

La voie choisie par EINSTEIN est donc radicalement différente de celle de WEYL. D'aileurs, cette théorie n'a jamais été admise par EINSTEIN. Cela s'explique non seulement par le fait qu'elle ne réalise nullement la synthèse envisagée [2]), mais aussi par une objection de principe qu'on peut lui opposer.

Cette théorie, et toutes ses analogues, relient en effet, la gravitation et l'électromagnétisme par simple juxtaposition. EINSTEIN croit au contraire, à l'existence réelle d'un phénomène *unique*, et dont les manifestations électromagnétique et gravifique ne sont séparables *qu'en première approximation;* si l'analyse est poussée un peu plus loin on constate que gravitation et électromagnétisme se fondent l'un dans l'autre et deviennent indiscernables. Le système d'équations doit donc représenter un *seul* phénomène et la sépara-

---

[1]) H. REICHENBÄCHER, Z. PHYSIK, **33**, 683, 1928.

[2]) Elle a été abandonnée par WEYL lui-même. Cf. *Gruppentheorie und Quantenmechanik,* S. HIRZEL, Leipzig, p. 88.

tion en équations gravifiques et équations de MAXWELL ne doit pouvoir se faire que si on se limite aux grandēurs du premier ordre. La théorie unitaire des champs est la seule, à l'heure actuelle, qui réalise ce désideratum important.

Examinons maintenant en détail cette théorie.

II.

Le problème que nous avons à résoudre se divise en deux parties. Nous aurons à découvrir tout d'abord la manière la plus commode d'étudier le nouveau type d'espace à parallélisme absolu. En effet, cet espace diffère notablement de celui envisagé en relativité générale; il sera donc nécéssaire de forger un nouvel instrument de calcul pour en étudier la structûre. En particulier nous ne pourrons plus décrire l'espace en nous donnant *seulement* la forme fondamentale $g_{\mu\nu}\ dx_{\mu}\ dx_{\nu}$. Ensuite, quand nous aurons déterminé les fonctions qui peuvent décrire cette structure, nous devrons chercher les lois les plus simples auxquelles on puisse les assujettir; en d'autres termes, nous aurons à chercher les équations du champ.

1. — *n-podes.* — Pour étudier la structure de l'espace, EINSTEIN emploie la méthode suivante. Imaginons en chaque point de notre continu à n dimensions, un système de n axes rectangulaires ayant une orientation arbitraire, variable en chaque point; nous appellerons un tel système un *n-pode.* Portons sur chaque axe de l'n-pode un vecteur unitaire. *Par définition*, les n-podes sont tous „parallèles“ entre eux. Plongeons notre continu dans une variété à plus de n dimensions. Si dans cette variéte les n-podes sont parallèles *au sens ordinaire*, le continu qu'ils définissent sera lui aussi euclidien. Mais si leur orientation varie d'un point à l'autre (au sens ordinaire) les n-podes restant „parallèles“ par definition, il est clair que notre continu aura une structure différente de celle d'un espace euclidien. Les n-podes peuvent donc servir à caractériser une structure plus compliquée que celle d'un espace euclidien. Nous venons de le constater pour ce qui concerne les relations de direction. Si maintenant nous nous donnons des vecteurs unitaires sur les axes, la métrique sera elle-même detérminée.

Pour le voir considérons un système général de coordonnées curvilignes et soient h_s^ν les composantes des vecteurs unitaires ayant leur origine au point P. h_s^ν représente la ν-ème composante du vecteur dirigé suivant l'axe d'indice s de l'n-pode. Cette règle sera observée dans tout ce qui suit: les indices latins sont relatif aux axes de l'n-pode, les indices grecs aux axes de coordonnées curvilignes.

Un vecteur A aura comme composantes: A_s dans le système local (le n-pode correspondant à son origine) et A^ν dans le système général curviligne. On aura évidemment :

$$A^\nu = h^\nu_s A_s \tag{1}$$

$$A_s = h_{s\nu} A^\nu \tag{2}$$

les $h_{s\nu}$ étant les mineurs normés du déterminant $|h^{s}_{\nu}|$, et la sommation étant supposée effectuée chaque fois qu'un indice figure deux fois, comme dans le calcul différentiel absolu.

La géométrie euclidienne étant valable dans un système local nous aurons pour la grandeur d'un vecteur

$$A^2 = \Sigma A_s^2 = h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu A^\nu .$$

Les coefficients de la forme métrique fondamentale $g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ seront donc

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu}. \tag{3}$$

On voit donc que la métrique est déterminée sans ambiguïté par les n-podes. Le parallélisme à distance l'est également : en effet les n-podes étant tous „parallèles", deux vecteurs seront parallèles s'ils ont mêmes composantes dans leurs systèmes locaux, même si ceux-ci ne sont pas infiniment voisins.

On voit facilement que dans cette théorie l'algèbre tensorielle suit presque les mêmes règles que dans la théorie classique.

La conception de tenseur se trouve cependant modifiée par le fait que nos n podes ne sont définis qu'à une rotation près. En effet d'après la manière dont nous les avons introduits il est évident que si on change leur orientation de la même manière, ils continueront à représenter le même espace. Donc, en plus de l'invariance ordinaire, les nouvelles équations devront être invariantes par rapport à une rotation des systèmes locaux.

Des différences profondes et caractéristiques apparaissent dès qu'on étudie l'analyse tensorielle.

2. — *Analyse tensorielle.* — Considérons *le déplacement parallèle* d'un vecteur A_s d'un point P de coordonnées x^β en un point voisin P′ de coordonnées $x^\beta + dx^\beta$. Par définition les composantes des vecteurs dans le systèmes locaux de P et de P′ sont égales ; donc $\delta\,(A_s) = 0$, ou, d'après (2),

$$\delta(h_{s\mu} A^\mu) = 0.$$

En développant, multipliant par h_s^μ et tenant compte de la définition des $h_{s\mu}$ on a

$$\delta A^\mu = - h_s^\mu \frac{\partial h_{s\alpha}}{\partial x^\beta} A^\alpha \delta x^\beta \tag{4}$$

Si l'on pose

$$\Delta_{\alpha\beta}^\mu = h_s^\mu \frac{\partial h_{s\alpha}}{\partial x^\beta} \tag{5}$$

on a

$$\delta A^\mu = - \Delta_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha \delta x^\beta. \tag{6}$$

Les $\Delta_{\alpha\beta}^\mu$ jouent donc le rôle des symboles de CHRISTOFFEL $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ de l'ancienne théorie.

Mais on peut facilement voir au moyen de (5), qu'à l'encontre des $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ les $\Delta_{\alpha\beta}^\mu$:

1°. Ne sont pas symétriques en $\alpha\beta$ $\Delta_{\alpha\beta}^\mu \neq \Delta_{\beta\alpha}^\mu$.

2°. Le tenseur analogue au tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL $R_{k,lm}^i$ est identiquement nul, ce qui d'ailleurs est évident à priori, le déplacement parallèle étant intégrable, par hypothèse.

Comme dans le calcul différentiel absolu nous pouvons former à partir des $\Delta_{\alpha\beta}^\mu$ la dérivée covariante. Désignons par une virgule (,) le dérivée ordinaire et par un point-virgule (;) le dérivée covariante.

Nous aurons

$$\Delta_{\alpha\beta}^\mu = h_s^\mu h_{s,\beta}^\alpha$$

et pour un vecteur

$$A^\mu_{;\sigma} = A^\mu_{,\sigma} + A^\alpha \Delta_{\alpha\sigma}^\mu \tag{7}$$

on

$$A_{\mu;\sigma} = A_{\mu,\sigma} - A_\alpha \Delta_{\mu\sigma}^\alpha. \tag{8}$$

La dérivée covariante d'un tenseur de rang plus élevé s'obtient par des formules analogues aux formules classiques ; celle du tenseur fondamental est nulle. L'ordre des dérivations n'est pas indiférent.

La différence des dérivées covariantes successives d'un tenseur $T^{:}_{:}$ prises par rapport à σ et à τ et par rapport à τ et σ est donnée par la formule

$$T^{\cdot}_{\cdot\,;\sigma;\tau} - T^{\cdot}_{\cdot\,;\tau;\sigma} \equiv - T^{\cdot}_{\cdot\,;\alpha} \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha \tag{9}$$

avec

$$\Lambda_{\sigma\tau}^\mu = \Delta_{\sigma\tau}^\mu - \Delta_{\tau\sigma}^\mu \tag{10}$$

3. — *Identités.* — Les $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ ne forment pas un tenseur. Par contre $\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} = \Delta^{\mu}_{\alpha\beta} - \Delta^{\mu}_{\beta\alpha}$ en est un et a ceci de remarquable qu'il s'exprime uniquement au moyen des dérivées premières du tenseur fondamental.

En effet prenons deux fois la dérivée covariante d'un scalaire φ:

$$\varphi_{,\sigma,\tau} - \varphi_{,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Permutons σ et τ et retranchons les deux expressions;

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}\left(\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}\right)$$

étant un tenseur, $\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}$ l'est aussi.

Ce tenseur $\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$ a une importance fondamentale; on voit aisément que si Λ est nul le continu est euclidien. Il satisfait à un certain nombre d'identités qu'il est facile d'établir.

D'abord, le déplacement parallèle étant intégrable le tenseur de RIEMANN formé à l'aide des $\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}$ est identiquement nul. On en déduit

$$\Delta^{\iota}_{\varkappa\lambda,\mu} - \Delta^{\iota}_{\varkappa\mu,\lambda} - \Delta^{\iota}_{\sigma\lambda}\Delta^{\sigma}_{\varkappa\mu} + \Delta^{\iota}_{\sigma\mu}\Delta^{\sigma}_{\varkappa\mu} \equiv 0 \tag{11}$$

qui donne si nous permutons $\varkappa$, λ, μ et si nous faisons la somme en introduisant la dérivée covariante:

$$\Lambda^{\iota}_{\varkappa\lambda;\mu} + \Lambda^{\iota}{}_{\lambda\mu;\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\varkappa;\lambda} + \left(\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\mu\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\lambda}\right) \equiv 0\,. \tag{12}$$

De cette identité on en déduit une autre en contractant une fois par rapport à ι et μ. Si nous posons

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha} = \varphi_{\mu}\,. \tag{13}$$

nous avons

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - \left(\varphi_{\mu,\nu} - \varphi_{\nu,\mu}\right) \equiv 0\,. \tag{14}$$

Introduisons une nouvelle notation: un indice souligné sera un indice changé de place au moyen des g. Par exemple

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\,. \tag{15}$$

Posons, en outre

$$G^{\mu\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}. \tag{16}$$

$$F^{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\alpha}\,. \tag{17}$$

Avec ces notations si nous appliquons la règle (9) de permutation au tenseur $\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}$ en dérivant par rapport à ν et à α, nous obtenons l'identité

$$G^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - F^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} F_{\alpha\nu} \equiv 0.$$

4. — *Equations du champ.* — Nous avons examiné dans ce qui précède le nouvel instrument mathématique qui nous servira pour décrire la structure de l'espace. Il s'agit maintenant de trouver les relations les plus simples qui peuvent servir à définir cette structure, c'est-à-dire à fixer les fonctions h^{ν}_{s}.

Il est vraisemblable que ces relations contiendront le tenseur $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ et ses dérivées jusqu'au second ordre.

Ce tenseur est remarquable parce que c'est le seul qui contienne seulement les derivées premières des h^{ν}_{s}. Mais quel point de repère peut-on avoir pour deviner *la forme* des relations cherchées ?

Einstein s'est laissé guider par la forme des identités que satisfont, les grandeurs $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. Après beaucoup de tâtonnements, dont l'étude serait d'ailleurs très instructive, il a été amené a poser comme équations du champ.

$$G^{\mu\alpha} = 0. \tag{19}$$

$$F^{\mu\alpha} = 0. \tag{20}$$

Sous cette forme cependant le système paraît ne pas convenir. En effet il y a en tout n^2 équations G, et $\frac{n(n-1)}{2}$ équations F, distinctes, pour n^2 inconnues h^{ν}_{s} ; cependant parmi ces inconnues, n doivent rester indéterminées à cause du principe de relativité, ce qui réduit leur nombre à $n^2 - n$. D'autre part il y a entre les $G^{\mu\alpha}$ et les $F^{\mu\alpha}$ les n identités (18). Finalement pour que le système fût compatible il faudrait que

$$n^2 + \frac{(n-1)}{2} - n = n^2 - n$$

ce qui n'est évidemment pas le cas. Cependant Einstein est arrivé a donner à ce système une forme telle que la compatibilité puisse être aisément verifiée.

Pour cela il introduit une nouvelle variable, le scalaire $\log\psi$, et remplace les équations (20) $F^{\mu\alpha} = 0$ par

$$\varphi_k - \frac{\partial \log\psi}{\partial x^k} = 0 \tag{21}$$

qui leur sont équivalentes. En effet $F^{\mu\alpha} = 0$ entraîne d'après (14)

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \varphi_\mu = \frac{\partial \log\psi}{\partial x^\mu}.$$

Le nouveau système prend donc la forme suivante

$$\varphi_k - \frac{\partial \log \psi}{\partial x^k} = 0 \tag{21}$$

$$G^{\mu\alpha} = 0. \tag{19}$$

Il y a maintenant n^2+n équations et $(n^2+1)-n$ inconnues à déterniner. Entre les équations (21) et (19) il y a déjà n identités (18). Le système serait compatible si on pouvait trouver encore N identités, de façon que

$$(n^2+n) - n - \mathrm{N} = (n^2+1) - n$$

$$\mathrm{N} = n - 1. \tag{22}$$

Or, Einstein est arrivé a trouver effectivement ces $n-1$ identités.

Si $\quad G^{\mu\alpha}$ désigne la partie antisymétrique de $G^{\mu\alpha}$

$$2G^{\mu\alpha} = G^{\mu\alpha} - G^{\alpha\mu} \tag{23}$$

et si on pose

$$S^{\alpha}_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}} \tag{24}$$

et

$$F_k = \varphi_k - \frac{\partial \log \psi}{\partial x^k}$$

les identités cherchées seront

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\psi h\,(2G^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\mu\alpha}F_\sigma\right] \equiv 0. \tag{25}$$

En apparence il y en a n. Mais observons que la parenthèse est antisymétrique.

Si $\quad T^{\mu\alpha} = -T^{\alpha\mu} \quad$ on aura

$$(T^{\mu\alpha})_{,\alpha,\mu} = (T^{\mu\alpha})_{,\mu,\alpha} = -(T^{\alpha\mu})_{,\mu,\alpha} = -(T^{\mu\alpha})_{,\alpha,\underline{\underline{\alpha}}} \equiv 0$$

relation vraie quel que soit T, donc indépendante des G et des F. Il restent donc $n-1$ identités c'est-à-dire juste ce qu'il faut pour que le système envisagé soit compatible.

Les équations (19), (21) constituent donc les équations générales du champ.

5.—*Interprétation physique.*—Ainsi que nous l'avons annoncé le système (19), (21) contient la loi générale qui détermine la structure de l'univers et qui fixe l'aspect des phénomènes. Ces phénomènes seront d'après EINSTEIN les phénomènes de gravitation *et* ceux de l'électromagnétisme. Mais dans notre système (19), (21), ces phénomènes sont indissolublement liés ; la loi du champ est unique et on ne peut séparer la gravitation de l'électromagnétisme. Ces deux ordres de phénomènes ne sont pas simplement liés par un lien formel. D'après EINSTEIN il n'y a qu'un seul „phénomène" ou, mieux, les deux types de phénomènes que nous séparons arbitrairement ont une même essence physique. Ils forment ensemble l'aspect sous lequel se présente à nous la structure unique de l'espace.

Cependant d'où vient que nous séparons nettement en deux catégories distinctes ces manifestations ? Si le système proposé représente la réalité, il doit rendre compte de cette séparation apparente. *Il en est effectivement ainsi.* Les équations générales se séparent effectivement en deux groupes, qui correspondent l'un à la gravitation, l'autre à l'électromagnétisme, mais cela *seulement en première approximation.*

Considérons un espace différent infiniment peu d'un espace euclidien c'est-à-dire posons

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \bar{h}_{s\nu} \tag{26}$$

avec

$$\delta_{s\nu} = \begin{cases} 0 & s \neq \nu \\ 1 & s = \nu \end{cases} \tag{27}$$

et négligeons les grandeurs du second ordre.

On voit facilement que $\bar{h}_s^{\nu} = -\bar{h}_{\nu s}$, $\Delta^{\sigma}_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\sigma\alpha,\beta}$, $\Lambda^{\sigma}_{\alpha\beta} = h_{\sigma\alpha,\beta} - h_{\sigma\beta,\alpha}$.

Donc les équations générales $G^{\mu\alpha} = 0$ $F^{\mu\alpha} = 0$ deviennent

$$h_{\alpha\mu,\nu,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\nu,\mu} = 0 \tag{28}$$

$$\bar{h}_{\alpha\mu,\alpha,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\alpha,\mu} = 0. \tag{29}$$

Ce système prend une forme simple en observant qu'il existe une transformation infinitésimale

$$x^{\nu'} = x^{\nu} - \xi^{\nu}$$

telle que les $h_{\alpha\nu,\nu}$ et $h_{\alpha\nu,\alpha}$ s'annulent en même temps. On vérifie facilement qu'une telle transformation existe. Le système devient

$$\left.\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0 \\ h_{\alpha\mu,\alpha} = 0 \\ h_{\alpha\mu,\mu} = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{30}$$

Séparons les $h_{\alpha\mu}$ en leurs parties symétriques $\bar{g}_{\alpha\mu} = \bar{h}_{\alpha\mu} + \bar{h}_{\mu\alpha}$ et antisymétriques $a_{\alpha\mu} = h_{\alpha\mu} - h_{\mu\alpha}$. Le système se divise en deux autres :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0 \\ g_{\alpha\mu,\mu} = 0 \end{aligned} \quad (31) \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} a_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0 \\ a_{\alpha\mu,\mu} = 0; \end{aligned} \quad (32)$$

Le système (31) donne les lois de gravitation et le système (32) fournit les équations de MAXWELL *sous une forme plus générale.*

Ainsi la séparation n'est possible qu'en première approximation et, dans ce cas, elle est effective; mais si nous allons au fond des choses et si nous prenons les équations générales, gravitation et électromagnétisme sont absolument indiscernable l'une de l'autre.

6.—*Conclusions.*— Que pouvons-nous conclure de l'exposé qui précède ? Un grand pas en avant a été fait dans la poursuite de cette synthèse totale des phénomènes qui est, à tort ou à raison, l'idéal des physiciens. Nous sommes en possession non seulement d'une hypothèse féconde sur la structure de l'espace, mais aussi de l'instrument de travail propre à son étude. Bien plus, nous connaissons les équations du champ. Cependant, tout cela ne représente que la moitié du chemin. Il nous manque en effet une véritable définition du champ, qui ne peut être donnée qu'en indiquant la loi du mouvement des particules dans le champ. Et cette lacune se traduit par l'impossibilité absolue *de vérifier expérimentalement* la théorie.

La tâche qui reste encore à accomplir est très étendue. Le premier pas doit être l'intégration des équations du champ pour en déduire la loi du mouvement des particules et aussi peut-être leur structure. Anticipant sur cette intégration, beaucoup de travaux cherchent dès maintenant à relier l'espace d'EINSTEIN à l'équation de DIRAC, et cela peut réserver pour l'avenir de belles surprises. En tout cas, le splendide effort fourni par EINSTEIN nous permet d'espérer que les dernières difficultés théoriques seront vaincues et que nous pourrons bientôt comparer les conséquences de la théorie à l'expérience, cette pierre d'échoppement de toutes les créations de l'esprit.

Manuscrit reçu le 25 Janvier 1930.

Note ajoutée à la correction. Depuis que ces lignes ont été écrites EINSTEIN a donné une autre forme, plus symétrique aux équations du champ. Le nouveau système est (Voir *Sitzungsberichte der preuss. Akad. der Wissenschaften* I, 1930, p. 18):

$$G^{\mu\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\;\underline{\nu}\;;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\;\underline{\tau}}\,\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0$$

$$F_{\mu\alpha} = \Lambda^{\sigma}_{\mu\alpha\,;\,\sigma} = 0$$

22 équations à 16 inconnues, entre lesquelles existent les identités

$$G^{\mu\alpha}{}_{;\,\alpha} - F^{\mu\alpha}{}_{;\,\alpha} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\;\underline{\tau}}\,F_{\sigma\tau} \equiv 0$$

$$F_{\mu\nu\,,\,\rho} + F_{\nu\rho\,,\,\mu} + F_{\rho\mu\,,\,\nu} \equiv 0$$

$$G^{\mu\alpha}{}_{;\,\mu} + \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}\,G^{\sigma\tau} \equiv 0.$$

AL. P.

APPENDICE DE LA TRADUCTION FRANÇAISE

LES CROCHETS DE POISSON EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

par Al. PROCA

1. — Rappelons brièvement la définition et les propriétés connues des crochets de Poisson. Le mouvement d'un système conservatif, dépendant de n coordonnées $q_1, q_2, \ldots q_n$, et de n moments conjugués $p_1, p_2, \ldots p_n$, est défini en mécanique classique à l'aide d'une fonction de Hamilton H, par le système d'équations canoniques

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d} q_r}{\mathrm{d} t} = \dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{\mathrm{d} p_r}{\mathrm{d} t} = \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

Toute relation de la forme

$$f(q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n, t) = \text{constante}$$

qui est identiquement vérifiée lorsqu'on y remplace les q_i, et p_i par une solution quelconque du système (1), s'appelle une *intégrale première* de ce système d'équations différentielles. Pour qu'une fonction f soit une intégrale première il faut et il suffit que $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} = 0$, ou que

$$\frac{d f}{\mathrm{d} t} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\mathrm{d} q_i}{\mathrm{d} t} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\mathrm{d} p_i}{\mathrm{d} t} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

En utilisant (1) on peut mettre cette condition sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

On voit apparaître ici l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

qui ne contient que les dérivées partielles de f et de H ; elle reviendra souvent dans nos calculs, ce qui justifie l'emploi d'une notation abrégée. En général, deux fonctions u et v des $2n$ variables indépendantes $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ étant données, on désigne par $[u, v]$ et on appelle *parenthèse ou crochet de Poisson* l'expression

$$(3) \qquad [u, v] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$$

2. — On vérifie immédiatement à partir de leur définition quelques propriétés élémentaires des crochets de Poisson. On a, par exemple, c étant une constante

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} [u, v] = -[v, u], & [u, -v] = -[u, v], \\ [u, u] = 0 & [u, c] = 0. \end{array}$$

On a également

$$(5) \qquad [uv, w] = u[v, w] + v[u, w],$$

règle qu'on retient facilement en remarquant son analogie formelle avec la règle qui donne la dérivation d'un produit. Cette analogie d'un crochet de Poisson et d'une dérivée apparaît plus d'une fois dans les calculs et s'explique par le fait qu'un tel crochet est une somme de déterminants fonctionnels

$$[u, v] = \sum_i \frac{D(u, v)}{D(q_i, p_i)}$$

qui possèdent tous les caractères des dérivés (quelquefois le crochet se réduit à une dérivée proprement dite comme dans (2)). Par exemple, soit $F(u_1, u_2, \dots)$ une fonction de plusieurs autres $u_1, u_2, \dots u_k$, lesquelles dépendent à leur tour des variables indépendantes $q_1 \dots p_n, p_1 \dots p_n$. On a :

$$[F, v] = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial u_r} [u_r, v]$$

et si $\phi(u_1, \dots u_k)$ est une fonction des mêmes u_r

$$(6) \qquad [F, \phi] = \sum_{r,s} \frac{D(F, \phi)}{D(u_r, u_s)} [u_r, u_s].$$

Si les fonctions u et v dépendaient en outre d'une nouvelle variable t, on aurait

$$(7) \qquad \frac{\partial [u, v]}{\partial t} = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right].$$

Enfin, on peut vérifier l'identité extrêmement importante de Jacobi

$$(8) \qquad \Big[[u, v], w\Big] + \Big[[v, w], u\Big] + \Big[[w, u], v\Big] = 0.$$

3. — Les crochets de Poisson permettent d'écrire les équations du mouvement sous une forme d'une importance capitale pour la mécanique quantique.

D'après (2), on peut écrire la dérivée complète par rapport au temps d'une fonction quelconque

$$(9) \qquad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$$

et si f ne contient pas explicitement le temps, $\left(\frac{\partial f}{\partial t} = 0\right)$,

$$(10) \qquad \dot{f} = [f, H].$$

Par conséquent, si f ne contient pas explicitement le temps, pour que f = constante soit une intégrale première, il faut que le crochet de Poisson formé par f et par l'énergie H, soit nul

$$[f, H] = 0.$$

Prenons par exemple $f = H$; on a $[H, H] = 0$, donc $H = Cte$ est une intégrale première des équations du mouvement, *si H ne contient pas explicitement le temps.*

L'importance de ces crochets ressort encore du théorème suivant, dû à Poisson : *si $f = Cte$ et $\varphi = Cte$ sont deux intégrales premières des équations du mouvement, $[f, \varphi] = Cte$ en est une autre.* En effet, si l'on a simultanément

$$[f, H] = 0 \qquad \text{et} \qquad [\varphi, H] = 0$$

on déduit, d'après (8), en y faisant $f = u$, $\varphi = v$, $H = w$

que
$$\Big[[f, \varphi], H\Big] = 0,$$

ce qui montre que $[f, \varphi] = Cte$ est également une intégrale première. Lorsque f et φ contiennent la variable t, les conditions (2)

$$[f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad [\varphi, H] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

entraînent, à la suite de (8), la relation

$$\left[[f, \varphi], H\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial t}, \varphi\right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, f\right] = 0$$

ou, d'après (7)

$$\left[[f, \varphi], H\right] + \frac{\partial [f, \varphi]}{\partial t} = 0,$$

ce qui démontre le théorème. Celui-ci reste donc toujours vrai, mais l'intégrale première ainsi obtenue peut évidemment ne pas être distincte des précédentes, ou encore se réduire à une constante.

4. — Reprenons la relation

$$\dot{f} = [f, H] \tag{10}$$

et faisons-y successivement $f \equiv q_r$, $f \equiv p_r$; on a

$$\dot{q}_r = [q_r, H], \qquad \dot{p}_r = [p_r, H]. \tag{11}$$

Les relations (11) *sont les équations du mouvement* (1). On peut donc écrire celles-ci sous une forme telle que les dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial q_r}$, $\frac{\partial H}{\partial p_r}$ n'apparaissent plus que par l'intermédiaire des crochets de Poisson. Ceci est très utile lorsqu'on veut former, par analogie, les équations de la mécanique quantique; dans cette théorie, il est, en effet, plus facile de trouver des analogues aux crochets de Poisson qu'aux dérivées partielles de l'hamiltonien H.

Les crochets de Poisson permettent d'écrire en mécanique classique d'autres relations qui apparaîtront sous la même forme, mais, naturellement, avec une autre signification en mécanique quantique. Par exemple, formons les crochets des coordonnées et des moments; nous aurons

$$\begin{aligned} &[q_r, q_s] = 0 \qquad [p_r, p_s] = 0 \\ &[q_r, p_s] = \delta_{rs} \qquad \text{avec } \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Soit encore n points matériels de coordonnées (x_i, y_i, z_i) et soit (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}), les composantes des quantités de mouvement correspondantes. Le moment cinétique de la i-ème particule sera défini par

$$\begin{aligned} M_{ix} &= y_i p_{iz} - z_i p_{iy} \\ M_{iy} &= z_i p_{ix} - x_i p_{iz} \\ M_{iz} &= x_i p_{iy} - y_i p_{ix} \end{aligned}$$

et le moment total par

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}.$$

Ainsi qu'on le vérifie facilement, on a les relations

$$(13) \qquad [M_{iy}, M_{iz}] = -M_{ix}, \quad [M_y, M_z] = -M_x$$

et celles qu'on en déduit par permutations circulaires.

5. — Les crochets de Poisson jouent un rôle important dans la théorie des transformations de contact; on sait que celles-ci présentent un grand intérêt, parce qu'elles permettent une interprétation ondulatoire des équations canoniques. Ces crochets y apparaissent en même temps que d'autres expressions de structure analogue, définies par

$$(14) \qquad \{u, v\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right)$$

et qu'on nomme *crochets de Lagrange.*

Considérons $2n$ fonctions indépendantes $u_1, \ldots\ldots, u_{2n}$ des $2n$ variables indépendantes $q_1 \ldots\ldots q_n, p_1 \ldots\ldots p_n$. Il existe une relation simple entre les crochets de Poisson et les crochets de Lagrange qui leur correspondent. Formons, en effet, la somme $I = \sum_{t=1}^{2n} [u_t, u_r] \{u_t, u_s\}$. On a

$$I = \sum_{t=1}^{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_t}{\partial q_i} \frac{\partial u_r}{\partial p_i} - \frac{\partial u_t}{\partial p_i} \frac{\partial u_r}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial q_j}{\partial u_t} \frac{\partial p_j}{\partial u_s} - \frac{\partial p_j}{\partial u_t} \frac{\partial q_j}{\partial u_s} \right)$$

$$I = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial u_r}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial u_s} \sum_t \frac{\partial q_j}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial q_i} + \frac{\partial u_r}{\partial q_i} \frac{\partial q_j}{\partial u_s} \sum_t \frac{\partial p_j}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial p_i} \right) -$$

$$- \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial u_r}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial u_s} \sum_t \frac{\partial q_j}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial p_i} + \frac{\partial u_r}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial u_s} \sum_t \frac{\partial p_j}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial q_i} \right).$$

Considérons les sommes par rapport à t; on a évidemment

$$\sum_{t=1}^{2n} \frac{\partial q_j}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial q_i} = \delta_{ij} \qquad \sum_{t=1}^{2n} \frac{\partial p_j}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial p_i} = \delta_{ij}$$

$$\sum_{t=1}^{2n} \frac{\partial q_j}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial p_i} = \sum_{t=1}^{2n} \frac{\partial p_j}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial q_i} = 0.$$

Il en résulte

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_r}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial u_s} + \frac{\partial u_r}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial u_s} \right) = \delta_{rs}.$$

donc

$$\sum_{i=1}^{2n} [u_i, u_r] . \{u_i, u_s\} = \delta_{rs} \tag{15}$$

On peut en déduire l'expression d'un crochet de Poisson en fonction de ceux de Lagrange; mais avant de le faire considérons le problème des transformations de contact.

5. — Le passage d'un système de $2n$ variables indépendantes $q_1, \ldots\ldots q_n$, $p_1, \ldots\ldots p_n$, à un autre système $Q_1, \ldots Q_n$, $P_1, \ldots\ldots P_n$, est appelé une ***transformation de contact***, lorsque l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} (P_i \, \mathrm{d} Q_i - p_i \, \mathrm{d} q_i) \tag{16}$$

est une différentielle totale exacte $\mathrm{d} U$; ces transformations forment un groupe. On peut exprimer la condition ci-dessus d'une façon très simple, en employant les crochets de Lagrange ou ceux de Poisson.

Si l'on considère les q_i, p_i, comme fonctions des Q_i, P_i, on a :

$$\mathrm{d} q_i = \sum_r \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \mathrm{d} Q_r + \frac{\partial q_i}{\partial P_r} \mathrm{d} P_r \right).$$

Remplaçons dans (16); il faut que

$$\mathrm{d} U = \sum_r \left(P_r - \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \right) \mathrm{d} Q_r - \sum_r \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_r} \mathrm{d} P_r$$

soit une différentielle totale exacte. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q_r} \left(P_s - \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_s} \right) &= \frac{\partial}{\partial Q_s} \left(P_r - \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial P_r} \left(\sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_s} \right) &= \frac{\partial}{\partial P_s} \left(\sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial P_s} \left(P_r - \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \right) &= \frac{\partial}{\partial Q_r} \left(- \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_s} \right). \end{aligned} \tag{17}$$

La première de ces relations s'écrit

$$- \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial Q_r} \frac{\partial q_i}{\partial Q_s} = - \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial Q_s} \frac{\partial q_i}{\partial Q_r}$$

ou simplement $\{Q_r, Q_s\} = 0$. Les autres se réduisent également aux crochets de Lagrange; finalement, on doit avoir

$$\{Q_r, Q_s\} = 0, \qquad \{P_r, P_s\} = 0, \qquad \{Q_r, P_s\} = \delta_{rs}. \tag{18}$$

Mais, en vertu de (15), ces relations entraînent aussi

$$(19) \qquad [Q_r, Q_s] = 0, \qquad [P_r, P_s] = 0, \qquad [Q_r, P_s] = \delta_{rs}.$$

Les crochets de Poisson permettent donc d'exprimer d'une façon très simple les conditions pour qu'une transformation donnée soit une transformation de contact.

Il résulte immédiatement des relations (19) que le *crochet de Poisson de deux fonctions u et v reste invariant lorsqu'on passe des variables* (q_i, p_i) *aux variables* (Q_i, P_i) par une transformation de contact. En effet, on peut écrire d'après (6)

$$[u, v] = \sum_i \frac{D(u, v)}{D(q_i, p_i)} = \sum_{r,s} \frac{D(u, v)}{D(Q_r, P_s)} [Q_r, P_s] = \sum_i \frac{D(u, v)}{D(Q_i, P_i)}$$

ce qui démontre le théorème annoncé.

7. — Les crochets de Poisson ou ceux de Lagrange permettent encore d'exprimer d'une façon très simple le déterminant fonctionnel d'une transformation quelconque; lorsque celle-ci est une transformation de contact, cela nous conduit à énoncer quelques théorèmes très importants.

Soit $D = \dfrac{D(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)}{D(Q_1 \ldots Q_n, P_1 \ldots P_n)}$ ce déterminant fonctionnel. En modifiant convenablement la place et le signe des lignes et des colonnes, on peut l'écrire sous la forme $D' = D$ suivante :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} \cdots \frac{\partial q_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial q_1}{\partial P_1} \cdots \frac{\partial q_1}{\partial P_n} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial Q_1} \cdots \frac{\partial q_n}{\partial Q_n} & \frac{\partial q_n}{\partial P_1} \cdots \frac{\partial q_n}{\partial P_n} \\ \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} \cdots \frac{\partial p_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial p_1}{\partial P_1} \cdots \frac{\partial p_1}{\partial P_n} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial Q_1} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial Q_n} & \frac{\partial p_n}{\partial P_1} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial P_n} \end{vmatrix} \qquad D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial P_1} \cdots \frac{\partial p_1}{\partial P_n} & -\frac{\partial p_1}{\partial Q_1} \cdots -\frac{\partial p_1}{\partial Q_n} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial P_1} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial P_n} & -\frac{\partial p_n}{\partial Q_1} \cdots -\frac{\partial p_n}{\partial Q_n} \\ -\frac{\partial q_1}{\partial P_1} \cdots -\frac{\partial q_1}{\partial P_n} & \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} \cdots \frac{\partial q_1}{\partial Q_n} \\ \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial q_n}{\partial P_1} \cdots -\frac{\partial q_n}{\partial P_n} & \frac{\partial q_n}{\partial Q_1} \cdots \frac{\partial q_n}{\partial Q_n} \end{vmatrix}$$

Multiplions ces déterminants *colonne par colonne*; on aura

$$D^2 = \begin{vmatrix} \{Q_1, P_1\} \ldots \{Q_n, P_n\} & \{P_1, P_1\} \ldots \{P_n, P_1\} \\ \cdots & \cdots \\ \{Q_1, P_n\} \ldots \{Q_n, P_n\} & \{P_1, P_n\} \ldots \{P_n, P_n\} \\ \{Q_1, Q_1\} \ldots \{Q_1, Q_n\} & \{Q_1, P_1\} \ldots \{Q_1, P_n\} \\ \cdots & \cdots \\ \{Q_n, Q_1\} \ldots \{Q_n, Q_1\} & \{Q_n, P_1\} \ldots \{Q_n, P_n\} \end{vmatrix}$$

Considérons le déterminant de la transformation inverse

$$\Delta = \frac{D\,(Q_1 \dots P_n)}{D\,(q_1 \dots p_n)}$$

et calculons d'une façon analogue Δ^2 en multipliant cette fois-ci les deux formes *ligne par ligne*. On aura

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} [Q_1, P_1] \dots [Q_1, P_n] & [Q_1, Q_1] \dots [Q_n, Q_1] \\ \dots & \dots \\ [Q_n, P_1] \dots [Q_n, P_n] & [Q_1, Q_n] \dots [Q_n, Q_n] \\ [P_1, P_1] \dots [P_1, P_n] & [Q_1, P_1] \dots [Q_n, P_1] \\ \dots & \dots \\ [P_n, P_1] \dots [P_n, P_n] & [Q_1, P_n] \dots [Q_n, P_n] \end{vmatrix}.$$

Par définition on a $D\,\Delta = 1$ donc le produit $\Delta^2 D^2 = 1$. Les relations (15) montrent en outre que *les deux déterminants D^2 et Δ^2 sont réciproques* : les éléments de l'un sont égaux aux mineurs correspondants de l'autre, divisés par ce dernier. Ceci nous donne d'une façon précise *l'expression d'un crochet de Poisson en fonction des crochets de Lagrange, et vice versa.*

Tout cela est valable pour une transformation quelconque; s'il s'agit d'une transformation de contact, les relations (18) ou (19) montrent que non seulement $D^2 \Delta^2 = 1$ mais que l'on a séparément $D^2 = 1$, $\Delta^2 = 1$.

Le déterminant fonctionnel de la transformation est donc égal à l'unité et ceci caractérise la transformation de contact. Il s'ensuit que l'élément de volume dans l'espace à $2n$ dimensions (q_i, p_i), c'est-à-dire l'élément d'extension en phase,

$$d\,\Omega = d\,Q_1 \dots d\,Q_n\, d\,P_1 \dots d\,P_n = \frac{D\,(Q_1 \dots P_n)}{D\,(q_1 \dots q_n)}\, d\,q_1 \dots d\,q_n\, d\,p_2 \dots d\,p_n$$

reste inaltéré. *L'extension en phase est donc un invariant pour une transformation de contact*, et cette propriété est caractéristique. Nous verrons au paragraphe suivant que l'état d'un système dynamique à l'instant t peut être considéré comme déduit de son état à l'instant initial par une transformation de contact. Il résulte que *l'extension en phase*, définie par les coordonnées et les moments d'un système, *se conserve lorsque ce système poursuit son évolution*. Nous arrivons ainsi à un théorème énoncé par Liouville et très important pour la mécanique statistique.

8. — Considérons enfin une transformation de contact *infinitésimale*. Les q_i, p_i se changent en $Q_i = q_i + \delta\, q_i$, $P_i = p_i + \delta\, p_i$ et l'expression $\Sigma\,(P_i\, d\, Q - p_i\, d\, q_i)$ reste une différentielle totale exacte. On voit facile-

ment que la transformation la plus générale de ce type est donnée par la condition que les accroissements de q_i, p_i soient de la forme

$$\delta q_i = \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \delta t, \qquad \delta p_i = -\frac{\partial \phi}{\partial q_i} \delta t \tag{20}$$

ϕ étant une fonction arbitraire des variables (q_i, p_i) et δt une constante infinitésimale indépendante de celles-ci. Dans ces conditions, une fonction quelconque F $(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$ se transforme en $F + \delta F$ avec

$$\delta F = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \phi}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right) \delta t.$$
$$\delta F = [F, \phi] \, \delta t.$$

La parenthèse de Poisson définit donc la transformation infinitésimale de contact la plus générale des variables q_i, p_i; pour cette raison on appelle cette parenthèse, le *symbole* de la transformation.

9. — Le mouvement d'un système est défini par les équations canoniques qu'on peut écrire.

$$d q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} d t \qquad d p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} d t.$$

D'après (20), ces équations montrent que le passage des valeurs q_i, p_i des variables canoniques au temps t, aux valeurs des mêmes variables à l'instant infiniment voisin $t + dt$, constitue une transformation infinitésimale *de contact*. Ceci est l'observation essentielle qui a permis à Hamilton de décrire l'évolution d'un système par le mouvement d'une surface qui se déplace infiniment peu pendant le temps dt, c'est-à-dire par le ***déplacement d'un front d'onde***. Les intégrales du mouvement, c'est-à-dire les expressions des q_i, p_i en fonction de leurs valeurs initiales et du temps, déterminent une transformation de contact finie, qui décrit la propagation de l'onde. C'est ainsi que, rapprochant la mécanique de l'optique, Hamilton a été amené le premier à concevoir le mouvement d'un système comme un phénomène de propagation d'ondes. On voit comment interviennent les crochets de Poisson dans le développement de cette conception, dont on connaît l'importance considérable pour la genèse de la mécanique ondulatoire.

SUR UN ARTICLE DE M. E. WHITTAKER, INTITULÉ « LES RELATIONS ENTRE LE CALCUL TENSORIEL ET LE CALCUL DES SPINEURS » (1)

Par Al. PROCA.
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur analyse les résultats obtenus dans l'article cité en se plaçant systématiquement au point de vue de la théorie des spineurs. Cela permet de clarifier certains points obscurs et certains résultats inattendus, et précise le sens profond des méthodes proposées par M. Whittaker.

1. **Introduction**. — Les règles classiques du calcul tensoriel permettent de former des tenseurs nouveaux à partir d'un ou plusieurs tenseurs donnés.

Cependant, en relativité restreinte par exemple, ces règles ne suffisent pas pour former *tous* les tenseurs qui dépendent du ou des tenseurs donnés; des exemples seront fournis plus loin. Pour former ces tenseurs exclus, il faut ou bien introduire des règles nouvelles de formation, — ce qui n'est pas sans inconvénient à cause de l'introduction d'irrationnelles, — ou bien prendre comme *données* non pas des tenseurs, mais des *spineurs*.

Dans l'article cité, M. E. T. Whittaker montre quelles sont les règles de formation qu'il faut adopter dans certains cas particuliers. Il se place systématiquement au point de vue tensoriel et de ce fait on n'aperçoit pas toujours très bien la raison profonde de certains résultats qu'il obtient (comme par exemple celle de l'apparition du phénomène de « catalyse », cf. plus loin § 4), ni leur degré de généralité. En particulier, l'obtention, à partir des équations de Dirac d'un système d'équations vectorielles, semble tout à fait artificielle et ne permet pas une analyse approfondie du processus utilisé.

Or, il est facile de voir qu'en se plaçant systématiquement au point de vue de la théorie des spineurs, les faits apparaissent extrêmement simples et clairs. Rien n'empêche ensuite de les traduire à nouveau en langage tensoriel. Nous reprendrons donc les résultats de M. Whittaker en nous plaçant à ce point de vue; nous utiliserons pour cela les notations et les résultats de l'excellent article sur la théorie des spineurs publié par Uhlenbeck et Laporte dans la *Physical Review*, 1931, 37, p. 1380.

***

2. **Premier résultat**. — M. Whittaker montre qu'il est possible de *mettre en correspondance un spineur de premier rang, donné avec une teneur antisymétrique* de rang 2, *self dual et d'invariants nuls*; il donne les formules qui permettent de passer des composantes du spineur à celle du tenseur particulier considéré.

Ce résultat fondamental est démontré clairement dans l'article cité et n'appelle que peu de commentaires. Voyons comment il se présente lorsqu'on prend comme point de départ la théorie des spineurs.

D'après Uhlenbeck et Laporte (*loc. cit.*), on peut *en général* faire correspondre à un tenseur antisymétrique self dual de rang 2 un spineur *symétrique* $g_{rs} = g_{sr}$ *du second rang*. Soit k_1, k_2, k_3 les trois valeurs (complexes) distinctes des composantes du tenseur self dual. Posons, avec une notation évidente :

$$\vec{k} = \vec{H} - i\vec{E} \qquad \left(\vec{H},\ \vec{E}\ \text{réels}\right). \tag{1}$$

Le lien entre les composantes du spineur symétrique et celles du tenseur antisymétrique est donné par les formules :

$$\left.\begin{aligned} g_{\dot 1\dot 1} &= 2\,(k_2 + ik_1) & k_1 &= \frac{-i}{4}\,(g_{\dot 1\dot 1} - g_{\dot 2\dot 2}) \\ g_{\dot 2\dot 2} &= 2\,(k_2 - ik_1) & k_2 &= \frac{1}{4}\,(g_{\dot 1\dot 1} + g_{\dot 2\dot 2}) \\ g_{\dot 2\dot 1} = g_{\dot 1\dot 2} &= -\,2ik_3 & k_3 &= \frac{i}{4}\,(g_{\dot 1\dot 2} + g_{\dot 2\dot 1}) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

On obtient le cas de Whittaker (correspondance entre un spineur du *premier rang* et un tenseur) en particularisant; on peut en effet poser :

$$g_{rs} = \psi_r \psi_s \tag{3}$$

spineur évidemment symétrique, mais qui au surplus satisfait à :

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \equiv 0 \tag{4'}$$

soit :

$$g_{rs}g^{rs} \equiv 0. \tag{4}$$

Les formules (2) donnent alors la relation entre un seul spineur de premier rang ψ_r et un tenseur antisymétrique réel $(\vec{E}, \vec{H})$, soumis cependant aux conditions (4) qui s'écrivent :

$$4\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right) = 0 \tag{5}$$

soit encore vectoriellement :

$$\vec{E}^2 = \vec{H}^2, \qquad \left(\vec{E}.\vec{H}\right) = 0. \tag{6}$$

(1) *Proc. Roy. Soc.*, 1937, **158 A**, p. 38.

Si l'on veut à tout prix donner une image intuitive, on peut dire que Whittaker fait correspondre à un spineur ψ_r, un couple de deux vecteurs (dans un espace euclidien à 3 dimensions qui n'a rien à voir avec le problème) *égaux* et *perpendiculaires entre eux*, comme les vecteurs d'une onde lumineuse plane.

A tout spineur donné correspond un tel couple, mais inversement à un couple (E, H) donné ne correspond pas un seul spineur, les équations de définition (2) étant du second degré. Cela tient à la nature même de la représentation adoptée.

3. **Second résultat**. — M. Whittaker considère 2 spineurs ψ_r et Φ_s auxquels correspondent suivant la règle ci-dessus les tenseurs antisymétriques R_{pq} et S_{pq}. Les règles habituelles du calcul tensoriel ne permettent pas de former de vecteur avec R_{pq}, S_{pq} ; néanmoins le calcul des spineurs nous apprend qu'on peut former, avec ψ_r et Φ_s, un vecteur D. Le problème est alors le suivant : *calculer D au moyen de R et S.*

La réponse est immédiate si l'on adopte le point de vue du calcul des spineurs. Dans celui-ci, à tout vecteur on peut faire correspondre un spineur du second rang de la forme

$$d_{\dot{r}s}$$

au moyen des formules :

$$\left.\begin{aligned} D^0 &= \frac{1}{2}(d_{\dot{1}1} + d_{\dot{2}2}) \\ D^1 &= \frac{1}{2}(d_{\dot{2}1} + d_{\dot{1}2}) \\ D^2 &= \frac{1}{2i}(d_{\dot{1}1} - d_{\dot{2}2}) \\ D^3 &= \frac{1}{2}(d_{\dot{1}1} - d_{\dot{2}2}). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Au lieu de parler de composantes vectorielles on peut parler simplement de certaines combinaisons linéaires de ces composantes $d_{\dot{r}s}$.

On donne $g_{rs} = \psi_r \psi_s$ et $h_{rs} = \Phi_r \Phi_s$. On en déduit :

$$g_{\dot{r}\dot{r}}\, h_{ss} = (\psi_{\dot{r}}\, \Phi_s)^2 = (d_{\dot{r}s})^2 \tag{6}$$

où

$$d_{\dot{r}s} = \psi_{\dot{r}}\, \Phi_s$$

donc

$$d_{\dot{r}s} = \pm \sqrt{g_{\dot{r}\dot{r}}\, h_{ss}}. \tag{7}$$

Avec les tenseurs antisymétriques g_{rs} h_{rs} on peut former, par (6) ou (7), le vecteur $d_{\dot{r}s}$; on vérifie aisément que $d_{\dot{r}s}$ correspond précisément au D_r de Whittaker.

4. **Troisième résultat**. — L'expression :

$$\sum_{s=1}^{2} \psi^s \frac{\partial \psi_s}{\partial x_p} = H_p$$

où ψ_r est un spineur est évidemment un vecteur qui ne dépend que de ψ_r ; par conséquent on devrait pouvoir les calculer en fonction du tenseur antisymétrique g_{rs} seul. M. Whittaker donne une expression qui fournit H_p en fonction de ce tenseur *et d'un vecteur D_r* arbitraire (voir le § précédent) qui disparaît dans le résultat final, mais dont la présence est *indispensable*, selon l'auteur, pour la possibilité du calcul. Le rôle que joue ce vecteur est donc celui d'un *catalyseur*.

Il est facile de voir ce qu'il en est et de calculer H_p en fonction de g_{rs}.

Formons $\dfrac{\partial g_{rs}}{\partial x_p}$

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_p} = \psi_r \cdot \frac{\partial \psi_s}{\partial x_p} + \psi_s \cdot \frac{\partial \psi_r}{\partial x_p}$$

Multiplions par ψ_s contractons et tenons compte de $\psi^s \psi_s = 0$; on aura :

$$\sum_s \psi^s \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_p} = \psi_r \left(\sum_s \psi^s \frac{\partial \psi_s}{\partial x_p} \right) = \psi_r . H_p.$$

$$H_p = \sum_s \frac{\psi^s}{\psi_r} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_p}. \tag{8}$$

M. Whittaker multiplie haut et bas par un spineur *arbitraire* $\Phi_{\dot{m}}$; en posant $d_{\dot{m}s} = \Phi_{\dot{m}} \psi_s$ on aura :

$$H_p = \sum_s \frac{d_{\dot{m}}^{\ \cdot s}}{d_{\dot{m}r}} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_p}. \tag{9}$$

H_p se calcule donc en fonction de g_{rs}, et d'un vecteur *catalyseur* $d_{\dot{m}s}$ lequel est arbitraire jusqu'à un certain point, puisque $\Phi_{\dot{m}}$ est absolument quelconque. Ce résultat n'est cependant nullement nécessaire. On peut multiplier (8) par $\dfrac{\psi_n}{\psi_n} = 1$ et l'on aura :

$$H_p = \sum_s \frac{\psi_n \psi^s}{\psi_n \psi_r} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_p} = \sum_s \frac{g_{n.}^{\ \cdot s}}{g_{nr}} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_p} \tag{10}$$

H_p n'est plus fonction que de d_{rs} comme cela doit être.

5. **Quatrième résultat**. — Le quatrième problème de Whittaker consiste à chercher, au moyen des résultats mentionnés plus haut, à trouver un système d'équation d'ondes, équivalent à celui de Dirac (pour l'électron libre), mais écrit sous forme vectorielle, $V_p = 0$.

Le but de ces lignes n'est pas de commenter ce résultat; nous nous bornerons donc à analyser les équations obtenues en nous plaçant comme plus haut strictement au point de vue de la théorie des spineurs.

Les équations de Dirac en l'absence de champ sous forme spinorielle s'écrivent (cf. Laporte et Uhlenbeck, *loc. cit.*) :

$$\left.\begin{aligned} A_{\dot{r}} &\equiv \partial_{\dot{r}\sigma}\, \psi^\sigma - ik\, \chi_{\dot{r}} = 0 \\ B_s &\equiv \partial_{\dot{\varrho}s}\, \chi^{\dot{\varrho}} + ik\, \psi_s = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

où ψ^{σ}, $\chi_{\dot r}$ sont les deux « fonctions d'onde », $k = \frac{2\pi mc}{h}$ et $d_{\dot{r}s}$ le spineur du second rang suivant, formé avec les composantes du vecteur gradient :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} = \partial_{\dot{2}1} \qquad \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} = \partial_{\dot{1}2} \\ &\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{c\partial t} = \partial_{\dot{1}1} \qquad -\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{c\partial t} = \partial_{\dot{2}2}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Ceci posé, Whittaker forme à l'aide des équations (11) le vecteur $V_{\dot{r}s}$

$$V_{\dot{r}s} = \chi_r B_s + \psi_{\dot r} A_s \quad (13)$$

et écrit les nouvelles équations sous la forme $V_{\dot{r}\varrho} = 0$.

Or, on voit facilement que (13) peut s'exprimer au moyen de tenseurs antisymétriques convenablement choisis. En effet, explicitement, (13) s'écrit :

$$\chi_{\dot r}.\partial_{\dot\varrho s}\chi^{\dot\varrho} + ik\chi_{\dot r}\psi_s + \psi_{\dot r}.\partial_{\dot\varrho s}\psi^{\varrho} + ik\psi_{\dot r}\chi_s = 0 \quad (14)$$

soit

$$\partial_{\dot\varrho s}(\chi_{\dot r}\chi^{\dot\varrho} + \psi_{\dot r}\psi^{\varrho}) - (\chi^{\dot\varrho}.\partial_{\dot\varrho s}\chi_{\dot r} + \psi^{\varrho}.\partial_{\dot\varrho s}\psi_{\dot r}) + ik(\psi_{\dot r}\chi_s + \chi_{\dot r}\psi_s) = 0. \quad (15)$$

On vérifie aisément qu'en vertu des relations fondamentales (11) on a :

$$\psi^{\varrho}.\partial_{\dot\varrho s}\psi_{\dot r} = \psi^{\varrho}.\partial_{\dot r s}\psi_{\dot\varrho} - ik\psi_{\dot r}\chi_s; \quad (16)$$

donc (15) s'écrira :

$$\partial_{\dot\varrho s}(\chi_{\dot r}\chi^{\dot\varrho} + \psi_{\dot r}\psi^{\varrho}) - (\psi^{\varrho}.\partial_{\dot r s}\psi_{\dot\varrho} + \chi^{\dot\varrho}.\partial_{\dot r s}\chi^{\varrho}) + 2ik(\psi_{\dot r}\chi_s + \chi_{\dot r}\psi_s) = 0. \quad (17)$$

Soient alors g_{rs}, h_{rs} les tenseurs antisymétriques qui correspondent, dans le sens des paragraphes précédents, aux spineurs ψ_r et χ_s ; en d'autres termes posons :

$$\psi_{\dot r}\psi_{\dot s} = g_{\dot r\dot s} \qquad \chi_{\dot r}\chi_{\dot s} = h_{\dot r\dot s}. \quad (18)$$

On aura en général (§ 4) :

$$\psi^{\varrho}.\partial_{\dot r s}\psi_{\dot\varrho} = \frac{g_{\dot n}^{\;\varrho}.\partial_{\dot r s}\,g_{\dot\varrho\dot m}}{g_{\dot m\dot n}} \quad (19)$$

et

$$(\psi_{\dot r}\chi_s)^2 = g_{\dot r\dot r}\,h_{ss} \qquad (\chi_{\dot r}\psi_s)^2 = h_{\dot r\dot r}\,g_{ss}$$

d'où :

$$\psi_{\dot r}\chi_s = \pm\sqrt{g_{\dot r\dot r}\,h_{ss}} \qquad \chi_{\dot r}\psi_s = \pm\sqrt{h_{\dot r\dot r}\,g_{ss}} \quad (20)$$

Les équations (17) *s'écrivent finalement sous la forme suivante qui ne contient que les tenseurs h_{rs}* et g_{rs} :

$$\left.\begin{aligned} &\partial_{\dot\varrho s}\left(h_{\dot r}^{\;\dot\varrho} + g_{\dot r}^{\;\dot\varrho}\right) - \left[\frac{g_{\dot n}^{\;\varrho}.\partial_{\dot r s}\,g_{\dot\varrho\dot m}}{g_{\dot m\dot n}} + \frac{h_{\dot n}^{\;\varrho}.\partial_{\dot r s}\,h_{\dot\varrho\dot m}}{h_{\dot m\dot n}}\right] \\ &+ 2ik\left[\pm\sqrt{g_{\dot r\dot r}\,h_{ss}} \pm \sqrt{h_{\dot r\dot r}\,g_{ss}}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

avec les conditions :

$$g_{rs}\,g^{rs} = h_{rs}\,h^{rs} = 0.$$

On peut faire plusieurs remarques sur ces équations. (21) représente quatre équations (complexes). En faisant une combinaison linéaire de leurs premiers membres on peut arriver à transformer le premier *terme* de (21) en une expression identique au premier membre d'une des équations de Maxwell ou plutôt en la somme de deux pareils premiers membres. En effet, en général si l'on remplace g_{rs} par E, H suivant le § 2, les systèmes d'équations : $\partial_{\dot\varrho s}\,g_{\dot n}^{\;\dot\varrho} = 0$ se transforme après combinaison linéaire en un système identique aux équations de Maxwell ainsi qu'il est facile de vérifier. La forme des équations de Whittaker sera donc la suivante :

Premiers membres des équations de Maxwell; plus *termes de la forme* $A.DB - B.DA$ (D étant une dérivation) ; plus *termes irrationnels*, lesquels peuvent disparaître dans certaines équations mais pas dans toutes.

Les équations de Whittaker ne sont pas les seules qu'on puisse obtenir par ce procédé. Elles découlent toutes des formules qui expriment les vecteurs formés avec les $\psi_{\dot r}$, χ_s en fonction des dérivés de ces grandeurs. Or, en particulier, on peut exprimer de cette façon le vecteur d'univers « courant électrique »

$$\psi_{\dot r},\psi_s + \chi_{\dot r}\chi_s.$$

La décomposition qu'on trouve est celle donnée par Gordon qui sépare le courant total en un courant de conduction et un courant de polarisation. La formule correspondante peut remplacer (15) et l'on en déduit un système d'équations finales qui n'est plus (27) ; il est inutile d'insister. Cette manière de procéder permet de mieux voir la structure des systèmes obtenus que ne le fait la méthode de l'article cité, et précise dans quel sens on peut orienter les recherches si l'on désire épuiser le sujet.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1937.

II. THEORIE DE L'ELECTRON

II.1 Sur l'Equation de Dirac.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.190, p1377-1379; Jun 16, 1930

II.2 Sur l'Equation de Dirac. Les 16 Composantes .
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.191, p26-27; Jun 30, 1930

II.3 Sur l'Equation de Dirac.
J.Phys.Rad.; Ser.VII, Vol.I, No.7, p235-248;
Jul 1930

II.4 Intégrales Premières de l'Equation de Dirac.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.193, p642-645; Oct 19, 1931

II.5 Sur une Nouvelle Caractéristique de l'Electron de Dirac.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.194, p691-693; Feb 22, 1932

II.6 Sur les Grandeurs Caractéristiques de l'Electron de Dirac.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.194, p836-838; Mar 7, 1932

II.7 Sur l'Interprétation de l'Opérateur x de Dirac.
Bull.Math.Phys.Pures et Appliquées; Ecole Polytechnique
Bucarest; Vol.II, No.3, Fasc.6, p185-190; 1931-1932

II.8 Quelques Observations concernant un Article Intitulé: "Sur l'Equation de Dirac".
J.Phys.Rad.; Vol.III, Ser.VII, no.4, p172-184;
Apr 1932

II.9 Sur la Théorie Relativiste de l'Electron de Dirac dans un Champ Nul.
Annales de Physique; Vol.XX, Ser.X, p347-440;
Nov 1933
(Thèse de Doctorat).

II.10 Sur la Définition du Champ Electromagnétique par des Potentiels et le Moment Magnétique de l'Electron.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.202, p641-642; Feb 24, 1936

Sur les Equations de Maxwell et le Moment Magnétique de L'Electron.
Soc.Française des Radioélectriciens. Congrès Annuel, 6eme Section; May 5, 1936

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur l'équation de Dirac.*
Note de M. **Al. Proca**.

1. L'interprétation qu'on donne actuellement de l'équation symbolique de Dirac nous semble peu satisfaisante, étant trop particulière. Certains défauts de cette équation, l'absence de symétrie, la forme non tensorielle, le caractère demi-vecteur de ψ, ainsi que l'absence d'une interprétation physique immédiate, disparaissent si l'on attaque le problème dans toute sa généralité. L'équation de Dirac

$$H\psi \equiv (p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0 c)\psi = 0 \tag{1}$$

s'interprète en écrivant que les nombres α_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) comme des matrices d'éléments $(\alpha_\mu)^{ik}$ et en définissant la manière dont ils opèrent sur ψ par

$$\alpha_\mu \psi = \sum_{k=1}^{4} (\alpha_\mu)^{ik} \psi_k. \tag{2}$$

On admet donc qu'il existe quatre composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et l'on traite ψ par la suite comme une matrice à quatre lignes et une seule colonne.

Or, l'équation (1) $H\psi = 0$ exprime que la grandeur ψ, multipliée par H, donne zéro. Supposons que les α_μ soient écrits dans un schéma de matrices, du type de Dirac, par exemple; H sera lui-même une matrice du même type. Il est alors évident que la solution ψ la plus générale sera une matrice *à quatre lignes et à quatre colonnes, dépendant donc de seize composantes* ψ_k *et non pas de quatre*.

2. En multipliant H par la matrice ψ et en annulant les termes résultants, il est clair que les équations qui proviennent de la composition d'une même ligne de H avec les colonnes de ψ ne diffèrent que par le nom des inconnues ψ_k. Les 16 équations se réduisent dans ce cas à 4, et il n'y a en effet que quatre composantes ψ_k *distinctes*. La grandeur ψ reste cependant une matrice à quatre lignes et à quatre colonnes, ces dernières identiques mais différentes de zéro; habituellement on suppose qu'elle n'a

qu'une seule colonne, les trois autres étant nulles, *ce qui est radicalement différent*.

3. Pour bien saisir la signification et la portée de cette remarque, il faut partir de l'équation de Dirac sans particulariser les nombres α_μ. En général les α_μ sont assujettis seulement à vérifier les relations

$$(3)\qquad \alpha_\mu^2 = 1, \qquad \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 0, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

Leur multiplication n'est pas commutative. Ils forment donc un système de nombres hypercomplexes; on peut se poser les problèmes de la recherche de l'*ordre* et d'une *base* de ce système, en admettant en outre que la multiplication soit associative. En remarquant que le produit de deux nombres du système en fait également partie, on voit qu'on peut prendre comme base l'ensemble des *seize* nombres :

$$(4)\qquad \begin{array}{l} 1;\quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4;\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_2\alpha_3\alpha_4,\ \alpha_3\alpha_4\alpha_1,\ \alpha_4\alpha_1\alpha_2;\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4; \\ \qquad\qquad \alpha_1\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_3,\ \alpha_3\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_4,\ \alpha_2\alpha_4,\ \alpha_3\alpha_4. \end{array}$$

Nous sommes en présence d'un système d'*ordre* 16, à unité principale, « simple », et d'ailleurs connu : c'est le système des *quadriquaternions*, c'est-à-dire des quaternions dont les composantes sont elles-mêmes des quaternions.

4. L'équation de Dirac, ou, mieux, l'équation symétrique d'Eddington, qui lui est équivalente, s'écrit au moyen d'un hamiltonien qui est une combinaison linéaire des unités (4); autrement dit, l'hamiltonien de Dirac est un quadriquaternion [1].

Cela étant, l'équation $H\psi = 0$ nous montre que ψ est aussi un quadriquaternion, donc qu'en général *le ψ de Dirac a seize composantes et non pas quatre*. Il est de la forme

$$\psi = \psi_0 + \psi_1\alpha_1 + \ldots + \psi_{12}\alpha_1\alpha_2 + \ldots + \psi_{123}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \ldots + \psi_{1234}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

On obtient les équations auxquelles satisfont les composantes, en multipliant ψ par H, en tenant compte des relations (3) et en annulant les 16 coefficients des unités $1, \alpha_1, \ldots$. Si l'on adopte une notation convenable, ces équations peuvent s'écrire directement sans faire la multiplication.

5. Nous montrerons que l'existence des seize composantes ψ_k ainsi déduites permet non seulement d'éliminer certaines objections qu'on avait faites à l'équation de Dirac, mais aussi de donner une intéressante interprétation

---

[1] Ces résultats ont été obtenus pour la première fois par Schouten dans une Note trop peu connue, publiée aux *Proc. Acad. Amsterdam*, 32, 1929, p. 105.

physique de ces composantes. En effet, nous pouvons remarquer qu'indépendamment de toute théorie quantique, il faut *seize* grandeurs physiques pour déterminer un électron, à savoir : 4 coordonnées, 4 moments, 3 composantes pour son moment magnétique, 3 autres pour le moment électrique (que Frenkel a introduites directement), la masse et la longueur d'onde de de Broglie, ou mieux, la masse et sa coordonnée conjuguée ([1]). En utilisant le langage d'Eddington ([2]), nous pouvons dire que l'électron a effectivement 16 degrés de liberté. C'est à ces degrés de liberté que nous rattacherons les 16 composantes ψ_k.

([1]) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 739.
([2]) *Proc. Roy. Soc.*, A. 122, 1929, p. 358.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 190, p. 1377, séance du 16 juin 1930.)

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
89582-30 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur l'équation de Dirac. Les seize composantes ψ_k.* Note (1) de M. **Al. Proca**.

1. L'équation de Dirac pour un champ nul s'écrit sous la forme symétrique d'Eddington (2)

$$F\psi \equiv (E_1 t_1 + \ldots + E_5 t_5)\psi = 0 \tag{1}$$

avec

$$t_k = p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad t_5 = m_0 c, \qquad E_k = \varepsilon_k, \qquad E_5 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Son invariance pour une transformation de Lorentz

$$x'_k = \sum_l O_{kl} x_l$$

nous permet de déduire la loi de transformation des E_k, donc des ε_k

$$\varepsilon'_i = \sum_i O_{li}\varepsilon_i$$

et par conséquent celle des composantes ψ_k de la solution générale ψ, écrite dans le système des quadriquaternions (3)

$$\psi = \psi_0 + \psi_1\varepsilon_1 + \ldots + \psi_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ldots + \psi_{123}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + \psi_{1234}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4.$$

On constate alors que les composantes (ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4) et (ψ_{234}, ψ_{341}, ψ_{412}, ψ_{123}) se transforment comme des vecteurs, que (ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{31}, ψ_{14}, ψ_{24}, ψ_{34}) forment un tenseur antisymétrique de second rang, et que ψ_0 et ψ_{1234} sont des invariants. Le ψ n'est donc pas un demi-vecteur; ses composantes obéissent à des lois de transformations connues. Elles se groupent tout naturellement en éléments dont on peut essayer de donner une inter-

(1) Séance du 30 juin 1930.

(2) *Proc. Roy. Soc.*, A, **121**, 1928, p. 524; Schouten, *Proc. Amsterdam*, **32**, 1929, p. 105.

(3) *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 1377.

prétation physique; il est d'ailleurs superflu d'ajouter que cette interprétation ne saurait être qu'hypothétique.

2. Il s'agit donc de trouver quelle est la signification physique des grandeurs ψ_k qui apparaissent comme coefficients des diverses unités $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$. Observons d'abord que, dans l'expression *du hamiltonien*, le coefficient de $\varepsilon_1 = E_1$ se rapporte au moment p_x, etc. Il est donc naturel de supposer que ψ_1, ψ_2, ψ_3 soient attachés aux moments p_x, p_y, p_z; ψ_4 à l'énergie ou à E/c; ψ_{1234} à la masse ou à $m_0 c$.

Considérons ensuite l'expression

$$I_{12} = x_1 t_2 - x_2 t_1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_1 E_2,$$

I_{12} est une intégrale première de (1); on vérifie que $FI_{12} - I_{12}F = 0$. On en déduit, comme on le fait d'habitude ([1]), que $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_1 E_2$ est une grandeur de même nature que $x_1 t_2 - x_2 t_1$, c'est-à-dire un moment angulaire. Ce moment angulaire, qu'on attribue à l'électron, est un tenseur antisymétrique de second rang. D'habitude on divise ses composantes en deux groupes et l'on parle du moment magnétique (composantes 12, 23, 31), et du moment électrique (composantes 14, 24, 34) de l'électron; mais en fait il s'agit ici du moment angulaire total de l'électron, tenseur antisymétrique, ou vecteur à six composantes que Frenkel a introduit par de simples considérations de relativité ([2]). Nous sommes donc fondés à croire que ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{31}, ψ_{14}, ψ_{24}, ψ_{34} sont des grandeurs attachées au moment total propre de l'électron.

Enfin nous devons faire une dernière observation. Dans l'équation primitive de Dirac, le cinquième terme $\alpha_4 m_0 c$ semble étranger aux autres; il est relatif à la masse tandis que les autres se rattachent aux moments. Pour nous, cependant, ce fait, loin d'indiquer un manque d'homogénéité confirme très heureusement une hypothèse que nous avons introduite antérieurement, à savoir que $m_0 c$ devrait être traitée exactement de la même façon que les autres moments. Corrélativement, la description du mouvement ne peut être complète que si l'on introduit ce que nous avons appelé la « cinquième dimension », coordonnée conjuguée de la masse ([3]). Logiquement, dans le cas général de la masse variable, le cinquième terme de l'équation

---

([1]) Voir aussi EDDINGTON, *loc. cit.*

([2]) FRENKEL, *Lehrbuch der Elektrodynamik*, p. 353.

([3]) *Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 739.

de Dirac doit donc s'écrire $t_5 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_5}$; seul le fait que nous supposons, $m_0 =$ const., nous permet de poser $t_5\psi = m_0 c\psi$. On obtient ainsi une symétrie totale; de plus $R_1 = x_1 t_5 - x_5 t_1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i}E_1 E_5$ est, comme ses analogues, une intégrale première. On en déduit que les coefficients de $E_1 E_5 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$ sont attachés à des grandeurs qui sont en général des moments, mais qui, dans le cas de $m_0 =$ const., sont de même nature que $x_1 t_5 \equiv x_1 m_0 c$; finalement ces coefficients sont attachés à des grandeurs proportionnelles à la coordonnée x. Quant à ψ_0, la symétrie parfaite que nous avons introduite nous permet d'affirmer avec certitude qu'elle se rapporte à x_5, coordonnée conjuguée de la masse, ou, ce qui est la même chose, à la longueur d'onde de de Broglie.

3. Mais les ψ_k sont des probabilités; quel est le sens de la correspondance établie au paragraphe précédent entre elles et les valeurs des diverses grandeurs physiques envisagées? En général, pour avoir la probabilité d'un certain élément (par exemple d'un niveau d'énergie), nous développons en série la fonction d'onde ψ suivant les fonctions propres correspondantes; les coefficients du développement nous permettent de calculer numériquement la probabilité cherchée. Ici nous procéderons de la même façon avec cette différence cependant que, au lieu de développer, pour n'importe quelle grandeur physique *la même fonction* ψ, nous utiliserons dans chaque cas *une autre* composante ψ_k. Par exemple le calcul de la probabilité d'un certain état d'énergie se fera à l'aide de ψ_4, tandis que pour obtenir des informations concernant la coordonnée x il nous faudra employer la fonction ψ_{234}.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 191, p. 26, séance du 7 juillet 1930.)

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
89731-30 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

SUR L'ÉQUATION DE DIRAC

par AL. PROCA
Institut du Radium, Paris.

Sommaire. — L'auteur montre que la fonction d'onde définie par l'équation de Dirac n'est pas une grandeur à quatre, mais bien à seize composantes scalaires. Quand on aborde ainsi le problème dans toute sa généralité, la plupart des objections qu'on fait actuellement à l'équation de Dirac s'évanouissent. La conception du ψ demi-vecteur devient inutile; l'équation est écrite sous forme invariante par rapport aux transformations de Lorentz, et, de plus, elle est parfaitement symétrique.

Pour atteindre les résultats les plus généraux, l'auteur utilise les nombres hypercomplexes. Il écrit le courant quadridimensionnel au moyen du nouveau ψ et rattache le nombre des composantes de celui-ci au nombre de « degrés de liberté » de l'électron. Il montre que ces 16 composantes sont susceptibles d'une interprétation physique immédiate et il précise, en termes de probabilités, le sens qu'il faut donner à ces grandeurs.

Enfin, au cours de ces considérations, deux notions se présentent tout naturellement : celle de la « cinquième dimension » et celle de « probabilité tensorielle ou hypercomplexe » : l'auteur en examine rapidement les traits essentiels.

1. **Introduction**. — La substitution de l'équation relativiste de Dirac à celle de Schrödinger marque un progrès extrêmement important en mécanique ondulatoire. Cependant l'étude de cette équation présente encore des lacunes qui en restreignent singulièrement la portée. Les objections qu'on lui fait montrent clairement que, suivant l'expression de Darwin, « quelque chose a passé à travers le filet » ; elles ne permettent cependant pas de préciser quel est l'élément qui a échappé à l'analyse, ni de voir comment on pourrait le découvrir.

Les considérations qui suivent ont pour but de signaler et de combler une de ces lacunes. Leur point de départ est une observation banale, qui frappe à première vue quand on aborde l'étude de l'équation de Dirac ; elle concerne le passage de cette équation unique au système des quatre équations aux dérivées partielles qui s'en déduisent et que, pour abréger, nous appellerons équations de Darwin.

Soit α_μ^{ik} les éléments des matrices à quatre lignes et à quatre colonnes α_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) qui apparaissent dans l'équation de Dirac $H\psi = 0$. Dirac, Darwin et à leur suite tous ceux qui se sont occupés de cette question ont admis que, lorsqu'on développe cette équation, il faut écrire, pour les α_μ opérant sur ψ :

$$\alpha_\mu \psi = \sum_{k=1}^{4} \alpha_\mu^{ik} \psi_k. \tag{1}$$

Cela revient à définir quatre fonctions d'onde ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 ; on suppose ensuite que ψ s'exprime au moyen de ces quatre fonctions comme une matrice réduite à une seule colonne d'éléments ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4.

Or, *rien ne justifie cette dernière supposition* ; c'est une hypothèse gratuite qui restreint la généralité et introduit des complications inutiles. En effet, l'hamiltonien H, somme de quatre matrices, est lui-même une matrice, à quatre lignes et à quatre colonnes. L'équation $H\psi = 0$ signifie qu'il faut trouver une grandeur qui, multipliée par une telle matrice, donne zéro. Il est évident qu'en général ψ *devra être une matrice à quatre lignes et à quatre colonnes* ([1]). Il n'est pas étonnant qu'on trouve des résultats non symétriques et parti-

([1]) Si elle en avait plus, un certain nombre de ses éléments seraient arbitraires, le nombre des inconnues surpassant celui des équations qui doivent les déterminer.

culiers, si l'on admet, dès le début, sans aucune nécessité, que trois de ces colonnes ont leurs éléments égaux à zéro. De plus, il est évident qu'en multipliant H par ψ et en annulant les éléments de la matrice produit, les 16 équations résultantes sont identiques quatre à quatre : ce sont les équations qui proviennent de la composition d'une ligne donnée de H avec les colonnes de ψ. ψ est donc une matrice dont les trois dernières colonnes sont identiques à la première, mais qui en tout cas *ne sont pas nulles*, comme on l'admet actuellement.

Les résultats corrects auxquels conduit l'équation de Dirac ne peuvent s'obtenir que si l'on élimine cette hypothèse limitative. Nous allons essayer de le faire dans les paragraphes suivants, en mettant en œuvre l'idée que nous venons d'esquisser qualitativement.

2. **Equation de Dirac.** — Pour rendre compte des effets attribués à l'électron tournant dans la théorie des spectres et pour satisfaire aux exigences de la relativité, Dirac a été amené à remplacer les équations relativistes de Gordon et Klein par l'équation du premier ordre

$$(p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc)\psi = 0 \tag{2}$$

où

$$p_0 = -\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\frac{\partial}{c\,\partial t} + \frac{e}{c}A_0$$

$$p_r = +\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{e}{c}A_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

A_0 étant le potentiel scalaire, A_1, A_2, A_3 le potentiel vecteur et $-e$ la charge de l'électron.

Les α_μ sont des opérateurs qui commutent avec les p_i, avec les x_i et avec t et qui satisfont en outre aux conditions

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 0 \quad \alpha_\mu^2 = 1 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Ils peuvent être mis sous forme de matrices à quatre lignes et à quatre colonnes d'éléments $(\alpha_\mu)^{ik}$; Dirac a indiqué une forme possible de ces matrices.

Les α_μ n'opèrent pas sur les x, y, z, t; ψ doit donc contenir une nouvelle variable ζ sur laquelle les α_μ puissent opérer, ψ $(x, y, z, t;\ \zeta)$. On écrit le plus souvent cette variable en indice ψ_ζ; les α_μ étant exprimés sous forme de matrices on définit alors la manière dont ils opèrent sur ψ par

$$\alpha_\mu\psi_k = \Sigma\,(\alpha_\mu)^{ik}\psi_k. \tag{4}$$

Cette définition achève de préciser le sens de l'équation (2). Avec les matrices de Dirac l'équation unique (2) est équivalente, par (4), au système d'équations à quatre fonctions inconnues ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, écrit pour la première fois par Darwin

$$\left.\begin{aligned}
(p_0 + mc)\psi_1 + (p_1 - \mathbf{i}p_2)\psi_4 + p_3\psi_3 &= 0\\
(p_0 + mc)\psi_2 + (p_1 + \mathbf{i}p_2)\psi_3 - p_3\psi_4 &= 0\\
(p_0 - mc)\psi_3 + (p_1 - \mathbf{i}p_2)\psi_2 + p_3\psi_1 &= 0\\
(p_0 - mc)\psi_4 + (p_1 + \mathbf{i}p_2)\psi_1 - p_3\psi_2 &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dirac décompose en facteurs les α en utilisant six matrices à quatre lignes et quatre colonnes σ_1, σ_2, σ_2, et ρ_1, ρ_2, ρ_3 :

$$\alpha_1 = \rho_1\sigma_1 \quad \alpha_2 = \rho_1\sigma_2 \quad \alpha_3 = \rho_1\sigma_3 \quad \alpha_4 = \rho_3. \tag{6}$$

Le « vecteur » $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ étant désigné par $\overline{S}$ et (p_1, p_2, p_3) par $\overline{P}$, l'équation symbolique (2) peut encore s'écrire

$$\left[p_0 + \rho_1\left(\overline{S}, \overline{P}\right) + \rho_3 mc\right]\psi = 0 \tag{7}$$

$\left(\overline{S}, \overline{P}\right)$ représente le produit scalaire des vecteurs $\overline{S}$ et $\overline{P}$.

3. **Objections**. — Dès le début on a fait à cette équation ou à celles qui s'en déduisent, deux objections, très importantes parce qu'elles mettent en lumière une imperfection de la théorie et, comme nous le verrons par la suite, des restrictions inadmissibles au point de vue physique. On lui a reproché, en premier lieu, sa forme totalement dépourvue de symétrie. L'introduction de la relativité accroît généralement la symétrie, les coordonnées et le temps étant traités de la même façon; ici nous sommes loin d'avoir atteint ce résultat. Ensuite l'équation ainsi obtenue n'est pas écrite sous forme tensorielle, bien qu'en réalité elle ne soit pas altérée par une transformation de Lorentz; invariante au fond, elle ne l'est pas en forme. L'ensemble des quatre scalaires (ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4) *n'est pas un vecteur*; il suit des lois de transformations différentes et qui n'avaient pas été rencontrées en Physique jusqu'à présent.

Dans le but de clarifier cette question, divers auteurs ont cherché à pousser aussi loin que possible l'étude, soit de l'hamiltonien $H = p_0 + \rho_1 (\overline{S}, \overline{P}) + \rho_3 mc$, soit de la grandeur ψ. Parmi ceux qui ont étudié H, Eddington s'est proposé de donner une forme symétrique à l'équation fondamentale et il y est parvenu en partant d'un système de matrices différent de celui de Dirac. Mais la solution générale de la symétrisation de H a été donnée par Schouten, dans un travail que nous examinerons plus loin.

D'autres auteurs ont étudié plus particulièrement l'analogie avec les équations de Maxwell et ont proposé de remplacer les quatre fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, soit par huit autres, définies au moyen d'un système différent d'équations, — soit encore seulement par deux fonctions ψ_1, ψ_2, qui devraient suffire. Enfin, une autre catégorie d'auteurs a pris pour base l'équation de Dirac, et a cherché à étudier directement la nouvelle grandeur ψ à laquelle on a même donné un nom nouveau : « demi-vecteur ».

Si intéressantes que soient de pareilles considérations, il ne semble pas qu'elles puissent fournir la solution complète du problème. Celui-ci apparaît comme beaucoup plus simple; nous chercherons à montrer que toutes les difficultés disparaissent dès qu'on a le soin d'envisager ce problème dans toute sa généralité. Les imperfections qu'on constate proviennent simplement d'une particularisation injustifiée des données. De plus, le traitement général nous offre l'avantage de rendre plus facile l'interprétation physique des calculs, ce qui est extrêmement désirable dans ce chapitre de la physique théorique.

Nous allons donc reprendre l'étude de Dirac au début, en suivant son propre raisonnement; pour simplifier, nous supposerons tout d'abord le champ nul.

4. **Equation relativiste générale**. — Soit l'équation de l'énergie en relativité restreinte

$$-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2 = 0 \qquad (8)$$

où m_0 est la masse propre, p_0 l'énergie et p_1, p_2, p_3 les moments de l'électron. Posons $p_4 = i\,p_0$, et

$$t_k = p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ x_4 = ict \end{pmatrix} \qquad (9)$$

$$t_5 = m_0 c$$

(8) devient :

$$\sum_{i=1}^{5} t_i^2 = 0. \qquad (10)$$

L'équation de Schrödinger, déduite suivant le procédé habituel de l'équation (10), n'est pas admissible parce qu'elle est du second ordre ; elle devrait être, suivant Dirac, du premier. Pour obtenir une telle équation, Dirac décompose (10) en deux facteurs du premier degré. La manière la plus symétrique de le faire consiste évidemment à poser

$$\sum_1^5 t_i^2 \equiv F^2 \equiv \left(\sum_1^5 E_i t_i\right)\left(\sum_1^5 E_i t_i\right). \qquad (11)$$

L'équation qui remplacera l'équation de Schrödinger sera alors simplement

$$F\psi = 0$$

ou $$(E_1 t_1 + E_2 t_2 + E_3 t_3 + E_4 t_4 + E_5 m_0 c)\psi = 0 \tag{12}$$

les E_i étant définis par l'identité (11). En égalant les coefficients des deux membres, on voit que les E_i doivent satisfaire aux conditions

$$\left.\begin{array}{l} E_i^2 = 1 \\ E_i E_k = - E_k E_i \end{array}\right\} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{13}$$

Aucune autre restriction ne leur est imposée. D'après (13), les E_i sont des nombres dont la multiplication n'est pas commutative ; *ce sont donc en général des nombres hypercomplexes.* Cette observation simple, mais d'un grand caractère de généralité, va nous donner la clef du problème.

Nous allons donc commencer par étudier le système particulier de nombres complexes dans lequel est écrit F, en faisant en outre l'hypothèse simplificatrice que ce système est à multiplication associative [1].

5. **Les quadriquaternions.** — Pour déterminer un système de nombres complexes, il suffit de connaître son ordre n et une base $e_1, e_2, \dots e_n$, c'est-à-dire n nombre du système, linéairement indépendants. Tout nombre du système peut alors être mis sous la forme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

les x_i étant des nombres ordinaires.

La détermination du système le plus simple dans lequel se trouve écrite l'équation de Dirac a été faite par Schouten, dans une note trop peu connue [2]. Observons d'abord que l'équation $E_i F\psi = 0$, équivalente à (12), est une somme de 5 termes ; l'un d'eux a le coefficient 1, en vertu de (13), et les quatre autres sont des nombres du système, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, et qui vérifient, eux aussi, les relations

$$\varepsilon_i^2 = 1$$
$$\varepsilon_i \varepsilon_r + \varepsilon_r \varepsilon_i = 0. \tag{14}$$

On en conclut que *quatre* nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, (et l'unité principale 1) suffisent pour écrire cette équation.

Considérons donc quatre nombres ε, astreints seulement à vérifier les conditions (14). Le produit de deux d'entre eux étant encore un nombre du système, les nombres

$$1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_4, \quad \varepsilon_2\varepsilon_4, \quad \varepsilon_3\varepsilon_4$$

en font également partie. En répétant le même raisonnement, on voit qu'il en est de même de

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4, \quad \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_1, \quad \varepsilon_4\varepsilon_1\varepsilon_2$$

et

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$$

et que, de plus, ces nombres sont linéairement indépendants. Mais, si on essaie de poursuivre ce processus plus loin, on est arrêté : tout produit formé par deux nombres de la liste précédente en reproduit un autre qui s'y trouve déjà. Nous sommes donc en présence du nombre maximum de nombres linéairement indépendants du système. Ce nombre

[1] Pour l'étude de tels nombres, voir par exemple l'excellent article de M. Cartan, dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. **1**, vol. 1, fasc. 3, Gauthier-Villars et B.-G. Teubner, 1908, ou encore Dickson, *Algebren und ihre Zahlentheorie* Zürich, 1927.

[2] *Proc. Amst.*, t. **32** (1929), p. 105.

maximum, $n = 16$, est donc l'*ordre* du système ; les nombres ci-dessus peuvent être choisis comme unités ; ils constituent une *base. Il y a 16 unités,* à savoir :

$$1\ ;\quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\ ;$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2,\quad \varepsilon_2\varepsilon_3,\quad \varepsilon_3\varepsilon_1,\quad \varepsilon_1\varepsilon_4,\quad \varepsilon_2\varepsilon_4,\quad \varepsilon_3\varepsilon_4\ ;$$
$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4\ ;\quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3,\quad \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4,\quad \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_1,\quad \varepsilon_4\varepsilon_1\varepsilon_2, \tag{15}$$

que nous désignerons par

$$\varepsilon_0 = 1,\quad \varepsilon_1,\ \ldots\quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2,\ \ldots\quad \varepsilon_{123} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3,\ \ldots\quad \varepsilon_{1234} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4,$$

soit aussi parfois, pour simplifier, par e_i ($i = 1, 2, \ldots 15, 16$).

De tels systèmes ont déjà été envisagés par les mathématiciens : ce sont les *quadri-quaternions,* système à multiplication associative à seize unités et à unité principale [1].

La remarque de Schouten consiste à observer qu'étant donné un tel système, défini par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, on peut trouver au plus *cinq nombres* E_i du système satisfaisant à

$$\begin{aligned} &E_i^2 = 1 \\ &E_iE_k + E_kE_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5). \end{aligned} \tag{16}$$

Il suffira, en effet, de prendre

$$\begin{aligned} &E_k = \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \\ &E_5 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4. \end{aligned} \tag{17}$$

Un tel système de nombres sera appelé un *système orthogonal.*

Or, l'équation générale (12) est une forme linéaire et homogène, dont les coefficients satisfont à (16); *le hamiltonien F est donc un quadriquaternion dont 11 composantes sont nulles, les autres correspondant à un système orthogonal* [2].

Résumant les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent, nous pouvons dire : le hamiltonien considéré par Dirac consiste en une forme linéaire et homogène, dont les coefficients sont des nombres hypercomplexes formant un système orthogonal, dans le système des quadriquaternions $e_1, e_2, \ldots e_{16}$.

6. **La fonction d'onde ψ.** — Notre but est l'étude de la fonction d'onde ψ. Ayant posé le problème comme nous venons de le faire, la solution est immédiate. ψ est déterminé par l'équation

$$F\psi = 0$$

où F est un quadriquaternion. *La solution générale sera donc un quadriquaternion de la forme*

$$\psi_1e_1 + \psi_2e_2 + \ldots + \psi_{16}e_{16}$$

dont les composantes ψ_i, *nombres ordinaires,* auront des valeurs quelconques, *non nécessairement nulles.*

La première conclusion qu'on peut tirer de cette affirmation, est que *le ψ défini par l'équation de Dirac a seize composantes* et non pas quatre, comme on le suppose habituellement. Cette équation est donc équivalente, non pas à quatre équations différentielles, mais à 16 ; on les obtient en effectuant le produit

$$F\psi = (e_1t_1 + e_2t_2 + e_3t_3 + e_4t_4 + e_5t_5)(\psi_1e_1 + \ldots + \psi_{16}e_{16}) = 0$$

compte tenu des règles de multiplication, et en annulant les coefficients des 16 unités $e_1, \ldots e_{16}$.

(1) Voir par exemple Combebiac, *Bull. Soc. Math. France,* **30** (1920), p. 1 ; W.-K. Clifford, *Mathematical Papers London* (1882), pp. 266, 397 ; Lipschitz, *Bull. Sc. math.,* **11** (1887), p. 115; *Journal math. pures appl.,* **2** (1886), pp. 373 et 439.

(2) Comparer avec les résultats d'Eddington, *Proc. Roy. Soc.,* A 121 (1928), p. 524.

On peut introduire une notation qui simplifie énormément les calculs. Toute unité e_k est un produit des nombres $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. Nous pouvons donc écrire

$$\psi = \psi_0 + (\psi_1\varepsilon_1 + \psi_2\varepsilon_2 + \psi_3\varepsilon_3 + \psi_4\varepsilon_4) + (\psi_{12}\varepsilon_{12} + \psi_{23}\varepsilon_{23} + \psi_{31}\varepsilon_{31} + \psi_{14}\varepsilon_{14} + \psi_{24}\varepsilon_{24} + \psi_{34}\varepsilon_{34})$$
$$+ (\psi_{123}\varepsilon_{123} + \psi_{234}\varepsilon_{234} + \psi_{341}\varepsilon_{341} + \psi_{412}\varepsilon_{412}) + \psi_{1234}\varepsilon_{1234}. \quad (18)$$

L'indice de chaque ψ_i est égal au nombre formé par les indices des unités qui lui correspondent, pris dans le même ordre ; le coefficient de $\varepsilon_{123} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ sera donc ψ_{123}, et ainsi de suite. En outre, le coefficient de l'unité principale, $\varepsilon_0 = 1$, sera désigné par ψ_0.

Il est d'ailleurs facile d'écrire directement les équations si l'on adopte la notation (18). Commençons par un terme arbitraire, par exemple, $e_1 t \equiv \varepsilon_1 t_1$ de F et multiplions-le par un terme également arbitraire de ψ, $\psi_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 \equiv \psi_{14}\varepsilon_{14}$ par exemple. $t_1\psi_{14}$ sera donc dans $F\psi$, le coefficient de $\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_4 = \varepsilon_4$. Cherchons donc quels seront les autres coefficients de ε_4 dans $F\psi$. Le terme suivant dans l'équation de Dirac est $\varepsilon_2 t_2$, le $\psi_k\varepsilon_k$ qui lui correspond, devra être tel que $\varepsilon_2\varepsilon_k = \varepsilon_4$; donc $\varepsilon_k = \varepsilon_2\varepsilon_4$, $k = 24$, ce sera par conséquent ψ_{24}. Le même procédé s'applique à tous les termes et il y en a cinq. On a comme équation

$$t_1\psi_{14} + t_2\psi_{24} + t_3\psi_{34} + t_4\psi_0 + t_5\psi_{123} = 0$$

ou

$$\frac{\partial\psi_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_{24}}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_{34}}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi_0}{\partial x_4} + \frac{2\pi \mathbf{i}}{h} m_0 c \psi_{123} = 0 \quad (19)$$

et 15 autres équations analogues, qu'on écrit immédiatement.

La solution générale de l'équation de Dirac comporte donc 16 fonctions au lieu de quatre ; on comprend donc de quelle façon l'interprétation qu'on en donne actuellement est limitative. On peut mieux saisir cette différence en s'aidant d'une observation de Schouten [1] : le système de nombres complexe S envisagé plus haut est au fond le produit de deux systèmes de quaternions. Autrement dit, une base de ce système peut s'obtenir de la manière suivante : étant donnés deux systèmes de quaternions, ayant comme unités $1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $1, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, les seize nombres $1, \lambda_i, \mu_i, \lambda_i\mu_k = \mu_k\lambda_i$ $(i, k = 1, 2, 3)$, peuvent être considérées comme les unités du système S [2] ; c'est cette particularité que rappelle le nom de « quadriquaternions ». Tout nombre de ce système peut être écrit alors sous la forme

$$X_0 + X_1\lambda_1 + X_2\lambda_2 + X_3\lambda_3 \quad (20)$$

les composantes X_i étant elles-mêmes des quaternions.

Schouten observe que Dirac, en employant les matrices σ et ρ utilise au fond ce système particulier d'unités. Même sans préciser la nature matricielle des coefficients le ψ peut donc être écrit sous la forme (20), avec quatre composantes, mais ces composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, *sont elles-mêmes des quaternions*. Les considérer comme des scalaires constitue donc une erreur qui peut conduire à des résultats incomplets, valables seulement dans certains cas particuliers.

Nous connaissons donc maintenant la forme de la solution générale de l'équation symbolique de Dirac. La première chose à faire serait donc d'examiner systématiquement les résultats obtenus jusqu'à présent, en remplaçant les quatre composantes habituelles par les 16 ψ_k. Mais avant d'entreprendre un tel travail, nous pouvons indiquer quelques résultats d'ordre général, indépendants de la résolution des équations (19). Ces résultats sont destinés à montrer que le procédé employé, le seul logiquement admissible, possède en outre d'autres avantages, parmi lesquels celui de faciliter l'interprétation physique des grandeurs ψ_k.

[1] Schouten, *loc. cit.*, p. 106.
[2] Par exemple, en prenant :

$$E_1 = \lambda_1\mu_3, \quad E_2 = \lambda_2\mu_3, \quad E_3 = \lambda_3\mu_3, \quad E_4 = -i\mu_1, \quad E_5 = -i\mu_2.$$

*
* *

7. **Transformations de Lorentz**. — L'équation relativiste générale (12) $F\psi = 0$ est invariante pour une transformation de Lorentz, tout comme l'équation de Dirac elle-même, mais de plus, elle est écrite *sous forme invariante.* Ceci est une caractéristique extrêmement satisfaisante, la théorie de la relativité étant essentiellement basée, comme le remarque Darwin [1], sur l'invariance de forme des équations. Posons donc $x_4 = ict$ et considérons la transformation de Lorentz

$$x'_k = \sum_{l=1}^{k} O_{kl} x_l \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{21}$$

avec

$$\sum_{l=1}^{4} O_{kl} O_{il} = \sum_{l=1}^{4} O_{lk} O_{li} = \delta_{ik}$$

équations auxquelles nous ajouterons une cinquième, qui exprime l'invariance de la masse propre, et qui n'est pas contenue dans les précédentes :

$$m_0 = \text{constante}. \tag{21'}$$

Les p (ou les t) se transformant comme un vecteur, l'équation $F\psi = 0$ devient

$$\left\{ \sum_{i=1}^{5} \left(\sum_{l=1}^{4} O_{li} t'_l \right) E_i \right\} \psi' = \left\{ \sum_{l=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{4} O_{li} E_i \right) t'_l + m_0 c E_5 \right\} \psi' = 0$$

qui a la forme primitive

$$\left(\sum_{l=1}^{5} E'_l t'_l \right) \psi' = 0$$

si

$$E'_l = \sum_{1}^{4} O_{li} E_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{22}$$

$$E'_5 = E_5 \tag{23}$$

et la nouvelle équation est toujours une équation de Dirac, car on a

$$E'^2_j = 1$$
$$E'_i E'_j + E'_j E'_i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

comme on le vérifie immédiatement.

La relation (23) est une conséquence de (22) parce qu'on a

$$E'_5 = E'_1 E'_2 E'_3 E'_4 = E_1 E_2 E_3 E_4 = E_5.$$

Considérons maintenant la loi de transformation de ψ dans l'hypothèse de l'invariance formelle de l'équation $F\psi = 0$. La loi (22) pour les $E_1 = \varepsilon_1$, $E_2 = \varepsilon_2$, $E_3 = \varepsilon_3$, $E_4 = \varepsilon_4$ nous fournit la loi de transformation de toutes les unités e_k et, par conséquent, de toutes les composantes ψ_k de

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \varepsilon_1 + \ldots + \psi_{1234}\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4.$$

[1] Darwin, *loc. cit.*, p. 657. Darwin observe que pour assurer cette invariance formelle des équations il faudrait introduire dans le calcul 16 quantités, qu'il renonce à définir parce qu'il lui semble absurde qu'un seul électron ait besoin d'un si grand nombre d'éléments pour être défini. Nous verrons cependant que cette circonstance, loin d'être une complication mathématique, nous rapproche davantage du côté physique de la question

Voir aussi le très intéressant article de v. Neumann, *Z. f. Phys.*, **48** (1928), p. 868.

On voit facilement que E_1, E_2, E_3, E_4, se transforment suivant (22), donc comme les composantes d'un vecteur. Il en est de même de

$$E_2 E_3 E_4, \qquad E_3 E_4 E_1, \qquad E_4 E_1 E_2, \qquad E_1 E_2 E_3,$$

ce dont on s'assure en les écrivant

$$-E_5 E_1, \qquad E_5 E_2, \qquad -E_5 E_3, \qquad E_5 E_4,$$

et en tenant compte que, par (23), E_5 est un invariant. Il s'en suit que les ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 d'une part, et les ψ_{123}, ψ_{234}, ψ_{341}, ψ_{412}, d'autre part, peuvent représenter les composantes de deux vecteurs que nous désignerons respectivement par P et R. On se rend compte de la même façon que (ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{31}, ψ_{14}, ψ_{24}, ψ_{34}) sont les composantes d'un tenseur antisymétrique de second rang M. De plus, 1 et E_5 sont des invariants ; ψ_0 et ψ_{1234}, sont donc des scalaires, que nous désignerons par m et λ.

Le ψ de Dirac est donc un être mathématique *composé de deux scalaires m et λ, de deux vecteurs P et R et d'un tenseur antisymétrique du second rang M*. Ce n'est pas ce qu'on a appelé un *demi-vecteur*, mais une grandeur dont les lois de transformation sont les lois ordinaires du calcul tensoriel. On voit immédiatement quel est le type général des grandeurs de ce genre si l'on observe que les nombres des composantes de ses constituants, convenablement arrangées, reproduisent les coefficients d'un développement binôme

$$1, \ 4, \ 6, \ 4, \ 1.$$

La solution générale de l'équation fondamentale de la mécanique quantique introduit donc 16 composantes à la place des 4 de Darwin ; cette complication se rachète cependant par un avantage considérable. En effet, le point important est qu'*on peut donner de ces 16 grandeurs une interprétation physique immédiate*, qu'elles n'avaient pas, et ne pouvaient pas avoir dans la théorie de Dirac à 4 composantes.

Comme on le verra plus loin, les deux vecteurs P et R sont attachés respectivement au quadrivecteur moment ($p_1, p_2, p_3, E/c$) et au quadrivecteur rayon (x, y, z, ct) ; M au tenseur formé par le moment magnétique (composantes 12, 23, 31) et le moment électrique (composantes 14, 24, 34) de l'électron ; l'invariant m sera attaché à la masse au repos et enfin λ sera relié à la longueur d'onde fondamentale de de Broglie.

8. **Les degrés de liberté de l'électron**. — On peut raisonnablement penser qu'*à priori* les éléments attachés aux unités *indépendantes* e_k, comme les ψ_k, se rapportent à des grandeurs *caractéristiques* de l'électron. L'analyse précédente nous a montré qu'il y avait 16 unités e_k ; cette constatation nous conduit à examiner le problème suivant : *indépendamment de l'équation de Dirac et même de la théorie des quanta* de combien de grandeurs indépendantes avons-nous besoin pour déterminer un électron ? Combien de possibilités de variation indépendantes ou encore *combien de degrés de liberté possède un électron* ?

Un calcul simple, qui n'a jamais été fait parce qu'on ne s'est jamais posé le problème, nous donne comme résultat 16 grandeurs, à savoir : 4 coordonnées, 4 moments, 3 composantes pour le moment magnétique, 3 pour le moment électrique (que *Frenkel* a introduit sans le secours de la théorie des quanta), la masse et la longueur d'onde de de Broglie ou, pour être plus précis, la masse et la coordonnée conjuguée de celle-ci ([1]). On justifie ainsi *physiquement* ce nombre de 16 degrés de liberté de l'électron, résultat fondamental sur lequel Eddington ([2]) a basé le calcul de la valeur de la charge élémentaire e. On peut facilement en déduire qu'un système de deux électrons en présence aura un nombre de degrés de liberté égal à $16^2 - C^2_{16} = 256 - 120 = 136$. Mais, tandis que chez Eddington ces nombres résultent de considérations mathématiques abstraites (ce nombre est le nombre

([1]) Voir *Comptes Rendus*, **186** (1928), p. 739 et **186** (1928), p. 1097 ; la question de cette coordonnée conjuguée sera reprise au § 9.

([2]) *Proc. Roy. Soc.*, A, **122** (1929), p. 358.

de certaines « rotations » abstraites (dans un espace matriciel) ils apparaissent ici avec une interprétation physique immédiate. Ce calcul intuitif est confirmé par le fait que l'équation de Dirac introduit automatiquement, sans aucune hypothèse supplémentaire, seize probabilités, correspondant à chacune de ces grandeurs, et cela en accord avec les lois de transformation que leur impose la relativité. Il ne semble pas qu'il y ait là une simple coïncidence.

Nous allons examiner maintenant comment on peut être amené à justifier l'interprétation que nous avons donnée des grandeurs correspondant aux ψ_k. Le principe de la méthode est le même que celui qui permet d'attribuer par exemple au σ de Dirac le caractère de moment angulaire de l'électron. A la rigueur, cette justification pourrait se faire, jusqu'à un certain point, au moyen de notions connues et universellement admises. Cependant, il nous semble que de cette façon on limite beaucoup et inutilement la généralité des démonstrations. Nous allons donc traiter le problème de la manière qui nous paraît logiquement et physiquement correcte. Cela nous conduira à utiliser une notion que nous avons introduite antérieurement [1], sous le nom de « cinquième dimension ». Il sera toujours possible au lecteur de supposer que l'introduction de cette « cinquième dimension » dans ce qui suit, n'est qu'un artifice mathématique; les résultats n'en seront pas altérés. Nous pensons cependant qu'elle présente un intérêt et une signification physique autrement plus profonds que cela.

9. **La cinquième dimension**. — Considérons un point matériel de *masse variable*, en mouvement. En mécanique analytique classique on décrit ce mouvement, d'une façon complète, en se donnant les valeurs des coordonnées, des moments, de l'énergie et enfin de la masse, ou d'une quantité proportionnelle a celle-ci, mc. Nous avons montré [1] que cette manière de procéder pèche contre la symétrie et la généralité. Les grandeurs envisagées peuvent être rangées dans un tableau tel que

$$\left.\begin{array}{ccccc} p_x, & p_y, & p_z, & E/c, & mc \\ x, & y, & z, & t, & ? \end{array}\right\} \tag{24}$$

de façon qu'elles se correspondent deux à deux : à chaque moment correspond alors une coordonnée qui lui est canoniquement conjuguée.

Il est indubitable que la masse doive être rangée dans la catégorie des moments : elle obéit, en effet, à une loi de conservation, tout comme les autres moments. Mais, la mécanique analytique fait en outre, l'hypothèse arbitraire que *la variable canoniquement conjuguée de la masse n'existe pas, ou plutôt qu'elle est toujours égale à zéro*. Nous devons éliminer cette hypothèse cachée si nous voulons étudier le problème du mouvement dans toute sa généralité; *cela est surtout désirable dans une théorie relativiste*. Comme nous l'avons montré la variable conjuguée de la masse représente la longueur d'onde λ de de Broglie. Si l'on considère, — comme on le fait toujours, — que la masse au repos est bien déterminée et égale à m_0, la valeur de λ est indéterminée de la forme $n\lambda_0$, λ_0 étant la longueur d'onde fondamentale de de Broglie, $\lambda_0 = \dfrac{h}{m_0 c}$, et n un entier quelconque.

La mécanique quantique pose tout comme la mécanique classique $\lambda \equiv 0$; cependant les relations de commutativité $pq - qp = \dfrac{h}{2\pi i}1$ conduisent dans ce cas à une absurdité, dès qu'on considère la masse comme un élément susceptible de variation.

En résumé, la description du mouvement, telle que l'envisage la mécanique analytique est incomplète ; il faut y introduire la coordonnée conjuguée de la masse λ. L'Univers dans lequel se passent les phénomènes n'est pas l'espace-temps x, y, z, ct, mais un espace-temps complété par une cinquième dimension λ, qui caractérise en quelque sorte *la matière*.

[1] *Comptes Rendus*, **186** (1928), p. 739.

La répugnance qu'on a à employer cette cinquième dimension, nous semble tout à fait analogue à celle qu'on éprouvait, avant Minkowski, à considérer comme élément fondamental l'espace-temps, c'est-à-dire l'adjonction du temps à l'espace, la fusion intime de l'espace *et du temps*. Il nous semble pourtant absurde (quoique cela ne soit pas un argument) que l'élément à partir de *la structure* duquel on puisse prévoir les phénomènes soit *uniquement* l'espace et le temps. Cela reviendrait à réduire la matière à l'espace et au temps. Il semble beaucoup plus satisfaisant d'introduire le λ, dès le début puisque aussi bien il s'introduit de lui-même, et de partir d'un Univers qui ne soit pas un espace-temps, mais un *espace-temps-matière*. Nous ne pouvons espérer établir une théorie cohérente et surtout complète des phénomènes (qui sera nécessairement une théorie « de champ ») qu'en partant d'un élément géométrique défini dans cet Univers complet à cinq dimensions. Il est particulièrement intéressant de remarquer que la nouvelle théorie d'Einstein n'est pas en contradiction avec cette exigence, puisqu'elle est indépendante du nombre de dimensions du continu envisagé.

Quoi qu'il en soit de ces considérations générales, revenons à l'équation de Dirac. Celle-ci est une combinaison linéaire des moments p_0, p_1 p_2, p_3 *et de* m_0c. La quantité m_0c intervient donc d'une façon symétrique et *joue le même rôle que les moments* p_k. Pour passer à l'équation de Dirac il faut poser

$$p_k = t_k = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

Pour accroître la symétrie, nous pourrions poser aussi

$$m_0 c = t_5 = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_5} \tag{25}$$

x_5 représentant une cinquième coordonnée. Eddington, poursuivant justement l'obtention d'une plus grande symétrie a été amené à écrire l'équation formelle (25); cependant il s'est défendu d'attribuer à x_5 le rôle d'une cinquième dimension (1). Son argumentation est basée sur la forme de l'équation de Dirac pour deux électrons; elle n'est actuellement plus valable, cette équation ayant été reconnue inexacte depuis, et en particulier par Eddington lui-même, qui l'a remplacée par une équation de Gaunt, elle-même sujette à caution (2).

Pour nous, au contraire, l'apparition de m_0c dans l'équation de Dirac et le rôle symétrique qu'elle y joue est une confirmation des hypothèses exposées précédemment. Nous croyons légitime de poser

$$t_5 = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_5}$$

x_5 étant la cinquième dimension, cette relation signifiant quelque chose de plus qu'un simple artifice de calcul. Nous pouvons de plus spécifier que t_5 appliqué à ψ redonne $m_0c\psi$; mais cela ne signifie pas qu'en l'appliquant à une autre fonction, on retrouve toujours en facteur m_0c. En particulier, $t_5\,(x_5\,\psi) \neq x_5\, t_5\, \psi = m_0c\, x_5\, \psi$.

10. **Interprétation des grandeurs attachées aux** e_i. — Considérons d'abord les ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{31} qui sont les coefficients de $E_1 E_2$, $E_2 E_3$, $E_3 E_1$.

Soit $F = \sum\limits_1^5 E_i t_i$, et cherchons des intégrales premières du mouvement, c'est-à-dire des expressions satisfaisant à

$$FX - XF = 0.$$

(1) *Proc. Roy. Soc.*, A, **121** (1928), p. 524.
(2) *Ibidem*, A, **122** (1929), p. 513; voir aussi G. Breit, *Phys. Rev.*, **34** (1929), p. 553.

Eddington observe que $x_1 t_2 - x_2 t_1$ n'est pas une intégrale première, mais que, par contre

$$M_{12} = x_1 t_2 - x_2 t_1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_1 E_2$$

en est une. Il est, en effet, aisé de vérifier que M_{12} commute avec F.

On interprète cela de la façon suivante. En mécanique ordinaire $x_1 t_2 - x_2 t_1$ serait le moment d'impulsion, qui est une intégrale du mouvement. Dans la nouvelle mécanique, pour avoir une intégrale première il faut ajouter $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_1 E_2$. Cette quantité (et par conséquent aussi $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_2 E_3$, $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_3 E_1$) est donc de même nature que la précédente : en fait, c'est le moment angulaire de l'électron, correspondant à son moment magnétique.

D'une façon analogue, les termes en

$$E_1 E_4,\ E_2 E_4,\ E_3 E_4$$

(relatifs à la coordonnée x_4, donc au temps), correspondront au moment électrique de l'électron. L'ensemble de ces six composanles

$$(12),\ (23),\ (31);\qquad (14),\ (24),\ (34)$$

forme un tenseur du deuxième rang antisymétrique, représentant le moment total de l'électron, le « vecteur à six composantes » de Frenkel.

Les combinaisons $E_1 E_2, \ldots$ caractérisent là où elles apparaissent, les composantes de ce moment. Il est donc tout naturel de supposer que les scalaires ψ_{12}, $\psi_{23} \ldots$, qui sont les coefficients de $E_1 E_2$, $E_2 E_3, \ldots$ dans

$$\psi = \psi_0 + \ldots + \psi_{12} E_1 E_2 + \ldots$$

sont des grandeurs attachées à chacune des composantes du tenseur moment total de l'électron. Pour abréger, nous dirons que ψ_{12}, par exemple, est là « probabilité » de la composante 12 du moment magnétique de l'électron. Dans le paragraphe suivant, nous examinerons d'une façon plus précise l'interprétation de ces probabilités ψ_k en langage des probabilités ordinaires.

Considérons maintenant les ψ_{234}, ψ_{341}, ψ_{412}, ψ_{123}. Ce sont les coefficients de $E_2 E_3 E_4, \ldots$ qu'on peut aussi écrire

$$-E_5 E_1,\qquad E_5 E_2,\qquad -E_5 E_3,\qquad E_5 E_4.$$

Le même calcul que précédemment nous montre que

$$M_{k5} = x_5 t_k - x_k t_i + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_k E_5$$

est une intégrale première.

Le $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_5 E_1$ ou $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i} E_2 E_3 E_4$ est donc de même nature que le moment $x_1 t_5 - x_5 t_1$, ou simplement que le moment $x_1 t_5$. Or, ce dernier opérateur (si M est appliqué à ψ) se réduit à $m_0 c x_1$. Par conséquent, la probabilité ψ_{234} attachée à $E_2 E_3 E_4$, peut être considérée comme attachée simplement à la coordonnée x, puisque m_0 reste constant. Donc

$$\psi_{234},\ \psi_{341},\ \psi_{412},\ \psi_{123}$$

sont les probabilités attachées aux quatre coordonnées x, y z, ct.

D'autre part, dans l'expression du hamiltonien, les coefficients de E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, sont respectivement les quantités de mouvement, l'énergie et la masse ; il est donc naturel de supposer ici encore, que dans ψ, les coefficients de E_1... seront des probabilités attachées

$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3$ aux composantes de la quantité de mouvement,
ψ_4 à l'énergie, ou à E/c,
$\psi_5 = \psi_{1234}$ à la masse, ou à $m_0 c$.

Enfin, quant au coeffcient ψ_0 de l'unité principale, il ne peut y avoir aucun doute à son égard ; la symétrie complète que nous avons introduite montre bien que cette probabilité est attachée à la coordonnée conjuguée de la masse λ, la longueur d'onde de de Broglie.

Nous avons ainsi des « probabilités » pour chacune des composantes des grandeurs qui caractérisent un électron. Le tableau suivant les résume :

$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3$, quantité de mouvement ; ψ_4, énergie ; ψ_{1234}, masse ;
$\psi_{234},\ \psi_{341},\ \psi_{412}$, cordonnées x, y, z ; ψ_{123}, temps ; ψ_0, longueur d'onde de de Broglie.
ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{31}, moment magnétique ; ψ_{14}, ψ_{24}, ψ_{24}, moment électrique.

L'introduction des 16 composantes, loin d'être une complication, simplifie l'interprétation physique du problème général.

11. Nature des ψ_k. Probabilités hypercomplexes. — Examinons d'un peu plus près la nature des « probabilités » ψ_1, ψ_2... En premier lieu, il est évident que la même interprétation, quelle qu'elle soit, vaudra tant pour ψ_k que pour $\psi = \psi_0 + \psi_1 E_1 + \ldots$ On admet aujourd'hui que le ψ donné par l'équation des ondes est une probabilité, ou, si l'on préfère, une grandeur à partir de laquelle on peut calculer uniquement des probabilités ([1]). Mais quel sens physique devrons-nous donner à cette affirmation dans le cas des ψ_k ?

Considérons l'équation de Schrödinger ; $|\psi|^2\,dq$ sera la probabilité de présence de l'électron dans l'élément de volume dq et $\int |\psi|^2\, dq = 1$. Pour obtenir la probabilité d'un état d'énergie n, nous devons développer la solution générale en série suivant les fonctions caractéristiques correspondant à l'énergie

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n(q)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h} E_n t}$$

ou en intégrale, s'il s'agit d'un spectre continu. $|c_n|^2$ sera alors la probabilité pour que l'atome se trouve dans le n-ème état quantique, les fonctions ψ_n étant normalisées. Si nous voulons obtenir la probabilité pour que le système ait un moment compris entre p et $p + dp$, nous n'avons qu'à développer la solution, suivant les fonctions propres correspondantes. En général, quand nous avons la solution générale ψ, la probabilité pour qu'une variable r soit comprise entre r et $r + dr$ sera donnée par les coefficients du développement de ψ suivant les fonctions propres correspondantes. La manière précise dont cela peut se faire est donnée par la théorie des transformations de Dirac ; Darwin a récemment insisté sur la signification physique de ce procédé ([2]).

L'interprélation rationnelle des ψ_k en découle immédiatement. Dans le cas habituel, nous devons développer en série (ou intégrale) de Fourier, pour n'importe quelle variable, *la même* fonction ψ. Mais dans le cas présent, où

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 E_1 + \ldots$$

nous développerons le ψ_k correspondant à cette variable elle-même. Si nous voulons obtenir la probabilité pour que l'atome se trouve dans l'état d'énergie n, nous devons développer

([1]) Nous retrouvons ici les mêmes circonstances que dans la théorie primitive de Schrödinger : les ψ_k sont des nombres ordinaires, mais qui peuvent être des nombres complexes. Cela ne fait aucune difficulté si l'on adopte la conception de probabilité imaginaire que nous avons proposée antérieurement (*J. Phys.*, t. **10** (1929), p. 12). Dans le cas contraire il faut spécifier que c'est le module de ψ qui donnera cette probabilité.

([2]) Darwin, La théorie ondulatoire de la matière, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1, p. 25 (1930).

en série la fonction ψ_4 ; mais si nous cherchons la probabilité pour que la coordonnée x soit comprise entre x et $x + dx$, nous ne développerons plus ψ_4, mais la fonction qui correspond à x, c'est-à-dire ψ_{234}. Chaque élément qui détermine un électron a ainsi sa propre fonction de probabilité ψ_k.

Ce qui précède indique aussi ce qu'on veut dire lorsqu'on affirme que ψ est une probabilité. Cette probabilité est un élément global : elle donne des renseignements sur *toutes* les grandeurs caractéristiques de l'électron.

ψ contient, en un certain sens, toutes les probabilités concernant l'électron. Or, ψ est un nombre hypercomplexe ; il est aussi un ensemble de seize composantes, parmi lesquelles on peut trouver des vecteurs, un tenseur, etc. On peut donc parler de *probabilités tensorielles* ou *hypercomplexes*; ces dénominations n'introduisent aucune ambiguïté. On ne les rencontre pas dans le calcul classique des probabilités parce qu'elles ne sont jamais apparues dans les problèmes qu'on a l'habitude d'étudier. Mais il eût été parfaitement légitime d'associer plusieurs probabilités continues, satisfaisant à certaines conditions pour en faire un « tenseur » et étudier le calcul tensoriel des probabilités, pour lui-même. On ne l'a pas fait, et même si on l'avait fait, cela serait resté un simple jeu de l'esprit, parce qu'on ne voit pas bien, *a priori,* quel intérêt immédiat peut présenter ce nouveau calcul, parce qu'on n'imagine pas facilement des problèmes qui puissent utiliser cette conception.

Il en est autrement maintenant. La mécanique ondulatoire nous montre dans quel genre de problèmes apparaissent ces probabilités. Les développements précédents mettent en même temps en lumière l'intérêt que peut présenter un calcul de ce genre pour la mise en œuvre des nouvelles conceptions de la mécanique quantique. C'est pour cela qu'il n'était pas tout à fait inutile de signaler d'une façon particulière ce problème aux mathématiciens.

12. **Composantes du courant quadridimensionnel.** — Une autre question très importante, peut être traitée sans aborder l'étude directe des équations (19) : celle du courant et de l'équation de continuité qu'il satisfait.

Dans le cas de l'équation de Schrödinger ou de celle de Dirac, le courant se calcule en partant de ψ et de son conjugué $\overline{\psi}$. Il semble donc qu'il faille généraliser pour notre cas la définition d'imaginaire conjugué. Ce n'est cependant pas de cette manière que nous allons procéder, une autre méthode se prêtant mieux à la généralisation. En effet, le courant se calcule d'habitude en partant de ψ, solution de l'équation donnée, et de ψ^+ solution d'une *équation adjointe* qui se déduit facilement de la précédente.

Considérons alors l'équation fondamentale (12)

$$\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\left(E_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + E_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + E_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + E_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\right) + m_0 c E_5 \psi = 0. \tag{12}$$

L'équation adjointe sera

$$-\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\left[\frac{\partial(\psi^+ E_1)}{\partial x_1} + \dots\right] + m_0 c \psi^+ E_5 = 0$$

ou

$$-\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\left[\frac{\partial\psi^+}{\partial x_1}E_1 + \dots + \frac{\partial\psi^+}{\partial x_4}E_4\right] + m_0 c \psi^+ E_5 = 0. \tag{24}$$

Multiplions la première par ψ^+ à gauche et la deuxième par ψ à droite et faisons la différence

$$\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\left[\left(\psi^+ E_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi^+}{\partial x_1}E_1\psi\right) + \dots + \left(\psi^+ E_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4} + \frac{\partial\psi^+}{\partial x_4}E_4\psi\right)\right] = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x}(c\psi^+ E_1 \psi) + \frac{\partial}{\partial y}(c\psi^+ E_2 \psi) + \frac{\partial}{\partial z}(c\psi^+ E_3 \psi) - \frac{\partial}{\partial t}(\psi^+ \mathbf{i} E_4 \psi) = 0 \qquad (25)$$

C'est l'équation de continuité, ce qui montre qu'on peut prendre pour composantes du courant quadridimensionnel les expressions

$$j_x = c\psi^+ E_1 \psi, \qquad j_y = c\psi^+ E_2 \psi, \qquad j_z = c\psi^+ E_3 \psi, \qquad \rho = -\psi^+(\mathbf{i}E_4)\psi. \qquad (26)$$

Celles-ci ont la même forme que les expressions classiques ; tous les résultats basés là-dessus devront donc subsister.

Observons encore que l'équation de continuité habituelle, n'a quatre termes, que parce *la masse m_0 est constante.* Si elle ne l'était pas, on devrait écrire une équation à cinq termes, et le courant serait un courant à cinq composantes, la cinquième représentant une sorte de flux matériel. Ces considérations sont à rattacher à celles exposées au paragraphe 9 ; nous n'insisterons pas là-dessus.

En étudiant dans toute sa généralité l'équation relativiste, on peut donc espérer avoir des résultats plus complets et rapprocher davantage de la réalité physique certaines considérations qui s'en écartent beaucoup trop. Le premier problème qui se pose après ces considérations générales, consiste à étudier en détail comment l'introduction des 16 composantes modifie la solution des problèmes déjà résolus et à voir si d'autres problèmes ne sont pas susceptibles d'un traitement simple. Il est clair que certains résultats, obtenus primitivement par un processus d'approximation, resteront les mêmes qu'auparavant ; par contre, d'autres problèmes devront recevoir une solution complètement remaniée.

Paris. — Société Générale d'Imprimerie et d'Edition, 17, rue Cassette.

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Intégrales premières de l'équation de Dirac.* Note de M. **Al. Proca.**

L'hamiltonien d'un électron de Dirac, dans le cas de l'absence de champ, est

$$H = c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc) \tag{1}$$

où

$$\alpha_r \alpha_s + \alpha_s \alpha_r = 2\delta_{rs}$$

et p_1, p_2, p_3 désignent les composantes de la quantité de mouvement. La dérivée d'un opérateur quelconque étant donnée par

$$\varkappa\dot{\xi} = H\xi - \xi H, \qquad \varkappa = \frac{h}{2\pi i}, \tag{2}$$

une intégrale première est définie comme en mécanique classique, par la condition $\xi = \text{const.}$

On trouve en mécanique quantique l'analogue des intégrales connues de la mécanique newtonienne du point matériel : l'intégrale de l'énergie

$$H = \text{const.}, \tag{3}$$

les intégrales de la quantité de mouvement

$$p_k = \text{const.} \tag{3'}$$

et les intégrales du moment de cette quantité de mouvement

$$\left\{\begin{aligned} & x_1 p_2 - x_2 p_1 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_1\alpha_2 = \text{const.}, \\ & x_2 p_3 - x_3 p_2 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_2\alpha_3 = \text{const.}, \\ & x_3 p_1 - x_1 p_3 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_3\alpha_1 = \text{const.}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

qu'on peut écrire, en utilisant la notation vectorielle et en posant

$$is_1 = \alpha_2\alpha_3, \qquad is_2 = \alpha_3\alpha_1, \qquad is_3 = \alpha_1\alpha_2, \tag{5}$$

$$[\bar{x} \times \bar{p}] + \frac{\varkappa}{2i}\bar{s} = \text{const.}; \tag{4'}$$

$\bar{s}$ correspond au spin et (4′) prouve que le moment cinétique se conserve si l'on y ajoute $\bar{s}$.

Or (3), (3′) *et* (4) *ne sont pas les seules intégrales premières simples du problème.* L'électron de Dirac diffère de l'électron classique et ces différences se manifestent entre autres par l'existence de théorèmes de conservation distincts des précédents, auxquels conduisent *de nouvelles intégrales premières.* Posons par exemple

$$R_1 = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \qquad R_2 = -\alpha_3 \alpha_4 \alpha_1, \qquad R_3 = \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2. \tag{6}$$

On vérifie facilement que les R_1, R_2, R_3 se transforment comme les composantes d'un vecteur. Cela étant, les expressions

$$\left\{\begin{aligned} R_1 p_2 - R_2 p_1 &= \text{const.},\\ R_2 p_3 - R_3 p_2 &= \text{const.},\\ R_3 p_1 - R_1 p_3 &= \text{const.},\end{aligned}\right. \tag{7}$$

ou, vectoriellement,

$$[\bar{R} \times \bar{p}] = \text{const.}, \tag{7′}$$

sont des intégrales premières du mouvement d'un électron libre.

La relation du vecteur $\bar{R}$ avec le spin $\bar{s}$ est très simple ; on a

$$i\bar{R} = \alpha_4 \bar{s}. \tag{8}$$

De plus, si l'on pose

$$\tau = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4,$$

on peut écrire

$$R_k = \tau \alpha_k \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Les relations (7) se démontrent immédiatement si l'on tient compte que

$$\left\{\begin{aligned} \varkappa \dot{R}_1 &= 2cp_1\tau,\\ \varkappa \dot{R}_2 &= 2cp_2\tau,\\ \varkappa \dot{R}_3 &= 2cp_3\tau\end{aligned}\right. \tag{10}$$

et que

$$\dot{p}_k = 0.$$

En remplaçant (8) dans (7) les nouvelles intégrales prennent la forme

$$[\bar{s} \times \bar{p}] = \alpha_4 . \text{const.} = \alpha_4 \bar{\nu}, \tag{11}$$

ν étant un opérateur constant, forme sous laquelle on voit clairement qu'elles ne sont pas une conséquence de (3) et (4); on a entre elles, cependant, la relation

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 = (\bar{p}\bar{v}) = 0. \tag{12}$$

En tenant compte du fait que

$$\varkappa\dot{\tau} = 2 \mathrm{H}\tau,$$

les équations (10) s'intègrent facilement et donnent

$$\mathrm{R}_k = w_k - c p_1 \tau_0 \mathrm{H}^{-1} e^{-\frac{2\mathrm{H}}{\varkappa} t}, \tag{13}$$

w_k et τ_0 étant des opérateurs constants.

Le problème que nous traitons est de la catégorie de ceux qu'il suffit de poser pour résoudre. Il n'est pas difficile d'écrire les autres intégrales premières indépendantes de l'équation de Dirac et d'en dresser une liste complète, qui nous permette d'étudier un aspect de la différence qu'il y a entre un électron de Dirac et un électron ordinaire. Nous nous arrêterons pour l'instant sur la relation (7') qui présente un intérêt particulier.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 193, p. 642, séance du 19 octobre 1931.)

$\tau \dot{\underline{\underline{s}}}$ = constant (vecteur

GAUTHIER-VILLARS IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
92826-31 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Sur une nouvelle caractéristique de l'électron de Dirac*. Note de M. **Al. Proca**.

1. Un électron de Dirac possède un moment mécanique, tenseur antisymétrique du second rang, dont les composantes λ_{rs} sont, au facteur $(\varkappa/2 = h/4\pi i)$ près,

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_2\alpha_3, & \alpha_3\alpha_1, & \alpha_1\alpha_2, \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3. \end{array}\right. \tag{1}$$

Le procédé le plus simple et le plus correct pour l'établir consiste à partir des intégrales premières suivantes valables en l'absence de champ :

$$\frac{d}{dt}\left(x_2 p_3 - x_3 p_2 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_2\alpha_3\right) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x_1\frac{\mathrm{H}}{c} - ctp_1 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_1\right) = 0, \tag{3}$$

dont on vérifie l'exactitude immédiatement (¹).

2. Avec un vecteur à six composantes λ_{rs} on peut former, entre autres, un invariant

$$b = \lambda_{23}\lambda_{14} + \lambda_{31}\lambda_{24} + \lambda_{12}\lambda_{34}. \tag{4}$$

Formons l'expression analogue avec les composantes de (1). Il faut être prudent puisqu'il s'agit d'opérateurs; cependant remarquons que les opérateurs que nous multiplions sont *commutables* ($\alpha_2\alpha_3$ avec α_1, etc.). Quoi

(¹) On trouve quelquefois l'affirmation que $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$ étant proportionnelles au moment magnétique, $\alpha_1\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_4$, $\alpha_3\alpha_4$ sont proportionnelles au moment électrique correspondant. Cela est manifestement incorrect, ces grandeurs ne formant pas un tenseur.

Les équations (3) permettent en outre de donner, par une simple quadrature, la décomposition de Schrödinger en une partie linéaire et une partie oscillante, pour les coordonnées

$$x_1 = \text{const.} + c^2\mathrm{H}^{-1}p_1.t - \frac{c\varkappa}{2}\mathrm{H}^{-1}\alpha_1.$$

qu'il en soit, on a

$$b = \frac{\varkappa^2}{4}(\alpha_2\alpha_3.\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1.\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2.\alpha_3). \tag{5}$$

On constate que b est effectivement un invariant, puisque $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ l'est; cela est de nature à nous confirmer dans l'opinion que l'opération (5) est correcte. On constate encore que *cet invariant n'est jamais nul*, ce qui est évident ([1]).

3. L'interprétation mécanique de ce résultat n'est pas immédiate; mais on peut en donner une autre, de nature électromagnétique, qui est plus intuitive. Un électron possède un moment magnétique m et un moment électrique p. On peut dire qu'il a un moment magnétique parce qu'il est constitué par une charge électrique tournant autour d'un axe. Il en résulte que, dans un système de coordonnées S′, dans lequel l'électron n'a qu'un mouvement de rotation, son moment *électrique est nul*. Indépendamment de toute image, cela veut dire que, d'après les conceptions actuellement admises, il existe un système d'axes particulier pour lequel $p' = 0$ ([2]).

Formons alors $\Sigma m_i p_i = (mp)$, qui est un invariant. On aura toujours

$$(mp) = (m'p') = 0.$$

Mais alors, *si l'on constate que* $(m'p') \neq 0$, on devra en conclure que dans le système S′ l'électron possède un moment électrique non nul. Donc *l'électron de Dirac possède, outre le moment magnétique de* Uhlenbeck *et* Goudsmit, *un moment électrique propre, distinct de celui qui résulte du moment magnétique, par le jeu des transformations de Lorentz.*

4. L'image élémentaire utilisée plus haut permet d'exprimer cela d'une façon plus saisissante. Dans le système S′ le moment électrique qui provient de la charge électrique est *nul;* le moment électrique supplémentaire peut être considéré comme provenant *de la rotation d'une charge magnétique libre* μ (laquelle à son tour n'aurait pas de moment *magnétique* dans S′).

([1]) Il n'est pas certain que nous ayons le droit de grouper les trois termes en un seul, mais on peut affirmer que *la somme* (5) n'aura jamais la valeur propre zéro. Cela nous est d'ailleurs confirmé par le calcul des expressions quadratiques en ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, qui représentent des moyennes observables. La somme $\Sigma\lambda_{rs}\lambda_{ik}$ formée avec les composantes du tenseur antisymétrique est égale simplement au produit des deux invariants I et J de Darwin; dans le cas qui nous occupe, nous avons également le produit de deux opérateurs invariants 1 et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

([2]) Cf., par exemple, Frenkel, *Lehrbuch der Elektrodynamik*, p. 353.

Si l'on suppose que les formules classiques ou semi-quantiques sont les mêmes pour un pôle magnétique que pour un électron (ce qui est loin d'être prouvé), on déduit pour un électron de Dirac

$$\mu = e\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Enfin on s'assure facilement que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ est une grandeur oscillante avec la fréquence $2H/\chi$. Donc *tout se passe comme si un électron de Dirac possédait, outre sa charge électrique e, une charge magnétique libre, oscillante et d'amplitude numériquement égale à la première,* $\mu = e$.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 194, p. 691, séance du 22 février 1932.)

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
93764-32 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Sur les grandeurs caractéristiques de l'électron de Dirac.* Note de M. **Al. Proca.**

1. Soit un électron de Dirac, défini en l'absence de champ par l'hamiltonien

$$H = c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0 c). \tag{1}$$

En introduisant les α_r dans le but de retrouver le spin, Dirac a automatiquement attaché à l'électron seize opérateurs nouveaux, linéairement indépendants et qu'on forme à partir des α_r par multiplication ([1]). Dans une Note précédente ([2]), nous avons essayé de donner une interprétation physique de l'un d'eux, l'invariant $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$; cette interprétation mérite qu'on s'y arrête parce qu'elle permet de préciser, d'une façon définitive, le sens physique de toutes les caractéristiques nouvelles de l'électron de Dirac.

En utilisant les résultats de cette Note, on peut dire qu'à un pareil électron sont attachés :

I. Deux invariants :

$e.1$ .... charge électrique

$e.\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ .... charge magnétique libre

II. Un tenseur antisymétrique de second rang :

$$\frac{e}{m_0 c}\alpha_2\alpha_3,\quad \frac{e}{m_0 c}\alpha_3\alpha_1,\quad \frac{e}{m_0 c}\alpha_1\alpha_2;\quad \frac{e}{m_0 c}\alpha_1,\quad \frac{e}{m_0 c}\alpha_2,\quad \frac{e}{m_0 c}\alpha_3,$$

représentant le moment électrique et magnétique *total*.

III. Deux quadrivecteurs :

$e.\alpha_1\alpha_4$, $e.\alpha_2\alpha_4$, $e.\alpha_3\alpha_4$, $e.\alpha_4$, courant électrique.

$e.\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $-e.\alpha_3\alpha_4\alpha_1$, $e.\alpha_4\alpha_1\alpha_2$, $e.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, courant magnétique ([3]).

([1]) Ces opérateurs, parmi lesquels six seulement caractérisent le spin, ont été beaucoup étudiés depuis; ils ont été signalés, pour la première fois, par J. v. Neumann, *Z. Physik*, **48**, 1928, p. 868.

([2]) *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 691.

([3]) Au facteur e près, ce vecteur est celui qui figure de la nouvelle intégrale première, donnée dans une de nos Notes précédentes (cf. *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 642).

En effet, le vecteur

$$\alpha_1\alpha_4, \quad \alpha_2\alpha_4, \quad \alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_4$$

représente la vitesse quadridimensionnelle ([1]), et, en outre, on peut écrire

$$e.\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = e.\alpha_1\alpha_2\alpha_3.\alpha_1\alpha_4, \qquad -e.\alpha_3\alpha_4\alpha_1 = e.\alpha_1\alpha_2\alpha_3.\alpha_2\alpha_4,$$
$$e.\alpha_4\alpha_1\alpha_2 = e.\alpha_1\alpha_2\alpha_3.\alpha_3\alpha_4, \qquad e.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = e.\alpha_1\alpha_2\alpha_3.\alpha_4.$$

2. Passons aux moyennes données par les expressions quadratiques en ψ_r et ψ_r^*. La moyenne de la charge magnétique est représentée par le second invariant de Darwin ([2])

$$\text{(2)} \qquad J = i(\psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_4 - \psi_3^*\psi_1 - \psi_4^*\psi_2).$$

Darwin a donné, en outre, les expressions des moyennes du moment total ($\mu_1, \mu_2, \mu_3 ; \pi_1, \pi_2, \pi_3$) et des autres covariants, à l'exception du « courant magnétique ». Les composantes de celui-ci sont :

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} k_1 = \quad (\psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_3^*\psi_4 + \psi_4^*\psi_3), & k_3 = \psi_1^*\psi_1 - \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 - \psi_4^*\psi_4, \\ k_2 = -i(\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1 + \psi_3^*\psi_4 - \psi_4^*\psi_3), & k_4 = \psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_4 + \psi_3^*\psi_1 + \psi_4^*\psi_2. \end{cases}$$

Il a été signalé par Uhlenbeck et Laporte ([3]), qui ont démontré la relation suivante

$$\text{(4)} \qquad \sum_1^3 \frac{\partial k_r}{\partial x_r} + \frac{1}{c}\frac{\partial k_4}{\partial t} = \frac{2\pi mc}{h} J,$$

dont la signification physique est immédiate avec notre interprétation ([4]).

On peut écrire un certain nombre de relations intéressantes entre ces 16 moyennes; signalons, en particulier, que l'invariant $\lambda = (mp)$, formé à partir du tenseur moment total, est donné par

$$\text{(5)} \qquad \lambda = (mp) = \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 + \mu_3\pi_3 = I.J,$$

I étant le premier invariant de Darwin

$$\text{(6)} \qquad I = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 - \psi_4^*\psi_4.$$

([1]) Nos notations ne présentent pas la symétrie habituelle parce que nous employons les α_r de Dirac, au lieu de Γ_r de Weyl.

([2]) *Proc. Royal Soc.*, 120, 1928, p. 621.

([3]) *Physical Review*, 37, 1931, p. 1380 et 1552.

([4]) Un cas particulier de cette relation, avec cette interprétation, avait été donné, peu de temps auparavant, par Tokuji Tanaka (*Z. Physik*, 69, 1931, p. 810), dans un travail qui se proposait précisément de retrouver les relations de Frenkel pour les moyennes du moment électrique et magnétique.

3. Appliquons ces considérations générales au cas particulier d'un électron libre, le seul envisagé jusqu'à présent. Pour un tel électron l'*invariant* J *est nul*, comme on le voit, en prenant une solution par ondes planes. Donc *la moyenne observable de la charge magnétique est nulle*, ce qui s'explique par le fait qu'il s'agit d'une grandeur oscillante de type spécial, ainsi que nous l'avons déjà indiqué. Il s'ensuit, par (5), que $\lambda = (mp) = 0$: donc, *les relations de Frenkel*, inexactes pour les opérateurs, *sont correctes pour leurs moyennes*. La relation (4) devient dans ce cas une *équation de continuité* pour le courant magnétique.

4. Nous avons $J = 0$. Donc la charge magnétique d'un électron de Dirac est *inobservable* en tous les cas, sur un électron libre. Doit-on en conclure que son étude soit absolument inutile? En aucune façon. En effet, *passons au cas où il existe un champ extérieur*. Pour écrire l'équation de Dirac dans ce cas on se laisse guider par des analogies avec la théorie classique. Or, cette partie de la théorie classique repose essentiellement sur l'hypothèse que l'*électron ne posséde absolument pas de charge magnétique*. Le problème qui se pose alors est de savoir si l'on a le droit de continuer à appliquer une équation, établie pour une particule *sans* charge magnétique, à l'électron de Dirac *qui*, *précisément*, *en possède une*.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 194, p. 836, séance du 7 mars 1932.)

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
93864-32 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

EXTRAIT DU

BULLETIN DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE

PURES ET APPLIQUÉES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE „ROI CAROL II"

BUCAREST

IIème ANNÉE (1931 — 1932). No. 3. Fasc. 6.

AL. PROCA

Ingénieur de l'École Polytechnique de Bucarest

Sur l'interprétation de l'opérateur α_4 de Dirac

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Sur l'interprétation de l'opérateur α_4 de Dirac*

1. La théorie relativiste de l'électron se caractérise par le choix d'un hamiltonien ayant, dans le cas de l'absence de champ, la forme suivante:

$$\text{(1)} \qquad H = c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc).$$

p_1, p_2, p_3 sont les opérateurs correspondant aux composantes de la quantité de mouvement de l'électron, considéré comme point matériel, m sa masse, c la vitesse de la lumière et α_r des opérateurs commutant avec les p_r et satisfaisant aux conditions

$$\text{(2)} \qquad \alpha_r \alpha_s + \alpha_s \alpha_r = 2\delta_{rs} . 1 \qquad (r, s = 1, 2, 3, 4).$$

D'autre part, les conditions générales de quanta s'écrivent,

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} p_r p_s - p_s p_r = 0 & x_r x_s - x_s x_r = 0 \\ p_r x_s - x_s p_r = \dfrac{h}{2\pi i} \delta_{rs} = \varkappa \delta_{rs} \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 étant les coordonnées de l'électron et en posant pour abréger $\dfrac{h}{2\pi i} = \varkappa$, où $i = \sqrt{-1}$. De plus les équations du mouvement donnent

$$(4) \qquad \varkappa \frac{d\xi}{dt} = \varkappa\dot{\xi} = H\xi - \xi H$$

quel que soit l'hamiltonien H, indépendant du temps, et quel que soit l'opérateur ξ.

2. Appliquons (4) à l'opérateur coordonnée x_r d'un l'électron de Dirac, en tenant compte de (3). On a

$$(5) \qquad \dot{x}_1 = c\alpha_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = c\alpha_2 \quad , \quad \dot{x}_3 = c\alpha_3.$$

Les opérateurs α_r de Dirac correspondent donc à la vitesse de l'électron ou plutôt aux dérivées des coordonnées par rapport au temps.

Breit, qui a écrit le premier ces relations[1]), a remarqué l'analogie qu'on peut en déduire entre l'hamiltonien (1) et la relation classique, donnant l'énergie propre mc^2 d'un électron, en relativité :

$$(6) \qquad mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dot{x}_1 \cdot \frac{m_0\dot{x}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dot{x}_2 \cdot \frac{m_0\dot{x}_2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dot{x}_3 \cdot \frac{m_0\dot{x}_3}{\sqrt{1-\beta^2}} + \sqrt{1-\beta^2} \cdot m_0c^2$$

$$\beta = \frac{v}{c} \,.$$

D'après cette manière de voir, que Schrödinger[2]) a adoptée, l'hamiltonien H correspond à l'énergie, les opérateurs moments p_r aux composantes de la quantité de mouvement $\frac{m_0\dot{x}_r}{\sqrt{1-\beta^2}}$, les opérateurs $c\alpha_r$ à la vitesse $\dot{x}_r$ $(r = 1, 2, 3)$ de l'électron dans l'espace ordinaire et $c\alpha_4$ *à la grandeur* $\sqrt{1-\beta^2}$. Il faut cependant remarquer que les relations

$$\dot{x}_r = c\alpha_r \qquad (r = 1, 2, 3)$$

[1]) Breit, Proc. Nat. Acad. Washington, 14 (1928), 553.
[2]) Schrödinger, Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. 24 (1930), 418.

découlent rigoureusement des principes de la mécanique quantique, tandis que la correspondance

$$(7) \qquad c\alpha_4 \succ \sqrt{1-\beta^2}$$

n'est admise qu'à la faveur d'une analogie, dont le caractère n'est nullement démonstratif. Aussi FOCK[1]) n'admet-il pas la correspondance (7). En comparant les équations du mouvement d'une particule dans un champ aux équations classiques, FOCK indique la correspondance

$$\sqrt{1-\beta^2} \succ mc^2 \mathrm{H}^{-1} \neq \alpha_4.$$

De son côté, N. R. SEN[2]) rejette la correspondance (7) et veut la remplacer par des relations rigoureuses. D'après lui, l'interprétation de α_4 résulte de l'équation

$$(s\mathrm{A}) = 2mc^2 . \alpha_4 + \mathrm{H}$$

où s est le vecteur spin et A un vecteur constant défini par

$$s_k \mathrm{H} + ic\,[\alpha p]_k = \mathrm{A}_k \quad . \quad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

Comme on le voit, l'accord est fait sur l'interprétation des α_1, α_2, α_3 ou de la vitesse tridimensionnelle ($\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$), mais il est loin d'être acquis en ce qui concerne l'opérateur α_4.

3. Or, il nous semble qu'on s'engage dans une mauvaise voie lorsqu'on essaie de trouver la signification de α_4, en partant d'analogies avec des équations contenant $\sqrt{1-\beta^2}$, ou *en général un radical quelconque.* Les analogies de ce genre peuvent nous induire en erreur d'autant plus facilement que leur établissement est contraire à l'esprit même du procédé de Dirac. En effet, une racine carrée multipliée par elle-même redonne la quantité sous le radical; mais cette propriété n'est pas caractéristique puisqu'elle est partagée par les facteurs obtenus par «linéarisation» à partir de cette même quantité. Par exemple le carré de l'énergie, H^2 est bien égal à

$$c_2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2);$$

[1]) FOCK, Z. Physik, 55 (1929) 127 Voir aussi
FOCK, Ibidem, 68 (1931) 531, ainsi que la discussion avec SCHRÖDINGER.
SCHRÖDINGER, Ibidem, 70 (1931), 808.
FOCK, Ibidem, 70 (1931), 811.

[2]) SEN, Indian Phys.-Math. Journal, II (1931) nº 1.

cependant, quand on passe aux opérateurs, l'énergie H ne correspond plus à

$$c\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2c^2}$$

mais bien à

$$c\,(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0 c).$$

On comprend bien ce que cela signifie; en même temps cela montre qu'il est téméraire de tirer des conclusions basées uniquement sur la considération d'analogies avec les radicaux, sans les étayer d'une autre manière.

4. Il est cependant facile d'arriver à une conclusion raisonnable. Prenons la correspondance (7) de Breit

$$c\alpha_4 \succ \sqrt{1 - \beta^2}$$

et remarquons *qu'en nombres ordinaires,* on a $ds = dt\,.\sqrt{1 - \beta^2}$, ds étant l'élément de la ligne d'Univers du mobile, ou, autrement dit, son temps propre. Breit rattacherait donc $c\alpha_4$ à $\frac{ds}{dt}$. Mais, *lorsqu'on passe aux opérateurs* on ne peut en aucune façon écrire $\frac{ds}{dt} = c\alpha_4$, comme pendant aux relations $\dot{x}_k = c\alpha_k$ ($k = 1, 2, 3$). En effet $\frac{ds}{dt}$ n'a plus aucun sens, ainsi que le remarque avec raison Fock [1]). Le temps propre est défini comme l'arc de la trajectoire d'Univers du mobile; la notion de trajectoire perdant son sens en mécanique quantique, il est par conséquent impossible de définir le temps propre de cette façon.

5. Cependant quand on pose le problème comme nous l'avons fait, la solution est immédiate. On voit que la principale difficulté réside dans l'absence d'une définition correcte de l'opérateur qui correspond au temps propre classique. Or, on a par définition, τ étant ce temps propre

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} c^2d\tau^2 &= c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad \text{ou} \\ c^2dt^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + c^2d\tau^2\,. \end{aligned}$$

Appliquons à (8) *le même processus de linéarisation* qui a servi à Dirac pour obtenir l'équation (1). Posons donc en passant aux opérateurs

[1]) Fock, Z. Physik 55 (1929), 129.

$$cdt = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 . cd\tau. \tag{9}$$

On peut l'écrire

$$c = \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2 + \alpha_3 \dot{x}_3 + \alpha_4 . c\dot{\tau}$$

et cette équation servira *à définir* un opérateur τ que nous appellerons l'opérateur «temps propre» de l'électron. Cette désignation est parfaitement légitime parce que:

a) les valeurs propres du carré de τ, lequel se calcule au moyen de (8), se confondent avec les valeurs du temps propre classique ;

b) cet opérateur se comporte de la même façon que le temps propre par rapport aux transformations de LORENTZ, c'est-à-dire *c'est un invariant.* En effet, par un raisonnement connu [1]), on peut déterminer la manière dont changent α_1, α_2, α_3, α_4 lorsqu'on applique une telle transformation. α_4 se transformant comme la composante de temps d'un quadrivecteur, on déduit de (9) qu'il en est de même de $\dot{\tau}$; ensuite H se transformant de la même manière on conclut de

$$\varkappa\dot{\tau} = H\tau - \tau H$$

que τ reste invariant.

Quoi qu'il en soit, ayant ainsi défini un opérateur temps propre τ, la relation (9) nous donne, en tenant compte de (5)

$$\alpha_4 . c\dot{\tau} = -2c$$

ou

$$\boxed{\alpha_4 = -\frac{1}{2}\dot{\tau}} \; . \tag{10}$$

Ceci fournit la signification de α_4; posons $\lambda = -\frac{1}{2}c\tau$, on aura

$$\dot{\lambda} = c\alpha_4.$$

La même correspondance qui existe entre les α_r et les x_r ($r = 1, 2, 3$), a lieu entre α_4, et l'opérateur λ lequel se confond à *une constante absolue près avec le temps propre de l'électron considéré.*

[1]) Donné en premier par J. v. NEUMANN, Z. Physik 48 (1928) p. 868.

6. En résumé on peut arriver à une interprétation raisonnable de α_4, en utilisant l'opérateur «temps propre», qui semble correspondre le mieux à la variable classique du même nom. Il s'avère que cet opérateur s'obtient par une «linéarisation» de la forme métrique fondamentale et suggère que c'est de cette manière qu'il faudra vraisemblablement étudier le groupe de LORENTZ de façon à éviter les objections de SCHRÖDINGER [1]) concernant le fait que les formules de transformation renferment à la fois les coordonnées et la vitesse, ce qui est inadmissible.

Remarquons en outre que la façon toute naturelle dont s'introduit ici cette linéarisation justifie jusqu'à un certain point l'espoir qu'on pourrait mettre dans le développement d'une géométrie à métrique matricielle, ayant comme forme fondamentale la forme (9) ou une autre analogue, mais plus générale. Nous sommes ainsi arrivés par un curieux détour à une idée qui a déjà été émise par IWANENKO [2]) et développée par IWANENKO et FOCK [3]) et par FOCK [4]), mais qui n'a pas donné, semble-t-il, tout ce qu'on pouvait attendre d'elle.

L'introduction de l'opérateur temps propre soulève un certain nombre de questions que nous examinerons dans une note ultérieure.

Manuscrit reçu le 26 Septembre 1931.

[1]) SCHRÖDINGER, Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. III (1931) p. 72.

[2]) IWANENKO, C. R. de l'Acad. Sc. de l'URSS. 1929, p. 73.

[3]) IWANENKO et FOCK, Z. Physik, 54 (1929), 798;
C. R. Paris, 188 (1929) 1470.

[4]) FOCK, Z. Physik, 57 (1929) 261;
C. R. Paris, 189 (1929), 25;
J. de Physique, 10 (1929) 392.

QUELQUES OBSERVATIONS CONCERNANT UN ARTICLE INTITULÉ « SUR L'ÉQUATION DE DIRAC » (¹)

Par Al. PROCA.
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur précise, du point de vue mathématique la relation qui existe entre les quatre composantes classiques de la fonction d'onde de Dirac, et les seize composantes introduites dans l'article cité.

1. Position du problème. — Soit H l'hamiltonien de l'électron de Dirac. On interprète généralement l'équation symbolique de Dirac

$$F\psi \equiv \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} + H\psi = 0 \tag{1}$$

comme l'équivalent de quatre équations aux dérivées partielles entre les quatre composantes de ψ. Cela revient au fond à admettre que ψ est une matrice à une seule colonne et $F\psi$ un produit matriciel.

L'idée fondamentale de l'article cité consiste en l'observation que ψ étant inconnue dans l'équation $F\psi = 0$ on ne sait rien *à priori* sur le nombre de ses composantes ; ψ doit donc être en général considéré comme une matrice à quatre lignes et quatre colonnes. On peut observer que F est un quadriquaternion ; ψ doit donc être, lui aussi, un quadriquaternion et l'expression $F\psi$ sera alors simplement le produit *algébrique* de F et de ψ.

Le but de la présente note est de mettre en évidence les différences qui existent entre la manière classique de procéder et celle proposée dans l'article cité, et de préciser ainsi le caractère de la généralisation obtenue. Accessoirement nous montrerons comment on peut, en utilisant les quadriquaternions, retomber sur le cas particulier qui conduit aux résultats classiques de Dirac ; en effet le ψ classique, ensemble de deux spineurs, peut parfaitement être représenté par un *quadriquaternion à restrictions*, c'est-à-dire par un quadriquaternion dont les composantes sont soumises à certaines conditions. Il s'agit précisément de trouver ces conditions et de leur donner une forme simple.

2. Changement de base. — Le système des quadriquaternions est défini par 16 quelconques d'entre eux, qui forment ce qu'on appelle une *base*. Jusqu'à présent nous avions choisi comme base les 16 *unités* suivantes (²) :

$$\begin{gathered}1, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_3\alpha_1, \quad \alpha_4\alpha_1, \quad \alpha_4\alpha_2, \quad \alpha_4\alpha_3, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_2\alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_3\alpha_4\alpha_1, \quad \alpha_4\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,\end{gathered}$$

où les α sont définis par

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

(¹) *Journal de Physique*, t. 1 (1930), p. 235.
(²) Nous utilisons ici la notation généralement adoptée pour les matrices de Dirac.

Toute combinaison linéaire de ces nombres est un quadriquaternion et peut être prise comme base. Or, d'après un théorème tout à fait général, le système simple d'ordre $16 = 4^2$ que forment les quadriquaternions, peut se définir au moyen des 16 unités e_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) idempotentes, telles que

$$\left.\begin{aligned} e_{ik}e_{lm} &= 0 \\ e_{ik}\cdot e_{kj} &= e_{ij}. \end{aligned} \qquad i, k \neq l, m \right\} \tag{3}$$

D'après ce théorème, il existe donc des combinaisons linéaires des α satisfaisant à (3), et inversement, des combinaisons linéaires des e_{ik} satisfaisant à (2). Il est facile de former effectivement une telle combinaison. Prenons, en effet :

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}} \\ \alpha_1 = e_{14} + e_{23} + e_{32} + e_{41} & \alpha_3 = e_{13} - e_{24} + e_{31} - e_{42} \\ \alpha_2 = -\mathbf{i}e_{14} + \mathbf{i}e_{23} - \mathbf{i}e_{32} + \mathbf{i}e_{41} & \alpha_4 = e_{11} + e_{22} - e_{33} - e_{44} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Les α_k définis par (4) satisfont à (2) si l'on tient compte de (3).

La solution (4) n'est évidemment pas la seule : les nombres $S^{-1}\alpha_k S$ satisfont également à (2), les α_k étant égaux à (4) et S étant un quadriquaternion quelconque de la forme $S = \Sigma S_{ik}e_{ik}$.

Le système d'unités (3) a une interprétation extrêmement simple. Les matrices ayant des éléments nuls partout sauf au croisement de la i[ième] ligne avec la k[ième] colonne, satisfont à (3) et peuvent donc représenter les unités (3). Le passage des α aux e_{ik} est donc parallèle à la représentation matricielle des α_k.

Si les e_{ik} sont représentés par de telles matrices, (4) représentent justement les matrices des α_k dans la représentation dans laquelle α_4 est diagonale ; par exemple

$$\alpha_3 = e_{13} - e_{24} + e_{31} - e_{42} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le système des e_{ik} n'a pas seulement l'avantage d'être plus général ; il est aussi d'un emploi beaucoup plus commode [1].

En partant des expressions (4) on peut écrire toutes les unités α en fonction des e_{ik} et vice-versa. On a, en effectuant les calculs :

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}} \\ \alpha_1 = e_{14} + e_{23} + e_{32} + e_{41} & \alpha_3 = e_{13} - e_{24} + e_{31} - e_{42} \\ \alpha_2 = -\mathbf{i}(e_{14} - e_{23} + e_{32} - e_{41}) & \alpha_4 = e_{11} + e_{22} - e_{33} - e_{44} \\ & \\ \alpha_1\alpha_2 = \mathbf{i}(e_{11} - e_{22} + e_{33} - e_{44}) & \alpha_4\alpha_1 = e_{14} + e_{23} - e_{32} - e_{41} \\ \alpha_2\alpha_3 = \mathbf{i}(e_{12} + e_{21} + e_{34} + e_{43}) & \alpha_4\alpha_2 = -\mathbf{i}(e_{14} - e_{23} - e_{32} + e_{41}) \\ \alpha_3\alpha_1 = e_{12} - e_{21} + e_{34} - e_{43} & \alpha_4\alpha_3 = e_{13} - e_{24} - e_{31} + e_{42} \\ & \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \mathbf{i}(e_{13} + e_{24} + e_{31} + e_{42}) & \alpha_3\alpha_4\alpha_1 = -(e_{12} - e_{21} - e_{34} + e_{43}) \\ \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \mathbf{i}(e_{12} + e_{21} - e_{34} - e_{43}) & \alpha_4\alpha_1\alpha_2 = \mathbf{i}(e_{11} - e_{22} - e_{33} + e_{44}) \\ \multicolumn{2}{c}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\mathbf{i}(e_{13} + e_{24} - e_{31} - e_{42}).} \end{array}\right\} \tag{5}$$

Tout quadriquaternion peut s'exprimer maintenant en fonction des e_{ik}.

[1] F. Sauter, *Z. Physik.*, **63** (1930), p. 803 ; **64** (1930), p. 295 ; **69** (1931), p. 742, employant au fond ce système, sans le mentionner explicitement, a résolu élégamment un certain nombre de problèmes sans utiliser l'expression matricielle des α de Dirac.

Par exemple, prenons celui qui apparaît dans l'équation de Dirac écrite sous la forme classique :

$$F = p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc.$$

On aura :

$$\left.\begin{aligned} F = \quad & e_{11}(p_0 + mc) + e_{13}.p_3 + e_{14}(p_1 - \mathbf{i}p_2) + \\ & + e_{22}(p_0 + mc) + e_{23}(p_1 + \mathbf{i}p_2) - e_{24}.p_3 + \\ & + e_{31}.p_3 + e_{32}(p_1 - \mathbf{i}p_2) + e_{33}(p_0 - mc) + \\ & + e_{41}(p_1 + \mathbf{i}p_2) - e_{42}.p_3 + e_{44}(p_0 - mc). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

3. **Formules générales**. — Un quadriquaternion quelconque ψ s'écrit :

$$\psi = \sum \psi_{rs}.e_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, 3, 4), \qquad (7)$$

les ψ_{rs} étant des *nombres* ordinaires. Il sera commode, pour la suite, de séparer les indices et d'écrire

$$\left.\begin{aligned} & \psi = \sum_k (e_{1k}\psi_{1k} + e_{2k}\psi_{2k} + e_{3k}\psi_{3k} + e_{4k}\psi_{4k}) = \sum_k C_k \\ \text{ou} \quad & \psi = \sum_k (e_{i1}\,\psi_{i1} + e_{i2}\,\psi_{i2} + e_{i3}\,\psi_{i3} + e_{i4}\,\psi_{i4}) = \sum_i L_i \\ \text{donc} \quad & \psi = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Dans chaque C_s tous les e ont le second indice égal à s, et dans chaque L_r tous les e ont leur premier indice égal à r.

On a, en tenant compte de (3) :

$$\psi e_{ik} = C_i e_{ik} \qquad e_{rs}\psi = e_{rs}.L_s \qquad (9)$$

et

$$e_{rs}.\psi.e_{ik} = e_{rk}.\psi_{si}. \qquad (10)$$

Comme cas particulier, on peut prendre

$$e_{1s}.\psi.e_{i1} = e_{11}.\psi_{si}$$

qui donne, au facteur e_{11} près, la valeur des composantes ψ_{si}.

Si l'on veut se débarrassser de ce facteur on prendra :

$$\psi_{si} = e_{1s}.\psi.e_{i1} + e_{2s}.\psi.e_{i2} + e_{3s}.\psi.e_{i3} + e_{4s}.\psi.e_{i4} = \sum_l e_{ls}.\psi.e_{il}.$$

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \psi = \sum_k C_k = \sum_k (e_{11}.\psi_{1k}.e_{1k} + e_{21}.\psi_{2k}.e_{1k} + e_{31}\psi_{3k}e_{1k} + e_{41}\psi_{4k}e_{1k}) = \\ = \sum_k (e_{11}\psi_{1k} + e_{21}\psi_{2k} + e_{31}\psi_{3k} + e_{41}\psi_{4k})e_{1k}. \end{aligned}$$

Posons

$$K_r = e_{11}\psi_{1r} + e_{21}\psi_{2r} + e_{31}\psi_{3r} + e_{41}\psi_{4r}, \qquad (11)$$

on aura :

$$\psi = K_1.e_{11} + K_2.e_{12} + K_3.e_{13} + K_4.e_{14}. \qquad (12)$$

4. **Equation symbolique de Dirac; interprétation générale**. — Cela étant, considérons l'équation de Dirac, que nous écrirons, pour abréger

$$F\psi = (p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc)\psi = 0. \qquad (13$$

$F = p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$ est un quadriquaternion qui s'écrit dans la base e_{ik} sous la forme $F = \Sigma F_{ik}.e_{ik}$; *les* F_{ik} *sont donnés par les expressions* (6).

Considérons l'expression (13) dans son sens le plus général : ψ doit être un quadriquaternion à 16 composantes de la forme

$$\psi = \psi'_0 + \alpha_1 \psi'_1 + \alpha_2 \psi'_2 + \cdots$$

et $F\psi$ un produit algébrique. En multipliant F par ψ et en annulant les coefficients des 16 unités hypercomplexes α_r, on obtient 16 équations, qui ont été indiquées dans notre article précédent.

Par addition après multiplication avec des facteurs convenables on peut voir qu'*elles se réduisent en fait, à quatre équations distinctes.*

Ce résultat, indiqué dans l'article cité, n'est cependant pas commode à obtenir en partant de la représentation α, mais il apparaît immédiatement si F et ψ sont écrits au moyen de la base e_{ik}. En effet, écrivons F et ψ comme suit :

$$\left.\begin{aligned} F &= \sum_{r=1}^{4} (e_{r1}F_{r1} + e_{r2}F_{r2} + e_{r3}F_{r3} + e_{r4}F_{r4}) = \sum_{r=1}^{4} \Lambda_r \\ \psi &= \sum_{k=1}^{4} (e_{1k}\psi_{1k} + e_{2k}\psi_{2k} + e_{3k}\psi_{3k} + e_{4k}\psi_{4k}) = \sum_{k=1}^{4} C_k. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

En tenant compte de (3), on voit que les termes rectangles se détruisent et il reste

$$F\psi = \sum_{r,k} \Lambda_r C_k = \sum_{r,k} e_{rk}(F_{r1}\psi_{1k} + F_{r2}\psi_{2k} + F_{r3}\psi_{3k} + F_{r4}\psi_{4k}). \tag{15}$$

Les 16 équations équivalentes à (13) se partagent donc en quatre groupes de 4 équations chacun

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.}\ \ F_{r1}\psi_{11} + F_{r2}\psi_{21} + F_{r3}\psi_{31} + F_{r4}\psi_{41} = 0 & (r = 1, 2, 3, 4) \\ \text{II.}\ \ F_{r1}\psi_{12} + F_{r2}\psi_{22} + F_{r3}\psi_{32} + F_{r4}\psi_{42} = 0 & (r = 1, 2, 3, 4) \\ \text{III.}\ \ F_{r1}\psi_{13} + F_{r2}\psi_{23} + F_{r3}\psi_{33} + F_{r4}\psi_{43} = 0 & (r = 1, 2, 3, 4) \\ \text{IV.}\ \ F_{r1}\psi_{14} + F_{r2}\psi_{24} + F_{r3}\psi_{34} + F_{r4}\psi_{44} = 0 & (r = 1, 2, 3, 4) \end{array}\right\} \tag{16}$$

Il est inutile d'insister, ce calcul consistant à multiplier lignes par colonnes les matrices représentatives de F et de ψ. On peut en tirer cependant des résultats intéressants.

Remarquons que les quatre équations du groupe I sont distinctes en général ; mais *les équations des autres groupes n'en diffèrent que par le nom des inconnues.* De plus ces équations sont homogènes.

Il est donc clair qu'il suffira de trouver la solution *générale* de *quatre* équations seulement, pour résoudre l'équation générale de Dirac, avec le ψ à 16 composantes. Soit

$$\psi_{11} = \psi'_{11} = A_1, \qquad \psi_{21} = \psi'_{21} = A_2, \qquad \psi_{31} = \psi'_{31} = A_3, \qquad \psi_{41} = \psi'_{41} = A_4 \tag{17}$$

la solution *générale* des équations du groupe I ; elle dépend d'un certain nombre de constantes et de fonctions arbitraires. Les solutions des autres groupes différeront de celle-ci uniquement par le choix de ces constantes et fonctions arbitraires.

Deux cas particuliers sont intéressants. Le premier est celui où l'on choisit *les mêmes fonctions arbitraires* pour les solutions de tous les quatre groupes. On a alors

$$\psi_{11} = \psi_{12} = \psi_{13} = \psi_{14} = \psi'_{11} = A_1, \text{ etc.},$$

c'est-à-dire

$$\psi_{r1} = \psi_{r2} = \psi_{r3} = \psi_{r4} = A_r \qquad (r = 1, 2, 3, 4) \tag{18}$$

et le ψ général s'écrit

$$\left.\begin{aligned}\psi_N = (e_{11} + e_{12} + e_{13} + e_{14}) A_1 + \\ + (e_{21} + e_{22} + e_{23} + e_{24}) A_2 + \\ + (e_{31} + e_{32} + e_{33} + e_{34}) A_3 + \\ + (e_{41} + e_{42} + e_{43} + e_{44}) A_4.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Nous appellerons ψ_N une solution « normale ».

Mais on peut encore prendre comme solution du système (16) la solution (17) du premier groupe et pour les autres inconnues ψ_{uv} ($u = 1, 2, 3, 4$; $v = 2, 3, 4$) *la valeur zéro*, qui est manifestement une solution de (16). Le ψ correspondant est alors

$$\psi_D = e_{11} A_1 + e_{21} A_2 + e_{31} A_3 + e_{41} A_4. \tag{20}$$

Dans la représentation par matrices le ψ du premier cas, (19), est une matrice dont toutes les colonnes sont identiques, tandis que celui du deuxième cas est une matrice dont les éléments des trois dernières colonnes sont nuls. On pourrait envisager évidemment des cas intermédiaires.

Revenons au cas général. Pour trouver la solution générale il suffit donc de résoudre dans toute sa généralité le système du groupe I et trouver les quatre fonctions inconnues A_1, A_2, A_3, A_4. Or, ce système d'équations fondamentales *est identique au système de Darwin*, c'est-à-dire aux équations ordinaires qu'on déduit de l'équation symbolique par le procédé de Dirac. Il suffit pour s'en assurer d'écrire explicitement les équations du groupe I, compte tenu des valeurs de F_{ik}, qui sont données par (6).

Les A_1, A_2, A_3, A_4 sont donc identiques à ce qu'on appelle *les quatre composantes classiques de la fonction d'onde*. Il suffira de connaître *dans toute leur généralité* ces quatre composantes, pour en déduire la solution générale. Mais du fait qu'il n'y a que quatre grandeurs qui déterminent ψ ne découle en aucune façon une expression définie pour celui-ci ; cette expression peut être (19), (20) ou une autre.

5. **Equation symbolique de Dirac. Interprétation classique.** — Les équations de Darwin se déduisent de l'équation $(F\psi) = 0$ en considérant F comme une matrice et en définissant le « produit » $(F\psi)$ au moyen de quatre composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 de la fonction d'onde par les relations de définition du produit matriciel $(F\psi)$:

$$(F\psi) = \sum_{k=1}^{4} F_{ik}\psi_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{21}$$

Avec ces notations si l'on écrit

$$\psi = e_{11}\psi_1 + e_{21}\psi_2 + e_{31}\psi_3 + e_{41}\psi_4 \tag{22}$$

l'équation

$$F\psi = 0$$

où $F\psi$ représente maintenant un *produit algébrique* entre les quadriquaternions $F = \Sigma_{ik} e_{ik}$ et (21), conduit aux équations de Darwin. Ainsi, pour arriver aux résultats classiques de Dirac il est inutile de passer par la définition (21) ; il suffit d'écrire l'équation générale sous forme d'un produit algébrique de deux quadriquaternions F et ψ

$$F\psi = 0$$

et *de restreindre la généralité de* ψ, dont toutes les composantes, sauf celles de la forme ψ_{n1} doivent être nulles :

$$\psi = e_{11}\psi_{11} + e_{21}\psi_{21} + e_{31}\psi_{31} + e_{41}\psi_{41}.$$

Les quatre composantes non nulles sont les composantes de Dirac.

Mais remarquons que, d'après (3), si φ est un quadriquaternion quelconque on aura toujours

$$\varphi e_{11} = e_{11}\varphi_{11} + e_{21}\varphi_{21} + e_{31}\varphi_{31} + e_{41}\varphi_{41}.$$

Donc l'équation

$$F\varphi e_{11} = 0$$

où F est connu et φ un quadriquaternion *général* inconnu, nous conduira aux équations de Darwin entre les composantes φ_{r1}, les autres composantes étant arbitraires.

La solution de Dirac n'est donc qu'un cas particulier de la solution générale; elle correspond à (20). Nous pouvons enfin tirer la règle pratique suivante : Pour résoudre l'équation *classique* de Dirac, il suffit de trouver une solution de l'équation générale

$$F\psi = 0$$

(où le premier membre est un produit de deux quadriquaternions) *et de la multiplier à droite par* e_{rr}, *r étant l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4*. Cette règle semble réduire le simple au compliqué; quelquefois cependant la symétrie plus grande de l'équation générale rend le calcul et la notation plus faciles et permettent en tout cas de mieux saisir les rapports entre les diverses grandeurs du problème.

Passons maintenant aux α. — Posons

$$\psi = \varphi e_{11} = e_{11}\psi_{11} + e_{21}\psi_{21} + e_{31}\psi_{31} + e_{41}\psi_{41}$$

ou encore, en remplaçant les e par les α et en posant $\psi_{i1} = \psi_i$

$$\psi = \frac{1}{4}\left[(\psi_1 + \alpha_3\psi_3)\alpha_1 + (\psi_4 - \alpha_3\psi_2)\right](1 - \alpha_4)(\alpha_1 - i\alpha_2).$$

suffira de *multiplier algébriquement* cette expression avec

$$F = p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$$

et d'annuler les coefficients, pour résoudre suivant la manière même de Dirac son équation et retrouver les quatre composantes classiques [1] ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4.

Ce procédé n'a pas seulement l'avantage de ne pas préciser la nature des opérateurs α [2]; il permet d'écrire le premier membre $F\psi$ comme un produit algébrique, forme beaucoup plus maniable que celle de Dirac. C'est de cette propriété que nous aurons besoin ultérieurement.

6. **Expressions adjointes et calcul des moyennes.** — Une fois l'équation des ondes résolue, on peut calculer les densités des moyennes physiquement intéressantes, comme le

(1) Voir par exemple F. Sauter, *loc. cit.*

(2) Plusieurs auteurs se sont posé ce problème; cf. Sauter, *loc. cit.* Temple, *Proc. Roy. Soc.* A, **127** (1930), p. 339.

courant, etc. Celles-ci se présentent, comme l'a montré Dirac, sous la forme d'un produit *symbolique* de la forme ($\varphi\ \xi\ \psi$), où ξ est un opérateur et φ la grandeur imaginaire conjuguée de ψ.

Nous allons écrire ces grandeurs comme des produits *algébriques*. Nous verrons que, toute question de principe mise à part, le ψ à 16 composantes présente des avantages marqués, au point de vue de la rapidité et commodité des calculs, même quand on se limite à la conception habituelle.

Considérons d'abord un ψ à 16 composantes

$$\psi = \sum \psi_{ik} e_{ik}.$$

Nous définirons le quadriquaternion « adjoint » Φ

$$\Phi = \sum \Phi_{ik} e_{ik} \tag{30}$$

par la condition

$$\Phi_{ik} = \psi_k{}^*. \tag{31}$$

L'astérisque désigne la quantité complexe conjugué; si ψ était une matrice, Φ serait la matrice transposée et conjuguée. Φ satisfait à une équation qu'il est facile d'écrire en partant de l'équation de Dirac, mais que nous laisserons de côté pour le moment.

Si :

$$\psi = \sum_{k=1}^{4}(e_{1k}\psi_{1k}+e_{2k}\psi_{2k}+e_{3k}\psi_{3k}+e_{4k}\psi_{4k}) \quad \text{on aura} \quad \Phi = \sum_{k=1}^{4}(e_{k1}\Phi_{k1}+e_{k2}\Phi_{k2}+e_{k3}\Phi_{k3}+e_{k4}\Phi_{k4}). \tag{31'}$$

Considérons maintenant la solution particulière de Dirac :

$$\psi_D = e_{11}A_1 + e_{21}A_2 + e_{31}A_3 + e_{41}A_4, \tag{20}$$

les A_r étant les composantes classiques de la fonction d'onde. Le φ correspondant sera

$$\Phi_D = e_{11}A_1{}^* + e_{12}A_2{}^* + e_{13}A_3{}^* + e_{14}A_4{}^*. \tag{32}$$

Une autre solution particulière est celle qui correspond à une matrice ayant toutes les colonnes identiques. Nous l'avons appelée solution « normale »; les diverses fonctions arbitraires sont choisies égales entre elles.

Le ψ « normal » est

$$\left.\begin{aligned}\psi_N = {} & (e_{11}+e_{12}+e_{13}+e_{14})A_1 + \\ & + (e_{21}+e_{22}+e_{23}+e_{24})A_2 + \\ & + (e_{31}+e_{32}+e_{33}+e_{34})A_3 + \\ & + (e_{41}+e_{42}+e_{43}+e_{44})A_4.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

et le Φ « normal » :

$$\left.\begin{aligned}\Phi_N = {} & (e_{11}+e_{21}+e_{31}+e_{41})A_1{}^* + \\ & + (e_{12}+e_{22}+e_{32}+e_{42})A_2{}^* + \\ & + (e_{13}+e_{23}+e_{33}+e_{43})A_3{}^* + \\ & + (e_{14}+e_{24}+e_{34}+e_{44})A_4{}^*.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Considérons quelques formules intéressantes; dans ce qui suit les produits considérés sont toujours des produits algébriques. On a, par exemple,

$$\Phi_D e_{rs} \psi_D = A_r{}^* e_{1s} \psi_D = e_{11} A_r{}^* A_s \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\Phi_N e_{rs}\psi_N &= (e_{1s}+e_{2s}+e_{3s}+e_{4s})A_r^*\psi_N\\ &= (e_{1s}+e_{2s}+e_{3s}+e_{4s})(e_{s1}+e_{s2}+e_{s3}+e_{s4})A_r\ A_s\\ &= A_r^*A_s\sum_{r,s=1}^{4} e_{rs},\end{aligned} \tag{35}$$

et en général, d'après (31')

$$\Phi e_{rs}\psi = \left(\sum_{k=1}^{4} e_{ks}\Phi_{kr}\right)\left(\sum_{r=1}^{4} e_{si}\psi_{si}\right) = \sum_{k,i=1}^{4} e_{ki}\psi_{rk}^*\psi_{si}. \tag{36}$$

Les relations (34), (35), (36) sont très intéressantes parce qu'elles nous permettent de calculer immédiatement les covariants quadratiques bien connus au moyen desquels on compare la théorie à l'expérience.

Prenons par exemple, une des composantes du courant; symboliquement, Dirac la calcule par le produit $(\varphi\,\alpha_1\,\psi)$. Nous avons vu qu'on arrive au même résultat si l'on effectue *algébriquement* le même produit entre quadriquaternions, à condition de prendre pour Φ et ψ une solution particulière, à savoir Φ_D et ψ_D. Or, d'après (4), on a :

$$\alpha_1 = e_{14}+e_{23}+e_{32}+e_{41},$$

donc

$$\Phi_D\alpha_1\psi_D = \Phi_D e_{14}\psi_D + \Phi_D e_{23}\psi_D + \Phi_D e_{32}\psi_D + \Phi_D e_{41}\psi_D,$$

ou, d'après (34) :

$$\Phi_D\alpha_1\psi_D = (A_1^*A_4 + A_2^*A_3 + A_3^*A_2 + A_4^*A_1)e_{11}$$

Or, la quantité entre crochets est justement la première composante classique du courant, à un facteur numérique près. De même, avec la solution « normale », Φ_N et ψ_N

$$\Phi_N\alpha_1\psi_N = (A_1^*A_4 + A_2^*A_3 + A_3^*A_2 + A_4^*A_1)(\Sigma\, e_{ik}).$$

Il est alors extrêmement facile de calculer les composantes classiques du courant, du spin, etc., c'est-à-dire les densités des *moyennes* des 16 opérateurs $(\varphi\,\alpha_1\,\psi)$,... ou en général d'un opérateur quelconque.

Soit ξ un pareil opérateur; dès qu'on a son expression en fonction des e_{ik} (par le tableau (4), par exemple) on peut immédiatement en déduire l'expression de $\Phi_D\,\xi\,\psi_D$ ou $\Phi_N\xi\psi_N$ en fonction des produits $A_i^*\,A_k$ *; il suffit de remplacer dans l'expression de* ξ

e_{ik} par $A_i^*A_k.e_{11}$ pour avoir $\Phi_D\xi\psi_D$
e_{ik} par $A_i^*A_k.e_{ik}$ pour avoir $\Phi_N\xi\psi_N$.

Par exemple, on déduit de (4)

$$\left.\begin{aligned} -\ \mathbf{i}\,\alpha_2\alpha_3\alpha_4 &= e_{12}+e_{21}-e_{34}-e_{43}\\ -\ \ \alpha_3\alpha_4\alpha_1 &= e_{12}-e_{21}-e_{34}+e_{43}\\ -\ \mathbf{i}\,\alpha_4\alpha_1\alpha_2 &= e_{11}-e_{22}-e_{33}+e_{44}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

On a donc, immédiatement

$$\left.\begin{aligned} -\ \mathbf{i}\,\Phi_N(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\psi_N &= (A_1^*A_2 + A_2^*A_1 - A_3^*A_4 - A_4^*A_3).\Sigma\, e_{ik}\\ -\ \ \Phi_N(\alpha_3\alpha_4\alpha_1)\psi_N &= (A_1^*A_2 - A_2^*A_1 - A_3^*A_4 + A_4^*A_3).\Sigma\, e_{ik}\\ -\ \mathbf{i}\,\Phi_N(\alpha_4\alpha_1\alpha_2)\psi_N &= (A_1^*A_1 - A_2^*A_2 - A_3^*A_3 + A_4^*A_4).\Sigma\, e_{ik}\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Les expressions compliquées de la théorie de Dirac s'écrivent avec cette règle, immédiatement et leur façon de se comporter par rapport aux transformations de Lorentz se déduit beaucoup plus aisément qu'on ne pouvait le faire jusqu'à présent.

7. **Cas général.** — Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les quatre composantes de la fonction d'onde classique de Dirac. Calculons l'expression

$$N = 4 \sum_{r,s=1}^{4} e_{rs} A_r A_s^* \tag{39}$$

en remplaçant les e_{rs} par leurs expressions en fonction des α, d'après les relations (4). On a, ainsi qu'on peut facilement le vérifier en utilisant les règles que nous avons données,

$$\begin{aligned} N = 4 \Sigma e_{rs} A_r A_s^* = \\ = \ & (A_1A_1^*+A_2A_2^*+A_3A_3^*+A_4A_4^*)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4(\mathbf{i}A_1A_3^*+\mathbf{i}A_2A_4^*-\mathbf{i}A_3A_1^*-\mathbf{i}A_4A_2^*)+ \\ & +\alpha_1(A_1A_4^*+A_2A_3^*+A_3A_2^*+A_4A_1^*)+\mathbf{i}\alpha_2\alpha_3\alpha_4(-A_1A_2^*-A_2A_1^*+A_3A_4^*+A_4A_3^*)+ \\ & +\alpha_2(\mathbf{i}A_1A_4^*-\mathbf{i}A_2A_3^*+\mathbf{i}A_3A_2^*-\mathbf{i}A_4A_1^*)+\mathbf{i}\alpha_3\alpha_4\alpha_1(\mathbf{i}A_1A_2^*-\mathbf{i}A_2A_1^*-\mathbf{i}A_3A_4^*+\mathbf{i}A_4A_3^*)+ \\ & +\alpha_3(A_1A_3^*-A_2A_4^*+A_3A_1^*-A_4A_2^*)+\mathbf{i}\alpha_4\alpha_1\alpha_2(-A_1A_1^*+A_2A_2^*+A_3A_3^*-A_4A_4^*)+ \\ & +\alpha_4(A_1A_1^*+A_2A_2^*-A_3A_3^*-A_4A_4^*)+\mathbf{i}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(-A_1A_3^*-A_2A_4^*-A_3A_1^*-A_4A_2^*)+ \\ & +\mathbf{i}\alpha_1\alpha_2(-A_1A_1^*+A_2A_2^*-A_3A_3^*+A_4A_4^*)+\mathbf{i}\alpha_4\alpha_1(-\mathbf{i}A_1A_4^*-\mathbf{i}A_2A_3^*+\mathbf{i}A_3A_2^*+\mathbf{i}A_4A_1^*)+ \\ & +\mathbf{i}\alpha_2\alpha_3(-A_1A_2^*-A_2A_1^*-A_3A_4^*-A_4A_3^*)+\mathbf{i}\alpha_4\alpha_2(A_1A_4^*-A_2A_3^*-A_3A_2^*+A_4A_1^*)+ \\ & +\mathbf{i}\alpha_3\alpha_1(-\mathbf{i}A_1A_2^*+\mathbf{i}A_2A_1^*-\mathbf{i}A_3A_4^*+\mathbf{i}A_4A_3^*)+\mathbf{i}\alpha_4\alpha_3(-\mathbf{i}A_1A_3^*+\mathbf{i}A_2A_4^*+\mathbf{i}A_3A_1^*-\mathbf{i}A_4A_2^*) \end{aligned} \tag{40}$$

Toutes les quantités écrites entre parenthèses sont réelles; elles représentent les 16 covariants quadratiques de la théorie classique de Dirac, c'est-à-dire les densités des moyennes des **16** opérateurs indépendants formés en multipliant les α_k. (On voit que pour obtenir des quantités réelles il faut mettre en évidence un $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ dans les unités $\alpha_1\alpha_2$, ... *dont les carrés sont égaux à* -1; de cette façon les carrés de tous les coefficients des parenthèses sont égaux à $+1$. Cette règle est à retenir.)

On peut donc obtenir *à la fois* toutes les moyennes relatives à l'électron, *donc toutes les quantités susceptibles de mesure*, en partant simplement des composantes du quadriquaternion $N = 4\,\Sigma e_{rs}\, A_r\, A_s^*$.

Cela étant, prenons la solution classique ψ_D de l'équation générale; on a

$$\psi_D \Phi_D = \left(\sum_r e_{r1} A_r\right)\left(\sum_s e_{1s} A_s^*\right) = \sum_{r,s=1}^{4} e_{rs} A_r A_s^* = \frac{N}{4}. \tag{41}$$

Prenons la solution normale; on a également

$$\begin{aligned} \psi_N \Phi_N &= \left[\sum_{r=1}^{4} (e_{r1} + e_{r2} + e_{r3} + e_{r4}) A_r\right]\left[\sum_{s=1}^{4} (e_{s1} A_1^* + e_{s2} A_2^* + e_{s3} A_3^* + e_{s4} A_4^*)\right] \\ &= \sum_r e_{rq} (e_{q1} A_1^* + e_{q2} A_2^* + e_{q3} A_3^* + e_{q4} A_4^*) A_r \\ &= \sum_r (e_{r1} A_1^* + e_{r2} A_2^* + e_{r3} A_3^* + e_{r4} A_4^*) A_r \\ &= \sum_{r,s=1}^{4} e_{rs} A_r A_s^* = \frac{N}{4}. \end{aligned} \tag{42}$$

Pour calculer les grandeurs quadratiques d'un électron de Dirac il suffit donc de prendre les composantes du produit $\psi_D\, \Phi_D = \psi_N\, \Phi_N$; on pourrait appeler ces composantes les « tensions » de l'électron.

Passons maintenant à la solution générale. Ici nous n'avons plus quatre fonctions d'onde distinctes A_r, mais bien seize ; nous savons cependant qu'elles satisfont, par groupes de quatre, aux équations de Darwin. On a, en général :

$$\psi = \sum_k (e_{1k}\psi_{1k} + e_{2k}\psi_{2k} + e_{3k}\psi_{3k} + e_{4k}\psi_{4k})$$

$$\Phi = \sum_i (e_{i1}\Phi_{i1} + e_{i2}\Phi_{i2} + e_{i3}\Phi_{i3} + e_{i4}\Phi_{i4}),$$

qu'on peut écrire

$$\psi = \sum_k (e_{11}\psi_{1k} + e_{21}\psi_{2k} + e_{31}\psi_{3k} + e_{41}\psi_{4k})e_{1k} = \sum_k K_k e_{1k}$$

$$\Phi = \sum_i e_{i1}(e_{11}\Phi_{i1} + e_{12}\Phi_{i2} + e_{13}\Phi_{i3} + e_{14}\Phi_{i4}) = \sum_i e_{i1} J_i$$

si l'on pose

$$\left.\begin{aligned} K_k &= e_{11}\psi_{1k} + e_{2k}\psi_{2k} + e_{31}\psi_{3k} + e_{41}\psi_{4k} \\ J_i &= e_{11}\Phi_{i1} + e_{12}\Phi_{i2} + e_{13}\Phi_{i3} + e_{i4}\Phi_{i4}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Remarquons que les composantes de K et de J *satisfont précisément aux équations de Darwin.* On a alors dans le cas général :

$$\psi\Phi = K_1J_1 + K_2J_2 + K_3J_3 + K_4J_4, \tag{44}$$

qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \psi\Phi &= \sum_s K_sJ_s = \sum_s (e_{1s}\psi_{1s} + e_{21}\psi_{2s} + e_{31}\psi_{3s} + e_{41}\psi_{4s})(e_{11}\Phi_{s1} + e_{12}\Phi_{s2} + e_{13}\Phi_{s3} + e_{14}\Phi_{s4}) \\ &= \sum_s \left(\sum_{ik} e_{ik}\Phi_{is}\psi_{sk}\right) \end{aligned}$$

$$\psi\Phi = \sum_{ik} e_{ik}\left(\sum_s \psi_{is}\Phi_{sk}\right) \tag{45}$$

Cette expression est du type (34) $\dfrac{\Lambda}{4} = \Sigma\, e_{rs}A_rA_s^*$; le rôle de $A_rA_s^*$ est joué ici par

$$\psi_{i1}\psi_{k1}^* + \psi_{i2}\psi_{k2}^* + \psi_{i3}\psi_{k3}^* + \psi_{i4}\psi_{k4}^*.$$

On peut passer aux α en remplaçant les e_{ik} par leurs expressions (4) et l'on obtiendra alors *les « tensions » dans le cas général.* On peut aussi observer que (45) s'écrit

$$\begin{aligned} \psi\Phi &= \left(\sum_{ik} e_{ik}\psi_{i1}\psi_{k1}^*\right) + \left(\sum_{ik} e_{ik}\psi_{i2}\psi_{k2}^*\right) + \left(\sum_{ik} e_{ik}\psi_{i3}\psi_{k3}^*\right) + \left(\sum_{ik} e_{ik}\psi_{i4}\psi_{k4}^*\right) \\ &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \end{aligned}$$

Mais les ψ_{i1} ($i = 1, 2, 3, 4$) sont quatre grandeurs *qui satisfont aux équations de Darwin ;* il en est de même de ψ_{i2} ψ_{i3}, ψ_{i4}. Par conséquent,

$$T_1 = \sum_{ik} e_{ik}\psi_{i1}\psi_{k1}^*$$

donne par ses composantes les grandeurs quadratiques, identiques à celles de Dirac, et *provenant du groupe I des équations;* de même T_2 correspond au groupe II et ainsi de suite; ψ_{i2} ne diffère de ψ_{i1} que par le choix des constantes et fonctions arbitraires qui apparaissent au moment de l'intégration. On en conclut que *les covariants quadratiques formés à partir de la solution générale sont chacun, simplement, la somme des quatre covariants correspon-*

dants à chacun des quatre groupes d'équations de Darwin en lesquelles se résolvent les 16 équations fondamentales.

Lorsqu'on passe à la solution classique, on doit poser

$$\psi_{i1} = \psi_{i2}\ \psi_{i3} = \psi_{i4} = 0$$

et (45) se réduit à (41). Ceci montre clairement la différence entre les covariants quadratiques généraux et ceux de Dirac.

8. **Comparaison avec le cas du rayonnement.** — Pour le rayonnement la situation est tout à fait analogue; les équations du rayonnement peuvent s'écrire (¹) :

$$F\psi = 0 \tag{46}$$

où F et ψ sont des biquaternions :

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \beta_3\psi_3 \\ F &= p_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 \end{aligned}\right\} \tag{46'}$$

les β_r satisfaisant à

$$\beta_r\beta_s + \beta_s\beta_r = 2\beta_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

et en particulier à

$$\left.\begin{aligned} \beta_1\beta_2 = \mathbf{i}\beta_3 \qquad \beta_2\beta_3 = \mathbf{i}\beta_1 \qquad \beta_3\beta_1 = \mathbf{i}\beta_2 \\ \beta_r^2 = +1 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

et les p étant définis, comme d'habitude par

$$p_0 = \frac{h}{2\pi\mathbf{i}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \qquad p_r = \frac{h}{2\pi\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Passons à des unités e_{ik} telles que

$$\begin{aligned} e_{ik}\,.\,e_{rs} &= 0 \qquad i, k \neq r, s \\ e_{il}\,.\,e_{lk} &= e_{ik}. \end{aligned}$$

On peut exprimer les β_r en fonction des e_{ik} ($i, k = 1,2$); nous pouvons prendre par exemple (²) :

$$\left.\begin{aligned} 1 &= e_{11} + e_{22} \qquad & \beta_1 &= e_{12} + e_{21} \\ \beta_2 &= \mathbf{i}(e_{21} - e_{12}) \qquad & \beta_3 &= e_{11} - e_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Avec cela on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \psi &= (\psi_0 + \psi_3)e_{11} + (\psi_1 - \mathbf{i}\psi_2)e_{12} + (\psi_1 + \mathbf{i}\psi_2)e_{21} + (\psi_0 - \psi_3)e_{22} \\ F &= (p_0 + p_3)e_{11} + (p_1 - \mathbf{i}p_2)e_{12} + (p_1 + \mathbf{i}p_2)e_{21} + (p_0 - p_3)e_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Formons $F\psi$ et annulons les coefficients des e_{ik}; nous aurons quatre équations qui se scindent en deux groupes de deux équations chacun

$$\left.\begin{aligned} \text{I}\ &\begin{cases} (p_0 + p_3)(\psi_0 + \psi_3) + (p_1 - \mathbf{i}p_2)(\psi_1 + \mathbf{i}\psi_2) = 0 \\ (p_1 + \mathbf{i}p_2)(\psi_0 + \psi_3) + (p_0 - p_3)(\psi_1 + \mathbf{i}\psi_2) = 0 \end{cases} \\ \text{II}\ &\begin{cases} (p_0 + p_3)(\psi_1 - \mathbf{i}\psi_2) + (p_1 - \mathbf{i}p_2)(\psi_0 - \psi_3) = 0 \\ (p_1 + \mathbf{i}p_2)(\psi_1 - \mathbf{i}\psi_2) + (p_0 - p_3)(\psi_0 - \psi_3) = 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

(¹) Voir *Journal de Physique*, t. III, (1932), p. 83.

(²) Ce qui revient à dire qu'on peut représenter un biquaternion par une matrice à deux lignes et deux colonnes.

I *et* II *ne diffèrent que par le nom des inconnues*; $\psi_0 + \psi_3$, $\psi_1 + \mathbf{i}\psi_2$ d'une part et $\psi_1 - \mathbf{i}\psi_2$, $\psi_0 - \psi_3$ d'autre part ne diffèrent que par des fonctions arbitraires d'intégration. Pour résoudre complètement le problème du rayonnement il suffira de connaître, *dans toute leur généralité*, les solutions du groupe I, donc de *quatre équations réelles seulement*.

10. **Equations de Maxwell pour le vide.** — Si l'on fait $\psi_0 = 0$, les équations déduites de (46) sont identiques aux équations de Maxwell ([1]). Les conclusions du paragraphe précédent doivent donc subsister pour ces équations et nous conduire à des théorèmes tout à fait indépendants de l'interprétation particulière adoptée dans ce paragraphe : on peut par exemple conclure *qu'il est possible de séparer les équations de Maxwell en deux groupes, lesquels ne diffèrent que par le nom des inconnues.*

Il en est ainsi effectivement. Les huit équations de Maxwell dans le vide, écrites avec la notation habituelle, sont

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}(-\mathbf{E}) = 0 && \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \\ &\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 && \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

et les deux groupes sont formés d'équations identiques le premier entre $(-\mathbf{E})$ et $\mathbf{H}$, le second entre $\mathbf{H}$ et $\mathbf{E}$. Mais ces deux groupes ne correspondent pas exactement à la décomposition choisie (50).

On peut écrire (51) en deux groupes comme suit :

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} - \operatorname{rot}_z\mathbf{H} = 0 && \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \operatorname{rot}_x\mathbf{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} + \operatorname{rot}_y\mathbf{E} = 0 \\ &\operatorname{div}\mathbf{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} + \operatorname{rot}_z\mathbf{E} = 0 && -\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \operatorname{rot}_y\mathbf{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} + \operatorname{rot}_x\mathbf{E} = 0 \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \operatorname{rot}_x\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} - \operatorname{rot}_x\mathbf{E} = 0 && \operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \operatorname{rot}_z\mathbf{H} = 0. \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} - \operatorname{rot}_y\mathbf{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} + \operatorname{rot}_x\mathbf{E} = 0 && \operatorname{div}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} - \operatorname{rot}_z\mathbf{E} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Ces deux groupes sont formés d'équations identiques entre des inconnues qui portent des noms différents. Il suffit pour s'en rendre compte de mettre en évidence, dans le groupe I, les nouvelles inconnues suivantes :

$$E_z, \quad E_x - H_y, \quad E_y + H_x, \quad H_z. \tag{53}$$

Le groupe II sera identique au premier, à cela près que les inconnues s'appelleront maintenant

$$E_x + H_y, \quad -E_z, \quad -H_z, \quad H_x - E_y, \tag{54}$$

et qu'elles correspondront une à une aux inconnues (53). Il est inutile d'écrire ces équations On n'a qu'à poser dans (52) II

$$E'_z = E_x + H_y, \quad E'_x - H'_y = -E_z, \quad E'_y + H'_x = -H_z, \quad H'_z = H_x - E_y.$$

La première équation devient

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E'_z}{\partial t} - \operatorname{rot}_x \mathbf{H}' + \operatorname{div}\mathbf{E}' = 0,$$

qui est identique à la première équation de (52) I; et ainsi de suite.

([1]) *Loc. cit.*

Donc dans la théorie classique de Maxwell les grandeurs suivantes, formées à partir des composantes du champ électromagnétique

$$E_z, \quad E_x - H_y, \quad E_y + H_x, \quad H_z, \quad \text{d'une part,}$$

et

$$E_x + H_y, \quad -E_z, \quad -H_z, \quad H_x - E_y, \quad \text{d'autre part}$$

satisfont aux mêmes équations aux dérivées partielles ; cela ne veut évidemment pas dire qu'elles sont identiques. Mais en tout cas, on voit qu'il suffit de savoir résoudre, *dans toute leur généralité* quatre équations, pour avoir la solution des équations de Maxwell pour le vide.

Les équations classiques de Dirac à quatre composantes ne peuvent pas se séparer en deux groupes ne différant que par le nom des inconnues. Il y a là une différence de structure d'avec les équations de Maxwell, qui montre clairement jusqu'où peut aller *l'analogie entre un photon et un électron.*

Manuscrit reçu le 25 janvier 1932.

Paris. — Soc. Gén. d'Imp. et d'Ed., 17, rue Cassette.

SUR LA THÉORIE RELATIVISTE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC DANS UN CHAMP NUL

Par Al. PROCA

SOMMAIRE. — Le premier chapitre examine la possibilité de donner à la théorie de Dirac une *forme* relativiste. On y arrive en étudiant les asymétries qu'elle présente ; on montre en particulier comment on doit procéder pour enlever au temps ordinaire son rôle privilégié, ce qui permet d'éliminer, au moins formellement, une grave inconséquence de la théorie quantique. Cela exige l'introduction d'un « temps propre », analogue au temps propre classique, dont on étudie les propriétés.

Le second chapitre étudie les intégrales premières du mouvement libre ; on obtient de nouvelles intégrales simples, on les classe systématiquement et on insiste tout particulièrement sur certains opérateurs (les opérateurs « ternaires ») dont l'étude semble avoir été négligée jusqu'à présent.

Le troisième chapitre est consacré à l'interprétation physique des opérateurs nouveaux qu'introduit la théorie de Dirac. On donne une interprétation des opérateurs ternaires qui les rattache à une généralisation immédiate du moment cinétique classique. On examine la forme généralisée de la relation de Gordon, ce qui permet de mettre en évidence des grandeurs jouant un rôle très important et pour lesquelles on peut écrire une équation ayant l'aspect d'une équation de continuité. Le cas d'un électron décrit par une onde plane est traité complètement ; on constate qu'un tel électron peut être décrit entièrement au moyen de deux vecteurs d'univers à angle droit, l'un caractérisant sa translation, l'autre sa « rotation ». Enfin, on examine le cas d'un électron distribué sur plusieurs états, c'est-à-dire le cas d'un paquet d'ondes qui présente par rapport au précédent des différences caractéristiques intéressantes. Ainsi, par exemple, on peut parler dans ce cas d'une charge et d'un courant de magnétisme libre (mais qui n'est pas « vrai »), dûs à des transitions entre des états coexistants. Cette circonstance ne se présente pas, ni pour un électron qui se trouve dans un seul état déterminé, ni particulièrement, pour un paquet d'ondes qui contient à la fois un état d'énergie positive et un autre d'énergie négative, égale en valeur absolue à la précédente.

INTRODUCTION

L'image de l'électron, que nous avait léguée la théorie classique de Lorentz, a subi des modifications considérables. D'une part, l'électron s'est enrichi d'une nouvelle propriété ; certains résultats spectroscopiques nous ont permis d'affirmer qu'il possédait un moment de rotation, propriété ignorée par la théorie classique mais qui aurait pu y prendre place sans inconvénient. D'autre part, les nouveaux développements de la théorie des quanta ont dépouillé l'électron classique de certaines caractéristiques, et précisément de celles qui nous permettaient jusqu'à ce jour de nous le représenter par une image claire et intuitive dans l'espace et le temps. Les conséquences du principe d'incertitude de Heisenberg sont telles, qu'à l'heure actuelle il ne nous est plus possible de décrire qualitativement un électron dans l'espace et le temps, comme nous le faisions dans l'ancienne théorie. Cela ne veut pas dire cependant que nous ne sachions pas définir un électron en mécanique quantique. Au contraire, un tel électron est décrit avec toute la précision désirable par l'équation de Dirac, qui lui sert ainsi de définition ; cette manière de le définir n'est certes plus celle de l'ancienne théorie, mais ne laisse rien à désirer du point de vue logique. L'équation de Dirac contient tout ce que nous savons actuellement en mécanique quantique sur l'électron.

Il faut observer que l'origine de cette équation n'est pas uniquement expérimentale, en d'autres termes que cette équation n'a pas été établie, comme tant d'autres, uniquement dans le but de traduire des résultats expérimentaux connus. Elle dérive de la décomposition d'une expression quadratique en facteurs, opération mathématique, suggérée par certains principes généraux, mais n'ayant aucune signification physique immédiate. L'équation fondamentale est donc écrite en dehors de toute préoccupation d'accord avec l'expérience. On vérifie seulement après coup que cette équation confère bien à l'électron toutes les propriétés que nous lui connaissons. Or, l'essentiel est qu'elle lui confère plus de propriétés qu'il ne semble en avoir. Nous sommes en présence de deux électrons : l'électron expérimental et l'électron de Dirac ; le second n'est qu'une image théorique, définie analytiquement et possédant des caractéristiques qui semblent faire défaut au premier.

Deux alternatives sont alors possibles. Ou bien l'équation de Dirac décrit complètement un électron réel et par conséquent celui-ci possède des propriétés qu'on n'a pas encore découvertes ; il serait alors intéressant de les étudier pour voir comment on pourrait les mettre en évidence expérimentalement. Ou bien, au contraire, les nouvelles propriétés que possède l'électron de Dirac n'ont aucune réalité physique et apparaissent artificiellement, à la suite et comme conséquence des opérations mathématiques conduisant à l'équation fondamentale. Alors, il serait encore intéressant de les étudier *pour fixer les limites extrêmes de l'applicabilité de l'équation de Dirac*. D'une façon ou d'une autre, l'étude approfondie des propriétés d'un électron *de Dirac* est du plus haut intérêt : c'est cette étude que nous nous proposons d'amorcer dans le présent travail.

Le problème ainsi posé doit être subdivisé en deux : étude de l'électron libre et étude du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique ou gravitationnel donné. Nous nous bornerons ici à l'analyse de la première partie du problème, c'est-à-dire au cas de l'absence de champ. Cette restriction laisse en dehors de nos préoccupations la question des énergies négatives ; il n'y a pas dans le cas d'un électron libre de passages à de pareils états, et, si ces derniers existent, on peut adopter à leur égard la même attitude qu'en mécanique classique. On sait en effet, que dans le cas de l'absence de champ et seulement dans ce cas [1], si un état ne comporte initialement que des états propres d'énergie positive, il continuera indéfiniment à jouir de la même propriété. Les difficultés liées à l'existence d'énergies négatives n'apparaissent qu'en présence d'un champ. Il importe cependant, avant d'aborder le problème général, d'étudier le cas plus simple que nous envisageons ici, pour isoler cette question fondamentale de toute autre difficulté parasite.

Le présent travail, qui passe en revue la plupart des résultats connus et en ajoute quelques autres, se divise en trois parties. Dans la première, on essaye de donner à la théorie de Dirac une forme relativiste correcte, qui permette un traitement symétrique de l'équation fondamentale. Le problème général de la théorie des quanta et de la relativité est extrêmement difficile. Pour voir si une solution est possible, et dans l'affirmative, la trouver, on essàye de résoudre d'abord un problème plus simple : on tâche de donner à la théorie de l'électron de Dirac une forme aussi symétrique que possible, dans le sens où ce terme est employé en relativité. On essaye de réaliser donc *mathématiquement* la symétrie relativiste, dans l'espoir qu'une fois cette symétrie formelle obtenue, on pourra apercevoir plus clairement la meilleure voie d'attaque directe du problème.

Dans la seconde partie, on étudie les caractéristiques nouvelles d'un électron de Dirac, en analysant les intégrales premières du mouvement. Enfin, la troisième constitue un essai d'interprétation physique des résultats mathématiques obtenus.

(1) Cf. E. Schrödinger, *Annales de l'Institut Henri-Poincaré*. II, 1932, p. 278.

CHAPITRE PREMIER

Théorie relativiste

1. Equation de Dirac. Rappel des notions fondamentales. — Un électron de Dirac est décrit par l'équation :

$$\varkappa \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathrm{H}\psi = 0, \qquad (1/1)$$

où $\varkappa = h/2\pi i$, h étant la constante de Planck, $i = \sqrt{-1}$ et H l'hamiltonien. Dans le cas de l'absence de champ, cet hamiltonien est :

$$\mathrm{H} = c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc)\,; \qquad (2/1)$$

c est la vitesse de la lumière, m la masse au repos de l'électron, p_r ($r = 1, 2, 3$) les opérateurs différentiels correspondant aux composantes de la quantité de mouvement $p_r = \varkappa\, \partial/\partial x_r$. Les α_r sont des opérateurs hermitiques, commutant avec les coordonnées x_r et les moments p_r et satisfaisant en outre aux conditions bien connues :

$$\alpha_r \alpha_s + \alpha_s \alpha_r = 2\delta_{rs}. \qquad (3/1)$$

Dans une représentation dans laquelle α_4 est diagonale, ces opérateurs peuvent s'écrire :

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \alpha_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

ψ dépend d'une nouvelle variable indépendante ζ : les α_r opèrent exclusivement sur celle-ci. ζ ne peut prendre que quatre valeurs ; on distingue d'habitude les quatre valeurs correspondantes de ψ par des indices : $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. La loi suivant laquelle α_r opère sur ψ est la suivante : si $(\alpha_r)^{ik}$ désignent les éléments de matrice de α_r, on a :

$$(\alpha_r\psi)^i = \sum_{k=1}^{4} (\alpha_r)^{ik}\psi_k. \qquad (4/1)$$

On peut remarquer que α_r opère sur ψ comme si ce dernier était une matrice à une seule colonne d'éléments $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ et le résultat de l'opération est simplement le résultat de la multiplication des deux matrices α_r et ψ.

Dirac a obtenu son équation par « linéarisation », de la manière suivante. En partant de la relation relativiste entre l'énergie W et la quantité de mouvement p_1, p_2, p_3 :

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2c^2, \qquad (5/1)$$

on pourrait en déduire un hamiltonien, en procédant comme dans le cas de l'équation de Schrödinger. Dirac observe que l'équation qu'on en déduirait ne serait pas en accord avec les principes généraux de la mécanique quantique. Pour arriver à une équation linéaire, il suffirait de partir d'une relation *linéaire* entre W/c et p_1, p_2, p_3. On obtient une pareille relation en décomposant (5/1) en facteurs, en la « linéarisant », processus qui introduit nécessairement les opérateurs α_r, satisfaisant à (3/1).

L'équation ainsi obtenue satisfait aux exigences de la relativité restreinte, comme l'a montré Dirac. Cependant, elle présente une asymétrie caractéristique et peu familière en relativité ; nous allons commencer par l'analyser.

2. Asymétries dans la théorie de l'équation de Dirac. — Toute théorie relativiste présente une symétrie qui fait défaut — au moins en apparence, — à la théorie de Dirac. Cette symétrie a un double aspect.

D'abord le temps t, — ou, pour être plus précis, la variable $x_4 = ict$, — est traitée de la même façon que les autres coordonnées ; il n'y a aucune distinction formelle entre les quatre coordonnées d'Univers. Les équations s'écrivent sous une forme parfaitement symétrique en introduisant un élément invariant qui est l'intervalle d'Univers ou *le temps propre*.

Or, dans toute la mécanique quantique, et en particulier dans la théorie de Dirac, *le temps joue un rôle privilégié et la notion de temps propre fait défaut*. En effet, tandis que toutes les autres coordonnées sont traitées comme des opérateurs, seul le temps y est regardé comme paramètre. Ensuite, le temps propre classique est, au fond, la longueur d'un certain arc d'une trajectoire d'Univers ; la notion générale de trajectoire perdant toute signification en mécanique quantique, il est impossible de l'utiliser pour définir quoi que ce soit. La dérivation par rapport à un temps propre analogue à celui de la théorie classique, n'a aucun sens et on ne peut plus parler par exemple *d'une vitesse d'univers*, ni écrire les équations fondamentales sous la forme symétrique désirée. La théorie classique impose donc une symétrie que les méthodes de la mécanique quantique ne permettent pas de conserver.

Nous devons donc nous attacher à définir en mécanique quantique, d'abord *un temps propre*, et ensuite *la dérivée d'un opérateur par rapport à ce temps propre*.

Mais la théorie de la relativité restreinte présente une autre symétrie tout aussi fondamentale que la première : la quantité mc, où m est la masse au repos et c la vitesse de la lumière, *est traitée, au fond, de la même façon que les quantités de mouvement p_r de l'électron*. Or, l'hamiltonien de Dirac (2/1) introduit automatiquement un terme en mc et même, — semble-t-il, — sur un pied d'égalité avec les autres termes en p_r. On détruit cette symétrie initiale par des considérations ultérieures. Ainsi, tandis qu'on considère les p_r comme des opérateurs, mc est regardé comme un nombre ; à chacun des termes p_r correspond une variable canoniquement conjuguée x_r, tandis que *mc n'a pas de canonique conjuguée ;* enfin, on a par exemple, comme Breit l'a montré le premier [1].

$$\alpha_1 = x_1/c, \qquad \alpha_2 = x_2/c, \qquad \alpha_3 = x_3/c,$$

tandis que rien de pareil n'existe pour α_4, coefficient de mc.

Cette fois-ci, c'est la théorie quantique qui indique clairement l'existence d'une symétrie, dont on ne tient pas compte pour des raisons relevant entièrement de la théorie classique.

Malgré leur diversité apparente, ces deux types d'objections sont intimement liés ; ce sont, au fond, deux aspects d'une seule et même question. Pour l'étudier et arriver finalement à restituer à l'équation de Dirac la symétrie relativiste complète qu'elle doit avoir, il nous faudra commencer par examiner le cas de la théorie classique. Le sens physique des modifications qu'on devra entreprendre apparaîtra alors clairement.

3. Le problème de la masse en théorie classique. — La théorie *classique* présente une symétrie qu'on ne met pas suffisamment en évidence aujourd'hui, et cet oubli se répercute fâcheusement dans la théorie de Dirac. Considérons, en effet, un point en mouvement. Nous pouvons parler d'un point géométrique, c'est-à-dire étudier la Cinématique, — ou envisager un point matériel, c'est-à-dire faire de la Dynamique. Le mouvement d'un point *géométrique* peut être

[1] G. Breit. *Proc. Nat. Ac. Wash.*, 14, 1928, p. 553.

décrit en se donnant les valeurs des coordonnées et de la vitesse, ou, plus symétriquement, les valeurs :

$$x, \quad y, \quad z, \quad ct$$

et des valeurs proportionnelles à :

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad cdt.$$

L'espace-temps suffit pour décrire ce phénomène. Pareillement, le mouvement d'un point *matériel* peut être décrit en donnant les valeurs des deux groupes de variables canoniquement conjuguées :

$$\begin{array}{llll} x, & y, & z, & ct \\ p_1, & p_2, & p_3, & -\mathrm{H}/c \end{array} \qquad (1/3)$$

(H énergie, **p** quantité de mouvement, c vitesse de la lumière) et l'espace-temps suffit encore dans ce cas. Mais il ne faut pas oublier que le passage de la Cinématique à la Dynamique consiste, en essence, à remplacer un point géométrique par un point matériel, donc à introduire, *dans un espace euclidien*, un élément nouveau, à savoir la matière, ce qui se traduit par l'apparition de la masse dans nos équations. On suppose que cette masse est un simple coefficient, d'ailleurs constant. Mais logiquement, rien ne nous empêche *a priori*, de supposer que la masse [1] d'un « point » matériel soit *variable*, et même, variable d'une façon complètement indépendante [2]. Pour déterminer le mouvement, il faudra alors donner également la valeur de cette *nouvelle*

[1] Par « masse » nous entendons ici, et dans tout ce qui suit, uniquement la masse au repos.

[2] Il faut ajouter que, dans ce cas, les équations du mouvement ne sont plus nécessairement les équations classiques, qui supposent essentiellement la constance de la masse au repos ; il faudra les définir à nouveau.

variable indépendante, c'est-à-dire remplacer le tableau (1/3) par :

$$\begin{array}{cccccc} x, & y, & z, & ct, & ? & \\ p_1, & p_2, & p_3, & -H/c & mc & (2/3) \end{array}$$

En donnant toutes les valeurs possibles aux variables de ce tableau on décrit complètement le mouvement.

Ce tableau appelle quelques remarques. La nouvelle variable que nous introduisons ainsi est-elle du type « coordonnée » ou du type « quantité de mouvement » ? L'expérience nous apprend qu'en général les « masses » se conservent. Elles ont donc une propriété commune avec la quantité de mouvement et cela justifie le choix que nous avons fait : dans le tableau (2/3), nous avons placé la masse, ou plutôt *mc* dans la catégorie des moments.

En regard de cet *mc*, sur la première ligne du tableau, nous avons mis un point d'interrogation pour marquer le fait fondamental : *nous ne connaissons pas de variable canoniquement conjuguée à la masse. Si la masse était une variable indépendante* et si la théorie était symétrique, une pareille variable devrait nécessairement exister. L'espace *de configuration* du mouvement d'un point *matériel*, ne devrait plus être l'espace-temps ordinaire, mais un espace *à cinq dimensions*, la cinquième étant précisément la variable canoniquement conjuguée de la masse. Logiquement, cela est parfaitement admissible. En effet, actuellement, le mouvement d'un point géométrique et celui d'un point matériel sont définis dans *le même espace euclidien*, à quatre dimensions. Le passage Cinématique-Dynamique, c'est-à-dire l'introduction de la matière, *n'y ajoute rien*. Or, dans la conception à laquelle nous nous bornons ici et qui est celle de la relativité *restreinte*, la matière est quelque chose de nouveau, *de nature essentiellement différente de celle d'un espace euclidien*. L'introduction de la matière devrait se manifester géométriquement par l'apparition *d'une nouvelle* *coordonnée*, qui marquerait précisément le fait qu'en dehors de l'espace euclidien proprement dit et en dehors du temps, notre phénomène fait intervenir un élément nouveau, *distinct des précédents*, qui est la matière (1).

En résumé, si l'on veut conserver les principes généraux de la mécanique analytique, l'hypothèse d'une masse au repos variable entraîne comme conséquence l'introduction dans les calculs d'une cinquième coordonnée, canoniquement conjuguée à mc.

Revenons maintenant en arrière pour examiner l'état *actuel* des choses. La masse n'est pas indépendante des autres moments : elle vérifie la relation déjà décrite (5/1). Mais, au moins formellement, cela ne doit pas altérer l'*existence* d'une variable canoniquement conjuguée ; tout au plus peut-on prévoir qu'il ne s'agira plus d'une variable *indépendante*, mais que sa valeur sera fixée d'une façon quelconque par les quatre autres coordonnées. Quelle peut être cette coordonnée conjuguée ? Formellement, la réponse nous est fournie par l'expression relativiste classique de la fonction de Lagrange. On a, en effet, avec les notations habituelles, pour cette fonction de Lagrange :

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}(\mathbf{vA}) - e\varphi$$

et comme le temps propre est donné par $d\tau = dt.\sqrt{1-\beta^2}$, on a :

$$L = -mc^2\dot{\tau} + \dots$$

d'où :

$$\frac{\partial L}{\partial(c\dot{\tau})} = -mc.$$

(1) La fusion de ces éléments exigerait l'emploi de la théorie de la relativité *générale*, et le problème se poserait tout autrement; mais ici, nous devons rester essentiellement sur le terrain de la relativité *restreinte*. C'est cette condition supplémentaire qui impose les raisonnements précédents. Cette remarque est essentielle.

L'analogie de cette formule avec la formule générale qui relie un moment p_r à sa coordonnée canoniquement conjuguée $p_r = \partial L/\partial \dot{q}_r$ nous permet d'affirmer que : *formellement, la coordonnée canoniquement conjuguée de la masse est le temps propre* (à un facteur de dimensions près, égal d'ailleurs à $-c^2$). Si l'on introduit la variable $x_4 = ict$ à la place du temps propre, on voit que x_4 et imc sont canoniquement conjuguées.

Voilà donc une indication fournie par la théorie classique. Nous devons maintenant chercher à employer cette indication en mécanique quantique pour trouver un théorème analogue qui nous permette de donner à la théorie de Dirac une forme symétrique. Nous serons amenés ensuite à définir une « dérivée » par rapport au temps propre. Pour que le sens de cette définition apparaisse clairement, il est encore indispensable d'examiner le problème analogue en mécanique analytique. Nous consacrerons donc le paragraphe suivant à l'étude de cette question.

4. Calcul des dérivées en mécanique analytique classique. — Considérons un système dynamique défini par les n coordonnées $q_1, q_2, \dots q_n$ et par les n moments canoniquement conjugués correspondants $p_1, p_2, \dots p_n$. Le mouvement est défini par l'intermédiaire d'une fonction de Hamilton donnée, $H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t)$ au moyen des équations bien connues :

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (1/4)$$

Si l'on prend maintenant une fonction quelconque $\xi(p, q, t)$ des p, des q et du temps, sa dérivée par rapport au temps sera :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial \xi}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) \qquad (2/4)$$

d'où la formule :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + [\mathrm{H}, \xi], \tag{3/4}$$

$[\mathrm{H}, \xi]$ étant le crochet de Poisson de H avec ξ. C'est cette formule qu'on transporte sans changement en mécanique quantique. Nous nous proposons de lui donner une autre forme, analogue à celle qui nous sera utile plus tard dans la théorie de Dirac.

La résolution des équations (1/4) nous fournira en fin de compte, les expressions des p_r, q_r en fonction de t, qui joue donc ici un rôle particulier. L'observation essentielle consiste à remarquer que, le processus étant parfaitement symétrique, on peut faire jouer le rôle de t à une coordonnée q quelconque, $q_1 = q$ par exemple, et obtenir de cette façon, par des formules analogues à (3/4), avec la même facilité, la quantité :

$$\frac{d\xi}{dq} = \frac{d\xi}{dq_1}.$$

Les couples de variables conjuguées :

$$\left.\begin{matrix} q_1, & q_2 & \ldots & q_n, & t \\ p_1, & p_2 & \ldots & p_n, & -\mathrm{H} \end{matrix}\right\} \tag{4/4}$$

qui définissent le mouvement du système *sont absolument équivalents* et l'on a le théorème bien connu suivant :

Les équations du mouvement du système s'obtiennent à partir de n'importe quel couple (p, q) de variables canoniquement conjuguées, en supposant connue l'expression du moment p en fonction des autres variables (y compris H), et en écrivant les équations hamiltoniennes ordinaires, où q joue le rôle du temps et $-p$ celui de l'énergie :

$$\frac{dq_s}{dq} = \frac{\partial(-p)}{\partial p_s} \qquad \frac{dp_s}{dq} = -\frac{\partial(-p)}{\partial q_s}. \tag{5/4}$$

Comme conséquence, si une fonction η des coordonnées et des moments ne dépend ni de q ni de p, on peut écrire :

$$\frac{d\eta}{dq} = [-p, \eta], \tag{6/4}$$

la sommation impliquée par le crochet de Poisson portant sur toutes les variables dont dépend η, y compris le temps et l'énergie. Si le couple (p, q) choisi est le couple temps-énergie, on a les équations sous la forme même de Hamilton ; sinon, ce sont des équations réductibles à celles-ci. Remarquons enfin, ce qui est évident mais essentiel, que dans toutes ces formules H n'est plus qu'une variable au même titre que les autres : il ne faut pas la remplacer par son expression en fonction des p, q et t.

Cela étant, prenons les équations du mouvement d'un point matériel en relativité. Nous avons vu que $c\tau$ et $-mc$ sont des variables canoniquement conjuguées. Ces équations peuvent donc se mettre sous la forme hamiltonienne, ainsi qu'il est d'ailleurs bien connu, avec $p = -mc$ et $q = c\tau$ et l'on a, comme cas particulier de (6/4) la relation :

$$\frac{1}{c}\frac{d\eta}{d\tau} = [mc, \eta],$$

ou :

$$\frac{d\eta}{d(ic\tau)} = [-imc, \eta]. \tag{7/4}$$

5. Application à la mécanique quantique. Rôle exceptionnel du temps. — Revenons maintenant à la théorie de Dirac et essayons d'écarter les objections qu'on lui fait, en nous aidant des considérations précédentes.

Avant tout, il faut examiner une difficulté qui se présente même à l'approximation newtonienne et qui constitue une grave inconséquence de la théorie, sur laquelle SCHRÖDINGER a insisté récemment avec force [1]. Il s'agit du rôle exception-

[1] E. SCHRÖDINGER. *Annales de l'Institut Henri-Poincaré*, II, 1932, p. 293.

nel que joue le temps dans toute la mécanique quantique.

La connaissance que nous pouvons avoir du temps s'acquiert, en effet, de la même façon que celle de toutes les autres coordonnées : par des mesures effectuées sur des systèmes matériels. Le temps est donc une observable ; or, la mécanique quantique le traite comme paramètre. Ensuite, la théorie de la relativité est une théorie essentiellement symétrique dans laquelle le temps et les coordonnées sont traités mathématiquement *de la même façon*. Or, la mécanique quantique ne satisfait pas du tout à ce programme. Les coordonnées y sont considérées comme des opérateurs, tandis que le temps est regardé comme paramètre. Le temps est exactement mesurable dans tous les cas, les coordonnées ne le sont pas.

Cette objection, l'une des plus graves qu'on puisse faire du point de vue formel à la théorie de Dirac et en général à la mécanique quantique, est évidemment fondée ; mais il faut faire une distinction qui est d'une importance capitale.

Les équations de la mécanique quantique sont des équations entre opérateurs, déduites d'ailleurs par analogie des équations de la mécanique classique. Parmi ces opérateurs figure toujours l'opérateur unité, c'est-à-dire un opérateur qui commute avec tous les opérateurs imaginables et qui a comme valeurs propres l'unité : il intervient même explicitement dans les conditions de commutation. Il n'est donc pas étonnant de constater qu'une des caractéristiques physiques du système considéré soit représentée par un paramètre, c'est-à-dire par un nombre qui commute également avec tous les opérateurs qu'on puisse imaginer. En fait, *on ne doit pas reprocher à la théorie d'introduire un paramètre parmi les opérateurs qu'elle emploie et lui donner une signification physique. On doit constater seulement qu'il est fâcheux que ce soit précisément le temps qui apparaisse comme paramètre.* Si ce rôle était joué par un *temps propre*, analogue au temps propre classique, la théorie serait symétrique et l'objection tomberait.

Or, si l'on se reporte à ce que nous avons dit au paragraphe précédent, on voit que le rôle privilégié du temps résulte au fond d'un *choix initial particulier* de la manière de définir le mouvement du système. Les fondateurs de la mécanique quantique sont partis des équations classiques, prises sous la forme hamiltonienne ; en définissant le mouvement par un hamiltonien, ils ont pu écrire pour un opérateur quelconque

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = [H, \xi] \qquad \text{ou} \qquad \varkappa\dot{\xi} = H\xi - \xi H, \qquad (1/5)$$

formule identique à la formule classique, mais où t, la variable canoniquement conjuguée de — H, doit nécessairement être regardée comme paramètre pour que le premier membre ait un sens.

Mais, d'après le paragraphe précédent, *le choix de la fonction d'énergie H, pour définir le mouvement du système, est arbitraire* ; le même mouvement peut être défini d'une façon parfaitement équivalente au moyen d'une fonction p quelconque, représentant l'un des moments exprimé au moyen des autres moments, des coordonnées, de l'énergie et du temps. Dans ce cas, les équations ont encore la forme hamiltonienne et on peut définir par un crochet de Poisson la dérivée d'une fonction quelconque ξ par rapport à la variable q, canoniquement conjuguée de p et qui a remplacé le temps t.

6. Changement de paramètre. — Pour arriver donc à une forme satisfaisante de la mécanique quantique en partant de la forme actuelle, nous devons donc *changer de paramètre* et remplacer t par une autre variable, ce qui nous permettra d'une part de regarder le temps comme une observable, et d'autre part, de réaliser une symétrie relativiste qui actuellement fait défaut. Quel pourrait être ce nouveau paramètre, ou plutôt quel est le couple de variables canoniquement conjuguées remplaçant le temps t dans son rôle de paramètre et l'énergie H dans son rôle de hamiltonien ?

Nous avons vu qu'on pouvait écrire sous forme hamiltonienne les équations *classiques* du mouvement d'un point, en prenant à la place de l'énergie et du temps le couple masse-temps propre, ou plus correctement

$$-mc \quad \text{et} \quad c t. \tag{1/6}$$

Il eut été légitime, si l'on avait voulu construire dès le début une mécanique quantique relativiste, de partir de ce dernier couple de variables conjuguées pour écrire les équations *quantiques* de mouvement. Ce procédé est probablement le seul qui puisse nous conduire à une solution correcte du point de vue relativiste, — si toutefois une pareille solution existe. La difficulté consiste dans le fait que la notion de trajectoire n'ayant plus aucune signification en mécanique quantique, nous ne pouvons plus définir le nouveau paramètre qui correspond au temps propre en nous servant de l'image classique qui l'assimile à la longueur d'une ligne d'univers. Nous devons donc résoudre d'abord formellement le problème et voir ensuite qu'elle autre définition nous serons amenés à proposer pour le *temps propre*.

Quoi qu'il en soit, nous allons prendre le procédé indiqué plus haut comme point de départ, et voir où il nous conduira.

Par conséquent, conformément au procédé employé par Dirac pour écrire au début les équations de la mécanique quantique, nous partirons de l'équation classique (6/4). Nous admettrons donc, par hypothèse, que le mouvement est déterminé au moyen d'un opérateur $S = -imc$, que nous pouvons appeler « hamiltonien relativiste, et d'un paramètre $u = ic\tau$, par les équations quantiques suivantes :

$$\left[\frac{dx_r}{du}\right] = [S, x_r] \qquad \left[\frac{dp_r}{du}\right] = [S, p_r] \qquad \left[\frac{dt}{du}\right] = [S, t] \qquad \left[\frac{dH}{du}\right] = [S, H] \tag{2/6}$$

En d'autres termes, l'équation fondamentale du mouvement au sens de Dirac sera donc, ξ étant un opérateur quelconque :

$$\varkappa\left[\frac{d\xi}{du}\right] = \varkappa\left[\frac{\partial\xi}{\partial u}\right] + S\xi - \xi S. \tag{3/6}$$

Tout ceci est purement formel; nous devons préciser maintenant la signification de S et u dans cette équation. Ceci fait, nous serons en droit d'interpréter $S\xi - \xi S$ comme une sorte de « dérivée » par rapport au temps propre (au cas où ξ ne dépend pas de τ) et obtenir ainsi un élément essentiel de la symétrisation cherchée.

7. L'hamiltonien relativiste S. — Nous partons de l'idée qu'au fond l'équation de Dirac décrit correctement le mouvement relativiste d'un électron ; la théorie actuelle est relativiste dans le fond, sinon dans la forme. Par conséquent, quelle que soit la nouvelle forme des équations quantiques du mouvement, ce dernier devra être identique à celui auquel conduit l'équation de Dirac. Cela nous permettra de préciser la signification de $S = -imc$ et de $u = ic\tau$.

Commençons par l' « hamiltonien relativiste » S. Classiquement, le nouvel hamiltonien se déduirait en cherchant l'expression du moment correspondant à S en fonction des autres coordonnées et moments, y compris l'énergie H. Autrement dit, étant donnée l'expression de la fonction de Hamilton $\mathcal{H}$ (...S...), on trouverait S en résolvant l'équation :

$$H = -\mathcal{H}(\ldots S \ldots).$$

Dans le cas de la mécanique quantique, les calculs sont considérablement simplifiés par le fait que l'hamiltonien de

Dirac est *linéaire* en ses moments ; on peut affirmer que seule cette circonstance nous permet de calculer S sans ambiguïté.

Considérons alors la relation classique entre nombres ordinaires :

$$-\left(\frac{W}{c}\right)^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2c^2 = 0. \qquad (1/7)$$

Passons aux opérateurs en posant :

$$\frac{W}{c} = -\frac{\varkappa}{c}\frac{\partial}{\partial t} = -\varkappa i\frac{\partial}{\partial x_4}; \qquad p_r = \varkappa\frac{\partial}{\partial x_r}; \; (r = 1, 2, 3). \qquad (2/7)$$

Pour la symétrie, mc doit être également considéré comme un opérateur dont nous ne préciserons la forme, mais dont nous savons qu'il commute avec (2/7), avec les coordonnées et avec les α_r et dont une des valeurs propres est égale à m_0c, où m_0 est la valeur numérique de la masse de l'électron.

On déduit de (1/7) l'opérateur [1]

$$-W/c + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc \qquad (3/7)$$

et en l'appliquant à une fonction d'onde ψ, on obtient l'équation fondamentale de Dirac :

$$\frac{\varkappa}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \varkappa\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \varkappa\alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \varkappa\alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \alpha_4 mc\psi = 0. \quad (4/7)$$

Lorsqu'on prend comme paramètre le temps, ou plutôt ct, c'est-à-dire la variable conjuguée de $-W/c$, on groupe les termes dans (4/7) de la façon bien connue :

$$\varkappa\frac{\partial\psi}{\partial t} + H\psi = 0 \qquad (5/7)$$

[1] On aurait pu prendre également $+ W/c + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$; le choix est arbitraire, mais cet arbitraire n'entraîne aucune difficulté.

et H constitue l'hamiltonien ; on pourrait écrire aussi :

$$\varkappa \frac{\partial\psi}{\partial x_4} - \frac{iH}{c}\psi = 0.$$

Prenons maintenant comme paramètre *la variable conjuguée d'un autre moment* et, en particulier, de *imc*. L'équation d'onde doit rester la même, et comme elle est linéaire par rapport aux moments, ceci ne signifie rien d'autre qu'un *groupement différent de ses termes*. La résolution, par rapport à *imc*, de l'équation (2/1) donnant l'hamiltonien conduirait à l'opérateur :

$$-S = [imc] = -\alpha_4 \frac{W}{ic} - i\alpha_4\alpha_1 p_1 - i\alpha_4\alpha_2 p_2 - i\alpha_4\alpha_3 p_3, \quad (6/7)$$

qu'on doit appliquer à une fonction d'onde ψ ; on obtient *la même équation* (4/7), écrite sous la forme :

$$S\psi + imc\psi = 0, \quad (7/7)$$

où :

$$\boxed{S = -\alpha_4\varkappa\frac{\partial}{\partial x_4} + i\alpha_4\alpha_1\varkappa\frac{\partial}{\partial x_1} + i\alpha_4\alpha_2\varkappa\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_4\alpha_3\varkappa\frac{\partial}{\partial x_3}} ; \quad (8/7)$$

(7/7) est ce qu'on appelle aujourd'hui la forme de Weyl de l'équation de Dirac ; elle a été cependant utilisée, dès l'apparition du premier mémoire de Dirac par J. v. Neumann (¹) et reprise par un grand nombre d'auteurs et en particulier par Schrödinger, pour l'étude du cas de la relativité générale.

8. Symétrie relativiste. — Considérons l'hamiltonien S. En théorie classique l'essence de la symétrie relativiste consiste dans le fait qu'une fois qu'on a remplacé le temps par la variable $x_4 = ict$, les quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 doi-

(¹) J. v. Neumann. *Z. Physik*, 48, 1928, p. 888.

vent être traitées absolument sur le même plan, malgré que l'une d'elle soit imaginaire. L'asymétrie irréductible du temps et de l'espace physique est englobée dans le facteur $i = \sqrt{-1}$; les transformations de Lorentz définissent une rotation dans l'univers comme si les quatre coordonnées étaient réelles. τ étant le temps propre, on a :

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Si l'on pose $x_4 = ict$ et simultanément $u = ic\tau$, on aura :

$$du^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Lorsqu'on passe à la mécanique quantique relativiste, la même symétrie exige qu'on traite toujours, et en particulier dans (8/7), toutes les quatre variables sur le même plan. Aux considérations de réalité des variables classiques correspondent en mécanique quantique des conditions d'hermiticité ou d'anti-hermiticité pour les opérateurs, et, dans un cas comme dans l'autre, la réalité ou l'hermiticité est rétablie en multipliant simplement par $i = \sqrt{-1}$.

Considérons l'hamiltonien relativiste (8/7) ; il contient les variables $x_k y$ d'une manière parfaitement symétrique, ce qui nous permet de les traiter sur le même plan. Les coefficients de $\varkappa \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ sont tous hermitiques ; d'autre part nous devons considérer, dans une théorie symétrique, tous les $\varkappa\, \partial/\partial x_k$ comme équivalents. *L'hamiltonien S doit donc être employé dans les calculs comme s'il était hermitique*, de la même façon qu'en relativité classique nous admettons que Σdx_k^2 est une *somme* de carrés, ou que l'univers (x_1, x_2, x_3, x_4) est euclidien.

En fait, cependant, les trois derniers termes de S (qui correspondent à x_1, x_2, x_3) sont certainement hermitiques tandis que le premier (qui correspond à $x_4 = ict$) pourrait être considéré comme anti-hermitique. S est donc un hamiltonien qu'on peut appeler « pseudo-hermitique », tout comme en réalité l'Univers classique est pseudo-euclidien, et *pour les mêmes raisons* (à savoir le fait que x_4 est purement imaginaire). En relativité classique on ne peut obtenir une symétrie parfaite qu'en introduisant des quantités purement imaginaires ; on paye d'un prix analogue la symétrie relativiste en mécanique quantique, en introduisant, contrairement à ce qui se passe à l'approximation newtonienne, des termes antihermitiques dans l'hamiltonien ([1]).

Cela précisé, revenons au raisonnement dont Dirac s'est primitivement servi pour écrire les équations de la mécanique quantique. La transcription des équations classiques lui a permis d'affirmer que l'expression $H\xi - \xi H$ représente, à un facteur près, la variation $d\xi/dt$ d'un opérateur (ne dépendant pas explicitement de t) par rapport au paramètre t, conjugué canonique de $-$ H. Si Dirac était parti du couple de variables ($-$ S, u) il aurait pu écrire *symboliquement*

$$\varkappa\left[\frac{d\xi}{du}\right] = S\xi - \xi S, \qquad (1/8)$$

le paramètre étant maintenant $u = ic\tau$ et *le temps t lui-même étant un opérateur,* comme les coordonnées. Le sens à attribuer à cette relation aurait pu être le suivant : l'expression bien définie :

$$S\xi - \xi S$$

constitue un opérateur qui *correspond* (à un facteur près) à la variation de ξ par rapport au temps propre, pris comme paramètre, c'est-à-dire qui constitue *l'équivalent en mécanique quantique des dérivés classiques par rapport au temps propre*, si importantes pour l'établissement d'une théorie symétrique relativiste correcte.

([1]) En mécanique quantique, l'hermiticité n'est définie que pour un domaine d'espace et non d'espace-temps ; cette définition devrait donc être étendue pour couvrir le cas qui nous préoccupe.

Le sens de cette relation ne sera précisé que lorsque nous aurons défini le paramètre u par lequel nous voulons remplacer le temps ordinaire t. Nous tenterons de le faire dans le paragraphe suivant.

9. Le « temps propre » en mécanique quantique. — Nous voulons que le paramètre τ « corresponde » au temps propre de la théorie classique. Remarquons que, même en théorie classique nous ne pouvons définir ce temps propre que lorsque nous connaissons déjà la trajectoire d'univers du point considéré. La transposition directe en mécanique quantique n'est donc pas possible.

Nous n'avons qu'un seul moyen d'avoir des renseignements sur cette grandeur : *c'est de revenir au système dans lequel le temps ordinaire est regardé comme paramètre* (et où H est l'hamiltonien) et d'examiner ce que représente u *dans ce système* ; en d'autres termes nous devons faire un « changement de paramètre » en sens inverse. Dans ce système, *u n'est naturellement plus un paramètre, mais un opérateur* ; tout ce que nous savons à son sujet c'est qu'il est canoniquement conjugué de l'opérateur imc, que nous avons rencontré en (3/7) lorsque nous avons linéarisé l'hamiltonien classique.

Considérons alors dans ce cas (c'est-à-dire lorsque t est regardé comme paramètre), un opérateur χ défini comme suit :

a) il commute avec x_k, α_k, p_k $(k = 1, 2, 3, 4 ; p_4 = Wi/c)$;
b) sa dérivée par rapport au temps t est donnée par

$$\dot{\chi} = c\alpha_4. \qquad (1/9)$$

Il est très vraisemblable qu'un tel opérateur existe, parce que les conditions a) et b) ne sont pas contradictoires ; en particulier $\alpha_4\chi - \chi\alpha_4 = 0$ n'exclut pas $\dot{\chi} = c\alpha_4$.

Or, rappelons-nous que nous avons considéré mc comme un opérateur (§ 7) ; si l'on écrit alors :

$$\dot{\chi} = c\alpha_4 = \frac{H\chi - H\chi}{\varkappa},$$

on aura :

$$mc.\chi - \chi.mc = \varkappa.1,$$

ce qui montre que χ est canoniquement conjugué à mc,

ou

$$imc \quad \text{à} \quad \chi/i. \tag{3/9}$$

Nous pouvons donc prendre $u = \chi/i$,

$$u = ic\tau = -i\chi \qquad \text{donc} \qquad c\tau = -\chi,$$

de façon qu'on ait :

$$\boxed{\dot{\tau} = -\alpha_4}. \tag{4/9}$$

Il est cependant difficile de dire si cette solution est unique.

Par ce choix, nous sommes donc en possession d'un opérateur u, *canoniquement conjugué* à imc. La relation fondamentale :

$$imc.u - u.imc = \varkappa.1,$$

ne ressemble pas ici aux relations connues, par exemple à :

$$\frac{\partial}{\partial x}.x - x.\frac{\partial}{\partial x} = 1,$$

d'une part, parce que u n'est pas analogue à un x, d'autre part, parce que l'opérateur mc n'est pas un opérateur différentiel de la forme $\partial/\partial\omega$. Il ne semble pas indiqué, — au moins jusqu'à ce qu'on ait une théorie mathématique correcte, — de poser :

$$mc = \varkappa\frac{\partial}{\partial\omega},$$

par analogie avec $p_k = \varkappa\,\partial/\partial x_k$, comme on l'a souvent tenté jusqu'à présent [cf. en particulier, EDDINGTON, PROCA, TANAKA]. En effet, on a :

$$imc\psi = \varkappa\alpha_4 \frac{\partial\psi}{\partial x_4} - \sum_{r=1}^{3} \varkappa\alpha_4\alpha_r \frac{\partial\psi}{\partial x_r} .$$

Si les coefficients des $\partial\psi/\partial x_r$ étaient des constantes ou des opérateurs commutables, on pourrait imaginer une substitution linéaire changeant les $x_1, \ldots$ en d'autres variables $y_1, \ldots \omega$, de la forme :

$$x_1 = -\alpha_4\alpha_1\omega + \ldots.$$
$$x_2 = -\alpha_4\alpha_2\omega + \ldots.$$

de façon que :

$$\frac{\partial x_1}{\partial\omega} = -\alpha_4\alpha_1, \ldots.$$

et on aurait :

$$imc\psi = \varkappa \frac{\partial\psi(\omega, \ldots)}{\partial\omega},$$

ce qui permettrait d'interpréter mc comme une dérivée. Mais cela n'est plus vrai, car les α_k n'étant pas commutables, le théorème concernant la dérivée d'une fonction de fonction n'est plus applicable. On peut présumer qu'il s'agit, au fond, d'une relation de même nature entre mc et χ, et il est très probable qu'on pourra l'exprimer de la manière précédente, dès qu'on aura développé une théorie mathématique correcte de cette dérivation échelonnée. Une telle théorie mathématique manque cependant à l'heure actuelle.

Nous avons réussi donc à choisir un opérateur qui pourra jouer dans une théorie symétrique, le même rôle que joue le temps ordinaire dans la théorie quantique. Avons-nous cependant le droit de dire que cet opérateur correspond au temps propre classique, c'est-à-dire pouvons-nous affirmer *que c'est sur cet opérateur qu'on serait tombé, si l'on avait voulu dès le début prendre le temps propre comme paramètre ?*

Le fait que u est le canonique conjugué de imc, qui correspond à la masse, est un argument en faveur d'une réponse affirmative. On peut en fournir un autre en cherchant *directement* quel est l'opérateur qui correspond au temps propre t classique.

10. Relations de Breit. — On y arrive en cherchant précisément une interprétation de l'opérateur α_4. On sait que, d'après la relation générale $\varkappa\dot{\xi} = H\xi - \xi H$, on a les formules de Breit :

$$\dot{x}_1 = c\alpha_1, \qquad \dot{x}_2 = c\alpha_2, \qquad \dot{x}_3 = c\alpha_3. \qquad (1/10)$$

Les opérateurs $c\alpha_1$, $c\alpha_2$, $c\alpha_3$ sont donc les opérateurs de la vitesse tridimensionnelle de l'électron. Mais que représente alors l'opérateur $c\alpha_4$?

Pour trouver une correspondance acceptable, on a raisonné comme suit. Ecrivons la relation classique donnant l'énergie, $W = mc^2/\sqrt{1 - \beta^2}$, sous la forme d'une relation entre cette énergie, les quantités de mouvement $p_r = m\dot{x}_r/\sqrt{1 - \beta^2}$ $(r = 1, 2, 3)$, et la vitesse $\dot{x}_r$. On a :

$$W = \dot{x}_1 p_1 + \dot{x}_2 p_2 + \dot{x}_3 p_3 + mc^2\sqrt{1 - \beta^2}. \qquad (2/10)$$

En comparant cette expression à (2/1) on peut dire que si $c\alpha_r$ correspond à la vitesse classique $\dot{x}_r$, α_4 correspondra à $\sqrt{1 - \beta^2}$. C'est ce qu'admettent entre autres Breit, qui a le premier écrit les relations (1/10) et Schrödinger. Mais les relations (1/10) découlent rigoureusement d'une formule quantique, tandis que la correspondance :

$$\alpha_4 \rightarrow \sqrt{1 - \beta^2},$$

résulte d'une simple analogie. Aussi Fock ne l'admet-il pas.

Cependant, il est clair à notre avis qu'on fait fausse route lorsqu'on veut trouver la signification de α_4 au moyen d'analogies de cette sorte. Ce procédé réussit pour les $\dot{x}_r = c\alpha_r$, parce qu'il s'agit d'éléments qui entrent *linéairement* dans les formules : il est très vraisemblable qu'il échouera quand on l'appliquera à un radical tel que $\sqrt{1-\beta^2}$. Nous devons donc chercher dans une autre direction.

Or, prenons pour un instant la conception de Breit $\alpha_4 \rightarrow \sqrt{1-\beta^2}$ et remarquons que $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{d\tau}{dt}$, τ étant le temps propre classique. α_4 correspondrait à $\dot{\tau}$. Or, on a classiquement :

$$c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - c^2d\tau^2 = 0, \qquad (3/10)$$

relation tout à fait analogue à la relation :

$$(W/c)^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2c^2 = 0. \qquad (4/10)$$

Cherchons donc ,à partir de (3/10), *l'opérateur* qui correspond au temps propre τ, *par le même procédé que nous avons utilisé pour déduire l'hamiltonien à partir de (4/10).*

Pour ce dernier, nous avons procédé en deux étapes. Nous avons d'abord décomposé (4/10) en deux facteurs :

$$(W/c + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc)$$
$$(-W/c + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc) = 0, \quad (5/10)$$

et, nous avons choisi, — arbitrairement d'ailleurs, — le second qui nous a fourni :

$$H'/c = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc.$$

Nous sommes passé ensuite aux opérateurs en remplaçant les p_r et mc, par les opérateurs (2/7) et nous avons obtenu au second membre l'hamiltonien H (au facteur c près).

Pour trouver l'opérateur qui correspond à τ, partons de (3/10), décomposons en facteurs :

$$(cdt + \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 cd\tau)$$
$$(-cdt + \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 cd\tau), \quad (6/10)$$

et choisissons cette fois-ci, le premier facteur, c'est-à-dire écrivons :

$$\left.\begin{array}{l} - \, cdt = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 cd\tau', \\ \text{soit encore :} \\ - \, \dfrac{dx_4}{i} = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 \dfrac{du'}{i} \, . \end{array}\right\} \quad (7/10)$$

Dans ces relations dx_1, dx_2, dx_3 et dt sont des nombres ordinaires donc $d\tau$ et du des matrices à 4 lignes et 4 colonnes. Nous pouvons écrire :

$$\frac{du'}{dx_4} = \frac{d\tau'}{dt} = - \left(\alpha_4 + i\alpha_4\alpha_1 \frac{dx_1}{dt} + i\alpha_4\alpha_2 \frac{dx_2}{dt} + i\alpha_4\alpha_3 \frac{dx_3}{dt} \right). \tag{8/10}$$

Ceci constitue la première étape du passage de la relation classique (3/10) à la relation correspondante entre opérateurs. Pour achever ce passage, il faut maintenant substituer aux nombres ordinaires x_r, *les opérateurs* x_r correspondants (le temps restant d'ailleurs un *nombre ordinaire*, un paramètre, puisque nous sommes en mécanique quantique newtonienne). Simultanément, τ sera remplacé par l'opérateur non-accentué qui lui correspond et nous serons alors en droit d'affirmer que le second membre de (8/10) représente l'opérateur qui correspond à la dérivée *du temps propre de la mécanique classique.*

Or, ce premier membre renferme les $\dot{x}_r = dx_r/dt$ qui ont, lorsqu'on passe aux opérateurs, une signification précise : on a $\dot{x}_r = c\alpha_r$. *Mais ces opérateurs ne commutent pas avec leurs coefficients respectifs ;* nous ne pouvons donc pas affirmer, sans plus, que (8/10) soit valable, si tous les x_r et τ y représentent des opérateurs. Pour passer de (8/10) à l'expression quantique correcte, il faut procéder comme on procède lorsqu'on part d'une fonction classique qui n'est pas « bien ordonnée », c'est-à-dire la symétriser : prendre par exemple $(pq + qp)/2$ au lieu de pq. L'expression quantique correcte, correspondant au second membre de la relation classique (ou plutôt semi-classique) (8/10), sera donc :

$$\frac{1}{2}\left(-2\alpha_4 - \sum_1^3 i\alpha_4\alpha_r \frac{dx_r}{dt} - \sum_1^3 \frac{dx_r}{dt} . i\alpha_4\alpha_r\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[-2\alpha_4 - c\sum(\alpha_4\alpha_r . \alpha_r + \alpha_r . \alpha_4\alpha_r)\right] = -\alpha_4,$$

et l'on aura :

$$\boxed{\frac{du}{dx_4} = \frac{d\tau}{dt} = -\alpha_4}, \qquad (9/10)$$

cette fois-ci τ étant un *opérateur*, qui correspond au temps propre classique.

Comparons (9/10) et (4/9) ; les deux conditions de définition sont identiques. Nous pouvons donc affirmer que l'opérateur u que nous avons choisi au paragraphe précédent et qui était canoniquement conjugué à imc, correspond bien au temps propre classique, c. q. f. d.

Vérifions la cohérence de ces déductions. Lorsque nous sommes passés de la relation classique (3/10) à (7/10) nous avions toute latitude de choisir les différentielles qui devaient rester des nombres ordinaires et celle qui devenait une matrice. Nous avons convenu que $d\tau'$ ou du' était une matrice et que dt restait un paramètre ; mais nous aurions parfaitement pu admettre que $d\tau$ devait garder le caractère de paramètre et que, par exemple, dt' était une matrice. Au lieu de (8/10) nous pouvons écrire maintenant :

$$\frac{dt'}{d\tau} = -\frac{1}{c}\left(\sum_1^3 \alpha_r \frac{dx_r}{d\tau} + c\alpha_4\right),$$

ou :

$$\frac{dt'}{du} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\alpha_4}{i} + \sum_1^3 \alpha_r \frac{dx_r}{du}\right), \qquad (10/10)$$

(u, x_1, x_2, x_3 nombres ordinaires, t' matrice à quatre lignes et quatre colonnes). *Passons aux opérateurs*, u restant un paramètre. Les « dérivées » correspondant aux dx_r/du seront données par la formule générale (1/8). On a facilement :

$$\left[\frac{dx_r}{du}\right] = i\alpha_4\alpha_r \qquad (r = 1, 2, 3) \qquad (11/10)$$

et ici aussi, ces opérateurs ne commutent pas avec leurs coefficients. Le même raisonnement que plus haut nous donne, pour le second membre, l'opérateur $-\alpha_4/ic$. Ceci doit être égal à $\left[\frac{dt}{du}\right]$ calculé au moyen de la formule générale ; et en effet on vérifie directement, d'après (1/8) avec la valeur (8/7) de S, que :

$$\left[\frac{dt}{du}\right] = -\frac{\alpha_4}{ic} \quad \text{ou} \quad \left[\frac{dt}{d\tau}\right] = \left[\frac{dx_4}{du}\right] = -\alpha_4$$

qui est bien le résultat primitif [1].

11. Etats, et moyennes observables. Difficultés du problème. Nous avons montré dans les paragraphes précédents comment on pouvait définir formellement en mécanique quanti-

[1] Remarquons que, pour arriver à une définition correcte du temps propre, nous avons dû prendre le premier *facteur* dans la décomposition des *coordonnées* (6/10) alors que nous avions pris le *second* dans la décomposition des moments (5/10). *A priori*, rien n'indique qu'il faille prendre le même facteur dans les deux décompositions ; au contraire, il est naturel de procéder d'une manière différente suivant qu'il s'agit de coordonnées ou de moments canoniquement conjugués. Au surplus, le produit de ces facteurs commence par un terme de la forme correcte $p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3 - Wdt + \ldots$, qu'on n'obtiendrait pas en choisissant le second facteur dans les deux décompositions ; au fond, il s'agit ici d'une question de covariance et de contrevariance sur laquelle nous n'insisterons pas.

que un « temps propre ». En mécanique classique, cette définition exige la connaissance du mouvement du système ; en mécanique quantique, ce genre de définition fait défaut et on doit passer par l'intermédiaire des opérateurs. La définition de la variation d'un opérateur ξ quelconque avec le temps propre u permet, au moins formellement, de développer une théorie dans laquelle u serait regardé comme paramètre et qui par conséquent serait relativiste non seulement dans le fond, mais même dans sa forme. Mais ceci n'est qu'un aspect de la question, celui qui correspond *au calcul des opérateurs* ; pour résoudre complètement le problème il faudrait pouvoir énoncer des théorèmes concernant les états du système, c'est-à-dire, employer le calcul des valeurs et des fonctions propres. Or, c'est là que gît la difficulté.

Elle se manifeste d'abord par le fait que dans la théorie ordinaire la fonction d'onde ψ (x, y, z, t) dépend directement du paramètre choisi c'est-à-dire de t, tandis qu'il n'en est pas de même si l'on prend comme paramètre le « temps propre » τ que nous venons de définir.

Assurément, nous pouvons encore dire que ψ dépend du paramètre τ, mais la manière dont on doit mettre en concordance les diverses valeurs de x, y, z, t et celles de τ, autrement dit la forme des fonctions x, y, z, t de τ, n'est pas connue. De toute façon, pour avoir x, y, z, t, en fonction de τ il faut trouver quel est le mouvement ; mais tandis qu'en mécanique classique nous savons que x, y, z, t, sont des fonctions continues ayant une forme unique et bien déterminée de τ (qui représente la longueur d'un arc de courbe), en mécanique quantique nous ne pouvons plus rien dire, ni sur la continuité, ni même sur la constance de la forme de ces fonctions, lorsque τ varie. On a cependant l'impression que ces difficultés sont d'ordre purement mathématique et ne touchent pas le fond physique de la question. Elles tiennent au fait que nous voulons décrire la manière dont une fonction ψ dépend d'une variable τ, que nous ne pouvons définir qu'après avoir résolu un problème de mécanique quantique. Il n'est pas impossible d'imaginer qu'en perfectionnant les méthodes de calcul, on puisse atteindre la solution de ce problème purement mathématique, mais cela ne suffirait pas pour éclairer le côté physique du problème envisagé.

En tout cas, parallèlement au calcul des opérateurs, on devrait développer le calcul des fonctions d'ondes, et le premier problème à résoudre serait de trouver les valeurs et les fonctions propres de l'hamiltonien relativiste S, de façon à pouvoir développer une fonction quelconque ψ en série suivant ces fonctions fondamentales. Il est relativement simple d'en trouver l'expression, mais il est difficile de préciser le domaine dans lequel on doit les définir.

L'important dans le cas qui nous préoccupe est de trouver un procédé qui nous permette de passer d'un opérateur η à une quantité mesurable, qui puisse l'interpréter physiquement. Or l'intégrale :

$$\bar{\eta}(t) = \int \psi^{*} \eta \psi . dxdydz, \qquad (1/11)$$

représente effectivement, en mécanique newtonienne, la moyenne des mesures de la grandeur physique correspondant à η, faites à un instant t bien déterminé ; elle varie avec t. Cette intégrale est prise pour un volume d'espace, qui n'a pas de signification invariante en relativité ; donc la moyenne (1/11) est inutilisable. Pour qu'elle ait un sens, il faudrait par exemple, prendre l'intégrale de la densité $\psi^{*}\eta\psi$ *sur un volume d'espace-temps*. Mais alors le résultat serait indépendant de t et nous ne pourrions plus suivre *l'évolution* du phénomène, but que nous nous étions assigné. Telle est brièvement résumée, la difficulté principale qu'on rencontre dans ce problème.

On peut faire à ce sujet les remarques suivantes (en nous bornant au cas ou η représente un opérateur formé par un produit des α_r, cas le plus intéressant en relativité).

1° Les densités de moyenne $\psi^{*}\eta\psi$ présentent les caractères tensoriels requis par une théorie relativiste correcte ; elles se sont avérées indispensables pour l'interprétation des faits, donc elles jouent certainement un rôle dans l'interprétation physique. La difficulté commence lorsqu'on veut passer aux *moyennes* et intégrer ces densités dans l'espace.

2° D'après le raisonnement communément admis, les moyennes (1/11) étant inacceptables, il faut les remplacer par des moyennes dans l'espace-temps et ceci détruit leur signification. Mais il se peut que *ce raisonnement-ci* soit erroné. Il se peut que la solution consiste non pas à abandonner la moyenne (1/11) dans une théorie relativiste symétrique, mais à la garder et *à la compléter par d'autres grandeurs* [1]. Lorsque η est un opérateur formé par des produits de α_r, on pourrait garder (1/11) et interpréter $\psi^{*}\eta\psi . dxdydz$ comme la valeur de la probabilité d'une grandeur, lorsqu'on sait qu'une autre grandeur t, dont l'opérateur commute avec η, a une valeur bien déterminée. Autrement dit, (1/11), donnerait une *probabilité relative*, la mesure simultanée de η et de t étant possible, par hypothèse.

Mais, en même temps on peut dire que, par raison de symétrie, cette information est insuffisante ; on peut considérer aussi trois autres probabilités :

$$\left.\begin{array}{lll} \psi^{*}\eta\psi . dydzdt, & \psi^{*}\eta\psi . dzdxdt, & \psi^{*}\eta\psi . dxdydt \\ \text{et :} & & \\ & \psi^{*}\eta\psi . dxdydzdt, & \end{array}\right\} \quad (2/11)$$

toujours dans l'hypothèse que η commute avec les coordonnées et le temps [2]. Le sens physique de ces quantités n'est

[1] Considérons en mécanique newtonienne, *uniquement* la composante p_1 de la quantité de mouvement de long de Ox. Il est clair que lorsqu'on passe à la mécanique relativiste, cette grandeur n'a aucune signification ; seul, l'ensemble des quatre composantes formant l'impulsion d'univers, en a une.

[2] Certaines de ces densités peuvent être purement imaginaires, pour satisfaire aux conditions de réalité requises. Voir le paragraphe 25.

pas très clair ; $\int \psi^* \eta \psi . dydzdt$ donne, par exemple, une grandeur prise pendant toute l'évolution du système, mais seulement lorsque la coordonnée x a une valeur déterminée.

La vraie difficulté qu'on rencontre lorsqu'on introduit les quantités (2/11) pour compléter, du point de vue relativiste, les informations que nous possédons sur le mouvement du système, consiste dans le fait que lorsqu'on passe aux moyennes en intégrant (2/11), on ne sait rien *à priori* sur les nouveaux *domaines d'intégration* ; une analyse de cette difficulté est indispensable avant de pouvoir chercher le sens physique de ces expressions.

Ce qui précède nous indique seulement une voie suggérée par des considérations de symétrie mathématique. Physiquement, c'est tout le problème de la mesure d'une grandeur qui est en jeu. Il est probable qu'à ce point de vue, les difficultés qu'on a rencontrées (et qui se sont manifestées, en particulier, par le flottement qu'il y a eu au début dans l'établissement des relations d'incertitudes correctes), ont comme origine le fait suivant : en micro-mécanique le phénomène à mesurer est essentiellement influencé par l'appareil de mesure lui-même, *qui intervient d'une façon non négligeable* ; pour calculer le résultat d'une mesure, il faut donc résoudre un *problème relativiste de deux corps*, problème qui n'est pas encore résolu, même en théorie classique.

Quoi qu'il en soit, ce qui nous intéresse en particulier dans une théorie relativiste ce sont les densités $\psi^* \eta \psi$, et celles-ci peuvent être définies sans aucune ambiguïté.

12. Densités de moyennes. — L'absence de renseignements plus précis sur l'opérateur *mc* et sur la manière dont finalement x_1, x_2, x_3, t, dépendent du temps propre, nous empêchent d'appliquer ici le raisonnement qui nous permettait, en mécanique quantique, de donner un sens à l'opérateur

« dérivée par rapport au *temps* » $\frac{d\eta}{dt}$, et trouver ainsi une signification de la « dérivée » par rapport au *temps propre* $\left[\frac{d\eta}{d\tau}\right]$. Nous pouvons cependant donner une interprétation très précise de la *densité de moyenne* de $\left[\frac{d\eta}{d\tau}\right]$ de la façon suivante (¹) :

On a par définition : $\varkappa\left[\frac{d\eta}{du}\right] = S\eta - \eta S$ (nous supposons que η ne dépend pas explicitement ni de τ, ni du temps ordinaire t, pour simplifier). De plus :

$$S = i\alpha_4\left[\frac{\varkappa}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{H}{c} - \alpha_4 mc\right] = \frac{i\alpha_4}{c}\left(\varkappa\frac{\partial}{\partial t} + H\right) - imc,$$

H étant l'hamiltonien. Donc, en appliquant à une fonction d'onde ψ :

$$\varkappa\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}\right]\psi = S\eta\psi - \eta S\psi = (S + imc)\eta\psi = \frac{i\alpha_4}{c}\left(\varkappa\frac{\partial}{\partial t} + H\right)\eta\psi.$$

D'autre part :

$$o = \eta\left(\varkappa\frac{\partial}{\partial t} + H\right)\psi,$$

d'où :

$$-ic\alpha_4.\varkappa\left[\frac{d\eta}{du}\right]\psi = (H\eta - \eta H)\psi = \varkappa\frac{d\eta}{dt}\psi,$$

donc :

$$\left[\frac{d\eta}{du}\right]\psi = \frac{i}{c}\alpha_4.\frac{d\eta}{dt}\psi \quad \text{ou :} \quad \left[\frac{d\eta}{d\tau}\right]\psi = -\alpha_4\frac{d\eta}{dt}\psi \qquad (1/12)$$

et par conséquent :

$$\psi^*\left[\frac{d\eta}{du}\right]\psi = \frac{i}{c}\psi^*\alpha_4\frac{d\eta}{dt}\psi,$$

(¹) Cette interprétation a été donnée également par T. Tanaka, *Z. Physik*, 69, 1931, p. 810, dans l'hypothèse que *mc* est un opérateur de la forme $\varkappa.\ \partial/\partial\omega$; ce qui suit montre que cette hypothèse n'est pas essentielle.

soit encore :

$$\psi^*\left(\frac{d\tau}{dt}\right)\psi + \psi^*\left(\alpha_4\left[\frac{d\eta}{d\tau}\right]\right)\psi = 0. \qquad (2/12)$$

Ces relations permettent d'interpréter les moyennes des dérivées par rapport au temps propre, en utilisant les moyennes des dérivées par rapport au temps ordinaire, et fournissent ainsi une expression mathématique de l'opération du « changement de paramètre » que nous avons étudiée.

Il est un cas particulier, très important, dans lequel nous pouvons aller beaucoup plus loin et donner l'expression de la « dérivée » $\left[\frac{d\eta}{du}\right]$ en fonction de $\frac{d\eta}{dt}$. C'est le cas ou η est un opérateur commutant avec mc et W/c et en même temps, *commutant avec* α_4. Certains opérateurs formés par les produits des α_k sont dans ce cas. On a alors par un raisonnement analogue, *si* η *commute avec* α_4 .

$$\left[\frac{d\eta}{du}\right] = \frac{i\alpha_4}{c}\,\frac{d\eta}{dt}, \qquad (3/12)$$

relation écrite maintenant entre opérateurs et non plus entre densité de moyennes. On peut donner une formule pour le cas où η anticommute avec α_4, mais elle est moins simple.

CHAPITRE II

Intégrales premières.

13. Dérivées des opérateurs α. — L'électron de Dirac diffère d'un électron ordinaire, d'abord par la forme linéaire de son hamiltonien, ensuite par l'apparition des opérateurs α_k. Il y a quatre opérateurs nouveaux α_k, qui apparaissent dans l'hamiltonien. Si on calculait une autre grandeur attachée à l'électron on rencontrerait encore ces quatre α_k et aussi, éventuellement, leurs produits. Or, on sait qu'avec les quatre α_k on ne peut former par multiplication que seize opérateurs linéairement indépendants. Chacun de ces seize opérateurs décrit d'une façon ou d'une autre une caractéristique de l'électron : par exemple, les $c\alpha_r$ représentent la vitesse $\varkappa\alpha_2\alpha_3/2$ une composante du moment cinétique, etc. Les relations qui décrivent des propriétés nouvelles de l'électron de Dirac comportent nécessairement un certain nombre de ces seize opérateurs. Pour une étude complète de ces propriétés nouvelles, il faudra donc analyser d'abord le comportement de ces opérateurs, sans en négliger aucun.

Commençons donc par calculer leur variation par rapport au temps et par rapport au temps propre. Nous avons dressé le tableau de la page 384. La première colonne contient l'opérateur A envisagé ; la seconde $HA - AH = \varkappa \frac{dA}{dt}$; la troisième $SA - AS = \varkappa\left[\frac{dA}{du}\right]$; la quatrième et la cinquième, respectivement, les anticommutateurs $AH + HA$ et

$$AS + SA.$$

Rappelons qu'on a :

$$H = c\sum_1^3 \alpha_r p_r + \alpha_4 mc^2 = K + \alpha_4 mc^2$$

$$S = \sum_1^3 i\alpha_4\alpha_r p_r + \frac{W}{ic}\alpha_4,$$

avec :

$$p_k = \varkappa \frac{\partial}{\partial x_k} \,(k = 1, 2, 3, 4), \quad p_4 = -\frac{W}{ic}, \quad \frac{W}{c} = -\frac{\varkappa}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

H ne contient pas explicitement le temps t, et S ne contient pas explicitement u ; $dH/dt = 0$, $[dS/du] = 0$, H est une constante et S une constante d'univers. Dans le tableau suivant nous désignerons *ces constantes* par les mêmes lettres H et S.

TABLEAU I

Opérateur A	$\varkappa \frac{dA}{dt} = HA - AH$	$\varkappa \left[\frac{dA}{du}\right] = SA - AS$	$HA + AH$	$AS + SA$
α_1	$2(H\alpha_1 - cp_1)$	$-2\left(\alpha_1 p_1 + \frac{W}{c}\right) i\alpha_4\alpha_1$	$2cp_1$	$-2i(\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3)\alpha_4\alpha_1$
α_2	$2(H\alpha_2 - cp_2)$	$-2\left(\alpha_2 p_2 + \frac{W}{c}\right) i\alpha_4\alpha_2$	$2cp_2$	$-2i(\alpha_3 p_3 + \alpha_1 p_1)\alpha_4\alpha_2$
α_3	$2(H\alpha_3 - cp_3)$	$-2\left(\alpha_3 p_3 + \frac{W}{c}\right) i\alpha_4\alpha_3$	$2cp_3$	$-2i(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)\alpha_4\alpha_3$
α_4	$2(H\alpha_4 - mc^2) =$ $= 2c(\Sigma\alpha_1 p_1)\alpha_4$	$-2i(\Sigma\alpha_1 p_1) = 2\left(S\alpha_4 - \frac{W}{ic}\right)$	$2mc^2$	$-2i\frac{W}{c}$
$\alpha_2\alpha_3$	$2c(\alpha_3 p_2 - \alpha_2 p_3)$	$2i\alpha_4(\alpha_3 p_2 - \alpha_2 p_3)$	$2c(\alpha_1 p_1 + mc\alpha_4)\alpha_2\alpha_3$	$-2i\left(\alpha_1 p_1 + \frac{W}{c}\right)\alpha_2\alpha_3\alpha_4$
$\alpha_3\alpha_1$	$2c(\alpha_1 p_3 - \alpha_3 p_1)$	$2i\alpha_4(\alpha_1 p_3 - \alpha_3 p_1)$	$2c(\alpha_2 p_2 + mc\alpha_4)\alpha_3\alpha_1$	$-2i\left(\alpha_2 p_2 + \frac{W}{c}\right)\alpha_3\alpha_4\alpha_1$
$\alpha_1\alpha_2$	$2c(\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2)$	$2i\alpha_4(\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2)$	$2c(\alpha_3 p_3 + mc\alpha_4)\alpha_1\alpha_2$	$-2i\left(\alpha_3 p_3 + \frac{W}{c}\right)\alpha_4\alpha_1\alpha_2$
$\alpha_4\alpha_1$	$-2c(\alpha_4 p_1 - \alpha_1 mc)$	$2(S\alpha_4\alpha_1 + ip_1)$	$2c(\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3)\alpha_4\alpha_1$	$-2ip_1$
$\alpha_4\alpha_2$	$-2c(\alpha_4 p_2 - \alpha_2 mc)$	$2(S\alpha_4\alpha_2 + ip_2)$	$2c(\alpha_3 p_3 + \alpha_1 p_1)\alpha_4\alpha_2$	$-2ip_2$
$\alpha_4\alpha_3$	$-2c(\alpha_4 p_3 - \alpha_3 mc)$	$2(S\alpha_4\alpha_3 + ip_3)$	$2c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)\alpha_4\alpha_3$	$-2ip_3$
$\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$2cp_1.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$-2ip_1.\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$2c(\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc)\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$2(S.\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + ip_1.\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$
$\alpha_3\alpha_4\alpha_1$	$-2cp_2.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$+2ip_2.\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$2c(\alpha_3 p_3 + \alpha_1 p_1 + \alpha_4 mc)\alpha_3\alpha_4\alpha_1$	$2(S.\alpha_3\alpha_4\alpha_1 - ip_2.\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$
$\alpha_4\alpha_1\alpha_2$	$2cp_3.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$-2ip_3.\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$2c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_4 mc)\alpha_4\alpha_1\alpha_2$	$2(S.\alpha_4\alpha_1\alpha_2 + ip_3.\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$2H.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$2i\frac{W}{c}.\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	0	$2i(\Sigma\alpha_1 p_1)\alpha_1\alpha_2\alpha_3 =$ $= 2\left(S.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \frac{iW}{c}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)$
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$-2mc^2.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$2S.\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$2c(\alpha_2\alpha_3 p_1 + \alpha_3\alpha_1 p_2 + \alpha_1\alpha_2 p_3)$	0

14. Intégrales premières. Moments cinétiques. — Un opérateur ξ sera appelé une « intégrale première proprement dite », lorsque $d\xi/dt = 0$. Nous dirons de même que nous avons affaire à une « intégrale première d'univers », si $[d\xi/du] = 0$.

L'analogie avec la mécanique classique nous suggère immédiatement quelques types d'intégrales premières proprement dites, par exemple ceux des intégrales correspondant à la constance de la quantité du mouvement ou du moment cinétique. Mais l'électron de Dirac possède des propriétés différentes de celles d'un électron classique ; cette différence se manifestera non seulement dans la forme des intégrales, qui sera différente de la forme classique, mais aussi dans *l'existence d'autres intégrales premières simples, distinctes des précédentes.*

Nous allons former systématiquement ces intégrales, qui peuvent, en gros, se partager en deux groupes, correspondant, l'un aux moments cinétiques classiques, l'autre aux quantités de mouvement.

Ainsi qu'il est bien connu, l'énergie et la quantité de mouvement d'un électron de Dirac sont constantes en l'absence de champ. Les plus simples intégrales premières sont donc :

$$p_r = \text{const.} \qquad \mathrm{H} = \text{const.}, \tag{1/14}$$

intégrales banales que nous retrouverons d'ailleurs plus loin. Mais le type d'intégrale première réellement utile dans ce problème est celui utilisé par Dirac dès le début et qui donne le spin de l'électron. On peut les écrire sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} x_2p_3 - x_3p_2 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_2\alpha_3 &= \text{const.} \\ x_3p_1 - x_1p_3 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_3\alpha_1 &= \text{const.} \\ x_1p_2 - x_2p_1 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_1\alpha_2 &= \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{2/14}$$

et elles expriment la conservation du moment cinétique *total*, y compris le moment de rotation propre de l'électron. Leur vérification est aisée au moyen du tableau I; on peut les écrire :

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + \frac{\varkappa}{2i} \sigma_1 = \text{const.}$$

$$\cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

en posant :

$$\sigma_1 = i\alpha_2\alpha_3, \qquad \sigma_2 = i\alpha_3\alpha_1, \qquad \sigma_3 = i\alpha_1\alpha_2. \qquad (3/14)$$

La théorie présente la symétrie relativiste. Ecrivons alors en regard les coordonnées et les moments de la façon suivante :

$$\left.\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 = ict & c\tau \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dfrac{iH}{c} & -mc \end{array}\right\} \qquad (4/14)$$

Les grandeurs placées sur une même ligne jouent des rôles absolument analogues. En formant de toutes les manières possibles des composantes « de moment cinétique » c'est-à-dire analogues à $x_2 p_3 - x_3 p_2$, nous arriverons à des intégrales analogues à (2/14). En effet, en utilisant le tableau I, on démontre facilement les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \dfrac{H}{c} - cp_1 . t + \dfrac{\varkappa}{2} \alpha_1 = \text{const.} \\[2ex] x_2 \dfrac{H}{c} - cp_2 . t + \dfrac{\varkappa}{2} \alpha_2 = \text{const.} \\[2ex] x_3 \dfrac{H}{c} - cp_3 . t + \dfrac{\varkappa}{2} \alpha_3 = \text{const.} \end{array}\right\} \qquad (5/14)$$

Ces équations forment le pendant de (2/14) et définissent des « composantes de temps » du tenseur moment cinétique de l'électron. Elles fournissent aussi immédiatement les valeurs des coordonnées et donnent la décomposition de Schrödinger. Par un calcul facile, on a :

$$x_r = \text{const.} + c^2 p_r H^{-1} . t + \frac{c\varkappa}{2} H^{-1} \alpha_r . \qquad (6/14)$$

A la vitesse constante, à laquelle on pourrait s'attendre en l'absence de champ, se superpose donc, dans le cas de l'électron de Dirac, une autre vitesse supplémentaire, qui est oscillante, ainsi que nous le verrons plus loin.

En regard des coordonnées et moments nous avons inscrit dans le schéma (4/14) les variables conjuguées $c\tau$ et $-mc$. En appliquant le même mécanisme formel que précédemment, on trouve de nouvelles intégrales premières. Posons pour abréger l'écriture :

$$v_r = i\alpha_4\alpha_r, \qquad v_4 = -\alpha_4 \qquad (r = 1, 2, 3) \qquad (7/14)$$

qu'on peut écrire :

$$v_k = \left[\frac{dx_k}{du}\right] = x'_k. \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Nous désignerons dorénavant par des accents les dérivées prises par rapport à u, et par un point celles par rapport à t. Avec ces notations on vérifie facilement que :

$$\left.\begin{aligned} x_1.mc + p_1.c\tau + \frac{\varkappa i}{2} v_1 &= \text{const.} \\ x_2.mc + p_2.c\tau + \frac{\varkappa i}{2} v_2 &= \text{const.} \\ x_3.mc + p_3.c\tau + \frac{\varkappa i}{2} v_3 &= \text{const.}, \end{aligned}\right\} \qquad (8/14)$$

qui donne la décomposition analogue à celle de Schrödinger pour les coordonnées, mais en fonction du temps propre. La combinaison avec la colonne du temps fournit :

$$mc^2t + H\tau + \frac{\varkappa}{2}\alpha_4 = \text{const.}, \qquad (9/14)$$

qui donne la décomposition du temps propre en fonction du temps ordinaire.

Remarquons qu'en utilisant le même procédé, nous aurions pu trouver les « intégrales premières d'univers » suivantes :

$$\left.\begin{aligned} x_1 \mathrm{S} - p_1 u + \frac{\varkappa}{2} v_1 &= k_1 = \text{const. d'univers} \\ x_2 \mathrm{S} - p_2 u + \frac{\varkappa}{2} v_2 &= k_2 = \quad » \\ x_3 \mathrm{S} - p_3 u + \frac{\varkappa}{2} v_3 &= k_3 = \quad » \\ x_4 \mathrm{S} - p_4 u + \frac{\varkappa}{2} v_4 &= k_4 = \quad » \end{aligned}\right\}, \qquad (10/14)$$

une constante d'univers k étant définie par la relation

$$[dk/du] = 0.$$

On peut ainsi noter :

$$x_r\left(-\frac{\mathrm{W}}{ic}\right) - x_4 p_r + \frac{\varkappa i}{2}\alpha_r = \text{const. d'univers}, \qquad (11/14)$$

relations qui nous seront utiles plus tard.

Des égalités qui précèdent, on peut déduire d'autres intégrales premières particulièrement intéressantes. On a, par exemple, en partant de (2/14) :

$$\Sigma i \alpha_2 \alpha_3 p_1 = \Sigma \sigma_1 p_1 = \text{const.} : \qquad (12/14)$$

la projection du moment cinétique sur la direction de la quantité de mouvement est une constante ; nous retrouverons cette intégrale plus loin, par une autre voie. On a aussi :

$$\sum_1^3 p_r x_r - \mathrm{H}t - umc = \text{const.}, \qquad (13/14)$$

qui donne « l'action », et se déduit en intégrant directement l'expression de H. Enfin remarquons qu'on a, en vertu de (5/14) :

$$\dot{x}_r \frac{\mathrm{H}}{c} - cp_r + \frac{\varkappa}{2} \dot{\alpha}_r = 0$$

ou d'une façon générale :

$$\boxed{p_r = \dot{x}_r \frac{\mathrm{H}}{c^2} + \frac{\varkappa}{2c^2} \ddot{x}_r} \qquad (r = 1, 2, 3), \qquad (14/14)$$

formule d'une importance capitale qui donne la quantité de mouvement en fonction de la vitesse. La différence entre l'électron de Dirac et l'électron classique consiste précisément en cette séparation des deux notions : quantité de mouvement et vitesse ; Fock a particulièrement insisté là-dessus. On voit ici en quoi consiste cette séparation. En mécanique classique, avec un coefficient $\varkappa$ réel, une pareille relation signifierait un mouvement avec *dissipation d'énergie*. Ici cependant $\varkappa$ est complexe et l'énergie totale reste constante. On doit rapprocher cela des observations de Schrödinger, relatives aux équations de diffusion à coefficient imaginaire.

Notons encore la forme des relations (14/14), lorsqu'on considère les dérivées par rapport au temps propre, et qui nous seront utiles par la suite :

$$p_k = x'_k \mathrm{S} + \frac{\varkappa}{2} x''_k = \mathrm{S} x'_k - \frac{\varkappa}{2} x''_k \qquad (15/14)$$

d'où :

$$x''_k = \frac{2}{\varkappa}(p_k - v_k \mathrm{S}) = \frac{2}{\varkappa}(\mathrm{S} v_k - p_k). \qquad (16/14)$$

15. Intégrales premières. Quantités de mouvement. — Une autre série d'intégrales premières, à laquelle appartiennent les composantes de la quantité de mouvement, s'obtient en remarquant que le carré de l'hamiltonien :

$$\mathrm{H}^2 = c^2 \Sigma p_r^2 + m^2 c^4, \qquad (1/15)$$

commute avec tous les produits α. On a alors le théorème suivant, qu'on démontre facilement (voir plus loin) :

L'anticommutateur, de tout opérateur ξ *qui commute avec* H^2, *est une intégrale première ;* en particulier, les anticommutateurs de tous les produits α fournissent chacun une intégrale première.

La colonne HA + AH du tableau I nous donne donc directement des intégrales premières [1], dont toutes ne sont d'ailleurs pas distinctes de celles précédemment obtenues. On y voit figurer d'abord la quantité de mouvement et la masse, anticommutateurs des α_r :

$$\left.\begin{aligned} H\alpha_r + \alpha_r H &= 2cp_r = \text{const.} \\ H\alpha_4 + \alpha_4 H &= 2mc^2 = \text{const.} \end{aligned}\right\} \qquad (2/15)$$

Les produits de deux α_k, fournissent des intégrales du type :

$$(i\alpha_1\alpha_2\alpha_3)p_1 + mc.(i\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \text{const.}, \qquad (3/15)$$

ou du type :

$$(i\alpha_3\alpha_4\alpha_1)p_3 + (i\alpha_4\alpha_1\alpha_2)p_2 = \text{const.}, \qquad (4/15)$$

intégrales premières *distinctes* de celles obtenues au paragraphe précédent. Les produits de trois α_k fournissent des intégrales du type :

$$(i\alpha_2\alpha_3\alpha_4)H + icp_1(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \text{const.} \qquad (5/15)$$

qui s'écrit aussi :

$$(\alpha_2p_2 + \alpha_3p_3 + \alpha_4mc)i\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \text{const.} \qquad (6/15)$$

et, — pour $\xi = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, — l'intégrale première :

$$(\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 + \alpha_3p_3)i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \text{const.} \qquad (7/15)$$

qu'on peut écrire :

$$\Sigma\sigma_1p_1 = \text{const.}, \qquad (8/15)$$

forme sous laquelle nous l'avons déjà décrite au paragraphe précédent.

[1] Qui sont hermitiques si A l'est, et qu'il suffit de multiplier par $i = \sqrt{-1}$, pour les rendre hermitiques, si A est lui même antihermitique.

Remarquons, qu'à part les quatre premières qui sont banales, les 10 intégrales restantes peuvent s'écrire sous une forme symétrique. Il suffit de former le tableau suivant, analogue à (4/14) :

$$\left.\begin{array}{cccc|c} p_1 & p_2 & p_3 & \dfrac{iH}{c} & -mc \\ i\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & -i\alpha_3\alpha_4\alpha_1 & i\alpha_4\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{array}\right\}$$

et d'égaler à une constante les déterminants du second ordre qu'on peut y former (en mettant les éléments de la seconde ligne à gauche lorsqu'ils ne commutent pas avec ceux de la première).

Ces intégrales sont particulièrement intéressantes parce qu'elles existent *même en présence d'un champ*, si l'on introduit ce champ à la façon ordinaire, par l'intermédiaire des potentiels. En effet, quel que soit ce champ, l'opérateur ξ formé par le produit d'un certain nombre de α_k, commutera avec H^2 ; son anticommutateur fournira alors une intégrale première.

Ces intégrales font intervenir les produits de la forme $\alpha_r\alpha_s\alpha_t\,(r \neq s \neq t)$, ainsi que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Jusqu'à présent, on a accordé très peu d'attention à ces opérateurs ; on préférait décrire l'ensemble des 16 sédénions de base au moyen de deux systèmes de quaternions, à la manière de Dirac ou de Fock. Cependant les opérateurs $\alpha_r\alpha_s\alpha_t$ présentent des avantages marqués de simplicité ; ils ont les dérivées les plus simples de tout l'ensemble, et comme nous venons de le voir, ils fournissent des intégrales intéressantes.

Les opérateurs du type α_k ou $\alpha_r\,\alpha_s$, envisagés au paragraphe précédent décrivent le nouveau degré de liberté de l'électron correspondant au spin ; les quatre opérateurs

$$i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \qquad -i\alpha_3\alpha_4\alpha_1, \qquad i\alpha_4\alpha_1\alpha_2, \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$

peuvent être utilisés pour décrire ce que Fock appelle le « second degré de liberté interne » de l'électron. Les unités quaternoniennes décrivent ce second degré de liberté comme une rotation dans un espace abstrait, essentiellement distinct de l'espace ordinaire. Nous verrons que, même si l'on reste strictement dans le domaine de la mécanique, les nouveaux opérateurs peuvent s'interpréter par une image beaucoup plus intuitive.

16. Opérateurs ternaires. — Pour simplifier les notations, posons :

$$\theta = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \qquad \omega = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \tag{1/16}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \quad & R_2 &= -\, i\alpha_3\alpha_4\alpha_1, \\ R_3 &= i\alpha_4\alpha_1\alpha_2, \quad & R_4 &= -\, i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\,\omega. \end{aligned} \tag{2/16}$$

On a :

$$R_k = i\alpha_k\theta = -\,\alpha_k\alpha_4\omega \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{3/16}$$

La relation $R_k = i\alpha_k\theta$ a une conséquence importante. Considérons en effet une particule définie par un hamiltonien hermitique $H' = iH\theta$. Si $H = c\sum_1^3 \alpha_r p_r + \alpha_4 mc^2$, on aura :

$$H' = c\Sigma R_r p_r + R_4 mc^2.$$

Or, on a, à cause de (3/16), $R_k^2 = 1$, $\quad R_rR_s + R_sR_r = 0$; donc, cette seconde particule peut être considérée également comme un électron de Dirac. Les R_k jouent donc, pour le second électron, le même rôle que les α_k pour le premier. Si l'on établit une interprétation pour les α_k d'un électron de Dirac, elle vaudra également pour l' « électron image » défini par l'hamiltonien $H' = iH\theta$; par exemple, la vitesse de ce dernier sera $\dot{x}_r = cR_r$, et ainsi de suite. La symétrie est complète. Soit ψ_n une fonction propre de l'opérateur H, correspondant à l'énergie E_n, $H\psi = E_n\psi$; $\theta\psi_n$ sera alors la fonction propre correspondant à l'énergie égale mais négative $-\, E_n$. (Si ψ représente un état de l'électron, $\theta\psi$ ne représente pas un état du même électron, puisqu'elle ne satisfait pas à l'équation d'onde ; $\theta\psi$ décrit un état de l'électron image, c'est-à-dire identique au précédent à cela près que *toutes* les valeurs de l'énergie, — aussi bien les positives que les négatives, — ont changé de signe).

L'opérateur θ est en quelque sorte le pendant de l'opérateur 1. Tandis que 1 commute avec tous les α_k, θ *anticommute* avec eux ; remarquons aussi qu'il anticommute avec R_k. Les 16 opérateurs α peuvent se séparer en deux groupes de 8, le premier contenant outre l'unité les quatre α_k et les trois composantes du spin :

1. $1, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_3\alpha_1, \quad \alpha_1\alpha_2.$

Ce premier groupe contient tous les opérateurs sur lesquels s'est porté exclusivement l'attention de la plupart des chercheurs jusqu'à présent. Rangeons dans le deuxième groupe le reste :

2. $\theta, \quad \alpha_2\alpha_3\alpha_4, \quad -\alpha_3\alpha_4\alpha_1, \quad \alpha_4\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_4\alpha_1, \quad \alpha_4\alpha_2, \quad \alpha_4\alpha_3.$

La symétrie à laquelle nous avons fait allusion plus haut se manifeste encore ici : les opérateurs du second groupe se déduisent du premier par simple multiplication à droite avec θ.

Nous avons vu que θ anticommute avec l'hamiltonien H. Cela nous permet de donner une signification générale à l'anticommutateur d'un opérateur ξ quelconque et de H. En effet si $A = i\xi\theta$, on a :

$$\varkappa\dot{A} = i(H\xi\theta - \xi\theta H) = (H\xi + \xi H)i\theta.$$

Par conséquent, quel que soit ξ, on a :

$$i(H\xi + \xi H) = \varkappa \frac{d(i\xi\theta)}{dt}.\theta. \qquad (4/16)$$

On sait l'importance des anticommutateurs de ce type dans la théorie ; la formule (4/16) montre comment on peut les réduire, grâce à l'emploi d'un opérateur donné une fois pour toutes, à des dérivées, c'est-à-dire au calcul d'un commutateur (Dans l'univers, le rôle de θ et H est joué par ω et S, qui, en particulier, anticommutent. On peut écrire pour ce cas une formule analogue).

Prenons maintenant un opérateur ξ particulier, tel qu'il anticommute avec H, $\mathrm{H}\xi + \xi\mathrm{H} = 0$. Il en résulte [1] que :

$$\frac{d(i\xi\theta)}{dt} = 0.$$

Donc, *si* ξ *anticommute avec* H, *l'opérateur* $\xi\theta$ *est une intégrale première* ; il en est de même de $\theta\xi$. Toute une série d'intégrales pourraient donc se déduire de la recherche des opérateurs qui anticommutent avec H.

L'intérêt de ce théorème réside en ce que, précisément, on peut trouver facilement toute une catégorie de pareils opérateurs. Reprenons en effet le cas particulier envisagé au paragraphe 15, d'un opérateur η commutant avec H^2 : *tous les seize opérateurs* α *sont dans ce cas*. On vérifie immédiatement le théorème inverse de celui du paragraphe 15 :

Lorsqu'un opérateur commute avec H^2, *sa dérivée anticommute avec* H. Donc, les dérivées de tous les opérateurs α anticommutent avec H. Il s'ensuit immédiatement que $i\dot{\eta}\theta$, où η est un opérateur quelconque commutant avec H^2, *est une intégrale première* [2].

(1) Au second membre on a bien un produit de deux opérateurs, mais comme θ n'est pas diviseur de zéro, il est permis de multiplier les deux membres à droite par θ et la conclusion déduite est correcte.

(2) Il est clair cependant que dans le cas particulier où η est un opérateur α, ces intégrales premières $\dot{\eta}\theta$ ne diffèrent pas de celles obtenues au paragraphe 15 et qui étaient égales à $\mathrm{HA} + \mathrm{AH}$. En effet :

$$\varkappa\dot{\eta}\theta = \mathrm{H}\eta\theta - \eta\mathrm{H}\theta = \mathrm{H}(\eta\theta) + (\eta\theta)\mathrm{H} = \mathrm{HA} + \mathrm{AH},$$

et le produit $\mathrm{A} = \eta\theta$ de deux opérateurs α est encore un opérateur α.

Retenons de ceci que les dérivées $\dot{\eta}$ des opérateurs α anticommutent avec H, tout comme θ. Par conséquent, on peut reprendre tous les raisonnements généraux conduits avec θ en remplaçant celui-ci par la dérivée $\dot{\eta}$ d'un opérateur α quelconque. La formule (4/16) reste valable en remplaçant θ par $\dot{\eta}$.

Le théorème s'énoncera alors : *le produit des dérivées de deux opérateurs α est une intégrale première.*

$$\frac{d}{dt}(\dot{\eta}\dot{\xi}) = 0.$$

Enfin, les raisonnements qui précèdent restent valables pourvu que les opérateurs qui interviennent anticommutent avec H. Or, ces opérateurs sont des cas particuliers des opérateurs « impairs », suivant la terminologie de M. Schrödinger. On peut montrer que : *le produit de deux opérateurs impairs est une intégrale première de l'équation de Dirac en l'absence de champ* (1).

Passons maintenant à un autre genre de considérations. Soit de nouveau l'opérateur θ. On a :

$$\varkappa\dot{\theta} = 2H\theta \qquad \text{donc :} \quad \theta = e^{\frac{2Ht}{\varkappa}} \cdot \theta_0 \qquad (6/16)$$

θ est donc un opérateur *purement oscillatoire*, le seul d'ailleurs parmi les 16 opérateurs fondamentaux qui jouisse de cette propriété. La période d'oscillation est la même que la période du mouvement de « vibration », découvert par Schrödinger. On peut donc essayer de rattacher cette « vibration » à l'existence de l'opérateur θ et à sa loi de variation. On peut arriver à mettre en évidence l'opérateur θ dans l'expression de tous les autres opérateurs α et à réduire la « vibration » de ceux-ci, à la « vibration » de θ.

Un théorème démontré plus haut nous a montré en effet que si η est un opérateur α quelconque,

$$\dot{\eta}\theta = \text{constante} = C.$$

(1) Je dois ce théorème à M. Schrödinger.

On a donc d'une manière absolument générale $\dot{\eta} = C\theta$; ou encore :

$$\dot{\eta} = \frac{\varkappa}{2} CH^{-1}\dot{\theta},$$

donc :

$$\eta = \frac{\varkappa}{2} CH^{-1}\theta + \text{constante}. \qquad (7/16)$$

Seule la constante C varie lorsqu'on passe d'un opérateur η_1 à un autre η_2. Elle est donnée par :

$$C = \frac{H\eta\theta + \eta\theta H}{\varkappa}.$$

Le premier terme de (7/16) est un opérateur impair, le second un opérateur pair (A ce point de vue, la décomposition en pair et impair s'obtient simplement en effectuant les calculs ; il vient, *quel que soit l'opérateur* η formé en multipliant des α_k :

$$\eta = \frac{1}{2}(\eta + H\eta H^{-1}) - \frac{1}{2}(H\eta H^{-1} - \eta),$$

ce qui est évident). On a par exemple, au moyen des intégrales premières déjà écrites, ou directement au moyen du tableau I :

$$\left.\begin{aligned} R_r &= icp_r H^{-1}\theta + \text{const.} \\ R_r &= -\frac{p_r}{mc}\,\omega + \text{const.} \\ &(r = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \qquad (8/16)$$

De plus :

$$mc^2\theta + H\omega = \text{const.}$$

conduit à :

$$R_4 = -\omega = imc^2 H^{-1}\theta + \text{constante}.$$

Ce sont les cas où la constante C a la forme la plus simple.

Pour les α_k ($k = 1, 2, 3, 4$), ces constantes sont plus compliquées. Posons cependant :

$$\dot{\alpha}_k \theta = \text{constante} = T_k \qquad \text{ou} \qquad \ddot{x}_k = c T_k \theta \; ; \quad (9/16)$$

les cT_k représentent en quelque sorte *l'amplitude de l'accélération*. On peut noter :

$$\sum_{k=1}^{4} T_k p_k = 0 \qquad (10/16)$$

parce que $\dot{H} = 0 = \Sigma p_k \dot{\alpha}_k$. T_4 est particulièrement intéressant :

$$T_4 = \dot{\alpha}_4 \theta = -2ic \sum_{1}^{3} \sigma_r p_r .$$

On a non seulement $dT_4/dt = 0$, mais aussi $[dT_4/du] = 0$.

Considérons enfin quelques formules concernant les dérivées secondes par rapport au temps propre, ou plus exactement par rapport à u, qui nous seront utiles par la suite (Nous désignons ces dérivées par des accents $x'_k = [dx_k/du]$). Du tableau I on déduit, en prenant la dérivée de $\alpha_4 \alpha_1$, les formules déjà établies :

$$x''_k = \frac{2}{\varkappa} (S x'_k - p_k) = \frac{2}{\varkappa} (p_k - x'_k S). \qquad (11/16)$$

On a la formule analogue à (9/16) :

$$x''_k \;\omega = \text{constante d'univers} ; \qquad (12/16)$$

ω anticommute avec S et avec x'_k ; *il commute* donc avec x''_k d'après (11/16). On déduit de (12/16) que :

$$(x''_k)^2 = \text{constante d'univers}. \qquad (13/16)$$

Cette constante se calcule directement en multipliant (11/16) et en tenant compte du fait que :

$$S^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \left(\frac{W}{c}\right)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 ,$$

avec :

$$p_4 = -\frac{W}{ic}. \qquad (14/16)$$

On a :

$$(x'_k)^2 = 1$$

et :

$$(x''_k)^2 = \frac{4}{\varkappa^2}(p_k^2 - S^2). \qquad (15/16)$$

Ces quelques relations montrent comment les opérateurs R_k, θ et ω interviennent pour caractériser un électron de Dirac ; elles nous seront utiles au chapitre suivant.

CHAPITRE III

Interprétation physique.

17. Covariants quadratiques. — Les nouvelles caractéristiques de l'électron de Dirac proviennent des opérateurs nouveaux, α, qu'on introduit ; ses nouvelles propriétés se refléteront donc dans la structure des moyennes observables qui correspondent à ces opérateurs. Les grandeurs intéressantes sont les densités spatiales, que nous appellerons « grandeurs quadratiques » ou « covariants quadratiques », et qui ont la forme bien connue d'une somme de quatre termes ; on a, par exemple, pour une des composantes du courant, à un facteur près :

$$\psi_1^*\psi_4 + \psi_4^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_3 + \psi_3^*\psi_2,$$

l'astérisque indiquant, comme toujours, la quantité complexe conjuguée. Ce sont des « densités de moyennes », mais pour lesquelles on aurait déjà effectué la sommation par rapport à la variable de spin. Nous les représenterons symboliquement par le produit de trois matrices

$$\tilde{\psi}^*\xi\psi, \tag{1/17}$$

où ξ est un des 16 opérateurs α, où ψ est une matrice à une seule colonne, d'éléments ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et $\tilde{\psi}^*$ la matrice transposée et conjuguée. Ce produit se réduit à un seul élément et (1/17) représentera par convention la valeur numérique de cet élément.

Pour donner un sens physique à ces grandeurs quadratiques, on s'appuie, dans les divers cas qui se présentent, sur des considérations de nature très différente. On fait appel, par exemple, aux lois de covariance de ces grandeurs quadratiques pour une transformation de Lorentz ; on utilise certaines relations différentielles (une équation de continuité par exemple), que nous appellerons relations de Gordon, parce qu'elles sont du type d'une décomposition que cet auteur a donnée pour la première fois; on emploie des intégrales premières *d'opérateurs* et, enfin, on compare directement des expressions classiques aux expressions quantiques correspondantes. On arrive ainsi, en utilisant l'une ou l'autre de ces diverses manières de procéder, à une interprétation physique des covariants quadratiques que nous résumerons, d'après M. L. DE BROGLIE, dans le tableau II.

La première colonne contient la grandeur physique considérée, la seconde l'opérateur qui la représente ; la troisième la densité spatiale $\tilde{\psi}^*\xi\psi$ de cet opérateur, telle que $\int\tilde{\psi}^*\xi\psi . dV$ soit la moyenne observable de ξ ; enfin, la quatrième colonne contient des indications sur la variance relativiste des expressions de la colonne précédente.

Dans ce qui suit, nous allons analyser d'un peu plus près certains arguments qui conduisent à cette interprétation physique, dans le but de les préciser. Pour cela, nous

Tableau II (d'après M. L. de Broglie).

Grandeur physique		Opérateur	Densité spatiale de la valeur moyenne	Variance
Masse propre (1)		$-m\alpha_4$	$-\tilde{\psi}^*\alpha_4\psi = -m_0\Omega_1$	Invariant
Courant électrique		$ec.\alpha_1$	$j_x = ec.\tilde{\psi}^*\alpha_1\psi$	Vecteur d'univers
		$ec.\alpha_2$	$j_y = ec.\tilde{\psi}^*\alpha_2\psi$	
		$ec.\alpha_3$	$j_z = ec.\tilde{\psi}^*\alpha_3\psi$	
Charge électrique		$-e.1$	$\delta = -e.\tilde{\psi}^*\psi$	
Moment magnétique	m_x	$B.i\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$I_x = B.\tilde{\psi}^*i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi$	Tenseur antisymétrique du second rang; $B = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c}$.
	m_y	$B.i\alpha_3\alpha_1\alpha_4$	$I_y = B.\tilde{\psi}^*i\alpha_3\alpha_1\alpha_4\psi$	
	m_z	$B.i\alpha_1\alpha_2\alpha_4$	$I_z = B.\tilde{\psi}^*i\alpha_1\alpha_2\alpha_4\psi$	
Moment électrique	P_x	$B.i\alpha_1\alpha_4$	$J_x = B.\tilde{\psi}^*i\alpha_1\alpha_4\psi$	
	P_y	$B.i\alpha_2\alpha_4$	$J_y = B.\tilde{\psi}^*i\alpha_2\alpha_4\psi$	
	P_z	$B.i\alpha_3\alpha_4$	$J_z = B.\tilde{\psi}^*i\alpha_3\alpha_4\psi$	
Spin	s_x	$\dfrac{h}{4\pi}.i\alpha_2\alpha_3$	$\sigma_x = \dfrac{h}{4\pi}.\tilde{\psi}^*i\alpha_2\alpha_3\psi$	Tenseur complètement antisymétrique du troisième rang
	s_y	$\dfrac{h}{4\pi}.i\alpha_3\alpha_1$	$\sigma_y = \dfrac{h}{4\pi}.\tilde{\psi}^*i\alpha_3\alpha_1\psi$	
	s_z	$\dfrac{h}{4\pi}.i\alpha_1\alpha_2$	$\sigma_z = \dfrac{h}{4\pi}.\tilde{\psi}^*i\alpha_1\alpha_2\psi$	
?	s_t	$\dfrac{h}{4\pi}.i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\sigma_t = \dfrac{h}{4\pi}.\tilde{\psi}^*i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi$	
?		$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$\Omega_2 = \tilde{\psi}^*\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi$	Tenseur complètement antisymétrique du quatrième rang

(1) Pour la justification de cette interprétation, voir L. de Broglie, *Comptes Rendus*, t. 195, 1932, p. 577.

examinerons en détail la décomposition de Gordon, ainsi que les arguments tirés de la comparaison avec le calcul des opérateurs. Pour commencer, nous appliquerons les résultats au cas simple d'une onde plane, et ensuite, au cas très intéressant d'un paquet d'ondes.

Avant d'aborder cette analyse une remarque est nécessaire. L'interprétation précédente a essentiellement un caractère électrodynamique, ce qui est indispensable lorsqu'il s'agit d'un électron plongé dans un champ. Mais ici nous nous sommes bornés au cas de l'absence de champ et dans ce cas la charge de l'électron n'intervient plus pour déterminer son mouvement : elle n'apparaît pas dans l'équation fondamentale. Le problème que nous envisageons est celui du mouvement d'un point matériel libre, donc un problème *de mécanique pure* et non pas d'électrodynamique. Or, même dans ce cas, les 16 covariants quadratiques existent et sont différents de zéro. Il doit donc être possible de leur donner une interprétation *purement mécanique*, ou, au moins, se rendre compte pourquoi une pareille interprétation fait défaut. C'est à ce point de vue que nous nous placerons ici.

18. Décomposition de Gordon. — Gordon a écrit le courant sous la forme d'une somme de deux termes, en utilisant le fait que dans l'équation fondamentale la fonction ψ n'intervient pas uniquement par ses dérivées. L'équation de continuité que Dirac a utilisée dérive d'un raisonnement analogue. Ecrivons les relations générales.

L'équation d'onde $\varkappa \partial\psi/\partial t + \mathrm{H}\psi = 0$ s'écrit explicitement :

$$\frac{\varkappa}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \varkappa\sum_1^3 \alpha^r \frac{\partial\psi}{\partial x_r} + m_0 c\alpha_4\psi = 0$$

$$\frac{\varkappa}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \varkappa\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \varkappa\alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \varkappa\alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + m_0 c\alpha_4\psi = 0. \quad (1/18)$$

ψ représente une matrice. Prenons l'équation transposée et conjuguée, — opération qui a un sens parfaitement clair; on a :

$$-\varkappa \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t} - \varkappa \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_r + m_0 c \bar{\psi}^* \alpha_4 = 0 \qquad (2/18)$$

(Remarquons en passant que si l'on pose $\Phi = \bar{\psi}^* \alpha_4$, on a :

$$\varkappa \frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0 \qquad \text{et} \qquad -\varkappa \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi H = 0, \qquad (3/18)$$

équations que nous rencontrerons plus loin). On déduit de (1/18) et (2/18) :

$$\psi = -\frac{\varkappa}{m_0 c}\left(\frac{1}{c}\alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3} \alpha_4 \alpha_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r}\right) \qquad (4/18)$$

et :

$$\bar{\psi}^* = \frac{\varkappa}{m_0 c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t}\alpha_4 + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_r}\alpha_r \alpha_4\right). \qquad (5/18)$$

Soit alors ξ l'un quelconque des 16 opérateurs formés avec les α_k par multiplication; suivant le procédé bien connu, multiplions la matrice (4/18) par $\bar{\psi}^* \xi$ à gauche et (5/18) par $\xi\psi$ à droite. En retranchant on a :

$$0 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t}\alpha_4 \xi \psi + \bar{\psi}^* \xi \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \\ + \sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_r}\alpha_r \alpha_4 \xi \psi + \bar{\psi}^* \xi \alpha_4 \alpha_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r}\right), \qquad (6/18)$$

et en ajoutant :

$$2\bar{\psi}^* \xi \psi = \frac{\varkappa}{m_0 c}\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t}\alpha_4 \xi \psi - \bar{\psi}^* \xi \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \\ + \sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_r}\alpha_r \alpha_4 \xi \psi - \bar{\psi}^* \xi \alpha_4 \alpha_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r}\right)\right]. \qquad (7/18)$$

En remplaçant ξ par tous les opérateurs α, nous aurons les relations qui nous intéressent. Il est inutile de les écrire toutes ; analysons-en seulement la structure.

Remarquons que les termes qui interviennent sont de deux types :

A) des expressions de la forme :

$$\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x} A\psi + \bar{\psi}^* A \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

qui se réduisent à des dérivées $\frac{\partial(\bar{\psi}^* A\psi)}{\partial x}$, et :

B) des expressions du type :

$$\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x} A\psi - \bar{\psi}^* A \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

L'apparition des termes A ou B est reliée aux propriétés de commutation de ξ avec les α_k. Par exemple si ξ commute avec α_4 et anticommute avec tous les α_r, donc si $\xi = \alpha_4$, (6/18) s'écrit :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\psi}^* \psi) + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_r} (\bar{\psi}^* \alpha_r \psi) = 0. \qquad (8/18)$$

Le premier membre est une divergence d'univers et l'équation est l'équation de continuité du courant électrique. Par contre, si ξ anticommute avec α_4 mais commute avec α_r, donc si $\xi = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ on a seulement une divergence tridimensionnelle et (6/18) devient :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t} \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi - \bar{\psi}^* \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \\
&\qquad\qquad + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_r} (\bar{\psi}^* \alpha_r \theta \psi) = 0 \\
&\text{qui s'écrit :} \\
&\frac{i}{c}\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t} \theta\psi - \bar{\psi}^* \theta \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_r} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (9/18)$$

avec les notations du paragraphe 16

Pour $\xi = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, c'est la relation (7/18) qui contient une dérivée d'univers [1] ; on a :

$$2\bar{\psi}^*\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi = \frac{\varkappa}{m_0 c}\Big[-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\psi}^*\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi)$$
$$-\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_r}(\bar{\psi}^*\alpha_r.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi)\Big], \qquad (10/18)$$

et pour $\xi = 1$, une divergence tridimensionnelle :

$$2\bar{\psi}^*\psi = \frac{\varkappa}{m_0 c}\Big[\frac{1}{c}\Big(\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial t}\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_4\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)$$
$$+\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_r}(\bar{\psi}^*\alpha_r\alpha_4\psi)\Big]. \qquad (11/18)$$

La formule primitive de Gordon s'obtient en faisant $\xi = \alpha_1$, par exemple. On a :

$$2\bar{\psi}^*\alpha_1\psi = \frac{\varkappa}{m_0 c}\Big[-\Big(\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial x_1}\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_4\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\psi}^*\alpha_4\alpha_1\psi)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{\psi}^*\alpha_4\alpha_1\alpha_2\psi) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{\psi}^*\alpha_3\alpha_4\alpha_1\psi)\Big]. \qquad (12/18)$$

La première parenthèse du second membre représente le « courant de Schrödinger » et les trois autres la contribution au courant total, des moments électrique et magnétique de l'électron. Notons encore, pour $\xi = \alpha_2\alpha_3$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\psi}^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi) + i\Big(\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial x_1}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{\psi}^* i\alpha_4\alpha_2\psi) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{\psi}^* i\alpha_4\alpha_3\psi) = 0. \qquad (13/18)$$

Considérons maintenant, dans les formules (6/18) et (7/18), les termes du type B, *qui, eux, ne se réduisent pas à des dérivées*. Ces termes sont très importants ; nous les

[1] Voir Uhlenbeck et Laporte, *Physical Review*, 37, 1931, p. 1552.

appellerons *termes macroscopiques* pour la raison suivante, qui précise leur signification. Lorsqu'on intègre dans tout l'espace la densité spatiale $\bar{\psi}^*\xi\psi$, on obtient une quantité $\int\bar{\psi}^*\xi\psi.dV$, observable macroscopiquement. Or, dans cette intégration, *tous les termes qui se réduisent à des dérivées* dans le second membre de (7/18), disparaissent dans les conditions aux limites habituelles, et il ne reste plus que la contribution des termes « macroscopiques » du type B, et aussi, éventuellement, des dérivées de moyennes par rapport au temps. Pour les cas stationnaires, ce sont les termes du type B qui donnent le mouvement macroscopique.

Considérons un autre aspect de la question. Si nous avons affaire à un état décrit par une onde plane du type :

$$\psi_s = a_s \exp\left(\frac{px + qy + rz - Wt}{\varkappa}\right), \quad (a_s = \text{constantes}),$$

les densités $\bar{\psi}^*\xi\psi$ seront des constantes. Donc, lorsqu'on applique les formules (6/18), (7/18) à ce cas, *tous les termes qui se réduisent à des dérivées s'annulent* et seuls les termes macroscopiques donnent une contribution, par exemple :

$$\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial x_1}\xi\psi - \bar{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -\frac{2}{\varkappa}p(\bar{a}^*\xi a) = -\frac{2}{\varkappa}p(\bar{\psi}^*\xi\psi). \quad (14/18)$$

On peut donc écrire immédiatement les relations entre densités, à l'aide de (6/18) et (7/18). Ceci fixe la signification et montre l'importance pratique des termes du type B.

Lorsque l'opérateur ξ est hermitique, ces termes sont toujours purement imaginaires ; dans les formules précédentes le facteur i ou $\varkappa$ rétablit toujours la réalité. On peut rattacher en un certain sens ces grandeurs aux opérateurs, en observant qu'on peut écrire :

$$\varkappa\left(\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial x_r}\xi\psi - \bar{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial x_r}\right) = \varkappa\frac{\partial}{\partial x_r}(\bar{\psi}^*\xi\psi) - 2\bar{\psi}^*\left(\xi\varkappa\frac{\partial}{\partial x_r}\right)\psi. \quad (15/18)$$

La moyenne de ce terme est égale, au facteur — 2 près, à la moyenne de l'opérateur :

$$\xi p_r \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{16/18}$$

Les opérateurs qui correspondent dans ce sens aux termes du type B sont donc les produits de ξ par les opérateurs de la quantité de mouvement.

Ces termes satisfont enfin à une relation importante que nous allons établir. On déduit de (4/18) et (5/18) que :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{m_0^2 c^2}{\varkappa^2}\psi &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = \Box\psi,\\
\frac{m_0^2 c^2}{\varkappa^2}\vec{\psi}^* &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\psi}^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\vec{\psi}^*}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\vec{\psi}^*}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\vec{\psi}^*}{\partial x_3^2} = \Box\vec{\psi}^*.
\end{aligned}\right\} \tag{17/18}$$

Si ξ est un opérateur α, on déduit en ajoutant après multiplication :

$$\frac{2m_0^2c^2}{\varkappa^2}\vec{\psi}^*\xi\psi = \vec{\psi}^*\xi\cdot\Box\psi + \Box\vec{\psi}^*\cdot\xi\psi, \tag{18/18}$$

et en retranchant, après transformation :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{\psi}^*}{\partial t}\xi\psi - \vec{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{\psi}^*}{\partial x_1}\xi\psi - \vec{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\vec{\psi}^*}{\partial x}\xi\psi - \vec{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\vec{\psi}^*}{\partial x_3}\xi\psi - \vec{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) = 0, \tag{19/18}$$

19. Interprétation physique. Ondes planes. — Appliquons les résultats du paragraphe précédent au cas simple d'une onde ψ plane, cas susceptible de nous donner d'utiles indications. Ainsi que nous l'avons mentionné, nous envisageons le problème purement mécanique du mouvement d'un point matériel ; corrélativement, nous caractérisons les propriétés de ce point par les 16 covariants quadratiques $\vec{\psi}^*\xi\psi$, *sans* le facteur e et même sans les autres facteurs constants, qui les accompagnent dans le tableau II. Nous désignerons donc ces grandeurs par d'autres lettres que dans le tableau II ; *précisons leurs valeurs* et donnons aussi la relation entre ces notations et celles du tableau II.

Le « courant » et la « charge » seront donnés par :

$$\left.\begin{aligned}
j_1 &= \frac{1}{ec} j_x = \tilde{\psi}^* \alpha_1 \psi = \psi_1^*\psi_4 + \psi_4^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_3 + \psi_3^*\psi_2 \\
j_2 &= \frac{1}{ec} j_y = \tilde{\psi}^* \alpha_2 \psi = -i\psi_1^*\psi_4 + i\psi_4^*\psi_1 + i\psi_2^*\psi_3 - i\psi_3^*\psi_2 \\
j_3 &= \frac{1}{ec} j_z = \tilde{\psi}^* \alpha_3 \psi = \psi_1^*\psi_3 + \psi_3^*\psi_1 - \psi_2^*\psi_4 - \psi_4^*\psi_2 \\
\rho &= \frac{1}{e} \delta = -\tilde{\psi}^*\psi = -\psi_1^*\psi_1 - \psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 - \psi^*\psi_4
\end{aligned}\right\} \quad (1/19)$$

Le moment magnétique sera désigné par :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{B} I_x = \tilde{\psi}^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi = -\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1 + \psi_3^*\psi_4 + \psi_4^*\psi_3 \\
\sigma_2 &= \frac{1}{B} I_y = \tilde{\psi}^*(-i\alpha_3\alpha_4\alpha_1)\psi = +i\psi_1^*\psi_2 - i\psi^*\psi_1 - i\psi^*\psi_4 + i\psi_4^*\psi_3 \\
\sigma_3 &= \frac{1}{B} I_z = \tilde{\psi}^* i\alpha_4\alpha_1\alpha_2\psi = -\psi_1^*\psi_1 + \psi_3^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 - \psi_4^*\psi_4
\end{aligned}$$

(2/19)

et le moment électrique par :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= -\frac{1}{B} J_x = \tilde{\psi}_1^* i\alpha_4\alpha_1\psi = i\psi_1^*\psi_4 - i\psi_4^*\psi_1 + i\psi_2^*\psi_3 - i\psi_3^*\psi_2 \\
\pi_2 &= -\frac{1}{B} J_y = \tilde{\psi}^* i\alpha_4\alpha_2\psi = \psi_1^*\psi_4 + \psi_4^*\psi_1 - \psi_2^*\psi_3 - \psi_3^*\psi_2 \\
\pi_3 &= -\frac{1}{B} J_z = \tilde{\psi}^* i\alpha_4\alpha_3\psi = i\psi_1^*\psi_3 - i\psi_3^*\psi_1 + i\psi_4^*\psi_2 - i\psi_2^*\psi_4.
\end{aligned}$$

(3/19)

Désignons le « spin » par :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{4\pi}{h} \sigma_x = \tilde{\psi}^* i\alpha_2\alpha_3\psi = -\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1 - \psi_3^*\psi_4 - \psi_4^*\psi_3 \\
S_2 &= \frac{4\pi}{h} \sigma_y = \tilde{\psi}^* i\alpha_3\alpha_1\psi = i\psi_1^*\psi_2 - i\psi_2^*\psi_1 + i\psi_3^*\psi_4 - i\psi_4^*\psi_3 \\
S_3 &= \frac{4\pi}{h} \sigma_z = \tilde{\psi}^* i\alpha_1\alpha_2\psi = -\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4 \\
S_4 &= -\frac{4\pi}{h} \sigma_t = -\tilde{\psi}^* i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi = \psi_1^*\psi_3 + \psi_3^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_4 + \psi_4^*\psi_2
\end{aligned}$$

(4/19)

et enfin les deux invariants, découverts par DARWIN, par :

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= \tilde{\psi}^* \alpha_4 \psi &&= \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4 \\ \Omega_2 &= \tilde{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi &&= - i\psi_1^* \psi_3 + i\psi_3^* \psi_1 - i\psi_2^* \psi_4 + i\psi_4^* \psi_2.\end{aligned}\right\} \quad (5/19)$$

Cela étant, soit un électron dans un état d'énergie déterminée W et ayant une quantité de mouvement p, q, r ; la fonction ψ sera une onde plane de la forme :

$$\psi_s = a_s e^{\frac{1}{\varkappa}(px_1 + qx_2 + rx_3 - Wt)}, \qquad (6/19)$$

avec :

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + m_0^2 c^2.$$

En remplaçant ces valeurs dans les relations (6/18), (7/18) et en tenant compte de l'observation suivant laquelle seuls les termes de type B donnent des contributions non nulles, on obtient facilement des relations algébriques entre les grandeurs quadratiques de l'électron, qui nous faciliteront la compréhension de leurs relations mutuelles.

Toute la discussion est dominée par l'observation que *pour une onde plane, l'invariant Ω_2 est identiquement nul*, $\Omega_2 \equiv 0$; cela résulte de la relation (7/18), pour $\xi = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$.

Une première conséquence est l'absence de tout moment électrique propre de l'électron. En effet, on a la relation, facilement vérifiable

$$\sigma_1 \pi_1 + \sigma_2 \pi_2 + \sigma_3 \pi_3 = \Omega_1 \Omega_2 \equiv 0. \qquad (7/19)$$

Le premier membre est un invariant; il garde la même valeur nulle pour tout système d'axes et, en particulier, pour celui qui se déplace avec l'électron dans son mouvement de translation et dans lequel le moment magnétique est dirigé suivant l'un de ces axes ; on a :

$$\sigma_3 \pi = 0,$$

donc :

$$\pi_3 = 0 \quad \text{si} \quad \pi_1 = \pi_2 = 0.$$

La signification du premier invariant résulte d'une relation générale établie par DARWIN (¹),

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 - \rho^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) = -\Omega_1^2. \quad (8/19)$$

Le carré de Ω_1 donne donc *la valeur absolue du carré de la longueur du vecteur courant d'univers ;* ce dernier est, comme toujours, un vecteur du genre temps,

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 - \rho^2 < 0.$$

On peut exprimer ses composantes en fonction de Ω_1 ; (12/18) et (11/18) donnent :

$$j_1 = \frac{p}{m_0 c}\Omega_1, \; j_2 = \frac{q}{m_0 c}\Omega_1, \; j_3 = \frac{r}{m_0 c}\Omega_1, \; \rho = -\frac{W}{m_0 c^2}\Omega_1. \quad (9/19)$$

Le courant est dirigé suivant l'impulsion d'univers et lui est proportionnel. Pour obtenir une image intuitive, considérons un système déterminé d'axes et traçons les vecteurs moment magnétique $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et moment électrique (π_1, π_2, π_3), ainsi que le nouveau vecteur « spin » (S_1, S_2, S_3). La relation (6/18) donne, pour $\xi = 1$,

$$p\pi_1 + q\pi_2 + r\pi_3 = 0, \quad (10/19)$$

et d'après (7/19) :

$$\sigma_1\pi_1 + \sigma_2\pi_2 + \sigma_3\pi_3 = 0. \quad (7/19)$$

Donc, *dans l'espace*, si p, q, r est la quantité de mouvement, le courant est dirigé suivant p, q, r et le moment élec-

(¹) C. G. DARWIN, *Proc. Roy. Soc.* A 118, 1928, p. 654.

trique est normal tant à ce courant qu'au moment magnétique σ. De plus, (7/18) donne avec $\xi = i\alpha_4\alpha_1$, ...

$$\left.\begin{aligned} m_0 c\pi_1 &= qS_3 - rS_2 \\ m_0 c\pi_2 &= rS_1 - pS_3 \\ m_0 c\pi_3 &= pS_2 - qS_1 \end{aligned}\right\} \qquad (11/19)$$

ce qui montre que (S_1, S_2, S_3) se trouve dans le plan formé par p, q, r, et le moment magnétique σ.

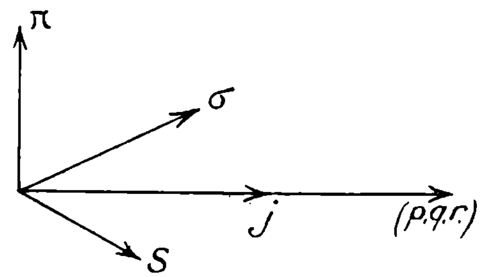


Fig. 1

On obtient cependant une image plus saisissante en considérant, au lieu des vecteurs d'espace, des vecteurs d'univers : l'impulsion $\left(p, q, r, -\frac{W}{c}\right)$ d'une part et le vecteur **S** (S_1, S_2, S_3, S_4) de l'autre. On peut écrire une relation tout à fait analogue à celle trouvée par Darwin :

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S_4^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \Omega_1^2. \qquad (12/19)$$

S est donc un vecteur ayant même longueur d'univers que le vecteur courant **j** ; à l'encontre de celui-ci, il est cependant du genre espace :

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S_4^2 > 0.$$

Prenons la formule (6/18) avec :

$$\xi = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 ;$$

on a :

$$pS_1 + qS_2 + rS_3 - \left(-\frac{W}{c}\right) S_4 = 0$$

et :

$$j_1S_1 + j_2S_2 + j_3S_3 - \rho S_4 = 0, \qquad (13/19)$$

ce qui montre que le *quadrivecteur* **S** *est normal au courant d'univers.*

Pour caractériser complètement un électron, il suffira donc de donner son impulsion d'univers *et le vecteur* **S**. Montrons, en effet, que le moment magnétique et le moment électrique s'en déduisent immédiatement. La relation (7/18) avec $\xi = i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \ldots$ et $\xi = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, donne :

$$\begin{aligned} \Omega_1\sigma_1 &= j_1S_4 - \rho S_1 \\ \Omega_2\sigma_2 &= j_2S_4 - \rho S_2 \\ \Omega_3\sigma_3 &= j_3S_4 - \rho S_3 \end{aligned} \qquad (14/19)$$

et $$p\sigma_1 + q\sigma_2 + r\sigma_3 + \Omega_4 S_4 = 0,$$

tandis que la même équation, pour

$$\xi = i\alpha_4\alpha_1, \quad \xi = i\alpha_4\alpha_2 \quad \text{et} \quad \xi = i\alpha_4\alpha_3,$$

donne :

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1\pi_1 &= j_2S_3 - j_3S_2 \\ \Omega_2\pi_2 &= j_3S_1 - j_1S_3 \\ \Omega_3\pi_3 &= j_1S_2 - j_2S_1. \end{aligned}\right\} \qquad (15/19)$$

Donc, en résumé, on peut dire qu'un électron libre est *caractérisé par deux vecteurs d'univers à angle droit :* le courant **j**, ne dépendant que de la translation $\left(p, q, r, -\frac{W}{c}\right)$ et le vecteur **S**, qui ne *dépend que du spin.* Ces deux vecteurs sont égaux en valeur absolue, mais le premier est du genre temps, tandis que le second est du genre espace. *La polarisation de l'électron est déterminée par l'azimut du vecteur d'univers* **S** *autour de la direction de propagation*, ce qui rapproche l'image utilisée de celle de la théorie électromagnétique de la lumière. **S** caractérise *la rotation* de l'électron, tout comme le courant **j** caractérise sa *translation*. Le moment de l'électron s'obtient en prenant le produit vectoriel de **S** et **j**.

Ce qui précède nous montre la manière dont on peut analyser le problème, dans le cas simple d'un électron décrit par une onde plane. Il ressort de cette analyse que, pour l'étude d'un tel électron, il est beaucoup plus simple de recourir à des images « d'univers » qu'à des images dans l'espace. On voit également, qu'il semble tout indiqué pour le cas qui nous préoccupe, *d'introduire systématiquement le vecteur d'univers* **S**, et on peut penser que les avantages qu'il comporte subsisteront, même dans le cas général. Revenons donc au cas général et examinons d'un peu plus près le vecteur « spin » **S**.

20. Cas général. Le vecteur d'univers S. — Un électron possède, dans le cas général, un moment magnétique et un moment électrique, notions qui nous sont familières et que nous concevons sans aucune peine ; les densités correspondantes (sans facteur constant) sont σ_1, σ_2, σ_3 et π_1, π_2, π_3. Un électron de Dirac possède également un « spin » dont les opérateurs sont $i\alpha_2\alpha_3$, $i\alpha_3\alpha_1$, $i\alpha_1\alpha_2$ et par conséquent les *densités* de moyenne S_1, S_2, S_3. S_4 est la densité de moyenne de l'opérateur $i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, dont nous ne connaissons pas l'interprétation. Or, le spin *n'a pas les mêmes caractères de variance* que le moment magnétique et électrique de l'électron. Les densités correspondantes S_1, S_2, S_3 et S_4 se transforment comme les composantes d'un vecteur d'univers du genre espace, tandis que σ_r, π_r ($r = 1, 2, 3$) se transforment comme un tenseur antisymétrique du deuxième rang. La direction de la densité de spin S_1, S_2, S_3 ne coïncide pas avec celle de la densité de moment magnétique ; cette coïncidence n'a lieu qu'*au repos*.

En effet, introduisons deux vecteurs auxiliaires D et E au moyen des formules :

$$\left.\begin{array}{ll} D_1 = \quad \psi_3^*\psi_4 + \psi_4^*\psi_3 & E_1 = -\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1 \\ D_2 = -i\psi_3^*\psi_4 + i\psi_4^*\psi_3 & E_2 = i\psi_1^*\psi_2 - i\psi_2^*\psi_1 \\ D_3 = \quad \psi_3^*\psi_3 - \psi_4^*\psi_4 & E_3 = -\psi_1^*\psi_1 - \psi_2^*\psi_2 \end{array}\right\}, \quad (1/20).$$

D_r représente, à un facteur près, la valeur du moment magnétique de l'électron *au repos*, $(\sigma_r)_0$, dont Darwin (*loc. cit.*) a signalé l'importance. On sait qu'au repos $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Donc, dans ce cas, $E_r = 0$, et le moment (2/19) se réduit à D_r. Si σ_r est le moment magnétique de l'électron, *on a toujours*, d'après (2/19) (4/19) et (1/20) :

$$\sigma_r = D_r + E_r \qquad S_r = E_r - D_r \qquad (r = 1, 2, 3). \qquad (2/20)$$

Donc :

$$\sigma_r - S_r = 2D_r.$$

Au repos, $E_r = 0$, donc :

et de plus :
$$\left.\begin{array}{l} (S_r)_0 = -D_r = -(\sigma_r)_0 \; . \\ (S_4)_0 = 0. \end{array}\right\} \qquad (3/20)$$

Pour un électron au repos, la composante de temps de **S** est nulle et les trois autres sont égales et de signe contraire à celles du moment magnétique. Lorsque l'électron se met en mouvement, cette coïncidence cesse. S_r et σ_r font un angle et restent tels que leur différence vectorielle est constante et égale à D_r. Remarquons que les conclusions précédentes (2/20) et (3/20) sont indépendantes du signe de l'énergie.

En un mot, pour un électron de Dirac, non seulement la vitesse et la quantité de mouvement ont des directions différentes, mais aussi le spin et le moment magnétique sont des éléments distincts, et même plus différents que dans le cas précédent, puisque les caractères de variance ne sont plus les mêmes. La question se pose alors de trouver quel est le lien qui les rattache l'un à l'autre. Précisons.

Considérons d'abord l'image classique d'une sphère solide tournant uniformément autour d'une direction déterminée qui passe par son centre ; elle a un moment cinétique bien déterminé. Chargeons-la électriquement ; elle aura un moment magnétique, dont on trouvera les composantes en multipliant celles du *moment cinétique* par un même facteur constant. Si le centre de la sphère, tournante et chargée, est animé en outre d'un mouvement de translation, elle aura un moment magnétique, mais pour le trouver il ne suffira plus de multiplier les composantes du moment cinétique par un facteur constant. Le problème que nous nous posons est le suivant ; quelle est la grandeur *mécanique* dont il suffira de multiplier les composantes par un même facteur déterminé, pour avoir le moment magnétique, dans le cas du mouvement ?

Revenons au cas de l'électron de Dirac. Remarquons que d'une part nous concluons que S_1, S_2, S_3 sont des densités de spin, parce que $i\alpha_2\alpha_3$, $i\alpha_3\alpha_1$, $i\alpha_1\alpha_2$ est le moment cinétique propre ; nous employons donc des *considérations purement mécaniques* (concernant des *opérateurs*). D'autre part, nous attribuons à σ_1, σ_2, σ_3 le caractère de densités de moment magnétique, en nous basant sur les raisonnements de Darwin, c'est-à-dire sur *une analyse purement électro-magnétique* (portant sur des *densités*).

Il semble très désirable d'avoir dans ce cas des raisonnements homogènes, ayant un point de départ unique. Nous pouvons alors poser le problème de la façon suivante : *étant donné que* $i\alpha_2\alpha_2$, ... *représentent les composantes du moment cinétique de l'électron, quelle grandeur mécanique représenteront les opérateurs ternaires* $i\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $i\alpha_3\alpha_4\alpha_1$, $i\alpha_4\alpha_1\alpha_2$, *et aussi* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$? Nous cherchons donc l'interprétation *mécanique* des opérateurs dont les densités de moyenne représentent le moment magnétique de l'électron.

La manière d'y arriver sera analogue à celle employée pour conclure que $i\gamma_2\gamma_3$, ... représentent à un facteur près les composantes du spin de l'électron.

21. Considérations classiques. — Abstraction faite de toute théorie des quanta, considérons un point matériel en mouvement libre. Aucune des grandeurs dynamiques qui s'y rattachent en mécanique classique ne semble pouvoir jouer le rôle des expressions dont nous avons besoin. En réalité, ainsi que nous le verrons dans un instant, les grandeurs classiques qui nous intéressent sont *identiquement nulles*, dès que le point matériel considéré est *dépourvu de spin*, comme c'est le cas pour l'électron classique.

Pour analyser correctement le phénomène et trouver une image convenable, il faudra donc raisonner sur un mobile se rapprochant de l'électron de Dirac *plus* que ne le fait le point matériel classique. Or, l'électron de Dirac est caractérisé par l'existence d'un spin (représenté par un opérateur *variable*), ou, mieux encore, par le fait *que sa vitesse et sa quantité de mouvement forment deux vecteurs absolument distincts en grandeur et en direction* ; pour avoir une image correcte, nous devons donc faire appel à un mobile qui jouisse de la même propriété.

Considérons donc un mobile dont la direction de la quantité de mouvement ne coïncide pas avec celle de sa vitesse, même en absence de tout champ. Nous ne connaissons pas les lois du mouvement, mais celui-ci ayant lieu en absence de tout champ extérieur, il est raisonnable d'admettre qu'il se poursuit dans les mêmes conditions que pour un point matériel classique, c'est-à-dire *à quantité de mouvement constante*, $p_k =$ const. Examinons les conséquences de ces hypothèses dans le cadre des conceptions classiques.

On peut remarquer tout d'abord, que dans ces conditions, le moment cinétique d'orbite n'est plus constant, comme pour un point matériel classique :

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 \neq \text{const}\,, \qquad \text{puisque :} \qquad v_2 p_3 - v_3 p_2 \neq 0, \tag{1/21}$$

et qu'il faut *lui ajouter un autre moment* pour satisfaire au théorème des aires. Soit A_r ce moment, de façon qu'on ait par exemple :

$$v_2 p_3 - v_3 p_2 + A'_1 = 0,$$

donc :

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + A_1 = \text{const.} = m_{23}. \tag{2/21}$$

Réciproquement si $x_2 p_3 - x_3 p_2$ n'est plus constant, mais égal à une constante m_{23} plus ($- A_1$), la quantité de mouvement ne sera plus proportionnelle à la vitesse, $p_r \neq mv_r$.

Nous ne connaissons pas la loi de mouvement d'un pareil point hypothétique, mais elle ne nous intéresse pas ici ; on peut affirmer seulement que l'expression classique de l'énergie cinétique $2T = \Sigma mv^2$ n'est plus valable et que les nombreux résultats qui en découlent devront être modifiés.

Remarquons seulement que si nous admettons l'existence de l'inégalité $p_r \neq mv_r$, il devient *indispensable*, pour caractériser complètement notre mobile, d'indiquer aussi quel est l'*écart* entre sa quantité de mouvement et sa vitesse. Quel peut être l'élément analytique susceptible de mesurer cet écart ?

Il est évident que le choix de cet élément comporte une large part d'arbitraire. Il existe cependant une expression analytique qui s'impose ; elle s'introduit tout aussi naturellement dans ce domaine, que le moment cinétique ordinaire dans l'étude des rotations. Considérons en effet l'angle entre $\mathbf{p}$ et $\mathbf{v}$; il mesure effectivement l'écart cherché. Mais il faut tenir compte que les effets dynamiques dépendront très probablement aussi de la distance du point matériel considéré à l'axe instantané de rotation, — comme dans le cas des rotations précédemment cité. Nous avons donc en réalité trois vecteurs **r**, **p** et **v** dont les positions relatives nous inté-

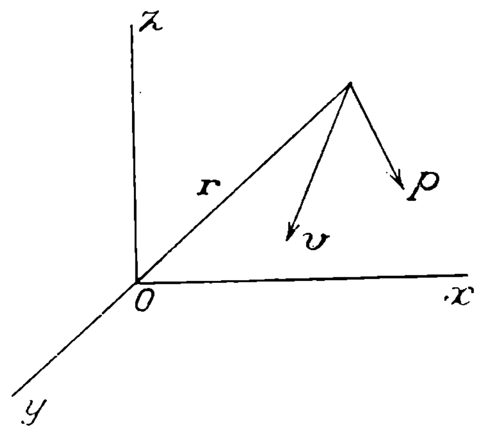


Fig. 2

ressent. La quantité qui mesure globalement de la façon la plus simple et la plus naturelle la grandeur de leur écart relatif est certainement le volume du *parallélépipède* construit sur ces trois vecteurs soit :

$$V = (\mathbf{v}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]) = (\mathbf{r}[\mathbf{p} \times \mathbf{v}]) = (\mathbf{p}[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]),$$

ou encore

$$C_{123} = v_1(x_2p_3 - x_3p_2) + v_2(x_3p_1 - x_1p_3) + v_3(x_1p_2 - x_2p_1), \qquad (3/21)$$

ou une quantité proportionnelle à celle-ci.

Dans l'espace-temps, chacun de ces vecteurs sera complété par une quatrième composante de temps et nous aurons à considérer : la vitesse d'univers, que nous désignerons toujours par v_1, v_2, v_3, v_4, le rayon vecteur d'univers x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$, et l'impulsion d'univers p_1, p_2, p_3, $p_4 = - W/ic$. Il est naturel alors de considérer en relativité non seulement la grandeur (3/21), mais de compléter celle-ci par les trois autres qui s'en déduisent par permutations circulaires, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{aligned}
C_{123} &= v_1(x_2p_3 - x_3p_2) + v_2(x_3p_1 - x_1p_3) + v_3(x_1p_2 - x_2p_1)\\
C_{234} &= v_2(x_3p_4 - x_4p_3) + v_3(x_4p_2 - x_2p_4) + v_4(x_2p_3 - x_3p_2)\\
C_{341} &= v_3(x_4p_1 - x_1p_4) + v_4(x_1p_3 - x_3p_1) + v_1(x_3p_4 - x_4p_3)\\
C_{412} &= v_4(x_1p_2 - x_2p_1) + v_1(x_2p_4 - x_4p_2) + v_2(x_4p_1 - x_1p_4)
\end{aligned}\right\} \quad (4/21)$$

L'ensemble de ces quatre composantes forme l'élément analytique que nous cherchons.

22. Moments de divers ordres. — Remarquons que, du point de vue analytique, (4/21) est une généralisation immédiate du moment cinétique classique. En effet, ce dernier est un tenseur antisymétrique du second rang (6 composantes), obtenu en prenant tous les déterminants qu'on peut former au moyen des éléments du tableau suivant :

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{Vmatrix} \qquad (1/22)$$

Si l'on complète ce tableau par une ligne formée par les dérivés des éléments de la première (par rapport au temps propre), on a :

$$\begin{Vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{Vmatrix} \qquad (2/22)$$

On peut former à partir de ce tableau quatre déterminants du troisième ordre *qui sont précisément les quatre grandeurs* (4/21) :

$$\left.\begin{aligned}
C_{123} &= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} \qquad C_{234} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 & v_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}\\
C_{341} &= \begin{vmatrix} v_3 & v_4 & v_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 \\ p_3 & p_4 & p_1 \end{vmatrix} \qquad C_{412} = \begin{vmatrix} v_4 & v_1 & v_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 \\ p_4 & p_1 & p_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (3/22)$$

A l'heure actuelle on emploie de plus en plus fréquemment le terme « moment » pour désigner la quantité de mouvement du mobile considéré. Pour arriver à une nomenclature unitaire, on pourrait l'appeler « moment de premier ordre ». Le « moment du second ordre » serait alors le moment cinétique ou « angulaire », de composantes $x_2p_3 - x_3p_2$, etc., et on pourrait appeler « moment de troisième ordre » la grandeur ayant comme composantes (4/21) ou (3/22). Le même processus de généralisation mathématique nous conduit à envisager aussi le « moment du quatrième ordre » donné par le déterminant :

$$C_{1234} = \begin{vmatrix} x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}, \tag{4/22}$$

(l'accent désigne la dérivée par rapport au temps propre) et mesurant le parallélépipède formé sur les vecteurs quantité de mouvement, rayon vecteur, vitesse *et accélération.*

Tous les moments d'ordre supérieur à quatre sont nuls.

Les p_k, v_k, x_k ($k = 1, 2, 3, 4$) étant des quadrivecteurs, les :

$$C_{rst} = \begin{vmatrix} v_r & v_s & v_t \\ x_r & x_s & x_t \\ p_r & p_s & p_t \end{vmatrix} \tag{5/22}$$

forment un *tenseur du troisième rang, antisymétrique par rapport à tous ses indices.* Un pareil tenseur n'a que quatre composantes non nulles et celles-ci coïncident avec (3/22). De même, C_{1234} est la seule composante non nulle d'un tenseur complètement antisymétrique de rang 4. Mais, dans l'espace à quatre dimensions, on peut définir des tenseurs « duals » ou « conjugués » de C_{rst} et C_{1234}, qui sont respectivement d'ordre 1 et 0, c'est-à-dire un vecteur et un scalaire ; on peut donc dire que (3/22) forment les quatre composantes d'un vecteur **C** et que (4/22) est un invariant ou un pseudo-scalaire.

Quoi qu'il en soit, l'absence de proportionnalité entre la quantité de mouvement et la vitesse nous a conduit à introduire, abstraction faite de toute considération de quanta, le tenseur antisymétrique C_{rst} pour décrire le nouvel état de choses. On voit que s'il y a proportionnalité, ou si, d'une façon plus générale, il existe une relation linéaire entre p_k, x_k, et x'_k, ce tenseur est identiquement nul. La mécanique classique suppose que $p_k = mx'_k$: c'est la raison pour laquelle ce tenseur n'y apparaît pas.

L'invariant C_{1234} s'annule dans les mêmes conditions, ou encore s'il y a entre quelques-unes des grandeurs p_k, x_k, x', x''_k une relation linéaire quelconque. On peut l'écrire en développant suivant la première ligne

$$C_{1234} = x''_1 C_{234} - x''_2 C_{341} + x''_3 C_{412} - x''_4 C_{123}.$$

D'autre part, en dérivant (5/22) par rapport au temps propre et en tenant compte que les p_k sont des constantes par hypothèse,

$$C'_{rst} = \begin{vmatrix} x''_r & x''_s & x''_t \\ x_r & x_s & x_t \\ p_r & p_s & p_t \end{vmatrix}, \qquad (6/22)$$

donc :

$$- C_{1234} = x'_1 C'_{234} - x'_2 C'_{341} + x'_3 C'_{412} - x'_4 C'_{123} \qquad (7/22)$$

On déduit également :

$$C_{1234} = x_1 C''_{234} - x_2 C''_{341} + x_3 C''_{412} - x_4 C''_{123}. \qquad (8/22)$$

Il n'est pas possible de préciser davantage la loi de variation des C_{rst} ou de C_{1234}, puisque nous ne connaissons pas la loi de mouvement en mécanique classique ; par contre, nous pourrons le faire quand nous passerons au cas de la mécanique quantique.

Revenons à l'expression générale (4/21). Pour le cas d'un point matériel *au repos*, $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, le pseudo-vecteur C_{rst} a une composante de temps nulle et des composantes d'espace proportionnelles à celles du moment cinétique. Nous sommes donc en présence d'un vecteur *d'espace*. Au repos, sa direction coïncide avec celle du moment cinétique. Lorsqu'on met le point matériel en mouvement, ces deux directions se séparent nécessairement, le moment cinétique se transformant comme un vecteur à six composantes, tandis que le moment du troisième ordre se transforme comme un vecteur. *Il n'est donc pas possible de mettre en évidence l'existence du vecteur* C_{rst} sur un électron *au repos* ; il faut considérer le cas du mouvement.

Enfin, faisons une dernière remarque. Nous avons vu que pour un mobile du type considéré ici on a (formules (2/21)) :

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + A_1 = \text{constante} = m_{23}. \qquad (9/22)$$

$x_2 p_3 - x_3 p_2$, ... étant ce qu'on peut appeler le « moment cinétique d'orbite », A_1, ... pourra être considéré comme un « moment cinétique propre » ; m_{23}, ... seront des constantes englobant toutes les constantes d'intégration, et représentant une sorte de moment total. Remplaçons dans (4/21) $x_2 p_3 - x_3 p_2$, ... par (9/22). A la décomposition (9/22) du moment total en moment d'orbite et moment propre, correspond une *décomposition du vecteur C_{rst}* :

$$\left.\begin{aligned}
C_{123} &= (\quad v_1.m_{23} + v_2.m_{31} + v_3.m_{12}) - (A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3)\\
C_{234} &= (\quad v_2.m_{34} - v_3.m_{24} + v_4.m_{23}) - (B_3 v_2 - B_2 v_3 + A_1 v_4)\\
C_{341} &= (-v_3.m_{14} - v_4.m_{31} + v_1.m_{34}) + (B_1 v_3 - B_3 v_1 + A_2 v_4)\\
C_{412} &= (\quad v_4.m_{12} + v_1\, m_{24} - v_2.m_{14}) - (B_2 v_1 - B_1 v_2 + A_3 v_4)
\end{aligned}\right\} (10/22)$$

La première partie, qui correspond au moment *total*, se présente sous la forme d'une combinaison linéaire des v_k, à coefficients constants ; la seconde, qui correspond au moment propre, a la même forme, mais les coefficients sont essentiellement variables.

23. Application à la mécanique quantique. — Passons maintenant au cas de la mécanique quantique.

Nous sommes en possession d'une image classique qui semble se rapprocher plus de l'électron relativiste, que ne le fait l'image d'un point matériel ordinaire. Cherchons les opérateurs qui correspondent aux diverses grandeurs physiques attachées à l'image considérée.

Depuis Breit, on considère que $c\alpha_1$, $c\alpha_2$, $c\alpha_3$ sont les composantes de la vitesse tridimensionnelle, à cause des relations $\dot{x}_r = c\alpha_r$ $(r = 1, 2, 3)$. Il s'agit là d'une interprétation dont le sens est bien déterminé. *Dans ce même sens*, demandons-nous quel sera l'opérateur représentant la *vitesse d'univers* de l'électron ? Il suffira au lieu de dériver x_k, comme dans la formule précédente, par rapport au temps, de prendre la dérivée par rapport au temps *propre*, ou par rapport à u, qui n'en diffère que par une constante multiplicative. Nous poserons $v_k = \left[\frac{dx_k}{du}\right]$ et nous aurons les formules que nous avons déjà rencontrées (7/14)

$$v_1 = i\alpha_4\alpha_1, \quad v_2 = i\alpha_4\alpha_2, \quad v_3 = i\alpha_4\alpha_3, \quad v_4 = -\alpha_4. \qquad (1/23)$$

Les intégrales premières bien connues (2/14) :

$$x_2p_3 - x_3p_2 + \frac{\varkappa}{2}\alpha_2\alpha_3 = \text{constante} = \text{const. d'univers} \qquad (2/23)$$

mont ent qu'il existe un spin, dont l'opérateur est égal, à un facteur près, à $i\alpha_2\alpha_3$, ... Dans le cas de l'image classique introduite au paragraphe précédent, l'existence d'un spin entraîne le fait que les grandeurs C_{rst} nouvellement introduites ne sont plus identiquement nulles. Quels sont les opérateurs correspondants ? Pour les trouver il n'y a qu'à supposer que, dans (4/21), les p_k, v_k, x_k représentent des opérateurs ; *il n'y a aucune ambiguïté,* car tous sont commutables entre eux. C_{rst} mesurent en quelque sorte l'écart introduit par le fait que le moment cinétique d'orbite $x_2p_3 - x_3p_2$ n'est plus une constante.

Ecrivons donc ces opérateurs C_{rst} (à un même facteur près) et appliquons-leur la même décomposition que dans (10/22), c'est-à-dire séparons ce qui correspond au moment total de ce qui a trait au moment cinétique propre, c'est-à dire au spin. Pour cela, posons comme jusqu'à présent :

$$x_4 = ict, \qquad p_4 = -W/ic, \qquad v_k = [dx_k/du],$$

et soient m_{rs} les constantes d'univers définissant le moment cinétique total, par les équations (2/23) et leurs analogues (11/14). On a alors la décomposition suivante :

$$\left.\begin{aligned}
C_{123} &= \quad v_1 . m_{23} + v_2 . m_{31} + v_3 . m_{12} + \frac{3}{2}\varkappa i . \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \\
C_{234} &= \quad v_2 . m_{34} - v_3 . m_{24} + v_4 . m_{23} + \frac{3}{2}\varkappa . \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \\
C_{341} &= - v_3 . m_{14} - v_4 . m_{31} + v_1 . m_{34} + \frac{3}{2}\varkappa . \alpha_3\alpha_4\alpha_1 \\
C_{412} &= \quad v_4 . m_{12} + v_1 . m_{24} - v_2 . m_{14} + \frac{3}{2}\varkappa . \alpha_4\alpha_1\alpha_2
\end{aligned}\right\} \quad (3/23)$$

Le vecteur **C** se décompose en une partie dépendant du moment cinétique total m_{rs}, et une seconde, dépendant du spin, comme dans (10/22). *On voit que cette dernière partie se réduit aux opérateurs ternaires, à un facteur près.* Ces opérateurs apparaissent alors comme la partie du tenseur **C** qui correspond au spin : ce sont en quelque sorte, les *moments propres du troisième ordre*, tout comme les opérateurs binaires représentent le moment cinétique *propre* de l'électron, et pour les mêmes raisons.

A l'encontre de ce qui se passe en mécanique classique, nous connaissons ici la loi du mouvement ; nous pouvons donc en déduire la loi de variation du tenseur **C**.

Remarquons d'abord qu'on peut isoler la partie du tenseur **C** qui ne dépend pas des opérateurs ternaires et la mettre sous la forme remarquable suivante :

$$\left.\begin{aligned}
C_{123} &= \frac{\varkappa i}{2}\frac{d}{du}[x_1\alpha_2\alpha_3 + x_2\alpha_3\alpha_1 + x_3\alpha_1\alpha_2] + \frac{3}{2}\varkappa i\,.\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \\
C_{234} &= \frac{\varkappa i}{2}\frac{d}{du}[x_2\alpha_3 - x_3\alpha_2 - x_4\,.\,i\alpha_2\alpha_3] + \frac{3}{2}\varkappa\,.\,\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \\
C_{341} &= \frac{\varkappa i}{2}\frac{d}{du}[-x_3\alpha_1 + x_1\alpha_3 + x_4\,.\,i\alpha_3\alpha_1] + \frac{3}{2}\varkappa\,.\,\alpha_3\alpha_4\alpha_1 \\
C_{412} &= \frac{\varkappa i}{2}\frac{d}{du}[x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1 - x_4\,.\,i\alpha_1\alpha_2] + \frac{3}{2}\varkappa\,.\,\alpha_4\alpha_1\alpha_2.
\end{aligned}\right\} \quad (4/23).$$

Dérivons la composante C_{234} par rapport au temps propre (et désignons cette dérivée par un accent pour la distinguer de la dérivée ordinaire). On a :

$$C'_{234} = \sum x''_2(x_3p_4 - x_4p_3) + \sum x'_2(x'_3p_4 - x'_4p_3)$$

et en tenant compte de (11/16)

$$C'_{234} = \frac{2}{\varkappa}\,S.C_{234} - 2i(\alpha_2p_3 - \alpha_3p_2 + i\alpha_2\alpha_3p_4). \quad (5/23)$$

A un facteur près, la parenthèse est l'anticommutateur relativiste de $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, d'après le tableau I ; c'est *donc une constante* d'univers.

On a donc, en général :

$$C'_{rst} - \frac{2S}{\varkappa}C_{rst} = \text{constante}.$$

$$C'_{rst} - \frac{2S}{\varkappa}C_{rst} = -(\alpha_r\alpha_s\alpha_t.S + S.\alpha_r\alpha_s\alpha_t). \quad (6/23)$$

De plus, d'après le paragraphe 16, ces anticommutateurs sont de la forme $-\varkappa i(\alpha_4\alpha_k)'\omega$, de sorte qu'on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}
C'_{234} &= +\, i\varkappa(\alpha_4\alpha_1)'\omega + \frac{2S}{\varkappa}\, C_{234} \\
C'_{341} &= -\, i\varkappa(\alpha_4\alpha_2)'\omega + \frac{2S}{\varkappa}\, C_{341} \\
C'_{412} &= +\, i\varkappa(\alpha_4\alpha_3)'\omega + \frac{2S}{\varkappa}\, C_{341} \\
C'_{123} &= +\, \varkappa\,(\alpha_4)'\omega + \frac{2S}{\varkappa}\, C_{123}
\end{aligned}\right\} \qquad (7/23)$$

Des transformations simples permettent d'intégrer (6/23). On a :

$$C'_{234} = \varkappa(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)' + \frac{2S}{\varkappa}(C_{234} - \varkappa\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$

$$\frac{d}{du}(C_{234} - \varkappa\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \frac{2S}{\varkappa}(C_{234} - \varkappa\alpha_2\alpha_3\alpha_4), \qquad (8/23)$$

ce qui fait apparaître la combinaison intéressante :

$$A_{rst} = C_{rst} - \varkappa\alpha_r\alpha_s\alpha_t.$$

(8/23) signifie :

$$C_{234} - \varkappa\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \text{constante.}\, e^{\frac{2S}{\varkappa}.u} = A_{234}.$$

Les A_{rst} sont donc des grandeurs purement oscillatoires, comme ω. On en déduit qu'elles anticommutent avec S et que $i\omega A_{rst}$ *sont des constantes* dans l'espace temps, ce qui donne :

$$\varkappa\alpha_4\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 C_{234} = \text{constante d'univers.}$$

Remarquons que cette égalité nous donne la décomposition de la vitesse $\alpha_4\alpha_1$, en une partie constante et une autre variable. Enfin d'après un théorème général (§ 16) on aura également :

$$x''_k . A_{rst} = \text{constante d'univers.}$$

Passons maintenant à C_{1234}, lequel peut se décomposer d'une façon analogue à la précédente, en une partie correspondant au moment cinétique constant et une autre, due au spin. Pour le définir, il faudra partir du déterminant (4/22), mais ici ses éléments ne sont plus tous commutables. Nous pouvons poser par hypothèse, en nous guidant sur la forme de ce déterminant :

$$C_{1234} = x_1''C_{234} - x_2''C_{341} + x_3''C_{412} - x_4''C_{123}. \qquad (9/23)$$

Prenons la dérivée et tenons compte que d'après (11/16)

$$x_k''' = \frac{2S}{\varkappa}\, x'' = - x_k'' \frac{2S}{\varkappa} .$$

On a :

$$C'_{1234} = \sum x_1'''C_{234} + \sum x_1''C'_{234} = \sum x_1''\left(C'_{234} - \frac{2S}{\varkappa}\, C_{234}\right).$$

La formule (7/23) donne la valeur de la parenthèse :

$$C'_{234} - \frac{2S}{\varkappa}\, C_{234} = \text{const.} = \varkappa x_1''.\omega,$$

d'où :

$$C'_{1234} = \varkappa\Sigma(x_1'')^2\omega = \text{constante}.\omega.$$

Le calcul de la constante se fait immédiatement en utilisant les formules (15/16) ; on a tenu compte du changement de signe dans C_{341}, formules (7/23). Il vient

$$C'_{1234} = \varkappa[(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + (x_3'')^2 - (x_4'')^2]\omega = - \frac{4S^2}{\varkappa^2} .\varkappa\omega$$

ou :

$$C'_{1234} = 2iS\omega' \qquad \text{puisque} \qquad \varkappa\omega' = 2iS\omega ;$$

finalement :

$$C_{1234} = 2iS\omega + \text{constante} \qquad (10/23)$$

C_{1234} ne dépend donc pas explicitement des coordonnées.

Voici donc quelques renseignements sur le nouvel élément analytique auquel on peut rattacher les opérateurs ternaires, par un processus analogue à celui qui relie les opérateurs binaires au moment cinétique. Si l'on veut résumer qualitativement les choses, on peut dire : l'image *classique* d'un électron de Dirac devrait être caractérisée non seulement par l'existence d'un moment cinétique propre, *mais aussi par la manière dont varie l'orientation de ce dernier par rapport à la vitesse, donc par le tenseur* C_{rst}. La mécanique quantique donne à la fois le spin et la vitesse, donc aussi C_{rst} ; la mécanique classique ne fait pas intervenir de spin et C_{rst} est identiquement nul.

Toutes ces considérations ont trait à un électron de Dirac libre et dans un état déterminé. Mais la mécanique quantique a introduit aussi la notion d'électron qui se trouve simultanément dans deux ou plusieurs états distincts. Examinons rapidement ce cas, qui est très important.

24. Interprétation physique. Cas d'un paquet d'ondes. — La solution générale de l'équation de Dirac pour un électron libre, est composée d'une superposition d'ondes planes du type envisagé aux paragraphes précédents. Une onde plane représente un électron dans un « état » bien défini, caractérisé par une énergie W et une quantité de mouvement p, q, r, bien déterminée. La mécanique ondulatoire introduit cependant une conception nouvelle, celle d'un électron qui est « distribué sur un ou plusieurs états différents », ce qui est une traduction en langage imagé du fait que la fonction d'onde de l'électron en question est formée par une somme de fonctions propres, correspondant à des énergies et des quantités de mouvement différentes, par exemple :

$$\psi_s = a_s e^{(px_1 + qx_2 + rx_3 - Wt)/\varkappa} + a'_s e^{(p'x_1 + q'x_2 + r'x_3 - W't)/\varkappa} = \Psi_1 + \Psi_2. \qquad (1/24)$$

On peut aussi dire que, dans le « système » formé par l'électron (1/24), deux états distincts sont simultanément excités. Si le nombre des ondes planes est suffisamment grand, on peut constituer de cette façon un paquet d'ondes, dont les lois du mouvement sont celles de la mécanique classique, ainsi qu'il est bien connu.

Ce cas du paquet d'ondes est très important pour la question qui nous préoccupe. Il se caractérise par le fait fondamental que *l'invariant* Ω_2 *n'est plus nul*, comme pour le cas d'une onde plane. Recherchons-en les conséquences. On a d'abord, comme toujours :

$$\sigma_1\pi_1 + \sigma_2\pi_2 + \sigma_3\pi_3 = \Omega_1\Omega_2 ; \qquad (2/24)$$

$\Omega_1\Omega_2$ est un invariant. L'électron possède un moment magnétique, mais (2/24) prouve qu'il n'existe aucun système de référence dans lequel le moment électrique *total* de l'électron soit nul. L'existence d'un moment magnétique entraîne celle d'un moment électrique par le jeu de transformations de Lorentz, mais *cette partie* du moment électrique est nulle dans un système déterminé, à savoir celui dans lequel l'électron est au repos. Il existe donc un moment électrique supplémentaire, propre à l'électron, où plutôt au paquet d'ondes. Mais cette façon de parler est défectueuse, parce qu'on ne peut pas imaginer, dans le cas d'un électron distribué sur deux états quel est le système de « repos ».

Considérons un paquet d'ondes : il a en chaque point un moment magnétique égal à $\sigma_1 dV$, $\sigma_2 dV$, $\sigma_3 dV$, dV étant l'élément de volume. Nous pouvons le regarder comme un aimant de moment $\boldsymbol{\sigma} dV$, donc ayant une intensité d'aimantation égale à $\boldsymbol{\sigma}$. *Tout se passe alors comme s'il existait dans ce paquet d'ondes une distribution de charges magnétiques libres ayant une densité de volume égale à*

$$\mu = -\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_3}{\partial x_3}\right) = -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} ; \qquad (3/24)$$

(il semble permis de supposer en outre que la densité superficielle soit nulle à cause des conditions aux limites usuelles). Or, μ est nul pour une onde plane, tandis que $\mu \neq 0$ *pour un paquet d'ondes : cette différence est caractéristique.* Calculons en effet ce μ ; l'équation (9/18) donne

$$\mu = -\operatorname{div}\sigma = \frac{i}{c}\left(\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial t}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \qquad (4/24)$$

quantité réelle. Nous voyons apparaître ici les quantités du type B déjà rencontrées, § 18. Cette densité μ forme la composante de temps d'un vecteur courant magnétique. En généralisant le raisonnement dont Darwin s'est servi ([1]), on voit qu'à un facteur constant près, on peut écrire ce courant sous la forme :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \operatorname{rot}\pi.$$

Or, la formule (6/18) donne, avec $\xi = i\alpha_2\alpha_3$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\psi}^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{\psi}^* i\alpha_4\alpha_2\psi) -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{\psi}^* i\alpha_4\alpha_3\psi) + i\left(\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial x_1}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = 0,$$

soit :

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \operatorname{rot}\pi\right]_1 = i\left(\bar{\psi}^*\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial x_1}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi\right). \qquad (5/24)$$

Tout se passe donc comme si dans un paquet d'ondes il existait une charge magnétique ayant une densité de volume proportionnelle à :

$$\mu = \frac{i}{c}\left(\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial t}\theta\psi - \bar{\psi}^*\theta\frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$

et un courant :

$$k_r = i\left(\frac{\partial\bar{\psi}^*}{\partial x_r}\theta\psi - \bar{\psi}^*\theta\frac{\partial\psi}{\partial x_r}\right). \qquad (6/24)$$

([1]) C. G. DARWIN. *Proc. Roy. Soc.*, A 129, 1928, p. 623.

Ce courant est un quadrivecteur et satisfait à une loi de conservation :

$$\frac{\partial k_1}{\partial x_1} + \frac{\partial k_2}{\partial x_2} + \frac{\partial k_3}{\partial x_3} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0. \qquad (7/24)$$

Il suffit de remplacer ξ par θ dans l'équation générale (19/18) dont nous avons déjà démontré la validité. Remarquons encore que cette équation générale donne, pour $\xi = \alpha_4$, une équation de continuité pour un autre quadrivecteur :

$$i\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_r}\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_4\frac{\partial \psi}{\partial x_r}\right),$$
$$\frac{i}{c}\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t}\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_4\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \qquad (r = 1, 2, 3). \qquad (8/24)$$

Ce courant est *le courant électrique de conduction*. En effet, la formule (7/18) donne, pour $\xi = \alpha_1$, une composante du courant total, ou plutôt une quantité proportionnelle à celle-ci. On a :

$$\frac{2m_0c}{\varkappa}\cdot\bar{\psi}^*\alpha_1\psi = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\psi}^*\alpha_4\alpha_1\psi)$$
$$-\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_1}\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_4\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{\psi}^*\alpha_4\alpha_1\alpha_2\psi) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{\psi}^*\alpha_3\alpha_4\alpha_1\psi),$$

ou :

$$\frac{2m_0ci}{\varkappa}\cdot\bar{\psi}^*\alpha_1\psi = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\sigma\right]_1 - i\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_1}\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_4\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right),$$

et d'après le raisonnement de Darwin, la première parenthèse représente la contribution de la polarisation. Le reste doit être le courant de conduction : c'est le courant de Schrödinger. La même formule (7/18), pour $\xi = 1$, sépare la densité de charge électrique $-$ div π, due à la polarisation π, de la densité de charge électrique *vraie*, proportionnelle à :

$$\frac{i}{c}\left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t}\alpha_4\psi - \bar{\psi}^*\alpha_4\frac{\partial \psi}{\partial t}\right).$$

L'intégrale de celle-ci est naturellement égale à $\frac{-4\pi m_0 c}{h}$; les deux densités ne diffèrent que par une divergence. Cette décomposition est utile pour mettre en évidence le parallélisme entre constituants électriques et magnétiques de l'électron. On en déduit également que l'intégrale de l'expression précédente donne le rapport de la charge au magnéton de Bohr.

Il n'y a pas d'autres opérateurs ξ pour lesquels (19/18) représente une véritable équation de continuité ; en effet, ξ doit être un invariant pour que les diverses densités qui y figurent soient les composantes d'un quadrivecteur. Mais cette équation reste valable aussi pour les autres grandeurs ; nous n'insisterons pas.

Quoi qu'il en soit, il y a une différence fondamentale entre un électron libre dans un état déterminé (onde plane) c'est-à-dire un électron classique, et un électron « distribué sur plusieurs états » (paquet d'ondes), c'est-à-dire l'électron général de la mécanique ondulatoire. Le premier est un *aimant solénoïdal*, c'est-à-dire ne présente pas de densité de magnétisme libre ; le second est, *en général*, comparable à un aimant non solénoïdal et on peut parler d'une densité de magnétisme libre qui ne s'annule qu'en moyenne. Remarquons que *c'est l'existence simultanée de deux ou plusieurs états différents de l'électron qui provoque l'apparition de cette densité de magnétisme.*

Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux ondes planes quelconques. Si l'électron se trouve dans l'état 1 ou dans l'état 2, la densité de magnétisme est nulle ; mais si l'électron est décrit par $\Psi_1 + \Psi_2$ cette densité a une valeur finie : la contribution non nulle provient des termes rectangles, c'est-à-dire *des densités de probabilité relatives aux transitions entre les états qui existent simultanément.*

En effet, W_1 et W_2 étant les énergies des deux états 1 et 2, on a, à un facteur près :

$$\mu = \left(\frac{W_1 + W_2}{2} \right) (\tilde{\Psi}_2^{*} \theta \Psi_1 + \tilde{\Psi}^{*} \theta \Psi_2). \qquad (9/24)$$

S'il n'y a qu'un seul état, $\Psi_1 \equiv \Psi_2$, $\Omega_2 = \tilde{\Psi}^{*} \theta \Psi \equiv 0$, $\mu = 0$. Mais si $W_1 \neq W_2$, μ n'est plus nul, parce que les probabilités de la forme $\tilde{\Psi}_r \theta \Psi_s$, ne le sont pas, lorsque $r \neq s$.

La formule précédente montre cependant qu'il y a encore un cas où même un paquet d'ondes se comporte comme un aimant solénoïdal, c'est-à-dire un cas où il n'existe pas de magnétisme libre. C'est le cas où :

$$W_1 + W_2 = 0,$$

donc où l'électron se trouve distribué sur deux états seulement, ayant, l'un l'énergie W et l'autre une énergie *négative*, égale à la précédente en valeur absolue. La considération de ces masses magnétiques fictives ne serait peut-être pas sans intérêt pour l'étude de la question des énergies négatives.

25. « **Tenseurs** » et « **densités** » de **Schrœdinger**. — Nous n'avons pas examiné jusqu'à présent les questions relatives à la « transformation » que subissent les opérateurs lorsqu'on change le système de référence ; ces questions conduisent à des considérations intéressantes qui se rattachent aux développements du premier chapitre et dont nous allons donner un aperçu. Le résultat final n'est pas lié au cas particulier que nous avons envisagé dans ce qui précède, c'est-à-dire au cas d'un électron en relativité restreinte et dans un champ nul ; aussi prendrons-nous directement le cas général d'un électron dans une variété riemannienne quelconque.

Le problème de l'équation de Dirac en relativité générale a été abordé par un certain nombre d'auteurs WEYL, TETRODE, WIGNER, FOCK, PODOLSKY, ZAYCOFF d'une part, W. PAULI et J. SOLMON, F. SCHOUTEN, v. DANTZIG de l'autre. SCHRÖDIN-

GER l'a repris récemment et a systématisé les travaux du premier groupe d'auteurs ci-dessus, dans un mémoire des *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin (nov. 1932). Donnons-en un bref résumé des parties qui nous intéressent.

Schrödinger écrit l'équation générale de Dirac sous la forme invariante :

$$\gamma^k \nabla_k \psi = \mu\psi, \tag{1/25}$$

où :

$$\mu = \frac{2\pi m_0 c}{h} \quad \text{et} \quad \nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - \Gamma_k \quad (k = 0, 1, 2, 3;\ x_0 = ict),$$

(on adopte la convention de sommation usuelle).

Les Γ_k sont des opérateurs dont les traces donnent le potentiel d'univers. Les γ^k sont des matrices à quatre lignes et quatre colonnes, dont les éléments sont des fonctions des coordonnées et qui satisfont aux conditions :

$$\gamma^i\gamma^k + \gamma^k\gamma^i = 2g^{ik},$$

les g^{ik} étant les composantes du tenseur métrique fondamental ordinaire. Ce dernier permet de définir des γ_i « covariants », par les formules :

$$\gamma_i = g_{ik}\gamma^k, \tag{3/25}$$

et l'on a aussi :

$$\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2g_{ik}. \tag{2/25}$$

Si un système de quatre matrices γ_i satisfait à cette dernière condition, il est clair que $S^{-1}\gamma_i S$, y satisfera encore, S étant une matrice quelconque possédant une inverse.

Considérons alors une transformation ponctuelle des coordonnées. Nous devons admettre que les γ_i se transforment d'une certaine manière, mais toujours de façon que (2/25), avec la nouvelle valeur de g_{ik}, soit satisfaite. Or, si cette condition est satisfaite par γ'_i, elle le sera encore par $S^{-1}\gamma'_i S$, quelle que soit S. Une simple transformation ponctuelle des coordonnées ne suffit pas pour fixer d'une façon univoque les γ'_i finaux (cela n'a rien d'étonnant ; qualitativement, on pourrait dire que la raison réside dans le fait que ces transformations ignorent la variable de spin). Il faut donc *compléter* les transformations ponctuelles par une condition supplémentaire, qui détermine le choix des γ'_i transformés.

Pour fixer ce choix. Schrödinger, a recours à des conditions d'hermiticité, qui se traduiront, lors du passage aux grandeurs observables, par des *conditions de réalité* du type connu.

Il est facile de voir que tous les γ_i peuvent être rendus hermitiques par des transformations appropriées, mais *différentes* pour chacun d'eux : une même transformation S ne peut pas rendre hermitiques tous les γ_i simultanément. La condition supplémentaire ne peut donc pas être une condition de « conservation de l'hermiticité » des γ_i. Par contre, on peut voir qu'au moyen d'une même matrice S il est possible de rendre hermitiques simultanément les matrices γ_0, γ^1, γ^2, γ^3, et cette circonstance permet de trouver une solution raisonnable du problème posé.

Par hypothèse, Schrödinger admet donc que, pour une métrique définie au moyen des γ_i, les seules transformations qu'on doive envisager sont les transformations ponctuelles de la relativité générale, *complétées* chaque fois par une transformation S, qui conserve les caractères d'hermiticité (ou d'anti-hermiticité) de γ_0, γ^1, γ^2, γ^3. On peut donner l'expression de la substitution infinitésimale $S = 1 + \Theta$, attachée à une transformation ponctuelle infinitésimale déterminée et satisfaisant à la condition précédente.

Le caractère des transformations générales est ainsi précisé ; de ce fait, il s'introduit une définition plus restrictive d'un « tenseur », qui est la suivante : « un ensemble T d'opérateurs constitue un « tenseur de Schrödinger », si pour une transformation infinitésimale ponctuelle *complète* il se transforme en $T' + T\Theta - \Theta T$, où T' représente les composantes transformées comme s'il s'agissait d'un tenseur ordinaire du même rang, et où Θ est la substitution définie précédemment par $S = 1 + \Theta$.

On constate que les γ_i constituent un « vecteur de Schrödinger », ainsi que les ∇_k ; on constate également que le *produit* de deux tenseurs A et B est encore un « tenseur », pourvu que A ne contienne pas d'opérateur de la forme $\partial/\partial x_r$.

L'opérateur $\gamma^k \nabla_k$, appliqué à ψ dans l'équation fondamentale (1/25) est un invariant. Pour que cette équation soit invariante pour une transformation complète, il faut que ψ ne change pas pour une transformation ponctuelle ordinaire, mais qu'elle se transforme, lors d'une substitution S, d'après la loi

$$\psi' = S^{-1}\psi.$$

Cela étant, Schrödinger établit deux théorèmes très importants pour la question qui nous intéresse ici. Premier théorème :

I. — Soient $T^{\rho\sigma\ldots}_{\alpha\beta\ldots}$ les composantes d'un « tenseur de Schrödinger » (ne contenant pas l'opérateur $\partial/\partial x_r$) et admettons que, pour un système de référence donné, les *opérateurs*

$$\gamma_0 T^{\rho\sigma\ldots}_{\alpha\beta\ldots}$$

soient hermitiques si la suite des indices renferme un nombre pair de zéros, et anti-hermitiques dans le cas contraire. Cela étant, on peut montrer *que le passage à un autre système de référence, au moyen d'une transformation complète, conserve le caractère d'hermiticité des opérateurs*

$\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$, mais qu'on ne peut rien dire au sujet de l'hermiticité des composantes tensorielles $T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ elles-mêmes.

Second théorème :

II. — A partir du tenseur de Schrödinger $T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ et des opérateurs $\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$, on peut former les « densités de moyenne »

$$\tilde{\psi}^* T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi}^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi,$$

qui sont des nombres ordinaires, réels ou purement imaginaires, suivant que les opérateurs sont hermitiques ou antihermitiques.

D'après le théorème précédent, *il résulte que ce ne sont pas les* $\tilde{\psi}^* T\psi$ *mais bien les* $\tilde{\psi}^*\gamma_0 T\psi$ *qui conserveront, dans tous les systèmes de référence, les caractères de réalité que nous leur avons supposés*, et qui sont ceux d'un tenseur ayant une signification physique. D'autre part, à cause des propriétés de ψ, $\tilde{\psi}^* T\psi$ ne se transformera pas comme le tenseur T. Schrödinger *démontre que ce sont précisément les composantes* :

$$\tilde{\psi}^* \gamma_0 T \psi$$

qui se transforment comme les composantes du tenseur correspondant.

A chaque tenseur de Schrödinger $T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ on peut donc faire « correspondre » un ensemble de composantes $\tilde{\psi}^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi$, lesquelles :

1° se transforment comme un tenseur ordinaire de rang ${}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ *à l'encontre de* $\tilde{\psi}^* T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi$;

2° *conservent* pour toute transformation *leurs caractères de réalité*, en supposant bien entendu que les opérateurs $\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ possèdent les caractères d'hermiticité correspondants.

Schrödinger établit donc une correspondance entre un « tenseur de Schödinger » $T^{\rho\sigma..}_{\alpha\beta..}$ et le *tenseur ordinaire* $\tilde{\psi}^{*}\gamma_0 T^{\rho\sigma..}_{\alpha\beta..}\psi$, et considère le second comme l'*interprétation physique du premier*.

Ces résultats précisent et généralisent d'autres résultats analogues, qui ont été indiqués par v. NEUMANN dans le cas de l'équation de Dirac en relativité restreinte [1]. v. Neumann écrit l'équation de Dirac sous la forme adoptée par Schrödinger (les Γ_k étant cependant des nombres) et établit comme plus haut, une « correspondance » entre les matrices γ_k et les nombres ordinaires $\tilde{\psi}^{*}\gamma_0\gamma_k\psi$.

26. Application. — Revenons à la théorie exposée au chapitre premier et examinons si elle fournit les conditions de réalité nécessaires pour les diverses grandeurs physiques qu'on y rencontre.

Remarquons que l'équation de v. Neumann ou de Schrödinger (avec des potentiels nuls) est identique à l'équation fondamentale écrite sous la forme (7/7), au changement de notation suivant près :

$$\gamma_1 = i\alpha_4\alpha_1, \qquad \gamma_2 = i\alpha_4\alpha_2, \qquad \gamma_3 = i\alpha_4\alpha_3, \qquad \gamma_0 = -\alpha_4.$$

Les γ_k forment en général un quadrivecteur. Or, les formules qui donnent la vitesse d'univers (à un facteur près), par simple dérivation des coordonnées :

$$\left[\frac{dx_r}{du}\right] = i\alpha_4\alpha_r, \qquad \left[\frac{dx_4}{du}\right] = -\alpha_4 \qquad (r = 1, 2, 3)$$

s'écrivent :

$$\left[\frac{dx_k}{du}\right] = \gamma_k \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad \text{ou encore :} \left[\frac{dx_k}{d\tau}\right] = ic\gamma_k,$$

[1] J. v. NEUMANN, *Z. Physik*, 48, 1928, p. 868.

τ étant le « temps propre ». Les « dérivées » forment bien un quadrivecteur, qui peut donc servir à définir la vitesse d'univers. Vérifions que les conditions de réalité sont également satisfaites.

D'après ce qui précède, ce ne sont pas les caractères d'herméticité du *vecteur* précédent $ic\gamma_k$ qui doivent nous les donner, mais bien ceux des *opérateurs* ;

$$ic\gamma_0\gamma_1, \quad ic\gamma_0\gamma_2, \quad ic\gamma_0\gamma_3, \quad ic\gamma_0\gamma_0$$

c'est-à-dire :

$$c\alpha_1, \quad c\alpha_2, \quad c\alpha_3, \quad ic.1.$$

Les densités de moyenne *de ces derniers opérateurs* constituent la densité de courant, vecteur d'univers, et possèdent effectivement les caractères de réalité nécessaire.

La densité de courant électrique « correspond » donc, d'après Schrödinger au vecteur γ_k (*loc. cit.*, p. 24). En multipliant convenablement les opérateurs γ_k, on peut former des « tenseurs de Schrödinger » ; à chaque tenseur A de ce type correspondra donc une densité de moyenne $\tilde{\psi}^*\alpha_4 A\psi$ (puisque $\gamma_0 = -\alpha_4$) qui se transformera comme un tenseur ordinaire du même rang.

La situation est donc la suivante. Soit A un ensemble d'opérateurs (formé par des produits des α_k), formant les composantes d'un tenseur de Schrödinger. On peut lui faire correspondre deux séries de nombres ordinaires :

a) les nombres $\tilde{\psi}^*\alpha_4 A\psi$, qui se transforment effectivement comme les composantes d'un tenseur *ordinaire* du même rang que A, et qui conservent, dans la transformation, les conditions de réalité nécessaire pour l'interprétation physique, et :

b) *les densités de moyenne* $\tilde{\psi}^* A\psi$ qui ne se transforment pas de cette façon. A cause des lois de transformation de α_4 c'est $\int \tilde{\psi}^* A\psi . dV$, qui dans ce cas, se transforme comme un tenseur du même rang que A.

D'après Schrödinger, à cause des conditions correctes de réalité et de transformation, ce sont les grandeurs $\psi^* \alpha_4 A \psi$ qui doivent servir d'interprétation physique au tenseur A. D'après les principes généraux de la mécanique quantique, l'interprétation physique des opérateurs A (Cf. le tableau II de M. de Broglie) est donnée par la moyenne :

$$\int \tilde{\psi}^*(x, y, z, t, \zeta) A \psi(x, y, z, t, \zeta) . dV . d\zeta$$

(ζ étant la variable de spin) et la densité spatiale devrait être dans ce cas :

$$\tilde{\psi}^* A \psi .$$

Dans un cas c'est la densité qui se transforme comme l'opérateur, dans l'autre c'est la moyenne elle-même.

Observation finale. — Remarquons que la densité ordinaire étant $\tilde{\psi}^* A \psi$, on peut écrire la densité de Schrödinger sous la forme :

$$\Phi A \psi$$

avec $\Phi = \tilde{\psi}^* \alpha_4$. On peut caractériser la différence entre ces deux grandeurs en disant que, dans le premier cas, l'opérateur A est encadré par ψ et son *imaginaire conjugué*, tandis que dans le second cas le même opérateur est encadré par ψ et par son *adjoint*.

En théorie non relativiste, l'adjoint de ψ est identique à son conjugué $\tilde{\psi}^*$, mais on peut dire qu'il n'en est plus de même en théorie de Dirac. Pour définir cet adjoint il est nécessaire de définir l'expression adjointe de $\partial/\partial t$ ou de $\partial/\partial x_4$. Dans une théorie relativiste correcte, donc parfaitement symétrique, où toutes les variables x_k doivent jouer le même rôle, il est naturel d'admettre que les règles pour trouver l'expression adjointe de $\partial/\partial x_k$ soient les mêmes, quel que soit k. Donc, $\varkappa \frac{\partial}{\partial x_k}$ devra être considérée comme une expression self-adjointe, même lorsqu'elle se réduit pour $k = 4$, à $-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}$. Cela étant, soit :

$$\varkappa \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathrm{H}\psi = 0 \tag{1/26}$$

l'équation de Dirac. H est l'hamiltonien, comme toujours self-adjoint ; ψ est considéré comme une matrice.

L'équation vérifiée par Φ, l'adjoint de ψ, sera :

$$-\varkappa \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi \mathrm{H} = 0, \tag{2/26}$$

tandis que l'équation transposée et conjuguée, vérifiée par $\bar{\psi}^*$ sera :

$$-\varkappa \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t} - c\varkappa \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_r + m_0 c^2 \bar{\psi}^* \alpha_4 = 0$$

ou :

$$-\varkappa \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial t} \alpha_4 + c\varkappa \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_4 \alpha_r + m_0 c^2 \bar{\psi}^* \alpha_4 . \alpha_4 = 0 \tag{3/26}$$

et on voit que si l'on pose :

$$\Phi = \bar{\psi}^* \alpha_4$$

(3/26) se réduit à (2/26). Cette observation est connue, mais le rapprochement avec les théorèmes de Schrödinger ne manque pas d'intérêt.

Le Gérant : F. AMIRAULT.

LAVAL. — IMPRIMERIE BARNÉOUD

ÉLECTRICITÉ THÉORIQUE. — *Sur la définition du champ électromagnétique par des potentiels et sur le moment magnétique de l'électron.* Note de M. **Alexandre Proca**.

On résout d'habitude les équations de Maxwell-Lorentz dans le vide

$$\frac{\partial F_{rs}}{\partial x_t} + \frac{\partial F_{tr}}{\partial x_s} + \frac{\partial F_{st}}{\partial x_r} = 0, \qquad \frac{\partial F^{rs}}{\partial x_s} = j^r \tag{1}$$

en posant

$$H = \operatorname{rot} A, \qquad E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\dot{A}. \tag{2}$$

retardé

$A = \frac{1}{c}\int \frac{[\rho v]_{t-r/c}}{r}\, d\tau$

soit

$$F_{rs} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s}, \tag{3}$$

où $(A_1 = \varphi_1,\ A_2 = \varphi_2,\ A_3 = \varphi_3,\ A_4 = i\varphi)$ est le *potentiel*, vérifiant les conditions

$$\Box\varphi_r = -j_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi^r}{\partial x_r} = 0.$$

retardé

Le champ est défini par les fonctions F_{rs}, solutions des équations (1). Cela étant, montrons que *la description d'un champ par le potentiel φ_r est incomplète*. En effet, si l'on calcule le champ d'après (3), on laisse de côté un certain nombre de solutions des équations de Maxwell; on peut s'assurer qu'il existe d'autres expressions, différentes de (3) et irréductibles à cette forme, qui satisfont à (1), *tout en remplissant la condition essentielle de covariance relativiste*.

Posons $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $ict = x_4$; il suffira alors de prendre au lieu de (3) les expressions plus générales suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
f_{23} &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial\Phi_4^*}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_4}\right), &\quad f_{14} &= \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} + \left(\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_3}\right),\\
f_{31} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial\Phi_4^*}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_4}\right), &\quad f_{24} &= \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4} + \left(\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_3} - \frac{\partial\Phi_3^*}{\partial x_1}\right),\\
f_{12} &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial\Phi_4^*}{\partial x_3} - \frac{\partial\Phi_3^*}{\partial x_4}\right), &\quad f_{34} &= \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4} + \left(\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_2}\right).
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

φ_r est un vecteur d'univers, Φ^*_r un pseudo-vecteur indépendants l'un de l'autre et satisfaisant : 1° à la condition de Lorentz $\partial\varphi^r/\partial x_r = 0$, $\partial\Phi^{*r}/\partial x_r = 0$, et 2° aux conditions :

$$\square\varphi_r = -j_r, \qquad \square\Phi^*_r = 0. \tag{5}$$

Passons aux quantités réelles (A, φ) et (B, Φ^*), en posant

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \mathrm{A}, \quad \varphi_4 = i\varphi \qquad \text{et} \qquad (\Phi^*_1, \Phi^*_2, \Phi^*_3) = i\mathrm{B}, \quad \Phi^*_4 = \Phi. \tag{6}$$

On pourra écrire (4) sous la forme

$$\mathrm{H} = \mathrm{rot\,A} - \mathrm{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\dot{\mathrm{B}}, \qquad \mathrm{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\dot{\mathrm{A}} - \mathrm{rot\,B}, \tag{7}$$

et ces expressions satisfont à (1) compte tenu de (5).

Examinons la question de la covariance relativiste. Si φ_r, Φ^*_r se transforment comme des vecteurs d'univers, les parenthèses de (4) sont les composantes d'un tenseur antisymétrique *adjoint* (ou dual), ayant mêmes indices que le premier membre. Φ^*_r lui-même doit être considéré comme le vecteur adjoint à un *tenseur antisymétrique du troisième rang* M_{opq}. On sait que les composantes de ce vecteur sont données par

$$\Phi^*_r = \sqrt{g}\,\mathrm{M}^{opq}, \qquad g = |g_{ik}|,$$

opqr étant une permutation paire des indices 1, 2, 3, 4. Ses trois composantes d'espace sont imaginaires, seule la composante de temps étant réelle; (4) satisfont donc les conditions de réalité correctes.

Mathématiquement, ce résultat est en relation avec la propriété bien connue d'après laquelle, dans l'univers, un tenseur antisymétrique de second rang peut toujours être représenté par une somme de deux tenseurs aréolaires de ce type (c'est-à-dire de la forme $\alpha_r\beta_s - \alpha_s\beta_r$; α_r, β_r vecteurs).

Physiquement, il est aisé de voir quel est le sens de ce qui précède. Formons pour cela la divergence du champ magnétique; on a :

$$\mathrm{div\,H} = \square\,\Phi^*_4.$$

Il en résulte que Φ^*_r est le *potentiel des charges magnétiques*, φ_r étant celui des charges électriques. Les développements précédents signifient donc que, pour décrire un champ électromagnétique, il faut faire appel non seulement au potentiel électrique, *mais aussi au potentiel magnétique*.

Cela n'est pas en contradiction avec l'expérience. En effet, on sait qu'expérimentalement il n'existe pas de charges magnétiques libres; aussi conclut-on en théorie classique que le potentiel correspondant doit être nul. Cependant *la charge et le courant magnétique peuvent parfaitement être nuls sans que le potentiel lui-même le soit;* il suffit qu'il satisfasse à l'équation $\square\, \Phi^*_r = 0$. Négliger ce potentiel est purement arbitraire, particulièrement lorsqu'il s'agit de problèmes concernant les ondes électromagnétiques ou lumineuses, où il n'y a pas plus de charge électrique que de charge magnétique. Il convient donc de réviser, de ce nouveau point de vue, tous les calculs classiques ou quantiques qui font intervenir des potentiels.

Cela étant, considérons un électron au repos et admettons que, dans ce cas, seules les composantes φ_4 et Φ_4 sont différentes de zéro. La solution générale (4) montre qu'autour d'un électron au repos règne le champ électrique connu, et, *de plus*, *un champ magnétique*, provenant du potentiel Φ_4 et que l'on considérait comme nul jusqu'à présent. Ce champ ne peut provenir d'une masse magnétique libre, *mais il peut être produit par un doublet* ou plus généralement par une densité de moment magnétique. On en conclut qu'en dehors de sa charge électrique, un électron est aussi caractérisé par un moment magnétique. *L'existence d'un moment magnétique*, mise en évidence par une toute autre voie, *est donc implicitement contenue dans les équations de Maxwell-Lorentz* et aurait pu être pressentie si l'on avait écrit dès le début la solution de ces équations sous la forme (4).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 202, p. 641, séance du 24 février 1936.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
104016-36 Paris — Quai des Grands-Augustins, 55.

SOCIETE FRANCAISE DES ELECTRICIENS

6e SECTION

Communication présentée le

5 MAI 1936

SUR LES EQUATIONS DE MAXWELL ET LE MOMENT MAGNETIQUE DE l'ELECTRON,

par M. Al. PROCA

1°- Dans cette note, nous voulons présenter une remarque élémentaire concernant une propriété de l'électron dont la découverte est relativement récente, à savoir l'existence de son moment magnétique et électrique.

On sait actuellement que la particule élémentaire d'électricité est caractérisée, en dehors de sa charge e, par un moment magnétique $eh/4\pi mc$, où $h = 6{,}55 \times 10^{-27}$ est la constante de PLANCK, m la masse de l'électron et c la vitesse de la lumière. L'électrodynamique classique ne tient pas compte de ce moment.

Il n'est peut-être pas dénué d'intérêt de montrer que la possibilité de l'existence d'un tel moment aurait pu être découverte depuis longtemps, puisqu'elle est suggérée par les équations de MAXWELL-LORENTZ, elles-mêmes. Il en résulte que pour tenir compte dans nos calculs classiques de ce moment, on n'a nullement besoin de modifier ou compléter la théorie; il suffira d'appliquer, dans toute leur généralité, les équations fondamentales. La raison pour laquelle l'électrodynamique classique a ignoré ce moment jusqu'à sa découverte expérimentale tient, nous le verrons, à une manière arbitraire de procéder, qui a été suggérée, mais non justifiée, par l'absence de charges magnétiques vraies.

Pour analyser plus clairement la situation, nous serons amenés à exprimer les champs en fonction des potentiels sous une forme légèrement différente de la forme classique, mais qui nous parait mieux adaptée à la réalité physique; c'est sur cette transformation élémentaire que nous insisterons tout particulièrement.

2°- Considérons les équations de MAXWELL-LORENTZ dans le vide :

$$\text{rot } E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad \text{rot } H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \rho\frac{v}{c}$$

$$\text{div } H = 0 \qquad \text{div } E = \rho \tag{1}$$

Pour les résoudre, on peut faire la substitution :

$$(2) \qquad H = \text{rot } A \qquad\qquad E = -\text{ grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

et ces expressions satisferont à (1) pourvu que l'on ait

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = \Box A = \rho\frac{v}{c} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \Box\varphi = \rho \\ \\ \text{div } A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

Pour une distribution de charge et de courant données la solution <u>générale</u> de (3) s'obtient sous la forme

$$(4) \qquad A = A_1 + A_2 \qquad\qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

en ajoutant aux potentiels retardés

$$(5) \qquad A_1 = \frac{1}{c}\int \frac{(\rho v)_{t-r/c}}{r}\, d\tau \qquad\qquad \varphi_1 = \int \frac{\rho_{t-r/c}}{r}\, d\tau$$

la solution générale A_2, φ_2 des équations (3) sans second membre

$$(6) \qquad \Box A_2 = 0 \qquad \Box\varphi_2 = 0 \qquad \text{avec div } A_2 + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = 0$$

Habituellement, on se borne à considérer dans les applications seulement les potentiels retardés A_1, φ_1; on pose donc arbitrairement $A_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$ avec l'arrière-pensée que la solution de (6) n'est pas essentielle.

Cela est raisonnable, ou plutôt était raisonnable jusqu'à la découverte expérimentale du moment magnétique de l'électron. En effet, considérons un électron au repos, $v = 0$. On aura $A_1 = 0$ et la solution générale (2) donnera

$$(7) \qquad H = \text{rot } A_2$$

Comme il n'y a pas de champ magnétique autour d'un électron au repos (ou plutôt comme on croyait qu'il n'y a pas de champ magnétique) il faudra prendre $H = 0$, donc la solution $A_2 = 0$ (1).

Cependant, nous n'avons pas le droit de procéder ainsi. La description du champ par les potentiels retardés A_1, φ_1 n'est pas équivalente à la description par les E, H solutions de (1); nous devons tenir compte de la solution générale (2) dans laquelle nous substituerons (4) au lieu de A_1 et φ_1

---

(1) Ou encore $A_2 = \text{grad}\,\lambda$, ce qui revient au même, les champs ne déterminant les potentiels qu'à un gradient près.

Quel élément nouveau ces A_2, φ_2 apportent-ils ? En d'autres termes quelle est la signification physique de A_2 et φ_2?

Sur l'exemple précédent on saisit mieux la différence entre la solution ($A_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$) et la solution générale ($A_2 \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$);

en effet, (7) nous apprend que dans le premier cas un électron au repos ne produit qu'un champ électrique, tandis que dans le second, c'est-à-dire en réalité, un pareil électron est aussi entouré d'un champ magnétique.

Cependant l'interprétation physique directe de A_2, φ_2 est

malaisée. Pour cette raison, nous allons nous servir, d'autres grandeurs plus adéquates. Nous partirons toujours des équations fondamentales (1) mais nous les résoudrons autrement que par la substitution (2). Nous poserons donc, comme solution générale des équations (1) :

$$
(8) \quad \begin{aligned} H &= \text{rot } A_1 + \text{grad } \emptyset - \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \\ E &= - \text{grad } \varphi_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \text{rot } B \end{aligned}
$$

où A_1, φ_1 sont les 4 grandeurs (4), satisfaisant à (3) et B, $\emptyset$ quatre autres grandeurs remplissant les conditions

$$
(9) \qquad \Box B = 0 \qquad \Box \emptyset = 0 \qquad \text{div } B - \frac{1}{c}\frac{\partial \emptyset}{\partial t} = 0
$$

Les raisons pour lesquelles nous avons choisi la forme indiquée, et la symétrie interne de ces formules apparaîtront plus clairement dans un instant, quand nous l'écrirons sous forme relativiste.

On vérifie aisément que les expressions (8) satisfont à (1), compte tenu des conditions (3) et (9).

Quelle est la signification physique des A_1, φ_1 d'une part

et de B, $\emptyset$ de l'autre ? Formons div H, et div E; on a

$$
(10) \qquad \text{div } E = \Box \varphi_1 \qquad \text{div } H = \Box \emptyset
$$

On en conclut que A_1, φ_1 représentent le potentiel des

charges électriques et B, $\emptyset$ celui des charges magnétiques. Cette manière d'écrire sépare donc l'effet des charges électriques de celui des charges magnétiques. Elle est la plus naturelle; elle serait la seule possible si des charges magnétiques vraies existaient réellement[2]

---

[2] Voir J. GEHENIAU, Bul. Académie royale de Belgique.

Or, ces charges magnétiques n'existent pas, ce qui se traduit par $\Box B = 0$, $\Box \emptyset = 0$. Cela n'implique cependant pas nécessairement $B \equiv 0$, $\emptyset \equiv 0$; la charge peut être nulle sans que le potentiel le soit. (8) reste le champ général défini par les équations de MAXWELL, et l'on voit qu'en tout cas ce champ est dû à une contribution d'origine électrique et à une autre d'origine magnétique, caractérisées respectivement par A_1, φ_1 et B, $\emptyset$

Si la première est celle d'une seule charge au repos e, on aura $A = 0$,

$\varphi = \frac{e}{r}$ et

$$H = \text{grad}\, \emptyset - \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

donc un champ magnétique différent de zéro en général. Ce champ ne provient pas d'une charge magnétique puisque celles-ci n'existent pas, par hypothèse; elle ne peut provenir, dans le cas le plus simple, que d'un dipôle magnétique, caractérisé par un moment, ou plus généralement d'une distribution de densité de moment magnétique.

Ainsi, la solution générale des équations de MAXWELL fait apparaître, sans hypothèse supplémentaire, l'éxistence d'un moment magnétique de l'électron.

A vrai dire, le raisonnement appliqué à B, $\emptyset$ s'appliquerait aussi bien à un terme additif dans A, φ et l'on devrait en conclure que l'électron doit aussi posséder un moment électrique; en effet, il doit en être ainsi, tout moment magnétique entraînant pour un électron en mouvement, l'apparition d'un moment électrique, en vertu de la théorie de la relativité.

En résumé, la substitution (8) permet de résoudre les équations de MAXWELL-LORENTZ d'une façon plus naturelle et qui permet une interprétation physique plus aisée des grandeurs auxiliaires A, φ, B, $\emptyset$. L'avantage de son emploi consiste en ce qu'il permet de comprendre ce que signifie physiquement la solution générale, A_2, φ_2 de l'équation sans second membre, dont le sens n'est pas clair: elle constitue l'apport des éléments magnétiques qui peuvent se trouver dans l'électron et qui s'y trouvent effectivement, ainsi que l'expérience l'a prouvé. Si on l'avait utilisé dès le début, on aurait compris dès la découverte du spin de l'électron que l'existence du moment élémentaire est déjà contenue dans les équations de MAXWELL-LORENTZ.

3° - Examinons maintenant d'un peu plus près les potentiels B, $\emptyset$ du point de vue de leur structure mathématique. Il serait très intéressant d'examiner les questions qui se posent à leur sujet en leur qualité de solutions des équations de propagation, mais cela nous entraînerait trop loin. Nous n'aborderons que leur comportement par rapport aux transformations de LORENTZ.

On sait que les composantes du champ électromagnétique E,H, forment un tenseur antisymétrique F_{rs} de rang 2 ($r, s = 1, 2, 3, 4$), dans l'univers décrit par les coordonnées $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$. On a:

$$(11)\quad \begin{array}{lll} F_{14} = iE_1 & F_{24} = iE_2 & F_{34} = iE_3 \\ F_{23} = H_1 & F_{31} = H_2 & F_{12} = H_3 \end{array} \qquad i = \sqrt{-1}$$

On sait également que le potentiel A, φ est un vecteur d'univers φ_r, avec

$$(12)\qquad \varphi_1 = A_1 \quad \varphi_2 = A_2 \quad \varphi_3 = A_3 \quad \varphi_4 = i\varphi$$

Avec ces notations, la relation classique entre F_{rs} et φ_r est

$$(13)\qquad F_{rs} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s}$$

φ_r, $\partial / \partial x_r$ vecteurs, F_{rs} tenseur antisymétrique. Quelle sera la transcription des formules (8) ?

Remarquons, que dans l'univers, à tout tenseur du second ordre a_{rs} on peut faire correspondre un tenseur adjoint (ou dual, ou un pseudo-tenseur) a^*_{rs} suivant une règle très simple; on a :

$$(14)\quad \left(\begin{array}{lll} a_{23} = a^*_{14} & a_{31} = a^*_{24} & a_{12} = a^*_{34} \\ a_{14} = a^*_{23} & a_{24} = a^*_{31} & a_{34} = a^*_{12} \end{array}\right.$$

Si a_{rs}, b_{rs} sont deux tenseurs antisymétriques, la grandeur

$$a_{rs} + b^*_{rs}$$

formée en ajoutant à l'un deux l'adjoint de l'autre se transformera toujours comme un tenseur.

Appliquons cela à la formule (3), en prenant

$$a_{rs} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s}$$

Soit $\emptyset^*_r$ une grandeur qui se transforme comme un vecteur.

L'expression

$$b_{rs} = \frac{\partial \emptyset^*_s}{\partial x_r} - \frac{\partial \emptyset^*_r}{\partial x_s}$$

et aussi b^*_{rs} se transformeront comme des tenseurs antisymétriques et il en sera de même des $a_{rs} + b^*_{rs}$ dont les composantes sont explicitement;

$$
(15)\quad
\begin{cases}
f_{23} = \left(\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}\right) + \left(\dfrac{\partial \phi^*_4}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \phi^*_1}{\partial x_4}\right) & f_{14} = \left(\dfrac{\partial \varphi_4}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_4}\right) + \left(\dfrac{\partial \phi^*_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \phi^*_2}{\partial x_3}\right) \\[2ex]
f_{31} = \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}\right) + \left(\dfrac{\partial \phi^*_4}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \phi^*_2}{\partial x_4}\right) & f_{24} = \left(\dfrac{\partial \varphi_4}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_4}\right) + \left(\dfrac{\partial \phi^*_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \phi^*_3}{\partial x_1}\right) \\[2ex]
f_{12} = \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right) + \left(\dfrac{\partial \phi^*_4}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \phi^*_3}{\partial x_4}\right) & f_{34} = \left(\dfrac{\partial \varphi_4}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_4}\right) + \left(\dfrac{\partial \phi^*_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \phi^*_1}{\partial x_2}\right)
\end{cases}
$$

La quantité f_{rs} possède la loi de transformation correcte pour qu'elle puisse représenter un champ électromagnétique. Si l'on passe aux quantités réelles et aux E, H, les formules (15) sont identiques aux formules (8).

On voit donc quelle est leur symétrie; examinons maintenant les conditions de réalité. f_{rs} doit être réel, sauf si l'un de ses indices est égal à 4, cas auquel la composante correspondante est purement imaginaire. L'inspection des formules (15) montre que pour cela il faut que

$$
(16)\qquad \begin{array}{ll} \phi^*_4 & \text{soit réel} \\ \phi^*_1,\ \phi^*_2,\ \phi^*_3 & \text{soient purement imaginaires} \end{array}
$$

Ces conditions de réalité ne sont pas identiques à celle de φ_r

$$
(17)\qquad \begin{array}{ll} \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 & \text{réels} \\ \varphi_4 & \text{purement imaginaire} \end{array}
$$

Donc quoique ϕ^*_r et φ_r se transforment tous les deux comme des vecteurs ils ne sont pas de même nature; (15) et (16) montrent que φ_r le potentiel électrique est un véritable vecteur, tandis que ϕ^*_r, le potentiel magnétique, est un pseudo-vecteur, c'est-à-dire l'adjoint d'un tenseur complètement antisymétrique du troisème rang M_{opq} :

$$
\phi^*_r = \sqrt{g}\, M^{opq} \qquad g = |g_{ik}| \quad ; \ o, p, q, r \text{ permutation paire de } 1, 2, 3, 4.
$$

On voit donc clairement ce qui différencie du point de vue structural, un potentiel électrique d'un potentiel magnétique.

III

Théorie du Photon

III. THEORIE DU PHOTON

III.1 Sur la Théorie du Rayonnement.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.193, p832-834; Nov 3, 1931

III.2 Sur une Explication Possible de la Différence de Masse entre le Proton et l'Electron.
J.Phys.Rad.; Vol.III, Ser.VII, No.2, p83-101; Feb 1932

III.3 Sur les Solutions des Equations de Maxwell pour le Vide.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.197, p1725-1727; Dec 26, 1933

III.4 Sur la Mécanique Quantique des Photons.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.198, p54-56; Jan 3, 1934

III.5 Mécanique Quantique des Photons. Approximation de Pauli.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.198, p452-454; Jan 15, 1934

III.6 Ondes et Photons. I. Approximation de Schroedinger.
J.Phys.Rad.; Vol.V, Ser. VII, No.1, p6-19; Jan 1934

III.7 Ondes et Photons. II. Approximation de Pauli.
J.Phys.Rad.; Vol.V, Ser. VII, No.3, p121-125; Mar 1934

III.8 Ondes et Photons. III. Approximation de Dirac.
J.Phys.Rad.; Vol.V, Ser. VII, No.4, p157-166; Avr 1934

III.9 Sur les particules qu'on peut Associer à la Propagation d'une Onde de Lumière.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.198, p643-645; Fev 12, 1934

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Sur la théorie du rayonnement.* Note (1) de M. **Al. Proca**, présentée par M. Jean Perrin.

1. Le prodigieux essor de la Mécanique auquel nous assistons aujourd'hui est dû en majeure partie à l'emploi de notions et de procédés de calcul empruntés à l'Optique. Par contre l'Optique elle-même a très peu profité de ce développement (2). On peut alors retourner le problème et essayer de voir si les progrès récents de la Mécanique ne peuvent pas réagir sur le développement de l'Optique. D'une façon plus précise, dans la théorie de MM. de Broglie et Schrödinger, on considérait une particule matérielle comme une onde et on lui appliquait les lois de la lumière; le succès a montré qu'il y avait là quelque chose de plus qu'une simple analogie. Ne peut-on pas alors considérer inversement un photon comme un point matériel *et lui appliquer les lois de la nouvelle mécanique ?*

(1) Séance du 5 novembre 1931.

(2) Il faut mettre à part la théorie quantique des champs; celle-ci vise beaucoup plus loin, et saute précisément par dessus l'étape que nous voulons explorer.

2. Soit $E = cp_0$ l'énergie et (p_1, p_2, p_3) la quantité de mouvement d'un photon. Son mouvement ne peut être décrit sans faire appel à la relativité; nous prendrons donc comme guide la théorie relativiste de Dirac. On a

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0. \tag{1}$$

Comme pour l'équation de Dirac, cette relation nous conduit à l'équation d'onde.

$$F\psi = (p_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3)\psi = 0. \tag{2}$$

les β_n étant des opérateurs satisfaisant à $\beta_r\beta_s + \beta_s\beta_r = 2\delta_{rs}$.

Jusqu'ici le passage est simple et cette extension doit s'être présentée bien des fois; cependant, on ne peut pas poursuivre l'analogie plus loin *en raisonnant comme le fait Dirac* ([1]), parce qu'on n'arriverait pas au nombre de grandeurs requis pour représenter le champ. Il faut avoir recours à une généralisation que nous avons proposée ([2]) et admettre que ψ est un nombre hypercomplexe du même type que F, c'est-à-dire, somme toute, un quaternion $\psi = \psi_0 + \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \beta_3\psi_3$ qui multiplie *algébriquement* F. L'équation (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \beta_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Bref, nous traitons le problème du mouvement d'un point ayant comme hamiltonien

$$H = c(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3), \tag{4}$$

et nous assimilons un tel point à un photon; c'est là l'hypothèse fondamentale.

3. ψ, grandeur imaginaire, représente l'onde du photon. Or, si l'on pose

$$\psi_r = E_r + iH_r,$$

on voit, en faisant les calculs, que les E_r, H_r ($r = 1, 2, 3$), grandeurs réelles, satisfont à des équations du type Maxwell; il est naturel de les identifier aux champs électrique et magnétique de l'onde lumineuse ([3]). Les équations (3)

([1]) Cf. par exemple, Oppenheimer, *Phys. Rev.*, 38, 1931, p. 728.

([2]) *Journal de Physique*, 7e série, 1, 1930, p. 235.

([3]) Ce mode de groupement de E et H a été souvent employé par beaucoup d'auteurs, à diverses fins. Signalons que Rosenfeld et Solomon l'avaient également adopté au début : ils l'ont abandonné ensuite pour des raisons sérieuses.

décrivant une propagation *dans le vide*, sont identiques aux équations de Maxwell *avec courant et charge*, lesquels sont uniquement déterminés par la composante ψ_0. La théorie conduit donc à abandonner les équations de Maxwell pour le vide, ou plutôt à les compléter par des termes dépendant de ψ_0. Cet abandon est-il au moins compensé par des résultats nouveaux que l'ancienne théorie était incapable de prédire?

4. Remarquons d'abord que, si ψ_0 était négligeable, (3) se réduirait aux équations de Maxwell et que, par conséquent, toute vérification expérimentale des unes conviendrait aux autres. Mais les (3) conduisent à des résultats nouveaux. Un premier résultat évident est l'existence d'un *spin pour les photons*. Il suffit d'appliquer mot pour mot le raisonnement classique de Dirac pour l'électron.

On croit généralement qu'un pareil spin n'existe pas ([1]). Cependant des expériences récentes de Raman et ses collaborateurs, de Hanle et de Bär, interprétées par la théorie des quanta, semblent montrer la nécessité d'un spin pour la lumière ([2]). Elles ne sont pas, à vrai dire, concluantes, parce qu'on peut les interpréter par la théorie classique, sans appel à des notions nouvelles ([3]). D'ailleurs si elles l'étaient, elles infirmeraient la présente théorie parce qu'elles conduisent à un spin deux fois plus grand qu'il n'est nécessaire. Il faut donc, en attendant que cette question soit définitivement tranchée par l'expérience, chercher dans une autre direction des confirmations de la théorie.

Journal de Physique, 7e série, **2**, 1931, p. 139 et SOLOMON, *Thèse*, Paris). Cependant il faut remarquer que ces auteurs se laissent guider par le principe de correspondance et admettent la validité absolue des équations de Maxwell, tandis que le point de vue préconisé ici conduit précisément à un abandon partiel de ces équations. Mentionnons enfin que Lanczos a, le premier, rapproché les équations de Maxwell du symbolisme des quaternions.

([1]) Voir, par exemple, KASTLER, *J. Physique*, **2**, 1931, p. 159. — FRISCH, *Z. Physik*, **61**, 1930, p. 626.

([2]) HANLE, *Phys. Ztschr.*, **32**, 1931, p. 556. — BÄR, *Naturwiss*, **19**, 1931, p. 463. — RAMAN et BHAGAVANTAM, *Nature*, **128**, 1931, p. 114, 545, 727.

([3]) PLACZEK, *Leipziger Vorträge*, 1931; *Z. Physik*, **70**, 1931, p. 84.

SUR UNE EXPLICATION POSSIBLE DE LA DIFFÉRENCE DE MASSE ENTRE LE PROTON ET L'ÉLECTRON

Par Al. PROCA.

Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur estime que ce qu'on mesure actuellement sous le nom de « masse au repos » de l'électron ou du proton est en réalité une grandeur qui ne dépend pas *uniquement* de la particule considérée. Cette « masse » peut s'écrire $A + eB$ pour le proton et $A - eB$ pour l'électron, e étant la charge de la particule. A est un coefficient caractéristique de la particule qu'on peut appeler sa *masse vraie : elle est la même pour le proton et pour l'électron.* B est un terme qui dépend du champ électromagnétique mis en jeu dans toutes les mesures de la « masse », telles qu'on les réalise actuellement; c'est un terme lentement variable et qui dépend du type d'expérience envisagée.

Ces résultats découlent de l'introduction, dans la théorie du champ électromagnétique et du rayonnement, d'un élément caractéristique nouveau, *invariant* par rapport au groupe de Lorentz et qui semble nécessaire en toutes circonstances, pour définir le champ. L'auteur étudie son interprétation physique et la manière dont les résultats classiques sont influencés par sa présence; les modifications introduites sont simples et il semble qu'une vérification expérimentale des hypothèses de base ne présente pas des difficultés insurmontables.

Pour un coup d'œil rapide, le lecteur aura avantage à commencer par le paragraphe 12, en admettant provisoirement la nouvelle loi de force (50). Il lui sera aisé ensuite de retourner en arrière et étudier à loisir l'introduction du nouvel invariant dans la théorie du champ électromagnétique, ainsi que les conséquences qui s'en déduisent.

1. Considérations préliminaires. — Le problème de la différence des masses du proton et de l'électron n'est pas encore résolu; bien plus, on ne voit pas comment on pourrait l'aborder. Le présent article suggère la *possibilité* d'une explication et indique une voie, qui semble présenter au moins un avantage : celui de permettre des vérifications expérimentales très étendues.

Une pareille circonstance est particulièrement désirable dans ce cas. En effet, ainsi que nous le verrons, la tentative d'explication proposée exige, d'une façon assez inattendue d'ailleurs, la modification de la théorie classique du rayonnement, c'est-à-dire des équations de Maxwell. Le changement est minime; néanmoins la nécessité d'un pareil changement paraît bien improbable dans l'état actuel de la théorie et il est évident qu'il faut avancer avec beaucoup de prudence. Il est nécessaire d'ailleurs d'être d'autant plus circonspect que ce n'est pas la première fois qu'on propose une pareille modification des équations de Maxwell : les nouvelles équations ont déjà été publiées en effet par Lanczos [1]. Il semble qu'on ne leur ait pas accordé l'attention qu'elles méritaient, d'abord parce que

[1] Lanczos, *Thèse* (1919), Szeged, et *Z. Physik*, **57** (1919), pp. 447, 474, 484. Voir aussi D. Iwanenko et Nikolsky; *Z. Physik.*, **63** (1930), p. 129; Y. Rainich : *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27** (1925), p. 106.

la manière de les établir paraissait arbitraire et ensuite parce qu'on répugne tout naturellement à modifier la théorie de Maxwell sans raison valable [1].

Dans ces conditions, ce qu'il y a de plus raisonnable à faire c'est de montrer qu'*il y a effectivement un avantage* à la modifier : celui d'entrevoir une possibilité d'explication pour la différence des masses du proton et de l'électron. Nous laisserons donc de côté pour le moment le développement systématique de la théorie et nous nous attacherons à établir d'abord ce premier point. Une fois ceci fait, on pourra poursuivre les conséquences de la théorie pour voir si l'on arrive à une contradiction, ou mieux, on pourra utiliser une des multiples différences d'avec la théorie classique pour essayer de la confirmer — ou l'infirmer — expérimentalement.

2. **Hypothèses fondamentales.** — Ces hypothèses sont exprimées *par les équations fondamentales (19) et (20) qui remplacent celles de Maxwell.* On est amené à poser ces hypothèses par un raisonnement d'analogie calqué sur le procédé utilisé par Dirac pour établir son équation relativiste de l'électron. Ce procédé est arbitraire, comme d'ailleurs le choix de tout hamiltonien en mécanique quantique, mais il est en quelque sorte justifié par le prodigieux succès de l'équation de Dirac. L'idée de l'appliquer au rayonnement n'est pas nouvelle [2], mais la manière dont on l'a utilisé peut ne pas sembler irréprochable.

Nous allons donc considérer le rayonnement comme constitué par des photons et traiter leur mouvement par la mécanique quantique; l'équation d'onde ainsi obtenue décrira le champ du photon, donc le champ électromagnétique. On peut dire qu'une tentative de ce genre s'impose à l'heure actuelle. En effet, la mécanique du point matériel a pu faire d'énormes progrès grâce à l'introduction et à l'emploi de notions propres à l'Optique. En retard sur cette dernière jusqu'à l'apparition de la mécanique ondulatoire, elle l'a aujourd'hui dépassée. On peut espérer alors qu'en faisant profiter inversement l'Optique des nouveaux développements de la mécanique, on puisse arriver à des résultats nouveaux et intéressants [3].

En un mot la mécanique ondulatoire traitait un point matériel comme une onde et lui appliquait les lois de l'Optique; inversement nous allons essayer de traiter un photon comme un point matériel et lui appliquer les lois de la *nouvelle mécanique*.

Il va sans dire que ces considérations n'invoquent qu'un principe d'analogie et, par conséquent, ne prouvent rien du tout, ou plutôt elles cessent de prouver quoi que ce soit là où l'analogie entre un photon et un électron fait défaut. Nous les indiquons simplement pour montrer comment on est arrivé à écrire les équations (19), (20) d'une façon tout à fait indépendante du problème particulier que nous devons traiter plus loin; en aucun cas elles ne doivent être considérées comme une démonstration de ces équations, dont l'adoption est, répétons-le, une hypothèse.

3. **L'hamiltonien du photon.** — Soit $E/c = p_0$ l'énergie d'un photon et p_1, p_2, p_3 sa quantité de mouvement. On a

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0. \tag{1}$$

Le procédé de Dirac consiste à linéariser (1), c'est-à-dire à la décomposer en facteurs, à poser

$$p_0 = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \qquad p_r = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{2}$$

(1) Cf. p. ex. G. Rumer, *Z. Physik*, **65** (1930), p. 247.

(2) Cf. dernièrement. Rumer, *loc. cit.*, V. Fock *Comptes-Rendus*, **190** (1930), p. 1399. Oppenheimer, *Phys. Rev.*, **38** (1931), p. 725.

(3) Le premier qui ait mis en œuvre cette idée a été M. L. de Broglie lui-même. Cf. *Ondes et Mouvements*, 1926, ch. VII et VIII, à un moment cependant où les mécaniques nouvelles n'avaient pas atteint leur développement actuel.

et à appliquer l'opérateur linéaire ainsi obtenu à une fonction d'onde ψ (1). Cet opérateur sera donc

$$F = p_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 \tag{3}$$

et l'hamiltonien

$$H \equiv c(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3), \tag{4}$$

les β_r $(r = 1, 2, 3)$ satisfaisant comme toujours à la condition

$$\beta_r\beta_s + \beta_s\beta_r = 2\delta_{rs} = \begin{cases} 0 \text{ si } r \neq s, \\ 2 \text{ si } r = s. \end{cases} \tag{5}$$

Plusieurs types d'opérateurs satisfont à ces conditions. *Le plus simple* (2) dérive des matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

qui satisfont à

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3, \qquad \sigma_2\sigma_3 = \sigma_1, \qquad \sigma_3\sigma_1 = \sigma_2 \tag{6}$$
$$\sigma_r^2 = -1.$$

Il est défini par

$$\beta_r = \mathbf{i}\sigma_r \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{6'}$$

On a donc :

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6''}$$

matrices hermitiques, et

$$\left.\begin{array}{c} \beta_r^2 = +1, \\ \beta_1\beta_2 = \mathbf{i}\beta_3 \qquad \beta_2\beta_3 = \mathbf{i}\beta_1 \qquad \beta_3\beta_1 = \mathbf{i}\beta_2. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Mais il est inutile de particulariser et, se rapportant au même système de coordonnées, employer toujours pour les β_r la représentation matricielle (6''). Il suffira dans ce qui suit de les considérer comme des nombres hypercomplexes définis par les règles de multiplication (7) : *ce sont des quaternions à composantes complexes* c'est-à-dire des *biquaternions*.

Donc l'hypothèse de départ consiste à considérer un photon comme un point dont le mouvement est défini par un hamiltonien

$$H = c(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3), \tag{4}$$

qui est un biquaternion.

A partir de cette hypothèse on peut étudier le mouvement du photon par le calcul des opérateurs et en déduire des résultats nouveaux ; mais cela ne nous intéresse pas ici.

4. **L'équation d'onde des photons**. — Une fois l'hamiltonien H défini, l'équation d'onde s'écrit symboliquement

$$\frac{h}{2\pi\mathbf{i}}\frac{\partial\psi}{\partial t} + H\psi = 0$$

(1) Pour faciliter la comparaison avec les équations de Maxwell nous renoncerons pour l'instant à employer le temps imaginaire $x_4 = \mathbf{i}ct$.

(2) Voir une discussion sur les opérateurs conduisant aux équations de Maxwell, dans Rumer, *loc. cit.*

*

ou simplement

$$F\psi = 0 \tag{8}$$

$$F = p_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3. \tag{3}$$

Mais pour passer de cette équation symbolique à des équations ordinaires, on a le choix entre deux procédés suivant la manière dont on admet que H opère sur ψ.

1° On peut reprendre exactement le procédé classique employé par Dirac pour son équation ; dans ce cas l'équation (8) sera équivalente à *deux* équations seulement, et le ψ n'aura que deux composantes. Cela est manifestement incorrect, parce qu'on n'obtiendrait ainsi que quatre grandeurs réelles pour décrire le champ électromagnétique ce qui expérimentalement est inexact. Mais on peut raisonner suivant une autre alternative (1) :

2° On peut regarder dans l'équation (8) l'inconnue ψ, non seulement comme inconnue quant à sa dépendance des variables x, y, z, t, *mais aussi quant au nombre de ses composantes.*

L'équation (8) signifie qu'un biquaternion F appliqué à un nombre ψ, dont le type reste à déterminer, donne zéro. Il est évident que dans le cas le plus général ψ sera *un nombre hypercomplexe du même type que F*, c'est-à-dire un biquaternion. ψ aura donc dans cette hypothèse quatre composantes ψ_r, complexes en général.

On aura donc huit grandeurs réelles utilisables pour la description du champ électromagnétique, deux de trop par rapport à la théorie classique.

Cette interprétation est plus générale que la première (2) et suffisamment raisonnable ; c'est elle que nous adopterons Au surplus, comme nous le verrons, elle conduit à des équations qui se réduisent à celles de Maxwell lorsqu'une certaine des quatre composantes ψ_0 est nulle. C'est ce fait qui a amené Lanczos à déduire ces équations d'un produit de deux quaternions.

Un certain nombre d'auteurs écrivent les équations de Maxwell, en posant des équations équivalentes à $F\psi = 0$, auxquelles ils ajoutent une condition supplémentaire qui revient à $\psi_0 = 0$ (3). Pour nous, au contraire, l'apparition de ψ_0, c'est-à-dire de deux grandeurs réelles supplémentaires, est essentielle ; c'est elle qui va nous permettre de trouver des résultats nouveaux.

Donc, en résumé, ψ sera un biquaternion de la forme

$$\psi = \psi_0 + \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \beta_3\psi_3 \tag{9}$$

les ψ_r étant complexes, de la forme

$$\psi_r = E_r + \mathbf{i} H_r \qquad (r = 0, 1, 2, 3). \tag{10}$$

Il est facile maintenant de remplacer l'équation $F\psi = 0$ par les quatres équations qui lui sont équivalentes, et que, pour abréger, nous appellerons équations de Lanczos. Mais auparavant examinons l'importante question de l'invariance par rapport aux transformations de Lorentz.

5. **Invariance relativiste.** — Soit

$$A = a_0 + \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3$$

(1) En suivant le raisonnement que nous avons préconisé pour l'équation de Dirac. Cf. Al. Proca, *J. de Phys.* t. **1** (1930), p. 235.

(2) Nous montrerons dans un prochain article le lien qui relie les deux interprétations.

(3) En particulier, Fermi, *Rendiconti Acc. Lincei*, **9** (1929), p. 881, fait au fond la même chose.
L'idée d'utiliser les quaternions pour écrire sous forme condensée les équations de Maxwell s'est présentée à Minkowski, *Œuvres*, p. 375, qui n'en a pas tiré parti ; Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik* II. Springer 1927, a écrit effectivement les équations de Maxwell en utilisant le symbolisme des quaternions

un quaternion dont les composantes réelles a_r soient les composantes d'un vecteur d'Univers, et soit A'

$$A' = a'_0 + \sigma_1 a'_1 + \sigma_2 a'_2 + \sigma_3 a'_3$$

le quaternion qui correspond au vecteur transformé par une substitution orthogonale à quatre variables. Entre A' et A on peut écrire la relation, connue depuis Cayley

$$A' = SAT \tag{11}$$

où S et T sont deux quaternions réels quelconques soumis à l'unique restriction que la somme des carrées de leurs composantes soit égale à l'unité

$$\sum s_r^2 = \sum t_r^2 = 1.$$

Cela signifie simplement qu'en égalant les composantes des quaternions A' et SAT on trouve précisément les relations qui définissent la substitution orthogonale la plus générale à quatre variables et de module égal à l'unité.

Comme cas particulier prenons $T = S^{-1}$; il vient $a'_0 = a_0$. Donc

$$\sigma_1 a'_1 + \sigma_2 a'_2 + \sigma_3 a'_3 = S(\sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3)\, S^{-1} \tag{12}$$

définira les substitutions orthogonales à 3 variables c'est-à-dire les rotations spatiales.

Cela étant, posons comme d'habitude $x_4 = \mathbf{i}ct$ pour ramener la transformation de Lorentz à une substitution orthogonale. On peut écrire

$$F = (p_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3) = \frac{h}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x_4} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{13}$$

les σ_r étant des quaternions. Le transformé de F est

$$F' = SFT.$$

Pour que l'équation

$$F\psi \equiv F(\psi_0 + \sigma_1 . \mathbf{i}\psi_1 + \sigma_2 . \mathbf{i}\psi_2 + \sigma_3 . \mathbf{i}\psi_3) = 0$$

entraîne

$$F'\psi' = SFT\psi' = 0$$

il faut que ψ' se transforme suivant $\psi' = T^{-1}\psi$, ou plus généralement, suivant :

$$\psi' = T^{-1}\psi\, U, \tag{14}$$

U étant un quaternion arbitraire mais normalisé, $\Sigma u^2_r = 1$.

Prenons $U = T$, donc $\psi' = T^{-1}\psi\, T$. Dans ce cas : $\psi'_0 = \psi_0$, ψ_0 *reste invariant*, tandis que les

$$\mathbf{i}\psi_r = \mathbf{i}E_r - H_r \qquad (r = 1, 2, 3)$$

subissent une transformation du type (12).

Or, soit F_{rs} un tenseur antisymétrique du second rang. La grandeur ayant pour composantes

$$F_{14} + F_{23}, \qquad F_{24} + F_{31}, \qquad F_{34} + F_{12} \tag{15}$$

se transforme suivant une loi (12), c'est-à-dire subit une rotation, ainsi qu'il est bien connu

Si la transformation initiale est donnée par (11) les composantes transformées de (15) peuvent s'écrire au moyen des quaternions (1) :

$$\sigma_1 (F'_{14} + F'_{23}) + \sigma_2 (F'_{24} + F'_{31}) + \sigma_3 (F'_{34} + F'_{12})$$
$$= T^{-1} [\sigma_1 (F_{14} + F_{23}) + \sigma_2 (F_{24} + F_{31}) + \sigma_3 (F_{34} + F_{12})] T;$$

elles subissent donc la transformation (14) avec $U = T$. *Donc les* $\mathbf{i} E_r$ *et les* $- H_r$ *peuvent être assimilés aux 6 composantes d'un tenseur antisymétrique* F_{rs}

$$(F_{41},\ F_{42},\ F_{43}) \rightarrow -\mathbf{i}\mathbf{E} \qquad (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}) \rightarrow -\mathbf{H} \tag{16}$$

et cela, avec l'invariance de ψ_0, suffit pour garantir l'invariance relativiste de l'équation $F\psi = 0$.

E et **H** subissent donc *exactement les memes lois de transformation que les champs électrique et magnétique de la théorie de Lorentz* ; il sera donc légitime de les identifier avec ceux-ci, lorsque nous aurons écrit les équations $F\psi = 0$ et constaté qu'elles ont même structure que celle de Maxwell. D'ailleurs pour obtenir des résultats cohérents, il faut évidemment veiller à ce que la nouvelle théorie présente *la même structure que la théorie classique, en ce qui concerne sa dépendance du groupe de Lorentz* ; nous prendrons ce principe comme guide dorénavant.

6. **Equations fondamentales pour le vide.** — Effectuons le produit $F\psi$

$$F\psi \equiv (p_0\psi_0 + p_1\psi_1 + p_2\psi_2 + p_3\psi_3) + (p_0\psi_1 + p_1\psi_0 + \mathbf{i}p_2\psi_3 - \mathbf{i}p_3\psi_2)\beta_1$$
$$+ (p_0\psi_2 + p_2\psi_0 + \mathbf{i}p_3\psi_1 - \mathbf{i}p_1\psi_3)\beta_2 + (p_0\psi_3 + p_3\psi_0 + \mathbf{i}p_1\psi_2 - \mathbf{i}p_2\psi_1)\beta_3. \tag{17}$$

Posons $\psi_r = E_r + \mathbf{i} H_r$ et utilisons la notation vectorielle classique justifiée par les résultats du paragraphe précédent ; on aura

$$F\psi = \frac{h}{2\pi\mathbf{i}} \left\{ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{E}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial H_0}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{H}\right) \right\}$$
$$+ \frac{h}{2\pi\mathbf{i}} \sum_{r=1}^{3} \left\{ \left[\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{grad} E_0 - \operatorname{rot}\mathbf{H}\right] + \mathbf{i}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{grad} H_0 + \operatorname{rot}\mathbf{E}\right] \right\}_r \beta_r. \tag{18}$$

L'indice à droite de la parenthèse indique qu'il faut prendre la composante correspondante du vecteur qu'elle contient.

L'équation $F\psi = 0$ équivaut donc aux équations

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= +\operatorname{grad} E_0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{H} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_0}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} H_0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

(1) F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik*, II. Springer (1927), p. 85.

Sous cette forme on voit que si $E_0 = H_0 = 0$, elles se réduisent aux équations de Maxwell; il est donc légitime d'attribuer à $\mathbf{E}$ la signification d'un champ électrique et à $\mathbf{H}$ celle d'un champ magnétique. L'invariant ψ_0 intervient *linéairement*, par son gradient, ce qui est une remarque essentielle.

7. **Solution par des potentiels.** — Par définition le quaternion conjugué de

$$A = a_0 + \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3$$

est

$$\bar{A} = a_0 - \sigma_1 a_1 - \sigma_2 a_2 - \sigma_3 a_3.$$

On a

$$A\bar{A} = \sum_0^3 a_r^2.$$

Par exemple, puisque

$$F = p_0 + \sigma_1 \mathbf{i} p_1 + \sigma_2 \mathbf{i} p_2 + \sigma_3 \mathbf{i} p_3,$$

$$\bar{F} = p_0 - \sigma_1 \mathbf{i} p_1 - \sigma_2 \mathbf{i} p_2 - \sigma_3 \mathbf{i} p_3,$$

on aura

$$F\bar{F} = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = \frac{h^2}{4\pi^2}\Box$$

Soient alors les équations fondamentales $F\psi = 0$. On obtient une solution en prenant

$$\psi = \bar{F}A, \tag{21}$$

A étant un biquaternion (quaternion à composantes imaginaires)

$$A = A_0 + \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3$$

dont les composantes A_r satisfont aux équations réelles

$$\Box A_r = 0 \qquad (r = 0, 1, 2, 3). \tag{22}$$

En effet, on a

$$F\psi = F\bar{F}A = \frac{h^2}{4\pi^2}\Box A = 0.$$

Les A sont les potentiels. Développons l'expression des champs. On a, en séparant dans A le réel de l'imaginaire

$$\frac{h}{2\pi \mathbf{i}} A_r = R_r + \mathbf{i} S_r$$

$$\psi = \bar{F}A = (p_0 - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2 - \beta_3 p_3)(A_0 + \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3) = \psi_0 + \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \beta_3\psi_3$$

$$\psi = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial R_0}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{R}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S_0}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{S}\right)$$

$$+ \sum_r \left\{\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} - \operatorname{grad} R_0 + \operatorname{rot}\mathbf{S}\right] + \mathbf{i}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \operatorname{grad} S_0 - \operatorname{rot}\mathbf{R}\right]\right\}_r \beta_r.$$

Identifions ; il vient, puisque $\psi_r = E_r + iH_r$

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{c}\frac{\partial R_0}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{R} \qquad H_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial S_0}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{S}, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} R_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{S}, \\ \mathbf{H} &= -\operatorname{grad} S_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{R}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Ceci est l'expression générale des champs en fonction des potentiels.

Pour arriver à l'expression classique en fonction d'un potentiel vecteur **A** et un potentiel scalaire φ

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

on voit qu'il faut prendre $\mathbf{S} = 0$, $S_0 = 0$, $\mathbf{R} = -\mathbf{A}$, $R_0 = \varphi$

$$A = \frac{h}{2\pi i}[\varphi_0 - A_1\beta_1 - A_2\beta_2 - A_3\beta_3].$$

Dans ce cas que deviennent les scalaires E_0 et H_0 ? D'après (23) on voit que l'on a

$$H_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad E_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}.$$

La condition $\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ qu'on impose d'habitude depuis Lorentz dans ce genre de problèmes revient donc à poser $E_0 = 0$. Cela nous indique une interprétation de E_0 (¹). Mais regardons la question de plus près.

7. **Interprétation de E_0 et H_0.** — Pour rendre intuitive la signification de E_0 et H_0 prenons une onde plane de la forme

$$\psi_r = a_r\, e^{i(px+qy+rz+Wt)} \tag{24}$$

les a_r étant des constantes inconnues, et p, q, r, W des nombres fixés. L'équation $F\psi = 0$ devient ici

$$\left(\frac{W}{c} + \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r\right)(a_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3) = 0. \tag{25}$$

Séparons les parties réelles et imaginaires des a_r, — les champs de l'onde, —

$$a_r = e_r + ih_r \qquad (r = 0, 1, 2, 3).$$

Les équations (25) sont équivalentes à (19) et (20) dans lesquelles $\frac{\partial}{\partial x}$ est remplacé par

(¹) M. de Broglie dans la théorie qu'il a étudiée dans *Ondes et Mouvements*, a également été amené à conclure que $\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} \neq 0$. Cette expression a été appelée *ampérien* par M. R. Ferrier qui l'a également rencontrée dans ses recherches. Cf. par exemple *Les nouveaux axiomes de l'électronique*, 1925, édition de la *Revue générale de l'Electricité*.

p, etc. On a donc directement en employant la notation vectorielle et écrivant $\mathbf{p}$ pour le vecteur (p, q, r) :

$$(\mathbf{p}\,\mathbf{e}) = -\frac{W}{c}\,e_0 \qquad (\mathbf{p}\,\mathbf{h}) = -\frac{W}{c}\,h_0 \tag{26}$$

$$[\mathbf{p} \times \mathbf{h}] - \frac{W}{c}\,\mathbf{e} = e_0\mathbf{p} \qquad [\mathbf{p} \times \mathbf{e}] + \frac{W}{c}\mathbf{h} = -\,h_0\mathbf{p}. \tag{27}$$

De plus, dans l'équation (25)

$$\left(\frac{W}{c} + \sigma_1.\mathbf{i}p + \sigma_2.\mathbf{i}q + \sigma_3.\mathbf{i}r\right)\psi = 0$$

nous avons le produit de deux quaternions égalé à zéro ; pour qu'il existe un quaternion ψ différent de zéro il faut que le « tenseur » de F soit nul, donc que

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 - p^2 - q^2 - r^2 = 0,$$

condition relativiste bien connue. La longueur du vecteur $\mathbf{p}$ est donc égale à $\frac{W}{c}$. Dans ces conditions les relations (26) donnent l'interprétation des quantités e_0 et h_0 : au signe près, *ce sont les projections des vecteurs électrique et magnétique de l'onde sur la direction de propagation* (voir la figure). Les deux vecteurs $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$ ne sont donc plus normaux à la direction de propagation, comme dans la théorie classique : *l'onde n'est pas transversale.* Cependant d'autres caractères subsistent. Calculons les projections OZ, OY de $\mathbf{e}$ et de $\mathbf{h}$ sur un plan normal à la direction de propagation.

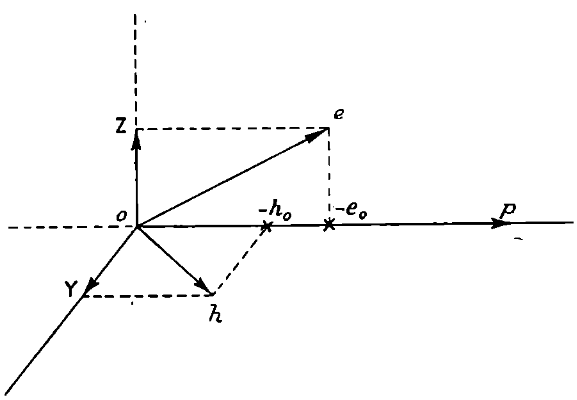


Fig. 1.

Le vecteur unitaire le long de $\mathbf{p}$ étant $\mathbf{p} : \frac{W}{c} = \frac{c\mathbf{p}}{W}$, on a

$$\mathrm{OZ} = \mathbf{e} + e_0\,\frac{c}{W}\,\mathbf{p} = \frac{c}{W}\left(\frac{W}{c}\,\mathbf{e} + e_0\mathbf{p}\right)$$

$$\mathrm{OY} = \mathbf{h} + h_0\,\frac{c}{W}\,\mathbf{p} = \frac{c}{W}\left(\frac{W}{c}\,\mathbf{h} + h_0\mathbf{p}\right).$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} OZ &= \frac{c}{W}[\mathbf{p} \times \mathbf{h}] \\ OY &= -\frac{c}{W}[\mathbf{p} \times \mathbf{e}], \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

ce qui prouve que *ces projections sont perpendiculaires entre elles. Elles sont aussi égales.* On a, en effet, d'après leur définition

$$|OZ|^2 = \mathbf{e}^2 - e_0^2 \qquad |OY|^2 = \mathbf{h}^2 - h_0^2$$

et d'après (28)

$$|OZ|^2 = \mathbf{h}^2 - h_0^2 \qquad |OY|^2 = \mathbf{e}^2 - e_0^2$$

donc $OZ = OY$ d'une part et d'autre part

$$\mathbf{e}^2 - \mathbf{h}^2 = e_0^2 - h_0^2 \qquad (\mathbf{e}\,\mathbf{h}) = e_0 h_0, \qquad (29)$$

cette dernière relation obtenue en formant les produits scalaires de (27) avec **e** et **h**. (Ces relations se déduisent plus simplement par la condition que la norme (ou le « tenseur ») de A soit nulle

$$a_0^2 + \Sigma(\mathbf{i}\, a_r)^2 = 0.$$

Par conséquent l'onde n'est pas transversale, mais les projections des vecteurs sur un plan normal à la propagation sont égales, normales et disposées comme les vecteurs d'une onde lumineuse classique; cela est d'ailleurs indispensable pour qu'à la limite, pour $e_0 = h_0 = 0$, on retombe sur les résultats connus auxquels conduisent les équations de Maxwell.

8. **Polarisation des photons.** — D'après le paragraphe précédent les vecteurs d'une onde lumineuse vibrent le long de **e** et **h** qui ont une position quelconque dans l'espace. La normale à leur plan garde donc une direction fixe dans l'espace, que l'onde lumineuse transporte avec elle dans sa propagation.

Donc, en dehors de sa « polarisation », que nous pouvons définir par l'azimut du plan d'un de ses vecteurs autour de la direction de propagation, une onde lumineuse *détermine une autre direction privilégiée.* Cette direction correspond manifestement *au spin*; mais elle est définie sans faire allusion, en aucune façon, à une structure granulaire de la lumière ou à son moment cinétique. Elle est donc indépendante des objections qu'on peut faire à la notion de spin du photon. Il vaudrait même mieux de ne pas l'appeler « direction de spin »; mais comme aucune confusion n'est possible maintenant, nous continuerons à utiliser cette expression, pour éviter les périphrases.

On peut donc dire que l'onde lumineuse est deux fois polarisée, dans le sens qu'elle définit toujours *deux* directions fixes dans l'espace, dont l'une normale à la direction de propagation. *Ces deux directions sont indépendantes,* c'est-à-dire deux lumières polarisées dans le même plan au sens classique peuvent encore différer par la direction de leur spin; en effet, en examinant la figure on voit que **e** et **h** peuvent prendre diverses positions dans leurs plans respectifs, permises par les équations (26) et (27), et conduisant à des directions de spin différentes. Bien plus : pour une direction de spin et pour une « polarisation » données (c'est-à-dire le plan de **e** et **h** et l'azimut du plan **ph** autour de **p** étant donnés) on peut avoir une infinité d'ondes possibles qui diffèrent par la longueur commune des projections $OZ = OY$. Précisons : l'inspection des équations linéaires et homogènes (25) montre qu'il y a deux a_r imaginaires, donc *quatre grandeurs réelles,* qui sont arbitraires. Fixons l'une d'elles par une condition de normalisation qui nous donnera par exemple l'énergie de l'onde, ou la longueur d'un de ses vecteurs ou de sa projection; il reste trois arbitraires dont deux peuvent fixer la direction du spin, tandis que la troisième définira l'azimut autour de la direction de propagation. *Elles sont indépendantes.* Lorsque l'onde est transversale le spin se confond avec la direction de propagation et l'une des « polarisations » s'évanouit.

9. **Equations adjointes et théorèmes de conservation**. — L'adjoint d'un biquaternion

$$A = a_0 + a_1\sigma_0 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$$

s'écrira

$$A+ = a_0^* - a_1^*\sigma_1 - a_2^*\sigma_2 - a_3^*\sigma_3,$$

l'astérisque désignant la quantité complexe conjuguée; il correspond à la matrice transposée et conjuguée. On a en général

$$(AB)+ = B+A+$$

et en particulier

$$\beta_r + = (\mathbf{i}\sigma_r)+ = \beta_r$$

$$\psi+ = \psi_0^* + \beta_1\psi_1^* + \beta_2\psi_2^* + \beta_3\psi_3^* \tag{30}$$

ainsi que $F+ = - F$ à cause du facteur $h/2\pi\mathbf{i}$.

Posons $\psi + = \Phi$ pour simplifier ; puisque

$$0 = F\psi = p_0\psi + \beta_1 p_1\psi + \beta_2 p_2\psi + \beta_3 p_3\psi \tag{8}$$

on aura

$$0 = \Phi F = p_0\Phi + p_1\Phi\beta_1 + p_2\Phi\beta_2 + p_3\Phi\beta_3. \tag{31}$$

Il est inutile d'écrire explicitement ces équations. Suivant un procédé bien connu, multiplions (8) par Φ à gauche et (31) et par ψ à droite et ajoutons; on obtient

$$\mathcal{F} \equiv p_0(\Phi\psi) + p_1(\Phi\beta_1\psi) + p_2(\Phi\beta_2\psi) + p_3(\Phi\beta_3\psi) = 0, \tag{32}$$

ou

$$\frac{\partial(\Phi\psi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c\Phi\beta_1\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(c\Phi\beta_2\psi) + \frac{\partial}{\partial t}(c\Phi\beta_3\psi) = 0. \tag{32'}$$

L'équation (32) est extrêmement importante. Elle met en relief l'importance des quantités de la forme $\Phi\beta_r\psi$, et prouve que certaines composantes de ces quantités obéissent à des lois de conservation. Les $\Phi\beta_r\psi$ sont des biquaternions de la forme

$$\left.\begin{aligned}
\Phi\beta_1\psi &= \Theta_{11}\beta_1 + \Theta_{12}\beta_2 + \Theta_{13}\beta_3 + \Theta_{14} \\
\Phi\beta_2\psi &= \Theta_{21}\beta_1 + \Theta_{22}\beta_2 + \Theta_{23}\beta_3 + \Theta_{24} \\
\Phi\beta_3\psi &= \Theta_{31}\beta_1 + \Theta_{32}\beta_2 + \Theta_{33}\beta_3 + \Theta_{34} \\
\Phi\psi &= \Theta_{41}\beta_1 + \Theta_{42}\beta_2 + \Theta_{43}\beta_3 + \Theta_{44}
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Les Θ_{rs} sont des quantités réelles, comme on le voit en prenant les adjointes de (33) :

$$(\Phi\beta_1\psi)+ = \psi+\beta_1\Phi+ = \Phi\beta_1\psi.$$

L'équation quaternionienne (32) est équivalente à quatre équations réelles, chacune d'elles exprimant la conservation d'une des grandeurs dont les composantes sont rangées sur une même colonne du tableau des Θ_{rs}.

Prenons la dernière colonne et passons aux champs: on a immédiatement d'après (9) et (30)

$$\Theta_{44} = \psi_0^*\psi_0 + \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 = (E_0^2 + H_0^2 + \mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \tag{34}$$

tandis que les autres composantes s'écrivent sous forme vectorielle

$$\mathbf{S} = (\Theta_{14}, \Theta_{24}, \Theta_{34}) = 2(E_0\mathbf{E} + H_0\mathbf{H}) + 2[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \tag{35}$$

D'après (32') on a

$$\frac{\partial \Theta_{44}}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{S}) = 0$$

et il faut tenir compte du fait que les ψ n'ont pas été normalisés et qu'il faut encore les multiplier avec un facteur constant pour réaliser cette normalisation. Avec cela, Θ_{44} *donne l'expression généralisée de l'énergie du champ*, tandis que $c\,\mathbf{S}$ *donne la généralisation du vecteur de Poynting*. L'équation (32') garantit alors la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Si l'on prend comme facteur de normalisation $1/8\pi$ et qu'on fasse $E_0 = H_0 = 0$, on retombe comme on le doit, sur les expressions classiques

$$\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \qquad \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Les autres composantes Θ_{rs} donnent les valeurs *réelles* des tensions de Maxwell généralisées; nous ne nous y arrêterons pas, pas plus que nous n'insisterons sur les conséquences que peut avoir l'expression (34) de l'énergie. Ce qui est important pour l'instant, c'est le rôle de l'expression (32). Ecrivons-la autrement, en introduisant la coordonnée habituelle $x_4 = \mathbf{i}ct$, pour faciliter des comparaisons utiles par la suite. On a

$$\mathcal{F} = \frac{h}{2\pi\mathbf{i}}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\psi) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\Phi\beta_1\psi) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\Phi\beta_2\psi) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\Phi\beta_3\psi)\right]$$

$$x_4 = \mathbf{i}ct \qquad \beta_r = \mathbf{i}\sigma_r,$$

donc

$$\mathcal{F} = \frac{h}{2\pi\mathbf{i}}\left[\beta_1\sum_{r=1}^{4}\frac{\partial T_{r1}}{\partial x_r} + \beta_2\sum_{r=1}^{4}\frac{\partial T_{r2}}{\partial x_r} + \beta_3\sum_{r=1}^{4}\frac{\partial T_{r3}}{\partial x_r} + \mathbf{i}\sum_{r=1}^{4}\frac{\partial T_{r4}}{\partial x_r}\right] = 0 \tag{36}$$

les T_{rs} étant donnés par le tableau suivant :

$$T_{rs} \rightarrow \quad \begin{matrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \dfrac{\Theta_{14}}{\mathbf{i}} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \dfrac{\Theta_{24}}{\mathbf{i}} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & \dfrac{\Theta_{34}}{\mathbf{i}} \\ \mathbf{i}\Theta_{41} & \mathbf{i}\Theta_{42} & \mathbf{i}\Theta_{43} & \mathbf{i}\Theta_{44} \end{matrix} \tag{37}$$

On peut s'assurer que ses composantes forment un tenseur du second rang; c'est ce tenseur qui généralise le tenseur classique de la théorie de Lorentz.

10. Equations fondamentales pour une distribution d'électricité donnée. — Les équations de Maxwell pour le cas d'une charge ρ et d'un courant $\mathbf{j}$ ne diffèrent de celles du vide que par leurs seconds membres. Nous allons donc prendre, nous aussi, au lieu de $F\psi = 0$ des équations du type

$$F\psi = C, \tag{38}$$

C étant un biquaternion convenablement choisi, fonction des grandeurs réelles ρ et j. On voit immédiatement qu'il faut prendre

$$C = \frac{h}{2\pi \mathbf{i}} 4\pi (\rho - \beta_1 j_1 - \beta_2 j_2 - \beta_3 j_3). \tag{39}$$

Passons aux champs; on aura comme équations fondamentales

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 & \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{grad} H_0 = 0 & \operatorname{rot} \mathbf{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{grad} E_0 = 4\pi \mathbf{j} \end{array}\right\} \tag{40}$$

Elles se réduisent aux équations classiques lorsqu'on y fait $E_0 = H_0 = 0$; nous n'insisterons pas. Bornons-nous à remarquer que, comme pour F, on a :

$$C^{+} = - C. \tag{41}$$

11. Expression de la force. — Pour obtenir l'expression qui doit généraliser celle de la force de Lorentz, nous suivrons toujours cette espèce de *correspondance* que nous avons pris comme guide ; la nouvelle expression doit être simple, se comporter envers le groupe de Lorentz d'une façon analogue à l'expression classique et se réduire à celle-ci lorsqu'on posera $\psi_0 = 0$. Pour y arriver, remarquons que dans la théorie relativiste la densité de force f (et de travail) est définie d'une façon invariante comme la divergence quadridimensionnelle

$$f_s = \sum_{r=1}^{4} \frac{\partial T'_{rs}}{\partial x_r} \qquad (x_4 = \mathbf{i}ct) \tag{42}$$

obtenue en composant le vecteur gradient avec le tenseur de Maxwell T'_{rs}.

A notre tour, nous prendrons comme définition de la force l'expression (42), en y remplaçant T'_{rs} par T_{rs}, le nouveau tenseur (37). **f** sera donc donnée par ses composantes *réelles*

$$f_s = \frac{1}{c}\frac{\partial \Theta_{4s}}{\partial t} + \frac{\partial \Theta_{1s}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Theta_{2s}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Theta_{3s}}{\partial x_3}. \tag{43}$$

Il ne faut pas se faire d'illusion sur la valeur de ces déductions. En fait, le choix de la définition de la force constitue une hypothèse, tout aussi bien ici que dans la théorie classique. Toute la théorie peut, et doit, commencer en posant la définition de la force (43) ou (48) (voir plus loin). Les développements qui précèdent n'ont eu d'autre but que de nous guider dans ce choix.

Mais pour l'instant ce n'est pas l'expression de la force en fonction des tensions qui nous intéresse, mais bien en fonction de la charge sur laquelle elle agit. Pour la calculer, observons qu'on peut écrire le premier membre de (36)

$$\mathcal{F} = \frac{h}{2\pi \mathbf{i}} \left[\mathbf{i} f_4 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 \right] \tag{44}$$

toujours à un facteur de normalisation près. *Le coefficient de* β_r *est la composante* f_r; $\mathcal{F}$ *est le quaternion de la force* et c'est ce qui fait son importance.

Cela étant, rappelons-nous la définition (32) de $\mathcal{F}$ et écrivons les équations fondamentales pour ψ et pour ψ^{+}

$$F\psi = C \tag{38}$$

qui entraîne

$$\psi^+ F^+ = C^+ \qquad \text{donc} \qquad -\psi^+ F = -C$$

ou

$$\psi^+ F = C. \tag{45}$$

Multiplions (38) par ψ^+ à gauche et (45) par ψ à droite et ajoutons; on a précisément

$$\mathcal{F} = p_0 (\Phi \psi) + p_1 (\Phi \beta_1 \psi) + p_2 (\Phi \beta_2 \psi) + p_3 (\Phi \beta_3 \psi) = \psi^+ C + C\psi$$

donc

$$\mathcal{F} = \frac{h}{2\pi \mathbf{i}} [\mathbf{1} f_4 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3] = \psi^+ C + C\psi. \tag{46}$$

Il suffit donc de calculer $\psi^+ C + C\psi$ pour avoir, par les coefficients des β_r, les composantes de la force. C est donné par (39); donc

$$\mathcal{F} = \psi^+ C + C\psi = \frac{h}{2\pi \mathbf{i}} . 4\pi \{ (\psi_0^* + \beta_1 \psi_1^* + \beta_2 \psi_2^* + \beta_3 \psi_3^*) (\rho - \beta_1 j_1 - \beta_2 j_2 - \beta_3 j_3)$$
$$+ (\rho - \beta_1 j_1 - \beta_2 j_2 - \beta_3 j_3) (\psi_0 + \psi_1 \beta_1 + \psi_2 \beta_2 + \psi_3 \beta_3) \}$$

En faisant les calculs et en passant aux champs on obtient, en utilisant la notation vectorielle,

$$\mathcal{F} = \frac{h}{2\pi \mathbf{i}} . 8\pi \left\{ (E_0 \rho - \mathbf{E}\mathbf{j}) + \sum_{r=1}^{3} \left[\mathbf{E}\rho + [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] - E_0 \mathbf{j} \right]_r . \beta_r \right\}. \tag{47}$$

En égalant à (44) et normalisant par le même facteur $1/8\pi$ que précédemment, on a finalement pour les composantes de la force

$$\boxed{\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] - E_0 \mathbf{j}} \tag{48}$$

et

$$f_4 = \mathbf{i} . \mathbf{E}\mathbf{j} - \mathbf{i} E_0 \rho. \tag{49}$$

Pour un électron de vitesse $\mathbf{v}$ et de charge $\rho = e$, on a $\mathbf{j} = \rho \dfrac{\mathbf{v}}{c}$ et

$$\boxed{\mathbf{f} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \frac{E_0}{c} \mathbf{v} \right).} \tag{50}$$

Ces expressions généralisent celles de Lorentz; en effet si l'on y fait $E_0 = 0$ on a l'expression classique

$$\mathbf{f}_L = \rho \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \right) \tag{51}$$

La densité de travail classique

$$l_L = c \mathbf{E}\mathbf{j}$$

devient ici

$$l = c \mathbf{E}\mathbf{j} - \rho E_0 c. \tag{52}$$

puisque

$$f_4 = \frac{\mathbf{i}}{c} l.$$

Il est curieux de constater que seul l'invariant E_0 intervient dans ces formules. Cela tient à la structure de C, lequel ne contient que des quantités réelles, structure nécessaire pour que les équations (40) aient la forme requise; cela tient donc au fond à l'hypothèse qu'il n'existe pas de magnétisme libre.

12. Equations du mouvement; cas d'une masse variable. — Soit m_0 la masse *au repos* d'un électron, τ le temps propre, $\mathbf{f}_L$ la force classique de Lorentz (51).

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,(\text{quantité de mouvement}) = \text{force} \qquad \frac{\mathrm{d}(m_0\mathbf{v})}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{f}_L - \frac{e}{c}\,E_0\,\mathbf{v}, \tag{53}$$

tandis que dans la théorie de Lorentz on a simplement, en posant $m_0 =$ constante

$$m_0\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}_L. \tag{54}$$

Une hypothèse essentielle de la théorie de Lorentz consiste à admettre que la masse *au repos* est une constante; c'est pour cela qu'on peut écrire les équations du mouvement sous la forme (54).

Les équations correctes sont (53). Admettons pour un instant que la masse *au repos* d'un électron soit susceptible de variation. Alors les équations correctes (53) deviennent

$$\frac{\mathrm{d}(m_0\mathbf{v})}{\mathrm{d}\tau} = m_0\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\tau} + \mathbf{v}\,\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{f}_L - \frac{e}{c}\,E_0\,\mathbf{v}. \tag{55}$$

Si l'on prend comme loi de variation de m_0 une loi telle que

$$\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{e}{c}\,E_0, \tag{56}$$

$$\boxed{m_0 = \text{constante} - \frac{e}{c}\int E_0\,\mathrm{d}\tau,} \tag{57}$$

les équations correctes (53) prennent la forme

$$m_0\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{f}_L$$

qui est identique à la forme classique (54), (le m_0 étant cependant variable). Donc les équations *correctes* se réduisent à la forme de Lorentz si l'on suppose la masse variable d'après la loi (56).

13. La différence de masse entre le proton et l'électron. — Il est facile, si l'on admet le développement précédent, de montrer que la différence entre les masses du proton et de l'électron, n'est qu'une apparence due à l'emploi des équations du mouvement erronées (54). *Les masses inertes sont identiques pour le proton et pour l'électron*; les mesures fournissent des résultats différents uniquement parce qu'elles sont interprétées au moyen des relations inexactes (54), *ou, en fin de compte, parce qu'on néglige les invariants* E_0 et H_0.

Considérons en effet les expériences faites jusqu'ici sur le mouvement de l'électron.

Les mesures nous fournissent la vitesse vraie c'est-à-dire celle qui est donnée par les équations *correctes* (53). Cependant quand on fait le calcul de ces expériences on admet implicitement :

1° que a force qui agit sur l'électron est uniquement la force de Lorentz $\mathbf{f}_L$;

2° que la masse au repos est une constante;

3° que l'équation du mouvement est donc de la forme

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathbf{f}_L. \tag{54}$$

Or, les équations *correctes* qui régissent en réalité le mouvement, ne se réduisent à (54) que si :

1° la masse *au repos* est variable et de la forme

$$m_0 = \mu_0 - \frac{e}{c} \int E_0 \, d\tau \text{ et} \tag{57}$$

2° cette assimilation n'est légitime que si m_0 peut être considéré comme approximativement constant pendant la durée de l'expérience.

Donc, si l'on interprète les expériences comme on l'a fait jusqu'ici, *on ne calcule pas avec la vraie masse*, mais avec une masse donnée par (57), formée par une partie constante et indépendante du champ μ_0 (et qui est la masse inerte vraie, qu'on obtient pour $E_0 = 0$) et par une partie qui a son origine dans le champ lui-même; c'est uniquement l'interprétation erronée des expériences qui nous oblige à admettre cette décomposition. Si on les interprétait en admettant l'expression correcte de la force, la masse serait constante et égale à μ_0.

Par conséquent si l'on fait deux expériences dans les mêmes conditions avec un électron et avec un proton, supposés avoir la même masse *inerte* μ_0, les résultats (interprétés comme d'habitude) conduiront à deux masses *différentes* :

$$\mu_0 - \frac{e}{c} \int E_0 \, d\tau \qquad \text{et} \qquad \mu_0 + \frac{e}{c} \int E_0 \, d\tau;$$

la différence provient uniquement du changement de signe de la charge.

14. **Contrôle expérimental**. — En résumé, cette théorie prévoit une différence entre les masses du proton et de l'électron, due à l'intervention d'un terme propre au champ électromagnétique dans lequel ils sont plongés. En l'absence de tout champ, une expérience devrait donc donner une masse unique μ_0 pour le proton et l'électron, moyenne entre les deux chiffres connus. Or, *toutes* les expériences par lesquelles on a déterminé la masse jusqu'à présent, la calculent par l'intermédiaire du rapport e/m, mesuré lui-même au moyen de champs électromagnétiques. Les développements précédents suggèrent donc une expérience *où les champs n'interviendraient en aucune manière*; une pareille expérience; — une pesée par exemple, — devrait conduire à *la même* masse pour le proton et pour l'électron. Au surplus elle n'aurait pas besoin d'être précise, la différence étant considérable; il reste cependant encore à savoir si cela a un sens de parler d'expériences avec des électrons et protons quand on a à annuler tous les champs existants.

Quoi qu'il en soit, *le principal argument de cette théorie est l'existence de l'invariant* ψ_0; on peut donc s'attacher à prouver son existence dans les multiples expériences d'optique et d'électricité où l'apparition de ψ_0 provoque un écart d'avec les résultats classiques. La question n'est nullement nouvelle puisqu'il s'agit en somme du problème de la transversalité des ondes lumineuses.

15. **Conclusion**. — Les considérations précédentes conduisent à envisager une *possibilité* d'explication de la différence de masse entre le proton et l'électron. Cette différence tient à la confusion que nous faisons entre la masse inerte proprement dite et l'apport du champ électromagnéique. Il semble bien que le nouvel invariant ψ_0 soit l'élément qui manque à la théorie actuelle du rayonnement et qui correspond à la masse du point matériel. Sa contribution à la masse d'une particule chargée est proportionnelle à la charge, le coefficient de proportionnalité étant une fonction déterminée, la primitive de E_0. Cette fonction n'a pas, dans la théorie telle que nous l'avons esquissée une valeur constante et indépendante du champ, qui permette de retrouver approximativement le chiffre bien connu du rapport des masses. Il est peut-être plus prudent avant tout calcul d'avoir des renseignements d'origine expérimentale sur E_0 et H_0 et, avant tout, de savoir S'ils existent. Si cela se confirme on peut espérer que l'introduction du nouvel invariant jettera quelque lumière sur les difficultés très nombreuses que rencontre à l'heure actuelle la théorie quantique du rayonnement. Mais, en tout état de cause les développements qui précèdent montrent une manière *possible* d'expliquer la différence de masse : l'intervention du champ électromagnétique. La mise en œuvre de cette idée peut être celle que nous avons préconisée, ou une autre; mais à ce point il faut faire intervenir l'expérience, la seule qui en fin de compte puisse décider.

Note ajoutée à la correction. — Il semble que la façon dont sont exposés les résultats précédents soit défectueuse en certains endroits parce qu'elle incite le lecteur à tirer des conclusions auxquelles l'auteur ne saurait souscrire. Précisons donc quelques points.

D'abord il faut répéter que le raisonnement des paragraphes 3 et 4, qui conduit aux équations fondamentales, n'est nullement destiné à *justifier* ces équations. Il a été donné pour montrer, d'une part comment on peut arriver aux équations de Lanczos par des considérations d'analogie physique (au lieu des considérations de symétrie mathématique de Lanczos) et d'autre part pour mettre en évidence la façon naturelle dont s'introduisent les quaternions, si utiles par la suite. L'idée exprimée à la fin du paragraphe 2 est certainement exacte, mais sa mise en œuvre n'a nulle prétention de l'être. L'hypothèse fondamentale est constituée par les équations (19) et (20). Si l'expérience prouve qu'elles sont exactes, on pourra dire que le raisonnement en question signale une nouvelle analogie entre le photon et l'électron à ajouter aux autres analogies connues; il ne faut y voir rien de plus.

Un autre point à signaler est le suivant : la présente théorie fait dépendre la « masse » de la fonction primitive $\int E_0 d\tau$, quantité essentiellement *variable*, non seulement avec τ mais aussi avec E_0, donc avec le type d'expérience choisi. Dans ces conditions on ne voit pas très bien comment on pourrait retrouver les valeurs expérimentales, qui sont, semble-t-il, *fixes*.

L'auteur pense précisément que la masse *vraie* μ_0 du proton et de l'électron est une constante absolue, mais que ce qu'on mesure ordinairement, sous le nom de « masse » m_0, est *variable*, ainsi que le veut sa dépendance de $\int E_0 d\tau$. La situation est assez bien décrite par l'analogie suivante.

Imaginons un physicien en train d'étudier la chute des corps sur un mobile de forme déterminée et dans une région de vitesses convenable. Ce physicien écrira la loi du mouvement

$$\frac{d\,(Mv)}{dt} = F \qquad (M = \text{constante}), \tag{1}$$

fera ses expériences (que nous supposons très précises) et constatera que les résultats expérimentaux *ne vérifient pas* la loi (1) : en effet, il aura négligé la résistance de l'air. Si celle-ci est proportionnelle à la vitesse (dans les conditions dans lesquelles il s'est placé), les chiffres trouvés vérifieront la loi *exacte*

$$\frac{\mathrm{d}\,(Mv)}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F - kv. \qquad (M = \text{constante}). \tag{2}$$

Notre physicien constatera une divergence entre l'expérience et la théorie et il aura deux alternatives pour rétablir l'accord. Il pourra dire par exemple, que le désaccord provient du fait qu'il a négligé une certaine force : il découvrira cette force, en tiendra compte, et écrira finalement l'équation (2), que les données expérimentales vérifient.

Mais supposons un instant *qu'il ne puisse pas concevoir* l'existence d'une pareille force antagoniste, ou qu'il écarte d'emblée comme absurde l'idée d'une intervention extérieure directe. Il pourra, quand même, rétablir l'accord avec l'expérience, en admettant que *tout se passe comme si la masse du mobile variait pendant la chute.* L'équation (1) qu'il croit correcte, s'écrira alors

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F - \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\,v \tag{2'}$$

et il suffira d'admettre que la masse varie suivant la loi $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = k$, pour que (2′) ait la forme (2) et que, par conséquent, les données expérimentales la vérifient, au moins dans un domaine déterminé.

Dans le cas des expériences concernant la masse de l'électron, la situation est à peu près analogue à la précédente : ou bien nous admettons l'intervention d'une force extérieure (ayant son origine dans le champ électromagnétique par l'intermédiaire de E_0) et alors la masse des particules est une constante absolue et caractéristique, ou bien nous rejettons cette possibilité et nous englobons l'effet de E_0 dans la valeur de la masse, et alors cela nous conduit à une masse variable ayant des valeurs différentes pour le proton et l'électron.

Donc la « masse » d'un électron est variable. Elle dépend de E_0 et la théorie conduit à affirmer que les valeurs expérimentales obtenues dans deux mesures utilisant des E_0 différents, doivent nécessairement être différentes. *Or, c'est précisément ce que montre l'expérience.*

Il est bien connu qu'il existe deux séries de mesures de la masse de l'électron : les mesures basées sur la *déviation* de la trajectoire dans des champs électrique et magnétique, et les mesures *spectroscopiques* (la masse se déduit des mesures de e/m et de e). Ces deux séries *donnent expérimentalement des nombres différents*, et la différence, sans être grande, est cependant indubitablement supérieure aux erreurs d'expérience. Cela a été discuté avec beaucoup de soin par *R. T. Birge* dans une pénétrante étude critique (1); les chiffres définitifs qu'il donne sont pour e/m

$$e/m\ (\text{spectr.}) = (1{,}761 \pm 0{,}001)\,.\,10^7\ \text{uem/g}$$
$$e/m\ (\text{dév.}) = (1{,}769 \pm 0{,}001)\,.\,10^7\ \text{uem/g}.$$

J. Bearden a amélioré le chiffre spectroscopique (2), mais la différence subsiste. Pour la « masse », Birge donne les chiffres suivants :

$$m\ (\text{spectr.}) = (9{,}0351 \pm 0{,}010)\ 10^{-28}\ \text{g}$$
$$m\ (\text{dév.}) = (8{,}9942 \pm 0{,}014)\ 10^{-28}\ \text{g}$$

et estime que la différence est en tout cas supérieure aux erreurs d'expériences. A ce sujet il croit pouvoir écrire : « Les chiffres militent donc en faveur d'une conclusion étonnante à

(1) *Phys. Rev. Supplement*, 1 (1929), p. 1.

savoir que le e/m d'un électron est moindre lorsque celui-ci se trouve *à l'intérieur* d'un atome que lorsqu'il se trouve *à l'extérieur*. Quelle que soit la cause de cette anomalie, le fait même de son existence paraît avoir une signification profonde ». D'après les considérations précédentes, ces différences seraient dues au fait que dans les deux séries de mesures le E_0 n'est pas le même.

Dans le même ordre d'idées il serait infiniment désirable de clarifier définitivement la question de la vraie valeur de la charge électronique e.

Les mesures de Millikan [1] donnent $(4{,}770 \pm 0{,}005).10^{-20}$ g; celles de Bearden [2] $(4{,}806 \pm 0{,}03).10^{-20}$ g; il peut se faire que chacun ait raison et que les chiffres soient différents, uniquement parce que les conditions expérimentales (les E_0 et H_0) ne sont pas identiques.

Cependant m_0 varie aussi avec τ et de ce côté-là on n'a constaté aucune variation sensible de la « masse » avec, par exemple, le temps; on ne l'a pas cherchée non plus. Nous avons vu que la variation de E influe très peu sur celle de la « masse » lorsqu'on passe des expériences par déviation aux expériences spectroscopiques. On peut alors penser que E_0 est très lentement variable avec τ et que cette variation n'est pas aisément décelable pour les durées des expériences que nous pouvons réaliser. Il faudrait s'adresser peut-être à des phénomènes astronomiques ou à des champs de structure vraisemblablement différente comme ceux du noyau. Mais ici, nous sommes réduits à des conjectures, parfaitement oiseuses d'ailleurs, tant que l'existence réelle des invariants E_0 et H_0 n'aura pas été démontrée expérimentalement.

(1) *Phys. Rev.*, **35** (1930), p. 1231.
(2) *Phys. Rev.*, **37** (1931), p. 1210. Voir aussi, **38** (1931), p. 835; **39** (1931), p. 1.

Manuscrit reçu le 5 décembre 1931.

Paris. — Soc. Gén. d'Imp. et d'Ed., 17, rue Cassette.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur les solutions des équations de Maxwell pour le vide.* Note (1) de M. **Al. Proca**, présentée par M. L. de Broglie.

Le plus souvent, on écrit les solutions des équations de Maxwell pour le vide

$$(1) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t} = \operatorname{rot} h, \qquad \operatorname{div} h = 0, \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{rot} e, \qquad \operatorname{div} e = 0,$$

(1) Séance du 18 décembre 1933.

en utilisant le potentiel d'univers, donc quatre fonctions, soumises d'ailleurs à certaines conditions. On connaît une solution de G. Mie et P. Debye [1], qui ne dépend que de deux potentiels scalaires. Pour l'étude d'un problème auquel nous consacrerons une Note ultérieure, nous avons besoin de solutions ne dépendant que d'un seul « potentiel » scalaire.

Soit Φ une fonction soumise à la seule condition

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0. \tag{2}$$

On vérifie que les expressions suivantes

$$e_1=X\Phi,\qquad e_2=Y\Phi,\qquad e_3=Z\Phi;\qquad h_1=L\Phi,\qquad h_2=M\Phi,\qquad h_3=N\Phi \tag{3}$$

(obtenues en appliquant à Φ les opérateurs X, ..., L, ... que nous définirons plus loin) satisfont formellement aux équations (1). Posons

$$\partial_1=\frac{\partial}{\partial x},\qquad \partial_2=\frac{\partial}{\partial y},\qquad \partial_3=\frac{\partial}{\partial z},\qquad \partial_0=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},$$

nous pouvons écrire les opérateurs en question sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}
X&=\frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[\partial_0\partial_2\cos\alpha-\partial_3\partial_1\sin\alpha], & L&=\frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[+\partial_0\partial_2\sin\alpha-\partial_3\partial_1\cos\alpha],\\
Y&=\frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[-\partial_0\partial_1\cos\alpha-\partial_2\partial_3\sin\alpha], & M&=\frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[\partial_0\partial_1\sin\alpha-\partial_2\partial_3\cos\alpha],\\
Z&=\frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[\partial_1^2+\partial_2^2]\sin\alpha; & N&=\frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[\partial_1^2+\partial_2^2]\cos\alpha.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

En dehors d'opérateurs connus, ces formules contiennent des symboles du type $\sqrt{\partial_0}$, $\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}$, ainsi que leurs inverses; ces symboles signifient ici des *dérivées d'ordre fractionnaire*, positif ou négatif, ce qui justifie la notation adoptée. La définition simple de Liouville suffira pour le but que nous avons en vue. Par définition, la dérivée d'ordre s quelconque d'une fonction qui, développée en série de Fourier, a la forme $f(x)=\sum_k A_k e^{kx}$, sera

$$D^s f=\sum_k A_k k^s e^{kx}. \tag{5}$$

On aura donc, si

$$\Phi=\sum A e^{i(px+qy+rz-Wt)}, \tag{6}$$

$$\sqrt{\partial_0}\,\Phi=\sum\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{W}{c}}\,A e^{i(\ldots)},\qquad \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\,\Phi=\sum\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{c}{W}}\,A e^{i(\ldots)}. \tag{7}$$

[1] G. Mie, *Ann. der Physik*, 25, 1908, p. 377. P. Debye, *ibid.*, 30, 1909, p. 57.

et de même

$$(7') \qquad \sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}\,\Phi = \sum_i i\sqrt{p^2+q^2}\,\mathrm{A}\,e^{i\dots}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}\,\Phi = \sum_i \frac{1}{i\sqrt{p^2+q^2}}\,\mathrm{A}\,e^{i\dots}.$$

La convergence des développements (5) ou (7) joue évidemment un rôle capital dans l'ensemble de cette théorie. Elle ne suscitera cependant pas de difficultés pour l'instant parce que, dans le cas qui nous préoccupe, nous nous bornerons à des potentiels Φ formés par une suite finie du type (6).

α, qui apparaît dans les formules (4), est un opérateur soumis à la seule condition de *commuter avec tous les* ∂_r. Il peut signifier par exemple : multiplication par un nombre quelconque; mais aussi : multiplication par un nombre différent pour chaque terme de la somme (6).

Enfin les dénominateurs des formules (4) semblent introduire des singularités. Or il est facile de voir que la singularité introduite par $\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}$ n'est qu'apparente et que la condition (2) élimine la singularité qui pourrait provenir de $\sqrt{\partial_0}$.

Les solutions dont il est question dans cette Note permettent d'établir un lien entre la théorie électromagnétique et la théorie quantique des photons, à une approximation qui est la même que celle représentée par la mécanique de Schrödinger par rapport à la mécanique de Dirac. La même idée qui a présidé à leur choix, à savoir la décomposition du vecteur d'univers

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},$$

permet de résoudre le problème général.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la mécanique quantique des photons.*
Note de M. **Al. Proca.**

Nous avons entrepris l'examen des raisons pour lesquelles les nombreuses tentatives d'établir une mécanique des photons dans l'espace de configuration n'ont pas eu le succès attendu; cette analyse nous a conduit au résultat qu'au moins en partie, la cause de cet insuccès réside dans le fait que le calcul de la densité d'énergie dans la théorie de Maxwell ne représente qu'une première approximation, applicable en toute rigueur uniquement aux ondes électromagnétiques planes. On avait déjà mis en doute l'exactitude de la théorie classique de la lumière, mais d'une façon beaucoup plus brutale, en proposant l'abandon des équations de Maxwell. Cela semble inutile; si l'on doit changer quelque chose, il suffira de modifier convenablement l'expression de la densité d'énergie.

Considérons un photon comme une particule de masse et de charge nulles. On peut établir pour ce photon trois traitements quantiques : l'un exact (correspondant à la mécanique de Dirac), l'autre approximatif et un troisième qui n'est pas sans analogie avec la mécanique de Schrödinger sous sa forme relativiste. Occupons-nous d'abord du troisième. A cette approximation la fonction d'onde du photon satisfera à l'équation $\Box\psi = 0$. Nous admettrons que le champ électromagnétique constituant la lumière correspondante est donné par les formules

$$(1)\quad e_1 = X\psi,\qquad e_2 = Y\psi,\qquad e_3 = Z\psi;\qquad h_1 = L\psi,\qquad h_2 = M\psi,\qquad h_3 = N\psi,$$

où X, Y, Z, L, M, N sont les opérateurs (4) de notre précédente Note [1]. Ces opérateurs ont été obtenus en décomposant convenablement le vecteur d'univers $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, $\partial/c\,\partial t$ au moyen des formules

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} = NY - MZ,\qquad \frac{\partial}{\partial y} = LZ - NX,\qquad \frac{\partial}{\partial z} = MX - LY,\\ &\frac{\partial}{c\,\partial t} = \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2\right),\\ &X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2 + M^2 + N^2,\qquad XL + YM + ZN = 0.\end{aligned}\right.$$

---

(1) *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1725.

Les composantes (1) du champ électromagnétique ainsi formé :

1° *Satisfont aux équations de Maxwell;*

2° *Se transforment correctement*, si l'on fait l'hypothèse que la condition de normalisation $\int \psi^* \psi \, dV = 1$ reste invariante. Cela détruit cependant l'invariance de l'équation fondamentale $\Box \psi = 0$; nous sommes là en présence d'une difficulté que l'ancienne mécanique ondulatoire relativiste avait déjà rencontrée et qui est inévitable tant qu'on se borne à l'approximation de Schrödinger. Elle montre bien pourquoi une théorie du photon à cette approximation ne peut être définitive, pas plus d'ailleurs que la théorie correspondante pour l'électron. Enfin, les composantes (1);

3° *Fournissent des valeurs correctes pour l'énergie.* — Un photon de la forme $\psi = a e^{2\pi i/h.(px+qy+rz-h\nu . t)}$ aura l'énergie $h\nu$, qu'on la calcule à partir de ψ par la mécanique ondulatoire *ou à partir de* **e**, **h** (convenablement normalisés) *par la théorie électromagnétique*; de même, un photon ayant comme fonction d'onde $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \ldots$ aura une énergie égale à

$$|c_1|^2 . h\nu_1 + |c_2|^2 . h\nu_2 + \ldots .$$

Pour une onde plane, non seulement les énergies, mais aussi leurs *densités*, calculées de ces deux façons, coïncident. Cela n'est cependant plus vrai pour une superposition d'ondes planes. Nous touchons ici la difficulté essentielle qui empêche la synthèse de l'électromagnétisme et des quanta et nous sommes ainsi amenés à proposer une modification de la formule qui donne la densité classique d'énergie (et de quantité de mouvement). Cette densité ne devrait plus être calculée par la formule classique $1/8\pi.(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)$, mais par la formule quantique $\psi^* H \psi$, applicable à tous les cas. Il semble que la formule classique ne soit vraie qu'en première approximation, à savoir, uniquement pour une onde plane, ou *pour un faisceau infinitésimal d'ondes planes*, de directions et de fréquences infiniment voisines. En tout cas, les expériences connues ne l'ont vérifiée que pour ce cas; des essais plus complets ne nous paraissent pas sortir du cadre de nos possibilités expérimentales actuelles [1].

L'approximation de Schrödinger présente naturellement tous les défauts de l'ancienne mécanique ondulatoire relativiste et comme telle n'est pas

---

[1] Récemment, l'exactitude de la formule classique donnant la densité d'énergie a été mise en doute par M. Born (*Nature*, **132**, 1933, p. 282 et 970), qui cependant rejette les équations de Maxwell, et par M. L. de Broglie (*Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1377), qui garde ces équations, mais suppose soit l'existence d'une masse au repos finie du photon, soit celle d'un terme d'interaction dans l'équation fondamentale.

propre à fournir une théorie de la lumière correcte en tous points. Son étude est cependant nécessaire pour l'introduction de l'hypothèse que nous avons mentionnée, concernant l'expression de la densité d'énergie. Ajoutons encore que les champs (1) sont linéairement polarisés, mais dans une direction définie par un angle α qui reste arbitraire. Lorsqu'on décrit donc un photon à l'approximation de Schrödinger, on ne fixe pas sa polarisation. Ceci constitue encore un défaut de cette approximation, disparaissant d'ailleurs, comme les autres, à l'approximation de Dirac.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 198, p. 54, séance du 3 janvier 1934.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
98353-34 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Mécanique quantique des photons. Approximation de Pauli.* Note [1] de M. **Al. Proca.**

Le mouvement d'un photon, considéré comme une particule de masse et de charge nulles, sera décrit par les équations de Dirac

$$\partial_l^{\dot\sigma}\psi_{\dot\sigma}=0, \qquad \partial_s^{\dot\lambda}\chi_{\dot\lambda}=0. \tag{1}$$

Le problème consiste à trouver, comme dans nos précédentes Notes [2], l'expression des composantes du champ lumineux correspondant. Le principe fondamental utilisé est le suivant : l'impossibilité de réaliser une synthèse entre la théorie de Maxwell et la théorie de Dirac vient du fait qu'on peut développer l'une d'elles, la première, sans faire aucunement appel aux spineurs, tandis qu'il n'en est pas de même pour la seconde. Si donc nous voulons relier $\psi_{\dot\sigma}$, χ_λ au champ e, h, il faudra utiliser d'autres *spineurs*, qui, convenablement combinés avec les premiers, fourniront des grandeurs se transformant correctement. Ces nouveaux spineurs nous seront donnés par la « décomposition » du vecteur $\partial_r (r=0, 1, 2, 3)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Avant d'indiquer la solution générale, il n'est pas inutile d'examiner le problème dans le cas où l'on se bornerait à décrire la particule par *deux* composantes seulement $\psi_1, \psi_2 (\chi_\lambda \equiv 0)$. Ce traitement ne saurait être rigoureux [3]; il constitue cependant une véritable approximation, tandis que celui que nous avons déjà décrit dans nos Notes antérieures n'en est pas une.

A cette approximation, on peut réaliser la décomposition du vecteur précédent au moyen d'*un sel spineur* u_s, par

$$\partial_1+i\partial_2=u_{\dot 2}u_1, \qquad \partial_1-i\partial_2=u_{\dot 1}u_2, \qquad -\partial_0+\partial_3=u_{\dot 1}u_1, \qquad -\partial_0-\partial_3=u_{\dot 2}u_2. \tag{3}$$

---

[1] Séance du 15 janvier 1934.

[2] *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1725, et **198**, 1934, p. 54.

[3] W. Pauli, *Handbuch der Physik*, **24-1**, 1933, p. 226.

Pour avoir des formules symétriques, on peut prendre

$$(4)\qquad u_1=\sqrt{\partial_1+i\partial_2}\sqrt[4]{\frac{-\partial_0+\partial_3}{-\partial_0-\partial_3}}e^{i\varepsilon},\qquad u_2=\sqrt{\partial_1-i\partial_2}\sqrt[4]{\frac{-\partial_0-\partial_3}{-\partial_0+\partial_3}}e^{i\varepsilon},$$

où les symboles $\sqrt{\ldots}$ ont la signification que nous leur avons donnée (¹) et ou nous supposerons, comme précédemment, que ε représente un angle arbitraire. Cela étant, pour avoir des grandeurs se transformant comme le champ électromagnétique, il suffira, ainsi que l'ont montré Laporte et Uhlenbeck (²), de former un spineur symétrique du second rang. Or, la manière la plus simple de former un pareil spineur au moyen de u_s et de ψ_1, ψ_2 consiste à prendre

$$(5)\qquad g_{\dot r\dot s}=\frac{1}{2}(u_{\dot r}\psi_{\dot s}+u_{\dot s}\psi_{\dot r}).$$

Dans ce cas, le champ est donné par

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &e_1+ih_1=\frac{1}{4}(u_1\psi_1-u_2\psi_2),\qquad h_2+ie_2=\frac{1}{4}(u_1\psi_1+u_2\psi_2),\\ &e_3-ih_3=\frac{1}{4}(u_1\psi_2-u_2\psi_1).\end{aligned}\right.$$

Ce champ satisfait aux équations de Maxwell $\partial_l^{\dot r} g_{\dot r\dot s}=0$, *si* ψ_σ *satisfont à celles de Dirac.* En effet, on a $\partial_l^{\dot r} g_{\dot r\dot s}=0$, puisque

$$(7)\qquad \partial_l^{\dot r} g_{\dot r\dot s}=\frac{1}{2}u^{\dot r}u_l(u_{\dot r}\psi_{\dot s}+u_{\dot s}\psi_{\dot r})=\frac{1}{2}u_l(u^{\dot r}u_{\dot r})\psi_{\dot s}+\frac{1}{2}u_{\dot s}\partial_l^{\dot r}\psi_{\dot r}\equiv 0$$

en vertu de la commutabilité des u_s et de l'identité $u^{\dot r}u_{\dot r}\equiv 0$.

Considérons un photon d'*énergie positive* se propageant le long de l'axe Ox :

$$(8)\qquad \psi_\sigma=\mathrm{H}_\sigma e^{i(p.x-\mathrm{W}t)}\qquad (\mathrm{W}>0).$$

En calculant les champs au moyen de (6), on constate que la lumière correspondante se propagera dans la même direction que le photon et qu'elle sera *polarisée circulairement* dans un sens bien déterminé.

Comment se comportera la lumière correspondant à un photon d'*énergie négative ?* L'approximation de Pauli ne permet pas le calcul de la lumière correspondant à des photons ayant les uns des énergies positives et les

(¹) *Loc. cit.*

(²) *Physical Review*, 37, 1931, p. 1380.

autres des énergies négatives. Il faut pour cela passer à la théorie exacte, nous constaterons qu'*un photon correspond toujours à une lumière polarisée circulairement, dans un certain sens si l'énergie est positive, et en sens contraire si l'énergie est négative*. Puisque l'expérience nous apprend que l'on peut réaliser, par superposition, une lumière polarisée linéairement, on voit qu'il est *indispensable* d'introduire, dans les calculs, des photons d'énergie négative. Sur ce point, la théorie que nous développons est très satisfaisante; l'apparition inévitable des énergies négatives, loin d'être une difficulté de la théorie, en constitue au contraire un élément essentiel.

Enfin, ces développements relatifs aux photons nous suggèrent l'interprétation suivante des énergies négatives d'une particule quelconque, photon ou électron, interprétation dont nous nous proposons de vérifier l'exactitude :

L'*énergie d'une particule* ne peut être, pour nous, au moins avec nos habitudes d'esprit actuelles, qu'une *quantité essentiellement positive*; *son signe + ou — indique le sens de rotation, droit ou gauche, de certaines composantes d'un champ (du type ψ) attaché à cette particule.* S'il s'agit d'un photon, ce champ est le champ électromagnétique de Maxwell; s'il s'agit d'un électron, ce champ dérive de la fonction d'onde ψ et mérite une étude particulièrement approfondie.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 198, p. 452, séance du 29 janvier 1934.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
98620-34 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

ONDES ET PHOTONS

I. APPROXIMATION DE SCHRÖDINGER

Par Al. PROCA.

Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur essaye d'établir les bases d'une théorie des photons dans l'espace de configuration, dans l'espoir d'éliminer de cette façon certaines difficultés de la théorie actuelle du rayonnement. L'algorithme dont il se sert est constitué par les dérivées d'ordre fractionnaire, et l'idée fondamentale consiste à décomposer convenablement le vecteur d'univers

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

On examine successivement l'expression des champs, leur polarisation, leurs lois de transformation et la valeur de l'énergie.

La solution comporte trois étapes d'approximation, tout à fait analogues aux approximations de Schrödinger, de Pauli et de Dirac pour la mécanique quantique. Dans ce premier article, on n'aborde que l'approximation de Schrödinger. Il résulte d'une analyse serrée que, vraisemblablement, l'expression de la densité d'énergie classique

$$\frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$$

n'est vraie qu'en première approximation, à savoir, *pour les ondes planes et pour un faisceau infinitésimal* d'ondes, de directions, et de fréquences légèrement différentes; elle n'est plus vraie pour une lumière quelconque. Cette conclusion semble pouvoir être soumise au contrôle expérimental.

1. Introduction. — On peut affirmer avec certitude qu'à l'heure actuelle la théorie du rayonnement est en retard sur celle de la matière, que l'Optique n'a pas encore atteint le développement extraordinaire qui caractérise la nouvelle mécanique. Avant l'apparition de celle-ci, la situation était exactement renversée : la mécanique était à peine au stade correspondant à l'Optique géométrique et le travail de ces dernières années a consisté précisément à l'élever au niveau de l'Optique physique. Il semble cependant que ce niveau ait été légèrement dépassé et que la mécanique soit parvenue à un degré de perfection que n'a pas encore atteint la théorie de la lumière. Cela s'est manifesté par l'apparition de certaines difficultés qu'on a rencontrées lorsqu'on a voulu construire une théorie générale et relativiste de la matière et du rayonnement. Les succès obtenus semblent indiquer qu'on s'est engagé dans une bonne voie, et il serait d'ailleurs difficile d'en imaginer une autre à l'heure actuelle. Cependant, les difficultés auxquelles on se heurte sont de telle nature qu'on ne peut guère les éliminer par de simples changements dans le formalisme mathématique, comme on a réussi cependant à le faire dans certains cas particuliers ; elles semblent au contraire tenir à certains défauts organiques de la théorie du rayonnement qu'on n'aperçoit pas toujours très clairement, mais qui ne semblent pouvoir être éliminés que par une modification radicale de cette théorie. En un mot, on voit qu'il faut de toute nécessité modifier quelque chose, mais on ne sait pas exactement quoi et, au surplus, on n'a aucun indice qui nous permette de découvrir quel serait le changement approprié.

Le but du présent travail est précisément de chercher quelle est la manière la plus naturelle d'introduire de nouvelles hypothèses dans la théorie du rayonnement, hypothèses qui la modifient le moins possible (qui n'aillent pas, par exemple, jusqu'à l'abandon des équations de Maxwell), mais qui présentent cependant assez de jeu pour nous permettre de l'encadrer dans la théorie générale des quanta.

Il semble résulter de l'analyse qui va suivre que les modifications auxquelles on est tout naturellement conduit soient beaucoup plus radicales qu'on ne serait tenté de le croire au premier abord; et ensuite, que le passage à la forme définitive de la théorie doive se faire en plusieurs étapes qui ne sont pas sans présenter une certaine analogie avec les étapes conduisant de la mécanique de Jacobi à la mécanique relativiste de Dirac.

Pour arriver à dégager ces hypothèses, un long détour est nécessaire.

En effet, la question a aussi un autre aspect. L'évolution de nos idées concernant la nature de la lumière a présenté des oscillations bien curieuses. Après le succès de la théorie de Fresnel et de la théorie de Maxwell, la lumière était considérée comme indiscutablement formée par des ondes, élastiques d'abord, électromagnétiques ensuite. Après l'apparition de la notion de quantum d'énergie, on est revenu, avec la théorie des quanta de lumière, à une conception corpusculaire, qui a même été poussée jusqu'à ses extrêmes limites. De cette époque date l'introduction de l'analogie entre un photon et un électron, analogie qui a joué un rôle considérable dans le développement de la physique moderne, tant au point de vue expérimental qu'au point de vue théorique. Tout en reconnaissant la justesse et la nécessité de cette analogie, il était cependant impossible de nier l'aspect ondulatoire que présentait dans certains cas la lumière. La découverte d'une dualité identique dans le cas de la matière a renforcé l'analogie photon-électron, et la mécanique ondulatoire nous a donné l'espoir de pouvoir réaliser définitivement la synthèse des théories de la matière et du rayonnement.

Or, cette synthèse n'a pas été réalisée. Il n'a pas été possible de décrire rigoureusement, — c'est-à-dire autrement que par une analogie qualitative, — le phénomène lumineux comme la résultante d'un mouvement de photons, même en appliquant à ceux-ci les lois de la nouvelle mécanique c'est-à-dire en les considérant comme analogues en tout point à des électrons. Les électrons obéissent aux équations de Dirac, la lumière à celles de Maxwell et ces équations semblent irréductibles les unes aux autres. Dès les premiers temps de la mécanique ondulatoire, M. L. de Broglie a essayé de faire profiter l'Optique des progrès de la nouvelle mécanique, en se plaçant au point de vue de la théorie des quanta de lumière (1). L'introduction, par Dirac, d'une fonction d'onde à plusieurs composantes a fait entrevoir la possibilité d'identifier ces composantes, ou leurs combinaisons, au champ électromagnétique. De là, une foule de travaux ayant pour but de « maxwelliser » l'équation de Dirac, travaux qui, en dernière analyse, « n'ont absolument rien donné » (2).

Le débat a été rouvert par un article de M. P. Ehrenfest (*loc. cit.*), — qui a de nouveau rappelé le problème et en a souligné l'extrême importance, trop oubliée aujourd'hui, — ainsi que par une réponse de M. W. Pauli (3), — qui montre d'une façon claire et précise pourquoi le champ d'une fonction d'onde ψ de Dirac ne peut pas être assimilé à un champ électromagnétique, et qui essaye de fixer les limites de l'analogie entre un photon et un électron.

L'article de M. Pauli ferme donc définitivement au moins une voie dans laquelle on peut s'engager pour résoudre le problème. Doit-on en conclure que cette solution est réellement impossible à atteindre, ou qu'elle n'existe pas ? Quand on réfléchit aux avantages

(1) Cf. *Ondes et Mouvements*, Paris Gauthier-Villars.
(2) Cf. P. Ehrenfest. *Z. Physik.*, 1932, **78**, p. 558.
(3) *Z. Physik.*, 1933, **80**, p. 573.

considérables que nous a valus l'emploi de cette analogie, il semble difficile d'admettre que les succès auxquels elle a conduit soient dus uniquement au hasard ; on est au contraire fortement incliné à penser que derrière cette analogie, en apparence purement qualitative, se cache une identité des traits essentiels, ou en tout cas une ressemblance beaucoup plus profonde et qui permet, de toute façon, la réalisation de de la synthèse cherchée.

Il est donc intéressant d'examiner les tentatives de synthèse faites jusqu'à ce jour, pour nous rendre compte à quoi est imputable leur insuccès. Cet examen doit être complété ensuite par une analyse des propriétés de la lumière ou plutôt des théories qui groupent ces propriétés. Ce n'est que de cette façon que nous pourrons avoir tous les éléments pour juger définitivement si cette synthèse est possible, trouver les causes qui en ont empêché la réalisation et voir dans quel sens il faut faire appel à l'expérience qui seule, en fin de compte, doit avoir le dernier mot.

Le long détour auquel nous avons fait allusion consiste à effectuer cette analyse et à serrer d'aussi près que possible le problème précédent ; les hypothèses fondamentales cherchées se présenteront alors d'elles-mêmes ainsi qu'on le verra au paragraphe 13.

2. Distinction essentielle entre champs macroscopiques et microscopiques. — Avant de commencer il faut faire une distinction essentielle entre champs macroscopiques et champs microscopiques, distinction que M. Pauli a été le premier à mettre en évidence clairement (1). Nous devons séparer les champs en deux catégories : d'une part, *les champs macroscopiques* (électromagnétiques ou matériels) qui décrivent l'ensemble d'un grand nombre de particules (photons ou électrons), et de l'autre, les *champs microscopiques* qui se rapportent *à une seule particule*. Lorsqu'on veut établir un lien d'analogie quelconque entre les champs matériels et électromagnétiques, il faut naturellement ne mettre en parallèle que des champs de même genre.

3. Position du problème et solutions proposées. — Nous nous occupons dans cet article exclusivement des champs microscopiques $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$ pour un photon et ψ pour une particule ; le problème est alors le suivant : Soit un photon qui se meut dans le vide ; considéré comme une particule il peut être décrit, en mécanique ondulatoire, par une onde ψ. D'autre part, l'existence d'un photon dans le vide est équivalente à l'existence d'une onde lumineuse, c'est-à-dire à l'existence d'un champ électromagnétique, obéissant aux lois de Maxwell. *Cela admis, est-il possible d'établir une relation quelconque entre l'onde de de Broglie du photon, décrite par la fonction ψ et l'onde lumineuse caractérisée par* $\mathbf{e}$ *et* $\mathbf{h}$, de façon à pouvoir

(1) W. Pauli, *loc. cit.* p. 578.

déduire l'une d'entre elles de la connaissance de l'autre ?

Les solutions proposées sont très diverses et peuvent difficilement se classer en catégories. On peut cependant en distinguer deux. Dans la première catégorie nous rangerons toutes les solutions pour lesquelles, d'une façon ou d'une autre, le champ électromagnétique coïncide avec un champ d'onde ψ, convenablement choisi. Dans ce cas, les champs **e** et **h** sont donc des grandeurs inobservables.

Les raisons pour lesquelles ces solutions « n'ont absolument rien donné », sont exposées dans l'article cité de M. Pauli (1).

Une seconde catégorie peut être formée avec les solutions qui regardent les champs **e** et **h** comme des grandeurs *observables* et mesurables séparément. On considère alors le champ ψ d'une particule convenablement choisie (en général un électron de masse et de charge nulles) et on fait l'hypothèse que **e** et **h** sont les densités de moyennes de certains opérateurs dans ce champ, $\psi^* \xi \psi$.

A ces tentatives on peut faire l'objection que les expressions **e** et **h**, ainsi obtenues, ne satisfont plus aux équations de Maxwell (2), et aussi une autre qui est très importante (3). **e** étant de la forme $\psi^* \xi \psi$, si l'on prend pour ψ une onde plane de fréquence ν, le champ **e** lui-même aura la fréquence 0. Le champ électromagnétique d'un photon d'énergie $h\nu$ serait donc, dans ce cas, une fonction oscillant avec la fréquence 0. Or, ceci constitue une difficulté qu'il n'est pas si facile d'éliminer; en effet, pour un même photon il existe des phénomènes régis par ψ, donc par des fonctions de fréquence ν (par exemple le phénomène des interférences), et d'autres phénomènes, dépendant de **e** et **h** eux-mêmes, donc des fonctions de fréquence 0 (tel le phénomène photoélectrique). La différence de fréquence du ψ et de **e**, **h** pour un même photon est une difficulté supplémentaire qu'il faut absolument écarter.

Aucune de ces solutions ne semble donc propre à être employée comme instrument d'analyse de la structure actuelle des théories de la lumière. Il nous a semblé utile d'en chercher une autre qui, dans la mesure du possible, échappe aux objections précédentes. Cette solution aura, elle aussi, des défauts ; mais l'idée directrice est de réduire ceux-ci aux défauts essentiels, inhérents à la théorie actuelle du rayonnement, ce qui nous permettra de voir clairement si la synthèse cherchée est possible et sinon qu'elles sont les modifications à faire pour l'obtenir.

(1) Nous devrions ranger dans une catégorie à part les travaux de Landau et Peierls, *Z. Physik*, 1930, **68**, 188, puisqu'ils prêtent le flanc aux mêmes critiques, nous ne ferons pas cette distinction.

(2) C'est la critique faite également par M. Pauli à l'essai de M. L. de Broglie.

(3) Cf. L. de Broglie, *Comptes Rendus*, 1932, t. **195**, 636, 677 et 832.

4. Idée fondamentale. — Considérons donc un photon comme une particule et appliquons la mécanique ondulatoire. Cette particule sera décrite par une fonction d'onde ψ, satisfaisant à une équation dont la forme définitive ne sera précisée que plus tard. Disons seulement pour l'instant que cette équation doit être l'équation de Dirac dans un cas particulier, à savoir pour un champ extérieur, une charge et une masse propre nulles. Cela suffit pour que nous puissions affirmer que : *a*) le ψ satisfait certainement à la condition

$$\Box \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

et *b*) qu'on peut choisir comme solution une onde plane de fréquence ν, cas auquel l'énergie du photon sera proportionnelle à ν.

Considérons maintenant l'onde lumineuse qui correspond au photon et demandons-nous comment on peut définir son champ électromagnétique **e** et **h**.

e, **h** ne peuvent pas coïncider avec les composantes de ψ; d'autre part, une composante quelconque **e**, ne peut pas être de la forme $\psi^* \xi \psi$, c'est-à-dire la densité de moyenne d'un opérateur. *Mais il reste encore une possibilité* : chacune des composantes peut être une grandeur *du type* ψ, c'est-à-dire *déduite de* ψ *par application d'un opérateur* convenable qui, en particulier, n'altère pas la fréquence. Nous poserons donc :

$$\left.\begin{array}{ll} e_1 = X\psi & h_1 = L\psi \\ e_2 = Y\psi & h_2 = M\psi \\ e_3 = Z\psi & h_3 = N\psi \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$X \ldots$, $L \ldots$ sont des opérateurs qui doivent être déterminés de façon que (1) satisfassent aux équations de Maxwell. De plus, il faut que pour une onde plane ψ de fréquence ν, les expressions (1) soient également harmoniques de fréquence ν et que *l'énergie*

$$\frac{1}{8\pi} \sum (e_i^2 + h_i^2)$$

soit proportionnelle à la même fréquence.

En résumé, nous devons trouver une solution des équations de Maxwell qui satisfasse à certaines conditions, et qui, avant tout, soit déterminée par la connaissance *d'une seule fonction* ψ.

5. Résolution des équations de Maxwell. — Les équations de Maxwell ont été résolues de plusieurs manières différentes.

La manière usuelle d'écrire les solutions de ces équations consiste à introduire les potentiels vecteur et scalaire, donc quatre fonctions A_r, satisfaisant toutes à la condition $\Box A_r = 0$. On connaît aussi la solution de Mie (1) et Debye (2) qui n'introduit que *deux* « potentiels » scalaires, — et enfin une solution symé-

(1) G. Mie, *Annalen der Physik*, 1908, **25**, p. 377.
(2) D. Debye, *ibidem* 1909, **30**, p. 57.

trique de Bateman. Mais, à notre connaissance, on n'a pas encore écrit les solutions des équations de Maxwell en n'employant qu'un seul « potentiel » c'est-à-dire une seule fonction ψ satisfaisant à $\Box\,\psi = 0$. Considérons donc d'abord ce problème particulier et écrivons les équations de Maxwell, en posant pour abréger

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \qquad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} \qquad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \qquad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2}$$

On a :

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} \partial_0 e_1 = \partial_3 h_2 - \partial_2 h_3 \\ \partial_0 e_2 = \partial_1 h_3 - \partial_3 h_1 \\ \partial_0 e_3 = \partial_2 h_1 - \partial_1 h_2 \\ \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2 + \partial_3 e_3 = 0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{II}\left\{\begin{array}{l} -\partial_0 h_1 = \partial_3 e_2 - \partial_2 e_3 \\ -\partial_0 h_2 = \partial_1 e_3 - \partial_3 e_1 \\ -\partial_0 h_3 = \partial_2 e_1 - \partial_1 e_2 \\ \quad \partial_1 h_1 + \partial_2 h_2 + \partial_3 h_3 = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Remplaçons dans (3) **e** et **h** par leurs expressions (1); les équations de Maxwell $\mathcal{M} = 0$,... deviendront $\mathcal{N}\psi = 0$,... où $\mathcal{N}$ sont des opérateurs fonction de X,... L,... et des dérivées partielles ∂_r; il suffira alors de déterminer les opérateurs X,... L,... de façon que $\mathcal{N} \equiv 0$,..., et automatiquement (1) sera la solution cherchée. A première vue, il semble que ces opérateurs soient compliqués. Il est remarquable de constater que non seulement ils ne le sont pas, mais qu'ils dépendent d'opérateurs de structure *connue* et que leur complication ne dépasse pas celle d'une *dérivation d'ordre fractionnaire, d'ordre 1/2* pour préciser.

Ecrivons en détail ces équations :

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} \partial_0 X = \partial_3 M - \partial_2 N \\ \partial_0 Y = \partial_1 N - \partial_3 L \\ \partial_0 Z = \partial_2 L - \partial_1 M \\ \partial_1 X + \partial_2 Y + \partial_3 Z = 0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{II}\left\{\begin{array}{l} -\partial_0 L = \partial_3 Y - \partial_2 Z \\ -\partial_0 M = \partial_1 Z - \partial_3 X \\ -\partial_0 N = \partial_2 X - \partial_1 Y \\ \quad \partial_1 L + \partial_2 M + \partial_3 N = 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

Nous admettons, en outre, que les opérateurs X, Y, Z, L, M, N sont commutables entre eux et avec ∂_0, ∂_1, ∂_2, ∂_3, c'est-à-dire se comportent dans (4), du point de vue du calcul algébrique, comme des nombres ordinaires. Nous allons donc résoudre simplement le système d'équations (4) comme s'il s'agissait d'un système algébrique. Naturellement, ce procédé n'a aucune valeur de démonstration; il ne nous servira que pour trouver une expression probable pour les opérateurs X,... L,... Nous aurons ensuite à trouver une *interprétation* de ces opérateurs et finalement *prouver* que si on les applique à ψ on obtient bien pour (1) une solution des équations de Maxwell.

On déduit des deux dernières conditions I et II de (4) que

$$\frac{\partial_1}{NY - MZ} = \frac{\partial_2}{LZ - NX} = \frac{\partial_3}{MX - LY} = k,$$

k étant un facteur de proportionnalité; les équations (4) étant homogènes il suffira de prendre $k = 1$. Des autres équations on déduit :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2 + M^2 + N^2$$
$$XL + YM + ZN = 0$$

et les conditions que doivent satisfaire les ∂_r

$$\partial_0 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_0^2 = 0. \tag{5}$$

On en déduit aussi

$$k = \frac{\partial_0}{\frac{1}{2}(\Sigma X^2 + \Sigma L^2)}.$$

Donc, avec les conditions (5) nous pouvons remplacer le système (4) par

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1 = NY - MZ \\ \partial_2 = LZ - NX \\ \partial_3 = MX - LY \\ \partial_0 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2) \\ \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2 + M^2 + N^2 \\ \quad XL + YM + ZN = 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Si donc, pour aider notre intuition, nous considérons ∂_1, ∂_2, ∂_3 comme les composantes d'un vecteur de longueur ∂_0, le problème (6) revient à trouver deux autres vecteurs (X, Y, Z) et (L, M, N), perpendiculaires entre eux et à $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ et ayant une même longueur égale à $\sqrt{\partial_0}$.

En même temps (6) nous montre quelle est la signification profonde du procédé formel que nous avons envisagé et nous fait pressentir son importance. Anticipant sur ce qui va suivre, nous pouvons remarquer qu'indépendamment de toute relation avec les équations de Maxwell, le procédé employé revient à *décomposer le vecteur d'univers* :

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{7}$$

en deux éléments, tels que chacune des composantes (7) s'exprime par une *fonction quadratique* de ces éléments. La théorie de Dirac nous a familiarisés avec des décompositions analogues : par exemple le courant d'univers se présente en théorie de Dirac comme une fonction quadratique des composantes de deux spineurs.

Tout le succès de la théorie de Dirac repose d'ailleurs sur l'introduction d'éléments que l'ancienne analyse tensorielle négligeait et dont les lois de tranformation sont telles que seulement certaines fonctions quadratiques de leurs composantes rentrent dans les cadres de cette ancienne analyse. Or, la théorie actuelle du rayonnement ignore ce genre de quantités, ou plutôt elle n'en a pas besoin : on peut la développer sans faire aucunement appel aux spineurs. Du point de vue des lois de transformation, ces deux théories se trouvent en quelque sorte sur deux plans différents; il n'est pas étonnant qu'on n'ait pas pu les réunir jusqu'à présent en une théorie unique. Mais, en même temps, cela nous montre que nous ne pourrons espérer arriver à ce résultat qu'en les ramenant au même plan, et le seul moyen logiquement utilisable est *l'introduction systématique de décompositions du type que nous avons employé*. Ce point est fondamental.

Quoiqu'il en soit l'image géométrique précédente nous permet de résoudre immédiatement les équations (6). Si les ∂_1, ∂_2, ∂_3 sont des nombres représentant les composantes d'un vecteur de longueur ∂_0, menons le

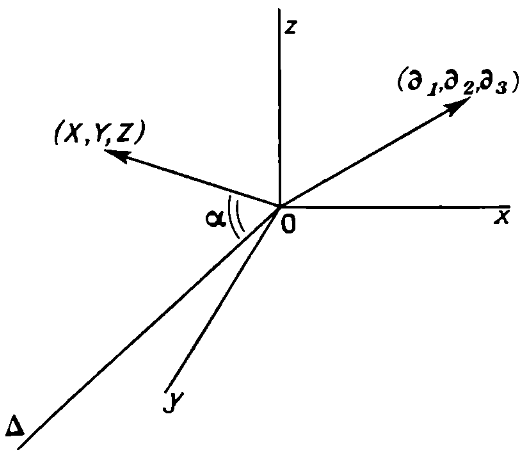


Fig. 1.

plan normal à ce vecteur et qui passe par l'origine, et prenons l'intersection Δ de ce plan avec le plan $x\,O\,y$, (voir figure). X, Y, Z *et* L, M, N se trouveront dans ce plan, mais les équations (6) ne *fixent pas l'orientation de* X, Y, Z *dans ce plan*. L'angle α de (X, Y, Z) avec Δ constitue un paramètre arbitraire. En fonction de ce paramètre les solutions de (6) sont :

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[-\partial_0\partial_2\cos\alpha - \partial_3\partial_1\sin\alpha] \\
Y &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[\partial_0\partial_1\cos\alpha - \partial_2\partial_3\sin\alpha] \\
Z &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[\partial_1^2+\partial_2^2]\sin\alpha \\
L &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[\partial_0\partial_2\sin\alpha - \partial_3\partial_1\cos\alpha] \\
M &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[-\partial_0\partial_1\sin\alpha - \partial_2\partial_3\cos\alpha] \\
N &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}}[\partial_1^2+\partial_2^2]\cos\alpha
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ces expressions ont une forme particulière due à un choix particulier du paramètre arbitraire α, ou plutôt à l'origine à partir de laquelle on le compte. Cette forme fait apparaître des dénominateurs. Or, le dénominateur $\sqrt{\partial_0}$ ne peut jamais être nul dans notre cas, donc il ne procure aucune difficulté ($\partial_0\psi = 0$ entraine

$$\partial_0 X\psi = \partial_0 e_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t} = 0, \ldots, \text{etc.},$$

et il n'y a plus de propagation; les équations de Maxwell exigent alors que le champ soit une constante absolue dans tout l'espace). Le dénominateur $\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2}$ apparait d'une manière artificielle, parce que nous avons choisi comme origine de α la droite d'intersection du plan normal à $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ et du plan xOy, et que sa position est indéterminée lorsque ces deux plans coïncident. Les formules (8) n'ont donc pas de sens lorsque ∂_1, ∂_2, ∂_3 coïncide avec l'axe Oz; mais cela ne veut pas dire qu'il n'existe pas de solution. Il suffit de prendre dans le plan xOy une droite Δ arbitraire et compter à partir de celle-ci l'angle α. Au surplus, si l'on veut avoir des formules symétriques on peut, étant donné un ensemble de nombres ∂_1, ∂_2, ∂_3, choisir trois autres nombres tels que

$$a\partial_1 + b\partial_2 + c\partial_3 = 0 \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

ce qui est toujours possible. Cela étant, on peut écrire les formules (8) sous la forme :

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}[a\partial_0\cos\beta + (c\partial_2 - b\partial_3)\sin\beta] \\
Y &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}[b\partial_0\cos\beta + (a\partial_3 - c\partial_1)\sin\beta] \\
Z &= \frac{1}{\sqrt{\partial^0}}[-c\partial_0] \\
L &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}[(c\partial_2 - b\partial_3)\cos\beta - a\partial_0\sin\beta] \\
M &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}[(a\partial_3 - c\partial_1)\cos\beta - b\partial_0\sin\beta] \\
N &= \frac{1}{\sqrt{\partial_0}}[(b\partial_1 - a\partial_2]
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Néanmoins, nous garderons les formules (8) qui sont valables tant que $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ ne coïncide pas avec Oz (c'est-à-dire, tant que ψ décomposé en une somme d'ondes planes n'en contient pas qui se propagent normalement à Oz). Ces formules font jouer un rôle particulier à cet axe tout comme d'autres formules utilisées en théorie de Dirac.

On déduit de (8), en posant pour abréger :

$$\sqrt{A} = \sqrt{\partial_0}.\sqrt{\partial_1^2+\partial_2^2} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} X + iL &= \frac{1}{\sqrt{A}} (-\partial_0\partial_2 - i\partial_3\partial_1)\, e^{-1\alpha} \\ Y + iM &= \frac{1}{\sqrt{A}} (\partial_0\partial_1 - i\partial_2\partial_3)\, e^{-1\alpha} \\ Z + iN &= \frac{i}{\sqrt{A}} (\partial_1^2 + \partial_2^2)\, e^{-1\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Enfin écrivons

$$f_1 = X + iL \qquad f_2 = Y + iM \qquad f_3 = Z + iN \quad (12)$$

et formons

$$\xi = f_1 + if_2 \qquad \eta = f_1 - if_2 \qquad \zeta = \sqrt{2} f_3; \quad (13)$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{i}{\sqrt{A}} (\partial_1 + i\partial_2)(\partial_0 - \partial_3)\, e^{-1\alpha} \\ \eta &= \frac{i}{\sqrt{A}} (\partial_1 - i\partial_2)(-\partial_0 - \partial_3)\, e^{-1\alpha} \\ \zeta &= \frac{i}{\sqrt{A}} \sqrt{2}\, (\partial_1 + i\partial_1)(\partial_2 - i\partial_2)\, e^{-1\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

6. **Opérateurs. Définitions.** — Revenons maintenant au problème fondamental de la recherche des opérateurs X, Y, Z, L, M, N qui conduisent à une solution des équations de Maxwell. Nous devons nous demander d'abord si les formules (8) ou (10) *convenablement interprétées*, ne nous fournissent pas les opérateurs cherchés. Il suffira pour cela de remplacer les ∂_r, qui étaient jusqu'à présent des nombres, par les dérivées correspondantes et de chercher quel peut être le sens de

$$\sqrt{\partial_0} = \sqrt{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}} \qquad \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2} = \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$$

et de leurs inverses.

Le sens du symbole ∂_r^2 est clair : ∂_r^2 signifie une dérivée du second ordre. Pour garder la même interprétation

$$\sqrt{\partial_0} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

devrait signifier une dérivée d'ordre 1/2. Or, *on sait comment prendre la dérivée d'un ordre quelconque, négatif et fractionnaire d'une fonction donnée* ψ (¹); par conséquent, le problème ne présente pas de difficulté.

La dérivée d'ordre quelconque d'une fonction ψ a été mise sous différentes formes. Nous ne poursuivons pas ici une étude mathématique complète; par conséquent, nous ne prendrons pas la forme la plus condensée ou la plus générale, mais la plus commode et la mieux adaptée à nos besoins. ψ sera dans notre cas la solution d'une équation de propagation, donc exprimable directement par une superposition d'ondes planes de la forme

$$\psi = \sum a_k\, e^{i(p_k x + q_k y + r_k z - w_k t)}.$$

Nous choisirons donc la définition simple de Liouville, qui s'adapte le mieux à ce type de fonction. La dérivée D^s d'ordre s quelconque, d'une fonction

$$\psi(t) = \sum a_k\, e^{\alpha_k t}$$

sera

$$D^s \psi = \sum (\alpha_k)^s a_k\, e^{\alpha_k t}. \quad (15)$$

Dans cet article, nous prendrons en considération des photons dans un seul état ou des photons distribués sur un nombre *fini* d'états; la définition (15) sera rigoureuse dans ce cas puisque toute difficulté de convergence est exclue.

Exemple : pour un photon représenté par une onde plane

$$\psi_r = a\, e^{i(px + qy + rz - wt)} \quad (16)$$

on a $\left(s = -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{\partial_0}} \psi = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{c}{w}} \cdot \psi_r$$

et $\left(s = +\frac{1}{2}\right)$

$$\sqrt{\partial_0}\, \psi = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{w}{c}} \cdot \psi_r.$$

De même pour une fonction

$$\psi(x, y) = \sum_k a_k\, e^{\alpha_k x + \beta_k y}$$

nous définirons

$$\left[\frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r}\right]^s \psi = \sum_k [(\alpha_k)^r + (\beta_k)^r]^s a_k\, e^{\alpha_k x + \beta_k y}. \quad (17)$$

En particulier pour l'onde plane (16)

$$\sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}\, \psi_r = i\sqrt{p^2 + q^2}\, \psi_r$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}} \psi_r = \frac{1}{i\sqrt{p^2 + q^2}} \psi_r$$

et de plus

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \psi_r = \frac{1}{\sqrt{\partial_0}} \frac{1}{\sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}} \psi_r = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\frac{w}{c}(p^2 + q^2)}} \psi_r. \quad (18)$$

Avec cette signification, le sens des opérateurs (11)

(¹) *Cf. p. ex.* Encyclopédie des Sciences mathématiques II, 1B, parag. 7.

est déterminé au facteur $\mathbf{e}^{-i\alpha}$ près. Ce facteur est un *opérateur arbitraire* soumis à la seule condition qu'il soit commutable avec tous les ∂_r ainsi qu'avec X..., L... (et qu'il ne soit pas, en outre, un diviseur de zéro). Cela entraîne la conséquence évidente suivante : si $\mathbf{e}^{i\alpha} f_r \psi$ $(r = 1, 2, 3)$, c'est-à-dire les opérateurs (11) *sans ce facteur* appliqués à un ψ, conduisent à un champ électromagnétique satisfaisant aux équations de Maxwell, il en sera de même des opérateurs (11) *avec* ce facteur, $f_r \psi$ $(r = 1, 2, 3)$.

Prendre les opérateurs (11) sans le facteur $\mathbf{e}^{-i\alpha}$ équivaut à faire $\alpha \equiv 0$ dans (8), c'est-à-dire prendre

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= -\frac{\partial_0\partial_2}{\sqrt{A}} & L_0 &= -\frac{\partial_3\partial_1}{\sqrt{A}}, \\ Y_0 &= \frac{\partial_0\partial_1}{\sqrt{A}} & M_0 &= -\frac{\partial_2\partial_3}{\sqrt{A}}, \\ Z_0 &= 0 & N_0 &= \frac{\partial_1{}^2 + \partial_2{}^2}{\sqrt{A}}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Soit alors une onde plane

$$\psi_p = a\mathbf{e}^{i(px+qy+rz-wt)} \quad (16)$$

satisfaisant à $\square\psi = 0$

c'est-à-dire telle que

$$p^2 + q^2 + r^2 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 0.$$

On vérifie immédiatement que les fonctions

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= X_0\psi & e_2 &= Y_0\psi & e_3 &= Z_0\psi \\ h_1 &= L_0\psi & h_2 &= M_0\psi & h_3 &= N_0\psi \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

satisfont aux équations de Maxwell. Ces équations seront encore satisfaites quand ψ sera une somme d'ondes planes du type (16) auxquelles on applique les opérateurs (19).

On peut donc conclure : *soit une fonction ψ satisfaisant à la condition* (21)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

les fonctions

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= X\psi & e_2 &= Y\psi & e_3 &= Z\psi \\ h_1 &= L\psi & h_2 &= M\psi & h_3 &= N\psi \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

forment les composantes d'un champ électromagnétique déduit du « potentiel unique » ψ qui satisfont aux équations de Maxwell [1]. A un « potentiel » déterminé ψ correspond une infinité de champs : si $\mathbf{e}_r^\circ$, $\mathbf{h}_r^\circ$ est l'un d'eux, les autres se déduisent par la formule

$$\mathbf{e}_r + i\mathbf{h}_r = \mathbf{e}^{-i\alpha}(\mathbf{e}_r^\circ + i\mathbf{h}_r^\circ),$$

où $\mathbf{e}^{-i\alpha}$ est un opérateur arbitraire, non-diviseur de zéro et commutant avec tous les ∂_r.

Si le développement de ψ en série de Fourier possède un terme qui représente une onde plane normale à Oz on devra le traiter à part : on calculera la contribution des autres termes par les formules (22) et on lui ajoutera celle de l'onde plane en question, qu'on calculera directement. Enfin, pour que le théorème soit rigoureusement démontré il faudrait s'assurer de la convergence des développements, question que nous avons laissée de côté pour le moment.

7. **Signification de $\mathbf{e}^{-i\alpha}$.** — Considérons le cas d'un « potentiel » générateur représenté par une seule onde plane de la forme

$$\psi = a\mathbf{e}^{i(px-wt)} \quad (23)$$

tel que $\square\psi = 0.$

Anticipant sur ce qui va suivre, nous pouvons dire que (23) représente (dans une théorie relativiste, à *l'approximation de Schrödinger* $\square\psi = 0$) un photon d'énergie w et de moment $p = \frac{w}{c}$, se mouvant le long de l'axe des x. Le champ électromagnétique équivalent s'obtiendra en appliquant à ψ les opérateurs (8) ; on a :

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= 0 \\ e_2 &= a\sqrt{p}.\cos\alpha.\mathbf{e}^{i\left(px-wt-\frac{\pi}{4}\right)} \\ e_3 &= -a\sqrt{p}\sin\alpha.\mathbf{e}^{i\left(px-wt-\frac{\pi}{4}\right)} \\ h_1 &= 0 \\ h_2 &= -a\sqrt{p}\sin\alpha\,\mathbf{e}^{i\left(px-wt-\frac{\pi}{4}\right)} \\ h_3 &= -a\sqrt{p}.\cos\alpha.\mathbf{e}^{i\left(px-wt-\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Admettons que nous choisissions pour l'opérateur arbitraire α le plus simple possible : « multiplication par un *nombre réel ordinaire* α ». Dans ce cas, il est clair que ce nombre α représente l'angle de polarisation de la lumière, le plan xOy étant pris comme plan d'origine. Le photon est représenté par une onde plane c'est-à-dire par une expression oscillatoire de la forme (16) ; le champ électromagnétique est représenté par des expressions du même type à un facteur de phase constant près : par exemple :

$$e_2 = \sqrt{p}\cos\alpha.\psi.\mathbf{e}^{-\frac{i\pi}{4}};$$

les pulsations des diverses composantes du champ sont en phase, mais celles du photon et du champ sont décalées de $\pi/4$. Les amplitudes ne sont pas influencées

[1] En appliquant les opérateurs X..., L..., il faut traiter les $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ comme deux opérateurs arbitraires, commutant avec tous les autres et tels que l'application deux fois répétée de $\cos\alpha$ plus l'application deux fois répétée de $\sin\alpha$ reproduise la fonction primitive : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Pour éviter cette complication, il vaut mieux prendre le champ sous la forme complexe $f_r = e_r + ih_r$ et introduire l'opérateur arbitraire sous sa forme exponentielle

$$\mathbf{e}^{-i\alpha} = 1 - \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots$$

naturellement par ce décalage, comme elles ne le sont pas par la phase arbitraire qui subsiste toujours dans la fonction d'onde du photon.

Ces amplitudes sont réelles et égales à

$$[e_1] = 0 \qquad [h_1] = 0$$
$$[e_2] = \sqrt{p}\cos\alpha \qquad [h_2] = -\sqrt{p}\sin\alpha$$
$$[e_3] = -\sqrt{p}\sin\alpha \qquad [h_3] = -\sqrt{p}\cos\alpha.$$

Les facteurs pulsants des composantes du champ sont imaginaires; mais on peut aussi ne considérer que les parties réelles qui sont aussi des solutions des équations de Maxwell.

Ainsi, dans cette théorie dans laquelle un photon est décrit par *une seule fonction d'onde*, l'onde plane électromagnétique correspondant à un photon, n'est pas complètement déterminée par ce dernier : sa polarisation reste arbitraire. Il n'en est plus ainsi dans la théorie exacte.

Prenons maintenant un autre potentiel formé par la superposition de deux ondes planes du type (23).

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

Le champ sera

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$$

et il satisfera aux équations de Maxwell parce que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1)$ et $(\mathbf{e}_2\ \mathbf{h}_2)$ y satisfont séparément, et cela quelles que soient leurs polarisations.

Donc l'opérateur $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ dans (8), appliqué à une fonction

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots$$

formée par une superposition d'ondes planes, peut avoir une autre forme simple : multiplication de *chaque onde plane* par un facteur de phase *différent* :

$$[\cos\alpha]\,\psi = \psi_1.\cos\varphi_1 + \psi_2.\cos\varphi_2 + \ldots$$

φ_1, φ_2,..., étant des *nombres* différents les uns des autres; cela conduira toujours à des solutions des équations de Maxwell.

Cet opérateur peut être plus compliqué que cela, au moins dans la théorie primitive basée sur l'unique condition $\Box\,\psi = 0$; nous n'avons pas réussi à démontrer qu'il doit nécessairement se réduire au type simple décrit plus haut.

Quoi qu'il en soit, nous nous limiterons dans ce qui suit au type d'opérateur que nous avons signalé plus haut et qui a une interprétation physique simple.

Revenons à la question de la relation entre l'équation du photon en mécanique ondulatoire et les équations de Maxwell.

Nous parcourrons ici aussi les deux étapes qu'a parcourues la mécanique ondulatoire du point matériel : mécanique de Schrödinger et mécanique relativiste de Dirac; la raison pour laquelle nous ne pouvons pas passer immédiatement au cas de Dirac apparaîtra clairement dans un instant.

Assimilons donc le photon à un point matériel de masse nulle; à l'approximation de Schrödinger sa fonction d'onde ψ satisfera alors

$$\Box\,\psi = 0.$$

Dans ce cas le champ électromagnétique $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, sera donné par les formules (1) et (9) et ces composantes satisferont aux équations de Maxwell, d'après les paragraphes précédents. Il ne nous reste plus qu'à voir comment ces grandeurs se comportent lors d'une transformation de Lorentz.

8. **Lois de transformation**. — Le champ est donné par les formules :

$$e_1 = X\psi, \quad e_2 = Y\psi, \quad e_3 = Z\psi; \quad h_1 = L\psi, \quad h_2 = M\psi, \quad h_3 = N\psi, \tag{1}$$

et les opérateurs X..., L..., sont définis par les équations (6)

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 = NY - MZ \quad \delta_2 &= LZ - NX \quad \delta_3 = MX - LY \\ \delta_0 &= \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2) \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= L^2 + M^2 + N^2 \\ XL + YM + ZN &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Or, le ψ est une fonction d'onde que nous devons normaliser comme d'habitude par

$$\int \psi^*\psi\, \mathrm{d}V = 1. \tag{25}$$

Dans une théorie correcte (et nécessairement relativiste), il faudrait que cette condition essentielle fût invariante par rapport aux transformations de Lorentz, ou au moins qu'elle se propageât au cours du temps. L'invariance exigerait que $|\psi|^2$, le carré du module de ψ se transformât comme la composante de temps d'un vecteur d'univers. ψ devrait donc se transformer [1] comme $\sqrt{t}$. Si le symbole $\sim$ signifie : « se transforme comme », on aura

$$X \sim \frac{e_1}{\sqrt{t}}, \ \ldots \qquad L \sim \frac{h_1}{\sqrt{t}}, \ \ldots \tag{26}$$

et, par les formules (6) :

$$\left.\begin{aligned} e_2h_3 - e_3h_2 \sim xt, \quad e_3h_1 - e_1h_3 \sim yt, \quad e_1h_2 - e_2h_1 \sim zt \\ \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \sim tt \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Les expressions à gauche du signe $\sim$ se transfor-

[1] C'est pour éviter cette conclusion que Schrödinger avait proposé dans un de ses premiers mémoires comme formule de normalisation $\int \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t}\, \mathrm{d}V = 1$ au lieu de (25), voulant ainsi réaliser l'invariance de la condition de normalisation et faciliter la généralisation relativiste de la théorie. (Cf. *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*. Note ajoutée à la traduction française, p. 97; traduction Al. Proca, 1933, chez Alcan, à Paris.)

ment donc comme les composantes de temps T_{14}, T_{24}, T_{34}, T_{44} d'un tenseur d'univers symétrique de rang deux. Or, *elles ont précisément la forme qu'auraient les composantes de temps du tenseur classique d'énergie-quantité de mouvement*, si les e_r et h_r étaient les champs électriques et magnétiques habituels. Nous pouvons donc en conclure que les e_r et h_r calculés par (1) peuvent bien jouer ce rôle; les expressions proposées se transforment donc correctement.

Pour arriver à ce résultat, nous avons été obligés de supposer que ψ se transformait comme $\sqrt{t}$, ce qui détruit l'invariance relativiste de l'équation fondamentale

$$\Box\psi = 0.$$

Cela est inévitable; il faut choisir entre cette invariance et celle de la condition de normalisation

$$\int \psi^*\psi \,\mathrm{d}V = 1,$$

l'une excluant l'autre. Ainsi qu'il est bien connu, on n'a même pas la ressource de pouvoir démontrer que si cette condition est réalisée à un instant déterminé, elle continuera à l'être aux instants ultérieurs. Nous rencontrons ici des difficultés qui nous sont familières, et qui sont apparues lorsqu'on a voulu construire une théorie relativiste de l'électron en partant d'une équation du second ordre. Ces difficultés, auxquelles il fallait s'attendre et qui montrent que la théorie que nous développons ne saurait sous sa forme actuelle être satisfaisante, sont dues, aussi bien pour l'électron que pour le photon, au fait que nous nous bornons à l'approximation de Schrödinger. Elles doivent naturellement disparaître dans la théorie exacte et, en fait, on ne les retrouve plus.

9. **Décomposition en facteurs.** — Le processus que nous avons employé consiste en une décomposition du vecteur d'univers.

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

qui réalise, *pour un vecteur*, ce que la « *linéarisation* » introduite par Dirac réalisait pour un scalaire de la forme

$$\Box = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

On peut mettre cette décomposition sous la forme d'une véritable « décomposition en facteurs ». Soient λ, μ, ν des unités quaternioniennes, c'est-à-dire telles que :

$$\lambda\mu = \nu, \quad \mu\nu = \lambda, \quad \nu\lambda = \mu; \qquad \lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = -1,$$

et posons : $\sigma_1 = i\lambda, \quad \sigma_2 = i\mu, \quad \sigma_3 = i\nu$;

on aura : $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \ \ldots \quad \sigma_1{}^2 = +1, \ \ldots$ (28)

Si l'on veut particulariser, on peut prendre pour σ_r les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Considérons les quaternions

$$\left.\begin{aligned} D &= \partial_0 + \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3 \\ D^* &= \partial_0 - \sigma_1\partial_1 - \sigma_2\partial_2 - \sigma_3\partial_3 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

et décomposons D en deux facteurs d'après le schéma

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}[(X+iL)\sigma_1 + (Y+iM)\sigma_2 + (Z+iN)\sigma_3]$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[(X-iL)\sigma_1 + (Y-iM)\sigma_2 + (Z-iN)\sigma_3]. \tag{31}$$

Posons, pour abréger :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum(X+iL)\sigma_1 \qquad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum(X-iL)\sigma_1; \tag{32}$$

on a

$$D = AA^* \qquad \text{et aussi} \qquad D^* = A^*A. \tag{33}$$

Il est clair que la décomposition (31) est toujours formellement possible d'une infinité de manières et qu'elle équivaut aux relations

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 = NY - MZ \quad \partial_2 = LZ - NX \quad \partial_3 = MX - LY \\ \partial_0 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2) \end{aligned}\right\}, \tag{34}$$

mais cette décomposition n'exige nullement que l'on ait, de plus,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

et : $$XL + YM + ZN = 0, \tag{35}$$

(35) est une condition supplémentaire qui s'écrirait simplement

$$A^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (A^*)^2 = 0. \tag{36}$$

Cela étant, il est facile de vérifier que les équations de Maxwell s'écrivent :

$$D\mathcal{H} = 0 \qquad \mathcal{H}^*D^* = 0 \tag{37}$$

où

$$\mathcal{H} = \sum(e_1 + ih_1)\sigma_1 \qquad \mathcal{H}^* = \sum(e_1 - ih_1)\sigma_1. \tag{38}$$

Prenons alors comme composantes du champ électromagnétique celles qui résultent des équations

$$\mathcal{H}^* = A\psi \qquad \mathcal{H} = A^*\psi = \psi A^* \tag{39}$$

où ψ est un nombre (donc ne contient pas les $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), où $X\ldots$, $L\ldots$, sont des opérateurs satisfaisants à (37) et tels que les conditions supplémentaires

$$A^2\psi = (A^*)^2\psi = 0 \tag{40}$$

soient également satisfaites.

Ces conditions ne peuvent pas être satisfaites par n'importe quelle fonction ψ ; il faut que

$$\square \psi = 0,$$

en vertu de

$$DD^* \psi = D^* D \psi = AA^* A^* A \psi = (A^*)^2 A^2 \psi = A^2 (A^*)^2 \psi$$

et de : $\qquad DD^* = D^* D = \square.$

Cette condition étant remplie, et elle l'est toujours dans l'hypothèse où ψ est la fonction d'onde d'un photon à l'approximation de Schrödinger, on vérifie immédiatement que les champs (38) satisfont aux équations de Maxwell. En effet

$$D\mathcal{H} = A(A^*)^2 \psi \equiv 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^* D^* = \psi A A A^* \equiv 0.$$

Pour cela, les conditions (40) sont donc indispensables.

10. **Energie.** — Nous sommes donc en possession de certaines fonctions déduites de la fonction d'onde ψ du photon, qui satisfont aux équations de Maxwell et se transforment correctement. Pour que nous ayons le droit de les considérer comme représentant le champ électromagnétique d'un photon, il faut encore qu'elles conduisent à la valeur correcte de l'énergie de ce photon.

Nous calculerons cette énergie par la formule

$$E = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{e}^* \mathbf{e} + \mathbf{h}^* \mathbf{h}) \, dV. \tag{41}$$

Considérons d'abord un photon comme un point matériel de masse nulle, et supposons-le dans un état d'énergie $W = h\nu$, et de quantité de mouvement (p, q, r). Sa fonction d'onde sera

$$\psi = a \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}(px + qy + rz - Ws)} \tag{42}$$

et, — à l'approximation admise, — on aura

$$\square \psi = 0 \qquad \text{soit} \qquad p^2 + q^2 + r^2 - \left(\frac{W}{r}\right)^2 = 0.$$

Admettons en outre que ψ soit normalisé.

En appelant α l'angle de polarisation, les formules (8), (18) nous permettent de calculer les valeurs des composantes du champ. Or, ces composantes ne sont déterminées qu'à un facteur constant près que nous pouvons choisir arbitrairement, et dont nous allons profiter pour « normaliser » les valeurs des composantes du champ. Avec ce facteur k arbitraire, *les valeurs des composantes du champ électromagnétique d'un photon décrit par une fonction d'onde de la forme* (42) sont données par :

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= k\sqrt{\frac{h}{2\pi i}} \cdot \frac{pr \sin\alpha - q \dfrac{W}{c} \cos\alpha}{\sqrt{\dfrac{W}{c}(p^2 + q^2)}} \cdot \psi \\
e_2 &= k\sqrt{\frac{h}{2\pi i}} \cdot \frac{qr \sin\alpha + p \dfrac{W}{c} \cos\alpha}{\sqrt{\dfrac{W}{c}(p^2 + q^2)}} \cdot \psi \\
e_3 &= k\sqrt{\frac{h}{2\pi i}} \cdot \frac{-(p^2 + q^2) \sin\alpha}{\sqrt{\dfrac{W}{c}(p^2 + q^2)}} \cdot \psi \\
h_1 &= k\sqrt{\frac{h}{2\pi i}} \cdot \frac{pr \cos\alpha + q \dfrac{W}{c} \sin\alpha}{\sqrt{\dfrac{W}{c}(p^2 + q^2)}} \cdot \psi \\
h_2 &= k\sqrt{\frac{h}{2\pi i}} \cdot \frac{qr \cos\alpha - p \dfrac{W}{c} \sin\alpha}{\sqrt{\dfrac{W}{c}(p^2 + q^2)}} \cdot \psi \\
h_3 &= k\sqrt{\frac{h}{2\pi i}} \cdot \frac{-(p^2 + q^2) \cos\alpha}{\sqrt{\dfrac{W}{c}(p^2 + q^2)}} \cdot \psi
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

On vérifie immédiatement que

$$E = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{e}^* \mathbf{e} + \mathbf{h}^* \mathbf{h}) \, dV$$
$$= \frac{1}{8\pi} \left[kk^* \frac{h}{2\pi} \frac{W}{c} + kk^* \frac{h}{2\pi} \frac{W}{c} \right] = \frac{1}{4\pi^2} \frac{Wh}{c} kk^*$$

et si l'on prend

$$kk^* \cdot \frac{h}{4\pi^2 c} = 1, \quad \text{donc par exemple} \quad k = 2\pi \sqrt{\frac{ic}{h}}.$$

$\left(\text{de façon que } k\sqrt{\dfrac{h}{2\pi i}} = \sqrt{2\pi c}\right)$, on a

$$\boxed{E = W = h\nu} \tag{44}$$

Prenons maintenant le cas d'un photon « distribué » sur plusieurs états, c'est-à-dire représenté par une superposition d'ondes planes.

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \ldots \qquad (\text{les } \psi_r \text{ normalisés}). \tag{45}$$

Les termes rectangles donneront zéro et l'on aura

$$E = |c_1|^2 h\nu_1 + |c_2|^2 h\nu_2 + \ldots \tag{46}$$

La valeur calculée en partant du champ électromagnétique est identique à celle admise en théorie des quanta.

Le champ donné par les formules (43) satisfait aux équations de Maxwell, se transforme suivant les lois requises et *conduit à des valeurs correctes de l'énergie;* tout semble donc satisfaisant, au moins au degré d'approximation auquel nous nous sommes bornés jusqu'à présent.

Cependant une analyse plus serrée nous montrera que le traitement que nous avons appliqué présente une lacune. L'étude de cette lacune est extrêmement importante parce qu'elle nous permet d'entrevoir pour la première fois le sens dans lequel il faudrait modifier la théorie classique de la lumière pour arriver à éliminer au moins quelques uns des désaccords dont nous avons parlé au début.

Nous avons vu que l'énergie du champ, calculée par la formule (41), coïncidait, formule (46), avec celle que donne la théorie des quanta. Mais en électrodynamique et en mécanique quantique relativiste, l'élément important est non seulement la valeur moyenne mesurable de l'énergie (ou d'une autre grandeur), mais aussi *la densité* correspondante. Examinons donc l'accord entre la densité d'énergie calculée à partir du champ électromagnétique (43) et celle calculée d'après la mécanique ondulatoire.

11. Densité d'énergie. — 1. Lorsque le photon est décrit par *une seule onde plane* il est clair que, non seulement les énergies, mais aussi leurs densités *coïncident.*

2. Pour examiner le cas d'un photon décrit par un ψ du type (45), il suffit d'examiner évidemment le cas simple d'un ψ formé par la superposition de deux ondes :

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2.$$

On a dans ce cas

$$\text{densité d'énergie} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{e}^*\mathbf{e} + \mathbf{h}^*\mathbf{h}) =$$
$$= |c_1|^2 W_1 . \psi_1^*\psi_1 + |c_2|^2 W_2 . \psi_2^*\psi_2 + T, \quad (47)$$

le terme T ayant la forme indiquée plus loin.

Ecrivons les relations (43) sous la forme

$$e_r = S_r . \psi \qquad h_r = T_r . \psi,$$

S_r et T_r étant des constantes (réelles). Pour un ψ donné par

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

le champ sera

$$e_r = c_1 S_{r1}\psi_1 + c_2 S_{r2}\psi_2 \qquad h_r = c_1 T_{r1}\psi_1 + c_2 T_{r2}\psi_2$$

et la densité d'énergie s'écrira

$$\frac{1}{8\pi}\left(\sum e_r^* e_r + \sum h_r^* h_r\right) = \frac{1}{8\pi}\Big\{c_1^* c_1 \psi_1^*\psi_1\left(\sum_r S_{r1}^2 + \sum_r T_{r1}^2\right)$$
$$+ c_2^* c_2 \psi_2^*\psi_2\left(\sum_r S_{r2}^2 + \sum_r T_{r2}^2\right)$$
$$+ (c_2^* c_1 \psi_2^*\psi_1 + c_1^* c_2 \psi_1^*\psi_2)\left(\sum_r S_{r1} S_{r2} + \sum_r T_{r1} T_{r2}\right)\Big\}.$$

Le terme T est égal donc à

$$T = \frac{1}{8\pi}\left[\sum_r S_{r1} S_{r2} + \sum_r T_{r1} T_{r2}\right](c_1^* c_2 \psi_1^*\psi_2 + c_2^* c_1 \psi_2^*\psi_1) \quad (48)$$

soit

$$T = \frac{1}{8\pi} . \frac{2\pi c}{\sqrt{\frac{W_1}{c}\frac{W_2}{c}(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)}} . (c_1^* c_2 \psi_1^*\psi_2 + c_2^* c_1 \psi_2^*\psi_1) .$$
$$. \left[\left(p_1 q_1 \sin\alpha_1 - q_1 \frac{W_1}{c}\cos\alpha_1\right)\left(p_2 q_2 \sin\alpha_2 - q_2\frac{W_2}{c}\cos\alpha_2\right) + \ldots\right].$$

Dans la seconde parenthèse nous n'avons écrit que le terme qui provient de $e^*_1 e_1$; α_1 et α_2 sont les deux polarisations indéterminées, correspondant aux deux ondes planes qui définissent le photon (Voir parag. 7).

12. Densité d'énergie en mécanique ondulatoire. — Soit H l'hamiltonien qui définit le mouvement du photon (que nous pouvons supposer être celui de Dirac pour plus de généralité) et ψ sa fonction d'onde)

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} + H\psi = 0.$$

La valeur moyenne de l'énergie sera $\int \psi^* H\psi \, \mathrm{d}V$, qu'on peut écrire en tenant compte de l'équation fondamentale

$$-\frac{h}{2\pi i}\int \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t}\mathrm{d}V. \quad (49)$$

La mécanique ondulatoire définit seulement les moyennes des diverses grandeurs, mais ne précise pas les valeurs *des densités* de moyennes. On peut toujours ajouter à une densité, formée d'une certaine manière, une autre densité de moyenne nulle; l'observation atteint les moyennes et non pas les densités. Or, les ψ étant normalisés on a

$$\int \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)\,\mathrm{d}V = 0;$$

la densité de moyenne de l'énergie peut donc être aussi bien $\psi^* H\psi$ que

$$\psi^* H\psi + k . \frac{\partial(\psi^*\psi)}{\partial t} \qquad (k = \text{constante absolue}). \quad (50)$$

Quelle est la valeur correcte de la densité? Nous avons un critère sûr pour la trouver dans le cas d'un électron : cette densité, avec celles de la quantité de mouvement, doit satisfaire à certaines lois de transformation et de conservation. Il existe, en d'autres termes, un tenseur énergie — quantité de mouvement dont l'expression est connue, et qui peut donc nous donner des indications.

Considérons le cas d'un électron de Dirac de masse m, en absence de champ ; on a

$$\left.\begin{aligned}\Box\psi &= \frac{m^2c^2}{\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2}\psi\\ \Box\tilde{\psi}^* &= \frac{m^2c^2}{\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2}\tilde{\psi}^*.\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

En multipliant la première équation par $\tilde{\psi}^*\xi$, et la seconde par $\xi\,\psi$, (où ξ est un opérateur quelconque). et en retranchant, on a, après transformation

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}^*}{\partial t}\xi\psi - \tilde{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right] + \Sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}^*}{\partial x}\xi\psi - \tilde{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0. \quad (52)$$

Cette dernière égalité est valable quelle que soit la masse m donc aussi pour un photon $m = 0$; c'est une équation de continuité et l'on a pour $\xi = 1$:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}^*}{\partial t}\psi - \tilde{\psi}^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right] + \Sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}^*}{\partial x}\psi - \tilde{\psi}^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0. \quad (53)$$

Nous avons insisté ailleurs [1] sur l'importance des termes de la forme

$$\frac{\partial\tilde{\psi}^*}{\partial x_r}\xi\psi - \tilde{\psi}^*\xi\frac{\partial\psi}{\partial x_r}$$

que nous avons appelé « termes macroscopiques » ; cette importance résulte du fait qu'ils sont en rapport étroit avec les composantes du tenseur énergie-quantité de mouvement. Dans (53) nous voyons apparaître le terme

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}^*}{\partial t}\psi - \tilde{\psi}^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

qui peut s'écrire

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(\tilde{\psi}^*\psi)}{\partial t} - \frac{2}{c}\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

et qui a donc, — à un facteur près, — *la même moyenne que l'énergie* (43) ; d'autre part, ce terme joue le rôle d'une densité d'énergie dans l'équation de continuité (59). Nous pressentons donc que la densité d'énergie que nous cherchons sera de cette forme. D'autre part, la valeur qu'en donne l'expression des composantes du tenseur-énergie quantité de mouvement [2] est

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}^*}{\partial t}\psi - \tilde{\psi}^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$

c'est-à-dire la même, à un facteur près. Nous prendrons donc dans (50) la constante absolue k égale à $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i}$ et nous prendrons la densité d'énergie égale à

$$\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}^*}{\partial t}\psi - \tilde{\psi}^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \quad (54)$$

qui ne diffère des précédentes que par le facteur constant convenablement choisi.

Pour un photon décrit par :

$$\psi = a\,e^{\frac{2\pi i}{h}(px+qy+rz-Wt)} \quad (42)$$

la densité d'énergie est $W.\psi^*\psi$. Pour un autre décrit par

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2.$$

on aura :

$$\textit{densité d'énergie} = c_1^*c_1.W_1.\psi_1^*\psi_1 + c_2^*c_2.W_2.\psi_2^*\psi_2 + \frac{W_1+W_2}{2}(c_1^*c_2\psi_1^*\psi_2 + c_2^*c_1\psi_2^*\psi_1). \quad (55)$$

13. Discussion. — Comparons les formules (55) et (47). La densité d'énergie calculée à partir du champ électromagnétique est *différente* de celle calculée à partir de la fonction d'onde du photon. Leurs intégrales, c'est-à-dire les énergies sont égales ; bien plus, les densités partielles $|c_1|^2W_1\psi_1^*\psi_1$ et $|c_2|^2W_2.\psi_2^*\psi_2$ sont les mêmes dans les deux cas. Ce qui diffère ce sont seulement les densités qui proviennent des interférences entre les deux ondes planes, le terme T donné par (55) étant différent du terme simple

$$\frac{W_1+W_2}{2}(c_1^*c_2\psi_1^*\psi_2 + c_2^*c_1\psi_2^*\psi_1)$$

qu'introduit la mécanique ondulatoire, et ne pouvant se réduire à ce dernier.

Nous touchons ici la difficulté fondamentale et, croyons-nous, irréductible qui empêche une synthèse complète de l'électromagnétisme et des quanta.

Nous avons réussi à déduire de la fonction d'onde d'un photon dans l'espace de configuration, des expressions pour les composantes du champ électromagnétique. Ces composantes satisfont aux équations de Maxwell, ont les lois de transformation requises et donnent des valeurs correctes pour l'énergie ; seule, la distribution spatiale de cette dernière (et aussi naturellement des autres composantes du tenseur énergie-quantité de mouvement) n'est pas en accord avec les exigences de la théorie des quanta. Il semble difficile d'aller plus loin. A vrai dire, la théorie que nous avons développée jusqu'ici correspond seulement à l'approximation de Schrödinger, et il faudrait passer à l approximation de Dirac (ce que nous tenterons dans

[1] *Annales de Physique* ; X° série, t. 20, 1933, p. 347.

[2] Cf. par exemple l'expression donnée par L. Infeld et v. der Waerden, *Sitzungsberichte*, Berlin 1933, IX.

un article prochain); mais, même dans ce cas les conclusions précédentes ne sont pas altérées. On voit aussi que le terme T de (48) contient les angles arbitraires α_1, α_2 et on pourrait espérer les utiliser pour rétablir l'accord (ou encore, employer à cette même fin l'opérateur arbitraire qui intervient dans la définition des composantes du champ). Mais, outre que les circonstances changent à l'approximation de Dirac, il ne semble pas possible de réduire le coefficient compliqué de (48) à la valeur simple

$$\frac{W_1 + W_2}{2}.$$

Si nous analysons la manière dont nous avons pu mettre en rapport la fonction d'onde ψ, avec les composantes du champ, nous constatons que cette possibilité nous a été fournie par une *décomposition* d'un vecteur d'univers. Cette opération purement mathématique n'a rien de nécessaire *a priori*, mais le fait qu'elle nous a permis d'arriver à une solution, tient au fait qu'elle conduit à des composantes dont les lois de transformation sont les lois correctes. Cela restreint énormément le nombre des méthodes susceptibles de nous mener au même but (¹), et rend bien improbable l'existence d'un procédé, différent du précédent, qui nous permette de calculer un champ ayant toutes les propriétés énoncées plus haut et *en plus* une densité d'énergie de la forme (55). Nous avons essayé de trouver un pareil procédé, c'est-à-dire nous avons cherché à calculer les composantes du champ de diverses autres manières de façon à avoir une densité d'énergie égale à (55), mais toutes nos tentatives ont échoué. Ce fait n'a évidemment aucune valeur démonstrative, mais il est propre à renforcer notre conviction que *la théorie de la lumière et la mécanique ondulatoire du photon considéré comme une particule de masse nulle, sont très probablement inconciliables sous leur forme actuelle* (²). Cette thèse est universellement admise aujourd'hui et soutenue avec une force particulière par M. W. Pauli (*loc. cit.*). Les développements précédents la confirment, mais ne font pas que cela, sans quoi ils seraient parfaitement superflus; ils montrent quelle est l'extrême limite jusqu'à laquelle on peut pousser l'accord, et précise que ce dernier cesse d'exister au moment où l'on calcule la *densité* de l'énergie. Ce point nous semble très important pour le problème général que nous avons envisagé.

(¹) Il est relativement facile de trouver des grandeurs dérivant de ψ et satisfaisant aux équations de Maxwell; en voici un exemple. Écrivons l'équation de Dirac pour $m = 0$ sous la forme

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1\psi)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_2\psi)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha_3\psi)}{\partial z} = 0;$$

elle a la forme de la condition de Lorentz pour les potentiels. Si donc nous calculons le « champ » e_r, h_r, à partir le

$$\psi,\quad \alpha_1\psi,\quad \alpha_2\psi,\quad \alpha_3\psi$$

par les mêmes formules par lesquelles on calcule le champ électromagnétique à partir du potentiel d'univers.

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3,\quad \varphi_4$$

nous trouverons des quantités e_r, h_r, satisfaisant aux équations de Maxwell. *Mais ces grandeurs ne se transformeront pas correctement et ne conduiront pas à une valeur exacte de l'énergie.* On peut répéter ce calcul à partir de toute relation générale déduite de l'équation de Dirac, pourvu qu'elle ait la forme d'une équation de continuité.

Voir en liaison avec ceci, une note de M. L. de Broglie, *Comptes rendus*, Paris, 1933, t. **197**, p. 1377.

(*Note ajoutée à la correction.*)

(²) Au moins à l'approximation de Schrödinger, mais cette affirmation reste encore vraie à d'autres approximations.

14. Hypothèse fondamentale. — L'insuccès du grand nombre de tentatives de conciliation faites jusqu'à ce jour, qui « n'ont rien donné (¹) », peut s'interpréter de deux manières différentes. Ou bien :

a) Une telle conciliation est essentiellement, physiquement, impossible : on ne peut pas établir une mécanique des photons dans l'espace de configuration. Cette opinion semble dominer à l'heure actuelle (²), et on ne peut lui opposer qu'une vague tendance intuitive à l'unité et peut être aussi l'extraordinaire valeur heuristique (³) qu'a eue jusqu'à présent l'hypothèse des quanta de lumière. Ou bien ;

b) Cette conciliation est possible, mais on ne peut pas l'obtenir à cause de l'imperfection de la théorie *classique* du rayonnement qui n'a pas encore atteint le degré de développement de la mécanique ondulatoire. Cette solution a déjà été proposée en un certain nombre de travaux; la raison pour laquelle elle n'a pas été adoptée (⁴) réside dans le fait que les modifications de la théorie du rayonnement proposées, exigent toutes l'*abandon des équations de Maxwell.*

Les considérations développées dans les pages précédentes semblent montrer qu'il existe effectivement un lien très étroit entre la mécanique ondulatoire à l'approximation de Schrödinger et la théorie de Maxwell et que le seul élément qui s'oppose à une synthèse complète à l'approximation de Schrödinger est *la définition classique de la densité d'énergie* (et de la quantité de mouvement). Si l'on adopte la deuxième des opinions ci-dessus, il suffira, pour ramener l'accord, de modifier uniquement la définition classique du tenseur-énergie quantité de mouvement, *sans toucher en aucune façon aux équations de Maxwell.*

Nous sommes donc tentés d'introduire une *hypothèse* nouvelle et dire que : *la théorie classique du rayonnement ne représente qu'une première approximation : la théorie correcte garde les mêmes équations fondamentales et diffère seulement par l'adoption d'une nouvelle expression pour la densité d'énergie : elle remplace l'expression (47) par (54) ou toute autre expression équivalente.*

Si l'on veut passer ensuite à la théorie quantique du rayonnement (à l'approximation de Dirac) il faudra

(¹) P. Ehrenfest, *loc. cit.*
(²) W. Pauli. *Handbuch der Physik*, 1933, XXIV, 1.
(³) P. Ehrenfest, *loc. cit.*
(⁴) Cf. Pauli, *Z. Physik.*, 1933, **80**, note en bas de la page 579.

prendre comme point de départ cette théorie classique modifiée (1).

15. Contrôle expérimental et analogies. — La modification proposée sépare donc nettement le phénomène de la propagation *d'une onde* harmonique plane, du phénomène de propagation d'un *paquet d'ondes.* Pour le premier, on peut calculer la densité d'énergie indifféremment par le procédé classique ou par le procédé quantique; pour le second, seule cette dernière méthode est applicable.

Il semble que cette hypothèse puisse être assez facilement soumise au contrôle direct de l'expérience. Remarquons que la validité de la relation

densité d'énergie proportionnelle à $(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)$

a été vérifiée dans le cas des champs statiques (qui ne peuvent servir ici) ou dans le cas d'une onde lumineuse harmonique simple; on a admis ensuite que cette expression *continuerait à être valable* pour le cas d'une superposition d'ondes planes, mais il n'y a pas — à notre connaissance — de preuve expérimentale *directe* de ce fait. Dans le cas d'une onde plane les deux expressions (47) et (54) donnent *le même résultat* (44); la différence n'apparaît que lorsque le ψ correspondant est de la forme (45). *Toutes les expériences qui font intervenir les composantes du tenseur énergie-quantité de mouvement pourraient servir à trancher la question.* Malheureusement, les expériences existantes sur la pression de radiation sont inutilisables parce qu'on n'y décèle qu'une moyenne et non les pulsations de la densité d'énergie, les seules qui nous intéressent dans ce cas.

La théorie de Maxwell avec cette nouvelle définition de la densité d'énergie représenterait donc une théorie plus précise que l'ancienne. La théorie de Maxwell ne serait qu'une première approximation applicable au cas d'un rayonnement *composé d'une seule onde plane*, ou d'une superposition de pareilles ondes ayant des fréquences et des directions infiniment voisines, en d'autres termes, applicable seulement à un *faisceau infinitésimal.* Lorsqu'on passe à un rayonnement formé par la superposition d'ondes planes qui ne sont plus infiniment voisines, la théorie devrait être modifiée dans le sens indiqué. Il est curieux de comparer ce passage au passage bien connu de la mécanique de Hamilton à la mécanique ondulatoire de Schrödinger.

En théorie de Maxwell, l'énergie est donnée à un facteur près par l'intégrale d'une somme de carrés des fonctions qui représentent le champ électromagnétique

(1) Au sujet de l'abandon de la formule (47) voir une série de notes récentes de M. Born, *Nature*, 1933, **132**, 282 et 1934, **133**, 63, Born et Infeld, *Nature*, 1933, **132**, 970 et 1933, **132**, 1004, ainsi qu'une note de M. L. de Broglie, *Comptes Rendus*, 1933, **197**, 1377.

$$\int (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)\,\mathrm{d}V. \quad (56)$$

Dans la nouvelle théorie cette même énergie est

$$\int \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi . \mathrm{d}V; \quad (57)$$

sous le signe $\int$ il n'y a plus de somme de carrés. Considérons cependant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ dont (57) est la moyenne; d'après (6) on a

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{c}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2).$$

Donc, la densité d'énergie elle-même n'est plus une somme de carrés, mais c'est *l'opérateur correspondant qui se présente sous cette forme.* Ce fait rappelle une autre circonstance analogue: en théorie de Hamilton l'énergie cinétique est une somme de carrés

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2.$$

mais cette propriété ne subsiste plus lorsqu'on passe à l'approximation supérieure c'est-à-dire à la mécanique ondulatoire de Schrödinger. Dans celle-ci *c'est l'opérateur correspondant qui est une somme de carrés*:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Il y a là une analogie formelle qui n'a peut-être pas grande importance, mais qu'il était intéressant de signaler.

Quoi qu'il en soit, la modification proposée de la théorie de Maxwell n'est pas aussi radicale que celles qui ont été mises en avant jusqu'ici; elle n'élimine pas, en effet, les équations fondamentales; néanmoins, à la supposer correcte, elle doit avoir une grande influence sur les résultats finaux, parce que toutes les théories quantiques où intervient le rayonnement utilisent sans exception l'ancienne définition de la densité d'énergie. Elle nous montre enfin, *ce qu'on peut raisonnablement modifier des théories actuelles pour pouvoir espérer éliminer les difficultés auxquelles nous avons fait allusion au début de cet article.*

Il faut donc reprendre ces théories avec la nouvelle hypothèse, et voir quels en sont les avantages et aussi les inconvénients; pour cela, il est cependant nécessaire de passer de l'approximation de Schrödinger à celle de Dirac : ce sera l'objet d'un prochain article.

En terminant, je tiens à remercier M. le professeur E. Schrödinger pour l'amabilité avec laquelle il m'a accueilli dans son séminaire de l'Université de Berlin, ainsi que les collègues que j'y ai rencontrés, et qui ont bien voulu m'honorer de leur amitié.

Manuscrit reçu le 10 décembre 1933.

ONDES ET PHOTONS

II. APPROXIMATION DE PAULI

Par Al. PROCA.
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur examine la première approximation d'une mécanique quantique des photons dans l'espace de configuration, fondée sur les principes indiqués dans un précédent article (*Journal de Physique*, 1934, t. **5**, p. 6).

L'approximation consiste à décrire le photon par une fonction d'onde à deux composantes seulement. On obtient l'expression des composantes du champ électromagnétique, qui satisfont aux équations de Maxwell et se transforment correctement. On trouve qu'un photon d'énergie et de quantité de mouvement bien définies correspond à une *lumière polarisée circulairement* dans un sens déterminé.

Pour le problème général de la signification des *énergies négatives*, ces résultats conduisent à l'interprétation suivante, à vérifier :

L'énergie d'une particule est par essence une quantité positive; son signe n'indique que le sens de rotation, droit ou gauche, de certains champs attachés à la particule, et qui se confondent avec le champ électromagnétique de Maxwell si la particule est un corpuscule de lumière.

1. Introduction. — Dans un précédent article [1] nous avons tenté une synthèse entre la théorie quantique d'une particule de charge et de masse nulles et la théorie électromagnétique de Maxwell. Nous avons vu qu'étant donnée la fonction d'onde de de Broglie ψ de la particule dans l'espace de configuration, il était possible de trouver certaines fonctions **e**, **h**, qu'on pouvait regarder comme le champ électromagnétique accompagnant le photon, parce qu'elles satisfaisaient aux équations de Maxwell, se transformaient correctement et conduisaient à la valeur exacte de l'énergie.

Nous nous sommes cependant bornés à l'approximation de Schrödinger, c'est-à-dire que nous avons supposé le photon décrit par l'équation simple

$$\Box \psi = 0. \tag{1}$$

La théorie qui en résulte n'est pas satisfaisante, pour les mêmes raisons qui font qu'il n'est pas possible d'établir une mécanique relativiste de l'électron en partant d'une équation du second ordre.

Il est même difficile de regarder cette théorie comme une véritable première approximation ; en effet, la mécanique de Schrödinger (dont la précédente n'est qu'un cas particulier pour $m = 0$), n'est applicable qu'aux particules de vitesse réduite, condition que ne remplissent certainement pas les photons.

Avant de passer à la théorie exacte, nous allons examiner un autre traitement, qui constitue cette fois-ci effectivement une première approximation et que nous appellerons « *approximation de Pauli* », parce qu'il n'introduit que deux fonctions d'ondes pour décrire la particule, au lieu des quatre qu'exigerait la théorie de Dirac.

Considérons un électron de Dirac, en absence de champ ; son mouvement est gouverné par les quatre équations suivantes que nous écrirons en employant le symbolisme des spineurs [1] :

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i}\,\partial^{\dot\sigma}{}_{l}\psi_{\dot\sigma} - mc\chi_{l} &= 0 \\ \frac{h}{2\pi i}\,\partial_{\dot s}{}^{\lambda}\chi_{\lambda} - mc\psi_{\dot s} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si ces équations sont exactes pour une particule quelconque, il faudrait, pour pouvoir assimiler cette dernière à un photon, admettre d'abord que sa charge et sa masse soient nulles ; on aurait donc simplement

$$\partial^{\dot\sigma}{}_{l}\,\psi_{\dot\sigma} = 0 \qquad\qquad \partial_{\dot s}{}^{\lambda}\chi_{\lambda} = 0. \tag{3}$$

Ensuite, il faudrait s'arranger pour le spin de la particule que nous assimilons à un photon soit nul ou égal à $h/2\pi$. Nous discuterons en détail cette question du spin dans un article prochain, consacré à l'étude de l'approximation de Dirac. Nous verrons cependant plus loin qu'à l'approximation de Pauli, traitée ici, le spin du photon est nul, en vertu de la manière même dont on choisit cette approximation. La difficulté est ainsi éludée; nous la retrouverons entière dans la théorie exacte.

2. Décomposition fondamentale. — L'idée fondamentale que nous avons utilisée dans nos précédentes

(1) *Journal de Physique*, 1934, t. **5**, p. 6. Nous désignerons cet article par I; voir aussi *Comptes rendus*, 1933, t. **197**, p. 1725 et 1934, t. **198**, p. 54.

(1) Cf. p. ex. Laporte et Uhlenbeck, *Physical Review*, 1930, **37**, p. 1380.

ublications est la suivante. L'impossibilité de réaliser la synthèse entre la théorie de Maxwell et la théorie le Dirac, vient du fait que la première peut être développée sans faire aucunement appel à des spineurs, andis qu'il n'en est pas de même pour la seconde. Si onc nous voulons relier d'une façon ou d'une autre les pineurs qui définissent le mouvement d'un photon ux composantes du champ électromagnétique **e**, **h**, il audra nécessairement utiliser d'autres *spineurs* qui, ombinés avec les premiers, fourniront des grandeurs e transformant comme **e** et **h**. Cette seconde catégorie le spineurs, nous la trouverons en décomposant le vecteur d'univers

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{4}$$

Tout comme la théorie de Dirac, basée sur la décomposition d'un scalaire, celle qui suit est fondée sur la écomposition du vecteur (4). La théorie de Dirac nous onne l'exemple d'une décomposition de ce genre : les omposantes du courant

$$= \tilde{\psi}^* \alpha_1 \psi, \quad j_2 = \tilde{\psi}^* \alpha_2 \psi, \quad j_3 = \tilde{\psi}^* \alpha_3 \psi, \quad j_4 = \psi^* \psi \tag{5}$$

e présentent comme des fonctions quadratiques des ψ; s formules (5) réalisent une certaine « décomposition » du vecteur j_r. Il s'agit de trouver une décomposition analogue pour le cas du vecteur (4).

Nous traiterons le problème général dans un prohain article. Pour l'instant, nous remarquerons qu'ici problème semble se simplifier du fait que, m étant ul, on a toujours, quel que soit ψ_s ou χ_λ :

$$\square \psi_s = \square \chi_\lambda = 0$$

oit

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \Psi = 0. \tag{6}$$

Nous admettons en outre que les opérateurs en lesuels on décompose le vecteur (4) doivent tous être ommutables entre eux et avec les composantes (4).

Comme dans I, nous devons d'abord obtenir de tels pérateurs et les utiliser pour former de nouvelles nctions qui décrivent le champ; nous aurons ensuite prouver que ces fonctions jouissent bien des proriétés que nous leur avons supposées.

3. Théorie à deux composantes. — Considérons abord un vecteur d'univers A^r ($r = 1, 2, 3, 4$) réel, rdinaire (c'est-à-dire qui ne soit pas nécessairement n opérateur) et satisfaisant de plus à la condition

$$(A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 - (A^4)^2 = 0. \tag{7}$$

Soit $a_{\dot\varrho\sigma}$ le spineur qui lui est attaché comme d'habiude, au moyen des formules

$$\left.\begin{aligned} A^1 + iA^2 &= a_{\dot 2 1} \\ A^1 - iA^2 &= a_{\dot 1 2} \\ A^4 + A^3 &= a_{\dot 1 1} \\ A^4 - A^3 &= a_{\dot 2 2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Les $a_{\dot 1 2}$ et $a_{\dot 2 1}$ sont imaginaires conjuguées; $a_{\dot 1 1}$ $a_{\dot 2 2}$ sont réels.

La décomposition la plus simple et la plus immédiate de ce spineur $a_{\dot\varrho\sigma}$ s'obtient évidemment au moyen d'un seul *spineur* inconnu u_s, donc de deux fonctions u_1 et u_2. Elle consiste à poser

$$a_{\dot\varrho\sigma} = u_{\dot\varrho} u_\sigma. \tag{9}$$

Cela exige cependant que

$$-a_{\dot 1 1} a_{\dot 2 2} + a_{\dot 1 2} a_{\dot 2 1} = -u_{\dot 1} u_1 u_{\dot 2} u_2 + u_{\dot 1} u_2 u_{\dot 2} u_1 \equiv 0 \tag{10}$$

soit

$$(A^1 + iA^2)(A^1 - iA^2) - (A^4 + A^3)(A^4 - A^3) = 0$$

qui n'est autre que la condition (7); c'est cette condition qui nous permet la décomposition simple (9).

Un seul spineur u_s signifie quatre composantes réelles; or, on ne se donne que trois quantités indépendantes (à cause de (7)); nos formules finales comporteront donc une arbitraire. Posons alors, pour avoir des formules symétriques

$$u_1 = \rho\, e^{i\alpha} \qquad u_2 = \sigma\, e^{i\beta}$$

donc

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 = A^4 + A^3 \qquad \sigma^2 = A^4 - A^3 \\ \rho\sigma\, e^{i(\alpha-\beta)} = A^1 + iA^2, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ce qui impose

$$\boxed{A^4 > A^3} \tag{11'}$$

condition assurée si tous les A^r sont positifs.

Posons $\varphi = \alpha - \beta$; on a

$$\rho = +\sqrt{A^4 + A^3} \qquad \sigma = +\sqrt{A^4 - A^3}$$

$$e^{i\frac{\varphi}{2}} = \pm\sqrt{\frac{A^1 + iA^2}{\rho\sigma}}.$$

Appelons ε un angle arbitraire et écrivons

$$u_1 = \rho\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\varepsilon\right)} \qquad u_2 = \sigma\, e^{i\left(-\frac{\varphi}{2}+\varepsilon\right)}. \tag{12}$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{A^1 + iA^2}\,\sqrt[4]{\frac{A^4 + A^3}{A^4 - A^3}}.\,e^{i\varepsilon} \\ u_2 &= \sqrt{A^1 - iA^2}\,\sqrt[4]{\frac{A^4 - A^3}{A^4 + A^3}}.\,e^{i\varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Nous avons fait entrer le double signe devant le radical dans l'arbitraire $e^{i\varepsilon}$. Remarquons encore que ces formules ne sont valables que si (11′) est satisfaite, ce qui est d'une importance capitale; nous reviendrons au paragraphe 7 sur ce point.

Cela étant, prenons

$$A^1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad A^2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad A^3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad A^4 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{14}$$

et faisons en outre le changement de variables

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = x + iy & \zeta = \quad z - ct \\ \eta = x - iy & c\tau = - z - ct. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Nous aurons finalement

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \sqrt{2}.\sqrt{\dfrac{\partial}{\partial\eta}}\,\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{\partial}{\partial\zeta}}}{\sqrt[4]{\dfrac{\partial}{c\,\partial\tau}}}.\mathbf{e}^{i\iota} \\ u_2 = \sqrt{2}.\sqrt{\dfrac{\partial}{\partial\xi}}\,\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{\partial}{c\,\partial\tau}}}{\sqrt[4]{\dfrac{\partial}{\partial\zeta}}}.\mathbf{e}^{i\iota} \end{array}\right\} \quad (16)$$

Nous attribuerons aux symboles $\sqrt{\dfrac{\partial}{\partial\xi}}$, ... le même sens (dérivées d'ordre fractionnaire) que nous avons introduit dans I.

4. **Application.** — Considérons une onde plane de la forme

$$\psi_\sigma = a_\sigma\, \mathbf{e}^{i(px+qy+rz-Wt)} \quad (17)$$

avec la condition $W > 0$, sans laquelle les formules (**13**) ne seraient plus applicables.

On peut écrire :

$$\psi_\sigma = a_\sigma \,\mathbf{exp}\left[\frac{(p-iq)}{2}\,\xi + \frac{(p+iq)}{2}\,\eta + \frac{\left(\dfrac{W}{c}+r\right)}{2}\,\zeta + \frac{\left(\dfrac{W}{c}-r\right)}{2}.c\tau\right]. \quad (18)$$

On a alors

$$\left.\begin{array}{l} u_1\psi = \sqrt{ip-q}\,\sqrt[4]{\dfrac{\dfrac{W}{c}+r}{\dfrac{W}{c}-r}}.(\mathbf{e}^{i\iota}\psi) \\ u_2\psi = \sqrt{ip+q}\,\sqrt[4]{\dfrac{\dfrac{W}{c}-r}{\dfrac{W}{c}+r}}.(\mathbf{e}^{i\iota}\psi) \end{array}\right\} \quad (19)$$

en choisissant la même détermination pour $\sqrt[4]{i}$. Quant à l'opérateur $\mathbf{e}^{i\iota}$ on peut lui appliquer tout ce que nous avons dit dans I (Paragraphe 7), sauf ce qui concerne son interprétation physique.

5. **Expression des composantes du champ.** — Considérons maintenant une particule de charge et de masse au repos nulles; une telle particule sera décrite en mécanique quantique, par les équations déjà mentionnées

$$\partial^{\dot{\tau}}{}_{\iota}\psi_{\dot{\sigma}} = 0 \qquad \partial_{\dot{s}}{}^{\lambda}\chi_{\lambda} = 0. \quad (3)$$

Si cette particule est assimilable à un photon, quelles seront les valeurs du champ électromagnétique de la lumière correspondante? D'après le procédé utilisé dans I, nous devons obtenir ces valeurs en combinant convenablement les composantes u_s, fournies par la décomposition du vecteur $\dfrac{\partial}{\partial x_r}$, et les spineurs $\psi_{\dot{\sigma}}, \chi^{\lambda}$, qui décrivent le corpuscule de lumière dans l'espace de configuration.

Il suffira de trouver un spineur symétrique du second rang, de la forme $g_{\dot{r}\dot{s}}$; les valeurs des composantes du champ s'en déduiront par les formules indiquées par Uhlenbeck et Laporte (*loc. cit.* et aussi *Comptes rendus*, 1934, t. **198**, p. 452).

Or, la manière la plus simple de former un pareil spineur du second ordre, consiste évidemment à prendre χ_λ identiquement nul

$$\chi_\lambda \equiv 0 \quad (20)$$

et à utiliser $\psi_{\dot{\sigma}}$ pour former

$$g_{\dot{r}\dot{s}} = \frac{1}{2}\left(u_{\dot{r}}\psi_{\dot{s}} + u_{\dot{s}}\psi_{\dot{r}}\right). \quad (21)$$

Ce $g_{\dot{r}\dot{s}}$ (donc *le champ électromagnétique correspondant*) *satisfait aux équations de Maxwell si $\psi_{\dot{\sigma}}$ satisfait à celles de Dirac*. En effet, les équations de Maxwell s'écrivent (Cf. Laporte et Uhlenbeck, *loc. cit.*)

$$\partial^{\dot{r}}{}_{\iota}\, g_{\dot{r}\dot{s}} = 0$$

et l'on a, à cause de la commutabilité des $u_{\dot{\rho}}$,

$$\begin{aligned} \partial^{\dot{r}}{}_{\iota}\, g_{\dot{r}\dot{s}} &= \frac{1}{2}\, u^{\dot{r}} u_{\iota}(u_{\dot{r}}\psi_{\dot{s}} + u_{\dot{s}}\psi_{\dot{r}}) \\ &= \frac{1}{2}\, u_{\iota}\left(u^{\dot{r}} u_{\dot{r}}\right)\psi_{\dot{s}} + \frac{1}{2}\, u_{\dot{s}}\,\partial^{\dot{r}}{}_{\iota}\psi_{\dot{r}} = 0, \end{aligned}$$

le second terme étant nul en vertu de l'équation de Dirac (3) et le premier à cause de l'identité fondamentale du calcul des spineurs

$$u^{\dot{r}} u_{\dot{r}} = 0.$$

Cela nous conduit donc à définir un photon par les équations quantiques (20) et (3), photon dont le champ électromagnétique est (21) ou, mieux, à dire que le champ n'est défini que par les *deux* composantes $\psi_{\dot{1}}, \psi_{\dot{2}}$, satisfaisant au système unique $\partial^{\dot{\tau}}{}_{\iota}\psi_{\dot{\sigma}} = 0$.

Ecrivons d'une façon explicite ce champ. On a en général les relations suivantes entre $g_{\dot{r}\dot{s}}$ et le champ :

$$\left.\begin{array}{ll} g_{\dot{1}\dot{1}} = 2(K_2 + iK_1) & g_{\dot{2}\dot{2}} = 2(K_2 - iK_1) \\ \multicolumn{2}{c}{g_{\dot{1}\dot{2}} = g_{\dot{2}\dot{1}} = -2iK_3} \end{array}\right\} \quad (22)$$

où

$$K_r = h_r - ie_r. \quad (22')$$

On a donc simplement

$$\left.\begin{array}{l} e_1 - ih_1 = \frac{1}{4}(g_{11} - g_{22}) \qquad h_2 + ie_2 = \frac{1}{4}(g_{11} + g_{22}) \\ \qquad e_3 - ih_3 = \frac{1}{4}(-2g_{12}) \end{array}\right\} \quad (23)$$

et il suffira de prendre les parties réelles et imaginaires des seconds membres pour avoir les valeurs (réelles) des composantes du champ électromagnétique. Etant donné que

$$g_{11} = u_1\psi_1 \qquad 2g_{12} = u_1\psi_2 + u_2\psi_1 \qquad g_{22} = u_2\psi_2$$

on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} e_1 - ih_1 = \frac{1}{4}(u_1\psi_1 - u_2\psi_2) \quad h_2 + ie_2 = \frac{1}{4}(u_1\psi_1 + u_2\psi_2) \\ \qquad e_3 - ih_3 = \frac{1}{4}(-u_1\psi_2 - u_2\psi_1). \end{array}\right\} (23')$$

On voit qu'en vertu de (20) le *spin* du photon, défini comme en mécanique quantique par

$$m_{rs} = \psi_r \chi_s + \psi_s \chi_r$$

est nul : la lumière est dépourvue de spin à l'approximation de Pauli.

6. **Polarisation**. — Si la lumière n'a pas de *spin* elle possède par contre une *polarisation*. Pendant un certain temps, on a cherché à mettre en parallèle le *spin* des particules et la polarisation des ondes électromagnétiques et à réaliser des expériences sur le spin des électrons qui soient l'analogue des expériences de polarisation lumineuse. Du point de vue auquel nous nous plaçons ici, cette manière de faire apparaît comme une erreur. La présente théorie sépare nettement la notion de spin et celle de polarisation et explique l'insuccès des tentatives expérimentales mentionnées ; elle suggère une autre direction dans laquelle ces dernières devraient s'engager.

Considérons un photon d'énergie et de quantité de mouvement bien déterminées ; il sera représenté par une onde plane et nous ne diminuerons en rien la généralité en supposant que celle-ci se propage le long de l'axe Ox. La fonction d'onde du photon sera

$$\psi_\tau = A_\tau \, e^{i(px - Wt)}.$$

On doit avoir $\left(\frac{W}{c}\right)^2 = p^2$ et les A_τ doivent satisfaire aux équations de Dirac qui s'écrivent ici

$$pA_1 = \frac{W}{c} A_2 \qquad \frac{W}{c} A_1 = pA_2.$$

Puisque $W > 0$, on doit prendre

$$\frac{W}{c} = +\sqrt{p^2} = p, \qquad (25)$$

donc $A_1 = A_2$; A_1 reste arbitraire. Posons $A_1 = \rho\, e^{i\alpha}$.

Cela étant, calculons les champs au moyen des formules (23') et (19) en admettant, comme dans I, que ε désigne l'opérateur « multiplication par un nombre ε ». On a facilement

$$\left.\begin{array}{l} e_1 - ih_1 = 0 \\ h_2 + ie_2 = \frac{\sqrt{p}}{2} A_1 \, e^{i(px - Wt + \varepsilon + \pi/4)} \\ e_3 - ih_3 = -\frac{\sqrt{p}}{2} A_1 \, e^{i(px - Wt + \varepsilon + \pi/4)} \end{array}\right\} \quad (26)$$

soit avec :

$$A_1 = \rho\, e^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad \omega = \varepsilon + \pi/4 + \alpha \qquad (27)$$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = 0 \\ e_2 = \frac{\sqrt{p}}{2} \rho \sin(px - Wt + \omega) \\ e_3 = -\frac{\sqrt{p}}{2} \rho \cos(px - Wt + \omega) \\ h_1 = 0 \\ h_2 = \frac{\sqrt{p}}{2} \rho \cos(px - Wt + \omega) \\ h_3 = \frac{\sqrt{p}}{2} \rho \sin(px - Wt + \omega). \end{array}\right\} \quad (28)$$

On voit qu'à l'encontre de l'angle arbitraire α qui s'introduit à l'approximation de Schrödinger et qu'on devait interpréter comme un angle de polarisation, l'angle ε n'a aucune influence sur la valeur des composantes des champs. L'arbitraire ε qui provient des opérateurs u_ξ se fond dans celui qui a pour origine le fait que les ψ_τ ne sont déterminés par les équations de Dirac qu'à un facteur de phase près. Cela fait que la lumière correspondant à un photon déterminé a une polarisation définie et nullement arbitraire.

Les formules (28) montrent qu'un photon décrit par

$$\psi_\tau = A_\tau \, e^{i(px - Wt)} \qquad W > 0$$

correspond à une lumière se propageant dans la même direction que le photon, à savoir Ox, et ayant une *polarisation circulaire* droite.

Les composantes des champs ne sont déterminées qu'à un facteur près, dont le module peut être fixé par la condition que l'énergie du champ lumineux soit égale à celle du photon ; il reste encore un facteur de phase qui, lui, est arbitraire.

7. **Problème des énergies négatives**. — Un photon d'énergie positive représente donc une lumière polarisée circulairement dans un sens bien déterminé ;

ce résultat est établi d'une façon certaine à l'approximation de Pauli et il subsiste également dans la théorie exacte. Il est naturel alors de penser que, probablement, *un photon d'énergie négative représentera une lumière polarisée circulairement en sens inverse*.

Nous verrons dans la théorie exacte qu'il en est effectivement ainsi; mais les développements précédents ne nous permettent pas de vérifier l'exactitude de cette suggestion; *l'approximation de Pauli ne suffit pas pour cela*.

En effet, nous n'avons pas le droit de conclure à partir du paragraphe précédent que, si un photon d'énergie positive représente une lumière polarisée circulairement dans un certain sens, un photon d'énergie négative représentera une lumière polarisée en sens contraire. La décomposition (13) ne serait plus valable dans le cas où

$$\psi_\sigma = a_\sigma \, e^{i(px+qy+rz+Wt)} \qquad W > 0 \qquad (29)$$

parce que nous tomberions sur le cas

$$A^4 - A^3 < 0 \qquad (30)$$

que nous avons expressément éliminé; la dernière des équations (8) conduirait à une impossibilité.

Nous pouvons évidemment, dans le cas $A^4 - A^3 < 0$, obtenir une autre décomposition en changeant le signe des seconds membres des deux dernières équations (8). Les formules obtenues, qui sont différentes des précédentes, s'appliqueront alors exclusivement aux particules du type (29) à énergie négative, auxquelles correspondraient des champs tournant en sens inverse des précédents.

En résumé, les calculs que nous avons développés ne sont applicables que pour les énergies comprises entre 0 et $+\infty$; des formules analogues, mais non identiques, permettent d'examiner le domaine de 0 à $-\infty$, mais il n'est pas possible, à *l'approximation de Pauli*, de donner des formules uniques pour tout l'intervalle $-\infty$, $+\infty$.

Cela montre en quel sens la théorie précédente est une approximation et les conditions dans lesquelles elle est applicable. Cela prouve aussi le fait connu [1] qu'une théorie relativiste à deux composantes n'est pas réalisable. Il faut donc passer à l'approximation de Dirac, ce que nous ferons dans l'article suivant.

[1] W. Pauli, *Handbuch der Physik*, 1933, t. XXIV-I, p. 226.

Les résultats précédents suggèrent une nouvelle ligne d'attaque du problème des énergies négatives d'une particule quelconque, photon ou électron. Dans toute théorie comme celle-ci, basée sur les équations de Dirac, il semble qu'on doive se heurter inévitablement à un certain moment à une difficulté insurmontable, constituée par l'apparition des énergies négatives. Or, pour le cas du photon, cette circonstance, loin de constituer une difficulté, est au contraire un élément indispensable à toute théorie correcte; en effet, il est indispensable d'avoir des champs tournant dans les deux sens pour pouvoir réaliser une lumière polarisée linéairement. D'autre part, on sait que dans la théorie de l'électron de Dirac, on ne peut également pas se passer de la considération des énergies négatives. En aucun cas, nous ne pouvons les éliminer; nous sommes donc obligés de les interpréter.

Or, les développements précédents nous suggèrent l'interprétation suivante :

La notion intuitive que nous avons de l'énergie d'une particule quelconque ne nous permet pas d'attribuer un signe au nombre qui la mesure; *l'énergie* ne peut être pour nous, au moins avec nos habitudes d'esprit actuelles, qu'une *quantité essentiellement positive*, égale à la valeur absolue $|W|$ de ce nombre. Nous pouvons cependant attribuer une signification intuitive aux signes + et — dont est affecté ce nombre : *ces signes indiquent simplement le sens de rotation droit ou gauche de certains champs attachés à la particule*. Si la particule est un photon, ce champ sera le champ électromagnétique de la lumière; un photon d'énergie positive représentera une lumière polarisée circulairement à droite et un photon d'énergie négative une lumière polarisée à gauche. Si la particule est un électron, nous devons chercher quels sont les champs qui jouent ce rôle et qui permettent ainsi une interprétation des énergies négatives: les considérations précédentes montrent leur importance et laissent prévoir que la comparaison avec la théorie des trous de Dirac pourrait être très fructueuse.

Manuscrit reçu le 15 janvier 1934.

ONDES ET PHOTONS

III. APPROXIMATION DE DIRAC

Par Al. PROCA.

Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur développe sous sa forme exacte la théorie de la lumière, amorcée dans deux articles précédents (*J. Phys.*, 1934, t. 5, p. 6 et 1934, t. 5, p. 122). Il montre qu'étant donnée une *onde de lumière* quelconque, on peut toujours lui associer un *corpuscule* ayant une loi de mouvement déterminée et dont l'état est fixé par la structure de l'onde. La masse au repos de ce corpuscule est nulle et ses fonctions d'onde satisfont aux équations relativistes de Dirac pour ce cas particulier. Ce corpuscule diffère donc du photon expérimental par la valeur de son spin, qui est $h/4\pi$; c'est donc, d'après M. L. de Broglie, un *neutrino*.

La correspondance entre le champ électromagnétique de l'onde et les fonctions d'onde du neutrino, s'obtient en faisant usage de l'opérateur *demi-gradient*, dont il a été question dans les articles cités. L'auteur en donne l'expression exacte. Il étudie ensuite la manière dont les caractéristiques de la lumière influent sur les états du corpuscule associé. On constate que si le corpuscule se trouve dans un état bien déterminé d'énergie W et de quantité de mouvement p, q, r, l'onde lumineuse correspondante est polarisée circulairement dans un sens bien déterminé. Si le corpuscule se trouve dans le même état p, q, r, mais avec *l'énergie négative* — W, l'onde lumineuse sera polarisée circulairement, comme précédemment, mais dans le *sens opposé. Le signe de l'énergie du corpuscule indique le sens de rotation de la lumière correspondante*, ce qui permet une interprétation intuitive des états d'énergie négative d'un corpuscule non chargé du type précédent.

PREMIÈRE PARTIE

1. Introduction. — Nous avons examiné jusqu'à présent deux formes approximatives d'une mécanique quantique des photons.

Nous considérons le mouvement d'un photon comme décrit en mécanique ondulatoire par l'équation fondamentale d'une particule de masse et de charge nulles et en absence de tout champ extérieur. Le problème consiste à calculer à partir de la fonction d'onde ψ de ce corpuscule, les champs électromagnétiques de la lumière qu'il est censé représenter. Avec cette hypothèse de départ, le calcul exact doit se faire en partant des équations de Dirac pour $m = 0$.

Ces équations que nous écrirons

$$\partial_{l}^{\;\dot{\sigma}} \psi_{\dot{\sigma}} = 0, \qquad \partial_{\dot{m}}^{\;\lambda} \chi_{\lambda} = 0 \tag{1}$$

en employant la notation des spineurs (¹), nous fourniront deux spineurs $\psi_{\dot{\sigma}}$ et χ_{λ}. Dans la théorie que nous développons le champ électromagnétique est un champ *du type* ψ : il se déduit de $\psi_{\dot{\sigma}}$, χ_{λ} par l'application d'opérateurs convenables. Or, étant donné le caractère de variance de $\psi_{\dot{\sigma}}$, χ_{λ}, il faut, pour parvenir à des grandeurs se transformant comme les composantes d'un champ électromagnétique, que ces opérateurs soient également des spineurs. Le principe fondamental employé pour trouver ces spineurs est la « décomposition » convenable du vecteur gradient

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{1'}$$

c'est-à-dire l'obtention de certains opérateurs se transformant comme des spineurs et tels que les composantes de (1') soient des fonctions quadratiques convenables de ces opérateurs.

Avant tout, nous devons donc réaliser d'une façon tout à fait générale une pareille décomposition.

2. Décomposition générale du vecteur gradient. — Dans un précédent article (*J. Phys.* 1934, **5**, p. 121) que nous désignerons dorénavant par *Ondes et photons II*, nous avons réalisé cette décomposition au moyen *d'un seul* spineur $u_{\dot{\tau}}$; nous avons vu que cette solution ne pouvait être générale, résultat qu'on pouvait d'ailleurs prévoir. Il faut donc essayer d'obtenir cette décomposition au moyen de *deux spineurs* a_r, b_s de composantes

$$a_1, a_2 \qquad \text{et} \qquad b_1, b_2.$$

La théorie de Dirac nous permet d'écrire immédiate-

(¹) Pour tout ce qui concerne le calcul des spineurs on peut consulter l'article de D. Laporte et G. E. Uhlenbeck publié dans *Physical Review* 1931, **37**, p. 1380; pour faciliter la tâche du lecteur nous avons gardé les notations employées par ces auteurs. Voir aussi B. L. van der Waerden, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1929, ainsi que l'ouvrage intitulé : *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Springer 1932; L. Infeld et B. L. van der Waerden, Die Wellengleichung des Electrons in der allgemeinen Relativitätstheorie *Sitzb. Berlin 1933*; G. Mie, *Ann. der Physik*, 1933, 17, p. 465; en français on peut consulter un article de J. Solomon, *J. de Phys.*, 1931, t. 2, p. 321.

ment les équations qui définissent cette décomposition. En effet, soit ψ une fonction d'onde de Dirac, représentant comme à l'ordinaire l'ensemble des deux spineurs; on sait, qu'avec ψ on peut former 16 covariants quadratiques de la forme $\tilde{\psi}^*\xi\psi$, où ξ est un des 16 produits indépendants formés avec les $\alpha_r (r = 1, 2, 3, 4)$. Parmi ces 16 opérateurs il y a deux groupes de quatre se transformant comme un vecteur d'univers, à savoir : le courant

$$j_1 = \tilde{\psi}^*\alpha_1\psi, \quad j_2 = \tilde{\psi}^*\alpha_2\psi, \quad j_3 = \tilde{\psi}^*\alpha_3\psi, \quad j_0 = -\tilde{\psi}^*\psi \quad (2)$$

et ce qu'on peut appeler le « spin »

$$S_1 = \tilde{\psi}^* i\alpha_2\alpha_3\psi, \qquad S_2 = \tilde{\psi}^* i\alpha_3\alpha_1\psi,$$
$$S_3 = \tilde{\psi}^* i\alpha_1\alpha_2\psi, \qquad S_0 = -\tilde{\psi}^* i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi. \quad (3)$$

Il semble donc qu'on puisse relier de deux manières différentes les composantes d'un vecteur d'univers et les deux spineurs qui le « décomposent » : on peut se donner soit les j_r soit les S_r, et calculer ψ. Or, il est facile de voir qu'il n'en est rien et qu'une seule de ces manières de procéder est acceptable.

Pour cela il faut considérer le cas général d'une particule matérielle (¹) de masse m.

Dans ce cas on a :

$$\Box\psi = -\frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2}\psi,$$

ce qui signifie en particulier

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_0^2)\psi_\sigma = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2}\psi_\sigma$$

et

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_0^2)\chi_\lambda = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2}\chi_\lambda$$

où

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial x_r}, \qquad x_0 = ct.$$

Si donc nous cherchons à décomposer le vecteur ∂_0, ∂_1, ∂_2, ∂_3, il faudra tenir compte que l'on aura toujours (pour les fonctions sur lesquelles on opère)

$$\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_0^2 = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} = k^2. \qquad (4)$$

Le vecteur d'univers ∂, est donc un vecteur d'espace; or, de (2) et (3), seul (3) est un vecteur d'espace (²). Il ne nous reste donc plus qu'une seule possibilité de décomposition, que nous allons préciser dans ce qui suit.

Soient ∂_0, ∂_1, ∂_2, ∂_3 quatre *nombres* réels formant les composantes d'un vecteur d'univers covariant. Ecrivons le spineur qu'on peut lui faire correspondre d'après v. der Waerden (³) sous la forme

(¹) Cas que nous examinerons en détail dans un autre article.

(²) Nous avons insisté sur cette caractéristique dans un article des *Annales de Physique* 1933, **20**, p. 347.

(³) Cf. Laporte et Uhlenbeck, *Phys. Rev.*, 1931, **37**, 1552.

$$\left.\begin{aligned} \partial_{\dot{1}1} &= \partial_3 - \partial_0 \\ \partial_{\dot{1}2} &= \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_{\dot{2}1} &= \partial_1 + i\partial_2 \\ \partial_{\dot{2}2} &= -\partial_3 - \partial_0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Soient a_1, a_2 et b_1, b_2, les deux spineurs en lesquels on décomposera (5); prenons alors le spineur qui correspond au vecteur « spin » S, (au lieu de prendre celui qui correspond au « courant »), et posons

$$\left.\begin{aligned} \partial_{\dot{1}1} &= a_{\dot{1}} a_1 - b_{\dot{1}} b_1 \\ \partial_{\dot{1}2} &= a_{\dot{1}} a_2 - b_{\dot{1}} b_2 \\ \partial_{\dot{2}1} &= a_{\dot{2}} a_1 - b_{\dot{2}} b_1 \\ \partial_{\dot{2}2} &= a_{\dot{2}} a_2 - b_{\dot{2}} b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

La condition (4) s'écrira alors

$$\partial_{\dot{2}1}\partial_{\dot{1}2} - \partial_{\dot{1}1}\partial_{\dot{2}2} = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} = k^2, \qquad (7)$$

soit encore

$$k^2 = (a_{\dot{1}} b_{\dot{2}} - a_{\dot{2}} b_{\dot{1}})(a_1 b_2 - a_2 b_1). \qquad (8)$$

Les équations (6) et (8) représentent la décomposition générale du vecteur ∂_0, ∂_1, ∂_2, ∂_3, adaptée au cas d'une particule quelconque de masse m, satisfaisant à l'équation de Dirac.

Nous examinerons prochainement la solution générale; bornons-nous pour l'instant au cas où l'on suppose $m = 0$, donc $k = 0$.

Laissons de côté les solutions symétriques (telles que celles que nous avons données pour l'approximation de Pauli (voir (¹) Ondes et Photons II) et bornons-nous à une forme de solution simple. On déduit de (8), pour $k = 0$ la solution possible

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \qquad (9)$$

Les a_r et b_s sont proportionnels. On déduit des équations (6) et de (9)

$$\left.\begin{aligned} a_1\partial_{\dot{1}2} &= a_2\partial_{\dot{1}1} \qquad & b_1\partial_{\dot{1}2} &= b_2\partial_{\dot{1}1} \\ a_{\dot{1}}\partial_{\dot{2}1} &= a_{\dot{2}}\partial_{\dot{1}1} \qquad & b_{\dot{1}}\partial_{\dot{2}1} &= b_{\dot{2}}\partial_{\dot{1}1} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

donc

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\partial_{\dot{1}1}}{\partial_{\dot{1}2}} = \frac{\partial_{\dot{2}1}}{\partial_{\dot{2}2}}. \qquad (11)$$

Si les a_r, b_s satisfont à (11) il suffira qu'une seule des équations (6) soit satisfaite pour que les autres le soient automatiquement; prenons par exemple la première

$$\partial_{\dot{1}1} = a_{\dot{1}} a_1 - b_{\dot{1}} b_1. \qquad (12)$$

Posons

$$a_1 = \rho\, e^{i\alpha} \qquad b_1 = \sigma\, e^{i\beta}; \qquad (13)$$

il faut que

$$\rho^2 - \sigma^2 = \partial_{\dot{1}1}$$

(¹) *Journal de Physique*, 1934, t. **5**, p. 122.

ce qui exige que

$$\left.\begin{aligned} \rho &= +\frac{\sqrt{\partial_{i1}}}{2}\,(e^{\xi} + e^{-\xi}) \\ \sigma &= +\frac{\sqrt{\partial_{i1}}}{2}\,(e^{\xi} - e^{-\xi}) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ξ, α, β étant trois arbitraires.

En fonction de ces trois arbitraires nous pouvons donner la solution de la décomposition (6), à savoir

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\partial_{i1}}\left(\frac{e^{\xi+i\alpha} + e^{-\xi+i\alpha}}{2}\right) \\ a_2 &= \frac{\partial_{i2}}{\sqrt{\partial_{i1}}}\left(\frac{e^{\xi+i\alpha} + e^{-\xi+i\alpha}}{2}\right) \\ b_1 &= \sqrt{\partial_{i1}}\left(\frac{e^{\xi+i\beta} - e^{-\xi+i\beta}}{2}\right) \\ b_2 &= \frac{\partial_{i2}}{\sqrt{\partial_{i1}}}\left(\frac{e^{\xi+i\beta} - e^{-\xi+i\beta}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

qu'on peut encore écrire

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= A_0\sqrt{\partial_{i1}} & b_1 &= B_0\sqrt{\partial_{i1}} \\ a_2 &= A_0\frac{\partial_{i2}}{\sqrt{\partial_{i1}}} & b_2 &= B_0\frac{\partial_{i2}}{\sqrt{\partial_{i1}}} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

A_0, B_0 étant deux arbitraires, non nuls et satisfaisant à l'unique condition (1) :

$$A_0^*A_0 - B_0^*B_0 = 1. \tag{17}$$

Ce sont les formules (16) que nous prendrons comme point de départ sans nous préoccuper de la façon dont elles ont été obtenues.

Nous y remplacerons les nombres ∂_r par les *opérateurs* correspondants, reliés linéairement aux composantes du vecteur gradient d'univers et nous donnerons aux symboles $\sqrt{\partial_{i1}}$ le sens sur lequel nous avons insisté dans *Ondes et Photons* I et II. De plus, comme précédemment, nous admettons que les arbitraires A_0 et B_0 sont des *nombres* (complexes).

(1) Plus symétriquement on pourrait prendre une autre solution

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= A'_0\sqrt{\partial_{\dot 21}}\sqrt[4]{\frac{\partial_{i1}}{\partial_{\dot 22}}} & b_1 &= B'_0\sqrt{\partial_{\dot 21}}\sqrt[4]{\frac{\partial_{i1}}{\partial_{\dot 22}}} \\ a_2 &= A'_0\sqrt{\partial_{i2}}\sqrt[4]{\frac{\partial_{\dot 22}}{\partial_{i1}}} & b_2 &= B'_0\sqrt{\partial_{i2}}\sqrt[4]{\frac{\partial_{\dot 22}}{\partial_{i1}}} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

les A'_0, B'_0, étant deux arbitraires non nuls, soumis à la même condition que les A_0, B_0

$$A'^*_0 A'_0 - B'^*_0 B'_0 = 1.$$

Par leur forme (18) se rapprochent des formules (13) de Ondes et Photons, II; mais ni A'_0, ni B'_0 ne pouvant être nuls, on voit que cette solution II (13) ne peut en aucun cas être considérée comme un cas particulier de (18). L'emploi de ces formules (18) exige cependant des précautions sur lesquelles nous reviendrons.

3. **Calcul des champs.** — En possession des spineurs a_r, b_s d'une part, $\psi_{\dot r}$, $\chi_{\dot r}$ d'autre part, nous devons les combiner de façon à obtenir des composantes se transformant comme celles d'un champ électromagnétique.

Ici aussi, la structure des covariants quadratiques de la théorie de Dirac, formés à partir des spineurs qui constituent les fonctions d'onde, nous sera d'un grand secours. Nous savons, en effet, que parmi ces covariants quadratiques il existe un seul tenseur antisymétrique du second rang, à savoir

$$\left.\begin{matrix} \tilde\psi^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi, & \tilde\psi^*(-i\alpha_3\alpha_4\alpha_1)\psi, & \tilde\psi^* i\alpha_4\alpha_1\alpha_2\psi \\ \tilde\psi^* i\alpha_4\alpha_1\psi, & \tilde\psi^* i\alpha_4\alpha_2\psi, & \tilde\psi^* i\alpha_4\alpha_3\psi \end{matrix}\right\} \tag{19}$$

Désignons par φ l'ensemble des deux spineurs a_r, b_s, comme nous désignons en théorie de Dirac par ψ l'ensemble des deux spineurs $\psi_{\dot r}$, $\chi_{\dot r}$. Dans ces conditions les grandeurs

$$\left.\begin{matrix} \tilde\varphi^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi, & \ldots \\ \tilde\varphi^* i\alpha_4\alpha_1\psi, & \ldots \end{matrix}\right\} \tag{20}$$

et aussi

$$\left.\begin{matrix} \tilde\psi^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\varphi, & \ldots \\ \tilde\psi^* i\alpha_4\alpha_1\varphi, & \ldots \end{matrix}\right\} \tag{21}$$

se transforment comme un tenseur antisymétrique du second rang; (19) sont des composantes réelles, (20) et (21) ne le sont pas. Il faut donc prendre soit leur partie réelle

$$\tilde\varphi^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi + \tilde\psi^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\varphi, \ \ldots \tag{22}$$

soit la partie imaginaire

$$i(\tilde\varphi^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\psi - \tilde\psi^* i\alpha_2\alpha_3\alpha_4\varphi)\ldots \tag{23}$$

Traduisons ceci en langage des spineurs. Le spineur du second rang associé à un tenseur antisymétrique ordinaire est un spineur *symétrique*, ainsi que nous l'avons déjà rappelé (v. Ondes et photons II). On trouve comme spineur associé aux précédents, soit

$$m_{r\dot s} = b_r\psi_{\dot s} + b_{\dot s}\psi_r + a_r\chi_{\dot s} + a_{\dot s}\chi_r \tag{24}$$

soit

$$m'_{r\dot s} = b_r\psi_{\dot s} + b_{\dot s}\psi_r - a_r\chi_{\dot s} - a_{\dot s}\chi_r. \tag{25}$$

Mais, puisque a_r contient un facteur *arbitraire* de la forme $e^{-i\alpha}$, la forme (25) contient implicitement la forme (24) et il est inutile de faire la distinction.

Nous allons donc prendre par hypothèse comme spineur définissant le champ électromagnétique :

$$m_{rs} = b_r\psi_s + b_s\psi_r - a_r\chi_s - a_s\chi_r. \tag{26}$$

Les composantes de m_{rs} sont

$$m_{11} = 2(b_1\psi_1 - a_1\chi_1) \qquad m_{22} = 2(b_2\psi_2 - a_2\chi_2)$$
$$m_{21} = m_{12} = b_1\psi_2 + b_2\psi_1 - a_2\chi_1 - a_1\chi_2 \tag{27}$$

et les composantes du champ proprement dit sont les grandeurs réelles déduites de (1)

$$\left.\begin{array}{l} 4(e_1 - ih_1) = m_{11} - m_{22} \\ 4(h_2 + ie_2) = m_{11} + m_{22} \\ 4(e_3 - ih_3) = -2m_{12} \end{array}\right\} \quad (28)$$

Les $\psi_{\dot\sigma}$, $\chi_{\dot\lambda}$ satisfont aux équations de Dirac

$$\partial_l^{\dot\sigma}\psi_{\dot\sigma} = 0 \qquad \partial_{\dot m}^{\lambda}\chi_{\dot\lambda} = 0. \quad (1)$$

4. Equations de Maxwell. — Les composantes (28) ou (27) du champ ainsi défini se transforment correctement; de plus, elles satisfont aux équations de Maxwell. En effet celles-ci s'écrivent (2) :

$$\partial_l^{\dot r} m_{\dot r\dot s} = 0, \quad (29)$$

et l'on a, à cause de la commutabilité de a_r, b_s

$$\partial_l^{\dot r} m_{\dot r\dot s} = \partial_l^{\dot r} b_{\dot r}\psi_{\dot s} + \partial_l^{\dot r} b_{\dot s}\psi_{\dot r} - \partial_l^{\dot r} a_{\dot r}\chi_{\dot s} - \partial_l^{\dot r} a_{\dot s}\chi_{\dot r}.$$

Le second terme ainsi que le quatrième sont nuls en vertu des équations de Dirac (1) (on remplace la seconde équation (1) par sa complexe conjuguée). Les termes qui restent, le premier et le troisième s'écrivent, en tenant compte de (6) :

$$\partial_l^{\dot r} m_{\dot r\dot s} = \left(b_{\dot r} a^{\dot r} a_l - b^{\dot r} b_{\dot r} b_l\right)\psi_{\dot s} - \left(a^{\dot r} a_{\dot r} a_l - b^{\dot r} a_{\dot r} b_l\right)\chi_{\dot s}$$

et ils sont nuls à cause :

1° De l'identité fondamentale du calcul des spineurs

$$\xi^{\dot r}\xi_{\dot r} = 0$$

et 2° du fait que :

$$a_{\dot r} b^{\dot r} = -a^{\dot r} b_{\dot r} = a_{\dot 1} b_{\dot 2} - a_{\dot 1} b_{\dot 2} = 0$$

en vertu de (9) (solution possible).

5. Détermination du champ. — Le champ que nous avons défini par le spineur

$$m_{rs} = b_r\psi_s + b_s\psi_r - a_r\chi_s - a_s\chi_r \quad (30)$$

satisfait donc aux équations de Maxwell. Tout autre champ déduit du précédent par multiplication avec un facteur scalaire satisfait aux mêmes équations; ce facteur ne peut être fixé que par une sorte de normalisation des composantes. Mais il y a d'autres arbitraires dans l'expression de ce champ.

Décrivons le photon par deux spineurs $\psi_{\dot\sigma}$ et χ_λ que nous supposons normalisés. Il est clair d'abord que les fonctions

$$e^{i\beta}\psi_{\dot\sigma} \qquad \text{et} \qquad e^{i\alpha}\chi_\lambda$$

décriront la même particule. Dans le cas particulier d'un photon ($m = 0$) α peut être différent de β, à l'encontre de ce qui se passe pour un électron ; en effet les équations sont :

$$\partial_l^{\dot\sigma}\psi_{\dot\sigma} = 0 \qquad \partial_{\dot m}^{\lambda}\chi = 0 \quad (1)$$

et l'expression à normaliser ne contient pas les phases.

Or, *les opérateurs a_r, b_s, contiennent également en facteur deux phases arbitraires* $e^{i\alpha} e^{i\beta}$ (cf. (15)); ces deux phases n'augmentent donc pas l'arbitraire qu'introduit la définition du photon par les deux fonctions $\psi_{\dot\sigma}$, χ_λ fournies par la mécanique ondulatoire.

En plus, les opérateurs a_r, b_s, introduisent un autre arbitraire par les quantités

$$\frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} = \cos h\xi \qquad \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2} = \sin h\xi$$

qui apparaissent en facteur dans a_r et b_s. Cet arbitraire pourra être fixé par la condition de normalisation des composantes du champ. Remarquons à ce propos que dans le cas qui nous préoccupe (particule de masse nulle) les équations de Dirac (1) elles-mêmes comportent un arbitraire de ce genre, c'est-à-dire qui n'est pas simplement un facteur de phase.

En effet, à cause de $m = 0$, si $\psi_{\dot\sigma}$, χ_λ satisfont à (1), $C\psi_{\dot\sigma}$, $D\chi_\lambda$ y satisferont encore, C et D pouvant être des nombres (complexes) *différents*. La condition de normalisation ne fixe pas les phases qui restent quelconques, comme toujours ; mais cette condition unique ne peut fixer en général qu'un seul des modules de C et D, l'autre restant arbitraire.

La question doit être traitée à part; voyons d'abord comment interviennent les arbitraires ξ, α, β dans un exemple précis.

6. Champ électromagnétique d'un photon donné. Energies positives et négatives. — Considérons un photon d'énergie et de quantité de mouvements bien déterminées et demandons-nous quelles sont les caractéristiques de la lumière qu'il représente. Soient

$$\left.\begin{array}{l} \psi_{\dot\sigma} = A_{\dot\sigma}\, e^{\frac{px+qy+rz-Wt}{\varkappa}} \\ \chi_\lambda = B_\lambda\, e^{\frac{px+qy+rz-Wt}{\varkappa}} \end{array} \qquad \varkappa = \frac{h}{2\pi i}\right\} \quad (31)$$

les quatre spineurs qui décrivent un photon, de quantité de mouvement p, q, r et d'énergie W. Ils satisfont aux équations de Dirac,

$$\partial_l^{\dot\sigma}\psi_{\dot\sigma} = 0 \qquad \partial_{\dot m}^{\lambda}\chi_\lambda = 0, \quad (1)$$

qui s'écrivent

(1) Cf. LAPORTE et UHLENBECK, *Phys. Rev.* 1931, **37**, p. 1380.
(2) LAPORTE et UHLENBECK, *loc. cit.*

$$
\left.
\begin{aligned}
&(p - iq)A_1 - \left(\frac{W}{c} + r\right)A_2 = 0 \\
&\left(\frac{W}{c} - r\right)A_1 - (p + iq)A_2 = 0 \\
&(p - iq)B_1 - \left(\frac{W}{c} + r\right)B_2 = 0 \\
&\left(\frac{W}{c} - r\right)B_1 - (p + iq)B_2 = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (32)
$$

Ces équations sont compatibles si

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Pour une quantité de mouvement p, q, r, donnée, l'énergie peut prendre deux valeurs à savoir

$$W' = +c\sqrt{p^2+q^2+r^2} \qquad W'' = -c\sqrt{p^2+q^2+r^2}. \quad (33)$$

Calculons le spineur m_{rs}. On a, en posant :

$$\theta = \frac{px + qy + rz - Wt}{\chi},$$

$$
\left.
\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{2}{\sqrt{\chi}}\sqrt{\frac{W}{c} + r}\,(A_1B_0 - A_0B_1)\,e^{\theta} \\
m_{22} &= \frac{2}{\chi}\sqrt{\frac{\chi}{W/c + r}}\,(p - iq)(A_2B_0 - A_0B_2)\,e^{\theta} \\
m_{12} = m_{21} &= \Bigg[\sqrt{\frac{W/c + r}{\chi}}\,(A_2B_0 - A_0B_2) + \\
&\quad + \frac{p - iq}{\chi}\sqrt{\frac{\chi}{W/c + r}}\,(A_1B_0 - A_0B_1)\Bigg]\,e^{\theta},
\end{aligned}
\right\} \quad (34)
$$

et il faut tenir compte des équations de Dirac ainsi que de la condition (17) remplie par les arbitraires A_0, B_0.

Pour le but que nous avons en vue nous ne diminuons en rien la généralité en supposant que le photon avance le long de l'axe Ox. Il faut alors prendre

$$q = r = 0 \qquad \left(\frac{W}{c}\right)^2 = p^2 \qquad p > 0 \quad (35)$$

et

$$\frac{W'}{c} = +\sqrt{p^2} = p \qquad \frac{W''}{c} = -\sqrt{p^2} = -p. \quad (36)$$

Les équations (32) donnent

$$A_1 = A_2 \qquad B_1 = B_2$$

pour le photon d'énergie positive W' et

$$A_1 = -A_2 \qquad B_1 = -B_2$$

pour le photon d'énergie négative W''.

Le spineur symétrique devient dans le premier cas $W = W' = cp > 0$

$$
\begin{aligned}
m'_{11} = m'_{22} = m'_{12} = m'_{21} &= 2\sqrt{\frac{p}{\chi}}\,(A_1B_0 - A_0B_1)\,e^{\frac{p}{\chi}(x-ct)} \\
&= 2M\,e^{\frac{p}{\chi}(x-ct)} = 2R\,e^{\frac{p}{\chi}(x-ct+\varphi)}
\end{aligned}
\quad (37)
$$

et dans le second cas, $W = W'' = -cp$

$$
\left.
\begin{aligned}
m''_{11} = m''_{22} &= 2i\sqrt{\frac{p}{\chi}}\,(A_1B_0 - A_0B_1)\,e^{\frac{p}{\chi}(x+ct)} \\
&= 2iM\,e^{\frac{p}{\chi}(x+ct)} = 2iR\,e^{\frac{p}{\chi}(x+ct+\varphi)} \\
m''_{12} = m''_{21} &= -2i\sqrt{\frac{p}{\chi}}\,(A_1B_0 - A_0B_1)\,e^{\frac{p}{\chi}(x+ct)} \\
&= -2iM\,e^{\frac{p}{\chi}(x+ct)} = -2iR\,e^{\frac{p}{\chi}(x+ct+\varphi)}
\end{aligned}
\right\} \quad (38)
$$

en posant

$$M = \sqrt{\frac{p}{\chi}}\,(A_1B_0 - A_0B_1) = R\,e^{\frac{p}{\chi}\varphi} \quad (R \text{ réel}). \quad (38')$$

Avec ces notations le champ électromagnétique accompagnant un photon d'*énergie positive* sera donné par les formules (28) et (37) et aura la forme :

$$
\left.
\begin{aligned}
e'_1 &= 0 \\
e'_2 &= R\sin\frac{2\pi p}{h}(x - ct + \varphi) \\
e'_3 &= -R\cos\frac{2\pi p}{h}(x - ct + \varphi) \\
h'_1 &= 0 \\
h'_2 &= R\cos\frac{2\pi p}{h}(x - ct + \varphi) \\
h'_3 &= R\sin\frac{2\pi p}{h}(x - ct + \varphi)
\end{aligned}
\right\} \quad (39)
$$

tandis que le champ d'un photon *d'énergie négative* sera

$$
\left.
\begin{aligned}
e''_1 &= 0 \\
e''_2 &= R\cos\frac{2\pi p}{h}(x + ct + \varphi) \\
e''_3 &= -R\sin\frac{2\pi p}{h}(x + ct + \varphi) \\
h''_1 &= 0 \\
h''_2 &= -R\sin\frac{2\pi p}{h}(x + ct + \varphi) \\
h''_3 &= -R\cos\frac{2\pi p}{h}(x + ct + \varphi).
\end{aligned}
\right\} \quad (40)
$$

Donc un photon d'énergie *positive* $W' = cp > 0$ et de quantité de mouvement positive $p > 0$, dirigée suivant Ox, équivaut à une lumière (39) se propageant normalement à Ox, vers les x positifs et *polarisée circulairement à droite* (en regardant arriver la lumière les champs tournent de façon que **h** prenne la place de **e**).

La figure 1 *a* montre la disposition des champs; dans la figure 1 *b* l'axe Ox positif est supposé dirigé vers l'observateur.

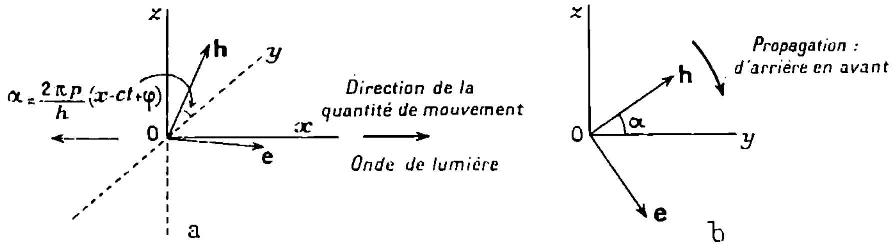


Fig. 1. — Particule d'énergie positive.

Par contre, un photon de même quantité de mouvement positive $p > 0$, dirigée suivant Ox, mais *d'énergie négative*, équivaut à une lumière décrite par les champs (40). Cette onde lumineuse se propage vers les x négatifs, *donc en sens contraire de la quantité de mouvement du photon*. Sa polarisation est *circulaire gauche* (en regardant arriver la lumière les champs tournent de façon que **e** prenne la place de **h**); dans la figure 2*b* l'axe Ox *négatif* est supposé dirigé vers l'observateur.

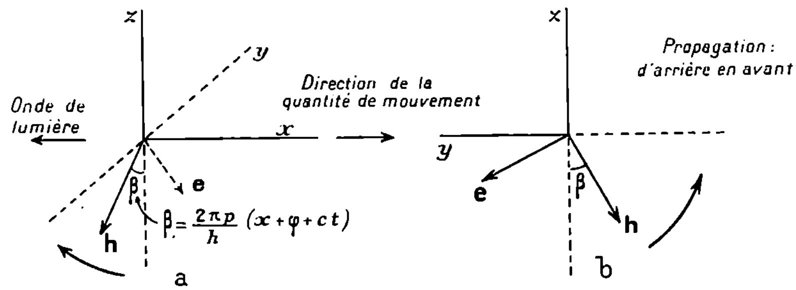


Fig. 2. — Particule de même quantité de mouvement que celle de la figure 1, mais d'énergie négative.

Ces résultats montrent quelle peut être l'interprétation des énergies négatives pour des particules de masse nulle dont le mouvement est défini par l'équation de Dirac. L'assimilation de cette particule a un photon précise cette interprétation; mais, même si en réalité cette particule n'était pas un photon (voir paragraphe 8) les champs que nous avons introduits plus haut présenteraient un certain intérêt, dû au fait qu'ils nous fournissent une image intuitive simple de la différence qu'il y a entre une particule à énergie positive et une particule à énergie négative.

7. **Polarisation rectiligne**. — Dans tout ce qui précède nous avons supposé que la quantité de mouvement p était dirigée suivant les Ox positifs, $p > 0$. Cherchons maintenant le champ d'un photon d'énergie *négative* W'', mais dont la quantité de mouvement soit dirigée vers les x *négatifs*.

Posons $\quad p = -p' \qquad p' > 0.$

On a
$$\left(\frac{W''}{c}\right)^2 = p^2 = (-p')^2 = p'^2$$

$$\frac{W''}{c} = -p'. \tag{41}$$

La lumière correspondante se dirigera en sens contraire de la quantité de mouvement, donc vers les x *positifs*.

Les spineurs de Dirac s'écrivent maintenant

$$\left.\begin{aligned} \psi_\sigma &= A_\sigma\, e^{-\frac{p'}{\varkappa}(x-ct)} \\ \chi_\lambda &= B_\lambda\, e^{-\frac{p'}{\varkappa}(x-ct)} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

et l'on a cette fois-ci $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$.

D'après les formules générales (34), le spineur symétrique est

$$m''_{11} = m''_{22} = m''_{12} = m''_{21} =$$
$$= 2i\sqrt{\frac{p'}{\varkappa}}(A_1B_0 - A_0B_1)\, e^{-\frac{p'}{\varkappa}(x-ct)} = 2iM\, e^{-\frac{p}{\varkappa}(x-ct)} \tag{43}$$

et le champ correspondant

$$
\left.\begin{aligned}
e'''_1 &= 0 \\
e'''_2 &= \quad S \cos \frac{2\pi p'}{h} (x - ct + \varepsilon) \\
e'''_3 &= - S \sin \frac{2\pi p'}{h} (x - ct + \varepsilon) \\
h'''_1 &= 0 \\
h'''_2 &= \quad S \sin \frac{2\pi p'}{h} (x - ct + \varepsilon) \\
h'''_3 &= \quad S \cos \frac{2\pi p'}{h} (x - ct + \varepsilon)
\end{aligned}\right\} \tag{44}
$$

avec

$$
M' = \sqrt{\frac{p'}{\chi}} (A_1 B_0 - A_0 B_1) = S . e^{-\frac{p'}{\chi}} . \tag{45}
$$

La figure 1 devient pour ce cas la figure 3.

La lumière est donc polarisée circulairement à gauche.

Superposons maintenant deux photons : l'un d'énergie positive, ayant une quantité de mouvement dirigée vers les x positifs et l'autre d'énergie négative et dont la quantité de mouvement, égale en valeur absolue à la précédente, soit dirigée en sens contraire.

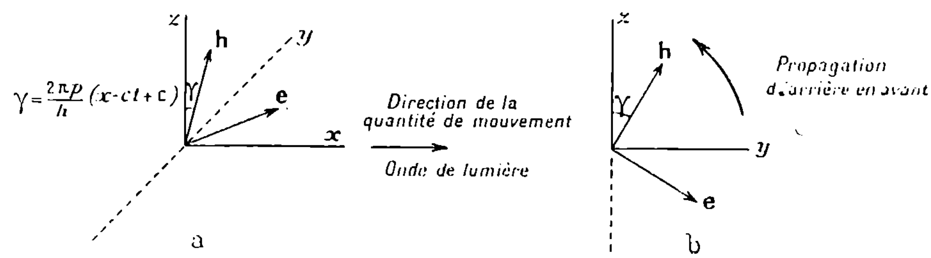


Fig. 3.

Le champ de ce dernier sera d'après les formules 4) et (38')

$$
\left.\begin{aligned}
e'''_1 &= 0 \\
e'''_2 &= \quad R \sin \frac{2\pi p}{h} (x - ct - \varphi) \\
e'''_3 &= \quad R \cos \frac{2\pi p}{h} (x - ct - \varphi) \\
h'''_1 &= 0 \\
h'''_2 &= - R \cos \frac{2\pi p}{h} (x - ct - \varphi) \\
h'''_3 &= \quad R \sin \frac{2\pi p}{h} (x - ct - \varphi).
\end{aligned}\right\} \tag{46}
$$

Il se dirige toujours vers les x positifs. Le champ tal s'obtiendra en superposant (46) et (39). On aura

$$
\left.\begin{aligned}
E_1 &= 0 \\
E_2 &= \quad 2R \cos \frac{2\pi p}{h} \varphi . \sin \frac{2\pi p}{h} (x - ct) \\
E_3 &= \quad 2R \sin \frac{2\pi p}{h} \varphi . \sin \frac{2\pi p}{h} (x - ct) \\
H_1 &= 0 \\
H_2 &= - 2R \sin \frac{2\pi p}{h} \varphi . \sin \frac{2\pi p}{h} (x - ct) \\
H_3 &= \quad 2R \cos \frac{2\pi p}{h} \varphi . \sin \frac{2\pi p}{h} (x - ct)
\end{aligned}\right\} \tag{47}
$$

donc une lumière polarisée rectilignement dans un azimut déterminé par l'angle φ.

Dans la théorie que nous avons développée, la lumière polarisée linéairement ne constitue pas l'élément fondamental simple ; cet élément simple est formé par la lumière polarisée circulairement, qui correspond à un seul photon dans un état d'énergie bien déterminé ; pour décrire une lumière ayant une polarisation rectiligne nous avons besoin d'imaginer un photon distribué sur deux états qui soient tels que leurs *impulsions d'univers soient égales et de signes contraires*.

Cela montre qu'en particulier l'existence des énergies négatives, loin d'être une difficulté pour la théorie, en constitue au contraire un élément essentiel, indispensable, sans lequel on ne pourrait pas rendre compte du fait fondamental qu'expérimentalement, la lumière polarisée rectilignement existe.

8. Considérations critiques. Difficultés de la théorie et signification de la méthode employée. — Mathématiquement, la théorie développée dans les pages et articles précédents revient à dire que, pour une particule de masse nulle, on peut trouver un champ du type ψ (à six composantes réelles) qui possède les propriétés de covariance du tenseur champ électromagnétique et qui satisfait aux équations de Maxwell. Physiquement, la question se pose de *savoir jusqu'à quel point nous sommes en droit d'assimiler ce champ au champ électromagnétique d'une onde de lumière*.

Une première objection qu'on peut faire à cette tentative consiste à lui reprocher le caractère qu'elle attribue aux composantes du champ électromagnétique e_r, h_r. Elle en fait des grandeurs du type ψ, au lieu de les considérer comme des opérateurs ou comme des moyennes observables de ces opérateurs. Les grandeurs observables seront alors les carrés des modules correspondants $e_r^* e_r$, $h_r^* h_r$. Cette particularité est satisfaisante en ce sens qu'on peut imaginer la mesure des carrés de chaque composante *séparément*, ainsi que le permet l'expérience, au lieu de ne pouvoir mesurer que leur somme $\Sigma(|e_r|^2 + |h_r|^2)$; mais il n'est nullement démontré qu'en dernière analyse on doive assimiler nécessairement les composantes de champ lumineux à des grandeurs de la nature d'une fonction d'onde ψ.

Il faut aussi tenir compte d'une autre difficulté très sérieuse, qui n'apparaît pas dans les deux approximations que nous avons étudiées précédemment, mais qui se présente à l'approximation de Dirac : *la difficulté du spin.*

En effet, diverses considérations nous obligent à penser que, si le photon a un spin, la valeur de celui-ci ne peut être que $h/2\pi$. Or, la particule que nous avons considérée jusqu'à présent, à savoir celle dont le mouvement obéit à l'équation de Dirac

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \tag{48}$$

pour une masse et une charge nulles, a un spin égal à $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$. Cette particule ne représente pas directement le « photon ». D'après M. L. de Broglie [1], elle serait plutôt un *neutrino de Pauli*, dont la masse au repos semble être nulle [2] et dont le spin est effectivement $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$.

Doit-on en conclure que les calculs des paragraphes précédents ne s'appliquent qu'à un neutrino et ne concernent pas la théorie de la lumière? Il n'en est rien, parce que :

1° Ces calculs s'appliquent au neutrino, mais nous montrerons qu'à chaque onde de lumière est attaché un neutrino, et *précisément celui que nous avons considéré*; et parce que

2° La difficulté du spin s'évanouit si l'on adopte une hypothèse due à M. L. de Broglie concernant la constitution du photon.

SECONDE PARTIE

9. Problème inverse pour le photon. Corpuscule attaché à une onde de lumière. — Jusqu'à présent nous sommes partis de l'équation (48), ou des équations (1) qui lui sont équivalentes, pour en déduire l'expression des composantes e_r, h_r, d'un champ du type ψ, que nous avons assimilé au champ lumineux. Ce procédé est critiquable parce que :

1° l'équation (48) semble plutôt l'équation d'un neutrino que celle d'un photon, et

2° parce que le champ qui en résulte est un champ du type ψ.

Le « photon » semble une particule ayant un spin égal à $\frac{h}{2\pi}$, ceci pour rendre compte de la diminution du moment cinétique d'un atome lors d'une émission lumineuse. Il faudrait donc partir de l'équation d'une particule de masse nulle *et de spin $h/2\pi$*; mais il n'est pas certain qu'on puisse établir une équation relativiste, analogue à celle de Dirac [1], pour une particule dont le spin a cette valeur.

En tout cas, l'expérience nous montre qu'on doit associer les ondes de lumière à des particules, les « photons », ayant les caractéristiques mentionnées et, en particulier, un spin égal à $h/2\pi$. Or, nous allons établir le résultat suivant : *on peut attacher à tout phénomène lumineux* (et en particulier à une onde unique), d'une façon bien déterminée et d'ailleurs tout à fait naturelle, *une particule de masse nulle, satisfaisant à l'équation de Dirac, donc ayant le spin $1/2 \times h/2\pi$*. Le « photon » expérimental (masse nulle, spin 1) est une autre particule attachée aux ondes de lumière, mais il existe certainement *un « neutrino »* $\left(\text{masse nulle, spin } \frac{1}{2}\right)$ qu'elles définissent et *qui constitue lui aussi, nécessairement, un des aspects discontinus du phénomène lumineux.*

Prenons en effet le problème inverse de celui que nous avons traité jusqu'à présent. *Partons d'une onde de lumière* quelconque, décrite par le potentiel d'univers

$$A^0,\ A^1,\ A^2,\ A^3 \tag{49}$$

lequel satisfait aux équations

$$\Box A^r = 0 \qquad (r = 0, 1, 2, 3) \tag{50}$$

et à la condition de Lorentz

$$\frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} = 0. \tag{51}$$

Le champ qu'on en déduit à la manière ordinaire

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{52}$$

satisfait aux équations de Maxwell

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0 \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \end{array}\right\} \tag{53}$$

Le spineur qui correspond au vecteur (49) sera donné par les formules mentionnées déjà plusieurs fois :

$$\left.\begin{array}{ll} \Phi_{11} = A^3 + A^0 & \Phi_{22} = -A^3 + A^0 \\ \Phi_{12} = A^1 - iA^2 & \Phi_{21} = A^1 + iA^2. \end{array}\right\} \tag{54}$$

[1] *C. R.* 1934, **198**, p. 135.

[2] F. Perrin, *C. R.* 1933, **197**, p. 1625. *Note ajoutée à la correction.* Voir également E. Fermi, *Z. Physik.*, 1934, **88**, p. 171.

[1] Cf. L. Golbtein, *C. R.* 1934, t. **198**, p. 454.

Or, à partir de ce spineur du second rand $\Phi_{\dot{r}\dot{s}}$ et avec les deux spineurs du premier rang a_r, b_s, que nous avons introduits *nous pouvons former deux autres spineurs du premier rang* $\psi_{\dot{r}}$, χ_s par l'opération invariante de la « contraction », analogue à la contraction du calcul tensoriel :

$$\psi_{\dot{r}} = b^s \Phi_{\dot{r}\dot{s}} \qquad \chi_s = a^{\dot{r}} \Phi_{\dot{r}s}. \tag{55}$$

L'intérêt de ces spineurs tient aux faits *qu'ils satisfont aux équations de Dirac* (1).

En effet, prenons par exemple $\partial_l^{\dot{r}} \psi_{\dot{r}} = 0$; on a :

$$\partial_l^{\dot{r}} \psi_{\dot{r}} = \partial_l^{\dot{r}} b^s \Phi_{\dot{r}s}.$$

Par un raisonnement analogue à celui qui nous a conduit aux formules (10), on établit que

$$\partial_l^{\dot{r}} b^s = \partial^{\dot{r}s} b_l$$

ce qui donne

$$\partial_l^{\dot{r}} \psi_{\dot{r}} = b_l \left(\partial^{\dot{r}s} \Phi_{\dot{r}s}\right). \tag{56}$$

Puisque

$$-\frac{1}{2} \partial^{\dot{r}s} \Phi_{\dot{r}s} = \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} \tag{57}$$

le dernier membre de (56) est nul et les $\psi_{\dot{r}}$ satisfont aux équations de Dirac ; la validité de la seconde équation s'établit de la même manière.

Exemple : Prenons un potentiel d'univers de la forme

$$A^0 = -\frac{x}{2} a \cos\theta, \quad A^1 = \frac{a}{2k} \sin\theta, \quad A^2 = 0,$$
$$A^3 = -\frac{x}{2} a \cos\theta \tag{58}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} a &= \text{constante}, \quad k = \frac{2\pi\nu}{c}, \\ \theta &= k(z - ct) = \frac{2\pi\nu}{c}(z - ct). \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

On trouve

$$\psi_{\dot{1}} = -\chi_{\dot{1}} = \frac{2aB_0}{\sqrt{2k}} \cos\left[k(z-ct) - \frac{\pi}{4}\right], \quad \psi_{\dot{2}} = \chi_{\dot{2}} = 0.$$

Ce genre de calculs est d'ailleurs superflu comme on le verra plus loin, formule (63).

Note. — *A priori*, on pourrait penser à un autre couple de spineurs du premier rang qu'on pourrait former avec les a_r, b_s et le champ électromagnétique correspondant à la lumière donnée.

Soit $g_{\dot{r}\dot{s}}$ le spineur symétrique du second rang formé avec les valeurs E_r, H_r des composantes du champ ; il satisfait aux équations de Maxwell

$$\partial_l^{\dot{r}} g_{\dot{r}\dot{s}} = 0.$$

Cela étant les deux spineurs

$$\psi_{\dot{s}} = a^{\dot{r}} g_{\dot{r}\dot{s}} \qquad \chi_{\dot{r}} = b^{\dot{s}} g_{\dot{r}\dot{s}}$$

satisfont évidemment aux équations de Dirac, mais il est facile de voir qu'ils ne peuvent nous être d'aucune utilité. En effet, appliquons à $\partial_l^{\dot{r}} g_{\dot{r}\dot{s}} = 0$ l'opérateur a^k (k quelconque, sans aucun rapport avec r, l, s) ; on a

$$a^k \partial_l^{\dot{r}} g_{\dot{r}\dot{s}} = \partial_l^k \left(a^{\dot{r}} g_{\dot{r}\dot{s}}\right) = 0$$

donc

$$\partial_l^k \psi_{\dot{s}} = 0 ;$$

k, l prennent les valeurs 1 et 2 quel que soit s. Cela signifie simplement que $\frac{\partial}{\partial x_r} \psi_{\dot{s}} = 0$, quel que soit x_r. $\psi_{\dot{s}}$ et aussi $\chi_{\dot{r}}$ sont des constantes ; on voit sur un exemple simple qu'elles sont identiquement nulles.

A toute propagation décrite par un potentiel d'univers A^r on peut donc faire correspondre un couple de spineurs $\psi_{\dot{r}}$, χ_s *qui satisfont aux équations de Dirac* pour $m = 0$.

Ceux-ci décrivent donc le mouvement d'une particule de masse nulle (*neutrino*) dont l'hamiltonien est

$$H = c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3)$$

et qui possède par conséquent le spin $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$.

Toute modification, tout accident subi par l'onde de lumière se traduit par des changements correspondants dans le mouvement de ce neutrino. On trouve ici, curieusement associé à cette onde de lumière, une particule qui au repos s'évanouit ($m = 0$) et qui possède un spin $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$. Par ailleurs, sa fréquence, dans un état déterminé, est exactement égale à celle de la lumière correspondante (ce qui découle du raisonnement qu'on trouvera plus loin et des résultats déjà obtenus). Est-ce là le « quantum de lumière » expérimental ? Pour pouvoir l'affirmer il faudrait expliquer pourquoi au moment de l'arrêt de la particule ou au moment de sa création, le bilan du moment de quantité de mouvement n'est pas satisfait, au moins en apparence ; cela exige probablement une meilleure connaissance du mécanisme d'interaction avec la matière.

Quoi qu'il en soit, en définissant un état de propagation lumineuse par un potentiel d'univers A^r, on peut déduire :

1° Le champ électromagnétique *classique* e_r, h_r, en appliquant à $A^{\cdot}$ l'opérateur « rationnel d'univers » bien connu, mais aussi :

2° *un champ d'ondes* ψ, en appliquant à $A^{\cdot}$ les opérateurs a_r, b_s que nous avons introduits; *on constate que ce champ est celui d'une particule de masse nulle, obéissant à l'équation de Dirac.*

On peut se demander quelle est la relation entre ces deux champs, ce qui permettrait le calcul de e_r, h_r sans passer par l'intermédiaire des potentiels (calcul qui présente souvent de sérieuses difficultés).

Pour cela soit $\Phi_{\dot{r}s}$ le potentiel d'une onde lumineuse. Le champ classique se déduit du spineur symétrique du second rang g_{rs}, lequel à son tour s'obtient de Φ_{rs} par la formule

$$g_{rs} = \partial_{\dot{m}r}\Phi_s^{\dot{m}} + \partial_{\dot{n}s}\Phi_r^{\dot{n}}. \tag{60}$$

(voir Laporte et Uhlenbeck (*loc. cit.*, p. 1391).

D'autre part, à ce même potentiel correspondent les spineurs (55), soit

$$\psi_r = b^{\dot{\rho}}\Phi_{\dot{\rho}r} \qquad \chi_s = a^{\dot{\sigma}}\Phi_{\dot{\sigma}s}. \tag{55}$$

Appliquons à ces formules respectivement les opérateurs b_s et a_r

$$b_s\psi_r = b^{\dot{\rho}} b_s \Phi_{\dot{\rho}r} \qquad a_r\chi_s = a^{\dot{\sigma}} a_r \Phi_{\dot{\sigma}s} \tag{61}$$

qu'on peut encore écrire :

$$b_r\psi_s = b^{\dot{\rho}} b_r \Phi_{\dot{\rho}s} \qquad a_s\chi_r = a^{\dot{\sigma}} a_s \Phi_{\dot{\sigma}r}. \tag{62}$$

Ajoutons convenablement (61) et (62); il vient

$$\begin{aligned} &b_r\psi_s + b_s\psi_r - a_r\chi_s - a_s\chi_r = \\ &= -\left(a^{\dot{m}} a_r - b^{\dot{m}} b_r\right)\Phi_{\dot{m}s} - \left(a^{\dot{n}} a_s - b^{\dot{n}} b_s\right)\Phi_{\dot{n}r} \\ &= -\left(\partial_r^{\dot{m}}\Phi_{\dot{m}s} + \partial_s^{\dot{n}}\Phi_{\dot{n}r}\right) = g_{rs}. \end{aligned} \tag{63}$$

Or, ceci n'est autre que la formule (26) que nous avions prise, par hypothèse, comme point de départ. Nos développements précédents relatifs à la relation entre la particule que nous avons appelée jusqu'à présent « photon » et le champ électromagnétique qui lui correspond, restent donc valables. Mais maintenant nous pouvons affirmer que e_r, h_r *sont effectivement les composantes du champ lumineux classique*; $\psi_{\dot{\sigma}}$, χ_λ, constituent les fonctions d'ondes d'une particule (neutrino) qu'on peut lui attacher et qui représente, dans une mesure qu'il s'agira de déterminer, l'aspect discontinu du phénomène lumineux.

Le neutrino attaché à une onde de lumière a un spin $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, mais la difficulté est levée si l'on admet avec M. L. de Broglie, *que cette particule ne constitue pas elle-même le photon.*

Un photon serait formé par l'ensemble d'un neutrino et d'un antineutrino (un trou au sens de Dirac), d'énergie négative et de spin égal et de signe contraire à celui du précédent.

Au contact de la matière, ces deux particules s'annihileraient, donnant naissance à une onde de lumière.

Remarquons que, dans la théorie que nous avons développée jusqu'ici, rien ne nous empêche de supposer que le neutrino soit accompagné par un antineutrino, puisqu'aussi bien nous ne pouvons percevoir le champ électromagnétique à l'état pur pour ainsi dire, mais uniquement à la suite de son action sur la matière. A partir de la fonction d'onde du neutrino (ou de celle de l'antineutrino, qui s'en déduit immédiatement), on peut calculer le champ électromagnétique par la formule (63).

Les calculs précédents montrent toutefois que le champ défini par m_{rs} existe aussi pour un neutrino isolé (et un champ analogue existe également pour l'électron). L'hypothèse de M. L. de Broglie admet que ce champ ne se manifeste sous la forme de lumière que lorsqu'il y a annihilation. Le problème se trouve ainsi déplacé vers le problème de l'interaction d'une particule, ou d'un couple de particules du type neutrino, avec la matière.

Manuscrit reçu le 10 février 1934.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur les particules qu'on peut associer à la propagation d'une onde de lumière.* Note de M. **Al. Proca**, présentée par M. L. de Broglie.

Divers résultats expérimentaux nous ont conduit à la notion de photon, particule ayant une masse au repos nulle, une énergie et une quantité de mouvement proportionnelles à la fréquence, et, probablement, un spin égal à zéro ou à $h/2\pi$. Il est cependant assez malaisé d'utiliser ce photon dans les théories ondulatoires modernes pour mettre en évidence la double nature, corpusculaire et ondulatoire, du phénomène lumineux.

La théorie nous permet cependant d'associer à toute propagation de lumière une autre particule, ne différant du photon que par la valeur de son spin, qui est égal à $1/2 . h/2\pi$. Pour le montrer, définissons d'abord quatre opérateurs, constituant les composantes de deux spineurs [1] a_s et b_s, au moyen des équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_{\dot{2}1} = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y} = a_{\dot{2}}a_1 - b_{\dot{2}}b_1, & \partial_{\dot{1}1} = \dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} = a_{\dot{1}}a_1 - b_{\dot{1}}b_1, \\ \partial_{\dot{1}2} = \dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y} = a_{\dot{1}}a_2 - b_{\dot{1}}b_2, & \partial_{\dot{2}2} = -\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} = a_{\dot{2}}a_2 - b_{\dot{2}}b_2, \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_{\dot{1}} b_{\dot{2}} - a_{\dot{2}} b_{\dot{1}}) = 0. \end{cases}$$

Une solution peut être, par exemple, la suivante :

$$(2)\qquad a_1 = A_0\sqrt{\partial_{\dot{1}1}},\qquad a_2 = A_0\frac{\partial_{\dot{1}2}}{\sqrt{\partial_{\dot{1}1}}};\qquad b_1 = B_0\sqrt{\partial_{\dot{1}1}},\qquad b_2 = B_0\frac{\partial_{\dot{1}2}}{\sqrt{\partial_{\dot{1}1}}},$$

où $\sqrt{\partial_{\dot{1}1}}$ a la signification que nous avons donnée [2] et où A_0 et B_0 sont des nombres, non nuls et satisfaisant à

$$A_0^* A_0 - B_0^* B_0 = 1.$$

Cela étant, soit un phénomène de propagation décrit par le potentiel d'univers $A^r (r = 0, 1, 2, 3)$ du champ lumineux et soit $\Phi_{\dot{r}s}$ le spineur qui correspond à A^r. En appliquant à A^r l'opérateur « rotationnel d'univers »

---

(1) Pour tout ce qui concerne le calcul des spineurs, voir Laporte et Uhlenbeck, *Physical Review*, 37, 1931, p. 1380, dont nous avons adopté les notations.

(2) *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 1725. La décomposition donnée ici constitue la base de ce que nous avons appelé approximation de Dirac dans nos Notes antérieures.

on obtient, comme d'habitude, le champ électromagnétique *classique*, qui satisfait aux équations de Maxwell pour le vide. Mais on peut partir du même A^r et appliquer *les opérateurs* a_r et b_s de la façon invariante suivante :

$$\psi_{\dot r} = b^s \Phi_{\dot r s}, \qquad \chi_s = a^{\dot r} \Phi_{\dot r s}. \tag{3}$$

On obtient alors un autre champ, défini par deux *spineurs* $\psi_{\dot r}$, χ_s, associé au même phénomène lumineux décrit par A^r; la nature de ce champ apparaît immédiatement si l'on remarque que $\psi_{\dot r}$, χ_s *satisfont aux équations de Dirac pour une particule libre, de masse au repos nulle*. En effet, on a par exemple $\partial_l^{\dot\rho} \psi_{\dot\rho} = 0$ (qui représente deux des équations de Dirac), puisque

$$\partial_l^{\dot\rho} \psi_{\dot\rho} = \partial_l^{\dot\rho} (b^s \Phi_{\dot\rho s}) = b_l (\partial^{\dot\rho s} \Phi_{\dot\rho s}) \equiv 0, \tag{4}$$

$-1/2 . \partial^{\dot\rho s} \Phi_{\dot\rho s} = 0$ n'étant autre que la condition de Lorentz, imposée au potentiel A^r.

A toute propagation d'ondes lumineuses, régie par les lois de Maxwell, on peut donc associer le mouvement d'une particule libre de masse au repos nulle, gouverné par les équations de Dirac. La complication plus ou moins grande de l'onde lumineuse se traduit par un nombre plus ou moins grand d'états excités sur lesquels est distribuée la particule; le principe de superposition n'est pas mis en défaut. Le champ électromagnétique classique se déduit des fonctions d'onde de la particule par la formule

$$g_{rs} = b_r \psi_s + b_s \psi_r - a_r \chi_s - a_s \chi_r, \tag{5}$$

ou g_{rs} est le spineur symétrique du champ lumineux, relié à ses composantes par les relations connues

$$4(e_1 - ih_1) = g_{11} - g_{22}, \qquad 4(h_2 + ie_2) = g_{11} + g_{22}, \qquad 4(e_3 - ih_3) = -2g_{12}.$$

On constate qu'une particule de ce type, dans un état bien déterminé d'énergie $W = h\nu$, correspond à une lumière de fréquence ν, *polarisée circulairement, à droite si l'énergie de la particule est positive et à gauche si l'énergie est négative*. Nous avons là une interprétation intuitive des énergies négatives d'un corpuscule non chargé, obtenue au moyen d'un procédé général, applicable également aux électrons. Une lumière polarisée rectilignement n'est pas simple; elle correspond à une superposition de deux états de la particule dans lesquelles les impulsions d'univers $(p, q, r, W/c)$ sont égales et de signes contraires.

La particule ainsi associée à une onde de lumière n'a pas les caractéristiques du photon, puisque, obéissant à l'équation de Dirac, son spin est égal à $1/2 . h/2\pi$; une pareille particule est un *neutrino de Pauli* comme l'a indiqué M. L. de Broglie (¹), lequel a donné une image très séduisante d'un photon, en couplant un neutrino à un antineutrino.

(¹) *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 135.

IV

Particules et Mésons

IV. PARTICULES ET MESONS

IV.1 Sur la Théorie du Positon.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.202, p1366-1368; Avr 20, 1936

IV.2 Sur les Equations Fondamentales des Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.202, p1490-1492; Mai 4, 1936

IV.3 Sur la Théorie Ondulatoire des Electrons Positifs et Négatifs.
J.Phys.Rad.; Vol.VII, Ser.VII, No.8, p347-353; Aout 1936

IV.4 Sur les Photons et les Particules "Charge Pure".
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.203, p709-710; Oct 19, 1936

IV.5 Particules Libres. Photons et Particules "Charge Pure".
J.Phys.Rad.; Vol.VIII, Ser.VII, No.1, p23-28; Jan 1937

IV.6 Théorie Non Relativiste des Particules à Spin Entier.
J.Phys.Rad.; Vol.IX, Ser.VII, No.2, p61-66; Fev 1938

IV.7 Equations d'Onde Approximatives pour des Particules à Spin Unité.
C.R.Acad.Sci.Roumanie; Vol.II, No.4, p356-359; Mar 11, 1938

IV.8 Sur une Equation Symbolique groupant les Equations du Mésoton (Electron Lourd), celles de Kemmer, de Klein-Gordon et les Equations du Photon de L.de Broglie.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.207, p1182-1183; Dec 12, 1938

IV.9 Sur la Masse du Mésoton et des Autres Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.208, p884-885; Mar 20, 1939 (en collaboration avec S. Goudsmit).

IV.10 Sur la Longueur Fondamentale Attachée aux Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.208, p1074-1075; Avr 3, 1939

IV.11 Sur la Masse des Particules Elémentaires.
J.Phys.Rad.; Vol.X, Ser.VII, No.5, p209-214; Mai 1939
(en collaboration avec S.Goudsmit).

IV.12 Sur un Type de Particules Elémentaires dont Les Fonctions d'Onde Satisfont à l'Equation de Klein Gordon.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.210, p563-564; Avr 15, 1940

IV.13 Intégrales Premières dans la Théorie du Mésoton.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.212, p669-671; Avr 21, 1941

IV.14 Intégrales Premières du Mouvement du Mésoton.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.212, p751-753; Mai 5, 1941

IV.15 Sur la Théorie des Particules Matérielles et en particulier Sur les Electrons de Spin 1/2.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.214, p606-607; Mar 23, 1942

IV.16 Sur les Propriétés d'une Nouvelle Particule Elémentaire.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.216, p337-339; Mar 8, 1943

IV.17 Sur un Nouveau Type d'Electron.
Portugaliae Physica; Vol.1, No.2, p59-66; Sept 1943

IV.18 Non Conservative Fundamental Particles.
Nature; Vol.154, p674; Nov 25, 1944

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la théorie du positon.*
Note de M. **Alexandre Proca.**

MM. Pauli et Weisskopf ont montré (¹) que, si l'on part de l'équation relativiste de Gordon, les difficultés de la théorie actuelle des positons, basée sur l'équation de Dirac, disparaissent; néanmoins, étant donné son point de départ, cette solution n'est naturellement pas satisfaisante.

Il ne semble pas absurde d'espérer qu'on puisse obtenir une théorie correcte si l'on partait d'une équation bénéficiant *à la fois* des avantages de l'équation de Dirac (existence d'un spin et d'un moment électromagnétique) et de celle de Gordon (énergie essentiellement positive, charge des deux signes).

Une telle théorie doit satisfaire aux conditions suivantes : 1° présenter l'invariance relativiste et électromagnétique (invariance de jauge); 2° comporter une *fonction d'onde* n'ayant pas plus de quatre composantes complexes (c'est-à-dire tout autant que celle de Dirac); 3° le passage au cas d'un champ extérieur doit se faire comme d'habitude, en ajoutant les composantes du potentiel aux $h/2\pi i . \partial/\partial x_r$; 4° on doit pouvoir former un vecteur d'univers représentant la densité de courant et de charge, qui satisfasse toujours une équation de conservation et dont la composante de temps (la charge) puisse prendre des valeurs aussi bien positives que négatives; 5° on doit pouvoir former un tenseur symétrique du second rang dont les composantes $s4$ représentent la densité d'énergie — quantité de mouvement; ses composantes doivent vérifier une loi de conservation; 6° la composante 44 de ce tenseur doit être une forme *positive définie;* 7° on doit pouvoir mettre en évidence l'existence d'un spin et, enfin, 8° celle d'un moment électrique et magnétique.

Les conditions précédentes, jointes à des considérations de simplicité,

(¹) *Helvetica Physica Acta*, fasc. 7, 1934, p. 709; voir aussi Pauli, *Annales de l'Institut Henri-Poincaré* (sous presse).

limitent considérablement notre choix. Pour satisfaire à 2° par exemple, on peut prendre : *a*, soit deux spineurs ψ_r, χ_s (solution deDirac); *b*, soit un vecteur complexe; *c*, soit un spineur du second rang $g_{rs}(r, s = 1, 2)$; *d*, soit enfin une grandeur à plus de deux indices, soumise à certaine condition de symétrie. Si l'on tient compte du fait que la solution de Dirac ne convient pas, et que se donner g_{rs} revient à se donner un tenseur antisymétrique (1) de rang 2 et deux invariants, on voit que la *fonction d'onde la plus simple* sera représentée par *un vecteur complexe d'univers.*

Considérons maintenant une autre indication fournie par les conditions précédentes.

D'après 4°, l'énergie doit être de la forme $\Sigma\Phi_r\Phi_r$. Un raisonnement analogue à celui de Dirac-Pauli (2) nous permet d'admettre que l'équation fondamentale est linéaire en $\partial\Phi/\partial x_r$; d'autre part, il est également permis d'admettre que l'on a, en cas d'absence de champ $\square\Phi - 4\pi^2 m^2 c^2/h^2 \Phi = 0$, comme conséquence de la relation $(W/c) = \Sigma p_\nu^2 + m^2c^2$. Or, si nous *linéarisons* cette dernière équation en considérant Φ comme fonction d'onde, nous savons, d'après Dirac, que ce n'est pas l'énergie qui se présente sous la forme d'une fonction définie positive, mais bien la composante de temps d'un vecteur (assimilable à la charge). Il en résulte que les Φ ne sont pas les composantes de la fonction d'onde ψ_r dont nous avons parlé plus haut, ou plutôt que la somme $\Sigma\Phi^*\Phi$ ne contient pas *que* ces composantes; y figureront aussi des fonctions de celles-ci, combinaisons des ψ_r et des $\partial/\partial x_s$. Il en est ainsi par exemple dans la théorie de Gordon : la *fonction d'onde* est un *scalaire* ψ, on a $\Phi_r = \partial\psi/\partial x_r$ et l'énergie est une combinaison de ceux-ci, à laquelle s'ajoute un terme ne dépendant que de la fonction d'onde, et ayant la forme $\psi^*\psi$.

Comme l'énergie, la fonction de Lagrange (qui est un invariant) sera de la forme ΣA^*A. En prenant pour fonction d'onde ψ_r un vecteur d'univers, elle comportera des termes dépendant seulement des composantes de ce vecteur et aussi d'autres, formés par combinaison entre ψ_r et $\partial/\partial x_r$. La combinaison invariante la plus simple des ψ_r est $\Sigma\psi_r^*\psi_r$; celle contenant les dérivées sera la *divergence* $A = \Sigma\, \partial\psi_r/\partial x_r$.

Le second degré de complication serait représenté par le cas d'un A tenseur du second rang, $A = \partial\psi_r/\partial x_s$, et plus particulièrement celui qui a le nombre minimum de composantes, à savoir le *rotationnel* $A_{rs} = \partial\psi_s/\partial x_r - \partial\psi_r/\partial x_s$.

(1) Cf. LAPORTE et UHLENBECK, *Physical Review*, **37**, 1930, p. 1380.

(2) *Handbuch der Physik*, **211**, 1933, p. 217.

Les fonctions de Lagrange les plus simples seraient donc de la forme

$$\mathrm{L}_1 = \sum_r \frac{\partial \psi_r^*}{\partial x_r} \sum_r \frac{\partial \psi_r}{\partial x_r} + k^2 \sum_r \psi_r^* \psi_r, \tag{1}$$

$$\mathrm{L}_2 = \sum_{rs} \mathrm{A}_{rs}^* \mathrm{A}_{rs} + k^2 \sum_r \psi_r^* \psi_r, \tag{2}$$

k étant un coefficient constant proportionnel à la masse propre. La seconde, que nous écrirons explicitement (en absence de champ)

$$\mathrm{L} = \frac{h^2 c^2}{8\pi^2} \sum_{rs} \left(\frac{\partial \psi_s^*}{\partial x_r} - \frac{\partial \psi_r^*}{\partial x_s} \right) \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial \psi_r}{\partial x_s} \right) + m^2 c^4 \sum_r \psi_r^* \psi_r \tag{3}$$

et qui dans le cas d'un champ devient ce qu'exige la condition 3°, satisfait à toutes les conditions énoncées plus haut.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 202, p. 1366, séance du 20 avril 1936.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
104481-36 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur les équations fondamentales des particules élémentaires.* Note de M. **Alexandre Proca**.

Notations. — La fonction d'onde sera un vecteur complexe ψ_r dans l'univers x_r à quatre dimensions ([1]). Nous poserons pour abréger

$$(1)\qquad \partial_r = \frac{\partial}{\partial x_r}, \qquad k = \frac{mc}{h}, \qquad A_s = \frac{e}{hc}\Phi_s, \qquad H_{rs} = \frac{hc}{e}(\partial_r A_s - \partial_s A_r),$$

H_{rs} étant le champ extérieur, Φ_s son potentiel, h la constante de Planck divisée par 2π, m la masse, e la charge de la particule et c la vitesse de la lumière; l'astérisque représentera la quantité complexe conjuguée. Nous poserons également

$$(2)\qquad F_{rs} = (\partial_r + iA_r)\psi_s^* - (\partial_s + iA_s)\psi_r^*, \qquad G_{rs} = (\partial_r - iA_r)\psi_s - (\partial_s - iA_s)\psi_r = F_{rs}^*;$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{4}(\partial_\mu + iA_\mu)^2 = \Box_+, \qquad &&\sum_{\mu=1}^{4}(\partial_\mu - iA_\mu)^2 = \Box_-, \\ &\sum_{\mu=1}^{4}(\partial^\mu + iA^\mu)\psi_\mu^* = J, \qquad &&\sum_{\mu=1}^{4}(\partial^\mu - iA^\mu)\psi_\mu = I. \end{aligned}\right.$$

Relations fondamentales. — La fonction de Lagrange sera, avec les conventions de sommation habituelles

$$(4)\qquad L = \frac{h^2c^2}{2}F_{rs}G_{rs} + m^2c^4\psi_r^*\psi_r.$$

et les équations

$$(5)\qquad (\partial^r + iA^r)F_{rs} = k^2\psi_s^*, \qquad (\partial^r - iA^r)G_{rs} = k^2\psi_s.$$

([1]) Cf. notre précédente Note, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1366. Pour la symétrie, nous écrirons la quatrième composante $x_4 = \varepsilon ct$, $\varepsilon = \sqrt{-1}$; cet ε ne doit pas être confondu avec le $i = \sqrt{-1}$ de $\psi_r = a_r + ib_r$. On a $\varepsilon i = i\varepsilon$. L'astérisque ne change que le signe de i, mais pas celui de ε. On aura $\psi_4 = a_4 + ib_4 = \varepsilon a_0 + i\varepsilon b_0$, les a_0, b_0 étant réels.

soit

$$(6)\quad \begin{cases} \square_+ \psi_s^* - (\partial_s + iA_s)J = \left(k^2 \delta_{rs} + \dfrac{ie}{hc} H_{rs}\right) \psi_s^*, \\ \square_- \psi_s - (\partial_s - iA_s)I = \left(k^2 \delta_{rs} - \dfrac{ie}{hc} H_{rs}\right) \psi_r. \end{cases}$$

En absence de champ, et *pourvu que la masse de la particule ne soit pas nulle* (condition essentielle sur laquelle nous reviendrons), on aura $I = 0$, $J = 0$ et les équations (6) se réduiront à

$$(7)\qquad \square \psi_s^* = k^2 \psi_s^*, \qquad \square \psi_s = k^2 \psi_s.$$

Dans le cas général

$$(8)\qquad J = -\frac{ieh}{2mc}\frac{1}{mc^2} F_{rs} H_{rs}, \qquad I = +\frac{ieh}{2mc}\frac{1}{mc^2} G_{rs} H_{rs}.$$

La densité de courant est donnée par

$$(9)\qquad j_s = iehc(\psi_r^* G_{rs} - \psi_r F_{rs}).$$

Elle satisfait toujours à une équation de continuité $\partial^s j_s = 0$. La charge

$$j_4 = iehc(\psi_r^* G_{r4} - \psi_r F_{r4})$$

peut prendre des valeurs positives ou négatives.

Le tenseur densité d'énergie-quantité de mouvemeut est

$$(10)\qquad T_{r\rho} = h^2 c^2 (F_{rs} G_{\rho s} + F_{\rho s} G_{rs}) + m^2 c^4 (\psi_r^* \psi_\rho + \psi_\rho^* \psi_r) - \delta_{r\rho} L.$$

Il est symétrique et satisfait à la relation $\partial^r T_{r\rho} = j_s H_{\rho s}$. La densité d'énergie $E = - T_{44}$ est essentiellement positive, comme somme de carrés de grandeurs réelles.

La densité de moment électrique et magnétique sera donnée par

$$(11)\qquad m_{rs} = iehc(\psi_r^* \psi_s - \psi_s^* \psi_r).$$

Elle fournit une contribution $\partial^r m_{rs}$ au courant total, lequel peut s'écrire sous la forme

$$(12)\qquad j_s = iehc[\psi_r(\partial_s + iA_s)\psi_r^* - \psi_r^*(\partial_s - iA_s)\psi_r + \psi_s^* I - \psi_s J] + \partial^r m_{rs}.$$

En absence de champ, cette relation prend l'aspect plus frappant suivant :

$$(13)\qquad j_s^0 = iehc[\psi_r . \partial_s \psi_r^* - \psi_r^* . \partial s \psi_r] + \partial^r m_{rs}.$$

En d'autres termes, le courant se compose d'un courant de conduction du type de Gordon et d'un courant de polarisation déduit du moment (11).

Enfin le moment cinétique défini par

$$\mathrm{P}_{r\rho} = \frac{1}{\varepsilon c} \int (x_r \mathrm{T}_{4\rho} - x_\rho \mathrm{T}_{4r})\, d\mathrm{V} \qquad (r, \rho = 1, 2, 3), \tag{14}$$

est la somme d'un moment analogue à ce qu'on pourrait appeler un « moment d'orbite » et d'un *spin* :

$$\mathfrak{M}_{r\rho} = \frac{ch^2}{\varepsilon} \int (\psi_\rho \mathrm{F}_{4r} + \psi_r \mathrm{F}_{\rho 4} + \psi_\rho^* \mathrm{G}_{4r} + \psi_\rho^* \mathrm{G}_{\rho 4})\, d\mathrm{V}. \tag{15}$$

On remarquera que la densité de ce spin ne se présente pas comme dans la théorie de Dirac sous la forme d'un tenseur complètement antisymétrique du troisième rang. La décomposition du moment total étant jusqu'à un certain point arbitraire, on peut donner au spin cette forme, mais seulement au prix d'une séparation tout à fait artificielle.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 202, p. 1490, séance du 4 mai 1936.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
104573-36 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs

Note de l'Editeur:

Le texte de l'article ci - après comporte — dans la version publiée dans les collections — diverses erreurs demeurées présentes même après correction des épreuves.
La version reproduite ici contient les corrections autographes de l'Auteur.

SUR LA THÉORIE ONDULATOIRE DES ÉLECTRONS POSITIFS ET NÉGATIFS

Par Al. PROCA.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire — Les principales difficultés *analytiques* que rencontre la théorie des positons de Dirac sont dues à l'existence des solutions à énergie négative. Se basant sur l'exemple de l'équation de Gordon, analysé par Pauli et Weisskopf, l'auteur essaie d'établir une théorie d'où ces difficultés soient exclues. Pour cela, il cherche d'abord une équation fondamentale qui présente à la fois les caractéristiques de celle de Gordon (énergie toujours *positive*, charge des deux signes) et de celle de Dirac (existence d'un spin et d'un moment électromagnétique).

L'auteur pose à priori certaines conditions que devrait remplir la théorie et trouve les équations fondamentales. Il montre ensuite que la théorie a les caractéristiques suivantes : elle est invariante du point de vue de la relativité et présente également l'invariance de jauge; le passage au cas d'un champ se fait à la manière usuelle; la fonction d'onde n'a que quatre composantes complexes (qui forment un vecteur d'univers); il est possible de définir un courant qui satisfait à une équation de conservation, et une charge qui peut être positive *ou* négative, de sorte que la théorie embrasse aussi bien le cas des électrons positifs que celui des électrons négatifs; on peut former un tenseur symétrique d'énergie-quantité de mouvement satisfaisant à une équation de continuité et tel que l'énergie soit toujours positive; et enfin on peut définir le moment magnétique de la particule ainsi que son spin.

Introduction. — La théorie des « trous » de Dirac est actuellement la seule qui permette des prévisions sur le comportement des positons; la découverte expérimentale de ces derniers en a confirmé l'hypothèse fondamentale et a montré que l'équation proposée rendait compte aussi bien des électrons positifs que des électrons négatifs. Toutefois les difficultés qu'elle rencontre restent considérables; sans parler des énergies propres infinies, la structure même de la théorie en fait surgir d'autres, dont le moindre inconvénient est de rendre très malaisée l'analyse des cas les plus simples.

On sait en quoi consistent ces difficultés. Pour décrire un positon. On a besoin de postuler l'existence d'une densité uniforme mais infinie d'électrons négatifs, sans interaction mutuelle. Seuls les écarts à partir de cette distribution uniforme doivent être considérés comme observables; toute place inoccupée sur un niveau d'énergie *négative*, tout « trou », constitue un positon.

On a souvent souligné ce qu'il y a de difficilement acceptable, du point de vue physique, dans l'hypothèse d'une distribution infinie d'électrons. Du point de vue mathématique elle nous oblige constamment à évaluer des différences entre des quantités dont nous savons à l'avance qu'elles sont infinies. Et cependant les résultats qu'on a pu obtenir jusqu'à présent semblent bien montrer que cette théorie représente correctement la réalité.

Indubitablement, les difficultés précédentes sont dues aux solutions de l'équation de Dirac caractérisées par une énergie cinétique négative. Ces solutions n'ont pas de sens physique. Pour les relier à quelque chose ayant un tel sens il faut faire des suppositions d'un caractère nécessairement artificiel, comme par exemple l'hypothèse d'une densité infinie d'électrons. Il est très probable que si l'équation de l'électron excluait automatiquement ce type de solution, toute difficulté de ce genre s'évanouirait. Nous en avons même un commencement de preuve. MM. Pauli et Weisskopf, dans un mémoire fondamental [1], ont remarqué que si la fonction d'onde de l'électron était donnée par l'équation relativiste *de Gordon*, aucune des difficultés précédentes ne serait à craindre.

En effet d'après la théorie de Gordon l'énergie de la particule élémentaire est toujours positive, tandis que sa charge peut être aussi bien positive que négative. La même équation représente à la fois les négatons et les positons, sans qu'il soit besoin de recourir à l'hypothèse de l'existence d'une densité infinie d'électrons. De plus, Pauli et Weisskopf ont montré que les résultats qu'on obtient dans le problème de la production des paires pour les grandes énergies ou dans celui de la polarisation du vide sont *les mêmes*, que l'on parte de l'équation de Gordon ou de l'hypothèse des « trous ».

En face du problème du positon deux attitudes sont donc possibles : celle de Dirac, Heisenberg, etc., — qui prennent comme point de départ l'équation de Dirac (énergie de deux signes, charge toujours positive); ou celle de Pauli et Weisskopf, — qui préconisent l'emploi d'une autre équation conduisant à une énergie positive et à une charge de deux signes.

Il est clair que les faits expérimentaux seraient en faveur de cette seconde manière de voir *si l'on connaissait une équation de départ convenable*, équivalente dans ses conséquences à celle de Dirac.

(1) *Helvetica Physica Acta*, 1934, vol. 7, fasc. 7, p. 709. Voir aussi une conférence de W. Pauli. *Annales de l'Institut Henri-Poincaré* (sous presse).

L'équation de Gordon employée par Pauli et Weisskopf ne convient pas. Elle ne rend pas compte du spin de l'électron et c'est là probablement son plus grave défaut. Cela a comme conséquence le fait que le traitement indiqué par ces auteurs ne peut s'appliquer que si l'on admet pour les particules en question la statistique de Bose-Einstein, ce qui est manifestement incorrect. Il est impossible (Pauli, *loc. cit.*,) d'employer avec l'équation de Gordon la statistique de Fermi-Dirac, comme on devrait pouvoir le faire.

Si l'on veut donc procéder comme ces auteurs, la première des choses à faire consiste à trouver une autre équation que celle de Gordon qui jouisse des propriétés de cette dernière et soit mieux adaptée qu'elle à la description d'un électron. Il y a donc lieu de reprendre les raisonnements qui ont conduit Dirac à établir son équation et à les modifier de façon à en obtenir une autre plus satisfaisante.

2. Conditions à remplir par l'équation fondamentale. — A la lumière des découvertes expérimentales récentes, l'obtention d'une équation de ce genre ne semble pas impossible *a priori* ; examinons quelles doivent être les principales conditions qu'elle aurait à remplir.

Remarquons d'abord que l'argumentation de Dirac, qui l'avait conduit à établir son équation à une époque où l'on ne connaissait pas l'existence et les propriétés du positon, n'est plus convaincante aujourd'hui quand on connaît le phénomène de la production et d'annihilation des paires. La discussion correspondante a été faite par Pauli et Weisskopf qui ont remarqué :

1° Qu'à cause de la production des paires il n'est plus possible de se limiter en mécanique quantique au problème d'un seul électron ; les résultats expérimentaux connus ne peuvent coïncider qu'avec les prévisions théoriques déduites de la résolution d'un problème de plusieurs corps.

2° Qu'il n'y a plus de sens physique à parler d'une densité *de particules* ; la densité de charge par contre, ainsi que la charge elle-même, conservent un sens physique précis et sont des quantités observables. La charge comprise dans un volume donné, considérée comme opérateur, a des valeurs propres proportionnelles aux nombres entiers *positifs* et *négatifs*.

Il résulte de ces remarques qu'il n'y a plus aucune raison valable pour postuler comme forme particulière de la densité de charge

$$\Sigma\psi_r^*\psi_r \tag{1}$$

ainsi que le fait Dirac pour établir son équation. Une conséquence immédiate en est que l'équation fondamentale ne doit plus être nécessairement *linéaire* en $\partial\psi_r/\partial t$: l'équation de Gordon est bien dans ce cas. Nous verrons au paragraphe suivant de quelle manière on peut utiliser le raisonnement de Dirac pour établi la nouvelle équation.

Quoi qu'il en soit, cette nouvelle équation doit satisfaire aux conditions ci-après :

1. — *Elle doit présenter l'invariance relativiste et électromagnétique* (invariance de jauge).

2. — *La fonction d'onde ne doit avoir que quatre composantes.* En effet, quatre composantes suffisent dans la théorie de Dirac pour rendre compte des phénomènes connus et il n'y a aucune raison de dépasser ce nombre. Au surplus, il semble facile d'établir une théorie à un plus grand nombre de composantes, mais il est clair qu'une pareille tentative serait sans intérêt tant que l'expérience ne nous l'aura pas imposée.

3. — *Le passage au cas de l'existence d'un champ extérieur doit se faire comme toujours en ajoutant aux opérateurs* $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_r}$ *les opérateurs* Φ_r *du potentiel de ce champ.* Il n'y a aucune raison de renoncer à cette condition qui s'impose pour des raisons de correspondance.

4. — *On doit pouvoir former un vecteur d'univers représentant la densité de courant et de charge.*

5. — *En vertu de l'équation fondamentale, ce courant doit satisfaire à une loi de conservation*, aussi bien en présence qu'en absence d'un champ.

6. — *La composante de temps de ce vecteur, — la densité de charge, — doit pouvoir être positive ou négative.* Cette condition est essentielle.

7. — *On doit pouvoir former un tenseur symétrique du second rang représentant le tenseur densité d'énergie — quantité de mouvement.*

8. — *En vertu de l'équation fondamentale ce tenseur doit satisfaire à une loi de conservation* de la forme $\sum_r \frac{\partial T_{rk}}{\partial x_r} = 0$ dans le vide, ou $\sum_r \frac{\partial T_{rk}}{\partial x_r} = -\sum_r j_r F_{rk}$ où j_r est le courant et F_{rk} le champ extérieur.

9. — *La densité d'énergie doit pouvoir être positive ou nulle, son expression devra donc être une forme définie positive*, cela aussi bien en absence qu'en présence d'un champ extérieur. Cette condition est essentielle.

10. — *On doit pouvoir mettre en évidence l'existence d'un spin et d'un moment magnétique.*

3. Indications pour le choix d'une équation fondamentale. — Les raisonnements par lesquels on arrive à l'équation fondamentale ne peuvent avoir un caractère absolu ; ils ne servent, en fait, qu'à guider notre choix. Une fois ce choix fait, on postule l'équation trouvée et l'on justifie ce postulat par les résultats obtenus. Il en était ainsi d'ailleurs dans la théorie de Dirac et certains raisonnements employés à cette occasion, convenablement modifiés, peuvent encore servir.

Notre point de départ est la condition 9 suivant laquelle la densité d'énergie doit être représentée par une forme positive définie

$$\sum_r \Phi_r^* \Phi_r$$

où les Φ_r peuvent être soit les composantes d'une fonction que nous appellerons la « fonction d'onde », soit plus généralement des *fonctions de celles-ci.* La conservation de l'énergie s'exprimera par

$$\frac{d}{dt}\int \sum \Phi_r^* \Phi_r = \int \sum \left(\frac{\partial \Phi_r^*}{\partial t}\Phi_r + \Phi_r^* \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right) dv = 0,$$

l'intégrale étant étendue à un volume convenable ou bien à tout l'espace. On pourrait en déduire comme en théorie de Dirac [1] qu'à un instant déterminé on ne peut assigner simultanément des valeurs arbitraires à

$$\partial \Phi_r^*/\partial t,\ \partial \Phi_r/\partial t \quad \text{et à} \quad \Phi_r^*,\ \Phi_r.$$

Donc les Φ satisfont des équations linéaires en $\partial/\partial t$ et, par symétrie, linéaires aussi en $\partial/\partial x_r$.

D'autre part, la relation fondamentale

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2c^2$$

conduit à l'équation du second ordre

$$\square \Phi_r - \frac{m^2c^2}{h^2}\Phi_r = 0 \tag{2}$$

et il est naturel de postuler comme en théorie de Dirac que celle-ci est satisfaite dans le cas de l'absence de champ.

Nous devons donc linéariser (2) c'est-à-dire trouver un système d'équations dont (2) soit la conséquence. Or, seule la solution de Dirac conduit à une véritable *linéarisation* et celle-ci ne convient pas à notre problème. On en déduit que les Φ_r ne sont pas les « fonctions d'onde », ou plutôt que l'expression de l'énergie ne contiendra pas *uniquement* des termes dépendant directement des fonctions d'onde ψ_s. Il y aura aussi des termes qui seront nécessairement des combinaisons des ψ_s et des $\partial/\partial x_r$ et l'ensemble permettra une sorte de « linéarisation » ; un exemple, fera mieux saisir en quoi elle consiste. Prenons comme équation à linéariser

$$\square \Phi_r - k^2 \Phi_r = 0 \qquad (r = 0, 1, 2, 3). \tag{2}$$

Le système

$$\Phi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \Phi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \Phi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad \Phi_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = k^2\psi \tag{4}$$

où ψ est un scalaire a comme conséquence la relation (2); il suffit de dériver (4) et d'y substituer (3). Il est clair cependant que l'équation fondamentale reste celle du second ordre qui définit ψ

$$\square \psi = k^2 \psi; \tag{5}$$

les Φ_r s'en déduisent par des équations du premier ordre.

(1) Pauli. *Handbuch der Physik*, vol. 19, p. 217.

Quoi qu'il en soit, si l'on se donne le *scalaire* complexe ψ satisfaisant à (5), on pourra en déduire les Φ_r par (3), et, par conséquent, écrire un tenseur du second rang dont la composante de temps

$$\Phi_0^* \Phi_0 + \sum_{r=1}^{3} \Phi_r^* \Phi_r + k^2 \psi^* \psi, \tag{6}$$

sera une forme positive définie. Cela montre qu'on peut établir de cette façon une théorie d'une particule à énergie positive.

L'équation fondamentale (5) est l'*équation de Gordon* et la théorie correspondante a été développée par Pauli et Weisskopf. Elle remplit bien les conditions du paragraphe précédent, *sauf 2 et 10.* En généralisant le procédé précédent, nous trouverons un autre système qui satisfasse aussi à ces deux dernières conditions.

Dans l'exemple précédent le ψ, la fonction d'onde, est un scalaire. Or, nous avons besoin d'une grandeur à quatre composantes complexes. On peut prendre deux spineurs ψ_r, χ_s. On pourrait prendre un vecteur complexe formé en combinant les quatre composantes des deux vecteurs réels a_{rs}, b_{rs}. On pourrait aussi prendre les $2 \times 2 = 4$ composantes complexes d'un spineur du second rang g_{rs} et là s'arrêtent les possibilités simples [1].

La solution par deux spineurs est la solution de Dirac qui ne convient pas. Ensuite, se donner un g_{rs} revient à se donner un tenseur antisymétrique du second rang à composantes réelles [2] et deux invariants. Enfin la dernière solution, celle qui prend comme fonction d'onde un vecteur, est la plus simple; c'est celle que nous allons adopter.

L'exemple précédent est complètement caractérisé lorsqu'on se donne la fonction de Lagrange correspondante, qui est, d'après Gordon,

$$L = h^2c^2 \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + m^2c^4 \psi^* \psi \qquad (\mu = 1, \ldots 4).$$

Le tenseur densité d'énergie

$$T_{\mu\nu} = h^2c^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu}\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\right) + L.\delta_{\mu\nu}$$

les équations, etc., s'en déduisent immédiatement. Cherchons le L possible dans le cas d'une fonction d'onde vecteur d'univers ψ_r. L est un invariant; il apparaît additivement dans l'expression T_{44} et par conséquent sera constitué, comme l'énergie, par une somme de termes de la forme A^*A. Parmi ceux-ci il y en aura : 1° des termes contenant explicitement les composantes de la fonction ψ; la combinaison invariante la plus simple qu'ils puissent former est

$$\sum \psi_r^* \psi_r;$$

(1) On pourrait cependant prendre des grandeurs à plusieurs indices en leur imposant certaines conditions de symétrie; ~~par ex. g_{rst} antisymétrique en r et~~ t, n'a ~~que~~ quatre composantes non ~~nulles~~.

(2) Cf. Laporte et Uhlenbeck. *Physical Review* (1930), p. 1587.

et 2° des termes formés en combinant $\partial/\partial x_r$ et ψ_r. La combinaison la plus simple serait la divergence $A = \partial\psi_r/\partial x_r$; on constate qu'elle ne convient pas. Le second degré de complication serait A = un tenseur du second rang du type $\partial\psi_r/\partial x_s$ et plus particulièrement celui qui a le nombre minimum de composantes, à savoir le *rotationnel du vecteur* ψ_r :

$$A_{rs} = \frac{\partial\psi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial x_s};$$

Le Lagrangien le plus simple sera donc de la forme

$$L = \sum_{rs} A^*_{rs} A_{rs} + k^2 \sum_r \psi^*_r \psi_r,$$

où k est une constante que nous prendrons, pour des raisons qui apparaîtront par la suite, proportionnelle à la masse propre. Nous écrirons explicitement, par hypothèse, pour le cas de l'absence de champ

$$L = \frac{h^2c^2}{2}\left(\frac{\partial\psi^*_s}{\partial x_r} - \frac{\partial\psi^*_r}{\partial x_s}\right)\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial x_s}\right) + m^2c^4\psi^*_r\psi_r$$

avec la convention de sommation habituelle. Le Lagrangien pour le cas d'un champ extérieur se déduira du précédent par la règle connue (condition 3).

*
* *

4. Notations. Fonction de Lagrange. — Pour des raisons qui seront évidentes dans un instant, nous n'adopterons pas des notations analogues à celles employées en théorie de Dirac; il n'y aurait à le faire aucune difficulté, mais pas d'avantage immédiat.

Considérons donc un vecteur $\psi_r = a_r + \mathrm{i}\, b_r$ et son complexe conjugué $\psi^* = a_r - \mathrm{i}\, b_r$. Nous pouvons développer la théorie dans l'univers défini par $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_0 = ct$. Pour la symétrie des formules il est cependant avantageux d'admettre une quatrième coordonnée imaginaire ; toutefois, il faut dans ce cas prendre certaines précautions pour obtenir les conditions de réalité correctes.

Il suffira pour cela d'écrire les coordonnées sous la forme

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = y; \quad x_4 = \varepsilon ct. \tag{7}$$

ε étant une unité complexe telle que $\varepsilon^2 = -1$, commutable avec l'autre unité imaginaire i qui apparaît dans l'expression des ψ_r. Il sera donc faux d'écrire $\varepsilon i = -1$, mais on aura $\varepsilon i = i\,\varepsilon$. *L'astérisque indiquant le complexe conjugué, change le signe de* i *mais pas celui de* ε. Les composantes d'espace de ψ_r seront $a_r + ib_r$, a_r, b_r réels ($r = 1, 2, 3$), et la composante de temps $\psi_4 = \varepsilon a'_4 + i\varepsilon b'_4$ avec a'_4, b'_4, réels La complication introduite par l'emploi de deux unités complexes est rachetée par l'avantage de la symétrie. D'ailleurs, ε disparaîtra toujours lorsqu'on passera à la variable t; au surplus, pour plus de clarté nous éviterons d'employer l'astérisque pour des *fonctions* des ψ^*; nous indiquerons par des lettres différentes cette fonction et sa complexe conjuguée.

Posons enfin

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial x_r}; \qquad (r = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Cela étant, considérons le cas de *l'absence de champ*. Nous poserons

$$F'_{rs} = \partial_r\psi^*_s - \partial^*_s\psi_r, \qquad G'_{rs} = \partial_r\psi_s - \partial_s\psi_r; \tag{9}$$

F'_{rs} et G'_{rs} sont complexes conjuguées; elles contiennent un ε en facteur chaque fois que l'un des indices r ou s est égal à 4.

Par hypothèse, le Lagrangien du problème sera dans ce cas

$$L = \frac{h^2c^2}{2} F'_{rs}G'_{rs} + m^2c^4\psi^*_r\psi_r \tag{10}$$

h étant la constante de Planck divisée par 2π.

On passe *au cas où il existe un champ*, défini par un potentiel

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 = \varepsilon\Phi_0 \qquad (\Phi_0, \ldots \Phi_3 \text{ réels}) \tag{11}$$

par les substitutions (¹).

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial x_s} \to \frac{\partial\psi_r}{\partial x_s} - \frac{\mathrm{i}e}{hc}\Phi_s\psi_r \qquad \frac{\partial\psi^*_r}{\partial x_s} \to \frac{\partial\psi^*_r}{\partial x_s} + \frac{\mathrm{i}e}{hc}\Phi_s\psi^*_r. \tag{12}$$

Pour simplifier l'écriture posons :

$$A_s = \frac{e}{hc}\Phi_s \tag{13}$$

$$k = \frac{mc}{h}. \tag{14}$$

Posons encore

$$\left.\begin{aligned} F_{rs} &= (\partial_r + \mathrm{i}A_r)\psi^*_s - (\partial_s + \mathrm{i}A_s)\psi^*_r \\ G_{rs} &= (\partial_r - \mathrm{i}A_r)\psi_s - (\partial_s - \mathrm{i}A_s)\psi_r; \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

F_{rs} G_{rs} sont des tenseurs antisymétriques du second rang. La fonction de Lagrange dans le cas d'un champ s'écrit alors, avec la convention de sommation habituelle :

$$\boxed{L = \frac{h^2c^2}{2}.F_{rs}\,G_{rs} + m^2c^4\psi^*_r\psi_r}. \tag{16}$$

5. Equations fondamentales. — Les moments sont

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_r\psi_s)} = h^2c^2F_{rs} \qquad \frac{\partial L}{\partial(\partial_r\psi^*_s)} = h^2c^2G_{rs}.$$

Ensuite, on a

$$\frac{\partial L}{\partial\psi_s} = m^2c^4\psi^*_s - \mathrm{i}h^2c^2A_rF_{rs} \;\Bigg|\; \frac{\partial L}{\partial\psi^*_s} = m^2c^4\psi_s + \mathrm{i}h^2c^2A_rG_{rs}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_s} = \mathrm{i}h^2c^2(\psi_rF_{rs} - \psi^*_rG_{rs}). \qquad \text{Signe !}$$

(¹) Nous adoptons la convention de Pauli et Weisskopf pour le signe de e, cf. *loc. cit.*, p. 722.

$= \frac{\hbar}{2}\,\partial_r\,(\psi_r F_{rs} + \psi^*_r G_{rs})$

Les équations fondamentales

$$\partial^r\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_r\psi_s)}\right]=\frac{\partial L}{\partial\psi_s}\qquad \partial^r\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_r\psi_s^*)}\right]=\frac{\partial L}{\partial\psi_s^*}\qquad (20)$$

prennent la forme

$$\boxed{(\partial_r+\mathrm{i}A_r)F_{rs}=k^2\psi_s^*\quad(\partial_r-\mathrm{i}A_r)G_{rs}=k^2\psi_s}\qquad (21)$$

auxquelles il convient d'ajouter les équations (14) de définition des grandeurs intermédiaires F_{rs} et G_{rs}.

Elles ont la forme des équations de Maxwell (pour un « potentiel » imaginaire) complétées par des éléments représentant l'influence du champ extérieur ; on peut déduire de ce fait un certain nombre de conséquences que nous négligeons pour l'instant.

Elles présentent bien l'invariance relativiste et électromagnétique ; les trois premières conditions du paragraphe 2 sont donc remplies

Eliminons F_{rs}, G_{rs}. On a en général

$$\left.\begin{aligned}(\partial^r-\mathrm{i}A^r)(\partial^s-\mathrm{i}A^s)-(\partial^s-\mathrm{i}A^s)(\partial^r-\mathrm{i}A^r)\\ =-\mathrm{i}(\partial^rA^s-\partial^sA^r)\\ (\partial^r+\mathrm{i}A^r)(\partial^s+\mathrm{i}A^s)-(\partial^s+\mathrm{i}A^s)(\partial^r+\mathrm{i}A^r)\\ =+\mathrm{i}(\partial^rA^s-\partial^sA^r).\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

Posons

$$\left.\begin{aligned}&\Box_+=\sum_{\mu=1}^{4}(\partial_\mu+\mathrm{i}A_\mu)^2 &&\Box_-=\sum_{\mu=1}^{4}(\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu)^2\\ &J=\sum_{\mu=1}^{4}(\partial_\mu+\mathrm{i}A_\mu)\psi_\mu^* &&I=\sum_{\mu=1}^{4}(\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu)\psi_\mu\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

$$H_{rs}=\frac{hc}{e}(\partial_rA_s-\partial_sA_r).\qquad (24)$$

Les équations fondamentales deviennent

$$\left.\begin{aligned}\Box_+\psi_s^*-(\partial_s+\mathrm{i}A_s)J&=\left(k^2\delta_{rs}+\frac{\mathrm{i}e}{hc}H_{rs}\right)\psi_r^*\\ \Box_-\psi_s-(\partial_s-\mathrm{i}A_s)I&=\left(k^2\delta_{rs}\cancel{+}\frac{\mathrm{i}e}{hc}H_{rs}\right)\psi_r\end{aligned}\right|\quad(25)$$

Dans le cas de l'absence de champ et pourvu que k, donc *la masse de la particule, ne soit pas nulle*, condition essentielle, on déduit que

$$I=J=0.\qquad (26)$$

En effet, (25) deviennent dans ce cas

$$\Box\psi_s^*-\partial_sJ=k^2\psi_s^*\qquad \Box\psi_s-\partial_sI=k^2\psi_s$$

et en appliquant l'opérateur $\sum_s\partial_s$, on déduit le résultat annoncé (26).

Donc, *en absence de champ, les équations sont des équations du type de Gordon*

$$\begin{aligned}\Box\psi_s^*&=k^2\psi_s^*\\ \Box\psi_s&=k^2\psi_s\end{aligned}\quad\text{avec}\quad\left|\begin{aligned}&\partial_s\psi_s^*=\partial_s\psi_s=0\\ &k=\frac{mc}{h}.\end{aligned}\right.\qquad(27)$$

Dans le cas général, appliquons l'opérateur $\sum_s\partial_s$ à (21) ; on aura :

$$-\frac{\mathrm{i}e}{2hc}F_{rs}.H_{rs}=k^2J\qquad \frac{\mathrm{i}e}{2hc}G_{rs}.H_{rs}=k^2I,$$

donc, si $k=0$ et seulement dans ce cas :

$$J=-\frac{\mathrm{i}eh}{2mc}.\frac{1}{mc^2}F_{rs}.H_{rs},\quad I=\frac{\mathrm{i}eh}{2mc}.\frac{1}{mc^2}.G_{rs}.H_{rs}.\qquad(28)$$

Remarquons tout de suite d'autres relations intéressantes.

En vertu de (17) les $\dfrac{\partial L}{\partial(\partial_r\psi_s)}$ sont des tenseurs *antisymétriques* ; on a donc

$$\partial^r\partial^s\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_r\psi_s)}\right]=\partial^r\partial^s\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_r\psi_s^*)}\right]=0.$$

Les équations fondamentales permettent d'en déduire

$$\partial^s\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_s}\right)=\partial^s\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_s^*}\right)=0.\qquad(29)$$

6. **Existence et conservation du courant.** — Nous définissons le courant, comme l'a fait Gordon d'après Mie, au moyen de la dérivée de la fonction de Lagrange par rapport au potentiel, changée de signe

$$j_s=-\frac{\partial L}{\partial\Phi_s}=-\frac{e}{hc}\frac{\partial L}{\partial A_s}\qquad(30)$$

soit, en vertu de (19)

$$j_s=\mathrm{i}ehc(\psi_r^*G_{rs}-\psi_rF_{rs}).\qquad(31)$$

Il est clair que (30) est un vecteur d'univers.

Il satisfait toujours à une loi de conservation $\partial^sj_s=0$. En effet, on a

$$\partial^sj_s=\mathrm{i}ehc\,(\partial_s\psi_r^*.G_{rs}+\psi_r^*.\partial_sG_{rs}-\partial_s\psi_r\,F_{rs}-\psi_r.\partial_sF_{rs}).$$

En vertu des équations fondamentales cela est égal à

$$=\mathrm{i}ehc\left[G_{rs}(\partial_s+\mathrm{i}A_s)\psi_r^*-F_{rs}(\partial_s-\mathrm{i}A_s)\psi_r\right]$$

et en vertu du caractère antisymétrique de F_{rs}, G_{rs}

$$=\mathrm{i}ehc\left[\frac{G_{rs}.F_{sr}}{2}-\frac{F_{rs}.G_{sr}}{2}\right]\equiv0.$$

Il existe donc un vecteur j_s satisfaisant à une loi de conservation ; pour que nous puissions affirmer qu'il représente bien un courant, il faut encore que, combiné avec le champ électromagnétique il fournisse bien l'expression de la force telle qu'elle résulte de la divergence du tenseur d'énergie ; nous montrerons qu'il en est bien ainsi.

En tout cas, la composante de temps est

$$j_4=\mathrm{i}ehc(\psi_r^*G_{r4}-\psi_rF_{r4});\qquad(32)$$

$\longrightarrow$ $\displaystyle\int L\,dV=\frac{h^2c^2}{2}\cdot\partial_{44}^2\left[\int(\psi_1^*\psi_1+\psi_2^*\psi_2+\psi_3^*\psi_3-\psi_4^*\psi_4)\,d\ldots\right]$ en l'absence de [illegible] *elle peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives.*

7. Tenseur énergie-quantité de mouvement et loi de conservation. — Pour établir à la fois l'expression de ce tenseur et sa loi de conservation procédons comme Schrödinger. Dérivons la fonction de Lagrange par rapport à x_ρ, ρ quelconque; on aura :

$$\partial_\rho L = \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)}.\partial^2_{r\rho}\psi_s + \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi^*_s)}.\partial^2_{r\rho}\psi^*_s + \frac{\partial L}{\partial \psi_s}.\partial_\rho \psi_s + \frac{\partial L}{\partial \psi^*_s}.\partial_\rho \psi^*_s + \frac{\partial L}{\partial A_s}.\partial_\rho A_s,$$

donc en vertu des équations fondamentales :

$$\partial_\rho L = \partial_r(L\delta_{r\rho}) = \partial_r \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)}.\partial_\rho\psi_s + \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi^*_s)}.\partial_\rho\psi^*_s \right\} + \frac{\partial L}{\partial A_s}.\partial_\rho A_s.$$

Soit H_{rs} le champ électromagnétique extérieur et j_r le courant

$$j_s = -\frac{e}{hc}\frac{\partial L}{\partial A_s}. \tag{30}$$

Nous avons démontré que $\mathrm{d}^s j_s = 0$; donc

$$H_{\rho s}\, j_s = -\frac{\partial L}{\partial A_s}.\partial_\rho A_s + \partial_s\left(\frac{\partial L}{\partial A_s}A_\rho\right). \tag{33}$$

Ajoutons (32) et (33); il vient en tenant compte des équations fondamentales

$$H_{\rho s}.j_s = \partial^r \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)}.\partial_\rho\psi_s + \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi^*_s)}.\partial_\rho\psi^*_s + \frac{\partial L}{\partial A_r}.A_\rho - \delta_{r\rho}L \right\} \tag{34}$$

$$H_{\rho s}.j_s = \partial^r \left\{ h^2c^2 F_{rs}.(\partial_\rho - \mathrm{i}A_\rho)\psi_s + h^2c^2 G_{rs}(\partial_\rho + \mathrm{i}A_\rho)\psi^*_s - \delta_{r\rho}L \right\}. \tag{35}$$

Or, on voit facilement que l'on a l'identité

$$0 \equiv \partial^r \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)}.\partial_s\psi_\rho + \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi^*_s)}.\partial_s\psi^*_\rho - \frac{\partial L}{\partial \psi_r}.\psi_\rho - \frac{\partial L}{\partial \psi^*_r}.\psi^*_\rho \right\}; \tag{36}$$

il suffit de tenir compte de (29) et du fait que les $\frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)}$, sont antisymétriques.

En explicitant (36) à l'aide des formules fondamentales (17) et (18) on a

$$0 \equiv \partial^r \left\{ h^2c^2 F_{rs}.(\partial_s - \mathrm{i}A_s)\psi_\rho + h^2c^2 G_{rs}.(\partial_s + \mathrm{i}A_s)\psi^*_\rho - m^2c^4(\psi^*_r\psi_\rho + \psi^*_\rho\psi_r)\right\}. \tag{37}$$

Retranchons (37) de (35); il vient en vertu de (15)

$$H_{\rho s}.j_s = \partial^r \left\{ h^2c^2(F_{rs}.G_{\rho s} + G_{rs}.F_{\rho s}) + m^2c^4(\psi^*_r\psi_\rho + \psi^*_\rho\psi_r) - \delta_{r\rho}L \right\} \tag{38}$$

soit

$$\boxed{\partial^r T_{r\rho} = H_{\rho s}.j_s} \tag{39}$$

où

$$\boxed{T_{r\rho} = h^2c^2(F_{rs}G_{\rho s} + F_{\rho s}G_{rs}) + m^2c^4(\psi^*_r\psi_\rho + \psi^*_\rho\psi_r) - \delta_{r\rho}L.} \tag{40}$$

Ce $T_{r\rho}$ est un tenseur *symétrique*; (39) montre que sa divergence est égale à la force de Lorentz. Il peut donc être choisi comme tenseur énergie-quantité de mouvement.

L'énergie est constamment positive. La densité d'énergie est définie par $E = -T_{44}$, et l'on a en explicitant L

$$E = h^2c^2\left(\frac{F_{r's'}.G_{r's'}}{2} - F_{4s}G_{4s}\right) + m^2c^4(\psi^*_{r'}\psi_{r'} - \psi^*_4\psi_4) \tag{41}$$

où s varie de 1 à 4, et r', s' de 1 à 3; soit encore en explicitant

$$E = h^2c^2(F_{23}G_{23} + F_{31}G_{31} + F_{12}G_{12} - F_{14}G_{14} - F_{24}G_{24} - F_{34}G_{34}) + m^2c^4(\psi^*_1\psi_1 + \psi^*_2\psi_2 + \psi^*_3\psi_3 - \psi^*_4\psi_4) \tag{42}$$

quantité essentiellement positive puisque G_{rs} est le conjugué complexe de F_{rs}.

8. Moment électromagnétique de l'électron. — Soit le courant

$$j_s = \mathrm{i}ehc(\psi^*_r G_{rs} - \psi_r F_{rs}). \tag{31}$$

On peut le considérer comme une somme de deux termes de forme particulière. En effet, en explicitant on a l'expression

$$j_s = \mathrm{i}ehc\left[\psi_r.(\partial_s + \mathrm{i}A_s)\psi^*_r - \psi^*_r.(\partial_s - \mathrm{i}A_s)\psi_r + \psi^*_s I - \psi_s J\right] + \partial^r(\psi^*_r\psi_s - \psi^*_s\psi_r). \tag{43}$$

Dans le cas d'un champ extérieur nul, $I = J = 0$ et le courant se réduit à

$$j^0_s = \mathrm{i}ehc\left[\psi_r.\partial_s\psi^*_r - \psi^*_r\,\partial_s\psi_r + \partial^r(\psi^*_r\psi_s - \psi^*_s\psi_r)\right]. \tag{44}$$

On peut donc séparer la densité de courant en deux parties $j_s = j'_s + j''_s$ tout comme dans la théorie de Dirac. La seconde :

$$j''_s = \mathrm{i}ehc.\partial^r(\psi^*_r\psi_s - \psi^*_s\psi_r) = \partial^r m_{rs}$$

se présente comme la densité de courant due à un tenseur moment électrique et magnétique m_{rs} (qui ne dépend pas explicitement du champ extérieur). Nous

$\psi_s \gamma_s = \frac{1}{2} G_{rs}\, m_{rs}$ Sans champ pouvons donc admettre que l'électron *possède un moment électromagnétique donné par*

$$m_{rs} = \mathrm{i}ehc\left(\psi_r^*\psi_s - \psi_s^*\psi_r\right). \tag{45}$$

Le reste

$$j'_s = \mathrm{i}ehc\left[\psi_r.(\partial_s + \mathrm{i}A_s)\psi_r^* - \psi_r^*.(\partial_s + \mathrm{i}A_s)\psi_r + \psi_s^* I - \psi_s J\right] \tag{46}$$

serait le courant de conduction. Comme dans la théorie de Dirac, chacun de ces courants partiels satisfait à une équation de continuité

$$\partial^s j'_s = 0 \quad \text{et} \quad \partial^s j''_s = 0.$$

9. **Spin**. — A partir du tenseur T_{rs} énergie quantité de mouvement, on obtient en général la valeur du moment cinétique en formant l'intégrale

$$P_{r\varrho} = \frac{1}{\varepsilon c}\int (x_r . T_{4\varrho} - x_\varrho . T_{4r})\,\mathrm{d}V \quad (r,\varrho = 1,2,3) \tag{47}$$

dans laquelle

$$\left.\begin{aligned} T_{4\varrho} &= h^2c^2(F_{4s}G_{\varrho s} + F_{\varrho s}G_{4s}) + m^2c^4\left(\psi_4^*\psi_\varrho + \psi_\varrho^*\psi_4\right) \\ T_{4r} &= h^2c^2(F_{4s}G_{rs} + F_{rs}G_{4s}) + m^2c^4\left(\psi_4^*\psi_r + \psi_r^*\psi_4\right). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Considérons un électron en absence de champ; on aura dans ce cas :

$$\begin{aligned} P_{r\varrho} &= \frac{1}{\varepsilon c}\int \Big\{ h^2c^2F_{4s}\,(x_r G_{\varrho s} - x_\varrho G_{rs}) + m^2c^4\psi_4^*(x_r\psi_\varrho \\ &\quad - x_\varrho\psi_r) + \text{conjugué}\Big\}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon c}\int\Big\{ h^2c^2[F_{4s}.x_r.\partial_\varrho\psi_s \\ &\quad - F_{4s}.x_r.\partial_s\psi_\varrho - F_{4s}.x_\varrho.\partial_r\psi_s + F_{4s}.x_\varrho.\partial_s\psi_r] + \\ &\quad + m^2c^4.\psi_4^*\,(x_r\psi_\varrho - x_\varrho\psi_r) + \text{conjugué}\Big\}\,\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

Pour $r = \varrho$, les composantes $P_{r\varrho}$ sont nulles; pour $r \neq \varrho$

$$x_r.\partial_\varrho\psi_s = \partial_\varrho(x_r\psi_s) \qquad x_\varrho\,\partial_r\psi_s = \partial_r\,(x_\varrho\psi_s) \tag{49}$$

et

$$\left.\begin{aligned} F_{4s}.x_r.\partial_s\psi_\varrho &= F_{4s}.\partial_s(x_r\psi_\varrho) - \psi_\varrho.F_{4r} \\ F_{4s}.x_\varrho.\partial_s\psi_r &= F_{4s}.\partial_s(x_\varrho\psi_r) - \psi_r.F_{4\varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} P_{4s} &= \frac{1}{\varepsilon c}\int \Big\{ h^2c^2\,[F_{4s}.\partial_\varrho(x_r\psi_s) - F_{4s}.\partial_s(x_r\psi_\varrho) \\ &\quad - F_{4s}.\partial_r(x_\varrho\psi_s) + F_{4s}.\partial_s(x_\varrho\psi_r) + h^2c^2\,(\psi_\varrho F_{4r} \\ &\quad - \psi_r F_{4\varrho}) + m^2c^4\psi_4^*(x_r\psi_\varrho - x_\varrho\psi_r) + \text{conjugué}\Big\}\,\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

En intégrant par parties et admettant comme d'habitude que les ψ_r s'annulent à la frontière, on aura

$$\begin{aligned} P_{r\varrho} &= \frac{1}{\varepsilon c}\int h^2c^2\Big\{ x_\varrho(\psi_s.\partial_r F_{4s} + \psi_s^*.\partial_r G_{4s}) \\ &\quad - x_r\left(\psi_s.\partial_\varrho F_{4s} + \psi_s^*.\partial_\varrho G_{4s}\right)\Big\}\,\mathrm{d}V + \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon c}\int h^2c^2\left(\psi_\varrho F_{4r} - \psi_r F_{4\varrho} + \psi_\varrho^* G_{4r} - \right. \\ &\quad \left. - \psi_r^* G_{4\varrho}\right)\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{51}$$

On peut regarder la première intégrale qui a la forme $\int (x_\varrho A_r - x_r A_\varrho)\mathrm{d}V$ comme l'équivalent d'un « moment d'orbite » et la seconde, où les x_r, x_ϱ n'interviennent plus explicitement, comme le moment propre de la particule.

La densité « spin » de cette dernière serait donc

$$\mathfrak{M} = h^2c^2\left(\psi_\varrho F_{4r} + \psi_r F_{\varrho 4} + \psi_\varrho^* G_{4r} + \psi_r^* G_{\varrho 4}\right). \tag{52}$$

Il est évident que cette décomposition est arbitraire, ce qui correspond d'ailleurs à la nature même des choses.

Remarquons que la variance relativiste du spin est celle du moment total (47) dont nous sommes partis; il ne saurait en être autrement. Ce spin diffère de celui qu'on rencontre en théorie de Dirac: en effet, il est bien constitué par les trois composantes de temps d'un tenseur de la forme P_{rst}, mais celui-ci *n'est pas complètement antisymétrique* comme dans le cas de l'équation de Dirac. Il est cependant facile de modifier la décomposition (51), pour séparer le moment total en un « moment d'orbite » et un spin qui soit un tenseur complètement antisymétrique du troisième rang. En effet on a pour $s = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} m^2c^4.x_r\psi_4\psi_\varrho^* &= h^2c^2.\psi_4.\partial_s(x_r F_{s\varrho}) - h^2c^2\psi_4.F_{r\varrho} \\ m^2c^4.x_\varrho\psi_4\psi_r^* &= h^2c^2.\psi_4.\partial_s\,(x_\varrho F_{sr}) - h^2c^2\psi_4.F_{\varrho r} \end{aligned}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} m^2c^4\psi_4\left(x_r\psi_\varrho^* - x_\varrho\psi_r^*\right) - h^2c^2.\psi_4.\partial_s(x_r F_{s\varrho} - x_\varrho F_{sr}) \\ = 2\,h^2c^2\;\psi_4.F_{\varrho r} \\ m^2c^4\psi_4^*(x_r\psi_\varrho - x_\varrho\psi_r) - h^2c^4.\psi_4^*.\partial_s\,(x_r G_{s\varrho} - x_\varrho G_{sr}) \\ = 2\,h^2c^2.\psi_4.G_{\varrho r}. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

On en déduit une séparation du moment total $P_{r\varrho}$ en un « moment d'orbite » et un « spin »

$$\frac{1}{\varepsilon c}\int h^2c^2\,(\psi_\varrho F_{4r} + \psi_r F_{\varrho 4} + \psi_4 F_{r\varrho} + \text{conjugué})\,\mathrm{d}V. \tag{54}$$

Sous cette forme la densité du spin serait formée par les composantes de temps d'un tenseur complètement antisymétrique du troisième rang exactement comme en théorie de Dirac.

Manuscrit reçu le 28 mai 1936.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur les photons et les particules* charge pure. Note de M. **Alexandre Proca**.

Nous avons développé (¹) une théorie quantique générale des particules et donné l'expression de certaines grandeurs physiques qui leur sont attachées. Considérons maintenant le cas de l'absence de champ ; en développant les calculs pour une particule qui se trouve dans un état déterminé, représenté par une onde plane $\psi_r = a_r e^{i\Sigma b_k x_k}$, on voit que, toutes choses égales d'ailleurs, à une énergie E (nécessairement positive $E = hc|b_0|$) correspondent *deux* cas possibles différant par le signe de b_0, donc par le signe de la charge. Cette circonstance se retrouve dans le cas général : c'est le signe de la charge qui provoque le dédoublement. Si la charge était nulle, les deux possibilités précédentes se réduiraient à une seule : examinons de plus près ce cas particulier.

Considérons l'expression *générale* de la densité de charge d'une particule en absence du champ

$$i_4 = iehc(\psi_r^* G_{r4} - \psi_r F_{r4}) \qquad (F_{rs} = G_{rs}^*). \tag{1}$$

Remarquons que dans cette expression figure nécessairement e, qui est une constante apparaissant dans l'équation fondamentale. La charge (1) peut être nulle dans deux cas : 1° pour $e = 0$; 2° pour ψ_r réel, $\psi_r = \psi_r^*$. Supposons que la charge et la masse au repos soient toutes les deux nulles, deux particules connues sont dans ce cas : le neutrino et le photon. Montrons que les deux alternatives précédentes correspondent respectivement au neutrino et au photon. Cela est évident pour 1° : $m = 0$, $e = 0$ sont bien les caractéristiques du neutrino. D'autre part, $e = 0$ ne saurait convenir pour un photon. En effet, plongeons celui-ci dans un champ électromagnétique et en particulier choisissons pour cela le champ d'une onde lumineuse. Le mouvement sera décrit par l'équation fondamentale, complétée par des termes de la forme $e\Phi_r/hc$ (cf. nos précédentes Notes).

(¹) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 1366 et 1490.

Si $e = 0$, il ne pourra y avoir aucune action du champ sur le photon, c'est-à-dire de la lumière sur la lumière; or, il semble bien qu'on connaisse, au moins dans un cas, l'existence d'une telle action, à savoir la diffusion de la lumière, signalée par Halpern et Debye et étudiée par Euler et par Euler et Kockel (1). Donc $e = 0$ ne caractérise certainement pas le photon.

Considérons maintenant une particule caractérisée par $m = 0$ et $\psi_r = \psi_r^*$. On voit aisément que sa charge, son courant et son moment électromagnétique sont nuls; son énergie est finie, son spin également (2); enfin, ses équations d'onde $\partial^r F_{rs} = 0$ sont identiques aux équations de Maxwell dans le vide (3). Ces diverses propriétés rendent plausible l'identification de cette particule avec un quantum de lumière.

Supposons qu'on ait affaire à un véritable photon dans un état déterminé, c'est-à-dire ayant une fréquence unique. S'il s'agissait d'une particule élémentaire cela signifierait que le développement de ψ_r ne devrait contenir qu'un seul terme de la forme $a_r e^{i\Sigma b_s x_s}$; or, ce ψ_r ne peut représenter un photon puisqu'il n'est pas réel. Le photon sera décrit par $\psi_r + \psi_r^*$, c'est-à-dire par

$$a_r e^{i\Sigma(b_s x_s)} + a_r^* e^{-i\Sigma(b_s x_s)}. \tag{2}$$

Le photon apparaît donc comme composé de la superposition de deux particules élémentaires en accord avec la féconde hypothèse fondamentale de M. L. de Broglie: ces particules ont même énergie (*positive*), même quantité de mouvement et même spin, mais des charges, des courants et des moments électromagnétiques opposés. L'important est le fait qu'*elles ne sont plus des neutrinos*, mais des particules *chargées*, de masse nulle; ce sont en quelque sorte des *charges pures*. Ce type de particule ne semble pas avoir attiré l'attention des chercheurs jusqu'à présent; elles ne sont mentionnées, à notre connaissance que dans un article de Einstein et Rosen (4). Quoi qu'il en soit, elles se présentent tout naturellement lorsqu'on applique la théorie générale au cas des photons; on peut espérer que, si elles existent,

---

(1) Halpern, *Physical Review*, 44, 1934, p. 885; Euler, *Annalen der Physik*, 26, 1936, p. 398; Euler et Kockel, *Die Naturwissenschaften*, 23, 1935, p. 246.

(2) Les expressions qui en résultent pour le spin sont étroitement apparentées à celles qui ont été proposées par M. Henriot dans le fascicule XXV du *Mémorial des Sciences physiques*, *Les couples de radiation et les moments électromagnétiques*, Paris, 1935.

(3) Cela n'est cependant pas un argument en faveur de l'identification de la particule à un photon, attendu que les F_{rs} *ne représentent pas* le champ lumineux.

(4) *Physical Review*, 48, 1935, p. 73.

elles seront beaucoup plus facilement décelables par l'expérience que ne l'ont été les neutrinos.

Une théorie de la lumière, développée sur les bases générales indiquées plus haut, serait parallèle en gros à celle de de Broglie, Jordan, Kronig, et conduirait vraisemblablement aux *mêmes* résultats finaux. Il faut remarquer que les raisonnements thermodynamiques de Jordan pourraient s'appliquer sans aucune modification aux particules *charge pure*, pourvu qu'on suppose qu'elles suivent la statistique de Fermi, ce qui n'est pas déraisonnable. Même sans adopter la théorie générale que nous avons proposée, on peut penser qu'il est plus avantageux de développer une théorie de la lumière sous la forme de de Broglie ou de Jordan et Kronig, mais en remplaçant les neutrinos par des particules *charge pure*, c'est-à-dire des particules ayant une *masse au repos nulle* et une charge *égale au quantum d'électricité e*. En effet, d'une part les raisonnements de ces auteurs ne sont pas altérés par cette modification ([1]), d'autre part on peut avancer que l'action de la lumière sur la lumière implique *probablement* l'action d'un champ électromagnétique sur un neutrino. Or on définit celui-ci, peut-être imprudemment, dans d'autres domaines de la Physique, comme une particule non chargée, en entendant par là précisément qu'un champ ne peut l'influencer en aucune manière. L'emploi des charges pures semble plus adéquat et nous permet au surplus l'espoir d'une mise en évidence expérimentale plus aisée.

([1]) Pour justifier l'existence d'un moment électromagnétique, M. L. de Broglie admet même, dans sa théorie, que les particules constituantes pourraient posséder une charge très petite.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 203, p. 709, séance du 19 octobre 1936.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
105602-36 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PARTICULES LIBRES
PHOTONS ET PARTICULES « CHARGE PURE »

Par Al. PROCA.
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur écrit les valeurs des principales grandeurs, énergie, moments, charge, etc..., attachées à une particule quelconque qui se meut dans le vide, en l'absence de champ extérieur, d'après les lois générales établies dans un article antérieur (*Journal de Physique*, 1936, 7, p. 347.).

Les résultats sont appliqués au photon. On en déduit que ce dernier est une particule « composée » comme dans la théorie de de Broglie, mais que les particules composantes ne sont pas des neutrinos. La théorie de la lumière entre par cette voie dans le cadre d'une mécanique quantique générale qui englobe notamment les électrons négatifs et les positons.

L'auteur insiste sur le nouveau type de particule ainsi introduit, la particule « charge pure », caractérisée par une masse au repos nulle et par une charge égale au quantum d'électricité, éléments qui semblent devoir faciliter sa mise en évidence expérimentale.

1. Introduction. — Cet article a pour but de mettre en relief certaines conséquences de la théorie quantique générale des particules que nous avons esquissée dans un travail antérieur (1), conséquences susceptibles d'acquérir un certain intérêt si la théorie en question s'avère exacte.

Nous admettrons que les équations que nous avons établies sont tout à fait générales et nous essaierons de les appliquer aux photons. Nous aboutirons à une théorie de la lumière dans laquelle le photon est bien une particule « composée », ainsi que le veut la théorie de de Broglie, Jordan et Kronig, les particules composantes n'étant cependant pas des neutrinos. Nous serons ainsi conduits tout naturellement à envisager l'existence d'une nouvelle particule caractérisée — comme le neutrino, — par une masse au repos nulle, mais *ayant en même temps une charge électrique* positive ou négative, égale au quantum d'électricité. Un photon résulterait donc de deux particules de ce genre, l'une chargée positivement, l'autre négativement, et tout phénomène faisant intervenir le rayonnement devrait pouvoir se traduire en phénomènes concernant ces particules, ainsi que Jordan l'a proposé pour les neutrinos. Il semble d'ailleurs assez probable que, si la théorie générale des particules quelconques est exacte, c'est-à-dire si elle constitue une traduction de celle de Dirac mais sans énergies négatives, la théorie de la lumière proposée plus haut ne sera autre chose que la traduction analogue de celle de de Broglie ou de Jordan-Kronig. L'avantage de l'introduction de ces nouvelles particules serait, outre naturellement l'élimination de toute énergie négative, la possibilité d'ima-

(1) *Journal de Physique* 1936, t. 7, p. 347.

A ce sujet, nous devons mentionner qu'en 1928, en même temps que le mémoire fondamental de Dirac paraissait un travail de Frenkel (*Zeitschrift für Physik*, 1928, **47**, p. 786) dont le but était de traduire, en mécanique quantique, la théorie classique de l'électron pivotant que cet auteur avait établie précédemment. On trouve dans ce mémoire une tentative d'analyse de la « polarisation » des ondes électroniques au moyen d'une fonction d'onde à plusieurs composantes. En faisant état de l'analogie avec le photon, l'auteur prend comme équations fondamentales, des équations du type de Maxwell avec un potentiel, vecteur d'univers, et qui par conséquent sont, à très peu de chose près, identiques aux nôtres M. Frenkel montre qu'elles correspondent bien aux équations classiques de l'électron doué d'un moment électromagnétique. Faisant uniquement appel à des raisonnements de correspondance, sa démonstration n'est peut-être pas probante, mais il semble aisé de la reprendre à rebours et prouver que la particule ainsi définie jouit des propriétés d'un électron doué de spin.

Ce travail, qui malheureusement n'a pas été suivi, nous avait échappé au moment de la rédaction de notre premier article ; nous tenons expressément à réparer cette omission.

On doit mentionner que M. H. A. Kramers a étudié également la théorie classique d'un électron pivotant (*Physica*, 1935, **1**, p. 825, et *Verhandelingen, aangeboden aan P. Zeemann*, 1935, p. 403). et en a effectué la première quantification. Celle-ci implique un léger degré d'arbitraire dans le choix de l'hamiltonien. En prenant un hamiltonien complexe (ce qui implique l'existence d'un moment électrique *imaginaire* bien connue en théorie de Dirac) on obtient après quantification l'équation de Dirac elle-même ainsi qu'il est montré dans le second des articles cités plus haut. Mais, à la fin de cet article, M. Kramers signale en quelques lignes la possibilité de prendre un autre hamiltonien, réel celui-là, et dont le choix, par conséquent, « peut sembler plus naturel lorsqu'on se place à un point de vue physique ». On aboutirait ainsi à « quatre équations du second ordre entre quatre composantes de la fonction d'onde » (deux variables de spin prenant chacune 2 valeurs seulement), qui ne sont d'ailleurs pas données dans l'article cité. Notre théorie correspond, à cette seconde alternative et découle, semble-t-il, de la théorie classique tout aussi bien que la théorie de Dirac.

Les raisonnements de Frenkel et Kramers sont extrêmement précieux autant pour vérifier la forme définitive de l'hamiltonien, que pour dissiper les doutes au sujet de la signification des grandeurs moment électromagnétique et spin, définies dans notre travail en partant d'un point de vue totalement différent.

giner plus facilement qu'avec des neutrinos, des expériences destinées à les déceler (1).

L'exposé qui suit est divisé en deux parties. Dans la première, on applique les résultats généraux de la théorie à une particule quelconque qui n'est soumise à l'influence d'aucun champ extérieur et qui se trouve dans un état déterminé; ces résultats nous serons d'ailleurs utiles pour un travail ultérieur. Dans la seconde partie, nous particulariserons davantage ces résultats en les appliquant aux photons et aux « charges pures ».

I. Particules libres en général.

2. **Equations fondamentales.** — Considérons le cas de l'absence de champ extérieur; les équations fondamentales sont (2) :

$$\partial_r F_{rs} = k^2 \psi_s^* \qquad \partial_r G_{rs} = k^2 \psi_s \tag{1}$$

où

$$\left.\begin{aligned} &F_{rs} = \partial_r \psi_s^* - \partial_s \psi_r^* \qquad G_{rs} = \partial_r \psi_s - \partial_s \psi_r \\ &\psi_r = \text{vecteur d'univers}; \quad k = \frac{mc}{h}; \\ &h = \frac{\text{constante de Planck}}{2\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Considérons une particule représentée par une onde plane.

$$\psi_s = a_s \, e^{i(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4)} \tag{3}$$

a_s et b_r sont des vecteurs d'univers constants, le premier complexe, le second réel.

Les équations (1) sont alors équivalentes aux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \left(k^2 + \sum_1^4 b_r^2\right) a_s^* &= b_s (a_r^* b_r) \\ \left(k^2 + \sum_1^4 b_r^2\right) a_s &= b_s (a_r b_r) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

desquelles on déduit par multiplication avec b_s et sommation

$$k^2 (a_s^* b_s) = 0 \qquad k^2 (a_s b_s) = 0. \tag{5}$$

Donc : 1° Si $k \neq 0$ les équations sont :

$$a_s^* b_s = 0 \qquad a_s b_s = 0, \tag{6}$$

les b_r satisfaisant à la condition :

$$\sum_1^4 b_r^2 + k^2 = 0. \tag{7}$$

2° Si $k = 0$, on a simplement :

$$\left.\begin{aligned} a_s^* \left(\sum_1^4 b_r^2\right) &= b_s (a_r^* b_r) \\ a_s \left(\sum_1^4 b_r^2\right) &= b_s (a_r b_r). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

La discussion détaillée de ces deux cas conduit au résultat suivant :

k est donné. Si les b_r satisfont à la condition

$$\sum_1^4 b_r^2 + k^2 = 0 \tag{7}$$

la solution des équations fondamentales est celle du système (6), quelle que soit la valeur, nulle ou non nulle, de k.

Si la condition précédente (7) n'est plus satisfaite, il n'y a plus de solution, sauf pour $k = 0$; dans ce cas, c'est-à-dire pour $k = 0$, $\sum_1^4 b_r^2 \neq 0$, *il y a une solution singulière, à savoir*

$$a_r = \lambda b_r \tag{8}$$

(tous les a_r sont proportionnels aux b_r et par conséquent F_{rs}, G_{rs} identiquement nuls).

Nous nous occuperons d'abord de la solution régulière. Celle-ci est donnée par :

$$a_r^* b_r = 0, \qquad a_r b_r = 0, \qquad \sum_1^4 b_r^2 + k^2 = 0.$$

Pour des b_r donnés, il y a donc trois arbitraires complexes, donc *six* grandeurs réelles qu'on peut choisir arbitrairement, au lieu des quatre de la théorie correspondante de Dirac. Cela tient au fait que notre théorie n'impose pas *a priori* une valeur nulle pour le moment électrique d'un électron au repos. On peut se donner dans un système quelconque de coordonnées des valeurs *quelconques* pour les composantes du moment électromagnétique. Ces valeurs (cinq, indépendantes) et une condition de normalisation achèvent de définir la particule considérée.

Des équations (6) et (7) découle une inégalité très importante pour la suite, à savoir :

$$a_r^* a_r \geq 0 \tag{9}$$

l'égalité ayant lieu dans le cas singulier (comme toujours on effectue la sommation sur les indices muets). En effet, le calcul montre que

$$a_r^* a_r = \frac{\sum\limits_{\substack{\text{circ.} \\ 1,2,3}} \left(a_m^* b_n - a_n^* b_m\right)\left(a_m b_n - a_n b_m\right) - k_2 a_4^* a_4}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

d'où l'on voit que le module d'univers du vecteur a_r est positif, *même si* $k = 0$.

(1) Il ne semble pas que des essais aient été tentés en ce sens. Cependant, la possibilité logique de l'existence de ces particules « charges pures » a été signalée par EINSTEIN et ROSEN. *Phys. Rev.*, 1935, **48**, p. 73.

(2) Cf. notre premier article, *loc. cit.*

Cela étant, calculons les diverses grandeurs attachées à la particule.

3. Densité de courant et de charge. — L'expression générale des composantes du courant

$$j_s = ehc.i\left(\psi_r^* G_{rs} - \psi_r F_{rs}\right) \qquad (10)$$

donne

$$j_s = 2ehc.b_s\left(a_r^* a_r\right) \qquad (11)$$

et en particulier pour la densité de charge j_0 ($j_4 = \varepsilon j_0$, $\varepsilon^2 = -1$) :

$$j_0 = 2ehc.b_0\left(a_r^* a_r\right). \qquad (12)$$

Le courant est proportionnel au vecteur b_s; la charge est proportionnelle à b_0 et suit le signe de ce dernier puisqu'en vertu de (9), $a_r^* a_r > 0$.

A ce propos et pour éviter toute méprise, rappelons un fait connu. Dans l'expression (10) de j_s, la charge e de l'électron apparaît en facteur. Sa présence est indispensable : la condition de divergence du tenseur d'énergie $\partial_r T_{rs} = j_r H_{sr}$ (H_{sr} le champ extérieur) ne saurait être satisfaisante si e n'était pas facteur de j_r. Elle provient des termes $\frac{ie}{hc}\varphi_s$ qui, dans les équations fondamentales, décrivent l'action du champ extérieur. Néanmoins, ici comme dans tous les autres cas, elle ne représente pas la charge proprement dite de la particule (c'est-à-dire la charge avec son signe) : c'est simplement une constante donnée une fois pour toutes en grandeur *et en signe* au moment de l'établissement de l'équation fondamentale.

Dans ce qui va suivre, nous la prendrons positive,

$$e > 0 \qquad (7)$$

et naturellement égale à la valeur absolue de la charge de l'électricité. Rien ne nous empêcherait de prendre $e < 0$; cela signifierait cependant que nous partons d'un *autre* système d'équations fondamentales. Dans le cas de l'absence de champ, les termes $ie\varphi_s/hc$ disparaissent des équations, mais e subsiste dans l'expression de j_s ; c'est pour cette raison qu'il importe de préciser.

La densité de charge est donc

$$j_0 = 2ehc.b_0\left(a_r^* a_r\right)$$

avec $\qquad e > 0 \qquad$ et $\qquad \left(a_r^* a_r\right) > 0,$

donc : $$\frac{j_0}{e} = 2hc.b_0\left(a_r^* a_r\right). \qquad (14)$$

Pour les b_1, b_2, b_3 donnés, j_0 est proportionnel à b_0, avec un facteur $2ehc.(a_r^* a_r)$, toujours positif. Dans le cas de Dirac, il y a proportionnalité de la même façon, mais le facteur est

$$\frac{\Omega_1}{mc^2} \qquad \text{avec} \qquad \Omega_1 = \tilde{\psi}^* \alpha_4 \psi$$

et Ω_1 peut être positif ou négatif. En fait, la densité de charge ρ

$$\rho = \frac{W}{mc^2}.\Omega_1 \qquad (W \text{ énergie})$$

est toujours positive parce que W et Ω_1 ont toujours le même signe.

Le carré de la longueur d'univers du vecteur j_s est :

$$\sum_1^4 j_s^2 = (2ehc)^2\left(a_r^* a_r\right)^2 \sum_1^4 b_s^2 = -\left(2ehc.a_r^* a_r\right)^2.k^2$$

donc

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 - j_0^2 < 0; \qquad (15)$$

c'est un vecteur du *genre temps*.

Enfin, la charge elle-même est

$$charge = \int j_0 \, dV = 2ehc.b_0 \int \psi_r^* \psi_r \, dV. \qquad (16)$$

En valeur absolue elle doit être égale à e. La « condition de normalisation » sera donc

$$\int \frac{j_0}{e} dV = \pm 1 \quad \text{suivant le signe de } b_0,$$

qu'on peut écrire

$$\int \frac{j_0}{e} dV = \frac{|b_0|}{b_0}. \qquad (17)$$

donc

$$2hc.|b_0| \int \psi_r^* \psi_r \, dV = +1 \qquad (18)$$

et dans le cas général

$$ihc\varepsilon \int \left(\psi_r^* G_{r4} - \psi_r F_{r4}\right) dV = \pm 1. \qquad (19)$$

4. Fonction de Lagrange. — La valeur de la fonction de Lagrange

$$L = h^2 c^2\left[\frac{1}{2} F_{rs} G_{rs} + k^2 \psi_r^* \psi_r\right]$$

est zéro, $L \equiv 0$, pour une onde plane du type considéré.

On a donc pour une telle onde, que b_0 soit positif ou négatif :

$$-F_{rs}G_{rs} = \left(\frac{mc}{h}\right)^2 \frac{1}{hc.|b_0|} > 0. \qquad (20)$$

5. Tenseur énergie-quantité de mouvement. — *Le tenseur* $T_{r\rho}$ s'écrit

$$T_{r\rho} = 2h^2c^2\left(a_r^* a_r\right).b_r b_\rho. \qquad (21)$$

En particulier, la *densité d'énergie*

$$W = -T_{44} = -2h^2c^2\left(a_r^* a_r\right)b_4^2. \qquad (22)$$

Elle est positive. On peut aussi l'écrire, en vertu de (14)

$$W = hc.\frac{j_0}{e}.b_0. \qquad (23)$$

De même, la *densité de quantité de mouvement* se déduit de T_{r4}, par

$$cP_r = \frac{T_{r4}}{\varepsilon} = T_{r0};$$

on a

$$cP_r = 2h^2c^2\left(a_r^* a_r\right) b_0 . b_r, \tag{24}$$

soit encore

$$cP_r = hc . \frac{j_0}{e} . b_r. \tag{25}$$

L'énergie elle-même $E = \int W \mathrm{d}V$, en vertu de $\int \frac{j_0}{e} \mathrm{d}V = \frac{|b_0|}{b_0} = \pm 1$ est :

$$\boxed{E = hc\ |b_0|} \tag{26}$$

et la *quantité de mouvement*

$$\mathfrak{T}_r = \int P_r \mathrm{d}V = h . b_r . \frac{|b_0|}{b_0}. \tag{27}$$

Les b_r sont donc proportionnels aux composantes de la quantité de mouvement et de l'énergie. On vérifie que la relation fondamentale,

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \mathfrak{T}_1^2 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^2 \tag{28}$$

est satisfaite en vertu de la condition

$$\sum_1^4 b_r^2 + k^2 = 0, \quad k = \frac{mc}{h}.$$

6. **Moments propres magnétique et électrique.** — La densité m_{rs} du tenseur moment électromagnétique est en général

$$m_{rs} = iehc\left(\psi_r^* \psi_s - \psi_s^* \psi_r\right);$$

elle devient

$$m_{rs} = iehc\left(a_r^* a_s - a_s^* a_r\right). \tag{29}$$

7. **Spin.** — Pour la densité de spin, nous avons indiqué dans l'article précédent deux expressions entre lesquelles le choix définitif doit se faire au moment de la seconde quantification. Nous réservons cette question et nous indiquerons les deux valeurs proposées (à un facteur près) :

$$M_1 = \psi_\rho F_{4r} + \psi_r F_{\rho 4} + \text{conjugué}$$
$$M_2 = \psi_\rho F_{4r} + \psi_r F_{\rho 4} + \psi_4 F_{r\rho} + \text{conjugué}$$

qui deviennent

$$M_1 = \left(b_r m_{4\rho} + b_4 m_{\rho r} + b_\rho m_{r4}\right) + i a_4\left(a_\rho^* b_r - a_r^* b_\rho\right) + \text{conjugué}$$
$$M_2 = \left(b_r m_{4\rho} + b_4 m_{\rho r} + b_\rho m_{r4}\right) + \text{conjugué}.$$

III. Théorie de la lumière. Particules « charge pure ».

8. **Photons.** — Par hypothèse, les résultats généraux de l'article précédent sont valables pour une particule quelconque de masses au repos m et de charge $+e$ (lorsqu'on adopte des conditions de normalisation convenables). En choisissant des valeurs particulières pour m et e nous aurons les divers cas connus, par exemple le cas de l'électron positif ou négatif, ou encore le cas du neutrino (pour $e = 0$, $m = 0$). Nous avons vu plus haut que lorsqu'on se donne b_1, b_2, b_3, deux valeurs de b_0 sont possibles. Les deux particules ainsi définies ont *la même énergie*, $hc . |b_0|$, mais diffèrent par le signe de la charge. A une énergie donnée correspondent *deux* possibilités, caractérisées par les signes + et — de la charge si celle-ci est finie, et naturellement une seule si la charge est nulle. Ce dernier cas ne peut être réalisé dans l'hypothèse de l'onde plane unique envisagée plus haut, mais nous pouvons essayer de l'analyser dans le cas général. Effectivement, l'examen de l'expression générale de la densité de courant

$$j_s = iehc\left(\psi_r^* G_{rs} - \psi_r F_{rs}\right)$$

suggère l'étude d'un autre cas particulier qui s'avère très important. La densité de charge d'une particule quelconque (dont la fonction d'onde n'est pas nécessairement une onde plane)

$$j_4 = iehc\left(\psi_r^* G_{r4} - \psi_r F_{r4}\right)$$

peut être nulle dans *deux* cas particuliers, à savoir : soit à cause de $e = 0$, — ce qui signifie que nous avons admis dès le début qu'un champ électromagnétique n'a aucune action sur cette particule, — soit *lorsque la fonction d'onde est réelle* $\psi_r^* = \psi_r$ —, ce qui signifie qu'une telle action existe mais qu'elle est compensée par un effet de structure.

Considérons alors le cas particulièrement intéressant où la particule envisagée a aussi une masse au repos nulle ; deux des particules connues sont dans ce cas : le neutrino et le photon. Ce qui est plus est, toutes les deux ont par hypothèse une charge électrique nulle, de sorte que ces deux éléments, charge et masse au repos, sont insuffisants pour nous permettre de faire la discrimination. Montrons que les deux alternatives précédentes correspondent respectivement au neutrino et au photon.

La première $e = 0$, $m = 0$ correspond évidemment au neutrino ; il est aisé de voir qu'on ne peut avoir $e = 0$ pour un photon. Pour cela, écrivons l'équation d'un photon non plus libre, mais se mouvant dans un champ électromagnétique donné. Dire que $e = 0$ signifie qu'une certaine constante e étant nulle dans ces équations, un champ électromagnétique extérieur quelconque ne peut avoir aucune influence sur le photon. Il n'y a aucune interaction entre la lumière et le champ extérieur, quel qu'il soit ; en particulier, si ce champ est lui-même une onde lumineuse, il n'y peut y avoir *aucune action de la lumière sur la lumière.* Or, il existe au moins un cas où l'on peut parler d'une telle action : Halpern et Debye ont remarqué et Euler ainsi que Euler et Kockel [1] ont étudié *la diffusion de la lumière sur la lumière.* En effet, en vertu du phénomène *incontestable* de la production des paires, on peut s'imaginer que deux photons donnent naissance à une telle paire (réelle ou virtuelle) laquelle s'annihile immédiatement après, produisant deux autres photons qui peuvent être différents des premiers sans que le principe de conservation de l'énergie soit mis en défaut.

En résumé, il semble probable qu'un photon plongé dans le champ d'une onde électromagnétique puisse subir son influence; d'autre part, *aucune* influence de ce genre n'est imaginable si l'on admet dès le début que la constante e qui intervient dans les équations fondamentales est nulle. Donc, le fait que le photon à une charge totale nulle ne provient certainement pas de la relation $e = 0$.

L'alternative $e = 0$ étant exclue, cherchons ce que donne la seconde. Définissons donc une particule par les conditions suivantes :

1. Sa masse au repos est nulle, $m = 0$, donc $k = 0$;
2. Sa fonction d'onde est réelle, $\psi_r^* = \psi_r$.

En nous reportant aux formules générales de l'article cité, nous voyons que cette particule :

a) A une charge électrique nulle et ne donne lieu a aucun courant, $j_s = 0$;
b) N'a pas de moment électromagnétique, $m_{r_s} = 0$;
c) A une énergie finie ;
d) A un spin en général différent de zéro ;
e) A une fonction d'onde qui satisfait aux équations

$$\partial_r F_{rs} = 0, \qquad F_{rs} = \partial_r \psi_s - \partial_s \psi_r, \qquad \psi_r = \text{réel},$$

lesquelles ne sont autres que les *équations de Maxwell pour le vide.* Etant données ces propriétés, il est tout à fait naturel d'admettre, comme nous le ferons par la suite, que cette particule représente un quantum de lumière.

Considérons-la de plus près et supposons d'abord qu'elle soit un véritable photon de fréquence unique ν. Cela signifierait, s'il s'agissait d'une particule élémentaire, que le développement de ψ_r ne devrait comporter qu'un seul terme, lequel serait nécessairement de la forme

$$\psi_r = a_r e^{i \Sigma b_s x_s}.$$

Mais ce ψ_r ne peut représenter un photon *puisqu'il n'est pas réel* et que par conséquent la charge serait différente de zéro. Un photon sera décrit par la fonction d'onde *réelle* $\psi_r + \psi_r^*$, c'est-à-dire par

$$a_r e^{i \Sigma b_s x_s} + a_r^* e^{-i \Sigma b_s x_s} \tag{32}$$

où

$$| b_0 | = \frac{\nu}{c}.$$

hb_1, hb_2, hb_3, sont les composantes de la quantité de mouvement comme on peut le vérifier; au surplus, la masse doit être nulle, $\sum_1^4 b_r^2 = 0$.

Le photon apparaît donc comme une particule « composée » ; *sa fonction d'onde* résulte de la superposition de deux autres

$$\psi_r = a_r e^{i \Sigma b_s x_s} \qquad \psi_r^* = a_r^* e^{-i \Sigma b_s x_s} \tag{33}$$

correspondant à des particules qui ne sont pas des neutrinos.

En effet, ces particules, définies par (33) et la condition $m = 0$, ont une charge différente de zéro en général, tout en ayant une masse nulle. Elles sont en quelque sorte des « *charges électriques pures* » dépourvues de masse au repos. Leurs propriétés se déduisent des résultats généraux de la première partie, en y adjoignant la condition $m = 0$.

On voit aisément que la seconde particule

$$\psi_r^* = a_r^* e^{-i \Sigma b_s x_s} \quad \text{a :}$$

a) La même énergie ;
b) La même quantité de mouvement ;
c) Le même spin

que la première particule $\psi_1 = a_r e^{i \Sigma b_s x_s}$, mais

d) Une charge et
e) Un moment électromagnétique

de signes contraires.

Dans cette théorie, un photon apparaît donc automatiquement comme formé par la superposition de deux particules « charges pures » ayant même énergie, *positive*, même quantité de mouvement et même spin, mais des charges différentes et des moments électromagnétiques opposés ; c'est un genre de « doublet » analogue à celui proposé autrefois par Bragg.

Le photon ainsi constitué a une charge totale, une masse et un moment électromagnétique nuls; son énergie n'est pas nulle et *en général son spin non plus*, puisqu'il est formé par la partie réelle d'une certaine expression, qui n'est pas affectée par le fait que ψ_r est réel. Le « spin » ainsi défini par une onde de lumière fait intervenir les potentiels et son étude mérite un examen spécial que nous n'entreprendrons pas ici [1].

Une théorie de la lumière développée sur ces bases semble devoir être tout à fait parallèle à celle de de Broglie, Jordan et Kronig, avec l'avantage cependant de ne pas avoir recours aux antineutrinos ; il suffit de considérer des particules constituantes de charges électriques opposées.

Tout phénomène dans lequel il y a interaction de

(1) HALPERN. *Phys. Rev.*, 1934, **44**, p. 885; EULER. *Ann. Physik*, 1936, **26**, p. 398 ; EULER et KOCKEL. *Naturwiss*, 1935, **23**, p. 246.

(1) Mentionnons que M. Henriot, dans un fascicule du *Mémorial des Sciences Physiques*, a introduit par de toutes autres considérations un « spin » analogue pour la lumière (cf. fascicule XXX, *Les couples de radiation et les moments électromagnétiques*, 1936, Paris, Gauthier-Villars).

la lumière et de la matière doit pouvoir se décrire en faisant intervenir uniquement les charges pures, puisqu'il suffira de le décrire au moyen des ψ_r; c'est l'idée préconisée par Jordan pour les neutrinos. Remarquons aussi que, pourvu qu'on admette que les particules « charge pure » obéissent à la statistique de Fermi-Dirac, les raisonnements thermodynamiques que Jordan a développés [1] pour justifier l'emploi des neutrinos dans l'explication des phénomènes lumineux, continuent à être applicables ici.

Il est dificile dans l'état actuel des théories modernes sur la lumière (de Broglie, Wentzel ou Jordan, Kronig, Born et Nath) de leur appliquer le raisonnement qualitatif indiqué plus haut relatif à l'action de la lumière sur la lumière (qui comporte d'ailleurs une hypothèse sur l'exactitude de laquelle nous ne savons rien). Il est vrai que ce dernier phénomène n'a pas encore été mis en évidence expérimentalement, mais sa prévision est basée sur l'hypothèse des trous sur laquelle sont fondées précisément les théories précitées. D'autre part, si le champ électromagnétique doit être remplacé par des champs de neutrinos, il est évident qu'on peut admettre une action des neutrinos sur les neutrinos donc de la lumière sur la lumière ; mais en tout cas cette action ne saurait être décrite par l'introduction de termes de la forme $ie\,\psi_r\,hc$ où $e =$ charge de neutrino. Remarquons d'ailleurs que, sauf erreur, dans la théorie de Jordan, Kronig, on ne suppose explicitement à aucun instant que la charge des particules composantes doit être nulle et que dans la théorie de de Broglie on admet que la particule composante pourrait avoir une charge, d'ailleurs petite. Presque la totalité des raisonnements de ces auteurs peuvent donc être repris en supposant qu'une des particules composantes a une charge fixe d'un signe déterminé; il est probable que l'autre particule qui *correspond à un trou* aura alors une charge de signe contraire et par conséquent le photon une charge nulle.

Grossièrement, et sans y attacher une importance quelconque, on peut faire le raisonnement suivant. Il existe une action de la lumière sur la lumière ; si la lumière est formée de neutrinos, nous en conclurons *qu'un champ électromagnétique peut agir sur un neutrino*, c'est-à-dire sur une particule qui n'est pas chargée, donc qui, par définition, est soustraite à l'action d'un tel champ. On peut imaginer une telle action, mais rien ne nous y oblige ; il semble *plus facile, plus simple*, de remplacer le neutrino par une particule « charge pure » et le « trou » correspondant, par une particule de signe opposé.

En d'autres termes, on peut admettre qu'un champ, tout en n'ayant aucune action sur un neutrino, en ait une sur un couple neutrino-antineutrino. Cela est admissible; mais il est incontestablement plus *simple* de remplacer les neutrinos par des charges pures et admettre l'action d'un champ non seulement sur une paire constituant un photon, mais aussi sur chacune des particules constituantes.

Il apparaît donc que, sous réserve des difficultés d'application, les théories de de Broglie ou Jordan Kronig, ne s'opposent pas à l'introduction de l'hypothèse des charges pures et on peut même espérer qu'elles en retireront certains avantages. L'existence des particules « charge pure » *libres*, c'est-à-dire non englobées deux par deux dans un photon n'a pas été démontrée expérimentalement et à part la mention citée de Einstein et Rosen, il ne semble pas qu'elle ait attiré l'attention des chercheurs jusqu'à présent. Cependant, étant donné la charge qu'elles portent, elles devraient pouvoir être mises en évidence beaucoup plus facilement que, par exemple, le neutrino. En tout cas, il n'est pas exclu que l'interprétation des phénomènes où intervient le rayonnement devienne plus facile et plus intuitive si l'on fait appel à cette notion, pourvu naturellement que des expériences précises viennent l'étayer.

Pour conclure, revenons à la théorie esquissée au début et faisons deux remarques finales.

1. En premier lieu, nous avons défini un photon par les deux conditions $m = 0$ et $\psi_r^* = \psi_r$, et nous avons observé (condition *e*) que, dans ce cas, les équations fondamentales prenaient exactement la forme des équations de Mawxell dans le vide. Il convient de remarquer que ce résultat *ne signifie rigoureusement rien jusqu'à nouvel ordre*, c'est-à-dire qu'il ne constitue pas un argument en faveur de l'identification de la particule en question avec un quantum de lumière. Le F_{rs} correspondant *n'est pas le champ* attaché au photon, mais une combinaison des ψ_r et, comme telle, inobservable; le champ lui-même est une observable fournie vraisemblablement par une combinaison quadratique des ψ_r sur laquelle nous reviendrons. Remarquons seulement que dans cette théorie, le *principe de superposition reste valable pour les ψ, mais n'est plus valable pour les champs*; corrélativement, *les équations de Maxwell dans le vide ne sont plus satisfaites par le champ, mais nous avons vu qu'elles le sont par les F_{rs} déduites des ψ_r.*

2. En second lieu, on voit aisément que le cas $\psi_r^* = \psi_r$ et $m \neq 0$, correspond à des particules qui sont des « doublets » et qui jouissent de la plupart des propriétés des photons; seules, la masse et les équations du mouvement les distinguent. On a d'ailleurs déjà proposé d'assimiler les photons à de pareils couples (Bragg; positon-négaton, cf. Destouches, Placinteanu, Jordan). Il existe une infinité de pareils doublets, suivant leur masse; le photon est le doublet de masse nulle.

Manuscrit reçu le 25 octobre 1936.

[1] JORDAN. *Z. Physik*, 1936, 98, p. 759.

THÉORIE NON RELATIVISTE DES PARTICULES A SPIN ENTIER

Par AL. PROCA.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur montre qu'une théorie à 3 composantes satisfaisant chacune à une équation de Schrödinger est susceptible de décrire, à l'approximation newtonienne, le comportement d'une particule à spin entier et énergie cinétique positive. Il déduit cette théorie comme première approximation d'une théorie relativiste proposée dans un article antérieur. On étudie les diverses grandeurs attachées à la particule et leurs relations.

La théorie devrait s'appliquer à des particules du type de l'*électron lourd à faible vitesse*.

1. **Introduction**. — Nous avons développé, dans le *Journal de Physique*, 1936, t. VII, p. 347, une théorie relativiste des électrons caractérisée par une énergie qui reste toujours positive. Cet article n'étudiait pas le problème des valeurs propres du spin. Or, l'essentiel de ce problème, à savoir la question des valeurs entières ou demi-entières, peut être résolu très commodément en cherchant quelle est l'*approximation newtonienne* de la théorie proposée.

De plus, cette approximation newtonienne est intéressante en elle-même par sa simplicité et sa commodité.

Elle devrait pouvoir s'appliquer au cas des *électrons lourds lents,* si toutefois on réussissait à prouver que de pareilles particules existent.

2. **Grandeurs fondamentales**. — Pour les notations et les résultats fondamentaux, on voudra bien se reporter à l'article déjà cité. Dans cet article, la valeur absolue des diverses grandeurs, courant, énergie, etc., ne nous intéressait pas; il convient de les récrire en rétablissant les valeurs correctes des facteurs constants. On a dans ce cas pour les densités de :

la fonction de Lagrange :

$$L = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{F_{rs}G_{rs}}{2} + k^2\psi_r^*\psi_r\right) \qquad (1/2)$$

Courant :

$$j_s = \frac{ieh}{2mc}\left(\psi_r^* G_{rs} - \psi_r F_{rs}\right). \qquad (2/2)$$

Tenseur énergie-quantité de mouvement :

$$T_{r\rho} = \frac{h^2}{2m}\left[F_{rs}G_{\rho s} + F_{\rho s}G_{rs} + k^2(\psi_r^*\psi_\rho + \psi_\rho^*\psi_r) - L\delta_{r\rho}\right]. \quad (3/2)$$

Moment électromagnétique :

$$m_{rs} = \frac{ieh}{2mc}\left(\psi_r^*\psi_s - \psi_s^*\psi_r\right). \qquad (4/2)$$

Spin de la particule :

$$\mathfrak{M}_{ab} = \frac{h}{2\varepsilon}\left(\psi_b F_{4a} - \psi_a F_{4b} + \psi_b^* G_{4a} - \psi_a^* G_{4b}\right). \qquad (5/2)$$

3. **Préliminaires. Passage de l'équation de Gordon à l'équation de Schrödinger**. — Le problème posé consiste à trouver ce que deviennent les équations et les expressions du paragraphe précédent à l'approximation newtonienne c'est-à-dire quand on suppose $c \to \infty$ ou $1/c \to 0$.

Pour voir comment on peut développer ce processus d'approximation et surtout pour mettre en évidence certains détails caractéristiques, nous l'appliquerons d'abord à l'équation de Gordon; on doit tomber ainsi sur la théorie bien connue de Schrödinger.

Prenons donc l'équation de Gordon et pour simplifier considérons le cas de l'absence de champ (cf. pour les formules, par exemple PAULI et WEISSKOPF, *Helvetica Physica Acta*, 1934, t. VII, 709); l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + \frac{m^2c^2}{h^2}\psi = 0. \qquad (1/3)$$

Séparons comme on le fait d'habitude un terme en mc^2 en posant :

$$\psi(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\, e^{-\frac{imc^2}{h}t} \qquad (2/3)$$

(1/3) devient

$$-\frac{2im}{h}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (3/3)$$

Cette équation se résout par approximations successives; la première est

$$-\frac{2im}{h}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \qquad (4/3)$$

qui est précisément l'équation classique de Schrödinger

$$ih\frac{\partial u}{\partial t} = Hu \qquad \text{avec} \qquad H = (-ih)^2\Delta 2m. \quad (5/3)$$

Pour obtenir *le courant*, substituons d'abord (2/3) dans l'expression relativiste :

$$s_\nu = \frac{\mathrm{i}eh}{2mc}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}\psi^*\right). \quad (6/3)$$

Cela donne pour la *densité de charge* ($\nu = 4$) :

$$\rho = -s_4, \quad \rho = \frac{-\mathrm{i}eh}{2mc^2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}u - \frac{\partial u}{\partial t}u^* + \frac{2\mathrm{i}mc^2}{h}u^*u\right), \quad (7/3)$$

ce qui, en négligeant les termes en $\frac{1}{c^2}$, fournit bien la densité de *charge* d'une particule de Schrödinger

$$\rho = eu^*u.$$

Le *courant* est également le même

$$s_a = \frac{\mathrm{i}eh}{2mc}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^a}u - \frac{\partial u}{\partial x^a}u^*\right). \quad (8/3)$$

Le *tenseur énergie quantité de mouvement* est :

$$\left.\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{h^2}{2m}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\right) - L.\delta^{\mu\nu} \\ \text{avec } L &= -\frac{h^2}{2m}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \frac{mc^2}{2}\psi^*\psi. \end{aligned}\right\} \quad (9/3)$$

En y substituant (2/3), on obtient pour *la quantité de mouvement* :

$$P_a = \frac{\mathrm{i}\,T_{a4}}{c}$$

$$P_a = \frac{\mathrm{i}\,T_{a4}}{c} = -\frac{h^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^a}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^a}\right)(a = 1, 2, 3) \quad (10/3)$$

soit

$$P_a = \frac{-\mathrm{i}h}{2}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial x^a} - \frac{\partial u^*}{\partial x^a}u\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{-h^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^a}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^*}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x^a}\right) \quad (11/3)$$

ou enfin, à l'approximation admise,

$$P_a = \frac{-\mathrm{i}h}{2}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial x^a} - \frac{\partial u^*}{\partial x^a}u\right). \quad (12/3)$$

La moyenne de cette densité est donc :

$$G_a = \int P_a \,\mathrm{d}V = -\mathrm{i}h\int u^*\frac{\partial u}{\partial x^a}\,\mathrm{d}V, \quad (13/3)$$

c'est-à-dire égale à la moyenne de l'opérateur $-ih\frac{\partial}{\partial x^a}$, comme en théorie de Schrödinger.

Le calcul de l'*énergie* requiert une attention particulière. En théorie de Schrödinger l'énergie se calcule par la moyenne de l'opérateur $ih\frac{\partial}{\partial t}$

$$E = \frac{\mathrm{i}h}{2}\int\left(u^*\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t}u\right)\mathrm{d}V. \quad (14/3)$$

En théorie de Gordon, l'expression générale est :

$$E = \frac{h^2}{2m}\int\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{a=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^a}\frac{\partial\psi}{\partial x^a} + \frac{m^2c^2}{h^2}\psi^*\psi\right]\mathrm{d}V. \quad (15/3)$$

Cherchons que devient cette expression à l'approximation admise; en y substituant (2/3), on trouve

$$E = mc^2\int u^*u\,\mathrm{d}V + \frac{h^2}{2m}\int\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial u^*}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{a=1}^{3}\frac{\partial u^*}{\partial x^a}\frac{\partial u}{\partial x^a} + \frac{\mathrm{i}m}{h}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t}u\right)\right]\mathrm{d}V, \quad (16/3)$$

soit en vertu des équations fondamentales :

$$E = mc^2\int u^*u\,\mathrm{d}V + \mathrm{i}h\int\left(u^*\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t}u\right)\mathrm{d}V + \frac{h}{2mc^2}\int\frac{\partial u^*}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}\,\partial V. \quad (17/3)$$

Cette expression contient 3 termes; lorsque $c \to \infty$, le premier devient infini, le second n'est pas altéré, le troisième devient négligeable. Le premier terme représente une énergie propre, dont, par définition, l'approximation choisie ne tient pas compte; si nous convenons de l'éliminer, il reste :

$$\text{énergie} = \mathrm{i}h\int\left(u^*\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t}u\right)\mathrm{d}V, \quad (18/3)$$

valeur double de celle calculée en théorie de Schrödinger (14/3).

Il est facile de voir quelle peut être l'origine de ce facteur 2. MM. Pauli et Weisskopf, dans leur mémoire déjà cité, p. 720, ont analysé la structure de l'expression générale (15/3) de l'énergie et ont montré que cette énergie se compose :

a) D'un terme infini;

b) D'un terme représentant l'énergie des particules de charge $+e$ et de moment $\vec{p}$;

c) D'un terme représentant l'énergie des particules de charge $-e$ et de courant $-\vec{p}$.

Or, quand nous passons (en l'absence de champ) à l'approximation de Schrödinger, après suppression de l'énergie infinie, l'expression E continue à représenter une somme de deux termes, chacun se rapportant cependant maintenant à la *même* particule; en effet, cette approximation n'admet plus les particules $+e$ *et* les particules $-e$, attendu que la densité de charge est (7/3) $\rho = e\,u^*u$.

L'énergie ainsi calculée représente l'énergie des particules positives et négatives qui se sont fondues en une seule $\rho = e\,u^*u$; elle est donc égale à deux fois l'énergie de celle-ci. D'autre part, en théorie de Schrödinger proprement dite, on calcule l'énergie d'une seule particule, et non pas de deux particules juxtaposées.

Le processus d'approximation doit tenir compte de ces circonstances; pour le calcul correct de l'énergie, il faut donc :

a) *supprimer le terme infini*;

b) *diviser le résultat par 2.*

On retombe ainsi sur le résultat classique. Nous retrouverons des circonstances analogues dans les calculs qui suivent.

4. Equations générales d'une particule avec énergie positive. — Utilisons le processus d'approximation décrit, pour déduire de nos équations relativistes générales les *équations non relativistes* des particules avec spin.

Posons :

$$\psi_r = e^{i\varepsilon k x_4} . u_r \qquad (r = 1, 2, 3, 4). \tag{1/4}$$

Comme

$$x_4 = \varepsilon ct, \quad \varepsilon^2 = -1, \quad k = mc/h,$$

on aura :
$$i\varepsilon k x_4 = -\frac{i mc^2}{h} t.$$

En général, on pourra écrire :

$$\left.\begin{aligned} G_{rs} &= e^{i\varepsilon k x_4} \left[g_{rs} + i\varepsilon k\,(\delta_{r4} . u_s - \delta_{s4} . u_r)\right] \\ F_{rs} &= e^{-i\varepsilon k x_4}\left[f_{rs} - i\varepsilon k\left(\delta_{r4} . u^*_s - \delta_{s4} . u^*_r\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{2/4}$$

où l'on a posé :

$$\left.\begin{aligned} f_{rs} &= (\partial_r + iA_r)\, u^*_s - (\partial_s + iA_s)\, u^*_r \\ g_{rs} &= (\partial_r - iA_r)\, u_s - (\partial_s - iA_s)\, u_r . \end{aligned}\right\} \tag{3/4}$$

Les *équations fondamentales* s'écrivent (voir l'article cité) :

$$\left.\begin{aligned} (\partial_a - iA_a)\, G_{ab} + (\partial_4 - iA_4)\, G_{4b} &= k^2 \psi_b \\ (\partial_a - iA_a)\, G_{a4} &= k^2 \psi_4 \end{aligned}\right\} \tag{4/4}$$
$$(a, b = 1, 2, 3).$$

Nous réserverons désormais les letres a, b, aux indices variant de 1 à 3.

En substituant (1/4) et (2/4) dans (4/4) on obtient :

$$(\partial_a - iA_a)\, g_{ab} + (\partial_4 - iA_4)\, g_{4b} + i\varepsilon k [g_{4b} + (\partial_4 - iA_4) u_b] = 0 \tag{5/4}$$
$$(\partial_a - iA_a)\, g_{a4} - i\varepsilon k\,(\partial_a - iA_a)\, u_a = k^2 u_4 . \tag{6/4}$$

Tout ceci est vrai sans aucune approximation.

La forme de l'équation (6/4), permet maintenant d'amorcer une résolution par approximations successives suivant les puissances de $\frac{1}{k}$ c'est-à-dire de $\frac{1}{c}$; on peut en effet l'écrire :

$$u_4 = -\frac{1}{i\varepsilon k}(\partial_a - iA_a)\, u_a - \frac{1}{k^2}(\partial_a - iA_a)(\partial_4 - iA_4) u_a + \frac{1}{k^3}(\partial_a - iA_a)^2 u_4 \tag{7/4}$$

et la suppression du dernier ou des deux termes nous donnera la première approximation de u_4.

Dans les raisonnements qui suivent, nous aurons à faire tendre $1/c$ vers zéro; remarquons que ce processus *ne doit pas s'appliquer* au c qui entre dans l'expression des A_a

$$A_a = \frac{e}{hc}\,\Phi_a . \tag{8/4}$$

En effet, ce c s'y trouve uniquement pour ramener la valeur de e, mesurée en unités électrostatiques, aux unités électromagnétiques. En d'autres termes, nous faisons tendre vers ∞ *la vitesse de la lumière*; or, dans (8/4) c ne représente pas cette vitesse mais bien *le rapport des deux sortes d'unités électriques*, et le passage $1/c \to 0$ ne l'affecte pas. Il s'ensuit que, par rapport à $1/c$, l'expression $(\partial_a - i A_a)\psi$ est d'ordre zéro (si ψ lui-même est d'ordre zéro). Par contre, dans $(\partial_4 - iA_4)\psi$, le c représente la vitesse de la lumière aussi bien dans $\partial_4 \psi$ que dans A_4 (potentiel *scalaire*); donc, dans les mêmes hypothèses $(\partial_4 - i A_4)\psi$ est de l'ordre $1/c$.

Revenons de l'équation (7/4); supprimons le dernier terme et négligeons le deuxième qui est comme nous l'avons vu de l'ordre de $1/c^3$ si les u_a sont d'ordre zéro. Il reste :

$$u_4 = -\frac{1}{i\varepsilon k}(\partial_a - iA_a)\, u_a . \tag{8/4}$$

Donc, dans cette théorie, si les u_a $(a = 1, 2, 3)$ sont d'ordre zéro, u_4 sera du premier ordre. En théorie de Dirac la même relation existait entre *deux* des quatre composantes de la fonction d'onde et les deux autres; ces faits sont à rapprocher de la différence qu'il y a entre les deux théories du point de vue de la représentation du groupe de Lorentz : spinorielle dans un cas, quaternionienne dans l'autre.

(8/4) nous permet d'éliminer u_4 des équations fondamentales (5/4); la théorie qui en résulte sera une *théorie à 3 composantes* u_b $(b = 1, 2, 3)$.

Le résultat de la substitution s'écrit :

$$2i\varepsilon k\,(\partial_4 - iA_4)\, u_b + (\partial_a - iA_a)^2 u_b + [(\partial_b - iA_b)(\partial_a - iA_a) - (\partial_a - iA_a)(\partial_b - iA_b)]\, u_a + (\partial_4 - iA_4)\, g_{4b} = 0. \tag{9/4}$$

Gardons seulement les termes d'ordre zéro (ce qui revient à négliger le dernier terme); on peut écrire les équations résultantes sous la forme :

$$\boxed{\begin{gathered} 2i\varepsilon k(\partial_4 - iA_4) u_b + (\partial_a - iA_a)^2 u_b + \frac{ie}{hc} H_{ab} u_a = 0 \\ (b = 1,2,3) \end{gathered}} \tag{10/4}$$

soit encore :

$$\boxed{ih\,\frac{\partial u_b}{\partial t} = \frac{1}{2m}(-h^2)(\partial_a - iA_a)^2 u_b - hc\varepsilon A_4 u_b - \frac{ieh}{2mc} H_{ab} u_a .} \tag{11/4}$$

Si l'on veut introduire un hamiltonien on pourra considérer la fonction d'onde u comme une matrice à une seule colonne d'éléments u_1, u_2, u_3. Désignons par $\mathbf{m}_x$, $\mathbf{m}_y$, $\mathbf{m}_z$, les matrices suivantes :

$$\mathbf{m}_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{m}_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{m}_z = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{12/4}$$

et soient

$$H_{23} = H_x \qquad H_{31} = H_y \qquad H_{12} = H_z$$

les composantes du champ électromagnétique extérieur. L'équation (11/4) s'écrit alors :

$$\mathrm{i}h \frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{H}\, u \tag{13/4}$$

avec

$$\mathbf{H} = \left[\frac{1}{2m}(-h^2)(\partial_a - \mathrm{i}A_a)^2 - hc\varepsilon A_4\right].\mathbf{1} + \frac{eh}{2mc}(\mathbf{m}_x H_x + \mathbf{m}_y H_y + \mathbf{m}_z H_z). \tag{14/4}$$

On reconnait dans l'expression de cet hamiltonien une première partie due à l'énergie cinétique de la particule, une seconde représentant l'énergie potentielle et enfin le terme qui fournit l'énergie d'une particule douée de moment magnétique dans un champ extérieur.

A l'approximation à laquelle nous nous sommes arrêtés (termes d'ordre zéro seulement), tout le reste est nul.

5. **Cas de l'absence de champ. Equation et relations fondamentales.** — Une particule libre ($A_i = 0$) sera décrite par une fonction d'onde à trois composantes u_1, u_2, u_3 qui satisfont aux trois équations déduites de (10/4) ou (11/4)

$$2\mathrm{i}\varepsilon k\, \partial_4 u_b + \partial_a^2 u_b = 0$$

soit

$$\mathrm{i}h \frac{\partial u_b}{\partial t} + \frac{h^2}{2m} \Delta u_b = 0 \qquad (b = 1,2,3) \tag{1/5}$$

identiques à l'équation de Schrödinger pour chacune des composantes.

Les valeurs des diverses grandeurs attachées à cette particule se déduiront des expressions générales du paragraphe 2, compte tenu en plus de

$$u_4 = -\frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon k}\partial_a u_a; \tag{2/5}$$

nous garderons des termes jusqu'à l'ordre $1/c$ inclusivement.

Notons que nous obtenons ainsi par un processus d'approximation une nouvelle théorie, qu'on peut juger sans tenir compte de son origine.

Remarquons encore que lors du passage de la théorie relativiste à la théorie approximative il faut tenir compte, non seulement des équations, mais aussi des conditions aux limites. Nous admettons donc que, par hypothèse, *les valeurs de* u_1, u_2, u_3 *et aussi* u_4 (qui correspond à ψ_4) *s'annulent à l'infini*. Donc notre particule est définie par trois composantes nulles à l'infini et telles que la divergence $\partial_a u_a$ soit également nulle à la frontière.

On en déduit immédiatement deux relations fondamentales :

a) Les équations (1/5) fournissent par le procédé connu l'équation de continuité.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_b^* u_b\right) + \frac{\mathrm{i}h}{2m}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(u_b . \partial_a u_b^* - u_b^* . \partial_a u_b\right) \tag{3/5}$$

d'où l'on conclut avec l'hypothèse précédente

$$\int u_b^* u_b . \mathrm{d}V = \text{constante} \tag{4/5}$$

(3/5) est l'équation de continuité de l'électricité.

b) On a, en vertu des équations fondamentales (1/5) et (2/5).

$$\partial_4 u_4 = -\frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon k}\Delta u_4 \tag{5/5}$$

De plus :

$$\partial_4\left(u_4^* u_4\right) = u_4^* . \left(-\frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon k}\right)\Delta u_4 + u_4 . \left(\frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon k}\right)\Delta u_4^*$$
$$= \frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon k}\partial_a\left(u_4 . \partial_a u_4^* - u_4^* . \partial_a u_4\right) \tag{6/5}$$

d'où l'on déduit, en tenant compte que u_4 est nul aux limites

$$\int u_4^* u_4 . \mathrm{d}V = \text{constante}. \tag{7/5}$$

6. **Charge et courant.** — Compte tenu de (1/4) et (3/4) écrivons, l'expression générale de la densité de *charge*

$$j_4 = \varepsilon j_0 = \frac{\mathrm{i}eh}{2mc}\left(\psi_a^* G_{a4} - \psi_a F_{a4}\right) \tag{1/6}$$

sous la forme

$$j_0 = \frac{\mathrm{i}eh}{2mc\varepsilon}\left(u_a g_{a4} - u_a f_{a4}\right) + e u_a^* u_a. \tag{2/6}$$

D'après la formule fondamentale (2/5), u_4 est de l'ordre $\frac{1}{c}$ tout comme $\partial_4 u_a$; donc g_{a4}, f_{a4} sont de l'ordre $1/c$. Il s'ensuit que le premier terme de la somme précédente (2/5) est de l'ordre $1/c^2$, donc à négliger. En première approximation, la densité de charge de la particule est donnée par :

$$\rho = e u_a^* u_a \tag{3/6}$$

et la charge par $e\int u_a^* u_a \, dV$, en parfaite analogie avec le résultat classique de Schrödinger.

La densité de *courant*

$$j_b = \frac{ieh}{2mc}\left(\psi_a^* G_{ab} - \psi_a F_{ab}\right) + \frac{ieh}{2mc}\left(\psi_4^* G_{4b} - \psi_4 F_{4b}\right), \quad (b \neq 4) \qquad (4/6)$$

s'écrit en substituant (1/4)

$$j_b = \frac{ieh}{2mc}\left[u_a^* g_{ab} - u_a f_{ab} + i\varepsilon k\left(u_4^* u_b + u_b^* u_4\right)\right] + \frac{ieh}{2mc}\left(u_4^* g_{4b} - u_{4b} f_{4b}\right).$$

Le dernier terme est manifestement de l'ordre $1/c^3$. De plus, en tenant compte des équations fondamentales on peut écrire pour la première partie

$$j_b = \frac{ieh}{2mc}\left(u_a . \partial_b u_a^* - u_a^* . \partial_b u_a\right) + \partial_a\left[\frac{ieh}{2mc}\left(u_a^* u_b - u_b^* u_a\right)\right]. \qquad (5/6)$$

Le courant est donc d'ordre $1/c$, la charge d'ordre 0. La densité (5/6) se compose d'une première partie correspondant au courant de conduction et d'une seconde *due au moment magnétique* de la particule, ainsi que nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Le courant lui-même est donné par :

$$J_b = \frac{ieh}{2mc}\int\left(u_a . \partial_b u_a^* - u_a^* . \partial_b u_a\right) dV. \qquad (6/6)$$

Nous avons déjà vérifié l'existence d'une loi de conservation (3/5); elle subsiste pour les deux sortes de courants.

7. **Moment électromagnétique**. — Les 6 composantes du moment électromagnétique relativiste (4/2)

$$m_{rs} = \frac{ieh}{2mc}\left(\psi_r^* \psi_s - \psi_s^* \psi_r\right),$$

se séparent en 2 : celles qui ne contiennent pas l'indice 4 et qui représentent la densité de *moment magnétique*

$$\mu_{ab} = \frac{ieh}{2mc}\left(u_a^* u_b - u_b^* u_a\right) \qquad (1/7)$$

et les autres qui correspondent au *moment électrique*

$$\frac{ieh}{2mc}\left(u_4^* u_b - u_b^* u_4\right). \qquad (2/7)$$

Ces dernières sont de l'ordre $1/c^2$ donc négligeables, à notre approximation.

Donc, la particule étudiée *possède un moment magnétique* et n'a pas de moment électrique propre. Le moment magnétique doit fournir une contribution au courant; or, nous avons vu qu'une telle contribution existe, (formule (5/6).

8. **Spin**. — L'expression (5/2) du spin

$$M_{ab} = \frac{h}{2\varepsilon}\left(\psi_b F_{4a} + \psi_a F_{b4} + \psi_b^* G_{4a} + \psi_a^* G_{b4}\right) \quad (5/2)$$

s'écrit :

$$M_{ab} = \frac{h}{2\varepsilon}\left(u_b f_{4a} + u_a f_{b4} + u_b^* g_{4a} + u_b^* g_{b4}\right) + ih\left(u_b^* u_a - u_a^* u_b\right)$$

qui, en ne retenant que les termes d'ordre zéro, se réduit à

$$M_{ab} = ih\left(u_b^* u_a - u_a^* u_b\right). \qquad (1/8)$$

9. **Quantité de mouvement**. — Une composante p_b de la densité de quantité de mouvement s'écrit :

$$p_b = \frac{1}{\varepsilon c}\, T_{b4} \qquad (1/9)$$

T_{b4} étant donné par (3/2), soit :

$$p_b = \frac{h^2}{2\varepsilon mc}\left[F_{bs} G_{4s} + F_{4s} G_{bs} + k^2\left(\psi_b^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_b\right)\right]. \quad (2/9)$$

En substituant (1/2) on trouve :

$$p_b = \frac{h^2}{2\varepsilon mc}\left[\left(g_{4a} f_{ba} + f_{4a} g_{ba}\right) + i\varepsilon k\left(u_a f_{ba} - u_a^* g_{ba}\right) + k^2\left(u_b^* u_4 + u_4^* u_b\right)\right]. \qquad (3/9)$$

La première parenthèse est de l'ordre $1/c^2$, donc négligeable; le reste devient en vertu de (2/5)

$$p_b = \frac{-ih}{2}\left(u_a^* . \partial_b u_a - u_a \partial_b u_a^*\right) + \frac{1}{2} . \partial_a\left[ih\left(u_a^* u_b - u_b^* u_a\right)\right] \qquad (4/9)$$

Remarquons que cette densité est *proportionnelle au courant.*

Remarquons ensuite qu'elle se compose de deux termes, un premier terme qui est à proprement parler la quantité de mouvement de translation et un second qui correspond au spin. L'existence de ce dernier terme est capitale. Au surplus elle est évidente quoiqu'on ne la signale pas d'habitude dans les recherches de mécanique quantique relative à ce sujet. Il est évident que, du point de vue purement mécanique, l'existence d'un spin *doit* altérer la forme de la *densité* de quantité de mouvement. Pour prendre un exemple intuitif il est évident que, dans un ensemble continu de points, la quantité de mouvement de chacun d'eux sera différente suivant que cet ensemble, considéré comme un tout, possède ou non un mouvement de rotation.

La quantité de mouvement totale par contre n'est pas altérée par la présence du spin; elle est égale à

$$G_b = \int p_b \, \mathrm{d} V = \frac{-\mathrm{i}h}{2} \int \left(u_a^{\bullet} . \partial_b u_a - u_a . \partial_b u_a^{\bullet} \right) \mathrm{d} V \quad (5/9)$$

$$= \int u_a^{\bullet} \left(- \mathrm{i} h \frac{\partial}{\partial x^b} \right) u_a \mathrm{d} V. \quad (6/9)$$

Connaissant la valeur de la densité de quantité de mouvement nous pouvons chercher son moment

$$M_{mn} = \int (x_m p_n - x_n p_m) \, \mathrm{d} V \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (7/9)$$

et constater ainsi la présence d'un moment propre, c'est-à-dire d'un spin.

Ecrivons la densité (4/9) sous la forme

$$p_m = p'_m + \frac{\mathrm{i}h}{2} \partial_a \left(u_a^{\bullet} u_b - u_b^{\bullet} u_a \right) \quad (8/9)$$

p'_m désignant la densité de quantité de mouvement de translation. (7/9) s'écrira alors :

$$\begin{aligned} M_{mn} = & \int (x_m p'_n - x_n p'_m) \, \mathrm{d} V \\ & + \frac{\mathrm{i}h}{2} \int \left[x_m . \partial_a \left(u_a^{\bullet} u_n - u_n^{\bullet} u_a \right) \right. \\ & \left. - x_n . \partial_a \left(u_a^{\bullet} u_m - u_m^{\bullet} u_a \right) \right] \mathrm{d} V. \end{aligned} \quad (9/9)$$

La première intégrale est le moment de la quantité de mouvement d'orbite; *la seconde n'est pas nulle.* En effet, tous les termes sont nuls sauf ceux pour $a = m$ dans un cas et $a = n$ dans l'autre : finalement

$$\begin{aligned} M_{mn} = & \int (x_n p'_m - x_n p'_m) \, \mathrm{d} V \\ & + \mathrm{i} h \int \left(u_n^{\bullet} u_m - u_m^{\bullet} u_n \right) \mathrm{d} V. \end{aligned} \quad (10/9)$$

La particule possède donc un spin égal à

$$\mathrm{i} h \int \left(u_n^{\bullet} u_m - u_m^{\bullet} u_n \right) \mathrm{d} V \quad (11/9)$$

valeur identique à celle du § 8.

10. **Energie.** — La densité d'énergie s'écrit :

$$E = \frac{h^2}{2m} \left[\frac{F_{ab} G_{ab}}{2} - F_{a4} G_{a4} + k^2 \left(\psi_a^{\bullet} \psi_a - \psi_4^{\bullet} \psi_4 \right) \right] \quad (1/10)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} E = & \frac{h^2}{2m} \left[\frac{f_{ab} g_{ab}}{2} + \mathrm{i} \varepsilon k \left(u_a f_{a4} - u_a^{\bullet} g_{a4} \right) - k^2 u_4^{\bullet} u_4 \right] \\ & + \frac{h^2}{2m} \left(- f_{a4} g_{a4} + 2 k^2 u_a^{\bullet} u_a \right). \end{aligned} \quad (2/10)$$

Cette expression s'écrit, compte tenu des équations fondamentales :

$$\begin{aligned} E = \frac{h^2}{2m} \Big\{ & \partial_a^2 \left(\frac{u_b^{\bullet} u_b}{2} \right) - \partial_{ab} \left(\frac{u_a^{\bullet} u_b + u_b^{\bullet} u_a}{2} \right) + \\ & + 2 \mathrm{i} \varepsilon k \, \partial_a \left(u_4^{\bullet} u_a - u_a^{\bullet} u_4 \right) - 2 \mathrm{i} \varepsilon k \left(u_a . \partial_4 u_a^{\bullet} - u_a^{\bullet} . \partial_4 u_a \right) \\ & - f_{a4} g_{a4} + 2 k^2 u_a^{\bullet} u_a + 2 k^2 u_4^{\bullet} u_4 \Big\}. \end{aligned} \quad (3/10)$$

L'énergie elle-même sera, en laissant de côté le terme $- f_{a4} \, g_{a4}$ qui est d'ordre $1/c^2$:

$$\begin{aligned} \int E \mathrm{d} V = & \mathrm{i} h \int \left(u_a^{\bullet} . \partial_t u_a - u_a . \partial_t u_a^{\bullet} \right) \mathrm{d} V \\ & + 2 m c^2 \int u_a^{\bullet} u_a \, \mathrm{d} V + 2 m c^2 \int u_4^{\bullet} u_4 \, \mathrm{d} V. \end{aligned} \quad (4/10)$$

Si nous convenons de procéder comme dans le cas de l'équation de Gordon, nous devrons supprimer le terme

$$2 m c^2 \int u_a^{\bullet} u_a \, \mathrm{d} V$$

qui devient infini avec c et diviser le reste par 2; il vient :

$$\text{Energie} = \frac{\mathrm{i}h}{2} \int \left(u_a^{\bullet} . \partial_t u_a - u_a . \partial_t u_a^{\bullet} \right) \mathrm{d} V + m c^2 \int u_4^{\bullet} u_4 \mathrm{d} V.$$

A cette approximation, l'énergie est donc la moyenne de $\partial / \partial t$, plus un autre terme. Or, ce terme est une constante en vertu du paragraphe 5, formule (7/5), constante qu'il serait intéressant d'étudier.

Remarquons enfin, que si dans la théorie *relativiste* l'énergie est positive, même en présence d'un champ (cf. l'article cité ou la formule (3/2), il n'en est plus de même à l'approximation actuelle. L'énergie d'une particule *libre* reste toujours positive comme il se doit, mais en vertu de (11/4) ou (14/4) l'énergie totale dans un champ peut être aussi négative par l'effet du terme d'énergie potentielle (comme en théorie de Schrödinger) ou par l'effet de l'énergie de spin.

10. **Conclusion.** — L'analyse précédente montre qu'avec une fonction à trois composantes satisfaisant chacune à une équation de Schrödinger, on peut décrire une particule à énergie positive et à spin entier. Le fait que le spin doit être entier se manifeste en théorie relativiste par le caractère vectoriel de la fonction d'onde et à l'approximation newtonienne par la constatation que le rapport entre le moment magnétique (1/7) s'obtient d'ailleurs immédiatement dès que l'on a établi et le spin (1/8) ou (11/9) est égal à $\frac{e}{2mc}$. Cette conclusion qu'il existe une proportionnalité non seulement entre le courant lui-même et la quantité de mouvement, mais aussi entre les densités correspondantes (cf. § 9). La théorie ne s'applique donc pas aux électrons ordinaires : on peut espérer qu'elle est applicable aux particules du type de l'électron lourd.

Enfin, il est intéressant de voir de quelle manière le spin s'introduit dans ces théories vectorielles et l'importance qu'y acquièrent les *densités*; la transposition de la théorie précédente en langage d'opérateurs est extrêmement instructive à cet égard.

Manuscrit reçu le 10 décembre 1937.

Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Roumanie, **Tome II.** No. 4, 1938.

90. EQUATIONS D'ONDES APPROXIMATIVES POUR DES PARTICULES À SPIN UNITÉ

Par AL. PROCA, Mc. A.S.R.

(Séance du 11 mars 1938)

L'existence, de plus en plus probable, de particules analogues à *l'électron lourd,* caractérisées par un spin égal à l'unité, pose le problème de la recherche des équations générales régissant leur mouvement.

Jusqu'à présent les électrons lourds ne sont connus que dans la composante pénétrante du rayonnement cosmique. L'équation d'ondes correspondante doit être nécessairement relativiste pour tenir compte de leur grande énergie ; nous avons déjà développé dans une autre direction une telle théorie (cf. *Journal de Physique*, t. VIII, 1936, p. 347) et nous ne reviendrons pas là-dessus.

Il n'est cependant pas interdit d'espérer qu'un jour nous puissions arriver à isoler un électron lourd *lent*, c'est-à-dire de faible vitesse. La théorie relativiste sera encore appliquable à ce cas ; néanmoins elle serait trop compliquée et il est évident qu'il faudrait la remplacer par une théorie mieux adaptée aux circonstances, plus simple et, partant, d'un maniement plus commode.

Or, on peut développer une telle théorie en prenant comme point de départ précisément la théorie relativiste citée plus haut : il suffit de chercher ce qu'elle devient en première approximation lorsque la vitesse de la lumière c tend vers l'infini.

Les détails de ce processus d'approximation formeront l'objet d'une autre publication ; nous n'indiquerons ici que les résultats.

La théorie approximative proposée est une théorie *à trois composantes*. Les équations fondamentales peuvent être condensées en une seule

$$(1) \qquad ih\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{H}u$$

avec l'hamiltonien

$$(2) \qquad \mathrm{H} = \frac{-h^2}{2m}(\partial_a - i\,\mathrm{A}_a)^2 + hc\,\mathrm{A}_o + \frac{eh}{2mc}(m_x\mathrm{H}_x + m_y\mathrm{H}_y + m_z\mathrm{H}_z$$

où

h = constante de Planck divisée par 2π,

m = masse au repos,

$\partial_a = \dfrac{\partial}{\partial x_a}$,

c = vitesse de la lumière,

e = charge élémentaire,

A_r = composantes du potentiel d'univers multiplieés par e/hc,

$\mathrm{H}_x, \ldots$ = composantes du champ magnétique extérieur

$m_x,\ldots$ les opérateurs suivants :

$$m_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix} \qquad m_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad m_z = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Les équations sont donc du type de Schrödinger complétées par des termes donnant l'influence du moment magnétique. Il faut encore ajouter les conditions aux limites usuelles.

Dans cette théorie, les *densités* des diverses grandeurs caractéristiques ont les expressions suivantes en l'absence de champ :

1) *charge* :

$$(3) \qquad \rho = e\, u_a^x\, u_a$$

(avec la convention de sommation habituelle) :

2) *courant*

$$(4) \qquad j_b = \frac{i\,eh}{2\,mc}\,(u_a\, \partial_b u_a^x - u_a^x\, \partial_b u_a) + \partial_a \left| \frac{i\,eh}{2\,mc}\,(u_a^x\, u_b - u_b^x u_a) \right|$$

3) *moment magnétique*

$$(5) \qquad \mu_{ab} = \frac{i\,eh}{mc}\,(u_a^x u_b - u_b^x u_a)$$

4) *moment électrique*

nul

5) *spin*

$$(6) \qquad m_{ab} = ih\,(u_a^x u_b - u_b^x u_a)$$

6) *quantité de mouvement*

$$(7) \qquad p_b = \frac{mc}{h}\, j_b$$

La quantité de mouvement elle-même s'écrit donc

$$(8) \qquad G_b = \int u_a^x\,(-ih\,\partial_b)\, u_a\, dV.$$

Enfin, on trouve pour l'énergie

$$(9)\qquad \mathrm{E} = \int \frac{ih}{2}\,(u_a^x.\,\partial_t u_a - u_a.\,\partial_t u_a^x)\,d\mathrm{V} + \frac{h^2}{m}\int (\partial_a u_a^x)\,(\partial_b u_b)\,d\mathrm{V},$$

la seconde intégrale est une constante, la première représente la moyenne de l'opérateur $ih\,\partial_t = ih\,\dfrac{\partial}{\partial t}$

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur une équation symbolique groupant les équations du mésoton (électron lourd), celles de Kemmer, de Klein-Gordon et les équations du photon de L. de Broglie.* Note de M. A. **Proca**.

1. Les équations du mésoton ayant déjà été rattachées à une réalité physique, l'étude de leur structure présente un intérêt qui n'est pas purement spéculatif.

2. Considérons l'équation générale

$$\left(\sum_{\mu} \gamma_\mu D_\mu\right) \psi = k\psi, \tag{1}$$

où les $\gamma_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4)$ sont les opérateurs bien counus de la théorie de Dirac $(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu})$, et où $D_\mu = (\partial/\partial x_\mu) + (ie/\hbar c) A_\mu$, $k = mc/\hbar$.

Dans cette équation ψ est considéré comme le nombre hypercomplexe le plus général dans le domaine des γ_μ (¹), à savoir

$$\psi = \Phi + \gamma_r \Phi_r + \frac{1}{2}\gamma_r\gamma_s\chi_{rs} + \frac{1}{6}\gamma_r\gamma_s\gamma_t\xi_{rst} + \frac{1}{24}\gamma_r\gamma_s\gamma_t\gamma_u\eta_{rstu} \tag{2}$$

$$(r, s, t, u = 1, 2, 3, 4).$$

(1) est équivalente à 16 équations ordinaires, au plus, obtenues en égalant les coefficients des produits des γ_μ.

3. L'invariance relativiste de (1) est assurée si Φ est un scalaire, Φ_μ un vecteur et χ_{rs}, ξ_{rst}, η_{rstu} des tenseurs complètement antisymétriques de rang 2, 3, 4. Bien entendu, un ou plusieurs de ces éléments peuvent être nuls; à chacune de ces hypothèses correspond un autre système d'équations.

4. *Les équations du mésoton* se déduisent de (1) en supposant que

$$\Psi = \gamma_r \Phi_r + \frac{1}{2}\gamma_r\gamma_s\chi_{rs}.$$

En l'absence de champ, (1) est équivalente aux équations

$$\partial_r \chi^{rs} = k\Phi^s, \qquad \partial_r \Phi^r = 0.$$

$$\partial_r \Phi_s - \partial_s \Phi_r = k\chi_{rs}. \qquad \sum_{\text{cycl.}} \partial_t \chi_{rs} = 0.$$

Les deux premières sont les équations du mésoton avec les notations de Kemmer [1]; les deux autres en sont une conséquence.

5. Si l'on prend

$$\psi = \Phi + \gamma_r \Phi_r,$$

l'équation (1) est équivalente à un système conduisant à *l'équation de Klein-Gordon*.

6. Si l'on prend successivement

$$\psi = \frac{1}{2}\gamma_r\gamma_s\chi_{rs} + \frac{1}{6}\gamma_2\gamma_s\gamma_t\xi_{rst},$$

$$\psi = \frac{1}{6}\gamma_r\gamma_s\gamma_t\xi_{rst} + \frac{1}{24}\gamma_r\gamma_s\gamma_t\gamma_u\eta_{rstu},$$

on obtient *les équations de Kemmer* [2], qui sont celles de Klein-Gordon et celles du mesoton, écrites avec les tenseurs duals.

7. On peut évidemment prendre divers autres cas particuliers. Si toutefois on laisse à ψ toute sa généralité, on a une fonction d'onde à 16 composantes, et l'équation (1) à laquelle elle satisfait est équivalente à l'un des groupes de la *théorie du photon de M. L. de Broglie* [3], ainsi qu'il est démontré d'autre part (ci-dessus, p. 1180) par Mme M.-A. Tonnelat-Baudot.

---

(1) Cf. p. ex. A. Proca, *Journ. de Phys.*, **1**, 1930, p. 235; **3**, 1932, p. 172.
(2) *Proc. Roy. Society London*, A, **166**, 1938, p. 127.
(3) L. de Broglie, *Nouvelles recherches sur la lumière*, 1938, Paris.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **207**, p. 1182, séance du 12 décembre 1938.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
111922-39 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la masse du mésoton et des autres particules élémentaires.* Note de MM. **A. Proca** et **S. Goudsmit**.

Le processus de correspondance, extrêmement fécond, qui a donné naissance à la notion de spin des particules élémentaires, ne nous semble pas avoir été poussé jusqu'à la limite de ses conséquences logiques. En effet, par ce processus, on confère à une particule une seule des propriétés essentielles qui résultent, pour un corps macroscopique, de sa rotation, à savoir un moment cinétique. Or un pareil corps possède également, en vertu de sa rotation, une énergie supplémentaire; on est donc en droit de se demander si, pour des raisons de correspondance, une partie de l'énergie de la particule n'est pas due à la présence du spin et ne varie pas avec elle. Cette idée, généralisée, conduit aux suggestions suivantes, dont on trouvera une discussion dans un autre recueil.

Physiquement, une particule n'est pas complètement décrite uniquement par ses quatre coordonnées x^r et ses moments p_r. En une première approximation, nous achèverons cette description en donnant deux autres couples de variables canoniquement conjuguées (x^e, p_e) et (x^s, p_s) correspondant respectivement à la charge (1) et au spin. A cause des théorèmes de conservation, il est clair que ces grandeurs seront représentées *par les moments* p_e et p_s; nous supposerons p_e proportionnel à e et p_s proportionnel au spin sS, ou plutôt p_s^2 proportionnel à $s(s+1)S^2$. L'espace de configuration sera défini par l'intervalle élémentaire

$$ds^2 = \sum_1^4 (dx^r)^2 + \lambda_s (dx^s)^2 + \lambda_e (dx^e)^2.$$

Admettant que les trajectoires sont des géodésiques de cet espace, on obtient une mécanique des particules libres qui se raccorde avec la mécanique classique de la relativité pour des particules sans charge ni spin, de masse au repos μ_0.

(1) Suivant une idée très féconde, développée par O. Klein.

Des raisonnements calqués sur ceux de la relativité restreinte permettent d'établir la formule qui donne la masse d'une particule au repos :

$$M^2 = \mu_0^2 - s(s+1)\frac{S^2}{\lambda_s c^2} - \frac{p_e^2}{\lambda_e c^2}, \tag{1}$$

μ_0, masse *matérielle*, vraie (celle d'une particule sans spin ni charge); M, masse *apparente* (celle qu'on mesure et qui est telle que $Mc^2 = p_0$ représente l'énergie propre).

D'après cette formule, la masse mesurée se compose d'une contribution matérielle, d'une contribution du spin, et d'une troisième contribution due à la charge (auxquelles s'ajoute une quatrième due à l'énergie cinétique, c'est-à-dire à la vitesse, si celle-ci n'est pas nulle). Deux particules identiques, mais différemment chargées doivent avoir, d'après cette formule, des masses différentes; cela rend compte du fait que le proton et le neutron n'ont pas la même masse. Cette formule permet aussi de donner un critérium différenciant les particules lourdes des particules légères. En effet, il semble bien établi aujourd'hui qu'un électron perd absolument toute individualité dans le noyau; cela suggère que pour les particules légères $\mu_0 = 0$ et pour les particules lourdes $\mu_0 \neq 0$.

La masse de l'électron serait due exclusivement à la charge et à son spin; lorsque ces éléments sont cédés au noyau, l'électron s'évanouit, et accuse ainsi l'analogie avec le photon à laquelle nous a habitué la théorie de Fermi. La formule des particules légères s'écrit donc

$$m^2 = -\frac{s(s+1)S^2}{\lambda_s c^2} - \frac{p_e^2}{\lambda_e c^2}. \tag{2}$$

Les hypothèses précédentes sont très générales; il est d'autant plus curieux de constater qu'elles conduisent, dans le cas du mésoton, à une coïncidence inattendue. En appliquant (1) et (2) au proton ($s = 1/2$, $M_P = 1{,}00813$ unités atomiques), au neutron ($s = 1/2$, $M_N = 1{,}00897$), à l'électron ($s = 1/2$, $m_e = 0{,}000548$) et au mésoton ($s = 1$, $m_Y = ?$), on déduit que la masse du mésoton est du même ordre que celle de la particule de Yukawa

$$m_Y \sim 100\, m_e \quad (^2).$$

(2) Cette valeur calculée pour $s = 1$ coïncide avec celle que Yukawa avait cru pouvoir déduire des forces nucléaires. Pour le mésoton présent dans le rayonnement cosmique, les expérimentateurs penchent aujourd'hui plutôt pour la valeur $200 m_e$. On ne peut cependant pas opposer cette conclusion au résultat théorique, d'une part parce que les

En fait, d'après cette théorie, la masse du mésoton serait donnée, en fonction de celles du proton, du neutron et de l'électron par la relation

$$m_{\mathrm{Y}} = \sqrt{\frac{5(\mathrm{M}_{\mathrm{N}}^2 - \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^2) + 8m_e^2}{3}}.$$

Cette théorie réduit donc la diversité des masses élémentaires connues à une seule masse fondamentale, de nature matérielle, μ_0, ayant une valeur intermédiaire entre la masse du neutron et celle du proton.

Le neutrino ne trouve pas de place dans la théorie; celle-ci ne peut pas expliquer, sous sa forme actuelle, à la fois le fait que $\mathrm{M}_{\mathrm{Neutron}} > \mathrm{M}_{\mathrm{Proton}}$ et que $m_{\mathrm{neutrino}} < m_{\mathrm{électron}}$. De même, l'existence de la particule manquante de charge e et de spin nul est interdite.

Il est cependant évident que la forme actuelle de la théorie est incomplète, non seulement parce qu'on ne tient pas compte de la quantification, mais aussi et surtout parce qu'on n'introduit certainement pas *toutes* les coordonnées nouvelles nécessaires à la description des particules, parce qu'on n'examine qu'une *projection* de l'Univers total.

---

mesures ne sont pas encore suffisamment précises et, d'autre part, parce que l'on ignore absolument quel est le spin de la particule du rayonnement cosmique. A ce sujet, quand on examine les résultats des diverses mesures, on ne peut pas ne pas être frappé par l'*énorme dispersion* de ces résultats expérimentaux, qui ne semblent pas converger vers une valeur unique. Cette dispersion est beaucoup plus grande que les limites d'erreur admises. Elle peut naturellement être due à l'impossibilité de faire des mesures exactes; on pourrait cependant hasarder l'hypothèse que dans le rayonnement cosmique, on trouve en réalité *tout un spectre* de mésotons, différant par leur masse, donc, d'après la théorie précédente, par leur spin. La variété la plus fréquente serait celle de spin 2, dont la masse est précisément $200\,m_e$.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 208, p. 884, séance du 20 mars 1939.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
112027-39 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la longueur fondamentale attachée aux particules élémentaires.* Note de M. A. **Proca**.

1. On connaît les arguments mis en avant par M. Heisenberg en faveur de l'introduction, en physique, d'une nouvelle constante universelle, ayant les dimensions d'une longueur et une valeur de l'ordre de

$$\frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \times 10^{-13}\ \text{cm}.$$

Nous voulons signaler que la théorie des particules élémentaires que nous avons présentée, M. S. Goudsmit et moi-même, ([1]), introduit automatiquement une telle longueur, d'une manière tout à fait naturelle, avec un ordre de grandeur correct et une valeur qui ne dépend nullement de la charge élémentaire e.

En effet, dans cette théorie, le mouvement des particules est donné par les géodésiques de l'espace

$$ds^2 = -\sum_1^4 (dx^\nu)^2 + \lambda_s \sum (dx^s)^2 + \lambda_e (dx^e)^2, \tag{1}$$

et leur masse par

$$M^2 = \mu_0^2 - s(s+1)\frac{S^2}{\lambda_s c^2} - \frac{p_e^2}{\lambda_e c^2}. \tag{2}$$

Les nouvelles constantes fondamentales λ_s et λ_e s'introduisent dans la définition même de l'Univers et jouent un rôle qui n'est pas sans analogie avec celui de la vitesse de la lumière en relativité restreinte.

Dans la Note citée, nous avons effectué certains calculs pour lesquels il était inutile de connaître les valeurs numériques de ces constantes. Nous y avons admis que S et p_e étaient respectivement proportionnels au spin et à la charge; nous n'allons pas au delà de cette hypothèse en posant $S \sim \hbar$ et $p_e \sim e$. Dans ces conditions, (2) montre que $\sqrt{-\lambda_s}$ *a les dimensions d'une*

([1]) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 884.

longueur et $\sqrt{\lambda_e}$ celle d'une charge divisée par une quantité de mouvement, soit $M^{-1/2}L^{+1/2}$ dans le système usuel. M_P, M_N et m_e étant respectivement les masses du proton, du neutron et de l'électron, (2) permet d'écrire

$$(3) \qquad \sqrt{-\lambda_s} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\hbar}{\sqrt{m_e^2 + M_N^2 - M_P^2}}, \qquad \sqrt{\lambda_e} = \frac{e}{c\sqrt{M_N^2 - M_P^2}},$$

ce qui donne en particulier

$$\sqrt{-\lambda_s} \sim 4,4.10^{-13}\ \text{cm},$$

c'est-à-dire une longueur du même ordre que celle de Heisenberg.

2. Par la manière dont elle a été introduite, cette longueur constitue une *valeur critique*, exactement dans le même sens que pour la vitesse de la lumière dans la théorie ordinaire. En effet on déduit de (1) que, par exemple, pour une particule sans charge et au repos, on a

$$(4) \qquad \frac{\sqrt{\Sigma(dx^s)^2}}{dt} \leqq \frac{c}{\sqrt{-\lambda_s}}, \qquad \text{soit} \quad \frac{c\,dt}{\sqrt{\Sigma(dx^s)^2}} \geqq \sqrt{-\lambda_s}.$$

Néanmoins son interprétation physique n'est pas réductible à des éléments connus, parce que nous n'avons pas encore d'interprétation simple des x^s, donc des *vitesses* dx^s/dt. On se trouve ainsi en présence d'une limitation qui concerne le changement dans le temps de la coordonnée de spin, et qui introduit une longueur fondamentale sans faire intervenir des raisonnements directs sur l'impossibilité de mesurer des longueurs inférieures à $\sqrt{-\lambda_s}$.

3. Il semble très satisfaisant de constater que cette longueur universelle, d'un ordre de grandeur apparemment correct, est parfaitement définissable *à partir d'éléments purement mécaniques*, sans intervention de la charge électrique qu'on était obligé d'introduire jusqu'à présent. D'ailleurs, même si l'on n'accepte pas la théorie telle qu'elle a été esquissée jusqu'à présent, on pourra toujours avoir recours à la première des relations (3) pour calculer cette longueur autrement que par $r_0 = e^2/mc^2$.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 208, p. 1074, séance du 3 avril 1939.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
112154-39 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Série VII. — Tome X. N° 5. Mai 1939.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

SUR LA MASSE DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

Par A. PROCA (Institut Henri Poincaré, Paris)
et S. GOUDSMIT (Univ. of Michigan, Ann Arbor, Mich. U. S. A.).

Sommaire. — Cet article constitue l'esquisse d'une théorie *classique* des particules libres, se raccordant à la dynamique de la relativité restreinte. L'hypothèse fondamentale consiste à définir le mouvement par les géodésiques d'un espace de configuration comportant, outre les coordonnées ordinaires, deux autres « coordonnées » correspondant, l'une à la charge, l'autre au spin.

D'après cette théorie, la masse accessible à l'expérience dépend de sa « quantité de matière », de sa charge et de son spin. La théorie rend toute naturelle la différence de masse constatée entre le neutron et le proton, fournit un critérium pour distinguer entre les particules lourdes et légères et complète le rapprochement entre photons et électrons mis en lumière par la théorie de Fermi. Enfin, la masse du mésoton (de spin 1), calculée d'après cette théorie, coïncide avec celle de la particule de Yukawa.

1. **Introduction.** — Le nombre des particules qu'on peut considérer comme « élémentaires » en Physique a augmenté ces dernières années dans de telles proportions que le besoin s'est fait sentir d'un retour vers l'unité.

On a maintes fois exprimé l'opinion que les masses au repos des particules élémentaires constituaient, en réalité, les valeurs propres d'un seul et même opérateur et que les différentes particules pouvaient être considérées comme divers états d'un même système fondamental. Récemment, Neddermeyer a repris cette idée et lui a donné plus de force en y englobant l'électron lourd. Néanmoins, il n'a pas été possible jusqu'à présent de s'engager plus avant dans la voie ouverte par cette hypothèse, c'est-à-dire de réaliser effectivement la « quantification de la masse » suivant les principes généraux de la mécanique quantique.

Plus récemment encore, P. Jordan a tenté de ramener les diverses particules connues à deux éléments fondamentaux : l'électron et le neutrino (¹).

Un examen, même superficiel, de ce problème fait ressortir certaines particularités qui semblent dignes d'attention et méritent une étude approfondie parce qu'elles permettent de présenter la question sous un jour nouveau.

La trop grande généralité du problème et la faible possibilité de vérifications expérimentales rendent malaisé, sinon impossible, l'établissement d'une théorie indiscutable. Le lecteur voudra bien ne considérer les suggestions suivantes que comme une série d'hypothèses, soumises à sa critique dans le but d'éliminer celles qui se heurteraient à de trop grosses difficultés. Le point de vue adopté est celui d'un principe de correspondance ; il est, en effet, inutile d'aller plus loin de tenter, par exemple, la quantification — avant d'être assuré que la théorie dans ses lignes générales, ne rencontre pas d'obstacle insurmontable.

2. **Energie au repos des particules élémentaires.** — Tout le problème est dominé par le principe d'Einstein de l'équivalence entre la masse et l'énergie, qu'on peut considérer comme le résultat le plus substantiel de la relativité restreinte.

On peut faire à son sujet une remarque très générale. Dans la physique moderne, la « masse au repos » est, au fond, définie uniquement par l'intermédiaire de l' « énergie au repos ». Il en est ainsi évidemment en physique nucléaire ; il en est ainsi également en relativité restreinte, où m est un coefficient, tel que mc^2 soit l'énergie au repos. Or, toutes les mesures de masse en physique, sont justiciables de l'un ou l'autre de ces deux chapitres : physique nucléaire ou relativité restreinte ; il est clair donc que ce que nous mesurons d'habitude en évaluant la masse est, dans tous les cas, un nombre proportionnel à une *énergie au repos*. En divisant par le carré de c, nous en déduisons la masse ; pour des raisons qui apparaîtront clairement dans un instant, nous appellerons le nombre ainsi obtenu la « *masse apparente* » de la particule.

3. **Remarque fondamentale.** — Considérons donc

(¹) P. Jordan. *Z. Physik*, **111**, 1938, p. 498.

une particule matérielle. En relativité restreinte, cette particule est parfaitement définie lorsqu'on se donne, outre sa masse au repos m, ses quatre coordonnées x^r ($x^4 = ix^0 = ict$) et ses quatre moments conjugués

$$p_r = m\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}\tau} = mu_r,$$

où $c\,\mathrm{d}\tau$ est l'élément de longueur de l'univers à 4 dimensions :

$$c^2\mathrm{d}\tau^2 = g_{ik}\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k = -\sum_1^4(\mathrm{d}x^r)^2$$
$$= c^2\mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2.$$

Essentiellement, la particule est définie *uniquement* par 4 coordonnées et 4 moments conjugués. Or, nous savons bien que, *physiquement, il n'en est pas ainsi.* Nous savons, par exemple, qu'une particule matérielle possède encore au moins deux caractéristiques indépendantes des précédentes, à savoir *son spin* et *sa charge*, auxquelles il faudra ajouter très probablement son *moment magnétique*. Toute théorie complète doit en tenir compte. La relativité restreinte les ignore ; il faut donc la compléter sur ce point.

4. **Théorie générale.** — Pour traiter ce cas général, il suffira de faire appel, en modifiant légèrement le point de vue, à une conception extrêmement puissante et originale mise en avant particulièrement par Klein [cf. Kaluza et Klein (1), Klein (2), Mandel (3) et autres]. Cette conception a été utilisée jusqu'à présent dans un but qui n'est pas celui du présent article. On peut caractériser la différence de ces deux attitudes en disant que jusqu'à présent on s'est efforcé de l'utiliser pour étudier des problèmes d'interaction électromagnétique ; ici, par contre, nous voulons établir d'abord une théorie des particules libres et, ensuite seulement, traiter le cas de l'interaction.

Quoi qu'il en soit, considérons une particule matérielle libre. Son mouvement sera décrit par sa position dans l'espace-temps, c'est-à-dire par ses coordonnées x^i ($i = 1, 2, 3$) et $x^0 = ct$; par un ensemble de variables x^s qui rendent compte de son spin et enfin par un autre ensemble de variables x^e qui expriment qu'elle est chargée électriquement. L'existence simultanée d'un spin et d'une charge entraîne pour la particule l'existence certaine d'un moment électro-magnétique. On peut s'imaginer alors que la particule la plus générale sera caractérisée par un moment électrique et magnétique *quelconque*, dont le précédent ne constituerait qu'une partie. Cependant, une trop grande généralité étant nuisible, nous nous en tiendrons pour commencer aux deux caractères déjà cités : spin et charge ; au surplus, les raisonnements que nous serons amenés à faire pourront être immédiatement généralisés aux cas où l'on tiendrait compte d'autres caractéristiques *nouvelles*, indépendantes des grandeurs actuellement connues.

L'« espace de configuration » de la particule ne sera plus l'univers x^r, mais sera défini par

$$x^r,\ x^s,\ x^e \qquad (r = 1,\ 2,\ 3,\ 4)\ ;$$

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \sum_1^3(\mathrm{d}x^i)^2 + \lambda_s\sum(\mathrm{d}x^s)^2 + \lambda_e(\mathrm{d}x^e)^2. \quad (1)$$

5. **Formules de transformation. Principe de relativité étendu.** — Les hypothèses des paragraphes précédents, et particulièrement celles qui sont condensées en (1), posent un problème d'ordre général très important.

A l'heure actuelle, toute la physique est dominée par le principe de relativité ; lorsqu'on néglige la gravitation, l'invariance par rapport aux transformations de Lorentz est un critère qui permet d'établir un choix parmi toutes les hypothèses possibles et d'éliminer sans appel celles qui n'y satisfont pas. Étant donné que, maintenant, le nombre des variables est supérieur à quatre, on peut se demander s'il n'y a pas lieu de modifier le principe de relativité *restreinte*, et chercher si les phénomènes naturels n'obéissent pas à un principe *étendu* qu'on formulerait ainsi : *les lois naturelles sont invariantes par rapport aux transformations qui n'altèrent pas la forme* (1).

Ces transformations sont définies d'après Minkowski. Si $n > 4$ est le nombre total de variables, éventuellement imaginaires, caractérisant une particule matérielle, les transformations en question sont les rotations d'un certain espace à n dimensions, c'est-à-dire celles qui laissent invariante la longueur $\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{d}x^i)^2$.

Cette généralisation évidente n'a pas le caractère banal qu'on serait tenté de lui attribuer au premier abord. Néanmoins, son étude sort du cadre de cet article ; aussi, nous bornerons-nous à n'admettre pour le moment que l'invariance *par rapport aux transformations de Lorentz proprement dites ;* nous supposerons donc que, dans ces circonstances, le ds^2 défini par (1) reste invariant.

6. **Equations générales des particules libres.** — L'hypothèse la plus naturelle pour trouver les équations du mouvement libre consiste évidemment à admettre qu'elles définissent des géodésiques de l'espace de configuration. Or, dans l'espace de Riemann défini par

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \qquad (i, k = 0,1 \ldots n\text{-}1), \qquad (2)$$

ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)}\right] - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \qquad (3)$$

avec la fonction de Lagrange

$$L = \frac{1}{2}g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}. \qquad (4)$$

(1) Kaluza et Klein. *Sitz. Ber.*, Berliner Akad., 1921, p. 966.
(2) Klein. *Z. Physik*, **37**, 1926, p. 895 ; **46**, 1927, p. 188.
(3) Mandel. *Z. Physik*, **39**, 1926, p. 136 ; **45**, 1927, p. 285.

Dans notre cas particulier, nous admettons donc que le mouvement est régi par une fonction de Lagrange, définie d'ailleurs à un facteur numérique près A :

$$L = \frac{A}{2} g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \quad (5)$$

Nous définirons les moments canoniquement conjugués à x^i de la façon habituelle :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^i}{ds}\right)} = A g_{ik} \frac{dx^k}{ds}. \quad (6)$$

La fonction de Hamilton sera :

$$H = \sum p_i \frac{dx^i}{ds} - L = + \frac{A}{2} g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \quad (7)$$

Les équations fondamentales peuvent s'écrire par conséquent sous la forme connue :

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

7. **Formules fondamentales.** — Nous classons donc nos éléments caractéristiques en deux catégories : coordonnées x^i et moments p_i. A la première appartiennent les coordonnées cartésiennes x, y, z et le temps, $x^0 = ct$, à la seconde la quantité de mouvement et l'énergie. Il n'y a aucun doute quant à la catégorie dans laquelle il faut ranger la charge et le spin : *elles appartiennent de toute évidence à la classe des moments* à cause de leur caractère, et en particulier à cause du fait expérimental qu'elles obéissent à des lois de conservation. x^s et x^e sont à ranger dans la catégorie des coordonnées.

Revenons à notre ds^2 particulier (1), c'est-à-dire, posons :

$$g_{00} = +1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = \lambda_s, \quad g_{55} = \lambda_e, \quad g_{ik} = 0 \ (i \neq k). \quad (8)$$

En divisant par ds^2 et en tenant compte de (6), on trouve, en général :

$$\sum_r \frac{p_r^2}{g_{rr} A^2} = 1. \quad (9)$$

Pour un p_k déterminé, on en déduit :

$$p_k = A \sqrt{g_{kk}} \sqrt{1 - \sum_l{}' \frac{p_l^2}{A^2 g_{ll}}} \quad (10)$$

la somme portant sur tous les l, à l'exception de k.

On obtient aussi, aisément, la formule :

$$p_k = \frac{A g_{kk}}{\sqrt{g_{kk} + \sum' g_{ll} \left(\frac{dx^l}{dx^k}\right)^2}}. \quad (11)$$

Appliquées à notre cas particulier, et pour $k = 0$, $x^0 = ct$, ces formules donnent :

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \sqrt{A^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{p_s^2}{\lambda_s} - \frac{p_e^2}{\lambda_e}} \\ p_0 &= \frac{A}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \frac{\lambda_s}{c^2}\left(\frac{dx^s}{dt}\right)^2 + \frac{\lambda_e}{c^2}\left(\frac{dx^e}{dt}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Enfin, pour une particule au repos $dx^i/dt = 0$ et $p_i = 0$ et l'on aura :

$$p_0 = \sqrt{A^2 - \frac{p_s^2}{\lambda_s} - \frac{p_e^2}{\lambda_e}} \quad (13)$$

$$p_0 = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_s}{c^2}\left(\frac{dx^s}{dt}\right)^2 + \frac{\lambda_e}{c^2}\left(\frac{dx^e}{dt}\right)^2}}. \quad (14)$$

8. **Conséquences immédiates de la théorie.** — Les formules (13) et (14) ont été déduites d'hypothèses très générales et qui semblent parfaitement acceptables. On en tire des conséquences très importantes.

p_0 est le moment conjugué de $x^0 = ct$; c'est donc, par définition, l'*énergie totale* de la particule, divisée par c, $p_0 = E/c$. D'autre part, si nous faisons $p_s = p^e = 0$, on retombe sur la relativité restreinte classique; on a alors :

$$p_0 = \frac{E}{c} = \frac{A}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \text{donc} \qquad A = \mu_0 c,$$

où μ_0 est la « masse au repos ». Le terme « masse » signifie ici « coefficient tenant compte de la quantité de matière » que représente une particule *sans charge*, *sans spin* et *sans autres caractéristiques* que celle d'un « point matériel ». Aussi appellerons-nous μ_0 la « *masse matérielle* » au repos de la particule considérée.

Cela étant (13) peut s'écrire :

$$E = \sqrt{\mu_0^2 c^4 - \frac{c^2 p_s^2}{\lambda_s} - \frac{c^2 p_e^2}{\lambda_e}}. \quad (15)$$

Donc, l'énergie au repos d'une particule *peut être différente de* $\mu_0 c^2$: cette dernière expression ne représente que la contribution purement matérielle à la masse apparente totale E/c^2. Il peut y avoir encore une contribution de la charge, c'est-à-dire une « masse électromagnétique », une contribution du spin, etc. La formule (13) précise que le carré de la masse (ou de l'énergie) au repos est formée par une somme de carrés représentant les contributions : matérielle proprement dite, du spin, de la charge, etc. On fait donc une certaine erreur lorsqu'en calculant l'énergie au repos E (par exemple au moyen d'une réaction nucléaire), on en conclut que la masse *matérielle* est E/c^2; ce dernier nombre représente la masse totale, qui englobe l'effet du spin, de la charge, de la quantité de matière, etc.

Appelons M la masse apparente E/c^2 et μ la masse purement matérielle ; on aura :

$$\boxed{M^2 = \mu^2 - \frac{p_s^2}{c^2\lambda_s} - \frac{p_e^2}{c^2\lambda_e}} \tag{16}$$

Deux particules renfermant la même quantité de matière mais différemment chargées auraient donc des masses totales différentes; il en serait de même pour le spin, etc.

9. **Applications. Particules lourdes, proton et neutron.** — Les résultats précédents nous permettent d'affirmer que les masses mesurées du proton et du neutron *doivent être différentes*, même si l'on suppose que ces deux particules contiennent la même quantité de matière, c'est-à-dire ont la même masse vraie μ.

Supposons donc que μ soit le même ; le spin est 1/2 pour les deux. Enfin, admettons que les moments magnétiques soient en réalité égaux et que la divergence des résultats de mesure soit due à un effet d'échange tel que l'ont envisagée Fröhlich, Heitler et Kemmer (¹), d'après la proposition de Wick (²). Dans ce cas, on peut écrire, M_P étant la masse du proton et M_N celle du neutron :

$$\left.\begin{aligned} M_P^2 &= \mu^2 - \frac{p_s^2}{c^2\lambda_s} - \frac{p_e^2}{c^2\lambda_e} \\ M_N^2 &= \mu^2 - \frac{p_s^2}{c^2\lambda_s} \\ M_N^2 &= M_P^2 + \frac{p_e^2}{c^2\lambda_e} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

En prenant les chiffres choisis par Bethe (³), on a, en unités atomiques :

$$\left.\begin{aligned} M_N &= 1{,}008\ 97 \\ M_P &= 1{,}008\ 13 \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

On en déduit que *la constante fondamentale λ_e est positive*,

$$\lambda_e > 0$$

Quant à p_e, c'est un moment attaché à la charge et ayant une relation déterminée avec e, à laquelle il est probablement proportionnel ; pour trouver sa valeur numérique, il semble indispensable de faire intervenir la quantification. Quoi qu'il en soit, on déduit de (17) et (17a) :

$$\frac{p_e^2}{c^2\lambda_e} = 1{,}69436 \times 10^{-3}. \tag{18}$$

10. **Electrons et particules légères.** — Les particules fondamentales qu'on connaît aujourd'hui se classent en deux catégories distinctes, les particules lourdes : proton, neutron, et particules légères : électrons (positifs et négatifs, légers et lourds), neutrino, neutretto. L'énorme différence de masse apparente les distingue nettement, mais il n'existe *aucun critérium*, même qualitatif, qui délimite d'une façon précise la frontière entre ces deux catégories.

D'autre part, le développement de la physique nucléaire a mis en évidence un fait qui semble définitivement acquis : dans le noyau, les électrons *perdent leur individualité* d'une manière totale, absolue ; ils s'évanouissent comme les photons absorbés par la matière. Suivant une hypothèse que Heisenberg a émise le premier, seules les particules lourdes jouent un rôle fondamental dans la constitution des noyaux ; elles n'ont pas la faculté de disparaître totalement *en aucune circonstance*, mais se retrouvent toujours avec leurs masses, compte tenu des énergies de liaison.

Ces deux faits ne sont pas plus inacceptables ou plus inexplicables que beaucoup d'autres résultats expérimentaux connus. Néanmoins, lorsqu'on les examine à la lumière de la théorie précédente, ils apparaissent sous un jour tout à fait nouveau ; cette théorie semble pourvoi fournir un commencement d'explication, un critérium relatif à la division en deux catégories, particules lourdes et particules légères.

En effet, de ce point de vue, une nouvelle hypothèse se présente immédiatement : on peut supposer que les particules lourdes sont *les seules particules matérielles*, au sens habituel du terme, tandis que les particules légères ne le sont pas. Autrement dit, *les particules lourdes possèdent seules effectivement une masse matérielle vraie, tandis que les particules légères ont une masse matérielle nulle;* pour ces dernières, le terme A des formules précédentes est égal à zéro.

Les particules légères ont bien une masse apparente, mais qui n'est pas d'origine *matérielle;* elle découle de l'existence d'une charge, d'un spin, ou éventuellement d'autres grandeurs caractéristiques. *Seules, les particules lourdes sont de la matière véritable; les particules légères ne sont qu'électricité, spin, etc.*

S'il en était ainsi, il est clair qu'une particule légère qui aurait abandonné sa charge et son spin s'évanouirait, sa masse ayant été réduite à zéro. Sa contribution à la « quantité de matière » d'un noyau serait inexistante ; elle ne fournirait que l'apport de la charge et du spin à la masse apparente totale. D'autre part, les particules lourdes pourraient perdre leur charge et leur spin mais garderaient toujours une masse correspondant à la matière qu'elles contiennent. En un sens, il serait donc étymologiquement incorrect d'appeler « dématérialisation » l'annihilation d'une paire d'électrons, puisqu'en fait il n'y aurait pas de destruction de masse *matérielle* mais seulement de charge et de spin, c'est-à-dire de masse apparente.

Traduisons ce qui précède en formules. Il faut supposer que la constante A de nos formules générales est nulle. Pour que les p_k ne soient pas tous nuls, il

(¹) *Proc. Roy. Society*, **166**, 1938, p. 154.
(²) *C. R. Accad. Lincei*, **21**, 1935, p. 170.
(³) *Reviews of modern Physics*, **8**, 1936.

faut qu'en même temps $ds^2 = 0$, c'est-à-dire que, au repos, on ait :

$$\lambda_s \left(\frac{dx^s}{dt}\right)^2 + \lambda_e \left(\frac{dx^e}{dt}\right)^2 + c^2 = 0.$$

Avec cette condition p_s et p_e pourront avoir des valeurs quelconques, compatibles avec certaines conditions de quanta. L'équation fondamentale (16) donnant la masse de la particule devient alors pour une particule légère :

$$m^2 = -\frac{p_s^2}{c^2\lambda_s} - \frac{p_e^2}{c^2\lambda_e}. \tag{19}$$

Un premier résultat se lit sur cette formule. On sait que $\lambda_e > 0$; il s'ensuit que

$$\lambda_s < 0,$$

ce qui permet de fixer définitivement le caractère de la forme quadratique fondamentale ds^2.

Que peut-on dire sur les termes en p_s et p_e ? Une réponse précise à cette question ne saurait être fournie avant la quantification. Il semble naturel de supposer que ces « moments » sont respectivement proportionnels au spin et à la charge ; et que, si deux particules, indifféremment lourdes ou légères, ont, par exemple, même charge, les termes correspondants sont les mêmes, c'est-à-dire les masses partielles, contribution de la charge, sont égales.

Si la charge d'une particule est k fois celle d'une autre, la masse apparente (le terme $p_e^2/c^2\lambda_e$) devrait être k^2 fois plus grande. Pour le spin, comme il s'agit de la somme des carrés des composantes, on sera plus près de la vérité en écrivant :

$$\frac{p_s^2}{c^2\lambda_s} = l(l+1)\frac{S^2}{c^2\lambda_s}$$

où l est la valeur relative du spin. Pour un spin k fois plus grand, on aura :

$$\frac{p'^2_s}{c^2\lambda_s} = kl(kl+1)\frac{S^2}{c^2\lambda_s}$$

le rapport de ces termes sera donc : $k(kl+1)/(l+1)$ au lieu de k^2.

Appliquons ces raisonnements, au cas du mésoton considéré comme particule légère.

11. **Masse du mésoton.** — L'électron lourd ne diffère de l'électron ordinaire que par son spin, qui est 1 au lieu d'être 1/2 ; donc $l = \frac{1}{2}$, $k = 2$.

En admettant, comme jusqu'à présent, que le moment magnétique n'intervient pas [1], la masse de l'électron lourd sera donnée par :

$$m_Y^2 = -2\frac{S^2}{c^2\lambda_s} - \frac{p_e^2}{c^2\lambda_e} \tag{20}$$

celle de l'électron ordinaire étant :

$$m_e^2 = -\frac{3}{4}\frac{S^2}{c^2\lambda_s} - \frac{p_e^2}{c^2\lambda_e}. \tag{19}$$

Comme $\lambda_s < 0$, on voit que *la masse de l'électron de spin unité est plus grande que celle de l'électron ordinaire, $m_Y > m$, ce qui n'était pas évident à priori.*

La raison se trouve dans le fait que $\lambda_e > 0$, c'est-à-dire en fin de compte dans le fait que la masse du neutron est plus grande que celle du proton, constatation expérimentale bien établie.

Calculons le rapport de la masse des deux électrons. Des équations (19) et (20), on déduit :

$$\left.\begin{aligned} m_e^2 - m_Y^2 &= \frac{5}{4}\frac{S^2}{c^2\lambda_s} \\ \frac{3}{4}m_Y^2 - m_e^2 &= \frac{5}{4}\frac{p_e^2}{c^2\lambda_e} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

En unités atomiques, la masse de l'électron ordinaire est :

$$m_e = 5{,}48 \times 10^{-4} \qquad m_e^2 = 30{,}03 \times 10^{-8}.$$

Donc, la seconde des équations (21) compte tenu de (18) :

$$\frac{p_e^2}{c^2\lambda_e} = 1{,}694 \times 10^{-3} \tag{18}$$

donne :

$$m_Y \cong 100 . m_e.$$

La masse d'une particule de spin 1 serait donc du même ordre que celle d'une particule de Yukawa. Dans l'état actuel aussi bien de la théorie que de l'expérimentation, il n'est pas possible de dire s'il s'agit ou non d'une coïncidence fortuite.

L'ordre de grandeur est correct, malgré qu'*a priori*, il eût facilement pu être 10 ou 1 000. Remarquons qu'on ne peut même pas opposer au résultat précédent le chiffre expérimental de 200 m_e qui semble avoir actuellement la plus grande probabilité de représenter la masse des particules lourdes trouvées dans le rayonnement cosmique ; en effet, *on ne sait encore rien sur le spin de ces particules.*

Tant qu'il s'est agi de l'étude des forces nucléaires, donc de mésotons (spin 1), les évaluations (Yukawa, Fröhlich, Heitler et Kemmer), ont été en faveur du chiffre 100 m_e, comme plus haut. Les résultats expérimentaux, par contre, présentent une grande dispersion (on trouve des valeurs échelonnées entre 100

[1] Les résultats obtenus plus loin subsisteraient, même en tenant compte du moment magnétique pourvu que celui-ci augmentât dans les mêmes proportions que le spin, quand on passe de l'électron au mésoton.

et m_e) et ne semblent pas converger vers une valeur unique. On attribue cette grande dispersion aux difficultés de mesure et cela doit être exact en grande partie. Il est néanmoins possible, aussi, que dans le rayonnement cosmique existe non pas un seul type de mésoton, mais *tout un spectre*, de masses différentes, caractérisé chacun par un spin différent. D'après les formules précédentes, une particule de spin 1 aurait bien la masse 100 m_e, mais celle de spin 2 aurait une masse d'environ 200 m_e. Nous ne savons pas encore quel est le spin des particules dont la masse a été effectivement mesurée et cela laisse le champ libre à toutes les hypothèses.

12. **Autres particules. Particules neutres.** — La formule des particules légères :

$$m^2 = -\, l(l+1)\frac{S^2}{c^2\lambda_s} - \frac{p_e^2}{c^2\lambda_e} \qquad (\lambda_e > 0)$$

montre que, tant que la particule au repos est caractérisée *uniquement* par sa charge et son spin, l doit être différent de zéro. *Il n'existe donc pas de particule élémentaire chargée de spin nul.* La forme approximative de la théorie interdit l'existence de cette particule ; bien entendu, cette conclusion ne se maintiendra dans une théorie plus exacte que si aucune des autres caractéristiques de la particule ne permet d'introduire un terme *positif* assez grand dans la formule précédente.

Par contre, l'inverse est toujours possible : il existe *des particules neutres douées de spin.*

Soit, en général, s le spin de la particule élémentaire et k le nombre des charges électriques qu'elle porte (à supposer qu'elle puisse en posséder plusieurs). Sa masse en fonction de celle de l'électron sera :

$$m \sim m_e\sqrt{\frac{4}{3}s(s+1) - 5\,642\left[\frac{4}{3}s(s+1) - k^2\right]}.$$

Pour une particule neutre :

$$m \sim 86{,}8\sqrt{s(s+1)}\,.\,m_e.$$

Cette masse n'est *nulle* que pour $s = 0$, c'est-à-dire pour la particule de spin zéro qu'on peut donc identifier avec le *photon.*

Pour $s = \frac{1}{2}$ et $s = 1$ on a respectivement

$$m \sim 75\ m_e \qquad m \sim 125\ m_e$$

Donc, la théorie sous sa forme actuelle ne rend pas compte du neutrino, particule de spin 1/2 et de masse très petite ; elle attribue au neutretto une masse 125 m_e et signale l'existence d'une particule intermédiaire de masse 75 m_e.

Revenant aux équations (17), on déduit que la masse matérielle μ est donnée par :

$$\mu^2 = M_P^2 + m_e^2 = M_N^2 - \left|\frac{p_s^2}{c^2\lambda_s}\right|.$$

Sa valeur est comprise entre celle du neutron et celle du proton.

Cette masse est celle d'une *particule lourde, neutre et de spin zéro*, qui apparaît ainsi comme la seule particule fondamentale.

Enfin, le « proton lourd » de Wentzel serait donné par l'équation

$$M_L^2 = M_P^2 + \frac{5}{3}(M_N^2 - \mu^2).$$

13. **Remarques finales.** — Il est superflu d'attirer l'attention, une fois encore, sur le degré d'arbitraire des raisonnements précédents.

Les résultats ne pourront être justes que lorsqu'on aura tenu compte de *toutes* les variables qui constituent « l'espace de configuration » complet.

En attendant, le schéma proposé sépare dans la valeur de la masse les diverses contributions ; il suggère l'absence complète de masse matérielle des particules légères et réduit, en quelque sorte, les particules lourdes à une seule, purement matérielle, neutre, de spin zéro et de masse intermédiaire entre celle du proton et celle du neutron.

Le neutrino ne trouve pas de place dans ce schéma, ce qui semble détruire la parfaite symétrie supposée par certains auteurs entre les groupes électron-neutrino, mésoton-neutretto et proton-neutron.

Il faut remarquer qu'indépendamment de toute théorie, les faits s'opposent en apparence, au moins sur un point, à une telle symétrisation. En effet, lorsqu'on passe de la particule chargée à la particule neutre, la masse *augmente* dans le cas des particules lourdes, mais *diminue* dans le cas des particules légères électron-neutrino.

En introduisant une particule légère autre que le neutrino, la théorie proposée réalise une symétrie que n'entache pas le défaut précédent.

L'un de nous (S. G.) désire exprimer ici ses remerciements à la John Simon Guggenheim Memorial Foundation qui a rendu possible son séjour à Paris.

Manuscrit reçu le 15 mars 1939.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur un type de particules élémentaires dont les fonctions d'onde satisfont à l'équation de Klein-Gordon.* Note de M. **Alexandre Proca**.

1. L'équation de Dirac a été obtenue en imposant deux conditions : 1° linéarisation de $\square\psi = \lambda^2\psi$ et 2° interaction avec le champ électromagnétique exprimée par le passage $\partial/\partial x_k$ à $\partial/\partial x_k + ie\mathrm{A}_k/\hbar c$. Depuis, on a réussi à écrire les équations des particules de spin quelconque (¹), dont les fonctions d'onde satisfont toutes à $\square\psi = \lambda^2\psi$. Nous voudrions cependant attirer l'attention sur le fait que la condition de linéarisation 1° conduit également à d'*autres* équations que celles considérées jusqu'à présent; l'on peut donc se poser la question de savoir si ces équations ne sont pas susceptibles de représenter, elles aussi, des particules d'un type spécial, douées de propriétés essentiellement différentes des propriétés connues.

2. Comme exemple de particules de cette catégorie, nous choisirons la plus simple, qui, en l'absence de champ, est décrite par deux spineurs, l'un du 1^er^ et l'autre du 3^e^ rang, Φ_t et $\mathrm{B}_{\dot r st}$, au moyen des équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \partial^{\dot r s}\,\mathrm{B}_{\dot r st} = \lambda\Phi_t, & \partial^{\dot r s}\,\mathrm{B}_{\dot r\dot u s} = \lambda\Phi_{\dot u}, \\ \partial_{\dot r s}\Phi_t = \lambda\mathrm{B}_{\dot r st}, & \partial_{\dot r s}\Phi_{\dot u} = \lambda\mathrm{B}_{\dot r\dot u s} \end{array}\right.$$

ou encore des équations analogues, dans le cas particulier où $\mathrm{B}_{\dot r st}$ est symétrique en s et t. La forme des équations montre immédiatement quelle en est la généralisation.

3. On peut écrire symboliquement ces équations sous la forme de Dirac $(e_i\partial/\partial x^i)\psi = \lambda\psi$. Les opérateurs e_i peuvent être représentés par des matrices réductibles $\left(\begin{array}{c|c} \gamma_i & 0 \\ \hline 0 & \gamma_i \end{array}\right)$, où γ_i sont les matrices qui permettent d'écrire, sous la forme de Dirac, l'équation de Klein-Gordon (telles qu'elles ont été données par Kemmer, par exemple).

(¹) Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, 155, 1936, p. 447; Fierz, *Helv. Phys. Acta*, 12, 1939, n° 1, p. 1.

4. Ces équations entraînent $\square\,\Phi_t = \lambda^2\Phi_t$, $\square\,\mathrm{B}_{\dot{r}st} = \lambda^2\mathrm{B}_{\dot{r}st}$. Quatre expressions satisfont à des équations de continuité, à savoir :

Un tenseur du 2^e rang

$$i(\Phi_{\dot{u}}\mathrm{B}_{\dot{r}st} - \Phi_t\mathrm{B}_{\dot{r}\dot{u}s}),$$

un tenseur du 3^e rang

$$\mathrm{B}_{\dot{r}\dot{u}s}\mathrm{B}_{\dot{m}nt} + \mathrm{B}_{\dot{m}\dot{u}n}\mathrm{B}_{\dot{r}st} - \delta_{\dot{r}s,\,\dot{m}n}(\Phi_{\dot{u}}\Phi_t + \mathrm{B}_{\dot{r}\dot{u}s}\mathrm{B}_{\dot{r}st}),$$

deux vecteurs

$$\Phi^t\mathrm{B}_{\dot{r}st} \pm \Phi^{\dot{u}}\mathrm{B}_{\dot{r}\dot{u}s}.$$

5. Il n'y a aucune raison de supposer que, si ces équations représentent une particule libre, l'interaction avec un champ électromagnétique soit définie par la condition 2°; un article récent de Fierz et Pauli est très instructif à cet égard. Si nous le supposons toutefois, il faut remarquer que le tenseur du 2^e rang, dont il est question au paragraphe 4, satisfera une équation de continuité, même en présence d'un champ.

6. Il est plus important de chercher quelle est la caractéristique générale des équations présentées et qui les différencie des équations étudiées jusqu'à présent. On y arrive en observant qu'elles peuvent être déduites d'un principe de variation, en prenant comme fonction de Lagrange l'une quelconque des composantes du vecteur d'univers

$$\mathrm{L} = \Phi_{\dot{u}}\Phi_t + \mathrm{B}_{\dot{r}\dot{u}s}\mathrm{B}_{\dot{r}st}$$

avec les définitions $\lambda\mathrm{B}_{\dot{r}st} = \partial_{\dot{r}st}\Phi_t$, $\lambda\mathrm{B}_{\dot{r}\dot{u}s} = \partial_{\dot{r}s}\Phi_{\dot{u}}$.

Le point essentiel mis en évidence est le suivant : *schéma hamiltonien et variance relativiste sont indépendants*. Pour les particules connues, la fonction de Lagrange est un invariant; pour les équations ci-dessus, elle est la composante d'un vecteur d'univers. On peut encore dire que les nouvelles particules sont caractérisées en quelque sorte *par une action qui est vectorielle au lieu d'être scalaire*. Le problème reste cependant entier de savoir si ce schéma théorique est susceptible d'application aux particules physiques réelles.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 210, p. 563-564, séance du 15 avril 1940.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
114228-40 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Intégrales premières dans la théorie du mésoton.*

Note de M. **Alexandre Proca.**

Pour la théorie de l'électron, nous avons préconisé [1] l'emploi des *dérivées par rapport au temps propre*, conséquence logique d'un traitement complètement relativiste de cette théorie. Du point de vue purement pratique, cet emploi ne présente pas de gros avantages en théorie de Dirac; il n'en est cependant plus de même dans les théories des particules à spin entier.

Dans ces cas en effet le passage à la forme hamiltonienne n'est plus aussi aisé qu'en théorie de Dirac; le traitement relativiste complet s'impose dans ces cas non seulement pour des motifs de symétrie, mais aussi pour des raisons de commodité. Nous prendrons comme exemple la théorie du mésoton dans le vide et comme base la façon dont l'a traité Kemmer [2].

L'équation du mouvement s'écrit

$$\beta_\mu \partial_\mu \psi + k\psi = 0 \qquad \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu},\ k = \frac{mc}{\hbar},\ \text{sommation sur } \mu\right);$$

les β_μ satisfont à

$$\beta_\lambda \beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu \beta_\lambda = \beta_\lambda \delta_{\mu\nu} + \beta_\nu \delta_{\mu\lambda}.$$

Nous l'écrirons $S\psi - imc^2\psi = 0$, donc $S = -ic\hbar\beta_\mu\partial_\mu$; on peut l'écrire sous forme hamiltonienne

$$\left(H - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0 \qquad \text{avec} \qquad H = -c\hbar(\beta_k\beta_4 - \beta_4\beta_k)\,\partial_k + mc^2\beta_4,$$

pourvu qu'on impose à la fonction d'onde certaines conditions initiales. Cela étant, la dérivée par rapport au temps propre d'un opérateur ξ est définie par $\xi' = i(S\xi - \xi S)/\hbar$ et la dérivée ordinaire par $\dot\xi = i(H\xi - \xi H)/\hbar$.

L'intérêt du calcul, plus simple et plus symétrique, des dérivées par rapport au temps propre réside dans le fait que *les moyennes de ces*

(1) Proca, *Annales de Physique,* **20**, 1933, p. 347.
(2) *Proc. Roy. Soc.*, A, **173**, 1939, p. 91.

dernières sont nulles en même temps que celles des dérivées du même opérateur par rapport au temps ordinaire (3).

En effet, si $\xi' = 0$, les fonctions ψ et $\xi\psi$ sont en même temps des solutions de l'équation fondamentale. On peut donc écrire en particulier

$$\left(\mathrm{H} + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\xi\psi = 0 \qquad \text{et aussi} \qquad \xi\left(\mathrm{H} + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0,$$

d'où l'on déduit par soustraction $\dot{\xi}\psi = 0$ et le résultat annoncé.

Avant de passer à l'étude des intégrales premières, précisons quelques relations utiles. On a d'abord

$$\mathrm{S} = i(\mathrm{H}\beta_4 - \beta_4\mathrm{H}) - \hbar\beta_4\,\partial_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H} = -i(\mathrm{S}\beta_4 - \beta_4\mathrm{S}) + mc^2\beta_4,$$

ensuite la relation fondamentale $\mathrm{S}\beta_\nu\mathrm{S} = cp_\nu\mathrm{S}$ avec $p_\nu = (\hbar/i)\,\partial_\nu$.

Examinons, comme dans le cas de l'électron, le comportement des coordonnées et de leurs dérivées.

On a $x'_\nu = c\beta_\nu$ comme dans le cas de Dirac, mais là s'arrête l'analogie. Dans le cas de Dirac, le fait essentiel de l'absence de proportionnalité entre la quantité de mouvement et la vitesse est exprimé par la relation (4)

$$c^2 p_\nu = x'_\nu\mathrm{S} + \frac{\hbar}{2i}x''_\nu.$$

Dans le cas du mésoton, on doit écrire

$$\left(c^2 p_\nu - x'_\nu\mathrm{S} - \frac{\hbar}{i}x''_\nu\right)\mathrm{S} = 0.$$

La différence consiste non seulement en l'absence du facteur $1/2$, mais aussi en l'adjonction du facteur commun S. Lorsqu'on passe aux densités, ce dernier disparaît en vertu de l'équation fondamentale.

La relation véritablement intéressante entre les dérivées s'obtient toutefois en poussant la dérivation jusqu'au troisième ordre; on obtient

$$c^2 p_\nu\mathrm{S} + c^2\hbar^2\,\square\,.\,x'_\nu - \hbar^2 x'''_\nu = 0.$$

Ce qui précède concerne les dérivées par rapport au temps propre; pour

---

(3) Par *densité de moyenne* d'un opérateur ξ, nous entendons l'expression $\psi^+\xi\psi$.

(4) Proca, *loc. cit.*, p. 389.

les dérivées ordinaires on peut écrire de la même façon, d'une part

$$\dot{x}_k = -ic(\beta_k\beta_4 - \beta_4\beta_k), \qquad \left(c^2 p_k - \dot{x}_k \mathrm{H} - \frac{\hbar}{i}\ddot{x}_k\right)\mathrm{H} = 0,$$

et d'autre part, en intégrant une fois,

$$x_k + \left[\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 - c^2\Delta\right] x_k + \frac{\mathrm{H}}{\hbar^2} c^2 p_k t = \text{const.}$$

Cette dernière relation montre que, comme dans le cas de l'électron de Dirac, une oscillation se superpose toujours à la variation classique des coordonnées d'un mésoton en mouvement dans le vide. *Le tremblement de Schrödinger se produit donc également pour le mésoton* : il a lieu entre deux états de charges égales et de signes contraires, comme il avait lieu, pour l'électron, entre deux états de même énergie et de signes opposés. Il n'est donc pas caractéristique de l'existence des énergies négatives, mais tient essentiellement au caractère commun d'invariance relativiste de ces théories et découle des propriétés des représentations du groupe de Lorentz.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 212, p. 669-671, séance du 21 avril 1941.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
115364-41 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Intégrales premières du mouvement du mésoton.* Note de M. **Alexandre Proca.**

Considérons l'équation du mésoton dans le vide, écrite sous la forme (1)

$$\beta_\mu \partial_\mu \psi + k\psi = 0, \qquad \text{soit} \qquad S\psi - imc^2\psi = 0,$$

où

$$k = \frac{mc}{\hbar}, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad x^4 = ict, \qquad \beta_\lambda\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu\beta_\lambda = \beta_\lambda\delta_{\mu\nu} + \beta_\nu\delta_{\mu\lambda},$$

$$S = -ic\hbar\beta_\mu\partial_\mu.$$

L'hamiltonien s'écrit

$$H = -c\hbar(\beta_k\beta_4 - \beta_4\beta_k)\partial_k + mc^2\beta_4 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Pour un opérateur ξ on peut définir la dérivée ordinaire $\dot{\xi} = i/\hbar(H\xi - \xi H)$ et la *dérivée par rapport au temps propre* (2), $\xi' = i/\hbar(S\xi - \xi S)$.

Cela étant, on peut étudier systématiquement, comme pour le cas de de l'équation Dirac (2), les relations des dérivées des 126 éléments indépendants qui constituent le groupe fini des β_μ et de leurs produits. L'étude de ces éléments se simplifie, comme l'on sait, si l'on introduit (3) les doubles de l'excès des carrés des β_μ sur $1/2$, $\eta_\mu = 2\beta_\mu^2 - 1$, opérateurs dont le carré est égal à l'unité.

On constate alors que toutes les grandeurs considérées dans cette théorie contiennent une partie oscillante, comme dans le cas de l'électron (4). La différence consiste dans le fait que ces grandeurs peuvent être classées en deux catégories, dont une seule se retrouve en théorie de Dirac. Pour la première (dont font partie les éléments de carré égal à l'unité), la partie oscillante satisfait à une équation différentielle *du premier ordre* à coefficients constants complexes, comme dans le cas de Dirac; pour la

(1) N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc.*, A, **173**, 1939, p. 91.

(2) A. Proca, *Annales de Physique*, **20**, 1933, p. 347; voir aussi *Comptes rendus*, **212**, 1941, p. 669.

(3) Petiau, *Thèse*, Paris et Kemmer, *loc. cit.*

(4) Proca, *loc. cit.*, p. 379.

seconde catégorie (dont font partie les β_μ et les éléments ayant zéro comme valeur propre), les parties oscillantes satisfont à des équations *du second ordre*. On a en effet,

$$\text{pour la première catégorie} \qquad \hbar\eta'_\nu = 2i\,\mathrm{S}\eta_\nu - 2\hbar c\,\beta_\nu\partial_\nu$$

et

$$\text{pour la seconde catégorie} \qquad \hbar\beta''_\nu = \hbar c^2\,\Box\,\beta_\nu - ic\mathrm{S}\,\partial_\nu.$$

Des combinaisons purement oscillantes peuvent être formées avec ces opérateurs. Par exemple, l'on a d'une part, en posant $\Omega = \Sigma\eta_\nu - 1$ et $\theta = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$, pour la première catégorie,

$$\Omega' = \frac{2i}{\hbar}\mathrm{S}\Omega \qquad \text{et} \qquad \theta' = \frac{2i}{\hbar}\mathrm{S}\theta \tag{1}$$

et d'autre part, pour la seconde catégorie, avec $p_\mu = (\hbar/i)\partial_\mu$

$$(p_\mu\beta_\nu - p_\nu\beta_\mu)'' = c^2\,\Box\,(p_\mu\beta_\nu - p_\nu\beta_\mu).$$

On peut écrire aussi

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{\mu\neq\nu}\eta_\mu\eta_\nu\right)' = \frac{2i}{\hbar}\mathrm{S}\Omega \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{1.2.3}\sum\eta_\lambda\eta_\mu\eta_\nu\right)' = \frac{2i}{\hbar}\mathrm{S}\theta. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient deux intégrales premières d'univers, M et N, distinctes, définies par

$$\left(\sum\eta_\mu - \frac{1}{2}\sum\eta_\mu\eta_\nu\right)' = \mathrm{M}' = 0 \qquad [\theta(\Sigma\eta_\mu - 1)]' = \mathrm{N}' = 0.$$

Kemmer (*loc. cit.*) a déjà indiqué que ces grandeurs commutent avec tous les β_μ.

Deux autres intégrales premières, dont une nouvelle, sont dignes d'intérêt. En premier lieu, naturellement, celle qui définit le spin et qui s'écrit sous la forme

$$x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{\hbar}{i}(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu) = \text{constante d'univers.}$$

En second lieu, posons

$$\mathrm{C}_{\lambda\mu\nu} = i(\beta_\lambda\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\nu\beta_\lambda\beta_\mu) \qquad (\lambda \neq \mu \neq \nu).$$

On aura, ρ étant différent de λ, μ, ν,

$$\mathrm{C}'_{\lambda\mu\nu} = \frac{c}{\hbar}\Delta_\rho p_\rho = \frac{c}{2\hbar}p_\rho\Big\{(\beta_\lambda\beta_\mu - \beta_\mu\beta_\lambda)(\beta_\nu\beta_\rho - \beta_\rho\beta_\nu)$$
$$+ (\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu)(\beta_\lambda\beta_\rho - \beta_\rho\beta_\lambda) + (\beta_\nu\beta_\lambda - \beta_\lambda\beta_\nu)(\beta_\mu\beta_\rho - \beta_\rho\beta_\mu)\Big\}.$$

On en déduit des intégrales premières de la forme

$$p_\lambda . C_{\lambda\mu\nu} + p_\rho . C_{\mu\nu\rho} = \text{constante d'univers.}$$

Elles décrivent des propriétés des *moments du troisième ordre* que nous avons définis ailleurs ([2]), qui existent également dans le cas de l'électron et qui satisfont à des relations analogues aux précédentes.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **212**, p. 751-753, séance du 5 mai 1941.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
115400-41 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la théorie des particules matérielles et en particulier sur les électrons de spin* 1/2. Note (1) de M. **Alexandre Proca.**

Il est admis aujourd'hui que les équations-types relativistes, à savoir l'équation de Dirac (spins demi-entiers) et l'équation du méson (spins entiers), représentent correctement les caractéristiques essentielles des particules correspondantes. Or on peut se demander si ces équations épuisent effectivement les possibilités de description que nous offre le cadre relativiste; ou, si l'on préfère, on peut se demander s'il n'existe pas dans la nature des particules de même spin et de même masse que les précédentes, mais ayant des propriétés plus générales.

Des arguments d'ordre physique d'une part et d'ordre analytique de l'autre semblent indiquer clairement la possibilité d'existence de pareilles particules.

Du point de vue purement physique, en effet, on peut remarquer que l'électron de Dirac, par exemple, tout en étant doué d'un spin, *ne possède pas d'énergie de rotation*. Cet électron, qui n'est pas l'analogue d'un point matériel classique puisqu'il possède un spin, n'est pas non plus tout à fait l'analogue d'un solide tournant puisqu'il ne possède que de l'énergie de translation. On ne peut pas écarter *a priori* la possibilité d'existence d'une particule ayant à la fois un moment cinétique et une énergie de spin non nuls; cette particule généraliserait l'électron de Dirac dans le sens indiqué (2).

D'autre part, du point de vue analytique, l'équation de Dirac est susceptible d'une généralisation n'altérant pas certaines propriétés de la particule qu'elle représente. En effet, les conditions d'invariance relativiste introduisent le système de nombres hypercomplexes formé par les opérateurs bien connus γ^μ et par leurs produits. Or, seule *une partie de ces nombres* apparaît dans l'équation de Dirac, à savoir les γ^μ eux-mêmes. On n'enfreint donc pas les exigences de la relativité en complétant cette équation par des termes qui contiennent les produits des γ^μ, convenablement couplés d'ailleurs avec les éléments géométriques ou dynamiques de la particule.

Établissons sur ces bases la nouvelle équation. L'équation de Dirac (ou le lagrangien dont elle dérive) fait intervenir l'invariant symbolique $\gamma^\mu \partial_\mu$ où $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$; il s'agit de la compléter en y introduisant les produits des γ^μ. Or

(1) Séance du 16 mars 1942.

(2) Voir, pour certains essais de mise en œuvre de cette idée, Proca et Goudsmit, *Journ. de Physique*, **10**, 1939, p. 209; *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1074.

il est clair que l'emploi du pseudo-scalaire $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ et du pseudo-vecteur $\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu$ ne saurait introduire de modifications *essentiellement nouvelles* ([3]); aussi les laisserons-nous de côté pour l'instant. Par contre, l'introduction des produits $\gamma^\mu\gamma^\nu$ complète l'équation fondamentale par quelque chose de réellement nouveau que ne contiennent pas les termes $\gamma^\mu\partial_\mu$.

Le terme correctif sera donc de la forme $C_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu$, où $C_{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique. Or avec les éléments qui définissent la particule, à savoir avec x_μ et ∂_ν, le plus simple tenseur de ce type qu'on puisse former est $x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu$; l'opérateur intervenant dans l'équation ou dans le lagrangien aura donc la forme

$$\gamma^\mu\partial_\mu + A(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\gamma^\mu\gamma^\nu,$$

A étant une constante. Sous cet angle, on voit en quoi consiste la différence entre la nouvelle équation et celle de Dirac : la première introduit non seulement les translations mais aussi les rotations infinitésimales.

En posant, pour simplifier l'écriture, $m^{\mu\nu} = i/2.(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$, cette équation fondamentale s'écrit finalement

$$\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\lambda x_\sigma m^{\sigma\mu}\partial_\mu\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0, \tag{1}$$

où λ est une constante réelle. L'équation adjointe sera

$$\partial_\mu\psi^+\gamma^\mu + i\lambda\,\partial_\mu\psi^+ x_\sigma m^{\sigma\mu} - \frac{mc}{\hbar}\psi^+ = 0; \tag{2}$$

elle se réduit à la complexe conjuguée de (1) si l'on pose, comme en théorie de Dirac, $\psi^+ = i\psi^\star\gamma^4$.

Ces équations définissent une particule, de spin 1/2, caractérisée par sa masse au repos m ainsi que par une nouvelle *longueur fondamentale* $1/\lambda$. Elle présente des propriétés très intéressantes; l'électron de Dirac s'en déduit comme cas particulier, correspondant à une valeur infinie de la longueur fondamentale.

---

(3) Cf., par exemple, Proca, *Ann. de Physique*, 5, 1933, p. 393.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 214, p. 606-607, séance du 23 mars 1942.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
117259-42 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

ÉLECTRONIQUE. — *Sur les propriétés d'une nouvelle particule élémentaire.*
Note de M. **Alexandre Proca.**

Nous avons attiré l'attention [1] sur l'existence possible d'une particule dont les propriétés se rapprochent de celles de l'électron. En l'absence de champ, les équations de cette particule sont

$$(1)\quad \begin{cases} \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + i\lambda x_{\sigma} m^{\sigma\mu}\partial_{\mu}\psi + \dfrac{mc}{\hbar}\psi = 0, \\ \partial_{\mu}\psi^{+}\gamma^{\mu} + i\lambda\,\partial_{\mu}\psi^{+}x_{\sigma}m^{\sigma\mu} - \dfrac{mc}{\hbar}\psi^{+} = 0; \end{cases}$$

avec $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$, $m^{\sigma\mu} = i/2.(\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma})$; elles sont invariantes par rapport aux transformations de Lorentz et se réduisent à celles de Dirac pour $\lambda = 0$. Leur structure et la similitude avec le cas de Dirac permettent de supposer que les équations de la même particule, plongée dans un champ φ_{μ}, s'obtiendront à partir des précédentes de la façon habituelle, c'est-à-dire en changeant $\partial_{\mu}\psi$ en $[\partial_{\mu} + (ie/\hbar c)\varphi_{\mu}]\psi$.

La constante λ ou, si l'on préfère, son inverse, qui a les dimensions d'une longueur, ou encore le temps $1/c\lambda$, constitue la caractéristique supplémentaire de la nouvelle particule.

On peut définir, pour une particule libre de cette sorte, une densité de courant et de charge par

$$j^{\mu} = e\psi^{+}\gamma^{\mu}\psi + ie\lambda.x_{\sigma}\psi^{+}m^{\sigma\mu}\psi.$$

En vertu des équations (1), on a $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$ et *la charge totale de la particule est constante.*

2. *Le tenseur énergie-quantité de mouvement* s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar c}T^{ij} = {} & \frac{i}{2}(\partial^{i}\psi^{+}.\gamma^{j}.\psi - \psi^{+}.\gamma^{j}.\partial^{i}\psi) + \frac{i}{2}(\partial^{j}\psi^{+}.\gamma^{i}.\psi - \psi^{+}.\gamma^{i}.\partial^{j}\psi) \\ & + \frac{\lambda x_{\sigma}}{2}(\psi^{+}.m^{\sigma j}.\partial^{i}\psi - \partial^{i}\psi^{+}.m^{\sigma j}.\psi) + \frac{\lambda}{2}x_{\sigma}(\psi^{+}.m^{\sigma i}.\partial^{j}\psi - \partial^{j}\psi^{+}.m^{\sigma i}.\psi) \\ & + \frac{\lambda}{2}x_{i}(\psi^{+}.m^{jk}.\partial_{k}\psi - \partial_{k}\psi^{+}.m^{jk}.\psi) + \frac{\lambda}{2}x_{j}(\psi^{+}.m^{ik}.\partial_{k}\psi - \partial_{k}\psi^{+}.m^{ik}.\psi) \\ & + \frac{i\lambda}{2}[\partial^{i}(x^{j}.\psi^{+}\psi) + \partial^{j}(x^{i}.\psi^{+}\psi) - 2\partial_{k}(x^{k}.\psi^{+}\psi).\delta^{ij}], \end{aligned}$$

avec $i = \sqrt{-1}$.

Il est symétrique et pour $\lambda = 0$ se réduit à celui de l'électron de Dirac.

---

[1] *Comptes rendus,* **214**, 1942, p. 606.

3. Le tenseur densité de moment cinétique total de la nouvelle particule est

$$M^{ijk} = x^i T^{jk} - x^j T^{ik}.$$

En vertu des équations fondamentales, la loi de conservation est satisfaite $\partial_k M^{ijk} = 0$; *le moment cinétique total de la particule* $\frac{1}{ic}\int M^{ij4}\, dV$ *est donc constant.*

4. Ce moment cinétique total peut être décomposé en un moment d'orbite et en un moment ne dépendant pas explicitement des coordonnées, qu'on peut raisonnablement interpréter comme un moment angulaire propre à la particule, c'est-à-dire comme un spin. Cette dernière partie est identique à celle de l'électron de Dirac et, dans ce sens, on peut dire que la nouvelle particule et l'électron de Dirac ont même spin.

5. Le trait le plus intéressant du nouvel électron est son caractère de système non conservatif. En effet, son énergie, définie à partir de T^{ij}, n'est pas constante, ce qui est évident *a priori*, puisque son lagrangien dépend explicitement du temps. On trouve

$$\partial_j T^{ij} = 2\lambda . x^i (\partial_k \psi^{\dagger} . m^{kj} . \partial_j \psi).$$

Tout en conservant une charge et un moment cinétique constants, une partie de l'énergie de la particule, celle qui dépend de λ, varie avec le temps.

Cette caractéristique permettrait d'expliquer, le cas échéant, par un mécanisme simple, des phénomènes analogues à ceux qui nous ont contraint à introduire l'hypothèse du *neutrino*. En tout état de cause, la nouvelle particule ne constitue pas un système fermé; ses équations fournissent un exemple des procédés qu'introduit la relativité restreinte pour le traitement de ce genre de questions.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 216, p. 337-339, séance du 8 mars 1943.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
118925-43 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PORTUGALIAE PHYSICA
Vol. 1 — Fasc. 2 — 1943

SUR UN NOUVEAU TYPE D'ÉLECTRON

par A. PROCA

(Septembre, 1943)

1. Dès les débuts de la mécanique ondulatoire [1], on s'est préoccupé de généraliser les équations fondamentales de manière à leur permettre de satisfaire aux conditions d'invariance de la théorie de la relativité; cependant, pour des raisons dont le sens n'est apparu que beaucoup plus tard, cette généralisation n'a pas conduit aux résultats importants que l'on aurait pu escompter tout d'abord.

Dirac montra quelle était la manière correcte d'atteindre l'invariance relativiste dans le cas de l'électron; il découvrit ainsi le fait remarquable que cette invariance seule suffisait pour conférer à la particule une propriété nouvelle, déjà découverte expérimentalement, à savoir l'existence d'un spin de valeur 1/2. Ce n'était pas tout; l'électron ainsi défini jouissait de propriétés nouvelles qui se manifestaient mathématiquement par l'apparition d'un double signe de l'énergie. On sait comment l'interprétation de Dirac a dégagé le sens physique de cette nouvelle caractéristique et de quelle manière l'expérience a vérifié la théorie.

Ainsi donc, la seule hypothèse de l'invariance relativiste de l'équation fondamentale entraîne automatiquement l'existence de propriétés physiques nouvelles de l'électron théorique.

Dans ces conditions, on peut se demander si l'analyse rappelée plus haut rend compte de *toutes* les propriétés nouvelles introduites par la relativité.

Les considérations suivantes semblent indiquer que la réponse à cette question devrait être négative. En d'autres termes, il semble que la relativité suggère l'existence d'une particule nouvelle qui diffère de l'électron de Dirac, tout en ayant d'ailleurs même masse, même charge et en un certain sens même spin. Un quatrième élément, correspondant précisément à une nouvelle propriété, semble nécessaire pour définir complètement un électron relativiste.

[1] Cf. Schrödinger, Ann. der Physik, 81, 1926, p. 109, Par. 6.

2. En effet, considérons le Lagrangien ou, plus simplement, l'équation relativiste d'un électron en l'absence de champ

$$(1) \qquad \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{2\pi\, mc}{h} \psi = 0, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Dans cette équation, Dirac fait opérer, sur la fonction d'onde ψ à quatre composantes, l'opérateur $\gamma^\mu \partial_\mu$; le symbolisme adopté écrit cet opérateur sous forme d'invariant et l'on sait que cela correspond bien à une invariance effective de l'équation. Les γ^μ sont des opérateurs représentables par des matrices à 4 lignes et 4 colonnes; ils forment un système qui comprend outre l'unité 1, les γ^μ eux-mêmes et les produits

$$\gamma^\mu \gamma^\nu, \quad \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \quad \text{et} \quad \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4.$$

Or, il est évident que l'on obtiendra encore une équation *invariante*, et pour un ψ qui aura toujours 4 composantes, si l'on ajoute à l'opérateur du premier membre des termes de la forme

$$A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + B_{\lambda\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + C \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4.$$

Remarquons tout de suite que les termes qui font intervenir le pseudo-vecteur $\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu$ et le pseudo-scalaire $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$, ne sont pas *a priori* susceptibles de modifier profondément les caractéristiques de l'électron de Dirac. En effet, les grandeurs qui leur correspondent sont les duales de celles attachées au vecteur γ^μ et au scalaire 1, que l'équation de Dirac contient déjà. Par contre, l'adjonction d'un terme de la forme $A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$ *introduira des caractéristiques essentiellement nouvelles* et l'équation ainsi obtenue décrira une particule différente de l'électron ordinaire.

Précisons la forme de ce terme additif. $A_{\mu\nu}$ sera un tenseur antisymétrique formé avec les éléments géométriques et dynamiques qui définissent la particule. Or, avec ces éléments, donc avec les coordonnées x_μ et les $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}$, le plus simple tenseur de ce type qu'on puisse former est

$$x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu.$$

La forme la plus simple du terme additif $A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$ sera donc

$$a (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu),$$

a étant une constante. En posant

$$m^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

la forme finale de l'équation généralisant celle de Dirac sera donc

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\lambda x_\sigma m^{\sigma\mu} \partial_\mu \psi + \frac{2\pi mc}{h} \psi = 0 \, ,$$

λ étant une constante ayant comme dimensions l'inverse d'une longueur. L'équation adjointe sera comme dans le cas de Dirac

$$\partial_\mu \psi^+ \cdot \gamma_\mu + i\lambda x_\sigma \cdot \partial_\mu \psi^+ \cdot m^{\mu\sigma} - \frac{2\pi mc}{h} \psi^+ = 0$$

avec

$$\psi^+ = i\psi^* \gamma^4 \, .$$

L'équation tout à fait générale contiendra aussi les termes duals; nous la laisserons de côté pour le moment.

3. L'équation introduit non seulement les éléments ∂_μ d'une translation, mais aussi ceux $x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$ d'une rotation infinitésimales.

Le nouvel électron sera caractérisé non seulement par sa masse m, mais aussi par une nouvelle constante fondamentale, attaché à la particule, à savoir la longueur λ. Celle-ci permet de séparer deux régions de l'espace, l'intérieur et l'extérieur d'une sphère rayon $1/\lambda$. Lorsque cetté sphère a un rayon infini ($\lambda = 0$) et seulement dans ce cas, la particule se confond avec l'électron de Dirac.

4. *La particule ainsi définie possède une charge constante.* En effet, on peut définir, comme dans le cas de Dirac, un courant d'Univers

$$j^\mu = e\psi^+ \gamma^\mu \psi + ie\lambda \cdot x_\sigma \psi^+ m^{\sigma\mu} \psi \, ,$$

lequel est conservatif

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

en vertu des équations fondamentales.

5. On peut définir pour cette nouvelle particule *un tenseur d'énergie — quantité de mouvement* dont l'expression explicite est la suivante :

$$-\frac{2\pi}{hc} T^{ij} = i(\partial^i \psi^+ \cdot \gamma^j \cdot \psi - \psi^+ \cdot \gamma^j \cdot \partial^i \psi) + \lambda x_\sigma(\psi^+ m^{\sigma i} \cdot \partial^j \psi - \partial^j \psi^+ \cdot m^{\sigma i} \cdot \psi) +$$
$$+ \lambda x^i (\psi^+ \cdot m^{j\sigma} \cdot \partial_\sigma \psi - \partial_\sigma \psi^+ m^{j\sigma} \psi) + \partial_k \left\{ \frac{1}{4} \psi^+ (m^{ik} \gamma^j + \gamma^j m^{ik}) \psi \right.$$
$$\left. + \frac{i\lambda}{4} x_\sigma \cdot \psi^+ (m^{\sigma i} m^{jk} + m^{jk} m^{\sigma i}) \psi - \frac{3i\lambda}{2} (x^i \delta^{jk} - x^k \delta^{ij}) \psi^+ \psi \right\} .$$

Ce tenseur est symétrique en i et j. Dautre part, comme le lagrangien correspondant, il renferme explicitement les coordonnées x_μ et en particulier le temps. Donc, le schéma hamiltonien qui s'en déduit *ne représente pas un système conservatif* et en effet la loi différentielle de conservation de l'énergie-quantité de mouvement n'est pas satisfaite, la divergence de T_{ij} n'est pas nulle. On a :

$$\partial_j T^{ij} = 2\lambda \cdot x^i (\partial_k \psi^+ m^{ik} \partial_i \psi)$$

soit en général

$$(2) \qquad \partial_j T^{ij} = x^i \partial_j \left(\frac{\partial L}{\partial x^j}\right)$$

où $\left(\frac{\partial L}{\partial x^j}\right)$ est la dérivée du lagrangien par rapport aux coordonnées x qui y apparaissent explicitement.

Pour $\lambda = 0$, ce tenseur se réduit à celui de l'électron de Dirac.

6. *Le moment cinétique total de la nouvelle particule est une constante.* En effet, formons la densité de ce moment cinétique à la façon habituelle

$$m^{ijk} = x^j T^{ik} - x^i T^{jk}.$$

Or, cette expression vérifie une loi de conservation malgré que le système ne soit pas conservatif quant à l'énergie ; on a :

$$\partial_k m^{ijk} = (T^{ji} - T^{ij}) + x^j \partial_k T^{ik} - x^i \partial_k T^{jk} = 0$$

en vertu de la symétrie de T^{ij} et de la relation (2).

Le moment angulaire total

$$\int m^{ij4} dV = \int (x^j T^{i4} - x^i T^{j4}) \, dV$$

peut être transformé et mis sous la forme d'une somme de deux termes comme dans le cas de l'équation de Dirac. Comme dans ce dernier cas d'ailleurs, cette séparation ne doit pas correspondre à une réalité physique directement observable.

Dans le cas de Dirac, les deux termes sont le «moment d'orbite», expression dépendant directement et explicitement des coordonnées, et un «spin» qui ne dépend que de la valeur du champ, c'est-à-dire du ψ au point considéré. Une pareille séparation peut être effectuée également pour la nouvelle particule. Comme la précédente, elle est arbitraire, mais *il est raisonnable de considérer la partie qui ne dépend pas explicitement des coordonnées comme un moment angulaire propre à la* *particule c'est-à-dire comme un spin.* Or, cette partie s'écrit, ainsi qu'on le voit immédiatement

$$\int \frac{ihc}{8\pi} \psi^+ (\gamma^4 \gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i \gamma^4) \psi \, dV .$$

Elle a la même forme que celle qui apparaît dans le cas de l'électron de Dirac et correspond au spin de celui-ci. Le «moment d'orbite» dépend explicitement du «point sur l'orbite», c'est-à-dire des coordonnées et cela d'une manière qui diffère de celle de Dirac les x_μ ayant d'ailleurs des origines différentes. Cette différence assure la conservation du moment total malgré la non-conservation de l'énergie.

D'autres séparations en deux termes peuvent être faites, mais une analyse plus serrée est nécessaire pour définir le «spin» dans le cas de la particule actuelle.

7. En résumé, d'après la description précédente, le nouvel «électron» est une particule qui a droit à ce nom puisqu'il garde une charge électrique constante; il garde aussi un moment angulaire total constant et l'on peut raisonnablement lui attribuer un spin. Sa caractéristique la plus curieuse est le fait que, même libre, et malgré qu'il garde une charge électrique et un moment cinétique constants, son énergie varie; il en perd ou en gagne suivant le signe de λ.

Si l'on observe globalement des électrons libres identiques issus d'une même source mais qui en sortent à des époques différentes quelconques de leur vie, on constatera que leurs énergies forment un spectre continu; ce spectre devra même être limité du côté des grandes énergies par la valeur de l'énergie maxima que possède l'électron au moment de sa création.

Un mécanisme de ce genre peut donc être utilisé pour rendre compte de phénomenes qui ne semblent pas obéir au principe de la conservation de l'énergie, — comme par exemple le spectre continu des rayons β du radium E, pour lequel on a été obligé d'imaginer l'ypothèse, passablement artificielle, de l'existence d'un *neutrino*.

Tout cela est évident une fois admise la non conservation de l'énergie, et non seulement le nouvel électron mais aussi tout mécanisme satisfaisant à cette condition peut être utilisé pour expliquer le phénomène ci-dessus. L'intérêt de la solution qu'offre la nouvelle particule proposée tient cependant à deux raisons.

En premier lieu, elle montre de quelle façon simple on peut attaquer les problèmes des corpuscules non-conservatifs: il suffit d'utiliser des lagrangiens qui contiennent explicitement les coordonées de la manière indiquée. L'emploi de tels lagrangiens a été écarté d'emblée chaque fois qu'il a fallu définir une nouvelle particule. Si forte est la conviction qu'une particule constitue un système *fermé* et que par conséquent, elle doit avoir une énergie constante, que même devant le témoignage expérimental fourni par le spectre continu du Ra E, on a préféré introduire le neutrino plutôt que d'y renoncer. Il n'y a naturellement jusqu'à présent aucune raison d'admetre que ce spectre continu soit précisément une manifestation des propriétés décrites du nouvel électron. Néanmoins, celui-ci offre un exemple de corpuscule qui n'est pas un système fermé et dont *une partie* de l'énergie varie, sans que cela entraîne cependant une altération du caractère conservatif de la charge ou du spin. Remarquons toutefois que cette non-conservation apparaît ici dans les conditions particulières dans lesquelles l'équation a été écrite, c'est-à-dire en relativité restreinte. Elle n'exclut pas à priori une compensation, de nature gravitationnelle par exemple, qui apparaîtrait dès qu'on se placerait dans le cadre de la relativité générale où le principe de conservation de l'énergie devrait être satisfait.

En second lieu, l'intérêt de cette solution consiste dans le fait *qu'elle n'est pas une solution ad hoc,* mais qu'elle découle automatiquement de l'application de la relativité restreinte au choix de l'équation d'onde. En suivant la voie ouverte par Dirac, laquelle conduit à des résultats vérifiés par l'expérience, et en appliquant intégralement les procédés utilisés, c'est-à-dire en tenant compte également des termes en $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$, on trouve que la solution la plus simple présente les caractères que nous avons décrits plus haut. Cette solution semble en quelque sorte imposée par la relativité. Pour cette raison il convient de l'analyser à fond, jusqu'à ses dernières conséquences, de façon à pouvoir nous rendre compte si, malgré son caractère inusité, elle n'est pas en mesure de nous conduire, même indirectement, à de nouveaux résultats expérimentaux.

NOTES

1. W. PAULI, dans le *Handbuch der Physik* t. XXIV/1, 1933, p. 233 remarque que les exigences de l'invariance relativiste ne déterminent l'équation de Dirac qu'à un terme additif en $\gamma^\mu \gamma^\nu$ près ; il propose cependant comme coefficient possible de ce terme, le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ et supprime par conséquent ce terme en l'absence de champ.

2. P. A. M. DIRAC, *Annals of Mathematics*, t. 36, 1935, p. 657 considère un espace de Sitter, une sphère $x_\mu x^\mu = R^2$ plongée dans un espace à 5 dimensions ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) et propose comme équation d'onde dans cet espace

$$\gamma^\mu \gamma^\nu (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \psi = k\psi .$$

La forme de cette équation est celle de notre terme additif ; à cause de l'espace dans lequel elle est écrite, sa signification en est différente.

3. Le nouveau type d'électron proposé est le plus simple (il ne dépend que d'une seule constante arbitraire supplémentaire λ) et, semble-t-il, le plus intéressant. On peut cependant envisager d'autres particules, conservatives celles-la, caractérisées par un vecteur constant b_σ et définies par l'équation

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i b_\sigma m^{\sigma\mu} \partial_\mu \psi + \frac{2\pi mc}{h} \psi = 0 .$$

Leur étude sera entreprise ailleurs.

(*Reprinted from* NATURE, *Vol.* 154, *page* 674, *Nov.* 25, 1944.)

Non-conservative Fundamental Particles

IN view of certain possibilities, for example the still open possibility of the non-existence of the neutrino, it may be interesting to set up an equation for a fundamental particle which, in the restricted relativity approximation, does not obey the energy conservation law.

Such a non-conservation property is easily arrived at by taking a Lagrangian which depends explicitly on the four co-ordinates. It is remarkable, however, that such a Lagrangian, or alternatively the corresponding equations, are almost automatically obtained, in an elegant way, by starting from the Dirac form and merely taking full account of the Lorentz invariance. The simplest form of equation is obtained as follows. Let us start from the Dirac equation

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + k \psi = 0 \quad (\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu).$$

It is well known that the Lorentz invariance is not altered if one adds a term of the form $A_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu$, $A_{\mu\nu}$ being an antisymmetric tensor of second rank. The simplest tensor of this type attached to the particle is obviously $x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$. In order to make it invariant also under a change of origin, we take $(x_\mu - b_\mu)\partial_\nu - (x_\nu - b_\nu)\partial_\mu$, b_μ representing the co-ordinates of a point in space-time, the simplest case again being b_μ = constant. Putting therefore $m^{\mu\nu} = i/2.(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$, the new equation is, in the case of no field :

$$(1) \quad \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\lambda (x_\sigma - b_\sigma) m^{\sigma\mu} \partial_\mu \psi + k\psi = 0$$
$$(\lambda = \text{real constant}).$$

It is obvious that dual terms in $\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau$ and $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ could also be added without disturbing the invariance ; but as only the contribution of the $\gamma^\mu\gamma^\nu$ term brings something new, we shall leave them out at the present stage.

The particle defined by (1) has some remarkable properties close to those of Dirac's electron. It has a constant charge, and we may therefore call it a 'particle'. Its main feature is the spontaneous change of energy and momentum. The total amount of energy varies, even in the case of no field and even if the particle is 'at rest' and therefore has a vanishing kinetic energy. As the time passes, the particle loses or gains energy, even when resting, just like, for example, a living organism does. This change is connected with the existence of the new term in the equation and is proportional to the 'age' of the particle and to the constant λ. It can be computed from the expression of the symmetrical energy-momentum tensor[1] $T^{\mu\nu}$, which leads to:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 2\lambda\,(x^\mu - b^\mu)\,(\partial_\rho\psi^* i\gamma^4 m^{\sigma\rho}\,\partial_\sigma\psi),$$

giving thus a physical interpretation of the constant λ.

To define such a particle one must give, apart from its mass, a constant λ *and* a point in space-time b_μ, intrinsically defined as the (chosen) point around which the particle is almost conservative, behaving, in fact, like a classical Dirac electron. To achieve the definition of a particle by giving not only a mass and λ, but also a point in space-time, is most unfamiliar but by no means physically absurd. One can picture, for example, a conservative particle bound to some system and escaping from it at a given moment. If, when escaping from the nucleus (or in general when being created), the particle acquires the non-conservation character, the moment and place where this happens are indeed an essential feature of its definition.

The symmetry of $T^{\mu\nu}$ causes the total angular momentum at the fixed point b_μ to be constant.

λ is not necessarily small, so that the supplementary term cannot be always considered as a small perturbation. In this case one gets interesting results by investigating what happens around a certain point $x^k = a^k$ at a definite instant $x^4 = a^4$, that is by assuming that $a^\mu =$ const. The equation is then solved by a plane wave $\psi = A \exp i(p_\mu x^\mu)$, where p_μ is proportional to the energy and momentum. The classical relation $(W/c)^2 = \vec{p}^{\,2} + w^2c^2$ between energy and momentum is no longer valid; the new relation shows that, in the Newtonian approximation, the total energy is composed of the kinetic energy arising from the translation movement of the particle, plus a rotation energy, a fact which can be foreseen from the original form of the equation.

Unlike Dirac's case, the quantum mechanical treatment of this particle is essentially one which uses an indefinite metric in Hilbert space[2], as the normalization integral is

$$\int \psi^* [1 + \lambda\,(x_k - b_k)\,\gamma^k]\,\psi\,d\tau.$$

The Hamiltonian form $\partial\psi/\partial t + iH\psi = 0$ is easily obtained and brings to light the discontinuity sphere $1 - \lambda^2\Sigma(x_\varkappa - b_\varkappa)^2 = 0$, which plays an important part in the discussion and gives a geometrical interpretation of the newly introduced constant λ.

The striking fact about the above equation is that it follows quite naturally from a straightforward application of restricted relativity to the problem of the electron. This does not mean that it necessarily fits the physical reality, but seems to point towards the fact that its study might be worth while.

I am indebted to Prof. P. A. M. Dirac for invaluable discussion.

A. PROCA.

26 Cornwall Gardens,
London, S.W.7.
Oct. 11.

[1] Cf. *Portugaliæ Physica*, **1**, 159 (1943).

[2] Cf. Pauli, *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 176 (1943).

V

Mécanique Spinorielle

V. MECANIQUE SPINORIELLE

V.1 Sur les Equations Relativistes des Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.223, p270-272; Aout 5, 1946

V.2 New Possible Equations for Fundamental Particles.
Phys.Soc.Cambridge; Conference Report; Cambridge Conference
on Fundamental Particles; p180; 1947

V.3 Sur la Transmutation des Particules Elémentaires.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.228, p298-300; Jan 24, 1949

V.4 Transmutation des Particules Fondamentales.
Changement de Spin.
J.Phys.Rad.; Vol.12, p123-130; Fev 1951

V.5 Sur l'Espace-Temps des Particules Fondamentales et les Espaces Spinoriels Sous-Jacents.
Bulletin Scientifique Roumain; Institut Universitaire Roumain Charles Ier; Vol.1, p18-24; 1952

V.6 Mécanique du Point.
J.Phys.Rad.; Vol.15, No.2, p65-72; Fev 1954

V.7 Quantification en Mécanique Spinorielle.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.238, p774-776; Fev 15, 1954

V.8 Particules de Très Grandes Vitesses en Mécanique Spinorielle.
Nuovo Cimento; Vol.2, Ser.X, No.5, p962-971;
Nov 1, 1955

V.9 Interférences en Mécanique Spinorielle.
Nuovo Cimento; Vol.2, Ser.X, No.5, p972-979;
Nov 1, 1955

V.10 Sur la Mécanique Spinorielle du Point Chargé.
J.Phys.Rad.; Vol.17, No.2, p81-82; Fev 1956

V.11 Sur un Nouveau Principe d'Equivalence Suggéré par les Mécaniques Spinorielles.
J.Phys.Rad.; Vol.17, No.2, p83-84; Fev 1956

PHYSIQUE QUANTIQUE. — *Sur les équations relativistes des particules élémentaires.*

Note de M. **Alexandre Proca.**

1. *Description des particules élémentaires.* — Le principe de relativité domine aujourd'hui le problème de la description des particules élémentaires. Lorsqu'on essaie, en vue de la découverte de nouvelles particules, d'analyser les types d'équations compatibles avec ce principe, on s'aperçoit que toute une série d'équations possibles (on pourrait même dire, la moitié) a été délibérément laissée de côté.

En effet, ces équations ont la forme générale $O\psi = 0$, O étant l'opérateur et ψ la fonction d'onde. Du point de vue qui nous préoccupe ici, ψ peut être un tenseur ou un spineur; par contre O, dans sa dépendance des coordonnées x^k, reste toujours un tenseur, fonction d'ailleurs du tenseur fondamental $\partial_k \equiv \partial/\partial x^k$. Les équations pour lesquelles O est un spineur n'ont pas été prises en considération jusqu'a présent. Leur étude conduit à des résultats intéressants.

2. *Opérateur spinoriels.* — On peut construire sans difficulté des opérateurs spinoriels; deux types simples s'imposent immédiatement. En effet, considérons le vecteur de composantes x^k, ou, en notation spinorielle $x_{\dot{r}s}$. Un tel vecteur peut toujours être représenté par deux spineurs $\xi_{\dot{r}}$ et η_s au moyen de la formule

$$x_{\dot{r}s} = \xi_{\dot{r}}\xi_s + \eta_{\dot{r}}\eta_s. \tag{1}$$

Dans ces conditions, $\partial/\partial\xi_{\dot{r}}$, $\partial/\partial\eta_s$, ... sont des opérateurs spinoriels qui peuvent servir, conjointement avec les nouvelles variables, à l'établissement de nouvelles équations relativistes.

Le processus ci-dessus revient à décomposer l'espace-temps en deux espaces spinoriels sous-jacents et à leur conférer un rôle essentiel dans la description des phénomènes naturels. On peut aussi cependant ne pas procéder de cette façon, mais décomposer l'espace des moments; en d'autres termes s'en tenir à l'espace-temps ordinaire et décomposer l'opérateur $\partial_{\dot{r}s} \equiv \partial/\partial x^{\dot{r}s}$ lui-même, au moyen de deux opérateurs $d_{\dot{r}}$, δ_s, commutables, suivant la formule analogue

$$\partial_{\dot{r}s} = d_{\dot{r}} d_s + \delta_{\dot{r}}\delta_s. \tag{2}$$

Les deux opérateurs $d_{\dot{r}}$ et δ_s, à variance spinorielle sont des opérateurs intégraux, d'un caractère analogue aux dérivées d'ordre $1/2$, alors que les $\partial/\partial\xi_{\dot{r}}$ étaient de simples dérivées.

3. *Nouvelles équations relativistes.* — Tant que les faits expérimentaux ne

nous auront pas suggéré l'existence de particules ayant des propriétés déterminées, nous n'aurons aucune raison de ne pas étudier toutes les combinaisons imaginables pouvant conduire à des équations invariantes par rapport aux transformations de Lorentz. Donnons quelques exemples de telles équations.

Dirac a obtenu l'équation de l'électron en linéarisant celle de Gordon $(\square - a^2)\psi = 0$. Or, cette linéarisation peut conduire à des équations différentes de celle de Dirac si l'on introduit les opérateurs $d_{\dot r}$ et δ_s. On peut obtenir par exemple le système

$$(d_{\dot r}\,\delta^{\dot r})\psi = \lambda\varphi \qquad (d_s\,\delta^s)\varphi = \lambda\psi, \qquad \psi,\ \varphi = \text{invariants}, \tag{3}$$

qu'on peut aussi condenser en une seule équation $\sigma^k A_k \Phi = \lambda\Phi$ ($\sigma^k =$ matrices de Pauli). Cette linéarisation n'est pas la seule possible ([1]).

Un autre exemple très intéressant est fourni par le système suivant que nous écrirons pour le cas de l'absence de champ extérieur (le cas du champ s'obtient aisément) :

$$d_{\dot r}\, d_s \psi^{\dot r} = k\chi_s \qquad \delta_{\dot r}\,\delta_s \chi^{\dot r} = k\psi_s. \tag{4}$$

En l'absence de champ ce système entraîne celui de Dirac, la réciproque n'étant pas vraie. Il s'ensuit la conservation du vecteur courant et charge (toujours positive), ainsi que celle du tenseur symétrique de second rang impulsion et énergie (positive ou négative). Cependant, le système ci-dessus entraîne également la conservation d'un autre vecteur d'univers et d'un autre tenseur symétrique de second rang, mais qui sont tels que leurs composantes de temps apparaissent comme positive ou négative pour le vecteur, et exclusivement positive pour le tenseur. Le problème des composantes de temps négatives prend alors un aspect nouveau, qui sera étudié ailleurs.

([1]) En fait, l'expression (2) a la même forme que l'expression quadratique du courant en fonction des spineurs d'onde dans la théorie de l'électron de Dirac. Par conséquent, tous les résultats obtenus dans l'étude des covariants quadratiques (ou autres) de cette théorie (Darwin, Pauli, Uhlenbeck et Laporte, Proca, Franz, Kofink, Costa de Beauregard, Petiau etc.) ont leurs correspondants et peuvent servir dans la présente théorie.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **223**, pp. 270-272, séance du 5 août 1946.)

Dépôt légal d'éditeur. — **1946**. — N° d'ordre 64.
Dépôt légal d'imprimeur. — 1946. — N° d'ordre 144.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
124409-46 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

REPRINTED FROM THE
PHYSICAL SOCIETY CAMBRIDGE CONFERENCE REPORT, p. 180, 1947

NEW POSSIBLE EQUATIONS FOR FUNDAMENTAL PARTICLES

BY A. PROCA,
Paris

I SHOULD like to draw attention to a possibly new line of attack in the problem of setting up relativistic equations for unknown fundamental particles.

The new and important feature in Dirac's equation for the electron is the spinor character of the wave function ψ. In passing over from Gordon's to Dirac's equation, we change the transformation character of ψ from a tensorial to a spinorial one, but at the same time we do *not* change this character for the operators involved. We use in both cases tensorial combinations of the fundamental operators $\partial/\partial x^k$.

Obviously, new equations can be set up if we allow spinor operators to operate on the wave function, and a large field of possibilities is thus open to us.

We can practically write down the most obvious spinor operators simply by splitting into two spinors either the vector dx^k or the gradient $\partial/\partial x^k$, that is either the space-time itself or the momentum space.

Let us take the first process. $\vec{x}$ being a vector in four dimensions, one can express its components ($x_{\dot{r}s}$ in spinor notation) by two spinors $\xi_{\dot{r}}$ and η_s thus:

$$x_{\dot{r}s} = \xi_{\dot{r}}\xi_s + \eta_{\dot{r}}\eta_s. \qquad \ldots\ldots(1)$$

The solution is not unique, but, given $\xi_{\dot{r}}$, η_s, the space-time point x^k is uniquely defined. Then the derivatives $\partial/\partial\xi_r$ and $\partial/\partial\eta_s$ with respect to $\xi_{\dot{r}}, \eta_s$ are obviously spinor operators, which might be used for the above-mentioned purpose.

If we adopt this procedure we admit in fact that the fundamental data about space-time are not the co-ordinate vectors x^k, but the underlying frame of spinors. This might look somewhat odd, as the ultimate reality should not be the space-time itself but the underlying imaginary spinor space. Nevertheless it has some important advantages. For instance, $\xi_{\dot{r}}$ and η_s being arbitrary, the time deduced from (1) is always positive; there are no more than two possible directions of time. This condition is probably essential for any theory meant to avoid completely the double sign in either the energy or the probabilities.

Invariant equations in the ξs and the ηs can be set up in an obvious manner.

The second process appears to be a more powerful one, as it actually splits momentum-space. If $\partial/\partial x^k$ is written as $\partial_{\dot{r}s}$ in spinor notation, we may write

$$\partial_{\dot{r}s} = d_{\dot{r}}d_s + \delta_{\dot{r}}\delta_s,$$

$d_{\dot{r}}$, δ_s being two commuting spinor operators of integral character, in fact very close to derivatives of the order $\frac{1}{2}$.

Using these operators, we may set up new equations. Quite a number of relativistic invariant combinations are mathematically possible, of which we shal give two examples.

Let us first take the very process by which Dirac originally deduced his equation viz., the factorization of

$$\Box\psi = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^2 = k^2\psi. \qquad \ldots\ldots(2)$$

If we introduce the above-mentioned operators, Dirac's splitting of (2) is not the only one possible. Since $d_{\dot{r}}d^{\dot{r}} = 0$, we have

$$-2\Box = \partial_{\dot{r}s}\partial^{\dot{r}s} = (d_{\dot{r}}d_s + \delta_{\dot{r}}\delta_s)(d^{\dot{r}}d^s + \delta^{\dot{r}}\delta^s) = (d_{\dot{r}}\delta^{\dot{r}})(d_s\delta^s) = D^*D,$$

putting $D = d_s\delta^s$; (2) is then equivalent to the system

$$D\phi = ik\sqrt{2}\,.\,\phi; \qquad D^*\phi = ik\sqrt{2}\,.\,\phi. \qquad \ldots\ldots(3)$$

Other splittings are possible, every factorization giving rise to a new type of equation.

In the absence of field, the Dirac equation itself may be written as the system

$$(d_{\dot{r}}d_s + \delta_{\dot{r}}\delta_s)\psi^{\dot{r}} = \lambda\chi_s, \qquad (d_r d_s + \delta_{\dot{r}}\delta_s)\chi^{\dot{r}} = \lambda\psi_s. \qquad \ldots\ldots(4)$$

A very interesting new system is obtained by taking

$$d_{\dot{r}}d_s\psi^{\dot{r}} = \lambda\chi_s, \qquad \delta_{\dot{r}}\delta_s\chi^{\dot{r}} = \lambda\psi_s. \qquad \ldots\ldots(5)$$

We see that (4) follows from (5), since $d_{\dot{r}}\chi^r = \delta_{\dot{r}}\psi^{\dot{r}} = 0$, but the converse is not true.

The above-mentioned examples are only two of quite a number of mathematical possibilities. We think it worth while to make an exhaustive study of them and see whether they fit the experimental facts or, alternatively, whether they could not bring to light some new suggestion for experiment.

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Sur la transmutation des particules élémentaires.*

Note de M. **Alexandre Proca**, présentée par M. Louis de Broglie.

---

1. L'expérience montre que les diverses particules *élémentaires* sont susceptibles de se transformer les unes dans les autres. Une méthode possible d'étude de ces transformations consiste à considérer les diverses particules comme autant d'états stationnaires distincts d'un seul et même système; les transitions entre ces états constitueraient alors les transmutations cherchées.

Ces divers états seront caractérisés par des nombres quantiques de masse et de spin. Considérons d'abord le spin et cherchons l'équation d'onde d'une particule libre de masse au repos donnée m_0 et dont le spin puisse prendre toutes les valeurs permises.

2. *Espace des spins.* — Pour décrire le spin, de nouveaux opérateurs sont nécessaires, outre les $\mathbf{x}_r$ et $\mathbf{p}_r$. Nous en introduirons quatre de chaque sorte $\boldsymbol{\xi}_\sigma$ et $\boldsymbol{\eta}_\rho$, satisfaisant à

$$\boldsymbol{\eta}_\rho \boldsymbol{\xi}_\sigma - \boldsymbol{\xi}_\sigma \boldsymbol{\eta}_\rho = \frac{\varepsilon}{i}\delta_{\rho\sigma} \qquad (\varepsilon = \text{constante réelle}), \tag{1}$$

et commutant par hypothèse avec les $\mathbf{x}_r$ et $\mathbf{p}_r$. En un mot, nous admettrons que l'espace des spins est un espace continu, de même structure que l'espace-temps et indépendant de celui-ci.

3. *Équations fondamentales.* — A l'*approximation newtonienne*, nous définirons la particule libre par l'hamiltonien

$$\mathbf{H} = -\lambda\boldsymbol{\eta}_0 + \frac{1}{2\,m_0 c}\sum_1^3 (\mathbf{p}_k + \lambda\boldsymbol{\eta}_k)^2 + m_0 c, \tag{2}$$

les p_k ayant la signification habituelle $\mathbf{p}_k = (\hbar/i).\partial/\partial x^k$ et λ étant une constante réelle. L'équation d'onde *relativiste* sera

$$\left[\sum_1^4 (\mathbf{p}_\rho + \lambda\boldsymbol{\eta}_\rho)^2 + m_0^2 c^2\right]\varphi = 0, \tag{3}$$

si nous supposons qu'une transformation de Lorentz appliquée aux x_k induit la même transformation dans l'espace des spins.

φ est invariante et dépend des x_k ainsi que des variables de spin. L'interaction avec un champ électromagnétique se définit à la manière habituelle.

4. *Spin.* — En vertu de (2), on aura

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{p}}_k = 0, \qquad \dot{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{m_0 c}(\mathbf{p}_k + \lambda \boldsymbol{\eta}_k) \\ &\dot{\boldsymbol{\eta}}_k = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{\xi}}_k = \frac{1}{m_0 c}\cdot\frac{\varepsilon\lambda}{\hbar}\cdot(\mathbf{p}_k + \lambda \boldsymbol{\eta}_k) \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

A l'approximation newtonienne, la particule se meut donc à quantité de mouvement et à vitesse constantes, en accord avec le principe d'inertie. Sa vitesse n'a cependant pas la même direction que le moment et cet écart introduit un spin. Il existe, en effet, une intégrale première exprimant la constance du moment angulaire

$$\mathbf{x}_i \mathbf{p}_k - \mathbf{x}_k \mathbf{p}_i + \frac{\hbar}{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\eta}_k - \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\eta}_i) = \text{const.} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

La particule possède donc un spin $(\hbar/\varepsilon).(\boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\eta}_k - \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\eta}_i)$; les valeurs propres de sa composante dans une direction donnée sont des multiples entiers et demi-entiers de $\hbar$ de la forme $j\hbar$ où $j = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \ldots$.

5. *États stationnaires. Cas des spins entiers.* — Prenons pour les opérateurs $\boldsymbol{\xi}_\sigma$ et $\boldsymbol{\eta}_\rho$

$$\boldsymbol{\eta}_\rho = \frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_\rho}, \qquad \boldsymbol{\xi}_\sigma = \text{multiplication par } \xi_\sigma.$$

La fonction d'onde φ dépendra des x_ρ et des ξ_ρ. La particule décrite par l'équation (3) pourra avoir et garder un spin unique, bien déterminé, si elle se trouve dans un état propre correspondant à cette valeur de spin. L'opérateur du spin ne comprenant pas les $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{p}_k$, seule la dépendance de φ par rapport aux ξ_σ caractérisera le spin.

Ainsi, par exemple, si la particule se trouve dans l'état caractérisé par la fonction d'onde

$$\varphi = \psi_1 \xi_1 + \psi_2 \xi_2 + \psi_3 \xi_3 + \psi_4 \xi_4,$$

où les ψ_ρ sont des fonctions des x_ρ seulement, elle aura le spin total 1, ce sera un *méson*. De même

$$\varphi = \psi_{\rho\sigma} \xi_\rho \xi_\sigma \qquad (\text{avec } \psi_{\rho\rho} = 0,\ \psi_{\rho\sigma} = \text{symétrique})$$

représentera un corpuscule de spin 2, etc.

Remarquons que φ est un invariant; donc les ψ_ρ, $\psi_{\rho\sigma}$, ..., fonctions des x_ρ, seront des tenseurs (symétriques) d'ordre 1, 2, 3, ... Le mode de description adopté fait ainsi apparaître, dans chaque cas, les composantes ψ_ρ, $\psi_{\rho\sigma}$, ..., fonctions des x_ρ par lesquelles on a l'habitude de décrire le méson, le graviton, etc. D'une façon générale, si la particule se trouve dans l'état décrit par la fonction d'onde

$$\varphi = \psi_{\rho\sigma\ldots}\,\xi_\rho\,\xi_\sigma\ldots,$$

$\psi_{\rho\sigma\ldots}$ étant un tenseur symétrique d'ordre j, la particule s'identifie avec un corpuscule de spin total $j(j+1)$. Au repos φ est une fonction propre du spin total M^2 et l'équation (3) est équivalente dans ce cas aux *équations de Fierz* ([1]).

([1]) *Helvetica Physica Acta*, **12**, 1939, p. 1.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. **228**, p. 298-300, séance du 24 janvier 1949.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
131717-49 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, FÉVRIER 1951, PAGE 123.

TRANSMUTATION DES PARTICULES FONDAMENTALES. CHANGEMENT DE SPIN

Par A. PROCA.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur propose de tenir compte systématiquement dans la théorie, des possibilités de transformation d'une particule fondamentale en une autre. Les diverses particules sont considérées comme des états distincts d'un seul corpuscule, caractérisés par les valeurs des masses au repos et du spin total; seul le spin est considéré dans le présent article.

On écrit l'équation fondamentale en l'absence de champ, en introduisant des variables de spin à spectre continu. La seule condition d'existence d'un spin ne suffit pas pour fixer complètement le forme de cette équaion. Cependant, certaines propriétés qualitatives, qu'on énumère, en sont indépendantes. L'arbitraire dans le choix de la loi de mouvement fondamentale est examiné ensuite, en adoptant des hypothèses simplificatrices qui se présentent naturellement. Deux types essentiels d'équations apparaissent : pour l'un, qui est un cas singulier, la masse est indépendante du spin, pour l'autre elle peut en dépendre d'une manière qui n'est pas nécessairement celle qu'on considère d'habitude. Dans tous ces cas, lorsque le corpuscule se trouve dans un état de spin unique n, il obéit strictement aux équations classiques de la Mécanique ondulatoire; mais il peut aussi se trouver, naturellement « réparti sur plusieurs états de spin ». Enfin, l'Appendice indique comment on peut traiter le cas des spins demi-entiers suivant le même procédé utilisé pour les spins entiers et obtenir ainsi une équation de mouvement valable dans tous les cas.

La transformation d'une particule fondamentale en une autre de caractère différent a été mise en évidence expérimentalement, mais il ne semble pas que l'on se soit préoccupé des lois générales qui gouvernent ces transformations.

Une idée simple pour le traitement de ce problème consiste à considérer les particules fondamentales, ou au moins un certain nombre d'entre elles, comme autant d'états distincts d'un seul et même corpuscule et de regarder les transmutations entre particules comme des transitions entre états.

Les diverses particules fondamentales connues diffèrent entre elles par leur masse et par leur spin; de plus, elles peuvent être chargées ou neutres. Il semble que la manière la plus logique d'attaquer le problème consiste à considérer d'abord le spin, dont on connaît les valeurs propres alors qu'il n'en est pas de même pour la masse; il n'est d'ailleurs pas impossible que les deux questions soient liées, comme certains travaux ont essayé de le prouver.

Or, en analysant le problème sous l'angle considéré ici, une certaine ambiguïté apparaît dont il convient d'examiner le sens profond. Nous sommes ainsi forcés de reprendre à la base le problème des équations fondamentales sous son aspect le plus élémentaire. Nous essayerons donc d'établir les équations fondamentales qui après seconde quantification sont susceptibles de représenter des particules pouvant prendre à volonté une valeur quelconque du spin. Il nous semble d'ailleurs que l'intérêt d'une telle étude dépasse le cadre du problème particulier qui l'a suscité et qu'elle permet de découvrir certaines perspectives qui pourraient se révéler intéressantes.

1. Choix des variables; hypothèses de départ. — Soient x_k les coordonnées (commutables) attachées à la particule et $\dot{x}_k = \frac{1}{\hbar}[H, x_k]$, la « vitesse » qui correspond à la vitesse classique $\frac{dx}{dt}$. Nous admettons que le mouvement en l'absence de champ a lieu à moment constant $p_k = \text{const.}$, et nous définirons le spin comme la quantité σ_{ik} qu'il faut ajouter au moment orbital $m_{ik} = x_i p_k - x_k p_i$ pour obtenir une constante.

Pour achever cette définition, il nous faut introduire de nouvelles variables, les variables de spin. Or, remarquons qu'affirmer qu'une particule possède un spin revient à dire que *sa quantité de mouvement n'est plus proportionnelle à sa vitesse* $p_k \neq m\dot{x}_k$. Si une telle proportionnalité existait on en déduirait que $\dot{m}_{ik} = 0$, le moment orbital serait lui-même constant et le spin nul : c'est le cas du point matériel de la théorie classique. Cette absence de proportionnalité apparaît en fait pour toutes les particules connues, électron de Dirac, méson, etc. *L'existence du spin se manifeste donc par un écart « angulaire »* *entre sa vitesse et son moment*; il est naturel de prendre les composantes de cet écart comme nouvelles variables décrivant le spin.

Pour établir l'équation générale, il est préférable d'introduire dès à présent la relativité (restreinte) et revenir ensuite, si besoin est à l'approximation newtonnienne. Soient donc v_k les opérateurs correspondant à la vitesse d'univers et p_k ceux du moment ($k = 1, 2, 3, 4; x_4 = ict$). Les nouvelles variables de spin u_k seront les composantes de la différence, qui mesure l'écart de proportionnalité :

$$u_k = \mu v_k - p_k; \tag{1}$$

μ étant une constante.

2. **Lagrangien et équation d'ondes.** — Pour obtenir le lagrangien, nous utilisons le processus habituel de passage par correspondance, avec toutefois une différence essentielle entre les points de départ. En Mécanique quantique ordinaire on part de l'expression classique

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2$$

et l'on considère les p_k comme des opérateurs $p_k \to \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x^k}$. Nous ne pouvons utiliser l'expression ci-dessus dans notre cas parce qu'en théorie classique elle n'est valable précisément que si la quantité de mouvement est proportionnelle à la vitesse, $p_x = m_0 v_x$, ..., c'est-à-dire si le spin est nul. La relation fondamentale fournie par la relativité est en réalité :

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \sum_1^3 (dx^k)^2 \qquad \text{ou} \qquad \sum_1^4 (v^k)^2 + c^2 = 0.$$

En y portant $\mu v_k = p_k + u_k$, nous aurons la relation fondamentale entre opérateurs

$$\sum_1^4 (p_k + u_k)^2 + \mu^2 c^2 = 0 \tag{2}$$

et l'équation d'ondes

$$\left[\sum_1^4 (p_k + u_k)^2 + \mu^2 c^2\right] \psi(x_k, \xi_k) = 0. \tag{2 bis}$$

3. **Remarques sur les u_k.** — La question du choix des u_k sera examinée plus loin. Remarquons cependant dès à présent que l'essentiel des considérations du paragraphe 2 est basé sur l'absence de proportionnalité entre la vitesse et la quantité de mouvement, condition projective et non métrique. En prenant comme variables la différence vectorielle u_k, sans aucune restriction, nous aurons en général surabondance de variables. En effet, la condition de l'existence d'un écart entre les deux vecteurs v_k et u_k peut être satisfaite même si, par exemple, les deux extrémités de ces vecteurs coïncident. Nous pouvons satisfaire à la condition de l'existence d'un spin, tout en ayant par exemple

$$\sum u_k^2 = 0 \qquad \text{ou plus généralement} \qquad \sum u_k^2 = d^2, \tag{3}$$

si naturellement une autre condition physique n'intervient pas pour la remplacer.

4. **Espace des spins.** — Considérons l'espace des variables de spin dans lequel sont définis les nouveaux opérateurs u_k. A l'encontre des théories déjà connues dans lesquelles l'« espace des spins » est discontinu, notre hypothèse fondamentale consistera à admettere que cet espace est *continu* et qu'il possède les mêmes propriétés que l'espace-temps ordinaire, dont il reste naturellement distinct.

Nous définirons l'espace des spins au moyen de quatre variables continues ξ^k, pareilles aux x^k et possédant les mêmes caractères de réalité. Nous admettrons en outre que toute transformation de Lorentz des x^k induit une même transformation des ξ^k. L'espace des spins sera ainsi identique à l'espace-temps; pour des raisons de commodité, nous pouvons les supposer juxtaposés et formuler l'hypothèse fondamentale en disant que l'espace-temps est en fait double, pareil en quelque sorte à *une variété de Riemann à deux feuillets*. En chacun de ses points aboutissent à la fois un vecteur x^k et un vecteur ξ^k et la fonction d'onde dépend aussi bien des x^k que des ξ^k. Les deux feuillets étant distincts et indépendants, les opérateurs définis dans l'un d'eux seront commutables avec ceux définis dans l'autre.

Dans l'espace des spins, définissons les opérateurs ξ_l et $\eta_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi^k}$, ainsi que $\omega_{lk} = (\xi_l \eta_k - \xi_k \eta_l)$. Les lois de commutation avec ω_{lk}, de tout opérateur fonction des ξ_l et η_k seuls dépendent de sa variance relativiste. Ainsi, ω_{lk} commute avec tout invariant; pour un vecteur u_k, on aura

$$[\omega_{lk}, u_r] = \frac{1}{i}(u_l \delta_{kr} - u_k \delta_{lr}), \qquad \ldots, \tag{4}$$

5. **Spin.** — A l'approximation newtonienne ($c \to \infty$, t = paramètre), l'hamiltonien déduit de (2) s'écrit

$$H = \text{const.} + \frac{1}{2\mu} \sum_1^3 (p_k + u_k)^2. \tag{5}$$

On en déduit que

$$\dot{p}_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_k = \frac{1}{\mu}(p_k + u_k)$$

qui expriment les hypothèses de départ.

Le moment orbital m_{ik} n'est pas constant, puisque

$$\dot{m}_{ik} = \dot{x}_i p_k - \dot{x}_k p_i = \frac{1}{\mu}(u_i p_k - u_k p_i).$$

Or, on vérifie par (4) qu'en posant $\sigma_{ik} = \hbar.\omega_{ik}$ on a

$$\dot{\sigma}_{ik} = -\frac{1}{\mu}(u_i p_k - u_k p_i).$$

Il existe donc une intégrale première $m_{ik} + \sigma_{ik} = \text{const.}$ et l'on peut affirmer que la particule possède un spin dont l'expression est $\hbar(\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)$. Les valeurs propres du spin total sont donc $\hbar.l(l+1)$ avec $l = 0, 1, 2, \ldots$ La particule répond donc bien aux conditions posées au début (1).

Notons que cette conclusion est valable *quel que soit l'opérateur* u_k, pourvu qu'il soit fonction seulement des ξ_k et η_k et en outre, qu'il soit hermitique et se transforme comme un vecteur ainsi que l'exige l'invariance de (2 *bis*) avec ψ = invariant.

Contrairement à ce qui se passe dans la théorie ordinaire, la condition d'existence d'un spin ne suffit pas pour déterminer la forme de l'équation d'une particule, puisque cette forme dépend du choix des u_k. Un certain nombre de propriétés qualitatives de la particule sont indépendantes de ce choix, mais de nouvelles conditions sont nécessaires pour achever de la définir par son équation et le problème du choix des u_k reste essentiel.

6. **Propriétés générales du corpuscule fondamental.** — Le spin est déterminé par $\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$ mais l'élément fondamental de cette théorie n'est pas le spin mais plutôt u_k, sorte de « quantité de mouvement intrinsèque » (2). Les propriétés découlant de l'existence de cette nouvelle caractéristique pourraient, semble-t-il, être mises en évidence par des expériences permettant de distinguer entre la « vitesse » et la quantité de mouvement.

a. On a $\mu v_k = p_k + u_k$. On peut imaginer (puisqu'aussi bien le choix des u_k n'est pas arrêté), que la particule se trouve dans un état tel que la valeur moyenne d'une ou de toutes les composantes de la vitesse soient nulles; pour cet état, s'il existe, donc au repos (3), on aura $(p_k)_0 = -u_k$.

La particule envisagée possède donc en général la propriété d'avoir non seulement une énergie, mais aussi *une quantité de mouvement au repos.* Expérimentalement, le choc de corpuscules incidents contre de telles particules au repos, peut présenter des anomalies si on le compare au choc contre des particules ordinaires (spin zéro).

b. Si la particule peut se trouver dans un état tel que son spinent soit nul, elle sera identique à une particule de Gordon-Schrödinger puisque $p_k = \mu v_k$. Mais, dans cette théorie, on peut imaginer une particule dont la quantité de mouvement serait nulle, $p_k = 0$, et qui pourrait quand même se mouvoir avec une vitesse non nulle, $v_k = \frac{u_k}{\mu}$. Dans un choc elle pourrait éventuellement échanger son spinent et peut-être son spin, mais sa quantité de mouvement pourrait rester invariable.

c. Si en un point d'une « trajectoire » observée, par exemple sur une plaque photographique, la particule change de spin, ou mieux si son spinent varie sans que sa quantité de mouvement soit altérée, la trajectoire présentera généralement un coude puisque sa vitesse moyenne aura varié. Les principes de conservation, dont il n'y a aucune raison de mettre en doute la validité, exigeraient dans ce cas le départ d'une particule sans moment mais douée de spin, du type de celles mentionnées en *b.*

d. La quantité de mouvement pourrait changer *sans que la vitesse varie* (*).

e. Enfin, l'existence de termes additifs dans l'équation, pouvant s'écrire dès le début λu_k, permet l'introduction d'une constante multiplicative λ, qui devrait être par essence une *constante caractéristique* du mouvement sinon une constante universelle.

7. **Choix des $\mathbf{u}_k$.** — Les u_k sont des opérateurs hermitiques, fonctions des ξ_i et η_{ik} se transformant comme les composantes d'un vecteur; en dehors de cela ils sont arbitraires et un nouveau principe est nécessaire pour en fixer la forme définitivement. Deux conditions semblent pouvoir guider notre choix, au moins au début :

1° u_k doit dépendre linéairement des $\eta_{ik} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_k}$, ce qui est l'hypothèse la plus simple et la plus naturelle;

2° lorsque le corpuscule se trouve dans un état de spin bien déterminé, n, l'équation fondamentale (2 *bis*) doit se réduire aux équations ondulatoires bien connues en Mécanique pour des particules de ce type.

L'analyse qui suit montrera que, avec la restriction 1°, les u_k se réduisent à deux types essentiels et que, pour tout choix largement arbitraire d'ailleurs

(1) Pour simplifier l'exposé, nous n'avons considéré ici que les valeurs entières du spin. Pour la manière de traiter le cas des valeurs demi-entières voir l'Appendice.

(2) Qu'on pourrait appeler *spinent* par analogie avec le terme « moment » appliqué aux p_k.

(3) Ou plus exactement « au repos dans une direction donnée »; elle ne sera « au repos dans toutes les directions » que si les u_k sont commutables.

(*) *Note ajoutée sur épreuves.* — On peut se demander si la désintégration en vol des rayons β, dans laquelle la vitesse semble rester constante, n'est pas un phénomène de ce genre (*cf.* CHARPAK et SUZOR, *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, p. 322).

des u_k, il existe un état de spin n pour lequel l'équation fondamentale est :

ou entièrement équivalente aux équations connues,

ou n'en diffère que par son terme de masse.

8. **Opérateurs linéaires en** η_i. — Un opérateur vectoriel, hermitique, dépendant linéairement des η_i s'écrira, en général

$$u_k = A_{ik}\eta_i + \eta_i A_{ik} \tag{6}$$

les A_{ik} ayant la forme

$$A_{ik} = a\,\delta_{ik} + b\,\xi_i\xi_k, \tag{7}$$

où a et b sont des invariants, fonctions données de $R = \sqrt{-\xi_s\xi^s}$.

Une transformation unitaire appliquée à l'équation fondamentale permettra de dégager la forme essentielle des u_k. Pratiquement, si S est l'opérateur « multiplication par la fonction $S(R)$ » :

$$S(R) = \text{const.}\,\sqrt{a - bR^2}\,e^{-\frac{3}{2}\int\frac{bR\,dR}{a-bR^2}}, \tag{8}$$

on aura

$$S\,u_k\,S^{-1} = 2A_{ik}\eta_i.$$

Effectuons une transformation de variables définie par $\xi_i = T\chi_i$ où T est une fonction à déterminer (⁴) et appelons U la substitution $\xi_i \to \chi_i$. $\Phi(\xi)$ étant une fonction quelconque, on a

$$\eta_i\Phi = \frac{1}{i}\frac{\partial\chi_s}{\partial\xi_i}\frac{\partial\Phi}{\partial\chi_s},$$

ce qu'on peut écrire plus correctement $\frac{\partial\chi_s}{\partial\xi_i}$ étant supposé exprimé en fonction des ξ :

$$\eta_i\Phi = \frac{\partial\chi_s}{\partial\xi_i}U^{-1}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\chi_s}U\Phi.$$

On voit alors qu'en choisissant

$$T = \text{const.}\,e^{-\int\frac{bR\,dR}{a-bR^2}} \tag{9}$$

on aura, à une constante multiplicative près :

$$S\,u_k\,S^{-1} = 2\,a\,T^{-1}U^{-1}\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}U \tag{10}$$

ou encore

$$u_k = 2\,a\,T^{-1}\,S^{-1}U^{-1}\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}US. \tag{11}$$

Deux cas peuvent se présenter suivant que aT^{-1} dépend ou non de R, c'est-à-dire suivant que

$$\left.\begin{aligned} &u_k = \text{const.}\,S^{-1}U^{-1}\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}US \\ \text{ou}\quad &u_k = \text{const.}\,N(R)\,S^{-1}U^{-1}\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}US. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pour analyser leur signification, il faut voir ce que devient l'équation fondamentale

$$[(p_k + u_k)^2 + \mu^2c^2]\psi = \sum[p_k^2 + 2p_ku_k + u_k^2 + \mu^2c^2]\,\psi = 0.$$

lorsque la particule se trouve dans l'état de spin total égal à n.

9. **Fonction** ψ **pour l'état de spin** n. — Un tel état est décrit par un ψ qui, par rapport aux variables ξ_k est une fonction propre de $M^2 = \frac{1}{2}\,\omega_{ik}\omega^{ik}$ c'est-à-dire une fonction pseudo-sphérique Y_n à quatre dimensions, multipliée par une fonction arbitraire $f(R)$ de la « distance » $R = \sqrt{-\xi_s\xi^s}$ (⁵).

Nous définirons une fonction pseudo-sphérique comme dans le cas de trois dimensions par $Y = \frac{H_n}{R^n}$ où H_n est un polynome harmonique, homogène et de degré n en ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, donc tel que

$$\eta_k^2 H_n = 0, \qquad \xi^k\eta_k H_n = \frac{n}{i}H_n. \tag{13}$$

Comme

$$M^2 = \frac{1}{2}\,\omega_{ik}\omega^{ik} = -R^2\eta_k^2 - \xi_k\eta_k\left(\xi_k\eta_k + \frac{2}{i}\right),$$

on aura

$$M^2Y_n = n(n+2)Y_n. \tag{14}$$

Si l'on écrit

$$H_n = \varphi_{ijk\ldots n}\,\xi_i\xi_j\xi_k\ldots\xi_n, \tag{15}$$

les $\varphi_{ijk\ldots}$ étant symétriques, l'harmonicité se traduira par $\varphi_{iik\ldots} = 0$. La fonction d'onde s'écrira

$$\psi = f(R)\,\varphi_{ijk\ldots}\xi_i\xi_j\xi_k\ldots.$$

Les $\varphi_{ijk\ldots}$ ne dépendent que des x_1, x_2, x_3, x_4 et l'invariance de l'équation fondamentale exige que ψ = invariant donc que les $\varphi_{ijk\ldots}$ se transforme de façon contragrédiente aux produits $\xi_i\xi_j\xi_k\ldots$.

Une particule de spin total n sera donc décrite en fait par un certain nombre de fonctions des x_k, à savoir par les composantes $\varphi_{ijk\ldots}$ d'un tenseur symétrique de rang n, satisfaisant de plus à la condition $\varphi_{iik\ldots} = 0$. Par exemple, *un méson de spin* 1 sera décrit par

$$\psi = f(R)\,\varphi_i\xi_i.$$

donc essentiellement par quatre fonctions φ_i des x_k.

(⁴) T est un invariant exprimable soit en fonction de $R = \sqrt{-\xi_s\xi^s}$ soit en fonction de $\rho = \sqrt{-\chi_s\chi^s}$; ρ est lié à R par l'équation implicite $R = \rho T$.

(⁵) Récemment, ces fonctions ont été plus particulièrement étudiées par M. Born et ses collaborateurs à l'occasion des travaux sur le principe de réciprocité.

On voit apparaître ainsi les « composantes » de la fonction d'ondes, nécessaires dans la théorie classique pour la description des particules d'un spin déterminé.

10. **Réduction aux équations connues.** — *Premier cas.* — Avec les notations du paragraphe 8, supposons que l'opérateur u_k soit tel que $aT^{-1} = \text{const.}$; dans ce cas λ, étant une constante :

$$u_k = \lambda S^{-1} U^{-1} \frac{\partial}{i\,\partial\chi_k} US \tag{16}$$

et l'équation fondamentale s'écrit

$$S^{-1}U^{-1}\left[\left(p_k + \frac{\lambda}{i}\frac{\partial}{\partial\chi_k}\right)^2 + \mu^2 c^2\right] US\psi = 0. \tag{17}$$

Considérons un état de spin n. (17) sera satisfaite par

$$US\psi = H_n = \varphi_{ijk\ldots}\chi_i\chi_j\chi_k\ldots,$$

pourvu que les $\varphi_{ijk\ldots}$ fonctions des x^k, satisfassent à

$$\left.\begin{aligned} (p_k^2 + \mu^2 c^2)\,\varphi_{ijk\ldots} &= 0, \\ \text{et} \qquad p_i\,\varphi_{ijk\ldots} &= 0 \\ \varphi_{iik\ldots} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

En revenant aux ψ on peut dire qu'un état de spin n est décrit par la fonction d'onde

$$\psi = S^{-1}U^{-1}H_n(\chi) = f(R)H_n(\xi), \tag{19}$$

les « composantes » $\varphi_{ijk\ldots}$ satisfaisant à (18). Or, *ces dernières équations sont les équations ondulatoires classiques d'une particule de spin n, sous la forme de Fierz.*

Ainsi, dans le premier cas, il existe toujours un état de spin n pour lequel le mouvement de la particule obéit aux équations classiques, c'est-à-dire est exactement celui des particules connues de même spin. Par exemple, si l'on a choisi

$$u_k = \lambda(R\eta_k R + \xi_i\omega_{ik} + \omega_{ik}\xi_i), \tag{20}$$

l'état $\psi = R^{-6}\varphi_i\xi_i$ représentera un méson de spin unité, qui serait décrit en mécanique ondulatoire classique par les équations habituelles entre les quatre composantes φ_i.

La condition $aT^{-1} = \text{const.}$ limite le choix des u_k à celui d'une seule des deux fonctions arbitraires a et b, par exemple à $a(R)$ qui reste arbitraire, b étant donnée par

$$b = \frac{aa'}{R(a'R - a)}, \qquad a' = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}R};$$

S est complètement déterminée.

Parmi toutes les formes possibles, on peut prendre $a = \text{const.}$, $b = 0$, c'est-à-dire

$$u_k = \frac{\lambda}{i}\frac{\partial}{\partial\xi_k}.$$

Dans cette hypothèse, les composantes de la vitesse commutent entre elles, donc sont simultanément mesurables.

Mais le premier cas en l'absence de toute interaction est un cas singulier ([6]), en ce sens que l'équation fondamentale ne suffit pas pour déterminer sans ambiguïté l'état de la particule. En effet, cette équation contient les dérivées uniquement par la combinaison $\hbar\frac{\partial}{\partial\chi_k} + \lambda\frac{\partial}{\partial\xi_k}$; elle ne fixe donc que la manière dont ψ dépend d'une combinaison linéaire des variables x^k et ξ^k et la dépendance des x seuls reste largement arbitraire. Une seconde relation est nécessaire, qui se présente d'ailleurs d'elle-même si nous nous reportons aux observations du paragraphe 3, *in fine.* Nous y avons vu que l'existence d'un spin était compatible avec la condition

$$u_k u^k = 0 \qquad \text{ou} \qquad u_k u^k = d^2.$$

En l'absence de toute autre contrainte, l'équation fondamentale jointe à la condition $(u_k)^2\psi = 0$ achève de définir la particule dans le sens indiqué.

Deuxième cas. — Dans ce cas

$$u_k = \lambda N(R)\, S^{-1}U^{-1}\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k} US,$$

a et b sont des fonctions arbitraires et en général les équations aux φ ne sont plus les équations classiques. Certains choix de la fonction $N(R)$ conduisent cependant à des particularités intéressantes.

En effet, l'élément déterminant u_k^2 s'écrit

$$u_k^2 = -\lambda^2 N S^{-1} U^{-1}\frac{\partial}{\partial\chi_k} UNU^{-1}\frac{\partial}{\partial\chi_k} US.$$

Remarquons qu'en appliquant à $\psi(\xi)$ cet opérateur, on peut écrire $UNU^{-1}\frac{\partial}{\partial\chi_k}US\psi$, d'après la signification même de U, comme un véritable produit de deux fonctions

$$(UN)\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}US\psi\right),$$

dont la dérivée sera

$$\frac{\partial}{\partial\chi_k}UNU^{-1}\frac{\partial}{\partial\chi_k}US\psi = \left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}UN\right)\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}US\psi\right) + (UN)\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi_k^2}US\psi\right).$$

On aura donc en définitive

$$u_k^2 = -\lambda^2 N S^{-1}U^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}UN\right)\frac{\partial}{\partial\chi_k}US - \lambda^2 S^{-1}N^2\frac{\partial^2}{\partial\chi_k^2}US.$$

Considérons alors l'équation fondamentale

$$[p_k^2 + 2p_k u_k + u_k^2 + \mu^2 c^2]\psi = 0$$

([6]) Cette remarque est due à M. J. Horowitz.

et un état de spin n décrit par $\psi = S^{-1}U^{-1}H_n(\chi)$. On aura

$$u_k^2\psi = -\lambda^2 NS^{-1}U^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}UN\right)\frac{\partial H_n(\chi)}{\partial\chi^k}.$$

En effectuant la dérivation $\frac{\partial}{\partial\chi^k}UN$ un facteur χ_k apparaîtra. *Choisissons* u_k, donc N, *de façon que*

$$NS^{-1}U^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}UN\right) = -\frac{k^2c^2}{\lambda^2}\chi_k \quad \text{avec} \quad k, c, \lambda = \text{const.}$$

On aura alors, en vertu de (13)

$$u_k^2\psi = k^2c^2\, n\, H_n$$

et l'équation fondamentale sera satisfaite si

$$[p_k^2 + (\mu^2 + n\,k^2)c^2]H_n = 0,$$
$$p_k\frac{\partial H_n}{\partial\chi_k} = 0.$$

Or, ces équations sont équivalentes aux équations de Fierz, *mais avec un autre terme de masse.* Donc, avec le choix de u_k indiqué plus haut, l'état

$$\psi = S^{-1}U^{-1}H_n(\chi)$$

représente une particule de spin n :

1° du type classique, c'est-à-dire obéissant aux équations de Fierz;

2° ayant une masse au repos variable avec le spin n, de la forme $\mu^2 + nk^2$.

Exemple. — Si nous choisissons

$$u_k = \lambda R\left(\delta_{ik} + \frac{s}{s-1}\frac{\xi_i\xi_k}{R^2}\right)\eta_i + \text{adjoint}$$
$$= \lambda R^{\frac{1-3s}{2}}\left(\delta_{ik} + \frac{s}{s-1}\frac{\xi_i\xi_k}{R^2}\right)\eta_i R^{\frac{1+3s}{2}},$$

où s est un nombre quelconque $-\frac{1}{3} < s < 1$, on peut dire que :

1° lorsque la particule se trouve dans l'état

$$\psi = \Phi(x) = \text{indép. des } \xi,$$

elle aura le spin 0 et son équation sera

$$[p_k^2 + \mu^2c^2]\Phi = 0;$$

2° dans l'état

$$\psi = R^{-\frac{3s+1}{2}}\varphi_r\xi_r$$

elle aura le spin total 1 et, puisque $u_k^2\psi = \lambda^2\psi$ elle satisfera à

$$[p_k^2 + (\mu^2c^2 + \lambda^2)]\varphi_r = 0, \qquad p_r\varphi_r = 0.$$

Tout se passera comme si elle avait une masse au repos différente de celle d'une particule de spin 0;

3° dans l'état

$$\psi = R^{-\frac{1+3s+2n}{2}}H_n(\xi),$$

elle aura le spin n et une masse au repos $\frac{n\lambda^2}{c^2} + \mu^2$.

De nombreuses suggestions ont été faites jusqu'à présent tendant à lier la valeur de la masse à celle du spin. On voit ici sur un exemple particulier de quelle façon on peut les lier systématiquement aux états propres de l'opérateur u_k^2 et en même temps on peut se rendre compte du véritable degré d'arbitraire de cette hypothèse.

11. **Remarques.** — Dans l'exemple choisi au paragraphe précédent, n ne peut dépasser une certaine valeur, le comportement de ψ à l'infini n'étant plus satisfaisant. Ce comportement aux limites dépend, lorsqu'on veut retomber sur les équations classiques, du choix de la fonction S, donc en définitive, du choix de u_k; on a ainsi un autre critère qui circonscrit ce choix.

Si ψ s'annule à l'infini, on peut toujours définir dans le premier cas un courant *conservatif dans l'espace ordinaire*; dans le second cas cette conservation n'est acquise que pour des fonctions N convenables.

On prendra pour valeurs moyennes d'un opérateur A dans l'espace ordinaire, la somme de leurs valeurs sur toutes les possibilités de spin

$$\bar{A} = \int \psi^+ A\,\psi\, dx^{(4)}\, d\xi^{(4)},$$

comme on le fait d'habitude, avec cette différence qu'ici le domaine de sommation est continu.

Enfin, l'équation du mouvement du corpuscule dans un champ électromagnétique A_k sera

$$[(p_k + eA_k + u_k)^2 + \mu^2c^2]\psi = 0,$$

et son interaction avec d'autres champs s'établira à partir du lagrangien comme en théorie ondulatoire classique. Ce problème présente cependant un intérêt tout particulier et sera examiné ailleurs.

APPENDICE.

Cas des spins demi-entiers. — Pour la clarté de l'exposé, nous n'avons envisagé dans ce qui précède que le cas des spins entiers; cependant les mêmes formules et raisonnements restent valables si l'on donne aux symboles employés, la signification plus générale indiquée ci-dessous.

Dans notre théorie, le spin est donné en somme par le « moment orbital » dans l'espace des ξ. Considérons pour préciser, le cas habituel des trois dimensions que nous appellerons ici ξ, η et ζ et soient M_1, M_2, $M_3 = \frac{1}{2}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$, ... les composantes de ce moment. Ces composantes satisfont aux conditions générales bien connues

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = i M_3, \qquad \ldots, \tag{1}$$

mais n'admettent que des valeurs propres entières et l'on sait ([7]) qu'il n'est pas possible, en partant des fonctions sphériques, de trouver un système de fonctions propres convenables qui correspondent au cas des spins demi-entiers.

Cela est indiscutable tant que nous écrivons notre « moment orbital », c'est-à-dire notre spin en fonction des ξ_k, comme nous l'avons fait dans cet article, pour la commodité de l'exposition. Mais, pour nous, le problème est différent puisque *nous ne sommes tenus par aucune condition à employer les* ξ, η, ζ (ou les ξ_k) *comme variables indépendantes* pour exprimer le spin.

La solution, c'est-à-dire la transcription de la théorie précédente pour qu'elle puisse être applicable à tous les cas, s'obtient *en écrivant l'équation fondamentale* non pas dans l'espace vectoriel des ξ_k, qui a les propriétés de l'espace temps ordinaire, mais *dans l'espace spinoriel sous-jacent* ([8]) qui devrait être considéré comme l'espace fondamental. Voici quel est le sens de cette affirmation.

Revenons à ξ, η, ζ et aux moments (1).

L'espace spinoriel sous-jacent à ξ, η, ζ sera décrit par un spineur de composantes u_1, u_2 et ses complexes conjuguées $u_{\dot 1}$, $u_{\dot 2}$. Posons donc

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(u_{\dot 1} u_2 + u_{\dot 2} u_1), \qquad \eta = \frac{1}{2i}(u_{\dot 1} u_2 - u_{\dot 2} u_1), \\ \zeta &= \frac{1}{2}(u_{\dot 1} u_1 - u_{\dot 2} u_2), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et considérons une quatrième variable réelle T, indépendante des précédentes et dont l'expression en fonction des u, $T = f(u_1, u_2, u_{\dot 1}, u_{\dot 2})$ est arbitraire pour le moment. Le passage des quatre variables indépendantes u aux variables ξ, η, ζ, T est bien défini et nous pouvons aisément calculer les $\frac{\partial}{\partial \xi}$, ... en fonction des $\frac{\partial}{\partial u_1}$, ...

Pour simplifier les formules, choisissons

$$T = \frac{i}{2}(u_{\dot 1} u_{\dot 2} - u_1 u_2).$$

Dans ce cas l'on a pour la troisième composante

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{1}{i}\left(\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} - u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}}\right) \end{aligned}$$

Tant que la fonction d'onde ψ ne dépendra *que* des variables ξ, η, ζ le passage aux variables u ne présentera aucun intérêt : par exemple $\psi = e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi}}$ est toujours une fonction propre de M_3, qu'elle soit exprimée au moyen des u ou non. Mais si la fonction d'ondes est *linéaire dans les u*, ou plus généralement de degré impair, elle pourra constituer une fonction propre uniforme de M_3, *correspondant à des valeurs propres demi-entières*. Par exemple, on a

$$\left.\begin{aligned} M_3 \varphi &= \frac{1}{2}\varphi \qquad \text{pour} \quad \varphi = A u_2 + B u_{\dot 1}, \\ M_3 \Phi &= -\frac{1}{2}\Phi \qquad \text{pour} \quad \Phi = A' u_1 + B' u_{\dot 2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Avec le choix de T ci-dessus, on a

$$\left.\begin{aligned} M_1 + i M_2 &= u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{1}{2}\, \frac{u_{\dot 2}^2 + u_{\dot 1}^2}{u_{\dot 1} u_{\dot 2} - u_1 u_2} \\ &\quad \times \left(-u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} + u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}}\right), \\ M_1 - i M_2 &= u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{1}{2}\, \frac{u_{\dot 2}^2 + u_1}{u_{\dot 1} u_{\dot 2} + u_1 u_2} \\ &\quad \times \left(-u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} + u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}}\right), \\ M_3 &= \frac{1}{2}\left(-u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} - u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

et (3) sont en même temps fonctions propres de M_3 et de $\mathbf{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$. Cela étant, pour englober tous les spins dans une théorie unique, il faudra *écrire l'équation fondamentale en fonction des u* et des $\frac{\partial}{\partial u}$, les dérivées $\frac{\partial}{\partial \xi}$ qui apparaissent étant remplacées par leurs expressions en fonction des u et $\frac{\partial}{\partial u}$. Lorsque la fonction d'onde ne comprendra que des combinaisons du type (2) elle sera fonction des ξ, η, ζ seulement; l'équation pourra s'écrire sous la forme vectorielle qui a déjà été donnée et la particule sera du type étudié au cours de l'article précédent. Mais si les u ne peuvent pas se grouper en des combinaisons du type (2), ψ représentera en général une superposition d'états dont au moins un correspondra à un spin demi-entier. Toutes les conclusions restent valables dans le cas général, pourvu que l'équation soit écrite sous cette nouvelle forme.

Pour présenter la théorie, on peut évidemment partir dès le début avec les variables u et constater par exemple que (4) fournissent les expressions d'opérateurs satisfaisant aux conditions

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = i M_3,$$

donc ayant des valeurs propres entières et demi-entières, *les fonctions propres de ces dernières étant uniformes;* mais cela n'ajoute rien de nouveau et sacrifie la clarté à la généralité.

Remarquons enfin sous quel aspect apparaît, à la lumière de la théorie précédente, la conception

([7]) *Cf.* par exemple W. Pauli, *Handbuch der Physik*, p. 126.

([8]) Suivant une idée déjà publiée, cf. *Cambridge International Conference on Fundamental Particles*, 1946 et aussi *C. R. Acad. Sc.*, 1946, 233, p. 270.

suivant laquelle un méson peut être considéré comme formé par deux particules de spin $\frac{1}{2}$: une particule de spin 1 est représentée par un polynome homogène, du premier degré en ξ, mais du second en u; décomposé en facteurs du premier degré en u, ce polynome décrit par chacun de ces facteurs une particule de spin $\frac{1}{2}$.

D'une façon générale, la parité du degré du polynome qui représente une particule est liée au caractère entier ou demi-entier de son spin. Elle influera sur les propriétés de commutation des ψ et pourra ainsi servir pour établir un lien entre le spin et la statistique.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

BHABHA H. J. — *Proc. Indian Acad. Sc.*, 1945, A, **21**, 241, *Rev. Mod. Phys.* 1945, **17**, 200. Cambridge Conference on Fundamental Particles, 1947, p. 22.

BROGLIE L. DE. — Théorie générale des particules à spin, Gauthier-Villars, Paris, 1943.

DIRAC P. A. M. — *Proc. Roy. Soc.*, 1936, **155**, 447.

FIERZ M. — *Helv. Phys. Acta*, 1939, **12**, 3.

FIERZ M. et PAULI W. — *Proc. Roy. Soc.*, 1939, **173**, 211.

HARISH-CHANDRA. — Cambridge Conference on Fundamental Particles, 1947, p. 185; *Proc. Roy. Soc.*, A, **186**, 502; *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 793.

KRAMERS, BELINFANTE et LUBANSKI. — *Physica*, 1941, **8**, 597.

KWAL B. — *Thèse*, Paris, 1946; *J. Phys. Rad.*, 1949, **10**, 189.

LE COUTEUR J. K. — *Proc. Roy. Soc.*, 1949, **196**, 251; 1950 **202**, 285 et 395.

PAULI W. — *Phys. Rev.*, 1940, **58**, 716. *Rev. Mod. Phys.*, 1943, **15**, 175.

PETIAU G. — *J. Phys. Rad.*, 1946, **7**, 124 et 181.

POTIER R. — *C. R. Ac. Sc.*, Paris, 1946, **222**, 1076; 1947, **224**, 1332; 1948, **226**, 1146; 1949, **228**, 656.

Sur l'espace-temps des particules fondamentales et les espaces spinoriels sous-jacents

par A. PROCA

Le principe de la relativité domine à l'heure actuelle toute la théorie des particules fondamentales.

Sous sa forme restreinte, ce principe exige la covariance des grandeurs attachées à la particule, par rapport à certaines transformations des coordonnées. La théorie classique, établie en accord avec ce principe, introduit donc des grandeurs qui se transforment suivant certaines règles et qu'on appelle des tenseurs — le plus simple d'entre eux, à partir duquel on peut former tous les autres, étant le vecteur d'univers dont les composantes se transforment comme les coordonnées x^k.

Or, la mécanique quantique, plus précisément la théorie relativiste de l'électron de Dirac, a montré pour la première fois que les tenseurs ne suffisent pas pour décrire correctement toutes les particules fondamentales. Une autre catégorie de grandeurs, les « spineurs », qui satisfont également aux exigences de la relativité, sont indispensables dès que l'on veut décrire des particules à spin demi-entier.

A partir de spineurs de rang 1 et de leurs conjugués on peut former univoquement, par des opérations rationnelles. n'importe quel tenseur, mais l'inverse n'est pas vrai. En un sens donc, le spineur de rang 1 est plus simple qu'un vecteur d'univers et, dans la hiérarchie des grandeurs physiques établie par la relativité, c'est le spineur de rang 1 qu'on doit considérer comme l'élément fondamental.

observable d'une réalité mathématique fondamentale, constituée par des espaces spinoriels, en quelque sorte sous-jacents. Précisons ces idées par un exemple, dans le cas de trois dimensions pour simplifier.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire. Dans la théorie quantique des particules élémentaires, ces coordonnées représentent trois nombres attachés à la particule et qui, dans certains cas exceptionnels d'observation, fixent exactement la « position » de celle-ci.

Par rapport aux rotations de l'espace (x, y, z) se comporte comme un vecteur. Considérons un spineur ξ_s et son conjugué $\xi_{\dot{r}}$, $(r, s = 1, 2)$. Puisque certaines combinaisons linéaires de $\xi_{\dot{r}}\xi_s$ se transforment comme un vecteur, nous pouvons choisir ξ tel que l'on ait :

$$[1] \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\xi_{\dot{1}}\xi_2 + \xi_{\dot{2}}\xi_1\right) \\ y &= \frac{1}{2i}\left(\xi_{\dot{1}}\xi_2 - \xi_{\dot{2}}\xi_1\right) \\ z &= \frac{1}{2}\left(\xi_{\dot{1}}\xi_1 - \xi_{\dot{2}}\xi_2\right). \end{aligned} \right.$$

Notre hypothèse revient alors à dire que la particule n'est pas caractérisée (entre autres) par (x, y, z) mais par $\xi_{\dot{1}}, \xi_{\dot{2}}$ et ξ_1, ξ_2. Ce sont les espaces spinoriels de $\xi_{\dot{r}}$ et ξ_s qui constituent l'élément fondamental et non pas l'espace vétoriel x, y, z. Les équations fondamentales seront des équations en ξ. Tout se passe comme si les lois qui régissent les phénomènes naturels jouaient dans deux espaces spinoriels conjugués, inobservables, sous-jacents à l'espace ordinaire; ces lois se répercutent dans ce dernier, dans lequel nous pouvons observer, mesurer et suivre, comme auparavant, les grandeurs observables attachées à la particule.

A partir des spineurs de base on peut former le vecteur x, y, z au moyen de [1], donc toutes les autres grandeurs qui en dépendent. La « position », la quantité de mouvement, le moment angulaire seront donc les mêmes que si la particule était définie à la manière ordinaire, mais le nouveau point de vue permettra de lui attacher également d'autres grandeurs observables qui peuvent se révéler dignes d'intérêt.

***

Lorsqu'on examine la théorie actuelle des particules fondamentales du point de vue précédent, un fait frappant apparaît immédiatement, à savoir *l'absence, au niveau de la première quantification, d'opérateurs auxquels on puisse appliquer le qualificatif de spinoriels.*

En effet, les spineurs qu'introduit la théorie sont essentiellement des ψ c'est-à-dire des fonctions d'onde; il n'existe aucun opérateur, à spectre continu qui « corresponde » à une grandeur classique ayant les propriétés de transformation des spineurs. Pourtant de tels opérateurs existent en mécanique ondulatoire : ils peuvent apparaître dès qu'on passe à la seconde quantification (et alors les grandeurs observables correspondent non pas à ces opérateurs eux-mêmes, mais à des fonctions quadratiques de ceux-ci).

Il nous semble que l'absence d'opérateurs de ce genre en mécanique quantique ordinaire constitue une lacune de la théorie, qui en fait disparaître sans raison un certain nombre de traits fondamentaux. En la comblant, on peut espérer mieux saisir tous ses aspects essentiels.

***

La raison de cette absence est évidente : elle tient au fait qu'en mécanique classique aucune grandeur « observable » ne se transforme comme un spineur. Les grandeurs attachées à la particule dépendent : de sa masse et de sa charge, qui sont des invariants, de x^k et $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^k}$, qui sont des vecteurs, et enfin du spin. En fin de compte c'est le caractère vectoriel de x^k, c'est-à-dire de l'espace, qui exclut l'apparition des spineurs dans la théorie (1).

Or, du point de vue relativiste, ce vecteur peut être considéré comme formé au moyen d'éléments plus simples, à savoir au moyen de spineurs. Toute la question est de savoir si nous devons regarder le vecteur x^k ou les spineurs composants comme éléments primordiaux.

Nous sommes ainsi conduits à nous demander si l'espace lui-même (ou plus exactement le repère d'un point que constitue le vecteur x^k) *ne serait pas simplement l'aspect physiquement*

(1) Le problème du spin peut se traiter par l'introduction d'un « espace des spins », cf. *Journ. de Physique*, t. 12, 1951, p. 123.

Le véritable sens de cette modification apparaît plus clairement dans la théorie relativiste à quatre dimensions (2). Nous nous bornerons ici à quelques observations sur le cas des trois dimensions, destinées à faciliter la compréhension du cas général.

***

Pour donner un sens intuitif à notre hypothèse, il suffira de remarquer que si l'on part des ξ au lieu des x^k l'on se donne en fait *quatre* grandeurs réelles au lieu des trois coordonnées anciennes *x, y* et *z*. Appelons $\varphi(\xi_r^{\cdot}, \xi_s)$ une combinaison réelle quelconque de $\xi_r^{\cdot}$ et ξ_s et posons

$$[2] \qquad T = \varphi(\xi_r^{\cdot}, \xi_s)$$

T étant une nouvelle variable réelle indépendante. Le système [1] complété par [2], pourra sous certaines conditions être résolu par rapport aux $\xi_r^{\cdot}$, ξ_s et il sera équivalent de se donner les ξ ou les *x, y, z* T. *Notre hypothèse revient donc, en fait, à attacher à la particule, en plus des trois coordonnées, un quatrième nombre réel T, qui achève sa définition.*

La correspondance est fixée à l'arbitraire de φ près. Une fois φ choisi, il est aisé de traduire en termes de ξ les grandeurs intéressantes, habituellement attachées à la particule et exprimées à l'aide de *x, y, z.*

***

x, y, z, et T sont données en effet par les relations [1] et [2], que nous pouvons écrire sous forme condensée en utilisant la notation courante en mécanique quantique :

$$[3] \qquad \begin{cases} x^k = \xi^+ \sigma^k \xi \\ T = \varphi(\xi^+, \xi) \end{cases}$$

en posant $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ et σ^k étant les matrices de Pauli :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ξ désigne une colonne d'éléments ξ_1, ξ_2 et ξ^+ une ligne d'éléments $\xi_{\dot 1}$, $\xi_{\dot 2}$.

(2) Nous avons donné quelques indications sur les avantages qui en résultent dans *Cambridge Conference on Fundamental Particles,* 1946, *C. R. Acad. Sc.,* 233, 1946, p. 270, *Jour. Physique,* loc. cit. Appendice.

Avec ces notations l'expression des opérateurs $\partial/\partial x^k = \partial_k$ s'obtient de la manière suivante. Soit f la fonction d'onde. En désignant par $\partial f/\partial \xi$ la ligne d'éléments $\partial f/\partial \xi_1$, $\partial f/\partial \xi_2$ et par $\partial f/\partial \xi^+$ la colonne d'éléments conjugués $\partial f/\partial \xi_1^*$, $\partial f/\partial \xi_2^*$ on peut calculer $\partial f/\partial \xi$ et $\partial f/\partial \xi^+$ en appliquant le théorème des fonctions de fonctions. On trouve, S étant une matrice quelconque de rang 2, les relations fondamentales :

$$[4.1] \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} S\xi + \xi^+ S \frac{\partial f}{\partial \xi^+} = \frac{1}{2}\, \xi^+ (\sigma^k S + S\,\sigma^k)\, \xi.\, \partial_k f + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} S\xi + \xi^+ S \frac{\partial \varphi}{\delta \xi^+}\right). \frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}}$$

$$[4.2] \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} S\xi^+ - \xi^+ S \frac{\partial f}{\partial \xi^+} = \frac{1}{2}\, \xi^+ (\sigma^k S - S\,\sigma^k)\, \xi.\, \partial^k f + \left(\frac{\partial \varphi}{\delta \xi} S\xi - \xi^+ S \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^+}\right). \frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}}$$

En y faisant $S = 1$, on trouve la valeur de

$$[5] \quad \frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\xi - \xi^+ \dfrac{\partial f}{\partial \xi^+}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}\xi - \xi^+ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi^+}}$$

La condition $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}\xi - \xi^+ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi^+} \neq 1$ est précisément la condition pour que l'inversion puisse avoir lieu et c'est la seule condition que φ doive satisfaire en dehors de φ = réelle.

En posant

$$[6] \quad \beta^k = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}\sigma^k \xi + \xi^+ \sigma^k \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi^+}}{i\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}\xi - \xi^+ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi^+}\right)}$$

et en prenant dans [4.1] et [4.2], S égal à chacun des σ^k, on obtient respectivement, le « moment » (quantité de mouvement)

$$[7] \quad \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{1}{\xi_1 \xi_{\dot 1} + \xi_2 \xi_{\dot 2}} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} (\sigma^k + i\,\beta^k) \xi + \xi^+ (\sigma^k - i\,\beta^k) \frac{\partial f}{\partial \xi^+} \right]$$

et le « moment angulaire » m_k (p. ex. $m_3 f = x^1 \partial_2 f - x^2 \partial_1 f$) :

$$[8] \quad 2\,i\,m_k f = \frac{\partial f}{\partial \xi} \sigma^k \xi - \xi^+ \sigma^k \frac{\partial f}{\partial \xi^+} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \sigma^k \xi - \xi^+ \sigma^k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^+}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi - \xi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^+}} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \xi - \xi^+ \frac{\partial f}{\partial \xi^+} \right).$$

φ est arbitraire, pourvu que $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi - \xi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^+} \neq 0$. En choisissant convenablement cette fonction une fois pour toutes, on fixe la correspondance et les formules peuvent être simplifiées. Si l'on prend par exemple

$$\varphi = \frac{1}{4} \log \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_{\dot 1} \xi_{\dot 2}} \text{ ou } \varphi = \xi_{\dot 1} \xi_{\dot 2} - \xi_1 \xi_2$$

on obtient pour la troisième composante du moment angulaire

$$i\,m_3 f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \sigma^3 \xi - \xi^+ \sigma^3 \frac{\partial f}{\partial \xi^+} \right) \text{ soit}$$

$$i\,m_3 f = i(x^1 \partial_2 - x^2 \partial_1) f = \frac{1}{2} \left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} - \xi_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_2} - \xi_{\dot 1} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\dot 1}} + \xi_{\dot 2} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\dot 2}} \right)$$

Notons en passant que m_3, défini en partant des ξ , peut avoir des valeurs propres non seulement entières, mais aussi demi-entières. Par exemple la fonction propre régulière $f = a\xi_1 + b\xi_{\dot 2}$ correspond à la valeur propre 1/2, alors que $f = c\,\xi_2 + d\,\xi_{\dot 1}$ correspond à — 1/2. L'emploi des ξ semble la manière la plus naturelle d'écrire les fonctions propres de certains opérateurs liés au spin et possédant des valeurs propres demi-entières.

⁂

En résumé, notre définition d'une particule au moyen des ξ traduit mathématiquement une hypothèse physique qu'on peut formuler de la façon plus symétrique suivante : *une particule fondamentale est déterminée non seulement par ses trois coordonnées* x, y, z, *mais aussi par un tenseur* (*ou plutôt par deux vecteurs*) *à six composantes* (formées à partir des ξ_1^2, $\xi_1 \xi_2$, ξ_2^2, $\xi_{\dot 1}^2$, $\xi_{\dot 1} \xi_{\dot 2}$, $\xi_{\dot 2}^2$), liées entre elles et aux *x, y, z,* par certaines identités et relations; ces relations font qu'en définitive la particule dépend des *x, y, z,* et d'une seule autre variable indépendante T.

Toutes les questions de ce genre, ainsi que celles qui ont trait à l'arbitraire de φ et à l'interprétation de T, dépendent cependant du problème de la signification physique attribuée aux divers opérateurs de la théorie, problème qui sera abordé dans un autre recueil.

TOME 15. N° 2. FÉVRIER 1954.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

MÉCANIQUE DU POINT

Par A. PROCA,
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — La mécanique classique actuelle ne tire pas avantage de toutes les ressources mises à sa disposition par le principe de la relativité restreinte. L'auteur propose donc une nouvelle forme de mécanique qui se réduit à la précédente dans un cas particulier et dont le pouvoir de description semble plus étendu.

L'hypothèse de base consiste à admettre que les équations fondamentales font intervenir non pas les x^k, mais de nouvelles variables ξ, de caractère spinoriel, à partir desquelles on peut calculer les grandeurs d'univers. Autrement dit, le mouvement d'un point matériel est déterminé non pas dans l'espace-temps, mais dans certains espaces spinoriels sous-jacents, liés à l'Univers par l'intermédiaire de l'espace des vitesses.

On écrit les équations du mouvement et leurs intégrales premières simples. Le point matériel ainsi défini possède un spin. Son mouvement ne suit pas en général la loi d'inertie; il est constitué par la superposition d'un déplacement à vitesse constante et d'un « tremblement de Schrödinger ». Ce dernier peut être absent et dans ce cas particulier le point se meut à vitesse constante comme en Mécanique classique. On étudie ensuite le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique et l'on retrouve l'expression de la force de Lorentz ainsi que l'effet d'un moment électromagnétique sous la même forme qu'en électrodynamique classique.

1. Les nouveaux résultats expérimentaux concernant les diverses particules fondamentales, ainsi que les graves difficultés que rencontre la théorie dans sa forme actuelle, rendent indispensable une révision complète de celle-ci.

Les nouvelles exigences sont très variées et il semble difficile à l'heure actuelle d'établir un formalisme cohérent qui puisse résoudre à la fois, par exemple, le problème de la self-énergie et celui de la quantification de la masse. Pour un certain temps encore, nous serons obligés de chercher des solutions partielles, résolvant tel ou tel problème particulier, avant d'aboutir à une synthèse générale, complètement satisfaisante. Or, il est clair que nous arriverons à cette synthèse d'autant plus facilement que nos instruments d'investigation seront plus parfaits. Il ne semble donc pas dénué d'intérêt d'examiner avant toute chose ces instruments, — en d'autres termes la Mécanique du point matériel, — pour voir s'ils ne peuvent être améliorés, et cela d'une façon tout à fait générale, sans référence à une difficulté ou un problème particuliers.

2. Par « Mécanique » nous devons naturellement entendre la mécanique quantique. Celle-ci procède cependant de la mécanique classique et il est évident que les imperfections de cette dernière se répercuteront sur la mécanique quantique elle-même. Le programme de travail correct consisterait donc à soumettre la mécanique classique à un examen critique, comme indiqué plus haut, à essayer de l'améliorer si nécessaire et à passer ensuite à la mécanique quantique par le processus de quantification usuel. C'est dans cette voie que nous tenterons de nous engager.

3. Pour analyser la situation actuelle, remarquons que, lorsqu'on néglige les effets de gravitation et qu'on tient compte de l'inertie au moyen d'un coefficient de masse, la mécanique classique des particules fondamentales est dominée entièrement par le principe de la relativité restreinte. En d'autres termes, elle doit satisfaire aux exigences de cette relativité.

Or, certaines de ces exigences sont de telle nature que l'on a recherché des raisons pour ne pas s'y plier, ce qui équivaut au fond à un rejet partiel du principe de relativité. Nous sommes ainsi placés devant l'alternative suivante : ou bien admettre toutes les conséquences de ce principe ou bien le rejeter. Cette dernière attitude étant insoutenable dans l'état actuel de la science, nous sommes tenus jusqu'à nouvel ordre à accepter *toutes* les conséquences qui découlent de l'application du principe de relativité.

L'exemple le plus frappant de cet état de choses est l'existence, requise par la relativité, de caractéristiques qui se traduisent par des « énergies » ou « masses » négatives. En théorie classique la masse au repos d'un corpuscule de moment p_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) peut être soit $m_0 = +\sqrt{-\sum_1^4 p_\mu^2}$ soit $-m_0$. Il est exact que quelques fois le double signe n'est pas gênant et que nous pouvons passer sous silence les cas où $m_0 < 0$. Il n'en est pas moins vrai que cette règle n'est pas générale. Bien au contraire, le double signe de m_0 est lié essentiellement au caractère quadratique de l'invariant de la relativité. Tant que nous admettrons la validité de la relativité restreinte, nous devrons donc compter avec la possibilité d'un signe négatif, quitte à l'interpréter physiquement, si possible, d'une manière satisfaisante.

4. Une autre remarque relative aux améliorations souhaitables de la mécanique concerne la possibilité de décrire classiquement une particule possédant un spin différent de zéro.

On a souvent écrit que le spin est un effet quantique; le seul argument à l'appui de cette thèse est le fait qu'on n'a pas encore réussi à décrire une particule à spin en mécanique classique. Diverses tentatives ont été faites en ce sens ([1]), mais qui n'ont pas toujours abouti à des résultats complets ou indiscutables.

En mécanique quantique le spin apparaît dès qu'on tient compte de la relativité. Il semble assez probable qu'il en soit également ainsi en mécanique classique et que l'origine du spin doive être cherchée plutôt dans les rotations fondamentales de la relativité que dans les discontinuités de la quantification. Quoi qu'il en soit, la description du spin nécessite l'introduction de nouvelles variables dont le choix n'est pas aisé; heureusement, une réponse raisonnable à ce problème peut être fournie par l'observation du paragraphe suivant.

([1]) *Voir* en particulier : M. MATHISSON, *Acta Phys.-Polonica*, 1937, **6**, 163 et T. W. WEYSSENHOFF, *ibid.*, 1947, **9**, 1. *Voir* également L. DE BROGLIE, *La théorie des particules de spin* $\frac{1}{2}$, Gauthier-Villars, Paris, 1952 où se trouve un exposé de la théorie de WEYSSENHOFF. *Voir* la critique de cette dernière par C. MØLLER, *Comm. Dublin Institute*, A, n° 5 et *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1949, **11**, 251. Enfin citons M. H. L. PRYCE, *Proc. Roy. Soc.*, 1948, A **195**, 62; HÖNL, *Naturwiss*, 1938, **26**, 408; HÖNL et PAPAPETROU, *Z. Physik*, 1939, **112**, 512 et 1939, **114**, 478; PAPAPETROU, *Proc. Roy. Soc.*, 1951, **209**, 248 et 260.

5. La condition de covariance par rapport aux transformations de Lorentz a permis de caractériser les grandeurs susceptibles de décrire les phénomènes physiques (scalaires, vecteurs, etc.) et même d'établir en quelque sorte une hiérarchie, basée sur leur complexité croissante. Parmi ces grandeurs figurent non seulement les tenseurs, mais aussi les spineurs. On peut même dire que, dans la hiérarchie ci-dessus, les spineurs de rang 1 sont « plus simples » que le tenseur le plus élémentaire, à savoir le vecteur; en effet on peut former un vecteur à partir de spineurs par des opérations rationnelles, alors que l'inverse n'est pas vrai.

Or, pour des raisons évidentes aucune théorie classique ne fait appel aux spineurs ([2]). Il est vrai qu'aucune grandeur physique *mesurable* ne peut être représentée par un spineur en raison du caractère bivalent de ce dernier, mais cette éventualité n'est pas la seule possible. Tout en supposant que les grandeurs physiques mesurables dans l'espace-temps sont exclusivement des tenseurs, il est bien difficile de ne pas admettre que l'introduction des spineurs dans la théorie présente des avantages marqués, en raison des possibilités qu'elle offre d'utiliser toutes les ressources du groupe de Lorentz. Les paragraphes suivants sont destinés à montrer le parti qu'on peut tirer de cette supposition.

6. **Hypothèse de base.** — Le nombre minimum de spineurs compatible avec l'invariance par rapport au groupe de Lorentz, que nous postulons, est deux. Désignons par ξ l'ensemble de ces deux spineurs, groupés comme dans le ψ de la théorie de Dirac et posons comme d'habitude $\xi^+ = i\xi^*\gamma^4 =$ adjoint de ξ.

Nos hypothèses fondamentales s'énoncent alors de la façon suivante :

I. *Tout phénomène physique et en particulier le mouvement d'un point est décrit au moyen des spineurs* ξ *et* ξ^+.

Les résultats expérimentaux se référant à des mesures dans l'espace-temps, il est indispensable de compléter I, en indiquant de quelle façon cet espace-temps est relié aux espaces spinoriels ξ et ξ^+. A cet effet nous allons admettre que :

II. *Si* τ *est un paramètre invariant en fonction duquel on définit le mouvement et* γ^ρ *les matrices* 4×4 *tels que* $\gamma^r\gamma^s + \gamma^s\gamma^r = 2\delta^{rs}$, *on posera*

$$\boxed{\frac{dx^\rho}{d\tau} = \xi^+\gamma^\rho\xi} \qquad (\rho = 1, 2, 3, 4).$$

([2]) *Voir* toutefois la *théorie du gyroscope*, de F. Klein, qui semble être le premier à avoir utilisé des grandeurs spinorielles dans un problème de Mécanique classique ainsi que l'a rappelé récemment M. Bopp. Chez cet auteur ainsi que chez Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*), que le premier cite d'ailleurs, les grandeurs spinorielles s'introduisent comme des variables auxiliaires dans l'étude des rotations; les équations fondamentales n'en sont pas modifiées.

Ce choix est arbitraire, mais naturel. Le second membre est le seul vecteur réel du genre temps formé bilinéairement avec ξ et ξ^+ qu'on puisse identifier à un vecteur d'univers caractérisant le mouvement.

D'après I donc, les équations de base de la théorie relient les ξ, ξ^+ et leurs dérivées : les phénomènes et en particulier le mouvement d'un point, sont déterminés non plus dans l'espace-temps x^ρ mais dans les espaces spinoriels sous-jacents ξ, ξ^+ liés à la vitesse. Nous pouvons considérer ces espaces comme les éléments fondamentaux dans la description des phénomènes. Corrélativement, on peut dire que les transformations fondamentales ne sont pas celles qui concernent les vecteurs x^ρ mais celles qui définissent les spineurs fondamentaux, dont résultent les transformations de Lorentz.

Le lien entre les espaces spinoriels et l'espace-temps ordinaire x^ρ est donné par II. Le passage de l'un à l'autre peut se définir en faisant correspondre une courbe de ξ, ξ^+, donnée sous forme paramétrique $\xi_r = f_r(\tau)$ à une courbe de l'univers définie paramétriquement par les équations différentielles $dx^\rho = \xi^+(\tau)\,\gamma^\rho\xi(\tau)\,d\tau$. La donnée des ξ et ξ^+ ne permet pas de calculer les coordonnées elles-mêmes mais seulement leurs dérivées. Les coordonnées restent indépendantes de ξ.

7. **Notations.** — ξ est une matrice à une colonne, d'éléments complexes ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ayant la même variance que le ψ de la théorie de l'électron de Dirac. En fonction de la matrice transposée et conjuguée, $\tilde{\xi}^*$, la matrice adjointe ξ^+ s'écrit

$$\xi^+ = i\tilde{\xi}^*\gamma^4. \tag{1}$$

γ^ρ ($\rho = 1, 2, 3, 4$) sont les matrices 4×4 de von Neumann (tel que l'invariant quadratique soit $\xi^+\xi$) et $\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$. Nous adopterons les notations suivantes (qui sont celles de Pauli) pour les 16 covariants quadratiques formés à partir des produits de γ^ρ :

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Invariant} \ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_1 = -i\xi^+\xi, \\
\text{Vecteur d'univers} \ldots\ldots & u^\rho = \xi^+\gamma^\rho\xi, \\
\text{Tenseur antisymétrique.} & m_{\rho\sigma} = i\xi^+ \frac{i}{2}(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)\xi, \\
\text{Pseudo-vecteur} \ldots\ldots & w^\rho = i\xi^+ i\gamma^5\gamma^\rho\xi, \\
\text{Pseudo-invariant} \ldots\ldots & \Omega_2 = \xi^+\gamma^5\xi.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Ces 16 termes ne sont pas indépendants, mais liés par neuf relations quadratiques bien connues ([3]). On a, par exemple :

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma(u^\rho)^2 = -\Sigma(w^\rho)^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2), \\
\frac{1}{2}\Sigma(m_{\rho\sigma})^2 = \Omega_1^2 - \Omega_2^2, \\
u^\rho m_{\rho\sigma} + \Omega_2 w_\sigma = 0,
\end{array}\right\} \quad (3)$$

([3]) Citons seulement les travaux de O. Costa de Beauregard, *Thèse*, Paris, 1943; Kofink, *Annalen der Physik*, 1940, **38**, 421; G. Petiau, *J. Math. pures et appl.*, 1946, **25**, 335.

Dans l'espace-temps nous utilisons les coordonnées

$$x^k \quad \text{et} \quad x^4 = ict = ix^0,$$

c étant la vitesse de la lumière.

Nous appelons τ le paramètre réel par rapport auquel on considère la variation des diverses grandeurs. On a par hypothèse

$$\frac{dx^\rho}{d\tau} = \xi^+\gamma^\sigma\xi. \tag{II}$$

Appelons ds l'élément de « temps propre » de la particule dans l'espace-temps ordinaire, défini par

$$-c^2\,ds^2 = \sum_1^4 (dx^\rho)^2. \tag{4}$$

On aura alors en vertu de (II) et de (3) :

$$-c^2\frac{ds^2}{d\tau^2} = \Sigma(u^\rho)^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2),$$

soit

$$d\tau = \frac{\pm c}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}\,ds. \tag{5}$$

On en déduit l'expression de la *vitesse d'univers* de la particule

$$v^\rho = \frac{dx^\rho}{ds} = \frac{\pm c(\xi^+\gamma^\rho\xi)}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \quad \text{et} \quad \Sigma(v_\rho)^2 + c^2 = 0. \tag{6}$$

8. **Lagrangien en l'absence de champ.** — Considérons maintenant le mouvement libre d'un point donné.

Le lagrangien correspondant dépendra essentiellement des ξ. Pour des raisons de variance relativiste, sa forme la plus simple sera celle qui nous est déjà familière :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi^+}{d\tau}\xi - \xi^+\frac{d\xi}{d\tau}\right). \tag{7}$$

Si nous considérions l'analogie avec d'autres cas connus de la mécanique ondulatoire, nous serions tentés d'ajouter à ce premier terme un second, de la forme $ik^2\xi^+\xi$. Nous verrons cependant plus loin (§ 19) que ce terme est naturellement englobé dans les termes d'interaction avec un champ extérieur. Il n'y a donc pas lieu de l'introduire dans la description du comportement de la particule en l'absence de toute interaction.

Par contre, d'autres termes s'introduiront dans le lagrangien en raison des conditions dans lesquelles doit avoir lieu sa variation. En effet, d'après notre hypothèse fondamentale II, le covariant quadratique $\xi^+\gamma^\rho\xi$ doit toujours être égal à $\frac{dx^\rho}{d\tau} = \dot{x}^\rho$. Nous sommes en présence d'une variation avec conditions de liaison. Utilisons le procédé des multiplicateurs et considérons quatre fonctions inconnues λ_ρ de τ formant les composantes d'un vecteur.

Le lagrangien en l'absence de champ sera alors

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi^+}{d\tau}\xi - \xi^+\frac{d\xi}{d\tau}\right) + \lambda_\rho(\dot{x}^\rho - \xi^+\gamma^\rho\xi) \qquad (8)$$

et la variation portera sur ξ^+, ξ et x.

D'ailleurs, quelles que soient les raisons plus ou moins valables qui nous ont conduit à la forme (8), ce lagrangien constitue une nouvelle hypothèse à ajouter à celles du paragraphe 6.

9. **Équations du point matériel libre. Quantité de mouvement.** — Les équations fondamentales déduites de (8) sont

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda_\rho\gamma^\rho\xi, \qquad \frac{d\xi^+}{d\tau} = +\lambda_\rho\xi^+\gamma^\rho, \qquad (9)$$

$$\frac{dx^\rho}{d\tau} = \xi^+\gamma^\rho\xi, \qquad \frac{d\lambda_\rho}{d\tau} = 0. \qquad (10)$$

Les dernières (10), ne sont autres que

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\rho},$$

qui introduisent $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho}$ le moment conjugué de x, autrement dit la « *quantité de mouvement* ». Dans la nouvelle théorie *la quantité de mouvement a donc comme composantes les multiplicateurs de Lagrange* utilisés lors de la variation.

En l'absence de champ, d'après (10), cette *quantité de mouvement est un vecteur constant* ([4]) qui n'est pas nécessairement proportionnel à la vitesse d'univers comme en théorie classique.

Il en est ainsi chaque fois que la particule possède un spin et cette différence entre vitesse et quantité de mouvement peut devenir très intéressante du point de vue expérimental. Le comportement d'un tel corpuscule pourrait être différent de celui que nous connaissons dans des conditions convenablement choisies.

En admettant que le vecteur constant λ_ρ soit également du genre temps, $\lambda_\rho\lambda^\rho < 0$, nous pouvons définir l'invariant

$$\left.\begin{aligned} \lambda = m_0 c = \sqrt{-\lambda_\rho\lambda^\rho}, \\ \lambda^2 + \lambda_\rho\lambda^\rho = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

m_0 représente la *masse au repos* de la particule qui apparaît ici comme une constante d'intégration.

10. **Grandeurs d'espace-temps pour le mouvement libre. Vitesse.** — A étant une matrice 4×4 quelconque, on déduit des équations (9) la relation générale suivante où $[A, B] = AB - BA$:

$$\frac{d}{d\tau}(\xi^+A\xi) = \lambda_\rho\xi^+[\gamma^\rho, A]\xi \qquad (12)$$

qui permet une série de conclusions intéressantes :

En posant par exemple $A = 1$, on a une intégrale première

$$\frac{d\Omega_1}{d\tau} = 0. \qquad (13)$$

Avec $A = \gamma^5$ et $\gamma^5\gamma^\rho$, on trouve

$$\frac{d\Omega_2}{d\tau} = 2\lambda_\rho w^\rho \qquad (14)$$

et

$$\frac{dw^\rho}{d\tau} = 2\lambda^\rho\Omega_2, \qquad (15)$$

lesquelles entraînent

$$\frac{d^2\Omega_2}{d\tau^2} + 4\lambda^2\Omega_2 = 0. \qquad (16)$$

On a également une autre intégrale première

$$(\lambda_\rho\lambda_\sigma + \lambda^2\delta_{\rho\sigma})w^\rho = \text{const.} \qquad (17)$$

et en conséquence aussi

$$\frac{d^2 w_\sigma}{d\tau^2} + 4\lambda^2 w_\sigma = \text{const.} \qquad (18)$$

En posant $A = \gamma^\sigma$, on obtient la dérivée de la vitesse, donc la *loi du mouvement proprement* dite. On a

$$\boxed{\frac{du^\sigma}{d\tau} = -2\lambda_\rho m^{\rho\sigma}.} \qquad (19)$$

On en déduit une autre intégrale première

$$\lambda u^\rho = \text{const.} \qquad (20)$$

En tenant compte de (23) que nous établirons plus loin, nous pouvons finalement écrire

$$\boxed{\frac{d^2 u^\sigma}{d\tau^2} + 4\lambda^2 u^\sigma = \text{const.} = -4\lambda^\sigma(\lambda_\rho u^\rho),} \qquad (21)$$

d'où l'on déduit que l'expression générale de la vitesse sera

$$u^\sigma = \frac{dx^\sigma}{d\tau} = A^\sigma e^{2i\lambda\tau} + B^\sigma e^{-2i\lambda\tau} + C^\sigma, \qquad (22)$$

avec

$$C^\sigma = -\frac{\lambda^\sigma}{\lambda^2}(\lambda_\rho u^\rho) = \text{const.}$$

On lit sur cette formule le comportement d'un point matériel en l'absence de champ. On y voit que dans le cas particulier où les conditions initiales sont telles que $A^\sigma = B^\sigma = 0$ *le point se déplace à vitesse constante comme en mécanique classique.* En général cependant, la vitesse oscille avec la fréquence $2\lambda = 2m_0c$ d'une manière assez compliquée, surtout pour la vitesse d'univers, laquelle contient également un autre terme oscillant Ω_2. Le

([4]) Noter qu'il s'agit ici de constance par rapport au paramètre τ. Dans la plupart des cas cela équivaut à une « constance d'univers » $\frac{d\lambda_\rho}{ds} = 0$, à cause de la proportionnalité (5) entre $d\tau$ et le temps propre ds.

détail de ces conditions et l'expression des coefficients sont donnés au paragraphe 12.

11. **Spin**. — En posant

$$A = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu),$$

on trouve

$$\lambda_\mu u_\nu - \lambda_\nu u_\mu + \frac{1}{2}\frac{dm_{\mu\nu}}{d\tau} = 0 \qquad (23)$$

où

$$\lambda_\mu \, dx_\nu - \lambda_\nu \, dx_\mu + \frac{1}{2} dm_{\mu\nu} = 0 \qquad (24)$$

ou encore

$$x_\mu \lambda_\nu - x_\nu \lambda_\mu - \frac{1}{2} m_{\mu\nu} = \text{const.} \qquad (25)$$

Nous pouvons donc affirmer que la particule libre possède un *spin*, donné par $\frac{1}{2} m_{\mu\nu}$, *ou plus généralement par*

$$\text{Spin} = \frac{1}{2} m_{\mu\nu} + \text{const.}, \qquad (26)$$

l'équation de définition (24) ne le fixant en réalité qu'à une constante arbitraire près.

Compte tenu de (23), on trouve l'intégrale première

$$\lambda_\mu m_{\nu\rho} + \lambda_\nu m_{\rho\mu} + \lambda_\rho m_{\mu\nu} = \text{const.} \qquad (27)$$

En dérivant (23), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m_{\mu\nu}}{d\tau^2} &= 4\lambda^\rho(\lambda_\mu m_{\rho\nu} - \lambda_\nu m_{\rho\mu}) \\ &= -4\lambda^\rho(\text{const.} - \lambda_\rho m_{\mu\nu}) \\ &= \text{const.} - 4\lambda^2 m_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d^2 m_{\mu\nu}}{d\tau^2} + 4\lambda^2 m_{\mu\nu} = \text{const.} = -4\lambda^\rho(\Sigma \lambda_\mu m_{\nu\rho}). \qquad (28)$$

La définition du spin dépend du choix de la constante arbitraire. On peut la prendre nulle, auquel cas le spin est égal à $\frac{1}{2} m_{\mu\nu}$. Avec cette hypothèse une particule classique (qui sera étudiée plus loin au paragraphe 14) aura un spin dont toutes les composantes seront *constantes* et non pas nécessairement nulles dans la mesure où l'on ne confond pas ces constantes avec celles du second membre. Remarquons que ces deux possibilités sont équivalentes : d'après (23) si $m_{\mu\nu} = \text{const.}$ on a λ_μ proportionnel à la vitesse et la particule est bien un point matériel classique.

Si l'on tient absolument à définir un « spin » dont les composantes soient nulles pour le cas particulier d'un corpuscule classique, il faudra choisir la constante dans (26) de façon que la solution de (28) soit purement oscillante. Dans ce cas le « spin » peut s'écrire sous une forme simple, à savoir :

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} m_{\mu\nu} + \text{const.} \\ &= \frac{\lambda_\rho}{2\lambda^2}(\lambda_\mu m_{\nu\rho} - \lambda_\nu m_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\lambda^2}\frac{d}{d\tau}(\lambda_\mu u_\nu - \lambda_\nu u_\mu) \\ &= \frac{1}{4\lambda^2}\frac{d^2}{d\tau^2}(\lambda_\mu x_\nu - \lambda_\nu x_\mu). \end{aligned}$$

On vérifie aisément à l'aide de (21) que (23) est satisfaite par cette valeur de $S_{\mu\nu}$; d'autre part dans le cas classique $\lambda_\mu u_\nu - \lambda_\nu u_\mu = 0$, donc immédiatement $S_{\mu\nu} = 0$ (5).

12. **Solution générale.** « **Potentiels** ». — Des équations (9) et (10) on déduit

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \lambda^2\xi = 0, \qquad \frac{d^2\xi^+}{d\tau^2} + \lambda^2\xi^+ = 0, \qquad \frac{d\lambda_\rho}{dt} = 0.$$

La solution générale s'écrit donc

$$\xi = a\, e^{i\lambda\tau} + b\, e^{-i\lambda\tau}, \quad \xi^+ = b^+ e^{i\lambda\tau} + a^+ e^{-i\lambda\tau}, \qquad (29)$$

où $\lambda_\rho \lambda^\rho + \lambda^2 = 0$ et où λ_ρ, a, b sont des constantes satisfaisant aux équations

$$\left.\begin{aligned} (i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho)a &= 0, & (-i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho)b &= 0, \\ a^+(i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho) &= 0, & b^+(-i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

On peut écrire la solution de ces équations (30) sous une forme commode, en remarquant que deux des composantes de a et deux de b, donc quatre en tout, sont arbitraires dans la solution. Considérons alors quatre constantes complexes arbitraires φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 groupées en une colonne φ et que nous appellerons « potentiel » (6). La solution des équations (30) s'écrit alors simplement :

$$\left.\begin{aligned} a &= (-i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho)\varphi, & b &= (i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho)\varphi, \\ a^+ &= \varphi^+(-i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho), & b^+ &= \varphi^+(i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho). \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

La forme générale des ξ en fonction de τ est donnée par (29) avec (31) ou encore par

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 2(\lambda \sin\lambda\tau + \lambda_\rho\gamma^\rho \cos\lambda\tau)\varphi, \\ \xi^+ &= \varphi^+ . 2(-\lambda\sin\lambda\tau + \lambda_\rho\gamma^\rho\cos\lambda\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

On voit apparaître dans la solution générale les deux signes de λ, comme l'exige la relativité.

Le choix des constantes arbitraires a et b, ou λ_ρ, correspond aux diverses « conditions initiales » envisagées. Notons que ces « conditions initiales » sont plus nombreuses qu'en théorie classique et concernent également certaines caractéristiques de la particule elle-même et non pas seulement des éléments du mouvement. En les choisissant convenablement on obtiendra des cas particuliers inté-

(5) Ce choix peut être guidé par des considérations d'interaction ou de quantification, *voir* par exemple le paragraphe 17. De même, c'est l'expression $\frac{1}{2} m_{\mu\nu}$ (constante nulle) qui possède les valeurs propres correctes, lorsqu'on quantifie au moyen des relations de commutation habituelles.

(6) Ce procédé a été appliqué par M. B. Kwal à la théorie de l'électron de Dirac.

ressants, tel par exemple celui où ξ ne contient que la masse d'un seul signe, examiné au paragraphe suivant.

13. **Cas harmonique. Particule classique.** — Ce cas, que nous appellerons le «cas harmonique», est réalisé lorsque par exemple, $a = 0$ [valeur qui satisfait bien aux conditions (30)]. On a alors simplement

$$\xi = b\,e^{-i\lambda\tau}, \qquad \xi^{+} = b^{+}\,e^{i\lambda\tau}. \tag{33}$$

Examinons comment se présente alors le mouvement dans l'espace-temps.

Remarquons d'abord que toutes les grandeurs réelles de la forme $\xi^{+}A\xi$ dans cet espace sont des constantes.

$\Omega_1 = -ib^{+}b$ est une constante dans tous les cas, mais le second groupe d'équations (31) donne aussi

$$\Omega_2 = b^{+}\gamma^{5}b = 0. \tag{34}$$

Il en résulte, d'après (6), que la *vitesse d'univers de la particule est constante*

$$v^{\sigma} = \frac{c(b^{+}\gamma^{\sigma}b)}{\Omega_1} = \frac{ic(b^{+}\gamma^{\rho}b)}{b^{+}b} \tag{35}$$

et donc que *la particule est assimilable à un point matériel classique.*

En multipliant les deux équations (30) par γ^{σ}, b et b^{+} et en ajoutant, on obtient

$$-i\lambda\, b^{+}\gamma^{\sigma}b + \lambda^{\sigma}b^{+}b = 0,$$

d'où en comparant avec (35) et (11)

$$\boxed{\lambda^{\sigma} = m_0 v^{\sigma}.} \tag{36}$$

Dans ce cas donc, la quantité de mouvement est proportionnelle à la vitesse, ce qui justifie encore une fois l'assimilation de m_0 à la masse au repos et de λ_{σ} à la quantité de mouvement.

Les composantes de $m_{\mu\nu}$ sont constantes celles de $S_{\mu\nu}$, nulles en vertu de (36).

Le cas harmonique décrit donc bien une particule classique. Inversement, si le spin est constant ou nul et que simultanément on ait $\Omega_2 = 0$, on aura affaire à une particule classique. En effet, on a alors $m_{\mu\nu} = \text{const.}$ donc, d'après (23), λ_{μ} proportionnel à u_{μ}. Comme en général [*voir* (3)]

$$u^{\rho}m_{\rho\nu} = -\Omega_2 w_{\nu} = 0,$$

on en déduit $\lambda^{\rho}m_{\rho\nu} = 0$, donc d'après (19), $\dfrac{du_{\nu}}{d\tau} = 0$; la particule se meut donc à vitesse constante.

Le cas de la particule classique, c'est-à-dire celui pour lequel le mouvement a lieu conformément au *principe d'inertie* n'est donc qu'un cas particulier du mouvement libre. Dans le cas général, ce principe n'est plus valable sous sa forme classique, mais il est aisé de voir par quoi il est remplacé.

Remarquons enfin que le spin apparaîtra lorsqu'on passe du cas harmonique au cas général, c'est-à-dire *lorsqu'on introduira dans l'expression de ξ la masse $-m_0$ en même temps que $+m_0$.* C'est là le mécanisme par lequel la relativité introduit le spin, et ce mécanisme n'a rien à voir avec l'analogie d'un corps tournant : l'essentiel n'est pas la rotation d'une masse positive, mais plutôt l'oscillation entre $+m_0$ et $-m_0$, véritable contrepartie classique du « tremblement de Schrödinger ». C'est là aussi la raison pour laquelle l'apparition du spin n'entraîne pas une augmentation de l'énergie totale par apport d'une énergie de rotation, ce qui se produirait inévitablement dans le cas d'un corps en rotation.

Le mécanisme ci-dessus est exactement celui par lequel le spin s'introduit en mécanique ondulatoire de l'électron où il a eu le succès que l'on sait (7).

14. **Particules classiques au repos.** — La manière dont les spineurs interviennent dans la théorie apparaît plus clairement lorsqu'on considère le cas d'une particule classique au repos. Dans ce cas puisque $\lambda_{\rho} = m_0 v_{\rho}$, la condition $v_k = 0$ se traduit par $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ et entraîne, soit $i\lambda = \lambda_4$, soit $i\lambda = -\lambda_4$. Pour chacun de ces deux cas, les grandeurs d'univers de la particule ne dépendent plus (au repos) que d'un seul spineur (φ_1, φ_2) ou (φ_3, φ_4). Par exemple, pour $i\lambda = \lambda_4$, on a

$$\left.\begin{aligned}
i\Omega_1 = u_4 &= -4\lambda^2 i(\varphi_1^{*}\varphi_1 + \varphi_2^{*}\varphi_2);\\
m_{23} = -w_1 &= -4\lambda^2\,(\varphi_1^{*}\varphi_2 + \varphi_2^{*}\varphi_1),\\
m_{31} = -w_2 &= +4\lambda^2 i(\varphi_1^{*}\varphi_2 - \varphi_2^{*}\varphi_1),\\
m_{12} = -w_3 &= -4\lambda^2\,(\varphi_1^{*}\varphi_1 - \varphi_2^{*}\varphi_2);\\
m_{14} = m_{24} &= m_{34} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Le « spin » m_{pq} se réduit dans ce cas à ses composantes spatiales, lesquelles ont d'ailleurs la même direction que w_r.

5. **Interactions. Particules dans un champ.** — Les lois du mouvement dans un cas d'interaction donné se déduiront du lagrangien (8) augmenté d'un terme d'interaction L_{int}, fonction des ξ, ξ^{+} et x^k. Pour que la théorie soit plausible il faut qu'on puisse choisir ce dernier terme de façon à retrouver les formules classiques pour des cas connus, par exemple pour le cas du mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique.

Considérons la manière dont le terme d'interaction L_{int} dépend des ξ et ξ^{+}. L'hypothèse la plus

(7) Hönl et Papapetrou (*loc. cit.*) ont proposé un modèle de ce type, mais l'ont traité comme un mécanisme dans l'espace-temps soumis aux lois de la mécanique classique. Dans la présente théorie, la « masse négative » apparaît comme apparaissent les « fréquences négatives » dans la théorie du rayonnement.

simple consiste évidemment à admettre une dépendance bilinéaire. On écrira donc

$$L_{\text{int}} = \xi^+ O \xi, \tag{38}$$

où O est un opérateur invariant agissant sur les ξ, fonction des x^k, indépendant des ξ, ξ^+ et tel que L_{int} = réel. Sa forme la plus générale sera donc

$$O = \sum_{\alpha=1}^{16} A_\alpha \gamma \ldots = A_0 + A_\rho \gamma^\rho + \frac{i}{2} A_{\rho\sigma}(\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho) + \ldots \tag{39}$$

où $\gamma\ldots$ sont les 16 produits indépendants des γ^ρ, les A_0, A_1, ... 16 fonctions ordinaires des x^ρ, présentant les variances et les conditions de réalité requises pour rendre $\xi^+ O \xi$ invariant et réel.

Ce genre d'interaction est donc décrit par 16 fonctions ordinaires au plus. Les équations du mouvement seront dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi^+}{d\tau} = \lambda_\rho \xi^+ \gamma^\rho - \xi^+ O, \qquad \frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda_\rho \gamma^\rho \xi + O\xi, \\ &\frac{dx^\rho}{d\tau} = \xi^+ \gamma^\rho \xi, \qquad \frac{d\lambda_\rho}{d\tau} = \xi^+ \frac{\partial O}{\partial x_\rho} \xi. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Remarquons que $-i\xi^+\xi = \Omega_1$, reste toujours constante dans le cas général.

La variation de la *vitesse* sera donnée par

$$\frac{d}{d\tau}(\xi^+ \gamma^\sigma \xi) = \frac{du^\sigma}{d\tau} = -2\lambda_\rho m^{\rho\sigma} + \xi^+(\gamma^\sigma O - O\gamma^\sigma)\xi. \tag{41}$$

La *force d'univers* se déduira en dérivant par rapport à ds la quantité de mouvement donnée par la dernière équation (40).

16. **Champ électromagnétique.** — L'interaction d'une charge e avec un champ électromagnétique $h_{\rho\sigma} = \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\rho}$, de potentiel A_ρ, est du type précédent.

Définissons d'abord l'action du champ sur la particule en prenant

$$O = eA_\rho \gamma^\rho. \tag{42}$$

Les équations s'écriront

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi}{d\tau} = -(\lambda_\rho - eA_\rho)\gamma^\rho \xi, \qquad \frac{d\xi^+}{d\tau} = \xi^+(\lambda_\rho - eA_\rho)\gamma^\rho, \\ &\frac{d(\lambda_\rho - eA_\rho)}{d\tau} = eh_{\sigma\rho} u^\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Elles se déduisent de celles d'une particule libre en y remplaçant comme d'habitude les moments λ_ρ par $\lambda_\rho - eA_\rho$. La dernière équation donne

$$\begin{aligned} \frac{d(\lambda_\rho - eA_\rho)}{ds} &= eh_{\sigma\rho} \frac{dx^\sigma}{ds} = h_{\sigma\rho} ev^\sigma = h_{\rho\sigma} j^\sigma \\ &= \text{force de Lorentz}, \end{aligned} \tag{44}$$

en appelant $j^\sigma = ev^\sigma$ le courant. Remarquons que la particule étant, par hypothèse, un point géométrique sans dimensions, le courant sera uniquement un courant de convection ev^σ. Même si cette particule possède un moment électromagnétique $M_{\mu\nu}$, la contribution $\frac{\partial M_{\mu\nu}}{\partial x^r}$ de celui-ci au courant sera nulle en raison du fait que $M_{\mu\nu}$ n'est pas étalé dans l'espace.

17. **Moment électromagnétique.** — Or, admettons que la particule chargée ayant un spin possède de ce fait un moment électromagnétique qui lui est proportionnel. Cela n'est pas évident *a priori* puisque l'assimilation à un corps tournant n'est plus valable. L'interaction considérée au paragraphe précédent conduit à la force de Lorentz qui représente la totalité de l'action du champ sur la particule, mais n'introduit aucun couplage entre le champ et le moment électromagnétique, ce qui montre qu'elle est incomplète. De nouveaux termes ([8]) doivent apparaître dans les expressions de la force et le couple exercés sur la particule.

Nous admettons que le moment électromagnétique est proportionnel au spin de la particule et nous ferons l'hypothèse que l'on a

$$\mu_{\rho\sigma} = \frac{c\varkappa}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \times \text{spin} \qquad (\varkappa = \text{const.}). \tag{45}$$

Le facteur multiplicatif n'est constant que lorsque $\Omega_2 = 0$ qui entraîne $u^\rho m_{\rho\sigma} = 0$, donc seulement dans *le cas où le spin n'a pas de composantes de temps dans le système au repos*, dans lequel il se réduit donc à un vecteur tridimensionnel.

Supposons également qu'on prenne égale à zéro la constante additionnelle du spin, lequel serait donc simplement égal à $\frac{1}{2} m_{\rho\sigma}$. Définissons alors l'interaction au moyen d'un opérateur

$$O = eA_\rho \gamma^\sigma - \frac{\varkappa}{4}(\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho) h_{\rho\sigma}, \tag{46}$$

où A_ρ est le potentiel du champ, $h_{\rho\sigma}$ le champ correspondant et $\varkappa$ une constante convenable. On en déduit que la force de Lorentz du paragraphe précédent est augmentée du terme supplémentaire attendu. On a en effet

$$\boxed{\frac{d(\lambda_\rho - eA_\rho)}{ds} = h_{\sigma\rho} j^\sigma + \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta} \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial x^\rho}.} \tag{47}$$

18. **Couple.** — Les autres équations s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi^+}{d\tau} = \xi^+(\lambda_\rho - eA_\rho)\gamma^\rho + \frac{\varkappa}{4} h_{\rho\sigma} \xi^+(\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho), \\ &\frac{d\xi}{d\tau} = -(\lambda_\rho - eA_\rho)\gamma^\rho \xi - \frac{\varkappa}{4} h_{\rho\sigma}(\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho)\xi. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

([8]) Déjà considérés sous leur forme relativiste par divers auteurs.

4. Avec ces conditions, $N_1 = \xi_1^* \xi_1$, $N_2 = \xi_2^* \xi_2$, $N_3 = \xi_3 \xi_3^*$, $N_4 = \xi_4 \xi_4^*$ sont des opérateurs qui commutent entre eux et dont les valeurs propres sont tous les nombres entiers et zéro. La composante du spin suivant Oz :

$$M_z = \frac{1}{2}(N_1 - N_2 - N_3 + N_4)$$

aura donc comme valeurs propres : 0, 1/2, 1, 3/2, 2, ..., c'est-à-dire celles qu'on doit trouver. Les mêmes conclusions peuvent être obtenues en reliant les expressions (1) aux transformations infinitésimales de l'univers à quatre dimensions. D'une façon plus précise, si l'on pose

$$\begin{aligned} 2A_p &= (M_1 + N_1) + i(M_2 + N_2), & 2B_p &= (M_1 - N_1) + i(M_2 - N_2), \\ 2A_q &= (M_1 + N_1) - i(M_2 + N_2), & 2B_q &= (M_1 - N_1) - i(M_2 - N_2), \\ 2A_z &= M_3 + N_3, & 2B_z &= M_3 - N_3, \end{aligned}$$

on aura

$$[A_z, A_p] = A_p, \qquad [A_z, A_q] = -A_q, \qquad [A_p, A_q] = 2A_z.$$

et les mêmes relations pour les B_p, B_q, B_z lesquelles commutent d'ailleurs avec les A. Un raisonnement connu ([2]) permet alors de trouver les valeurs et les fonctions propres de M et N.

En ce qui concerne la charge, ses valeurs propres seront tous les nombres entiers positifs et négatifs 0, ± 1, ± 2, ... ce qui est parfaitement satisfaisant.

5. Les règles (3) ci-dessus soumettent les ξ, qui sont des spineurs, à des conditions de commutation proprement dite, c'est-à-dire du type $AB - BA$. Or, la théorie ordinaire de la deuxième quantification associe toujours les spineurs à des relations d'*anti*commutation, pour des raisons qui ont trait à la dépendance entre le spin et la statistique. Il faut rappeler cependant que le rôle des spineurs n'est pas le même dans les deux cas.

Admettons toutefois que nous quantifiions la théorie au moyen d'anticommutateurs, en posant

$$[\xi_r, \xi_s^*]_+ = \delta_{rs}, \qquad [\xi_r, \xi_s]_+ = [\xi_r^*, \xi_s^*]_+ = 0.$$

Dans ce cas, les opérateurs $N_r = \xi_r^* \xi_r$ ont les valeurs propres 0 et 1 et le spin dans une direction donnée $M_3 = (1/2)(N_1 - N_2 - N_3 + N_4)$ ne pourra être égal qu'à 0, $\pm(1/2)$ ou ± 1.

On pourrait en conclure que la théorie, telle qu'elle est présentée (c'est-à-dire dépendant seulement de *deux* spineurs) ne décrit que des particules de spin 0, 1/2 ou 1, autrement dit que *les seules particules fondamentales sont celles ayant un spin égal à* 0, 1/2 *ou* 1, *les autres étant des particules composées.*

([2]) *Cf.* par exemple, VAN DER WAERDEN, *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Springer, p. 84.

Dans ces mêmes conditions, les valeurs propres de

$$\Omega_1 = (N_1 + N_2 - N_3 - N_4).$$

sont égales à 0, ± 1 ou ± 2. Les particules fondamentales seraient donc ou neutres, ou portant une charge positive ou négative, ou enfin *doublement chargées*. Il est curieux de retrouver ainsi une possibilité que Pais avait été amené à prévoir à la suite de sa récente théorie (3) et qui est rattachée ici à des propriétés fondamentales de covariance.

Ces résultats ne sont pas confirmés par l'expérience et c'est elle qui en définitive devra guider notre choix entre les diverses possibilités exposées plus haut.

---

(3) *Progress. Theor. Physics*, **10**, 1953, p. 457. *Voir* aussi *Physica*, **19**, 1953, p. 869.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **238**, p. 774-776, séance du 15 février 1954.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
145659-54 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

A. PROCA
1955, Novembre
Il Nuovo Cimento
Serie X, Vol. 2, pag. 962-971

Particules de très grandes vitesses en mécanique spinorielle.

A. PROCA
Institut Henri Poincaré - Paris

(ricevuto il 4 Luglio 1955)

Resumé. — En prenant comme point de départ la mécanique spinorielle du point matériel, l'auteur étudie le cas où la vitesse tri-dimensionnelle de ce dernier est égale à celle de la lumière. Cette condition n'est naturellement réalisable que si la masse au repos est nulle. Dans ce cas on obtient la description de toute une classe de particules parmi lesquelles le photon, et pour lesquelles on écrit certaines de leurs caractéristiques importantes.

1. – Au moyen d'un simple passage à la limite, toute mécanique relativiste peut fournir la description des propriétés d'une particule qui se meut avec la vitesse de la lumière et qui, par conséquent, présente des caractéristiques assez proches de celles d'un photon. Il en est ainsi, par exemple, de la mécanique spinorielle des particules que nous avons développée ailleurs (1).

Notons qu'il ne suffit pas de faire tendre la vitesse d'une particule vers c, pour obtenir automatiquement la description d'un photon et cela pour plusieurs raisons, à savoir:

A priori, il peut y avoir *plusieurs* types de particules se mouvant avec la vitesse de la lumière mais différant par d'autres propriétés (liées, par exemple, à leur spin); et la comparaison est malaisée, parce que les informations que nous possédons sur le photon s'expriment en termes des grandeurs ondulatoires (ondes électromagnétiques) qui lui sont attachées, alors que la description mécanique envisagée fait appel à des notions corpusculaires. Toute conciliation de ces deux points de vue suppose nécessairement l'introduction de nouvelles hypothèses.

Toutefois, l'étude du cas limite est intéressante en elle-même et nous allons

(1) *Journ. Phys.*, 15, 65 (1954).

l'esquisser ci-après. Comme dans l'article cité, nous nous limiterons à la forme « classique » de la théorie, cela non seulement pour laisser ouverte toute question d'interprétation, mais aussi et surtout pour obtenir des résultats indépendants de la quantification et soumettre ainsi à un test notre hypothèse fondamentale.

Pour faciliter la lecture, nous résumerons dans le paragraphe suivant les résultats déjà acquis.

2. – Notations, équations fondamentales, etc.

L'hypothèse fondamentale consiste à admettre que le mouvement d'un point est essentiellement décrit par des variables spinorielles, au lieu de l'être par des vecteurs x^ϱ comme en mécanique relativiste classique.

Pour la commodité du formalisme, nous adoptons la technique employée dans la théorie de l'électron de Dirac. Nous désignerons par ξ une matrice à une colonne d'éléments ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 qui se transforme comme le Ψ de la théorie de Dirac et que nous appellerons spineur pour abréger. La matrice adjointe sera définie par:

$$\xi^+ = i\tilde{\xi}^*\gamma^4 ,$$

où $\tilde{\xi}^*$ est la matrice transposée et conjuguée de ξ. $\gamma_2, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sont des matrices 4×4 satisfaisant à

$$\gamma^\varrho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\varrho = 2\delta^{\varrho\sigma} .$$

En général, les résultats sont indépendants de la représentation des γ^ϱ; lorsque nous en aurons besoin, nous choisirons la représentation usuelle:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & i & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \gamma^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & i \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -i & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}.$$

Les spineurs ξ, ξ^+ définissent la particule et son mouvement. Les équations auxquelles ils obéissent (voir plus loin) sont établies à partir d'un Lagrangien choisi pour des raisons de simplicité et d'invariance. Il en est de même en théorie de Dirac et comme les éléments simples sont les mêmes dans les deux cas, il n'est pas étonnant que certains résultats des deux théories soient formellement identiques.

A partir des spineurs ξ, ξ^+ on peut calculer les grandeurs caractérisant la particule dans l'espace-temps. Le lien entre l'espace spinoriel des ξ et l'espace-temps est donné par la relation

$$\frac{dx^\varrho}{d\tau} = \xi^+\gamma^\varrho\xi \,, \tag{1}$$

où τ est le paramètre invariant par rapport auquel on définit le mouvement.

Soit λ_ϱ le vecteur quantité de mouvement, du genre temps; définissons l'invariant

$$\lambda = m_0 c = \sqrt{-\lambda_\varrho\lambda^\varrho} \,, \tag{2}$$

m_0 étant la « masse au repos » de la particule.

Avec $x^4 = ict = ix^0$ et $\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$, nous posons pour les grandeurs quadratiques réelles d'espace-temps:

$$\Omega_1 = -i\xi^+\xi \qquad \Omega_2 = \xi^+\gamma^5\xi$$

$$u^\varrho = \xi^+\gamma^\varrho\xi \qquad w^\varrho = i\xi^+ i\gamma^5\gamma^\varrho\xi$$

$$m^{\varrho\sigma} = i\xi^+\frac{i}{2}(\gamma^\varrho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\varrho)\xi \,.$$

Entre ces grandeurs existent un certain nombre d'identités algébriques parmi lesquelles nous aurons besoin des suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} w_q u_r - w_r u_q = -\,m_{qr}\Omega_2 - i m_{p4}\Omega_1 \\ -\,i w_p u_4 + i w_4 u_p = -\,m_{qr}\Omega_1 + i m_{p4}\Omega_2 \end{array}\right. \qquad (p\ q,\ r = 1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (m_{23})^2 + (m_{31})^2 + (m_{12})^2 & = -\,(u_4)^2 - (w_4)^2 - \Omega_2^2 \\ (m_{14})^2 + (m_{24})^2 + (m_{34})^2 & = +\,(u_4)^2 + (w_4)^2 + \Omega_1^2 \\ \sum (m_{23})(m_{14}) & = i\Omega_1\Omega_2 \end{array}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum (m_{23})u_1 & = +\,i\Omega_1 w_4 \\ \sum (m_{14})u_1 & = -\,\Omega_2 w_4 \,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Enfin, la relation entre le temps propre ds de la particule et dτ est donnée par (*loc. cit.* éq. (5))

$$-c^2\,\mathrm{d}s^2 = \sum (\mathrm{d}x^\varrho)^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,\mathrm{d}\tau^2 \,. \tag{6}$$

Cela étant, les équations fondamentales s'écrivent en l'absence de champ:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = -\lambda_\varrho\gamma^\varrho\xi && \frac{\mathrm{d}\xi^+}{\mathrm{d}\tau} = +\lambda_\varrho\xi^+\gamma^\varrho \,, \\ &\frac{\mathrm{d}x^\varrho}{\mathrm{d}\tau} = \xi^+\gamma^\varrho\xi && \frac{\mathrm{d}\lambda_\varrho}{\mathrm{d}\tau} = 0 \,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

a) *Pour* $\lambda \neq 0$, la solution générale est

$$\xi = a \exp[i\lambda\tau] + b \exp[-i\lambda\tau] \qquad \xi^+ = b^+ \exp[i\lambda\tau] + a^+ \exp[-i\lambda\tau] \tag{8}$$

où λ_ϱ, a, b sont des constantes satisfaisant à

$$\left\{\begin{aligned} &(i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho)a = 0 && (-i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho)b = 0 \\ &a^+(i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho) = 0 && b^+(-i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho) = 0 \\ &\qquad\qquad \lambda^2 + \lambda_\varrho\lambda^\varrho = 0 \,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Si l'on prend quatre constantes complexes *arbitraires* et qu'on les arrange en une colonne φ, on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} &a = (-i\lambda + \lambda_\varrho\lambda^\varrho)\varphi && b = (i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho)\varphi \\ &a^+ = \varphi^+(-i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho) && b^+ = \varphi^+(i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho) \,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

b) *Pour* $\lambda = 0$, on a comme solution générale en fonction de quatre constantes arbitraires, arrangées sous forme de colonne g:

$$\xi = (1 - \lambda_\varrho\gamma^\varrho\cdot\tau)g \qquad \xi^+ = g^+(1 + \lambda_\varrho\gamma^\varrho\cdot\tau) \,. \tag{11}$$

3. – Particules se mouvant avec la vitesse de la lumière.

Imposons à la particule précédente la seule condition que sa vitesse tridimensionnelle soit égale à celle de la lumière. On peut voir immédiatement que cette condition entraîne cette autre que *la masse au repos de la particule*, m_0 donc $\lambda = m_0c$, *doit être nulle*.

Examinons cette question en détail, puisque nous aurons besoin des résultats correspondants à plusieurs autres reprises. On a (6)

$$\sum (\mathrm{d}x)^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,\mathrm{d}\tau^2\,,$$

donc si la vitesse est égale à c on devra avoir

$$(12) \qquad \boxed{\Omega_1 = -i\xi^+\xi = 0 \qquad \Omega_2 = \xi^+\gamma^5\xi = 0}\,.$$

En fonction des quatre composantes λ de la quantité de mouvement et des quatre constantes arbitraires que contient la solution (10), ces conditions se traduisent par

$$(13) \qquad \lambda^2\varphi^+\varphi = 0\,, \qquad \lambda^2\varphi^+\gamma^5\varphi = 0\,.$$

et

$$\lambda\cdot\lambda_\varrho(\varphi^+\gamma^5\gamma^\varrho\varphi) = 0\,.$$

Deux cas sont possibles:

a) $\varphi^+\varphi = \varphi^+\gamma^5\varphi = \lambda_\varrho\cdot\varphi^+\gamma^5\gamma^\varrho\varphi = 0$ avec $\lambda \neq 0$ et

b) $\lambda = \sqrt{-\lambda_\varrho\lambda^\varrho} = m_0c = 0$.

Considérons le cas *a*). Puisque $\varphi^+\varphi = \varphi^+\gamma^5\varphi = 0$ les identités mentionnées (3) permettent d'écrire la proportionnalité

$$\frac{\varphi^+\gamma^\varrho\varphi}{\varphi^+\gamma^5\gamma^\varrho\varphi} = \frac{\varphi^+\gamma^\sigma\varphi}{\varphi^+\gamma^5\gamma^\sigma\varphi} = \dots\,.$$

On n'a donc pas seulement $\lambda_\varrho\cdot\varphi^+\gamma^5\gamma^\varrho\varphi = 0$, mais aussi

$$\lambda_\varrho\cdot\varphi^+\gamma^\varrho\varphi = 0\,.$$

D'autre part,

$$\sum \lambda_\varrho^2 = -\lambda^2 \qquad \text{et} \qquad \sum (\varphi^+\gamma^\varrho\varphi)^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) = 0\,.$$

Ces relations permettent d'écrire une identité de Lagrange d'où l'on déduit la proportionnalité

$$\frac{\varphi^+\gamma^\varrho\varphi}{\lambda_\varrho} = \frac{\varphi^+\gamma^\sigma\varphi}{\lambda_\sigma} = \dots\,.$$

Par conséquent, puisque $\sum (\varphi^+\gamma^\varrho\varphi)^2 = 0$, la somme

$$\sum \lambda_\varrho^2 = -\lambda^2 = 0$$

sera également nulle.

Donc le cas *a*) se ramène au cas *b*) et l'on peut conclure que, en mécanique spinorielle, seules les particules de masse au repos nulle peuvent atteindre la vitesse de la lumière. « ***Masse au repos nulle*** » *ne veut rien dire de plus que ceci*: entre les composantes de la quantité de mouvement $\lambda_k = p_k$ et l'énergie $\lambda_4 = i\lambda_0 = i(w/c)$, on a toujours dans ce cas la relation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \left(\frac{w}{c}\right)^2.$$

4. – Particules de masse au repos nulle.

Remarquons toutefois que si $\lambda = 0$, c'est la relation (11) et non pas (10) qui convient et à laquelle il faut appliquer nos conditions $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. De (11) on déduit

$$\Omega_1 = -i\xi^+\xi = -ig^+g, \qquad \Omega_2 = \xi^-\gamma^5\xi = g^+\gamma^5 g - 2\lambda_\varrho \cdot g^+\gamma^5\gamma^\varrho g \cdot \tau .$$

Donc, nos conditions reviennent à restreindre la généralité de la constante g en lui imposant les conditions

$$(14) \qquad g^+g = 0, \quad g^+\gamma^5 g = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_\varrho \cdot g^+\gamma^5\gamma^\varrho g = 0 .$$

On satisfait à ces conditions (14) en prenant pour g les solutions des équations:

$$(15) \qquad \lambda_\varrho \gamma^\varrho g = 0 ,$$

comme on s'en assure aisément.

[Remarquons que ces équations peuvent s'écrire sous une forme présentant une analogie avec celle du cas $\lambda \neq 0$, à savoir

$$(16) \qquad \begin{cases} \lambda_0 g = \lambda_K \alpha^K g \\ \lambda_0 \widetilde{g^*} = \lambda_K \widetilde{g^*}\alpha^K \end{cases}$$

où $\widetilde{g^*}$ est la matrice transposée et conjuguée de g, $i\lambda_0 = \lambda_4$ et α^K les matrices de Dirac

$$\alpha^K = i\gamma^4\gamma^K \qquad (K = 1, 2, 3) \qquad \alpha^4 = \gamma^4].$$

Avec cette solution, compte tenu de (11), on a $\xi = g$.

Tous les ξ, *donc toutes les grandeurs d'espace temps d'une particule de vitesse c* (parmi lesquelles il faudra compter le photon), *sont des constantes*. Cette solution se déduit de la solution générale, valable pour n'importe quel λ,

$$\xi = a \exp [i\lambda\tau] + \exp [-i\lambda\tau] ,$$

en y faisant $\lambda = 0$. Dans ce cas on peut prendre $g = a + b$ et l'on a

$$\lambda_\varrho \gamma^\varrho g = 0 .$$

Remarquons toutefois que les g satisfaisant à ces équations

$$\lambda_\varrho \gamma^\varrho g = 0$$

ne dépendent que de *deux* constantes arbitraires complexes, au lieu de quatre comme dans le cas $\lambda \neq 0$. Deux des quatre composantes, g_1, g_2, étant quelconques, les deux autres s'en déduisent, par exemple, par l'opération

$$\begin{vmatrix} g_3 \\ g_4 \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \end{vmatrix} , \tag{17}$$

avec $S = (1/\lambda_0)(\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3)$ où les σ sont les matrices 2×2 de Pauli; l'existence de

$$\lambda_0^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

introduit deux signes.

5. – Disposition dans l'espace des diverses grandeurs mesurables attachées à la particule.

Considérons dans l'espace les diverses grandeurs d'espace temps

$$\xi^+ A \xi = g^+ A g$$

attachées à une particule de masse au repos nulle.

En vertu de (14) et du paragraphe **3** nous pouvons dire que:

a) la vitesse $u^\varrho = g^+\gamma^\varrho g$ est proportionnelle à λ_ϱ et au vecteur

$$w^\varrho = ig^+ i\gamma^5\gamma^\varrho g ,$$

et dans l'espace, les vecteurs u^K, λ^K et w^K ont même support.

b) Considérons le spin de la particule (*loc. cit.* § 11)

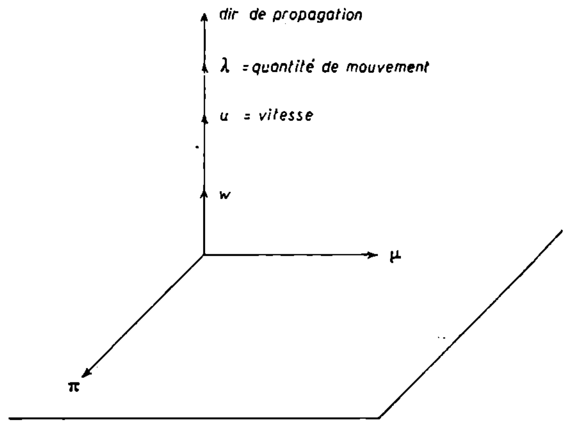
$$\tfrac{1}{2} m_{\varrho\sigma} = -\tfrac{1}{2}\xi^+ \cdot \tfrac{1}{2}(\gamma^\varrho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\varrho)\cdot \xi ,$$

tenseur antisymétrique et, comme d'habitude, séparons la « partie d'espace » et la « partie de temps » que nous appellerons respectivement

$$\mu_i = -\tfrac{1}{2}m_{jK}, \qquad i\pi_K = \tfrac{1}{2}m_{K4} \qquad (i, j, K = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Puisque $g^+g = g^+\gamma^5 g = 0$, les identités (4) et (5) donnent

$$\left\{\begin{array}{l} \sum \mu_K^2 = \sum \pi^2, \quad \sum \mu_K \pi_K = 0 \\ \sum u_K \mu_K = \sum u_K \pi_K = 0\,. \end{array}\right. \tag{19}$$



Les deux « vecteurs » π et μ sont égaux, perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de la vitesse.

On peut donc tracer la figure ci-contre des vecteurs qui accompagnent dans son mouvement une particule ayant la vitesse de la lumiére, figure qui reproduit la disposition générale des champs électromagnétiques d'un photon.

6. – Expressions simples.

Nous ne restreignons pas la généralité en choisissant un repère tel que la propagation se fasse le long de l'axe des z, donc $u_1 = u_2 = 0$, ce qui entraine $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Les grandeurs attachées au photon ont les valeurs suivantes en fonction de deux grandeurs complexes arbitraires ξ_1 et ξ_2:

vitesse (dérivée par rapport à τ):

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0 \qquad u_3 = \pm 2(\xi_1^*\xi_1 + \xi_2^*\xi_2) \qquad u_4 = 2i(\xi_1^*\xi_1 + \xi_2^*\xi_2)\,,$$

vitesse dans l'espace ordinaire:

$$V_1 = 0 \qquad V_2 = 0 \qquad V_3 = \pm c\,.$$

Vecteur w proportionnel à la vitesse:

$$w_1 = 0 \qquad w_2 = 0 \qquad w_3 = -2(\xi_1^*\xi_1 - \xi_2^*\xi_2) \qquad w_4 = \mp 2i(\xi_1^*\xi_1 - \xi_2^*\xi_2)\,.$$

Composantes du spin:

$$\tfrac{1}{2}m_{23} = (\xi_1^*\xi_2 + \xi_2^*\xi_1) \qquad \tfrac{1}{2}m_{31} = \tfrac{1}{2}(\xi_1^*\xi_2 - \xi_2^*\xi_1) \qquad \tfrac{1}{2}m_{12} = 0\,,$$

$$\tfrac{1}{2}m_{14} = \mp (1/i)(\xi_1^*\xi_2 - \xi_2^*\xi_1) \qquad \tfrac{1}{2}m_{24} = \pm (\xi_1^*\xi_2 + \xi_2^*\xi_1) \qquad \tfrac{1}{2}m_{34} = 0\,,$$

soit avec les notations (18)

$$\mu_1 = \xi_1^* \xi_2 + \xi_2^* \xi_1 \qquad \mu_2 = (1/i)(\xi_1^* \xi_2 - \xi_2^* \xi_1) \qquad \mu_3 = 0 ,$$
$$\pi_1 = \mp (1/i)(\xi_1^* \xi_2 - \xi_2^* \xi_1) \qquad \pi_2 = \pm (\xi_1^* \xi_2 + \xi_2^* \xi_1) \qquad \pi_3 = 0 .$$

Les longueurs correspondantes sont

$$\sum \mu_K^2 = \sum \pi_K^2 = 4\xi_1^* \xi_1 \cdot \xi_2^* \xi_2 .$$

7. – Quelques remarques.

a) D'une façon générale les équations de base ne fournissent les ξ qu'à un facteur près et une normalisation est nécessaire. On peut poser comme d'habitude par exemple

$$\xi_1^* \xi_1 + \xi_2^* \xi_2 = 1 .$$

b) Même un corpuscule ayant la vitesse de la lumière reste encore caractérisé par le vecteur w_K. On voit aisément qu'un cas particulier intéressant est celui où

$$w_K = 0 \qquad (K = 1, 2, 3),$$

pour la raison suivante. On a *en général* (vitesse quelconque)

$$u_\varrho m^{\varrho K} = - w_K \Omega_2 ,$$

donc si $w_K = 0$, $u_\varrho m^{\varrho K} = 0$. Considérons le repère dans lequel la particule est au repos $u_1 = u_2 = u_3 = 0$; dans ce repère donc $m^{4K} = 0$ comme il est bien connu. Donc une particule avec $w^K = 0$ est telle que son spin se réduit à ses composantes d'espace, à un seul « vecteur », dans le système au repos.

Il n'est pas impossible que ce cas soit exclusivement réalisé dans la nature, la théorie avec $w^K \neq 0$ donnant le cas idéal général. Quoiqu'il en soit nous retiendrons que $w^K = 0$ représente un cas particulier intéressant et nous l'envisagerons même pour le cas limite qui nous intéresse ici et où l'on ne peut plus parler de « système au repos ».

Dans ce cas, $w^K = 0$ signifie $\xi_1^* \xi_1 = \xi_2^* \xi_2$, la condition de normalisation devient $\xi_1^* \xi_1 = \frac{1}{2}$ et l'on a simplement

$$\sum \mu_K^2 = \sum \pi_K^2 = 1 .$$

Les « longueurs » d'espace et de temps du spin sont égales à l'unité.

A. Proca
1955, Novembre
Il Nuovo Cimento
Serie X, Vol. 2, pag. 972-979

Interférences en mécanique spinorielle.

A. Proca
Institut Henri Poincaré - Paris

(ricevuto il 4 Luglio 1955)

Resumé. — Après avoir étudié qualitativement les phénomènes d'interférence en se plaçant à un point de vue différent du point de vue habituel, l'auteur montre comment les intégrales premières de la mécanique spinorielle du point matériel permettent d'écrire tout naturellement l'expression d'un champ périodique qu'on peut supposer attaché à la particule et qui intervient dans les termes d'interaction pour rendre compte des phénomènes d'interférences. Ce champ représente l'onde attachée à la particule et la manière dont il a été calculé montre quelles sont ses relations avec les trajectoires et les autres grandeurs corpusculaires. Lorsque la masse au repos est nulle, l'arbitraire dans le choix de ce champ est plus grand. On peut alors trouver aisément parmi toutes les possibilités, une solution qui présente les caractéristiques essentielles des champs électromagnétiques attachés au photon.

1. – Les grandeurs qui caractérisent une particule en mécanique classique, la vitesse, la quantité de mouvement, etc. ne suffisent pas pour expliquer les phénomènes d'interférences; il faut en introduire de nouvelles, qui serviront à préciser les détails de cette explication.

Le progrès initial et essentiel de la mécanique ondulatoire — on l'oublie trop souvent, — a été précisément l'introduction d'une nouvelle caractéristique de la particule, l'*onde* ψ; celle-ci a permis d'ailleurs non seulement la prévision des phénomènes d'interférences, mais aussi le traitement satisfaisant des problèmes quantiques.

En laissant provisoirement ces derniers de coté, la question se pose de savoir si l'introduction des variables spinorielles n'est pas susceptible de faciliter, en mécanique classique, le choix d'une telle grandeur, caractéristique des interférences. Nous verrons qu'il en est bien ainsi, mais auparavant il importe de bien préciser le point de vue adopté dans ce qui suit.

2. – Conditions générales.

Soit X la nouvelle grandeur caractérisant la production des interférences. Lorsque la particule interagit convenablement avec un dispositif expérimental approprié, des interférences apparaissent. Du point de vue théorique cela signifie, en théorie corpusculaire, qu'un terme d'interaction s'ajoutera au Lagrangien et que les nouvelles trajectoires qui en résultent aboutiront toutes exclusivement sur des franges brillantes.

Ce terme d'interaction contiendra d'une part X, qui caractérise le corpuscule et d'autre part, certains éléments caractérisant l'appareil.

En ce qui concerne X, celui-ci doit évidemment présenter une périodicité dans l'espace-temps: cela n'est qu'une autre façon d'énoncer l'hypothèse fondamentale qu'une *onde* est attachée au corpuscule. Le corpuscule est ainsi caractérisé par une période, mais celle-ci ne semble pas décelable directement dans des expériences simples, à cause de sa petitesse. Remarquons alors que toutes les expériences d'interférences mettent en jeu des dispositifs destinés à la mettre en évidence *au moyen de battements.* Le rôle de l'appareil consiste à introduire une « différence de marche » entre les rayons qui interfèrent de façon à permettre l'apparition de battements observables. Dans l'interaction, la période du corpuscule se combine avec un élément caractéristique de l'appareil pour réaliser la différence de marche mentionnée.

Cet élément qui caractérise l'appareil peut être lui-même une période, mais cela n'est pas indispensable. En effet, il peut être simplement une distance spatiale caractéristique, qui se combine avec la période spatiale du corpuscule et donne des battements. Prenons un exemple. Dans l'expérience des trous d'Young (supposés pour le moments infiniment petits pour éliminer les effets de la diffraction) l'appareil est évidemment caractérisé par *la distance finie entre les deux trous.* C'est cette longueur qui apparaît dans le terme d'interaction et se combine avec la période pour fournir une différence de marche convenable et des franges observables.

Cette manière de parler peut sembler oiseuse à première vue. En réalité elle est avantageuse parce qu'elle déplace le problème vers l'étude des termes d'interaction, tout en conservant au mobile son caractère corpusculaire essentiel.

Reprenons l'expérience des trous d'Young et supposons qu'on bouche l'un des trous, par exemple après le départ des corpuscules de la source. Les franges disparaissent et l'explication corpusculaire qu'on donne d'habitude de ce fait se heurte à de grosses difficultés.

En fait, lorsque le corpuscule entre en interaction avec l'écran et fixe ainsi sa trajectoire ultérieure, deux cas peuvent se présenter: ou bien l'écran possède deux trous ou bien il n'en a qu'un seul. S'il est percé de deux trous, *cela signifie qu'il est caractérisé par une distance finie*, celle qui les sépare, précisément.

L'interaction combine cette distance avec la période de la particule pour donner un système de franges. *Si l'on bouche l'un des trous, il n'y a plus de distance spatiale qui caractérise l'appareil*; il n'y a plus de possibilité de combinaison avec la période, il n'y a plus de franges. En d'autres termes, les franges disparaissent non pas parce qu'en bouchant le trou on empêche les corpuscules d'y passer, *mais parce que cela fait disparaître la longueur finie caracteristique de l'écran*, et annule le terme d'interaction correspondant.

Dans l'exemple précédent, l'appareil était caractérisé par une distance finie, unique qui se combine avec X dans le terme d'interaction. Cela n'est pas le seul cas possible. Tout d'abord, la longueur caractéristique peut être non seulement spatiale, mais spatio-temporelle, et l'appareil peut aussi être caractérisé par son équivalent en termes d'angle, etc. Ensuite, l'appareil peut être caractérisé par *plusieurs* de ces longueurs, c'est à dire par tout un spectre discret de longueurs. Enfin, si l'on veut tout grouper en une explication unique, on doit aussi envisager l'éventualité où l'appareil est caractérisé par un spectre *continu* de longueurs. Les phénomènes physiques qui correspondent à cette éventualité sont les phénomènes de diffraction, comme on s'en rend compte aisément en considérant les différences de marche classiques.

Considérons encore une fois des trous d'Young de dimensions normales; lorsqu'on bouche l'un des trous les franges d'interférences disparaissent parceque la distance entre les centres des trous n'existe plus. Mais l'appareil est caractérisé par le trou restant, de diamètre petit mais fini et qui peut être considéré comme une suite continue de longueurs actives. Ces longueurs continuent à se combiner dans le terme d'interaction avec la période du corpuscule et à donner des plages noires ou brillantes: ce sont les figures de diffraction.

En résumé, les appareils interviennent de diverses manières pour interagir avec le corpuscule, dont la grandeur caractéristique qui entre en jeu, X, est essentiellement une grandeur périodique dans l'espace-temps.

Le problème essentiel reste alors le suivant: que devons-nous choisir (en mécanique spinorielle classique), comme grandeur X?

3. – Intégrales premières.

Reprenons les équations générales.

Que λ soit nul ou non, le mouvement libre possède une intégrale première [*loc. cit.* éq. (20)]

$$\lambda_\varrho u^\varrho = \lambda_\varrho \xi^+ \gamma^\varrho \xi_\varrho = \lambda_\varrho \frac{\mathrm{d}x^\varrho}{\mathrm{d}\tau} = \text{constante}\,. \tag{1}$$

a) Si $\lambda \neq 0$, on déduit des équations fondamentales que *la constante est* *liée à l'action*; elle peut s'écrire:

$$\lambda_\varrho \xi^+ \gamma^\varrho \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi^+}{d\tau}\,\xi - \xi^+ \frac{d\xi}{d\tau}\right) = L_0 .$$

En fonction des constantes a et b de la solution générale elle a pour valeur

$$\lambda_\varrho \frac{dx^\varrho}{d\tau} = i\lambda(b^+b - a^+a) ,$$

de sorte qu'en intégrant une fois on peut écrire

$$\lambda_\varrho x^\varrho = i\lambda\tau(b^+b - a^+a) + C , \tag{2}$$

la nouvelle constante réelle C étant égale par exemple à $\lambda_\varrho x_0^\varrho$ où x_0^ϱ est la position de la particule matérielle à « l'instant » $\tau = 0$.

b) Si $\lambda = 0$, on a la même intégrale première mais avec une constante nulle:

$$\lambda_\varrho u^\varrho = \lambda_\varrho \frac{dx^\varrho}{d\tau} = 0 .$$

En intégrant, on aura simplement:

$$\lambda_\varrho x^\varrho = C = \lambda_\varrho x_0^\varrho .$$

4. – Champs spinoriels.

Revenons au cas $\lambda \neq 0$.

Pour un corpuscule donné de moments λ_ϱ et de masse au repos λ/c on aura

$$\xi = a \exp[i\lambda\tau] + b \exp[-i\lambda\tau] ,$$

où a et b, définis à une constante multiplicative près, satisfont aux équations

$$(i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho)a = 0 , \qquad (-i\lambda + \lambda_\varrho\gamma^\varrho)b = 0 .$$

Cela peut encore s'écrire

$$\boxed{\xi = a_1 \exp[ir_\varrho x^\varrho] + b_1 \exp[-ir_\varrho x^\varrho]} , \tag{3}$$

avec

a_1, b_1 satisfont aux mêmes conditions que les a, b et l'on a

$$b_1^+ b_1 - a_1^+ a_1 = b^+ b - a^+ a \,. \tag{4}$$

Le sens de (3) est clair. Le premier membre ξ s'obtient en remplaçant dans le second x^ϱ par leurs valeurs en fonction de τ, c'est-à-dire *en suivant la trajectoire de la particule. ξ est une fonction de τ.*

Considérons maintenant une particule définie à la manière habituelle (par les λ_ϱ, a, b et les diverses constantes) et soit x^ϱ un point *quelconque variable* de l'espace temps. Nous pouvons attacher à cette particule la grandeur (spinorielle)

$$\boxed{X = a_1 \exp\,[i r_\varrho x^\varrho] + b_1 \exp\,[-\,i r_\varrho x^\varrho]} \,. \tag{5}$$

(5) est formellement identique à (3); la différence consiste dans le fait que ξ est une fonction de τ [par l'intermédiaire de la trajectoire $x(\tau)$], tandis que *X est une fonction des quatre variables indépendantes x^ϱ*, c'est-à-dire fonction d'un point d'univers.

Pour une particule donnée, *X est un champ dont la valeur est égale au ξ de cette particule le long des trajectoires de celle-ci. X présente le caractère périodique cherché*; en fait, c'est une onde et l'on voit bien quel est le mécanisme qui le lie au corpuscule envisagé.

Son intérêt réside dans l'énoncé suivant: pour former un terme d'interaction dont la présence dans le Lagrangien rende compte des phénomènes d'interférences, il faudra tenir compte aussi de X (et des éléments qui en dérivent, par exemple X^+). Il n'est pas difficile de former de pareils termes si nous nous laissons guider par le fait qu'au fond c'est une différence de marche qui doit apparaître pour que les battements soient réalisés.

5. – Champs d'espace-temps, $\lambda \neq 0$.

Il existe un lieu indubitable, quoique de nature assez spéciale, entre les corpuscules et les champs X que nous leur avons fait correspondre; cela justifie un examen plus approfondi de la question. Dès l'abord, cependant, il convient de remarquer qu'en raison de leur caractère spinoriel, les champs X ne peuvent être immédiatement accessibles à l'expérience et ne sont en fait que des intermédiaires de calcul.

Cependant à partir des X nous pouvons former des grandeurs d'espace-temps, de la forme X^+AX avec des opérateurs A convenables, lesquels sont accessibles aux mesures et susceptibles éventuellement d'interprétation physique.

Pour avoir un exemple, prenons $A = \gamma^\sigma$. Nous attachons ainsi au corpuseule un champ vectoriel $J^\sigma = X^+\gamma^\sigma X$ qui s'écrira:

$$J^\sigma = a_1^+\gamma^\sigma a_1 + b_1^+\gamma^\sigma b_1 + (b_1^+\gamma^\sigma a_1)\exp[2ir_\varrho x^\varrho] + (a_1^+\gamma^\sigma b_1)\exp[-2ir_\varrho x^\varrho]\,. \tag{6}$$

En tout point, ce champ a une valeur déterminée. *Le long d'une trajectoire du corpuscule*, on aura, puisque X se réduit à ξ:

$$J^\sigma_{\text{traj}} = \xi^+\gamma^\sigma\xi\,. \tag{7}$$

Donc le long de la trajectoire, le champ vectoriel J^σ a la valeur de la vitesse du corpuscule.

Remarquons qu'en vertu de $\lambda_\varrho(a^+\gamma^\varrho b) = 0$, on a aussi $\partial_\sigma J^\sigma = 0$.

Un autre exemple s'obtient en prenant comme opérateur $A = \partial/\partial x^\sigma$. Le champ ainsi obtenu est $X^+(\partial X/\partial x^\sigma)$ et a la valeur $-\lambda_\sigma$ quelle que soit la trajectoire.

On peut former ainsi toute une série de champs d'espace-temps, tensoriels donc observables, sans que cela signifie naturellement qu'ils aient été réellement observés.

Considérons enfin l'opérateur $A = \mu^{\varrho\sigma} = -\frac{1}{2}(\gamma^\varrho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\varrho)$. En tenant compte que l'on a pour $\lambda \neq 0$ d'après les équations fondamentales:

$$\lambda_\varrho(b^+\mu^{\varrho\sigma}a) = -i\lambda(b^+\gamma^\sigma a)$$

$$\lambda_\varrho(a^+\mu^{\varrho\sigma}b) = +i\lambda(a^+\gamma^\sigma b)$$

$$i\lambda(b^+\gamma^\sigma b + a^+\gamma^\sigma a) = \lambda_\sigma(b^+b - a^+a)$$

on pourra écrire

$$\lambda_\sigma = rJ^\sigma + \tfrac{1}{2}\partial_\varrho(X^+\mu^{\varrho\sigma}X)\,, \tag{8}$$

avec $r^2 = -r_\varrho r^\varrho$, soit encore sous une autre forme

$$\partial(X^+\mu^{\varrho\sigma}X) = -X^+\left(2\frac{\partial}{\partial x^\sigma} + \frac{i\lambda\gamma^\sigma}{(b^+b - a^+a)}\right)X\,. \tag{9}$$

λ_σ est la quantité de mouvement le long d'une trajectoire, J_σ est lié à la vitesse, $X^+\mu^{\varrho\sigma}X$ au spin. (8) donne l'équivalent d'une décomposition bien connue en mécanique ondulatoire, mais remarquons aussi que (9) sont *des équations du type de Maxwell*, ce qui pourra avoir son importance lorsqu'on introduira la notion de « charge électrique » dans la théorie.

6. – Cas limite $\lambda = 0$.

Lorsque $\lambda \neq 0$, le processus par lequel on peut rattacher l'onde à la particule est arbitraire, mais il existe une manière, pour ainsi dire « naturelle » de le faire, celle que nous avons indiquée. Lorsque $\lambda = 0$, cet arbitraire est beaucoup plus grand et le raisonnement utilisé au paragraphe 4, ainsi que l'équation (2) ne nous sont plus d'aucun secours. Ce cas est, entre autres, celui du photon.

Il est tentant d'adopter la même solution que dans le cas $\lambda \neq 0$, à savoir:

$$X = a \exp [ir_\varrho x^\varrho] + b \exp [-ir_\varrho x^\varrho] ,$$

avec les r_ϱ proportionnels aux λ_ϱ, $\lambda = 0$, et

$$\lambda_\varrho \gamma^\varrho a = \lambda_\varrho \gamma^\varrho b = 0 .$$

Mais les a et b sont indépendants et introduisent deux arbitraires au lieu d'un seul. On peut restreindre cet arbitraire en admettant a priori une relation entre a et b; celle qui vient la première à l'esprit est $a = b$, mais la relation $a = \gamma^5 b$ semble plus avantageuse.

En effet dans ce cas, on a pour le champ d'espace-temps $X^+\mu^{\varrho\sigma}X = F^{\varrho\sigma}$ une expression particulièrement simple:

$$F^{\varrho\sigma} = X^+\mu^{\varrho\sigma}X = 2(b^+ i\mu^{\varrho\sigma}\gamma^5 b)\cdot \sin 2r_\varrho x^\varrho . \tag{10}$$

Il est donc possible d'attacher à un corpuscule se mouvant avec la vitesse de la lumière un champ purement sinusoïdal dont la fréquence est proportionnelle à λ_4 donc à l'énergie. L'amplitude des diverses composantes est donnée par

$$- b^+ i(\gamma^\varrho\gamma^\sigma - \gamma^\varrho\gamma^\sigma)\cdot\gamma^5 b .$$

Il suffit de comparer cette expression à l'expression $\frac{1}{2}m_{\varrho\sigma}$ étudiée au paragraphe 5 de l'article précédent pour voir que les mêmes conclusions s'appliquent en interchangeant seulement les parties d'espace et de temps. Donc le champ $F^{\varrho\sigma}$ attaché à ces particules $\lambda = 0$ est sinusoïdal et présente, dans l'espace, la même disposition bien connue du champ électromagnétique de la lumière. De plus on voit aisément qu'en vertu des équations de base

$$\frac{\partial}{\partial x^\varrho} F^{\varrho\sigma} = 0 ,$$

comme pour la lumière dans le vide.

Parmi les particules $\lambda = 0$ on doit également compter le photon. On peut donc en partant de la définition spinorielle d'une particule de vitesse c, lui attacher un champ observable analogue à celui qui accompagne le photon.

Cela n'implique pas nécessairement l'identité de ces deux champs. Le champ de la lumière a un caractère électromagnétique, lequel n'apparait pas en mécanique spinorielle.

Le problème ne pourra être efficacement abordé que lorsqu'on introduira dans cette mécanique les notions de charge et de champ électromagnétique.

RIASSUNTO (*)

Dopo aver studiato qualitativamente i fenomeni d'interferenza mettendosi da un punto di vista differente da quello abituale, l'autore mostra come gli integrali primi della meccanica spinoriale del punto materiale permettano di scrivere in modo del tutto naturale l'espressione di un campo periodico che può supporsi collegato alla particella e che interviene nei termini d'interazione per render conto dei fenomeni d'interferenza. Questo campo rappresenta l'onda collegata alla particella e il modo con cui è stato calcolato mostra quali siano le sue relazioni con le traiettorie e le altre grandezze corpuscolari. Quando la massa a riposo è nulla, l'arbitrarietà nella scelta di questo campo è maggiore. Si può allora trovare facilmente, fra tutte le possibili, una soluzione che presenti le caratteristiche essenziali dei campi elettromagnetici collegati al fotone.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*

A. PROCA
1955, Novembre
Il Nuovo Cimento
Serie X, Vol. 2, pag. 972-979

TOME 17 N° 2 FÉVRIER 1956

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

SUR LA MÉCANIQUE SPINORIELLE DU POINT CHARGÉ

Par A. PROCA,
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Cet article et le suivant sont les derniers travaux de recherche rédigés par le regretté Al. PROCA. Malgré une longue et cruelle maladie, l'auteur avait réussi à les achever à force de courage et de volonté. Il n'a pu, malgré tout, revoir en détail les épreuves avant de disparaître. La Rédaction du Journal de Physique *a estimé de son devoir de faire paraître ces articles en avertissant le lecteur des circonstances qui ont accompagné leur impression.*

Sommaire. — Après avoir modifié la deuxième hypothèse fondamentale de la mécanique spinorielle de façon à rendre compte de l'existence d'une charge, on calcule les diverses grandeurs d'espace-temps présentant un certain intérêt. Les équations (non-linéaires) et les calculs sont en général très compliqués, sauf dans un cas particulier qui correspond à celui d'une charge constante, cas qui a déjà été traité.

1. — Dans un précédent article [1] nous avons insisté sur la nécessité absolue où l'on se trouve d'employer les spineurs à la place des vecteurs comme variables de base d'une théorie relativiste, si l'on veut pouvoir couvrir l'intégralité du domaine que peut embrasser une telle théorie. Nous avons examiné l'application de cette idée à la mécanique du point matériel sans plus, et nous avons pu constater que les conditions d'invariance relativistes exigeaient l'introduction de variables surabondantes.

Cela signifie que le corpuscule décrit spinoriellement diffère du point matériel ordinaire par un certain nombre de caractéristiques nouvelles, décrites précisément par ces variables. Le spin est une des ces caractéristiques qui apparaît effectivement dans notre traitement, mais même si l'on en tient compte on n'épuise pas toutes les possibilités offertes par la théorie. L'étape suivante dans l'ordre de complication croissante est la description d'un corpuscule pourvu de spin et en même temps chargé électriquement, à laquelle sont consacrés les paragraphes suivants.

2. — Soit donc un point matériel portant une charge électrique e, que nous supposerons variable pour plus de généralité, soit s le temps propre du corpuscule, $\dfrac{dx^\rho}{ds}$ sa vitesse d'univers et $e\dfrac{dx^\rho}{ds}$ le quadrivecteur courant électrique qu'elle définit.

Pour relier cet espace-temps à l'espace des ξ, il faut admettre, comme dans [I] et pour les mêmes raisons qui ne nous laissent pas beaucoup de choix, une relation de la forme

$$\text{courant} = \xi^+\gamma^\rho\xi$$

soit

$$\boxed{e\frac{dx^\rho}{ds} = \xi^+\gamma^\rho\xi} \qquad (1)$$

Sur la base de cette hypothèse on obtient une mécanique spinorielle du point chargé. Nous allons en esquisser plus loin les lignes générales, en suivant en gros les développements de [I], article auquel il faudra se reporter pour les notations ainsi que pour divers résultats déjà obtenus.

3. — **Lagrangien et équations en l'absence de champ.** — Remarquons d'abord qu'on déduit de (1)

$$e = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}. \qquad (2)$$

Ce résultat est indépendant du lagrangien choisi, donc du mouvement ; c'est simplement l'expression de la charge en fonction des ξ.

En l'absence d'intéraction, le lagrangien s'écrit, comme dans [I] :

[1] *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, p. 65, désigné dans ce qui suit par [I].

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi^+}{ds}\xi - \xi^+\frac{d\xi}{ds}\right) + \eta_\rho\left(e\frac{dx^\rho}{ds} - \xi^+\gamma^\rho\xi\right). \quad (3)$$

Le paramètre utilisé ici est le temps propre s du corpuscule, défini par

$$-c^2\,ds = \sum_4^1 (dx^\rho)^2$$

et les η_ρ sont de nouveaux multiplicateurs de Lagrange. Les équations en l'absence de champ s'écriront alors (comparer à [I]) :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= -\eta_\rho\gamma^\rho\xi & \frac{d\xi^+}{ds} &= +\eta_\rho\xi^+\gamma^\rho \\ e\frac{dx^\rho}{ds} &= \xi^+\gamma^\rho\xi & \frac{d}{ds}(e\eta_\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Posons

$$\lambda_\rho = e\eta_\rho.$$

Les λ_ρ sont les composantes de la quantité de mouvement et de l'énergie comme dans [I]. Ce sont des constantes, *alors que les η_ρ ne le sont pas en général*, en raison de (2) et ne le deviennent que si Ω_2 devient nul, cas qu'il faut étudier séparément.

En remplaçant η_ρ et e, on écrit finalement les équations sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= \mp \frac{c\lambda_\rho}{\sqrt{(\xi^+\gamma^5\xi)^2 - (\xi^+\xi)^2}}\cdot\gamma^\rho\xi \\ \frac{d\xi^+}{ds} &= \pm \frac{c\lambda_\rho}{\sqrt{(\xi^+\gamma^5\xi)^2 - (\xi^+\xi)^2}}\cdot\xi^+\gamma^\rho. \end{aligned} \quad (5)$$

Le comportement du point matériel chargé dépend ainsi d'équations non linéaires.

4. — **Grandeurs d'espace-temps.** — Malgré cette complication et malgré le fait que les η_ρ ne sont pas des constantes, un certain nombre de résultats se déduisent immédiatement sans difficulté des équations fondamentales. Ainsi par exemple on peut affirmer que toutes les dérivées premières par rapport à s des grandeurs d'espace-temps ont la même forme que dans [I]. Cela découle du fait que la relation (12) de [I] subsiste :

$$\frac{d(\xi^+A\xi)}{ds} = \eta_\rho\cdot\xi^+[\gamma^\rho, A]\xi \qquad A = \text{matrice } 4\times 4. \quad (6)$$

On en déduit *deux résultats importants* :

1° $\boxed{\Omega_1 = \text{constante}}$, propriété sur laquelle nous reviendrons et

2° $\boxed{\lambda_\mu x_\nu - \lambda_\nu x_\mu + \frac{1}{2}m_{\mu\nu} = \text{constante}}$

($\lambda_\mu = e\eta_\mu$ = constante = quantité de mouvement-énergie $m_{\mu\nu} = i\xi^+\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\xi$) qui signifie que le point matériel chargé possède un spin, indépendant de sa charge.

Par contre, les η_ρ n'étant pas des constantes, on ne peut plus, comme dans [I] passer aux équations du second ordre et intégrer le système.

Pour situer la difficulté, le degré de complication de la solution, imaginons que nous puissions faire un changement de variable $\tau = f(s)$ en passant de s à τ de telle façon que l'on ait :

$$d\tau = \frac{\pm c\,ds}{\sqrt{[\Omega_1(s)]^2 + [\Omega_2(s)]^2}} = \frac{ds}{e}. \quad (7)$$

En remplaçant s en fonction de τ et en posant $e\eta_\rho = \lambda_\rho$ le système (4) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -\lambda_\rho\gamma^\rho\xi & \frac{d\xi^+}{d\tau} &= +\lambda_\rho\xi^+\gamma^\rho \\ \frac{dx^\rho}{d\tau} &= \xi^+\gamma^\rho\xi & \frac{d\lambda_\rho}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

lequel est identique à (9) et (10) de [I] et peut être intégré complètement en τ ; reste ensuite naturellement le passage de τ à s temps propre.

5. — **Cas particulier.** — Aucune restriction n'a été imposée jusqu'à présent en ce qui concerne la généralité requise par le groupe de transformation choisi. L'exemple des équations de Maxwell suggère cependant une possibilité simplificatrice.

En effet, si l'on devait écrire ces dernières équations dans toute leur généralité compatible avec le groupe de Lorentz, on serait obligé d'y ajouter au moins un terme, celui qui représenterait la charge magnétique de l'électron. Or, l'expérience montre que cette charge n'existe pas en réalité et qu'on doit en conséquence remplacer le terme correspondant par zéro.

Un cas particulier intéressant apparaîtrait si des circonstances analogues se présentaient en mécanique spinorielle. Si par exemple, $\Omega_2 = 0$, on aurait, par (2) :

$$e = \pm\frac{\Omega_1}{c} = \text{const.}$$

(la charge du point serait une constante) et le problème, complètement résoluble, se réduirait à celui de [I]. C'est cette solution (charge proportionnelle à Ω_1) que nous avons adopté pour la quantification [1].

6. — **Interactions.** — Tout ce qui a été dit dans [I] concernant l'interaction reste valable dans le cas d'un point chargé. L'hypothèse très générale et qui comprend les cas classiques

$$L_{\text{int}} = \xi^+ 0\xi \qquad 0 = \text{matrice } 4\times 4 \text{ quelconque} \quad (9)$$

peut être adoptée. Si la charge est constante, on peut prendre $0 = eA_\rho\gamma^\rho$ (A_ρ = potentiel du champ extérieur) et on retombe sur les équations classique (I, § 16).

De toute façon, *même avec un e variable*, le résultat Ω_1 = constante, subsiste.

Manuscrit reçu le 18 octobre 1955.

[1] *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **238**, p. 774.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM TOME 17, FÉVRIER 1956, PAGE 83.

SUR UN NOUVEAU PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE SUGGÉRÉ PAR LES MÉCANIQUES SPINORIELLES

Par A. PROCA,

Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — On constate que deux grandeurs attachées au corpuscule se transforment l'une dans l'autre au cours du mouvement, leur somme restant constante. L'une d'entre elles dépend de la charge, l'autre de la « longueur » du spin. En général, la charge varie au cours de l'évolution, mais au détriment du spin, suivant une loi déterminée. On établit ainsi une liaison spin-charge qu'on suppose subsister également dans le cas d'une variation de la charge par sauts quantiques, lorsque les états quantiques sont des états à charge constante.

1. — **Théorèmes de conservation.** — Les mécaniques spinorielles sont caractérisées par le fait que les variables qui interviennent dans la description d'un corpuscule sont des spineurs au lieu d'être des tenseurs comme en mécanique relativiste. Des considérations d'invariance et de simplicité jointes à cette hypothèse initiale, permettent de dévélopper une mécanique dans laquelle l'arbitraire des hypothèses a été réduit au minimum et dont la forme s'impose presque lorsqu'on a adopté ce point de départ (1).

On retrouve dans cette mécanique les théorèmes essentiels de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, ainsi que de la conservation du moment de la quantité de mouvement, compte tenu du spin (2). En dehors de ces théorèmes, la mécanique spinorielle en introduit un autre, distinct des précédents et défini au moyen de l'intégrale première

$$\Omega_1 = \text{const.}$$

conservation qui a lieu dans de très larges conditions d'interaction avec un champ extérieur.

L'existence de ce théorème découle de l'emploi des spineurs et de la forme du lagrangien. Son interprétation est immédiate. La charge étant e, on a (voir l'article précédent) :

$$e^2 c^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$$

On voit donc que le théorème en question intéresse au fond la charge et qu'il ne constitue donc pas quelque chose d'essentiellement nouveau. La mécanique spinorielle fait simplement apparaître en même temps que les autres cette conservation de la charge, qui ne doit plus être admise comme une hypothèse à part. C'est sur les circonstances de cette conservation que nous voulons attirer l'attention.

(1) Voir l'article précédent, page 81 et aussi *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, p. 65.

(2) Pour éviter toute confusion, rappelons que nous avons défini le « spin » comme le tenseur antisymétrique du second rang qu'il faut ajouter à $X\mu\lambda\nu - X\nu\lambda\mu$ pour obtenir une constante, en l'absence de tout champ extérieur.

2. — **Équivalence.** — Considérons le cas général d'une charge variable. En rapprochant

$$e^2 c^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$$

de la formule qui donne la « longueur » du spin, c'est-à-dire l'invariant quadratique

$$\frac{1}{2} m_{\mu\nu}\, m^{\mu\nu} = \Omega_1^2 - \Omega_2^2$$

on peut écrire

$$\boxed{e^2 c^2 + \frac{1}{2} m_{\mu\nu}\, m^{\mu\nu} = 2\,\Omega_1^2 = \text{constante}}$$

relation valable même dans des cas très étendus d'interaction.

Au cours du mouvement, les grandeurs mesurées par e^2c^2 d'un côté et par $\frac{1}{2} m_{\mu\nu}\, m^{\mu\nu}$ de l'autre varient en sens contraires et leurs variations se compensent mutuellement pour donner une somme constante. Mais ces grandeurs physiques, nécessairement de même nature, peuvent s'exprimer la première en fonction de la charge, la seconde en fonction du spin. Pour faire image, nous pouvons dire que les deux variations sont liées, c'est-à-dire que *toute augmentation ou diminution de la charge entraîne une variation correspondante de la « longueur » du spin.* Il y a donc une sorte de transformation de passage de la charge au spin au cours du mouvement (3).

(3) Cette façon de parler ne saurait induire en erreur. Nous sommes dans un cas analogue à celui d'un pendule classique dans lequel l'énergie cinétique $mv^2/2$ se transforme en énergie potentielle mgh et vice versa. Il n'y a aucun inconvénient à dire qu'il y a échange entre une vitesse et une différence de niveau, pourvu qu'on ne perde pas de vue qu'il faut passer par les énergies correspondantes pour calculer Δv et Δh.

3. — **Équivalent.** — En une théorie du continu, on calculerait dans ce cas un coefficient de transformation, en établissant ce qu'on pourrait appeler l'« équivalent électrique du spin ». Ici la situation est légèrement différente puisqu'en réalité la charge et le spin sont quantifiés et leurs valeurs minima connues.

Si dans la transformation spin-charge on pouvait supposer qu'à un quantum de charge e correspond nécessairement une variation d'un quantum h, le processus serait défini et l'on pourrait écrire directement la relation cherchée. Mais rien n'est moins sûr et il peut se faire qu'à une variation de e corresponde un multiple entier de h ou une fonction d'un tel multiple ; nous manquons totalement d'éléments de réponse.

Quoi qu'il en soit on peut se demander à ce sujet jusqu'à quel point la relation qui définit la *constante de structure fine* $\alpha\hbar c = e^2$ *n'exprime pas en même temps*, en quelque sorte, *le taux de la transformation spin-charge* ; seule une quantification correcte de la théorie serait susceptible de jeter quelque lumière là-dessus.

4. — **Mécanismes.** — Il a été amplement établi autrefois que l'électricité n'est pas réductible à la mécanique, c'est-à-dire qu'on ne peut pas donner pour les phénomènes électriques un modèle qui les reproduise et qui suive exclusivement les lois de l'ancienne mécanique classique.

A première vue le lien établi dans ce qui précède entre la charge et le spin semble en contradiction avec ce résultat. En réalité il n'en est rien, en raison de la définition même du spin, lequel n'est pas au fond une grandeur « mécanique » dans l'ancien sens du terme, c'est-à-dire telle qu'on puisse en donner un modèle de mécanique classique. Par définition, le spin est un moment cinétique supplémentaire, dont l'existence ne s'accompagne pas de celle d'une énergie supplémentaire. On peut doter un corpuscule d'un tel moment en imaginant par exemple que sa masse tourne sur elle-même. Le modèle ainsi conçu ne convient cependant pas pour représenter le spin, parce qu'une masse en rotation introduit aussi, automatiquement, une énergie de rotation supplémentaire. Pour obtenir un modèle donnant correctement le spin, il faudrait faire intervenir des masses négatives, mais alors ce modèle ne serait plus « mécanique » au sens ci-dessus. Au surplus il est inutile d'insister, ces discussions ayant été dépassées aujourd'hui.

5. — **Conclusions.** — Ainsi, la mécanique spinorielle suggère une transformation possible spin-charge et, par voie de conséquence, la possibilité de création éventuelle de charges électriques autrement que par paires corpuscule-anticorpuscule. Cela fournit un moyen qualitatif de vérifier l'écart des principes de cette mécanique d'avec la réalité.

Les conclusions ci-dessus dépendent évidemment des hypothèses qui sont à la base de la théorie et changent avec celles-ci. La première hypothèse (emploi des spineurs) n'est pas en question. Si la deuxième

$$e\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s} = \xi^+ \gamma^\rho \xi, \qquad e = \text{charge}$$

ne correspondait pas à la réalité il faudrait modifier les conclusions et parler simplement d'équivalence et de conservation pour les carrés des longueurs du « spin » et du vecteur $\xi^+\gamma^\rho\xi$, quelle que soit d'ailleurs l'interprétation physique qu'on en donnerait.

Manuscrit reçu le 18 octobre 1955.

VI

Textes Divers

VI. TEXTES DIVERS

V1.1 Sur les Rayons B Lents du Mésothorium.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.183, p878-880; Nov 15, 1926

V1.2 De la Boule Atomique à la Centrale d'Energie.
Cosmos; Vol.1, No.3, p28-29; Nov 2; 1945

V1.3 Les Conséquences Philosophiques de la Théorie des Quantas.
Conférence prononcée au Collège Philosophique, Paris; 1948

V1.4 Commentaire sur les Théories récentes de Mr.L.de Broglie.
Atomes; Vol.4, No.45, p433; Dec 1949

V1.5 Le Temps Discontinu (inédit; 1929 ?)

V1.6 La Notion de Temps en Physique Théorique.
Conférence prononcée au Collège Philosophique, Paris; 1949

V1.7 L'Aspect Physique du Problème de l'Origine de la Vie.
Conférence prononcée au Collège Philosophique, Paris; 1950

V1.8 Ce que nous devons à Einstein.
Le Figaro Littéraire; Avr 23, 1955

V1.9 Paul Langevin. Notice Nécrologique.

RADIOACTIVITÉ. — *Sur les rayons β lents du mésothorium-2*. Note (¹) de MM. **D. K. Yovanovitch** et **Al. Proca**, présentée par M. Jean Perrin.

L'énergie des rayons β du mésothorium-2, actuellement connus ne descend pas au-dessous de 38000 volts. Nous avons essayé de compléter ces résultats en poussant l'investigation du côté des petites vitesses. Les résultats que nous présentons ici s'étendent jusqu'à 2900 volts environ.

La méthode employée a été la méthode classique de la déviation magnétique, les spectres étant enregistrés sur une plaque photographique. L'appareil utilisé était l'appareil bien connu à foyer; son rayon de courbure maximum était $9^{cm},5$ et il pouvait recevoir des plaques de $4^{cm},5$ de largeur. Il était plongé dans une boîte ou l'on entretenait un vide de l'ordre du $\frac{1}{10000}$ de millimètre de mercure.

Les sources ont été préparées par le procédé décrit en détail par l'un de nous (²). Pour les rendre linéaires, on tassait les oxydes des terres rares qui supportent la matière radioactive, dans une rigole en Al, ou dans une rainure pratiquée dans une plaquette en zinc.

Les plaques photographiques étaient soit des Intensives Lumière, soit des films Schumann-Hilger. Les poses duraient 6-8 heures. Un développement lent et particulièrement soigné a été reconnu indispensable.

Le champ était produit par deux bobines de Helmholtz, construites par M. d'Espine, mesurant $0^{m},89$ de diamètre et fournissant un champ uniforme dans toute l'étendue du parcours des rayons β. Grâce aux dispositions prises, ce champ était rigoureusement constant pendant toute la durée de la pose.

Le tableau suivant résume les résultats obtenus. Les intensités ont été appréciées seulement qualitativement. Les raies marquées ?, quoique extrêmement faibles, ont été rencontrées au moins deux fois sur les clichés.

(¹) Séance du 8 novembre 1926.

(²) D.-K. Yovanovitch, *Journal de Chimie physique*, 23, 1925, p. 5.

Spectre magnétique du MsTh-2.

Nos.	Intensité.	$H\rho$.	Énergie. volts
1	assez forte	181	2880
2	assez forte	195	3350
3	très faible	299	7830
4	?	333	9720
5	?	417	15100
6	?	501	21700
7	?	529	24150
8	moyenne	597	30600
9	moyenne	606	31500
10	faible	640	34500
11	assez forte	654	36500
12	très forte	668	38050
13	assez forte	676	38920
14	très forte	700	41600
15	très faible	723	44300
16	très faible	757	48340

Nous pensons, d'accord avec Black (1), que les deux raies fortes 38,05 KV, et 41,6 KV sont attribuables à des photoélectrons extraits des niveaux L_{II} et L_{III} ($N = 90$), par un important groupe de rayons γ du mésothorium-2, correspondant à 58,7 KV.

On observe sur les clichés un fond continu qui présente un aspect caractéristique. En partant de la région des petites vitesses il garde une intensité constante I jusqu'à 4500 volts environ, puis il décroît pour arriver presque à zéro. Vers 18000 volts il commence à croître lentement jusque vers 32000 volts. A cet endroit son intensité augmente assez brusquement jusqu'au niveau de la première raie forte, 38000 volts, où il atteint sa valeur maximum 1,5 I. Il garde cette valeur jusqu'au niveau de la deuxième raie forte, 41600 volts, après quoi il retombe brusquement à sa valeur primitive I.

En l'absence de mesures photométriques (que nous nous proposons d'effectuer prochainement), on ne peut encore tirer de ce qui précède des conclusions précises. Toutefois la corrélation certaine entre le fond continu et les raies est à rapprocher des conclusions théoriques de Mme Curie (2), et nous nous proposons de rechercher dans quelle mesure elle pourrait être

(1) D.-H. Black, *Proc. Roy. Soc.*, **106 A**, 1924, p. 632.

(2) Mme P. Curie, *Journal de Physique*, **7**, 1926, p. 97.

attribuée à l'effet Compton. On peut se demander en particulier si l'intervalle non impressionné sur la plaque dans la région comprise entre 10 KV et 30 KV ne correspondrait pas à la séparation des bandes dues aux électrons de choc et aux photoélectrons provenant des rayons γ, de 57,8 KV. Pour ces rayons γ, en effet, l'énergie des électrons de choc serait comprise entre 0 et 11,7 KV, tandis que celle des photoélectrons varierait entre 27 KV et 42 KV environ.

Miscellanées

DE LA BOMBE ATOMIQUE A LA CENTRALE D'ÉNERGIE

A. PROCA s'est classé, grâce à sa découverte de l'équation d'ondes du méson, parmi les premiers physiciens théoriques de France et du monde. A ce titre, il vient de prendre part aux travaux du Congrès international de Bristol, où les savants les plus qualifiés du globe ont discuté la question à l'ordre du jour de l'énergie atomique. Il est donc spécialement qualifié pour entretenir nos lecteurs de ce sujet. D'ailleurs, ce qui n'est aujourd'hui que simple possibilité théorique en ce qui concerne l'utilisation de cette énergie pour des fins pacifiques peut et doit s'inscrire dans la réalité de demain.

J. A.

Le lancement de la bombe atomique qui a éclaté sur Hiroshima a marqué le début d'une nouvelle ère dans l'histoire du développement de l'humanité.

Dans notre vieille civilisation, si étroitement liée à la matière, un nouvel élément vient de s'introduire dont on peut encore évaluer les effets. D'ores et déjà, cependant, il n'est pas exagéré de dire que sur tous les plans, — politique, militaire, économique, social, moral — un mouvement aux conséquences incalculables a commencé, qui modifiera profondément nos conditions de vie et, par là même, la structure de notre société.

En effet, la bombe atomique n'est pas seulement une arme nouvelle — et terrible — dont l'apparition changera le visage de toutes les guerre futures, qui a déjà modifié tous les équilibres antérieurs et a posé de nouveaux problèmes aux peuples et aux gouvernements. Si elle n'était que cela, elle aurait, relativement, peu d'importance ; les hommes s'y adapteraient bien vite, de force plutôt que de gré, trouveraient des contre-mesures et continueraient à vivre un peu plus dangereusement que par le passé. En réalité, la bombe présente une importance considérable parce qu'elle a démontré expérimentalement la possibilité d'utilisation de l'énergie intra-atomique à notre échelle, fût-ce sous forme explosive. Elle a prouvé que l'on est enfin parvenu à pénétrer dans un domaine inaccessible depuis toujours et si vaste que l'imagination la plus hardie n'arrive pas à en apercevoir les bornes. Elle permet d'espérer que l'homme réussira à en exploiter les richesses, à dominer et asservir les forces qu'on y rencontre et à les utiliser à telles fins qu'il lui plaira.

En réalité, les résultats que la bombe atomique nous a révélés si brutalement ne sont que l'aboutissement d'une évolution continue de patientes recherches dont le but général était la connaissance de la structure de l'atome.

On admet aujourd'hui que l'atome est constitué par un nuage électronique qui entoure un noyau central. Le nuage électronique intervient dans les phénomènes chimiques et ne nous intéresse pas ici.

Le noyau caractérise, pour ainsi dire, la personnalité de l'atome. Il est composé d'un certain nombre de particules qu'on appelle « lourdes », les unes chargées d'électricité, les protons, les autres neutres, les neutrons. Le nombre de particules lourdes contenues dans le noyau caractérise la nature du corps : le noyau d'hydrogène H^1 est formé d'un seul proton ; celui de l'uranium U^{238}, de 92 protons et 146 neutrons, etc.. La somme protons + neutrons détermine le poids atomique du corps considéré.

Si l'on ajoute, ou retranche, une ou plusieurs particules au noyau d'un corps donné, on obtient un autre corps ; certains phénomènes de radioactivité, naturelle ou artificielle, sont des processus de ce type. Nous savons aujourd'hui modifier le nombre des particules des noyaux ; le procédé consiste à bombarder le noyau par un flot de projectiles divers dont quelques-uns pénètrent à l'intérieur et y établissent un nouvel équilibre. On obtient ainsi une transformation d'un corps en un autre, une « transmutation », par un processus qui est une véritable réaction chimique nucléaire.

Le fait important est le suivant : un très grand nombre de ces réactions ont lieu avec un énorme dégagement d'énergie — qui apparaît d'ailleurs sous forme non dégradée. C'est cette énergie que les chercheurs ont toujours rêvé de capter et il n'est pas *a priori* absurde de penser qu'on arrivera un jour à trouver, parmi la quasi-infinité de réactions possibles, celle qui permettra l'utilisation pratique de l'énergie libérée.

Cependant, ce n'est pas de cette façon qu'on est arrivé à fabriquer une bombe atomique ; celle-ci met en jeu, outre des réactions du type décrit, un phénomène nouveau que nous allons examiner dans ce qui suit.

Nous avons vu qu'en principe on peut incorporer une particule lourde à un noyau et obtenir ainsi un nouveau noyau, évidemment plus lourd que le précédent. Peut-on aller indéfiniment dans cette voie ? C'est l'étude de la réponse à cette question qui a rendu possible la bombe atomique.

On peut dès le début prévoir que cette réponse sera négative. En effet, on constate que les corps les plus lourds sont radioactifs, donc instables ; on peut alors imaginer qu'à partir d'un certain moment cette instabilité devient prohibitive et rend impossible toute adjonction de particules nouvelles au noyau.

C'est bien ce qui arrive en réalité. Considérons le corps le plus lourd, l'uranium, dont la variété commune, le U^{238}, a 92 protons et 146 neutrons (poids atomique $92 + 146 = 238$). Si on bombarde avec des neutrons dans certaines conditions, à savoir en choisissant des neutrons ni trop rapides ni trop lents, on arrive à lui incorporer un de ces neutrons et à le transformer en uranium U^{239} (92 protons + 147 neutrons). Ce corps est radioactif, instable ; il se transforme en un autre, le neptunium (93 protons + 146 neutrons), également radioactif, qui se change spontanément à son tour en plutonium (94 protons + 145 neutrons), lequel est enfin stable.

Ces résultats sont bien dans la ligne classique de ceux que nous avons examinés jusqu'à présent. Si, cependant, on répète l'expérience sans les précautions indiquées plus haut, plus exactement si on bombarde le U^{238} avec des neutrons rapides, on constate l'existence d'un phénomène nouveau. Le U^{238} n'incorpore plus le neutron, mais se casse simplement en deux morceaux, en deux autres noyaux de masses comparables : c'est le phénomène de la « fission ». Tout se passe comme si le neutron rapide, jeté dans le noyau, était la dernière goutte d'eau qui fait déborder un vase plein à ras bords.

Pour avoir une image de ce phénomène, on peut comparer le noyau d'un corps à une goutte d'eau. En ajoutant à celle-ci une autre goutte, la première augmente en dimensions et en poids. On peut poursuivre cette opération, mais il est clair qu'il arrivera un moment où la goutte ainsi formée sera trop grosse et ne pourra plus conserver son unité. Elle se divisera alors en deux ou plusieurs autres : il y aura fission.

L'importance du phénomène de fission de l'uranium pour la réalisation de la bombe atomique ou de la centrale d'énergie tient aux deux faits suivants :

1° Ce phénomène a lieu avec un dégagement considérable d'énergie ;

2° La fission d'un noyau s'accompagne de l'émission simultanée de plusieurs neutrons.

Les fragments du noyau brisé et les neutrons émis se partagent ergie dégagée et acquièrent ainsi une certaine force vive, laquelle, 'y avait pas les pertes, correspondrait théoriquement à une temure extraordinairement élevée, de l'ordre des centaines de millions egrés. En fait, la température ne monte pas si haut dans un seul essus, mais, de toute façon, la masse dont fait partie le noyau en stion s'échauffe fortement.

De plus, dans ce processus, un certain nombre de neutrons sont émis. Si l'un d'eux atteint un autre noyau d'uranium voisin, ce dernier se brisera à son tour dégageant de l'énergie, donc échauffant la masse et émettant en même temps des neutrons ; à leur tour, ceux-ci briseront d'autres noyaux proches, et ainsi de suite. Il y aura un effet de « boule de neige » ou, plus scientifiquement, il s'établira une « réaction en chaîne », constituant une amplification considérable de l'effet initial.

On conçoit alors le mécanisme par lequel on peut obtenir soit un générateur d'énergie, soit une bombe atomique. Il suffira de rapprocher suffisamment un certain nombre de noyaux d'uranium pour que les utrons d'une fission d'amorçage initiale puissent être absorbés dans s atomes voisins et les briser ; les énergies individuelles s'ajouteront, élevant la température de la masse qui les absorbe.

Pratiquement, il suffira de produire une fission initiale dans un bloc d'uranium suffisamment grand pour que la somme des énergies dégagées dans les processus individuels dépasse les pertes. On peut constituer ainsi une véritable « pile thermique », qui sera notre générateur primaire d'énergie. Dans leur premier stade, au moins, les générateurs d'énergie atomique ne seront pas sans présenter une certaine analogie avec les « batteries » au moyen desquelles on produisait l'électricité avant la découverte de la dynamo.

Si le bloc d'uranium est petit, une grande proportion de neutrons s'en échappera et, ne rencontrant plus d'autres atomes à briser, sera perdue.

Si le bloc est plus grand, les fissions seront plus nombreuses, l'énergie absorbée par la masse plus importante et par conséquent la température de celle-ci plus élevée. La température finale dépendra, toutes choses égales d'ailleurs, de la masse d'uranium employée.

Or, les phénomènes que nous décrivons ici ont lieu en un temps excessivement court. Il est donc clair que, si le bloc d'uranium dans lequel on a déclenché une fission initiale est suffisamment grand, la montée de la température sera telle qu'une véritable explosion aura lieu. Il existe ainsi une dimension critique de la « pile atomique », à partir de laquelle on a l'explosion.

Pour fabriquer une bombe atomique, il suffirait donc théoriquement de prendre une masse d'uranium de dimensions suffisantes et déclencher une seule fission au moyen d'un neutron extérieur. Une telle bombe serait cependant inutilisable à cause de son instabilité ; ce que nous avons dit précédemment nous indique toutefois le moyen de remédier à ce défaut. En effet, l'explosion n'a lieu que lorsque la masse a certaines dimensions critiques. On pourra donc constituer une bombe atomique en groupant dans une même enveloppe deux — ou plusieurs — blocs d'uranium trop petits pour qu'ils puissent exploser par eux-mêmes. Au moment voulu, par un dispositif mécanique, par gravité au moment de l'impact par exemple, on pourra réunir toutes ces masses en une seule, plus grande que la masse critique, et la soumettre au rayonnement d'une source de neutrons ; la réaction s'amorce, un nombre suffisant de neutrons est absorbé dans la même masse et la température monte instantanément à des valeurs telles que l'explosion a lieu.

Ces schémas simples ne peuvent pas donner une idée des énormes difficultés qu'il a fallu et qu'il faudra vaincre pour réaliser la bombe atomique ou un générateur pouvant produire de l'énergie sous forme utilisable et contrôlable à volonté.

Nous avons indiqué plus haut la nécessité d'atteindre certaines dimensions critiques pour réaliser un ensemble explosif. Si l'on veut utiliser à cet effet l'uranium sous la forme la plus accessible actuellement, à savoir celle d'oxyde, on a calculé qu'il faudrait pour cela une masse de 40 tonnes. On a donc cherché autre chose et l'on a découvert qu'une autre variété d'uranium, le U^{235}, permettait d'obtenir les mêmes effets pour des poids beaucoup moindres, de l'ordre des dizaines de kilogrammes. Le U^{235} se trouve mélangé à l'uranium ordinaire, dont il ne peut être séparé par aucun procédé chimique ; le problème consistait à réaliser à l'échelle industrielle une séparation par des procédés physiques et électriques utilisés jusqu'à présent exclusivement au laboratoire et sur des quantités infinitésimales de matière.

Il a été résolu grâce à une mise au point industrielle remarquable ; cette séparation constitue un des plus spectaculaires succès de la technique moderne et en même temps le véritable « secret » de la bombe atomique.

Un autre problème, très important pour la bombe atomique, mais plus encore pour la centrale d'énergie, est le choix des conditions dans lesquelles on produit la fission et des moyens de régler ce processus. On y arrive en modifiant la vitesse des neutrons.

Dans ce qui précède, nous n'avons mentionné que la fission déclenchée par des neutrons rapides ; cependant, certaines substances, et en particulier le U^{235}, se brisent aussi sous l'action des neutrons lents. Or, dans certains cas, les neutrons émis lors d'une fission sont des neutrons rapides et cela empêche la réaction en chaîne de s'établir. Il faut alors ralentir tout ou partie de ces neutrons, et cela permet de contrôler jusqu'à un certain point le dégagement d'énergie. Un des procédés de ralentissement est l'emploi de l'eau « lourde » ; la presse française a déjà mentionné l'important apport français dans ce domaine.

Ces questions de mécanisme et de contrôle de la réaction sont évidemment de première importance ; cependant, dès que l'on envisage le problème sous l'angle de la production d'énergie utilisable industriellement, d'autres facteurs prennent la première place, à savoir le rendement et le prix de revient. Par la force des choses, leur étude n'a pas été très poussée jusqu'à présent ; le nombre de kilowatts-heures dépensés par exemple pour isoler l'isotope U^{235} est hors de toute proportion avec ce qu'on peut attendre de l'utilisation industrielle de ce dernier. Le problème passe ici dans le domaine proprement industriel et il n'est pas impossible que, là aussi, la découverte de nouvelles réactions soient nécessaires pour faire de la centrale atomique une réalité.

Enfin, pour les différents pays, le développement de la centrale atomique et le choix des procédés employés dépendra évidemment aussi des matières premières utilisables que ce pays possédera. Dès à présent, cependant, nous pouvons reléguer au second plan certaines préoccupations et certaines inquiétudes : si notre civilisation matérielle est destinée à périr, elle ne mourra pas par manque de source d'énergie, mais plutôt par excès. Nous n'aurons plus à nous préoccuper du fait que les réserves de houille et de pétrole ne dureront, au rythme actuel de la consommation, qu'une cinquantaine d'années ; l'énergie atomique vient à temps relayer l'énergie chimique et nous rassurer.

Même hors du domaine scientifique, les perspectives ouvertes par l'apparition de la bombe atomique sont nombreuses et variées ; elles ont attiré l'attention du grand public qui sent plus ou moins confusément qu'il s'agit là de questions vitales pour l'économie du pays.

En France, où nous sommes handicapés en ce moment après avoir été en ces matières à la pointe même du progrès, le problème de l'énergie atomique présente deux aspects.

L'un d'eux concerne la nécessité d'attaquer résolument ce problème du côté industriel. L'exemple des pays anglo-saxons montre à souhait que la solution entrevue aujourd'hui ne saurait être obtenue qu'à ce prix. Or, qui pourra, même dans le silence et le secret d'un cabinet ministériel, comparer avec satisfaction l'effort actuel de la France à celui des autres pays ?

Le second aspect de la question concerne l'éventualité de la découverte d'une nouvelle source d'énergie atomique, qui permettrait de rattraper notre retard.

Si les moyens gigantesques des autres nous font provisoirement défaut, nous pouvons garder encore l'espoir de vaincre par l'esprit. Or, pour amener cette victoire, le dévouement des hommes de science travaillant individuellement avec de petits moyens ne suffit pas ; il faut, en outre, un effort collectif considérable, hors de proportion avec tout ce que nous avons fait jusqu'à présent.

Le champ est libre, pratiquement inexploré ; il faut en organiser l'investigation systématiquement et en grand, comme si l'on était en guerre, parce qu'en fait c'est d'un véritable état de guerre qu'il s'agit. La vie des peuples, comme celle des individus, est un état d'équilibre instable qui ne subsiste qu'à la faveur d'un combat victorieux de tous les instants. Il ne faut pas oublier que, dans ce domaine et malgré les apparences, nous sommes aujourd'hui en guerre pour l'avenir du pays.

A. PROCA.

LES CONSEQUENCES PHILOSOPHIQUES DE LA THEORIE DES QUANTAS.

(Conférence prononcée au Collège Philosophique,)
(Paris, 1948)

Touchant de près, par son objet même, à des problèmes fondamentaux, la théorie des quantas dans sa forme récente a une influence marquée sur certains chapitres de la philosophie.

La raison profonde de ce bouleversement a été l'introduction du discontinu dans la science du mouvement, c'est à dire dans une discipline qui était jusqu'alors essentiellement une discipline du continu. Les diverses conséquences en ont été dégagées par une pénétrante analyse portant en premier lieu sur le sens qu'on doit donner aux termes "connaissance" du monde "physique" en particulier à l'échelle atomique ou nucléaire.

D'une façon générale, la sanction de l'expérience est capitale pour toute théorie physique; pour que le schéma qu'elle propose puisse être considéré comme décrivant un phénomène naturel, il faut que les résultats que l'on en tire soient en accord avec les résultats des mesures expérimentales. Le problème de la mesure des grandeurs physiques s'est trouvé ainsi posé dès le début en mécanique quantique et son examen attentif a entraîné la modification d'un certain nombre de nos anciennes conceptions.

On mesure une grandeur attachée à un système physique en cours d'évolution, en observant la réaction de celui-ci sur un "appareil de mesure". Il doit nécessairement y avoir réaction entre le système et cet appareil sans quoi ce dernier ne fournirait plus aucune indication. Il est clair donc que le processus même de la mesure introduit une perturbation dans le phénomène observé, perturbation généralement faible et qui n'influe pas sensiblement sur le phénomène considéré.

On peut même aller plus loin en physique quantique, et imaginer qu'en perfectionnant les appareils de mesure on peut rendre cette perturbation de plus en plus petite ce qui modifiera de moins en moins le phénomène observé. Par un passage continu à la limite, on peut donc admettre qu'on peut prendre expérimentalement connaissance d'un phénomène sans que nos mesures en aient altéré le cours.

Dire par exemple qu'un électron a une trajectoire déterminée peut avoir dans ce cas un sens expérimental bien défini.

En un mot, en physique classique, on admet que la perturbation introduite par l'appareil de mesure peut être rendue négligeable. Or, c'est précisément sur ce point que la mécanique quantique nous a obligés à modifier notre façon de voir.

En effet cette mécanique étudie le mouvement des particules ultimes de la matière, électrons, protons, etc. Or en dernière analyse les appareils de mesure eux-mêmes sont constitués par des particules de ce genre; nous mesurons donc certains éléments avec d'autres éléments du même ordre de grandeur: il n'est pas étonnant, dans ces conditions, que les perturbations ne soient pas toujours nécessairement petites.

Ce genre de raisonnement n'est pas convaincant lorsqu'on l'applique dans le domaine des particules élémentaires; à priori on peut toujours imaginer qu'il soit possible d'agencer les mesures de telle façon que toutes les perturbations introduites soient rendues négligeables et s'annulent lorsqu'on passe à la limite. Cela suppose toutefois une condition essentielle pour tout passage à la limite, à savoir la continuité. Or, si cette continuité existe en physique classique, elle fait défaut en mécanique quantique: une certaine grandeur mécanique, l'action, varie par bonds; sa valeur est toujours un multiple entier de la constante de Planck. Le passage à la limite est impossible en général et il s'ensuit que toute mesure introduit essentiellement une perturbation, d'ailleurs imprévisible, dans le phénomène étudié. Nous ne pouvons plus considérer le phénomène en lui même, indépendant de l'instrument de mesure, ce qui entraîne d'ailleurs une autre difficulté: celle de préciser la frontière entre le système de mesure et le système étudié.

Ces perturbations se traduisent par une indétermination essentielle de nos mesures, chiffrée en quelque sorte par la valeur de la constante de Planck. La manière dont elles apparaissent effectivement est riche, elle aussi, en conclusions philosophiques; examinons les sur le cas simple du mouvement d'une particule libre, d'un électron par exemple.

Dirigeons donc un flot d'électrons perpendiculairment à un écran percé d'un trou de diamètre d. Les électrons qui passent par le trou auront ainsi une position approximativement déterminée; nous aurons ainsi "mesuré" leur position à d millimètres près. Cette mesure a perturbé le phénomène "mouvement d'un électron" et la mécanique ondulatoire nous enseigne de quelle façon.

La vitesse de l'électron, ou plus exactement la quantité de mouvement qui lui est proportionnelle a été affectée de telle façon que nous ne saurions désormais mesurer sa composante le long de l'écran à plus de h/d près, quelle que soit la méthode employée. Nous pouvons diminuer le diamètre d du trou et réduire ainsi l'incertitude sur la position de l'électron; mais alors l'indétermination de la vitesse de celui-ci grandira et cela est dû essentiellement au fait que le quantum de Planck h est une grandeur finie différente de zéro.

D'une façon générale d et h étant les indéterminations avec lesquelles nos mesures fixent respectivement la position et la quantité de mouvement de l'électron, le produit p.d est toujours de l'ordre de h, résultat connu sous le nom de relations d'indétermination de Heisenberg.

Du point de vue général qui nous préocuppe ici, l'accroissement de la précision d'une mesure ne s'obtient qu'au détriment de l'exactitude avec laquelle on peut mesurer un autre élément du phénomène considéré. A la limite, si on mesure exactement un des éléments du phénomène, nous sommes sûrs que la perturbation a été telle qu'un autre élément est complètement et essentiellement indéterminé.

La constante de Planck introduit donc une indétermination essentielle; les grandeurs dont les précisions varient en sens inverses (comme par exemple x et p) s'appellent des grandeurs canoniquement conjuguées. Nous ne pouvons pas connaître simultanément deux grandeurs conjuguées, si nous donnons au terme "connaître" le seul sens raisonnable, à savoir "percevoir réellement" ou encore "mesurer".

Suivant cette conception nous ne pouvons avoir des phénomènes une connaissance exacte et complète à la fois: ou bien nous en percevons tous les aspects, mais flous, ou bien nous en saisissons un dans tous ses détails, mais celà même nous empêche de distinguer un autre aspect du phénomène qu'on appelle complémentaire du précédent.

Au fond, il n'y a rien de choquant à admettre en principe cette dualité à laquelle notre vie quotidienne nous prépare de mille façons: nous ne pouvons, par exemple, apercevoir un visage à la fois de face et de profil; ou encore, lorsqu'on observe une préparation au microscope et qu'on met au point sur un plan déterminé, tous les autres plans, sont nécessairement flous et inobservables.

Revenons à l'exemple précédent. Soit un flot d'électrons tombant perpendiculairement sur un écran percé d'un trou. Un raisonnement simple montre que, après le passage par le trou, les vitesses ne seront plus normales à l'écran mais s'épanouissent en éventail d'autant plus ouvert que le trou est plus petit. Passons à la limite d'un trou infiniment petit. Alors qu'à gauche de l'écran où la position de l'électron peut être un point quelconque de l'espace, les vitesses sont toutes parallèles, à droite de l'écran c'est à dire après avoir fixé la position de la particule en l'obligeant à passer par un trou, les vitesses remplissent tout l'espace et la propagation des électrons se fait radialement à partir du trou comme si celui-ci était une source émettant une onde sphérique.

Nuos avons à droite et à gauche de l'écran deux aspects complémentaires d'un même phénomène, l'aspect corpusculaire et l'aspect ondulatoire. La lumière nous apparaît le plus souvent comme un phénomène ondulatoire, mais nous savons qu'il suffit de se placer dans certaines conditions expérimentales pour que son caractère corpusculaire apparaisse. Un électron était considéré essentiellement comme un corpuscule; et cependant il suffit d'en faire passer un flot par un trou suffisamment petit pour constater, de l'autre côté de l'écran, l'apparition de franges de diffraction preuve irréfutable d'une propagation ondulatoire.

Du point de vue philosophique, une nouvelle notion se dégage ainsi, dont l'importance dépasse le cadre de son application: la notion de complémentarité, distincte de celle d'exclusion. Les logiciens s'en sont d'ailleurs emparés pour tenter de l'utiliser dans le cadre de leur discipline.

Parallèlement avec l'apparition de notions nouvelles certaines notions classiques perdent toute signification. Il en est ainsi par exemple de la notion de "trajectoire" d'un électron. Pour pouvoir suivre un électron sur sa trajectoire, il faudrait pouvoir fixer par des mesures la position de ses divers points. Or la première mesure perturbe radicalement le mouvement et la "trajectoire" disparaît. Il n'est plus possible de fixer ce que l'on appelle en mécanique classique " les positions successives d'un point sur sa trajectoire" et cette constatation est lourde de conséquences. La nouvelle mécanique nous donne en bloc toutes les positions possibles du point, ou d'une façon générale toutes les valeurs possibles d'une grandeur mesurable quelconque; elle y ajoute cependant la probabilité pour qu'une mesure déterminée fournisse précisément telle ou telle valeur parmi celles qu'elle a désignées comme possibles.

Les probabilités apparaissent ici d'une façon entièrement différente de celle de la théorie classique. En fait, comme conséquence des conceptions fondamentales, c'est le problème même de la causalité et du déterminisme des phénomènes naturels qui est en jeu.

Laplace a formulé d'une façon saississante la conception du déterminisme absolu qui est celui de le mécanique classique:

" Nous devons donc envisager l'état présent de
" l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme
" la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui
" pour un instant donné connaîtrait toutes les forces
" dont la nature est animée et la situation respective
" des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était
" assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse,
" embrasserait dans la même formule les mouvements des
" plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger
" atome; rien ne serait incertain pour elle et l'avenir
" comme le passé serait présent à ses yeux."

La situation est radicalment changée en mécanique quantique. Pour reprendre l'exemple simple mentionné plus haut, il suffit en mécanique classique de donner la position initiale d'un point matériel et sa loi de mouvement (sous forme d'équation différentielle) pour pouvoir en déduire sa trajectoire, c'est à dire ses positions successives, qui sont alors parfaitement déterminées. Or, en mécanique quantique, il n'est plus possible de relier entre elles des "positions successives" pour constituer une courbe réelle que suivrait l'électron; en particulier, il n'est plus possible d'affirmer que telle position est postérieure à une position initiale à laquelle elle serait reliée par une suite continue d'étapes intermédiaires permettant d'établir entre elles un ordre de succession. Une position initiale étant donnée, la position du point, à moment ultérieur n'est plus déterminée; toute une série de positions sont possibles parmi lesquelles certaines ont une plus grande probabilité. En ce sens la mécanique quantique est indéterministe ou mieux, présente un déterminisme statistique, probabilitaire. Certaines théories classiques, la théorie cinétique des gaz par exemple, fournissent aussi leurs résultats uniquement sous forme de probabilités mais diffèrent dans leur essence de la mécanique quantique. En effet l'apparition des probabilités n'est due qu'à l'intervention des grands nombres et à l'ignorance dans laquelle nous nous trouvons à l'égard des détails microscopiques des phénomènes. Les mouvements des molécules individuelles obéissent à des lois précises qui sont celles de la mécanique classique; il y a toujours dans ces théories statistiques un déterminisme sous-jacent, même si l'on suppose que c'est le hasard pur qui gouverne les mouvements élémentaires, car le hasard pur c'est à dire l'absence de toute loi est encore une loi parfaitement déterminée. Rien de tel en mécanique quantique. Il s'agit ici d'un indéterminisme essentiel, qui a son origine en fin de compte dans l'introduction de la discontinuité, du quantum h, et dans une analyse plus serrée de ce que l'on doit appeler grandeur observable.

Il y a lieu d'éviter lorsqu'on examine ces questions une confusion qui a été faite maintes fois entre déterminisme et causalité avant la mécanique quantique. Le déterminisme absolu de Laplace, (voir le passage cité plus haut) pouvait lui permettre d'examiner les deux problèmes simultanément. La mécanique quantique, elle, est indéterministe mais cela ne signifie pas qu'elle prétend prévoir l'évolution des phénomènes naturels et que la notion même de loi naturelle s'évanouirait si l'on abandonnait la causalité. Elle prévoit les phénomènes dans la mesure où il est possible de le faire et montre précisément quelles sont les limites de cette possibilité. Elle substitue au déterminisme absolu un déterminisme statistique qui ne permet plus que des énoncés de probabilités.

Mais il ya a plus. L'argumentation précédente concerne uniquement les grandeurs observables rattachées aux phénomènes naturels, c'est à dire celles qu'il est nécessaire de donner ou de mesurer pour décrire le phénomène. Nous pouvons cependent imaginer l'existence de grandeurs physiquement inobservables, liées d'une façon ou d'une autre aux phénomènes considérés: leurs lois de variation ne sont naturellement pas soumises aux restrictions précédentes; nous ne sommes plus sur le plan physique mais sur un plan mathématique où la mesure n'intervient plus où rien ne nous empêche de faire les hypothèses que nous jugeons utiles.

De pareilles circonstances se rencontrent précisément en mécanique ondulatoire. L' "état" d'un système physique y est défini par une fonction , appelée fonction d'onde, grandeur inobservable, qui permet le calcul des probabilités. Or l'évolution dans le temps de cette fonction est définie par une équation différentielle c'est à dire, elle se poursuit selon les lois du déterminisme le plus strict. Nous pouvons dire que la mécanique ondulatoire décrit la réalité sur deux plans: d'une part le plan des états des systèmes, plan mathématique, idéal, mettant en jeu des grandeurs non mesurables; et d'autre part le plan des grandeurs observables, plan physique, sur lequel se trouvent groupées les grandeurs accessibles à l'expérience, celles qui en dernière analyse peuvent être mesurées et décrivent donc physiquement le phénomène considéré.

Les deux plans ne se superposent pas; la brisure est introduite par l'acte de la mesure lui-même. Sur le plan physique il n'y a pas de déterminisme; entre deux mesures qui fixent deux événements du plan physique, le "lien causal" passe par le plan mathématique, sur lequel les grandeurs (inobservables) liées au phénomène suivent des lois continues et strictement déterminées.

En un mot, ou bien nous décrivons les phénomènes dans l'espace-temps, sur le plan physique où nous observons effectivement et alors il n'y a pas de déterminisme mais des relations d'incertitude; ou bien nous nous plaçons sur le plan mathématique et nous obtenons une image théorique, un schéma mathématique dans lequel on peut parler de "causalité et déterminisme" absolus.

Comme on le voit la distinction entre grandeurs observables dans l'espace-temps et grandeurs essentiellement inobservables est très importante. La frontière entre ces deux catégories est bien tracée dans l'état actuel de la mécanique quantique, mais on ne peut pas dire à priori que ce tracé soit définitif. En fait, des essais ont été récemment tentés de déplacer cette frontière; toute la structure de la mécanique quantique s'en est trouvée modifiée, mais jusqu'à présent les résultats obtenus ne laissent pas prévoir le sens dans lequel s'orientera le développement futur. Il est prématuré de supputer les chances qu'aurait eu un tel développement d'apporter de nouvelles contributions au domaine de la philosophie.

Enfin, il faut mentionner un dernier point de contact avec ce domaine. Nous avons examiné les modifications profondes qu'apporte la mécanique quantique à notre description des phénomènes dans l'espace-temps. A vrai dire, cette notion d'espace-temps est elle aussi une notion à notre échelle et la question peut se poser de savoir ce qu'elle devient ou quel est le sens qu'on doive lui attribuer dans l'infiniment petit. Le problème n'a pas encore été étudié à fond mais une tentative mérite d'être signalée. Partant de l'introduction des discontinuités en mécanique et plus particulièrement de certaines théories qui font croire à l'existence d'une longueur minima dans l'univers, une hypothèse a été mise en avant suivant laquelle l'espace lui-même pourrait être discontinu.

Le problème est posé et il faudra le résoudre; qu'elle qu'en soit la solution, nul doute que l'analyse correspondante n'enrichisse la philosophie.

Les quelques points effleurés dans les lignes qui précèdent montrent dans quelle mesure la nouvelle physique quantique chemine parallèlement à la philosophie. Bien mieux, les domaines respectifs empiètent l'un sur l'autre et à certains moments les deux disciplines se confondent; rarement dans le passé, la physique a-t-elle mieux mérité le nom qu'on lui donnait autrefois, celui de "philosophie naturelle".

Nouvelle hypothèse sur l'interaction des constituants du noyau de l'atome.

Dans une toute récente étude de physique théorique, Louis de Broglie vient d'apporter une importante contribution au mécanisme d'interaction des particules chargées du noyau, susceptible de lever certaines difficultés mathématiques.

Essayons, dans la mesure du possible, et sans faire appel aux calculs souvent inévitables dans ces domaines, d'indiquer la nature des problèmes traités et le caractère de la solution.

Le problème considéré est l'analyse de l'interaction entre une particule chargée électriquement et un champ, et par conséquent entre deux particules. La solution proposée conduit à admettre que deux champs interviennent dans cette interaction : le champ électromagnétique bien connu (qui trouve sa source dans la charge électrique) et un deuxième, le champ « mésonique » (produit par des mésons). Mais alors que jusqu'à présent ces champs étaient considérés comme indépendants, autonomes, on suppose ici une sorte de fusion entre les deux, qui se manifeste de la façon suivante : Chaque corpuscule crée, par l'intermédiaire des deux charges *e* (électrique) et *m* (mésonique), le champ électromagnétique E_e et le champ mésonique E_m. Lorsqu'il y a interaction, il est évident que le champ E_e de l'un des corpuscules agira en tous cas sur la charge *e* de l'autre et de même E_m sur *m*. L'hypothèse fondamentale de Louis de Broglie consiste à admettre que la charge *e* subit l'action combinée des deux champs E_e et E_m, *bien qu'elle-même ne soit capable de donner naissance qu'à un champ du seul type* E_e.

★

Quel est l'intérêt de cette hypothèse ? Le but poursuivi est l'élimination de certaines difficultés qui se manifestent actuellement en physique théorique par l'apparition de valeurs infinies, donc inadmissibles, de l'énergie.

Sous sa forme la plus simple, la situation est la suivante : L'énergie d'un électron dans le champ d'un deuxième électron est inversement proportionnelle à la distance *r* qui les sépare. Si l'on rapproche les électrons jusqu'à les confondre, autrement dit, si l'on calcule l'énergie d'un électron dans son propre champ, *r* tend vers zéro et l'énergie propre devient infinie.

La manière d'éviter cette difficulté en électrodynamique classique est fort simple. Il suffit d'admettre que l'électron n'est pas ponctuel, mais constitué par exemple par une sphère ayant un diamètre petit, mais fini. Dans ce cas, la distance entre les deux électrons ne peut être inférieure à ce diamètre ; elle ne peut donc être nulle et l'énergie propre reste finie. Il n'en est plus de même en électrodynamique quantique où les électrons sont toujours ponctuels et l'énergie propre infinie.

L'hypothèse dont il a été question plus haut tend à faire disparaître ces infinis par un procédé analogue au procédé classique, tout en conservant le caractère ponctuel des électrons. En ajustant convenablement les valeurs des « charges » électriques, et mésoniques, on montre que l'existence d'un champ mésonique supplémentaire équivaut, pour l'interaction, à l'existence d'une distribution étendue, non ponctuelle, de charge électrique et cela suffit pour rendre finie l'énergie propre. En bref, on admet que *l'interaction entre électrons se fait par l'intermédiaire d'un champ total, englobant le champ électromagnétique et le champ mésonique, ce qui équivaut à une interaction électromagnétique unique, mais entre charges étendues.*

Les explications qui précèdent essayent de dégager l'armature de l'hypothèse fondamentale. Souvent, cependant, une image simple aide à mieux comprendre le mécanisme d'une théorie ; essayons d'esquisser une telle analogie.

Considérons au lieu de nos deux corpuscules, deux personnes qui discutent ; il y a interaction. Supposons que pour le moment l'une d'entre elles parle ; l'autre écoute, c'est-à-dire se trouve dans le « champ » des raisonnements qu'on lui présente et est influencée d'une certaine manière par ceux-ci.

Or, telle quelle, notre analyse est incomplète ; qu'advient-il en effet si la personne qui parle a beaucoup de charme? Son interlocuteur subira inévitablement dans ce cas une autre influence que celle des raisonnements et qui s'ajoutera à celle-ci ; il se trouvera plongé dans un deuxième « champ », incommensurable avec le premier. Il subira l'effet global de ces deux influences, qui ne résulte pas d'une simple juxtaposition. En effet, les arguments rationnels n'agissent pas seulement sur la raison, ni le charme uniquement sur la sensibilité ; et il n'est pas impossible que quelquefois la raison soit partiellement obnubilée par des influences affectives.

Tout comme les corpuscules, l'homme peut agir sur ses semblables de deux manières : par la raison et par le sentiment ; et bien que chacune de ces deux « charges » ne puisse donner lieu qu'à une seule sorte de champ bien déterminé, rationnel ou affectif, c'est l'effet global qui agira sur chacune des « charges » de la personne réceptrice.

LE TEMPS DISCONTINU

Note de l'Editeur:

Il n'a pas été possible de retrouver la trace de la publication effective de ce texte. Il est cependant inclus dans cet ouvrage commémoratif, et à cette place, car il représente le texte le plus ancien où soient développées les idées de Alexandre Proca sur le problème du Temps.

Elles peuvent ainsi être plus aisément comparées aux ultimes réflexions concernant ce problème contenues dans le texte successif : cote VI.5 " La notion de Temps en Physique Théorique" - 1949.

L'analyse mathématique de la notion de Temps propre, sous jacente à l'article "Le temps discontinu" , est développée dans le texte figurant sous la cote II.9 :
" Sur la Théorie relativiste de l'électron de Dirac dans un champ nul" - 1933.

LE TEMPS DISCONTINU

par Al. PROCA

1. - Introduction.

Le problème du temps a des aspects innombrables.

En dehors des difficultés inhérentes à ce genre de problèmes, nous devons compter ici avec l'impossibilité totale de vérifier l'exactitude de la solution proposée. Nous ne pouvons pas faire appel à l'expérience. Pas plus que dans les sciences de pure observation, nous ne pouvons modifier les conditions du problème pour voir de quelle façon elles influent sur le résultat. Mais, à défaut d'expériences possibles, il existe un autre élément, non négligeable, qui peut nous servir de guide: c'est l'étude de l'évolution de la notion de temps dans les sciences exactes.

Les sciences exactes, et la Physique en particulier, utilisent une variable t, signe d'une notion qui a beaucoup de points communs avec la notion de temps. Mais ce "temps physique" évolue à mesure que de nouvelles découvertes, de nouvelles vérifications expérimentales viennent modifier les théories; il suffit de rappeler, non seulement la théorie de la relativité mais aussi la théorie des quanta et le principe d'indétermination de Heisenberg. Cette évolution nous présente divers aspects de la notion de temps, et son étude approfondie est indubitablement d'un grand secours pour la résolution complète du problème.

Nous n'entreprendrons pas ici une telle analyse. Nous nous limiterons à l'examen rapide d'une seule question : en suivant la voie indiquée précédemment, nous essayerons de voir ce qu'on peut dire sur la discontinuité du temps.

L'idée de la discontinuité du temps se rencontre de plus en plus souvent dans la littérature scientifique. Elle y est présentée soit comme hypothèse, soit comme déduction, le point de départ étant, dans ce dernier cas, la théorie des quanta. La plupart des articles qui adoptent le premier point de vue, ont pour but exclusif le calcul de la valeur numérique du chronon, c'est-à-dire de l'atome de temps. Le problème de la réalité même du chronon est seulement effleuré, ou, le plus souvent, complètement laissé de côté (1). Il nous semble cependant qu'une investigation critique du point de départ est indispensable. Le calcul du chronon est de la première importance, mais encore faut-il savoir exactement ce que signifie la valeur calculée. De toute façon, le calcul fait appel à des suppositions auxiliaires; il est indispensable de voir si celles-ci n'introduisent pas des éléments étrangers à la question, et, en tous cas, de préciser leur rôle et leur influence.

On peut cependant procéder autrement: partir de la théorie des quanta pour aboutir à l'atomicité du temps, qui n'est plus de cette façon qu'une conséquence. L'idée que la théorie des quanta conduit nécessairement à la quantification du temps, ne semble pas absurde à priori. A notre connaissance, c'est Poincaré (2) qui en a eu l'idée le premier. La quantification effective du temps a été faite beaucoup plus tard, et de diverses façons. Mais il ne suffit pas de montrer que le temps est atomique pour que le problème soit complètement résolu. On peut se demander encore de quelle nature sont ces atomes de temps, ou quels sont les caractères de cette atomicité comparée à celle de la matière, par exemple.

Dans les paragraphes qui suivent, nous essayerons d'examiner ce problème complexe. Nous analyserons donc la notion de temps, au point de vue du physicien. Le temps est un élément fondamental de la Physique et la manière dont il y apparaît fixe ses traits caractéristiques. C'est ce "temps" que nous examinerons et non pas une autre entité métaphysique. Bien plus, nous circonscrivons le problème en nous guidant exclusivement sur la mécanique analytique complétée par la théorie classique des quanta. Chemin faisant, nous préciserons quelques observations sur le caractère de la variable temps, qui sont indépendantes de la question de l'atomicité. Nous laisserons cependant de côté toutes les questions se rattachant de près ou de loin aux idées d'Einstein sur la relativité; de cette façon, cette note ne présentera que des choses nouvelles et évitera des redites, si fréquentes dans ce domaine tant de fois exploré.

2. - Temps Physique.

Nous appellerons "temps physique" ou simplement "temps", la variable qui entre dans les calculs de la mécanique analytique classique. La valeur de cette variable peut s'exprimer au moyen des nombres ordinaires et se mesure à l'aide d'horloges (au sens ou ce terme est employé en relativité). Nous examinerons dans ce qui suit l'influence de la théorie classique des quanta sur nos idées concernant le temps. Comme on le voit, nous ne ferons pas appel aux nouvelles mécaniques; nous laisserons ouverte la question de l'influence que peuvent avoir les idées de Dirac, par exemple, ou l'assimilation du temps à un nombre q. Cette partie du problème nous réserve probablement des belles surprises, mais il est indispensable de franchir d'abord le premier pas, avant de s'aventurer dans un domaine presqu'inconnu.

3. - Distinction fondamentale.

Quand on parle du "temps physique", on fait souvent une confusion qu'il importe de signaler et d'éliminer dès le début.

Considérons les phénomènes réversibles et les phénomènes irréversibles, - ceux pour lesquels l'entropie est constante et ceux pour lesquels elle croît continuellement. Le mouvement d'une seule molécule rentre dans la première catégorie; les propriétés statistiques d'un grand nombre de molécules font partie de la seconde. Imaginons qu'on écrive les équations des phénomènes. Pour ceux de la première catégorie, la variable t prendra des valeurs tant positives que négatives à partir d'un instant initial pris pour origine; pour la deuxième catégorie, t sera exclusivement plus grand que zéro.

La variable t se comporte de façons différentes dans les deux cas. Pour simplifier le langage distinguons ces deux cas en disant, par pure convention, qu'il y a deux temps: t_1, pouvant varier dans les deux sens et t_2 ne variant que dans un seul. C'est entre ces deux temps qu'une confusion est possible. Qu'advient-il en effet ?

Dans la nature seuls les phénomènes irréversibles sont réalisés; l'évolution se fait dans un seul sens. D'autre part, nous avons l'impression que le temps senti, le temps physiologique varie, lui aussi, dans un seul sens; il est absurde de s'imaginer que ce temps puisse brusquement changer de signe. On relie alors ces deux constatations en disant; "notre esprit a conscience d'une évolution dans un seul sens et l'interprète comme l'écoulement du temps; c'est dans ce temps que se placent les phénomènes observés. Nous sommes en présence du seul temps qui existe réellement et celui-ci a toutes les caractéristiques du temps t_2; le temps t_1 n'apparaît nulle part dans l'univers. Le temps t_1 n'existe pas."

Un magnifique exposé de cette manière de penser se trouve dans un livre récent d'Eddington, The nature of the physical world (3). Eddington rapproche le "temps" de l'entropie. L'argument fondamental pour justifier cette analogie, consiste dans le fait, enregistré par notre conscience, que le temps s'écoule, qu'il varie toujours dans un seul sens, sans arrêt ni retour, comme l'entropie. Or, c'est là, à notre avis, une erreur qui fausse tous les raisonnements ultérieurs. Par opposition au précédent, le "temps physique" que nous envisageons ne s'écoule pas; il peut le faire, mais il peut aussi bien revenir en arrière ou rester stationnaire. Examinons en effet, le problème de plus près.

4. - L'écoulement du temps.

Considérons l'univers figé, mort, aucun phénomène n'ayant lieu dans toute son étendue. Est-il encore raisonnable de dire que le temps s'écoule pendant que tout repose? Il nous semble que ce serait une absurdité. Si on voulait se rendre compte tout de même que le temps passe, on devrait utiliser une horloge, enregistrant par exemple les battements de son pendule; mais alors il y aurait au moins un phénomène dans notre univers, ce qui est contraire à l'hypothèse du début. L'introduction de l'horloge et, en général, d'un phénomène quelconque dans notre univers, fait apparaître une évolution, donc une variation du temps. Jusqu'à l'apparition du phénomène on peut dire que le temps était nul; il n'y avait pas de phénomène, il n'y avait pas de temps. Quand le phénomène apparaît le temps commence à varier; quand il disparaît, le temps du système s'arrête et prend une valeur constante qui peut être nulle si l'on est revenu à l'immobilité initiale. Le temps est une caractéristique propre du phénomène; ce n'est pas un cadre extérieur dans lequel se place ce phénomène, mais bien un élément qui le définit, qui est lié à son évolution. Le temps physique est attaché à un système qui évolue, comme la température est attachée à un corps chaud. Toute variation de température correspond à une modification du système; toute variation du temps physique signifie de même un changement.

Reprenons notre univers immobile; il ne s'y passe rien, le temps est nul. Supposons qu'on y retourne un sablier. Le temps du système varie; il est défini par l'écoulement des grains de sable. Si on arrête le sablier, il ne se passe de nouveau rien: le temps est stationnaire. Il n'est pas nul, parceque le système n'a pas la configuration qu'il avait au début; il a une autre valeur fixe. Il redevient nul au moment où le sablier est de nouveau vide. Le temps peut donc aller en avant ou revenir en arrière, prendre des valeurs positives et négatives, à l'encontre du temps physiologique ou de la durée.

Si nous considérons un changement quelconque, un phénomène unique, isolé, (comme nous l'avons fait jusqu'à présent), le seul fait de son évolution nous conduit à attacher à ce phénomène une grandeur qui décèle cette évolution. C'est presqu'une tautologie; en effet, dire qu'un phénomène évolue, c'est supposer l'existence d'aspects divers dont la succession crée son temps propre. Pour un corps chaud, nous pouvons toujours définir une température; c'est une autre façon de dire qu'il contient de la chaleur. Pour un système qui évolue, nous pouvons toujours définir une variable qui indique cette évolution: c'est le temps. Le phénomène n'est pas quelque chose qui se déroule dans le temps; il crée par son évolution même, son temps propre. Le temps est une variable du phénomène attachée au système et qui est le signe de cette évolution.

Il faut remarquer que l'existence de cette variable signale une évolution, mais ne la mesure pas; ceci est un problème tout différent et que nous examinerons dans un autre paragraphe.

5. - "Temps" de diverses espèces.

On conçoit maintenant que pour chaque phénomène, nous puissions avoir un "temps propre", différent dans chaque cas si le rythme de l'évolution des phénomènes est différent. Ainsi un phénomène élémentaire réversible donnera lieu à un temps pouvant prendre indifféremment des valeurs positives ou négatives, croître, décroître ou rester stationnaire. Ce sera un temps t1. Mais si nous envisageons un phénomène où la loi des grands nombres joue, c'est-à-dire un phénomène irréversible, le temps qu'il crée ne pourra pas retourner en arrière; il ne pourra que varier dans un seul sens: ce sera un temps t2. On voit qu'on ne doit pas accorder de préférence absolue à l'un plutôt qu'à l'autre. Le temps est relatif, dans l'acception la plus générale de ce terme.

C'est vraisemblablement là que se trouve le point entre le temps physique et la durée perçue. Nous avons la sensation de temps, soit par l'intermédiaire des phénomènes physiologiques qui se passent en nous, soit par les mouvements de notre conscience. En dernière analyse cependant, les phénomènes primaires ont lieu dans les deux cas avec dégradation d'énergie; ils sont tous des phénomènes essentiellement irréversibles. Le "temps" qu'ils définissent sera nécessairement, lui aussi, irréversible. Il n'est donc pas étonnant que notre sensation de temps ou de durée soit celle d'une fuite, d'un écoulement dans un seul sens, - ni que le rythme en soit différent suivant qu'il s'agit d'un mécanisme de la vie où d'un éclair de la pensée.

Cette correspondance ne permettrait-elle pas une explication, ou plutôt une classification en "temps spatial" et "durée bergsonienne", le premier étant défini par les phénomènes vitaux et la deuxième par l'acte de penser ?

6. - De la mesure du temps. Périodicité.

Reprenons notre univers fictif, mais considérons maintenant deux phénomènes au lieu d'un seul. Nous pouvons comparer leurs évolutions au moyen des notions de coincidence et de simultanéité qui ont été analysées dans la théorie de la relativité, et sur lesquelles nous n'insisterons pas ici. Ayant choisi une fois pour toutes un phénomène de référence, une horloge, nous pouvons rapporter le "temps" de tous les autres au "temps" de référence. Nous avons ainsi une sorte de "mesure" du temps au moyen d'un phénomène auxiliaire absolument arbitraire, qui n'est pas nécéssairement périodique ni réversible. C'est une évaluation de ce genre que nous faisons quand nous jugeons du temps par nos impressions, par le rythme des phénomènes physiologiques qui se passent en nous, ou par nos émotions; le désaccord qui existe souvent entre cette évaluation et une horloge extérieure nous montre qu'à chaque phénomène est attaché un "temps" différent et caractéristique.

Comment s'introduit alors la périodicité ? Celle-ci apparaît exclusivement quand on veut faire correspondre une valeur numérique au résultat de la comparaison entre un phénomène quelconque et une horloge donnée.

Imaginons que le seul phénomène qui se passe dans l'univers soit la rotation complète d'une aiguille en face d'un cadran. Au commencement du mouvement, nous pouvons attribuer à l'horloge un temps arbitraire, zéro, par exemple; à la fin il aura la valeur t. Mais si l'horloge est revenue exactement dans le même état, (nous faisons abstraction des pertes d'énergie), l'instant t sera indiscernable de l'instant zéro. Si l'aiguille recommence à tourner, nous pouvons dire la même chose pour deux coincidences successives quelconques. Le temps de l'horloge après n tours de l'aiguille se trouve ainsi découpé en tranches, égales par définition. Nous avons alors le droit de choisir comme "mesure" de ce temps le nombre entier n.

La périodicité n'est donc pas une caractéristique intimement liée à la notion de temps; elle ne sert qu'à nous permettre d'établir une correspondance entre le temps de référence et la suite des nombres entiers. Nous mesurons le temps comme on mesure une longueur: en mettant bout à bout des unités de mesure. Une horloge qui mesure un intervalle de temps ressemble à l'arpenteur qui se déplace sur le terrain pour mesurer une distance.

La périodicité est si peu une propriété caratéristique attachée au temps, qu'il faut faire un effort pour relier ces deux notions. En fait, la nature est une vaste horloge qui n'est justement pas du type périodique. Tout s'y dégrade, tout s'effrite. L'évolution s'y poursuit dans un sens déterminé et même les phénomènes qui, en apparence, sont périodiques, ne le sont pas en réalité. C'est parce que nous rapportons tout aux indications de cette horloge universelle, que nous avons acquis la notion d'un temps qui coule comme un large fleuve. C'est parce que nos phénomènes baignent, en quelque sorte, dans ce fleuve, que nous avons acquis l'illusoire notion d'un temps absolu, indépendant des phénomènes qui s'y passent.

Il n'est cependant pas difficile de s'imaginer ce qui serait arrivé si la nature évoluait périodiquement. Si, avec le retour des saisons, tout redevenait pareil à lui-même, (y compris les cellules du cerveau qui, par leurs modifications enregistrent les souvenirs), il n'y aurait aucun motif logique de dire qu'une année s'est écoulée, et, qui plus est, aucun fait pour le prouver. Le temps reprendrait donc, lui aussi, la valeur qu'il avait eue, et une nouvelle période d'évolution s'amorcerait, absolument indépendante de la première.

7. - Caractéristiques énergétiques du temps.

Ceci étant précisé, il est facile d'examiner la variable "temps physique", du point de vue de l'énergétique générale.

Nous avons vu qu'on peut considérer ce temps physique comme une variable caractéristique du système. On peut se demander à quelle catégorie énergétique appartient cette variable: à la catégorie des potentiels, ou facteurs d'intensité, ou à celle des facteurs de capacité. D'après ce que nous avons dit plus haut, il est évident qu'énergétiquement le temps n'est pas de la nature d'un facteur de capacité, mais qu'il se rapproche plutôt des potentiels. Comme les potentiels, le temps n'est déterminé qu'à partir d'une origine, d'ailleurs arbitraire. Les temps de deux systèmes ne sont pas susceptibles de s'additionner comme les facteurs de capacité, et ne sont pas conservatifs. Entre deux systèmes identiques et qui, au surplus, ont leurs temps égaux, on ne peut concevoir aucune action, il y a équilibre. Mais si les temps diffèrent les systèmes sont différents et une interaction est possible.

En examinant les choses d'un peu plus près, nous avons vu (4) qu'en fait ce n'est pas le temps t qui est de la nature d'un potentiel, mais bien son inverse, ou pour préciser, l'inverse de sa variation 1/dt. Si cette variation est la même et finie, dt=-T, comme pour les phénomènes périodiques, le potentiel correspondant est la fréquence x . Si elle n'est pas finie le potentiel est une vitesse dx/dt, c'est-à-dire le taux de la variation d'un élément quelconque X. Cela est facile à concevoir; nous avons vu en effet que le temps utilisé ici est intimement lié à l'évolution d'un phénomène, plus précisément au rythme de cette évolution, donc à la variation d'un élément X caractéristique du phénomène. Il est naturel que cette variation se retrouve dans l'expression du facteur d'équilibre correspondant. D'ailleurs, pour ce que nous avons en vue ici, cette précision est superflue; nous l'examinerons autre part. Ce qu'il faut retenir, c'est le fait que le temps n'est pas l'analogue de l'entropie, comme on le croit, mais se rapproche bien plus de la température.

8. - Discontinuité du temps.

Les résultats acquis jusqu'à présent nous permettent d'examiner d'un peu plus près le problème de la discontinuité du temps, que nous avons mentionné au début de cette note.

Nous avons vu que le temps physique est une variable qui n'est pas de la nature d'un facteur de capacité. Or, d'après ce que nous avons appelé le principe de l'atomicité des entropies (5), seuls les facteurs de capacité des diverses énergies connues représentent des éléments à structure granulaire. Seuls les éléments comparables à la matière sont atomiques comme la matière elle-même. Pour chacun d'eux on peut trouver la valeur de "l'atome" correspondant (par exemple, la charge e, l'action h); ces grandeurs sont invariantes et ont une signification absolue. Le temps ne rentre pas dans la catégorie des facteurs de capacité; donc si l'on admet le principe invoqué plus haut, nous pouvons affirmer qu'il n'existe pas un atome de temps.

Mais il faut ajouter immédiatement que cela n'exclut nullement la possibilité d'une variation discontinue du temps. Le temps reste discontinu, mais sa discontinuité n'est pas essentielle.

Voici le résultat auquel nous conduit notre conception. Analysons-le de plus près.

9. - Nature de la discontinuité du temps.

La notion de discontinuité du temps peut être introduite, soit directement comme hypothèse, à priori, soit comme conséquence de la théorie des quanta, au moyen d'hypothèses auxiliaires. La première manière de voir est adoptée par la plupart des auteurs dont le but est de calculer la valeur du chronon. Ceux-ci admettent implicitement l'existence d'un atome de temps ayant une signification absolue. Par contre, le raisonnement que nous avons donné (6), ainsi que celui que nous esquissons plus loin, envisage la discontinuité du temps comme une conséquence de l'hypothèse des quanta. C'est l'adoption du grain d'action h qui nous oblige à admettre l'existence d'un atome de temps.

Cette deuxième manière de voir présente le gros avantage de permettre une analyse de la discontinuité prévue. Elle montre dès le début que l'atomicité du temps n'est pas absolue, c'est-à-dire que la valeur du "chronon" n'est pas toujours la même. Autrement dit, il se passe pour le temps ce qui a lieu pour l'énergie. Dans l'hypothèse d'Einstein, celle-ci bien discontinue, mais la valeur d'un grain est hy, donc dépend de la fréquence. Seul l'atome d'action a une valeur h invariante, donc une signification absolue. L'action est atomique; le temps, l'énergie, sont granulaires.

Nous avons montré (7) que si un atome en régime permanent émet un lumière de fréquence y et que si t est l'intervalle de temps entre deux émissions, on a

$$yt = n \qquad \text{(n entier)}$$
$$t = n.1/y = n.T$$

Le temps est bien divisé en parties égales, mais la valeur de l'intervalle élémentaire 1/y dépend de la fréquence: ce n'est pas une constante absolue.

Un autre raisonnement sommaire nous conduira à la même conclusion. Considérons un photon, se mouvant dans le vide et calculons son action. Cette action doit se calculer en tenant compte de toutes les variables qui caractérisent le photon, comme nous l'avons fait dans deux Notes publiées aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (8). En se reportant à la deuxième Note, on voit facilement que l'action d'un photon, calculée depuis l'instant t=0 jusqu'à t=t n'est pas, comme on pouvait s'y attendre égale à h, mais bien à hyt.

Si, suivant l'hypothèse primitive des quanta, l'action du système est égale à un nombre entier de fois h, nous avons

hyt=nh et nous retombons sur l'équation

$\nu t = n \qquad t = n.T$

Le temps varie donc d'une façon discontinue, par bonds égaux à $T=1/\nu$. Mais ce chronon dépend de ν ; il n'a pas une signification absolue.

10. Conclusions.

Il semble d'après ce que nous venons de dire que dans les exemples cités, le temps varie bien d'une façon discontinue, mais que la valeur des "atomes de temps", n'est pas une constante universelle. Le propre du temps est de sauter et non pas d'être atomique. Une horloge munie d'une longue aiguille à secondes se mouvant par secondes visibles nous fournit une image grossière, mais frappante de l'état des choses que nous envisageons ici. Le temps que nous indique cette horloge est toujours mesuré par un nombre entier de secondes; à chaque bond de l'aiguille le temps fait un saut égal à un atome de temps. Mais ce "chronon" n'a pas la même valeur pour deux horloges différentes; il varie avec l'horloge comme il variait plus haut avec la fréquence; il n'a pas de signification absolue.

Dès lors, il semble illusoire de chercher la valeur du chronon absolu, c'est-à-dire du plus petit intervalle de temps mesurable. Les valeurs particulières trouvées (qui ne concordent pas toujours), dépendent dans chaque cas des phénomènes choisis ou du mode de raisonnement employé.

Quelle valeur peuvent avoir les considérations précédentes sur la conception d'un temps atomique ? Il est évident qu'elles reposent sur les hypothèses de la théorie des quanta et qu'elles ne peuvent valoir au plus, que ce que valent ces hypothèses elles-mêmes. Elles ne sont d'ailleurs justifiées que dans la mesure où les raisonnements que nous avons donnés sont corrects. A ce point de vue la conclusion que nous avons tirée semble assez fragile. Par contre, l'idée maîtresse qui assimile le temps à un potentiel et par conséquent l'envisage comme une variable à variation continue, fournit un argument qui nous semble beaucoup plus puissant que les précédents. En effet, cette question ne peut être tranchée par des exemples particuliers; on ne peut espérer en trouver la solution qu'en s'adressant à des principes à vaste domaine de validité. Au fond, elle est indissolublement liée à la conception générale que nous avons des phénomènes naturels. C'est un changement de cette conception qui nous a conduit sa problème qui nous intéresse, et ce n'est que dans ce cadre général que nous pourrons espérer en trouver la solution complète et définitive.

Références:

(1) Il n'en est cependant pas toujours ainsi. Dès 1925, Fournier, Coppel et Yovanovitch dans un travail intitulé: "Quelques suggestions sur la matière et le rayonnement" (Bibl.L.Brillouin, chez A. Blanchard, Paris) avaient correctement posé le problème.

(2) Poincaré. Dernières Pensées. p.188.

(3) Cambridge University Press, 1928; trad. francaise chez Payot.

(4) Journal de Physique, t.10 (1928) p.1.

(5) Journal de Physique, loc.cit.

(6) Journal de Physique, t.9,(1928), p.73.

(7) Journal de Physique, t.9,(1928), p.79.

(8) C.R., t.186,(1928), p.739, et p.1077.

LA NOTION DE TEMPS EN PHYSIQUE THEORIQUE.

(Conférence prononcée au Collège Philosophique, Paris, 1949)

Avons-nous, nous les physiciens, la qualité et la compétence nécessaire pour discuter de ce problème ?

Tout le monde, hélas, a une expérience propre et il est intéressant de confronter ces diverses expériences. De plus, les théories physiques, elles, font intervenir le temps à chaque instant, et sont forcées, - comme nous le verrons - de lui attribuer des caractéristiques qui sont quelquefois en contradiction avec les idées acquises. Les modifications introduites par la théorie de la relativité sont dans toutes les mémoires.

Ce que je me propose, c'est de vous exposer les conclusions auxquelles conduisent l'étude des phénomènes physiques dans le problème du temps et d'en tirer les conséquences logiques. Mais il faut éviter tout malentendu. Je ne ferai pas de philosophie, je n'empiéterai pas sur un domaine qui n'est pas le mien. Mon but est plutôt de dégager le vrai problème du temps de tous les problèmes accessoires, d'arracher toutes les herbes folles et laisser ensuite aux philosophes de l'étudier et de le résoudre.

Tout le monde a la notion du temps; sous une forme plus ou moins naive, tout le monde a, au moins, la sensation de son écoulement.

Pour tous: Le temps s'écoule inexorablement;

Il ne revient jamais en arrière, n'est pas négatif;

Il est le même pour tous, c'est-à-dire il est absolu et unique;

Il ne s'arrête jamais, mais on peut le mesurer et on peut ranger les résultats obtenus en une suite;

Le temps est unidimensionnel.

C'est à peu près ce que penserait du temps, s'il y pensait, un étudiant qui aborderait pour la première fois la mécanique classique, newtonienne où il fait pour la première fois connaissance avec le temps physique. Sans autrement s'émouvoir, il rencontre là un temps, que nous appellerons le temps newtonien, et qui commence déjà en un point à différer de la notion qu'il s'était faite avant lui.

Le temps newtonien se présente comme une variable, en fonction de laquelle on peut calculer les autres grandeurs attachées à un système par exemple ses coordonnées, son énergie, etc. Nous savons que, le temps variant, l'énergie se modifiera suivant une certaine loi, mais rien ne nous indique comment nous devons faire varier le temps lui-même. C'est précisément ce qui nous permet d'attribuer à cette variable les caractéristiques que notre expérience lui accorde.

Ainsi, le temps newtonien

1) est absolu. Il y a un seul temps pour tous les phénomènes quels qu'ils soient.

2) il s'écoule et même pour préciser il s'écoule s'écoule uniformément.

Citons Newton: "Le temps absolu, vrai et mathématique, " s'écoule uniformément en soi et par sa propre nature " et sans rapport avec une chose extérieure quelconque. " Le temps relatif apparent et vulgaire est une mesure " plus ou moins précise de celui-là à l'aide du mouvement.

3) il est continu et unidimensionnel. On peut le représenter, comme le voulait Descartes par une ligne droite.

4) il ne s'arrête jamais.

Enfin on admet qu'il

5) s'écoule toujours dans le même sens;

mais cette dernière qualité appelle une observation. La dissymétrie du temps semble indiscutable; on a même dit que c'est précisément l'essentiel de l'idée que nous en avons.

Cependant, la mécanique newtonienne, c'est-à-dire les équations du mouvement sont indifférentes au sens de variation du temps. Celui-ci peut être négatif, peut varier de 0 à + oo, mais aussi à - oo. On admet, par décret, que sa variation a lieu seulement d'un zéro arbitraire à + oo et il faut mettre au crédit des équations de la mécanique qu'elles ne s'opposent pas à cet ukase.

C'est la première fois que la physique se trouve en désaccord avec l'intuition courante; on met ceci sur le compte de l'imperfection de nos théories.

Cependant notre étudiant aborde l'étude de la théorie de la relativité et avec elle la physique apporte une contribution essentielle au problème du temps physique.

Je n'ai pas l'intention de reprendre ici l'exposé des développements que la théorie d'Einstein a introduit dans ce domaine, ni renouveler les discussion innombrables qui les ont suivis. Une telle répétition serait absolument inutile puisque vous connaissez aussi bien la critique de la notion de simultanéité, les concepts de temps propre et de temps relatif et les bouleversements qu'ils ont apportés dans nos notions habituelles. Notre but étant autre, nous ne ferons que rappeler l'essentiel de ces résultats.

En premier lieu, la notion de temps absolu, unique, commun à tous les systèmes se révèle inadéquate. Remarquez que cette conclusion est déduite de résultats expérimentaux, en l'espèce de l'expérience de Michelson et Morley, et d'autre part des innombrables confirmations de l'ensemble de la théorie de la relativité qui en est résultée. Elle nous est imposée en quelque sorte par ces résultats expérimentaux. Est-ce à dire qu'on ne pourrait donner de cette expérience fondamentale une autre explication ? A priori, oui, puisqu'on peut imaginer une infinité d'explications pour un fait donné.

En réalité cependant on a cherché une telle explication et on ne l'a pas trouvée. Et encore, cette explication, à supposer qu'elle existe, devrait couvrir, non seulement cette expérience, mais le très grand nombre de résultats expérimentaux que la théorie a prévus et expliqués. Nous jouons à un jeu qui ressemble à un puzzle; et il semble bien que nous ayons trouvé la pièce exacte qui convient au trou, au découpage considéré. On peut dire qu'aujourd'hui, à l'heure actuelle, avec nos connaissances et nos conceptions, avec aussi notre bagage d'expériences, la relativité du temps et de l'espace soit un résultat inattaquable, démontré par les faits tels que nous sommes capables de les connaître.

Il n'y a pas de temps absolu. Qu'est-ce que cela veut dire? Le temps est une variable susceptible de mesure au moyen d'une horloge. Considérons deux systèmes identiques au repos l'un par rapport à l'autre. La durée d'un même phénomène est la même dans tous les deux. Supposons maintenant que l'un des systèmes se mette en mouvement (uniforme) par rapport à l'autre. La durée du phénomène considéré qui a lieu dans le système 2 apparaitra différente à l'observateur qui la mesure dans le système 1. Il n'y a pas de sens à parler de temps absolu, chaque système a son temps propre. Nos systèmes ne sont identiques qu'au repos. Autrement l'un d'eux diffère de l'autre précisément parce qu'il a, par rapport à celui-ci, une vitesse relative: son temps diffère du précédent.

Nous reviendrons longuement sur cette notion de temps propre et sa signification; son rôle est essentiel dans la théorie que nous développons.

En deuxième lieu, la relativité introduit une symétrie entre les variables d'espace et de temps. Cette symétrie n'est pas parfaite (i=V -1 intervient) mais elle est réelle dans les équations. Elle a valu aux physiciens le reproche d'avoir spatialisé le temps, reproche qui tombe à faux, comme nous le verrons dans un instant. On a pu parler de fusion entre l'espace et le temps et l'univers.

Voici les deux principales modifications qu'introduit la relativité restreinte dans le domaine qui nous concerne. Le temps se spatialise et perd son caractère absolu; il n'y a plus que des temps propres.

Voici donc les caractères du "temps" tels qu'ils apparaissent aux yeux du physicien. Quelles conclusions peut on en tirer ?

La relativité (restreinte) a raisonné et conclu sur des systèmes ne différant que par leur vitesse relative. Il est essentiel de remarquer que ces conclusions, - à savoir le rejet de l'hypothèse d'un temps absolu et l'introduction de la notion de temps propre, - sont générales et applicables dans tous les cas.

Nous raisonnerons donc toujours dans un système au repos et, pour simplifier, nous considérons au début un phénomène ne dépendant que d'un seul paramètre, par exemple, le mouvement d'un point matériel sur une courbe entre deux points A et B.

Comment mesurons nous le temps qui s'"écoule" entre A et B ? Au moyen d'une horloge; nous comparons le mouvement de l'aiguille au phénomène considéré. Mais le mouvement de l'horloge quel qu'il soit est aussi un phénomène. Il n'y a pas de temps absolu, le phénomène considéré a un temps propre. Le système constituant l'horloge en a un également. La mesure du temps qui s'écoule entre A et B consiste en la comparaison de deux temps propres dont l'un est choisi pour étalon.

Toute mesure est une comparaison mais ne donne aucune indication sur la nature de la quantité mesurée. Pour analyser la notion de temps, il faut examiner en lui-même le temps d'une horloge.

Or comment raisonnons nous d'habitude ? Nous disons, même en relativité: "le temps s'écoule, l'horloge le mesure". Cette phrase a un sens à la rigueur quand nous considérons deux phénomènes dont l'un est la marche de l'horloge. Mais quel sens y-a-t-il de dire que le "temps propre d'une horloge s'écoule" ? Le seul moyen de constater que le temps propre de l'horloge s'est écoulé est de voir que son aiguille s'est déplacée. Le mouvement d'une aiguille est un phénomène particulier et tout phénomène a lieu, un certain temps s'est écoulé.

Autrement dit, ayant abandonné la notion de temps absolu s'écoulant tout entier comme les eaux d'un fleuve, sur lequel nous serions entraînés, tout ce qui nous reste à dire pour définir le temps se résumerait en cette phrase: " le temps s'écoule quand il se passe quelque chose".

Quand un système a varié d'une façon quelconque, a changé de forme, de température, etc. Nous pouvons dire que son temps a varié. Le temps d'un système est une de ces caractéristiques liée à son évolution. L'existence d'un temps propre implique une évolution; l'évolution d'un système définit son temps propre, le crée, le fabrique.

On voudrait dire que le temps fixe le rythme de cette évolution, mais ce ne serait pas exact parce que le terme rythme implique une périodicité, alors qu'un temps propre est défini par l'évolution d'un système même lorsque celle-ci est apériodique. Si l'on choisit comme horloge un phénomène présentant une périodicité spatiale, le temps propre est en quelque sorte débité en tranches ce qui permet d'introduire des nombres correspondant aux nombres de périodes et réaliser ainsi une auto-mesure toute particulière.

En un mot, dans l'ancienne conception, le temps est un pour tous les phénomènes et s'écoule irrémissiblement. Les poètes ont trouvé mille images pour exprimer cette fuite irréparable du temps. Le temps passe, marche, court, vole, s'égrène, glisse ou roule, - et les phénomènes évoluent dans le temps.

Dans la nouvelle conception, c'est l'évolution d'un système qui est le fait principal; le temps propre à ce système n'est autre que l'allure de cette évolution, l'élément au moyen duquel on la décrit qualitativement ou on la mesure.

Acceptons pour un instant cette conception et voyons le changement qu'elle introduit dans notre manière de considérer le problème du temps.

Dire que l'évolution d'un système définit son temps propre signifie que tout phénomène peut être considéré comme un chronoscope: tout changement décèle la possibilité d'isoler un élément qui précise comment se fait ce changement. Il en résulte qu'il y a autant de temps propres que de phénomènes distincts, ce qui n'est qu'une autre manière d'exprimer l'hypothèse fondamentale de la relativité du temps.

Chacun de ces temps propres aura ses caractéristiques ; certaines de celles-ci pourront coincider avec celles du temps newtonien mais il est évident que cela est purement fortuit. En parlant du temps en général, - "des temps" faudrait-il dire - on devra donc lui attribuer des propriétés qui choquent notre notion intuitive séculaire.

Prenons un exemple. Supposons qu'on prenne comme horloge un bloc de pierre qui s'effrite. Son évolution définira, par son allure, un temps propre. Supposons qu'à un instant donné, - à un instant de notre temps à nous, du temps de notre corps, - toutes les causes qui provoquent l'effritement disparaissent et qu'au surplus, il n'y ait dans l'univers que ce seul bloc de pierre,- et naturellement nous comme observateur. Le bloc de pierre ne change plus n'évolue plus: il ne s'y passe plus rien. D'après la conception newtonienne (ou kantienne) le temps (absolu) s'écoule et dans le bloc de pierre il ne se passe cependant rien. Mais si l'on considère le temps propre du bloc de pierre quel sens y-a-t-il encore à dire que ce temps s'écoule ? Notre temps à nous qui vivons s'écoule, oui, mais ce temps n'a aucun rapport avec celui du bloc de pierre.

S'il ne s'y passe rien, c'est que le temps propre qui avait varié jusque là s'est arrêté; il garde une valeur constante pendant un intervalle donné de notre temps, - jusqu'à l'instant où l'effritement commencera à nouveau.

Il n'y a donc aucune contradiction à dire que le temps s'arrête, qu'il "suspend son vol".

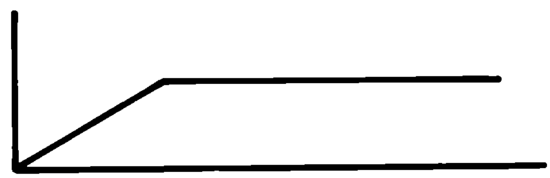
Considérons un autre exemple, celui d'un pendule, - ou mieux d'un balancier. Son temps qui dépend d'un paramètre angulaire mesure, par ce paramètre même, le temps propre du système. Or le pendule passe par un point P de l'espace allant de gauche à droite: son temps augmente. Mais lorsqu'il repasse par le même point dans sa course inverse son temps aura repris la même valeur, et à partir de celle-ci, diminuera.

Pour nous dont le temps varie dans un même sens d'une façon continue, lorsque le pendule repassera en P nous dirons qu'il a accompli une période. Mais pour le pendule lui-même, son temps reviendra à la même valeur lorsqu'il sera à nouveau au point P. Le temps peut augmenter ou diminuer, revenir en arrière, par conséquent il peut être positif ou négatif, - encore une caractéristique qui n'est pas de celles que nous sommes habitués à attribuer au temps.

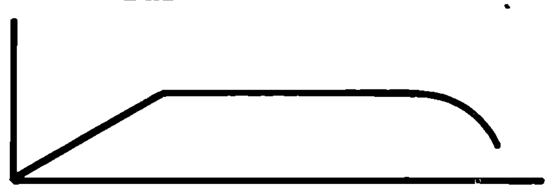
Si nous portons en abscisses le temps de l'observateur, celui de son corps qui est continu et de même sens, et en ordonnées les temps que nous avons observés ci-dessus, on aura une courbe.

Le temps newtonien ou de Descartes serait représenté par une droite

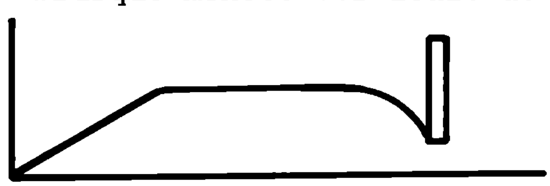
Si le temps s'arrête, la courbe cheminera parallèlement à l'axe des x



Si, après, le temps revient en arrière, la courbe s'inclinera vers le bas



Cette image nous suggère donc une autre possibilité: a savoir une brusque montée verticale de la courbe.



Cela signifierait que le temps propre du système considéré sauterait d'une valeur à une autre, au même instant de notre temps à nous. Ou encore si l'on veut qu'à un instant déterminé de notre vie le temps propre du phénomène aurait deux valeurs. Or nous savons qu'il existe des systèmes dont l'évolution ne se fait pas de façon continue mais par sauts quantiques: le temps de ces systèmes est donc lui aussi quantifié.

Le temps peut parfaitement être discontinu sans que cette affirmation, - qui séduirait fortement Paul Valéry, - aie quoi que ce soit de révolutionnaire ou de mystérieux. Le temps d'une horloge radioactive est discontinu.

La notion de continuité du temps est une de celles que l'on a le plus de difficultés à abandonner. En effet, que devient la causalité au sens élémentaire si le temps n'est plus continu? Sur une courbe où l'on marque deux points, on peut distinguer l'avant de l'après pour un sens de parcours donné. Mais si au lieu d'une courbe continue on donne un ensemble discret de points aucun lien entre l'antérieur et le postérieur n'est possible.

Sans qu'il se soit posé sous cette forme, le problème est apparu précisément en mécanique quantique; il s'agit du même problème et la solution est fournie par cette mécanique. On sait de quelle façon elle introduit un élément fondamental de hasard et de quelle façon elle corrige la causalité.

Nous avons du temps, intuitivement, une notion qui lui confère un caractère unidimensionnel: nous mesurons un temps par un seul paramètre et personne n'aurait l'idée de lier la notion de temps à deux ou plusieurs nombres indépendants. Et cependant la conception que nous avons décrite ne voit aucun inconvénient ni aucune impossibilité à définir un temps qui ait plusieurs dimensions. Il suffira de prendre comme système qui définit le temps propre, un système dont l'évolution soit décrite par deux ou plusieurs paramètres indépendants. Le temps n'est pas nécessairement représentable par une ligne; il peut très bien l'être par une surface. Cela découle immédiatement de ce qui précède. Il n'est cependant pas sans intérêt de noter que Pierre Janet entre autres avait proposé un schéma à deux dimensions dans ses études sur l'amnésie.

Voilà donc le temps qui peut apparaître suivant le cas continu, discontinu, négatif, stationnaire, quantifié ou pluridimensionnel, toutes propriétés que notre intuition dénie au temps habituel. Elles découlent de notre hypothèse (ou constatation fondamentale) de la relativité du temps, plus exactement de notre notion de temps propre.

Cette notion de temps propre appelle une remarque fondamentale. Nous avons vu que nous étions amenés, en physique, à attribuer un temps propre à chacune des particules élémentaires. Mais un système de ceux que nous étudions, et plus encore un système que nous pouvons soumettre à une observation, est formé de plusieurs particules élémentaires ayant chacune son temps propre distinct. Quel est alors le temps propre du système étudié ?

C'est évidemment une sorte de moyenne des temps propres élémentaires des systèmes constituants. Définie comment? Précisément comme auparavant, par l'évolution du système complexe envisagé, - par le phénomène que nous suivons. Les phénomènes que nous étudions sur les systèmes complexes apparaissent le plus souvent sous d'autres aspects que les phénomènes des systèmes élémentaires: nous étudions par exemple la température d'un corps alors que nous examinons le mouvement de ses molécules. La manière dont nous effectuons la moyenne sur les temps élémentaires est donnée précisément par la manière dont nous envisageons le phénomène global dans ses rapports avec les phénomènes élémentaires.

Le même rapport subsiste en ce qui concerne le temps et celui-ci est toujours défini par le phénomène: et il est approximatif dans la mesure où le phénomène global l'est par rapport aux phénomènes élémentaires.

Ces temps, ces temps moyens, dépendent donc en outre de la manière dont nous découpons nous mêmes les faits pour les étudier.

Dans ces conditions, considérons un système formé d'un grand nombre de systèmes élémentaires. Le temps propre correspondant est défini par l'évolution de ce genre de systèmes et ses propriétés participent de leurs propriétés. Or, une propriété fondamentale de ces systèmes est leur évolution à sens unique, régie par les lois de l'entropie croissante. Ces systèmes évoluent toujours vers l'état le plus probable; leur temps s'écoule dans une seule direction lui aussi, on peut lui attribuer une flèche.

Il y a irréversibilité du temps dans ces conditions. A l'échelle du monde sensible, les systèmes sont extrêmement complexes et obéissent certainement aux lois des grands nombres. Là se trouve indubitablement, l'origine de notre expérience d'un temps s'écoulant dans un seul sens. Cela n'empêche que, même d'après cette théorie, il y ait localement des fluctuations et qu'en conséquence il y ait des régions où le temps local aura les deux signes.

Notre corps, système complexe entre tous, nous montre nettement par une expérience journalière l'existence de ce temps moyen irréversible. Même si on le suppose sans vie, - qu'on le considère après la mort, - il est suffisamment complexe pour qu'il suive la loi de l'entropie et que le temps qu'il définit soit irréversible. Il présente en fait les caractères du temps newtonien, sauf le caractère absolu. Ce caractère c'est nous qui le lui conférons en le projetant au dehors.

Mais notre corps, - disons notre être pour ne préjuger de rien, - est le siège d'une foule d'autres phénomènes de natures très différentes. Et il est curieux de constater que l'examen de cette situation, loin de compliquer le problème, fournit au contraire un certain nombre d'exemples illustrant et, dans une certaine mesure, confirmant la théorie exposée ci-dessus.

Allons droit aux phénomènes les plus complexes et les plus éloignés de ceux que nous avons examinés jusqu'ici, les phénomènes de la pensée, l'acte de penser ou d'une manière générale, les phénomènes relevant de la psychologie.

Considérons un être en train de penser. Dans le système considéré un phénomène a lieu, un changement prend place. Donc on peut lui attacher un temps propre que cette évolution même définit. Il en est de même de tous les phénomènes de même nature ou de nature analogue, liés aux "mouvements de l'âme" pour employer une expression suffisamment vague donc très générale, ou si l'on préfère à tous les mouvements liés à notre vie mentale.

Ces temps propres ainsi définis sont nécessairement très différents de ceux qu'on rencontre en mécanique par exemple. Ils ne sont pas pour la plupart exprimables par des nombres mais ne peuvent être saisis que par l'intuition, ils sont incommensurables avec les premiers.

La durée bergsonienne est certainement le temps propre attaché à un phénomène ou à un ensemble de phénomènes de ce genre. Il est le temps propre d'un de ces mouvements de l'âme dont Bergson lui-même a parlé. On connait les pages admirables qu'il a consacrées et son effort pour montrer que cette durée n'avait aucun rapport avec le "temps" de la mécanique par exemple. On ne peut pas ne pas être d'accord avec lui sur ce point. Ces deux "temps" sont évidemment très différents dans leur essence même. Mais nous savons bien quelle est leur différence, elle est exactement celle entre les phénomènes mentaux et les phénomènes mécaniques.

Cette différence établie, - et elle est indiscutable, Bergson décrète que la durée seule représente le Temps, le reste n'étant pas du vrai temps mais autre chose, de l'espace par exemple.

Le physicien ne peut être d'accord avec cette interprétation où il voit au surplus un vestige de l'ancienne conception du temps absolu.

En vue de la théorie développée ici, cela revient à dire qu'un certain "temps propre" est plus "temporel" que les autres, pour la seule raison qu'il caractérise certains phénomènes, - ceux de notre vie mentale par exemple.

Cela revient somme toute à établir une hiérarchie entre phénomènes. Quel est le critère sur lequel on doit l'établir ? On ne voit aucune raison qui nous porterait à attribuer une prééminence à un phénomène donné et il est clair que si on l'établit elle ne saurait être que le résultat d'une convention.

D'ailleurs il semble que chaque auteur, philosophe ou non ait eu une préférence secrète ou avouée pour le temps propre d'un phénomène déterminé. On peut souvent suivre le cheminement de sa pensée et reconstruire l'image du phénomène auquel il se réfère. On pourrait faite une étude amusante en cherchant dans ces travaux quel est le phénomène auquel l'auteur se réfère plus particulièrement et dont le temps propre lui fournit les caractéristiques de ce que il appelle "Temps" tout court.

Lorsqu'on lit que pour Pythagore:

"Le temps est la sphère du monde parce que tout est dans le temps et tout est dans la sphère du monde."

On se l'imagine comme un mathématicien en contemplation du ciel étoilé.

Lorsqu'un autre grec (Aristippe de Cyrène) affirme que:

"Le passé étant aboli et le futur n'étant pas encore seul le présent existe."

On peut se dire que l'auteur avait peu d'imagination et guère de mémoire et qu'il esquivait le problème par une pirouette.

Lorsqu'on lit dans un ouvrage relativement récent, à propos de la relativité que: "Tout phénomène marque un temps virtuel, c'est-à-dire peut être pris pour la définition d'un temps. Mais il dépend de nous de choisir entre les phénomènes ceux qui seront dits marquer "le" temps."

On peut mesurer à quel point la conviction du caractère absolu du temps peut être profondément enracinée.

Quand Kant écrit:

"On ne saurait exclure le temps par rapport aux phénomènes en général, quoiqu'on puisse fort bien faire abstraction des phénomènes dans le temps... Ceux-ci peuvent disparaître tous ensemble, mais le temps lui-même ne peut être supprimé."

On voit Kant ....

On peut comparer cela au passage suivant:

"Le temps n'existe pas par lui-même, c'est l'état des objets qui nous fait sentir ce qui s'est accompli dans le passé, ce qui est présent et ce qui va suivre; et l'on doit avouer que nul n'éprouve la sensation du temps en lui-même, indépendamment du mouvement des corps et de leur repos. Tempus ite se non est ..."

Poète.

Le temps de l'esprit est un des exemples les plus nets de temps pluridimensionnel. Il n'y a plus de succession nécessaire dans les phénomènes mentaux - il y a des surfaces, des volumes et non des lignes.

Mais dans notre corps, il n'y a pas que des phénomènes du type décrit, il y en a une foule d'autres de nature physiologique. Il y a plus particulièrement ceux de notre vie végétative que nous percevons sourdement et qui ont toujours intéressé les philosophes parce que perçus directement. C'est probablement là la source de notre conception "habituelle" du temps absolu; évoluant dans un même sens et s'écoulant irrémissiblement. On est allé jusqu'à chercher une origine physiologique du sens du temps.

La complexité des phénomènes nous permet d'en découper et de nous assurer des variations possibles de la sensation du temps et par là de la concordance avec la réalité de l'hypothèse des temps propres. Pour vous mêmes le temps propre de cette conférence commence à vous paraitre long !

Aussi est-il inutile d'insister. On peut poursuivre l'analyse pour chacun des phénomènes. Contentons nous de les résumer.

La notion de "temps propre" semble extrêmement utile pour l'analyse du problème du temps. Les philosophes qui se sont penchés sur ce problème ont découvert "une douzaine au moins de visages du temps". Or il n'y a pas une douzaine, ni mille, ni un milliard, il y en a une infinité définie par l'infinité des phénomènes que nous pouvons imaginer ou réaliser ou encore découper.

Les tentatives de déduire de quelques caractéristiques en petit nombre une image du temps vrai qui les englobe toutes est vouée à l'échec. L'étude de ces visages du temps, qu'il s'agisse de ceux qui, - dans notre langage, - relèvent de la vie végétative ou de la vie psychologique ou des phénomènes électriques est en réalité l'étude des phénomènes eux-mêmes et non pas l'étude du temps. Ce sont des caractères extrêmement particuliers de cette notion et il n'est pas possible de les étudier tous; on peut même dire que si l'on en étudiait cent mille, nous ne serions pas plus avancés. Ce sont des problèmes accessoires qui obscurcissent le véritable problème du temps.

Du point de vue philosophique que subsiste-t-il alors?

Je ne m'aventurerai pas dans ce domaine qui n'est plus le mien. Tout ce que l'on peut dire est que, pour trouver un facteur commun à toutes ces formes du temps et pour l'analyser, il faudrait étudier le problème du changement. Du point de vue du philosophe, le problème du temps n'est pas mal posé; mais élucider la question du changement, reviendrait à clarifier indubitablement ce problème ardu du temps qui n'a pas encore reçu de solution à supposer qu'il puisse en avoir une.

Mais ce problème n'est plus de mon ressort. Aussi vais-je m'arrêter là, vous le laisser, et souhaiter que bientôt l'on puisse écouter ici-même une opinion autorisée sur cette question.

L'ASPECT PHYSIQUE DU PROBLEME DE L'ORIGINE DE LA VIE

(Conférence prononcée au Collège Philosophique)
(Paris, 1950)

Nous comprenons ce que veut dire un "organisme vivant" ou la "vie", lorsqu'il s'agit d'un organisme évolué. L'extraordinaire raccourci qu'offre ce mot de trois lettres "vie" conduit cependant , si l'on n'y fait pas attention, à une fausse interprétation de tout le problème.

Dire qu'un corps possède la vie, laisse implicitement entendre que celle-ci est quelque chose qui se superpose à la matière inanimée. Le langage présuppose déjà une théorie du phénomène de la vie et la question "qu'est-ce que la vie?" est un problème mal posé dès le début, parce que, au moins en l'apparence, elle oppose en quelque sorte la "vie" à la matière, morte ou plutôt non-vivante par définition.

Mais il est aisé de se débarrasser de cette emprise du langage et poser la question plus précise suivante qui pourrait nous fournir une réponse à la première: "en quoi un organisme vivant est-il distinct d'un organisme inanimé ?"

Remarquons que l'on peut séparer en deux cette question et demander:

1) quelle est la différence entre la substance vivante et celle qui ne l'est pas.

2) quelles sont les fonctions qui caractérisent les êtres vivants ou les cellules vivantes.

ou encore

3) y a-t-il une autre différence insoupçonnée entre la vie et la non-vie.

Remarquons encore une fois que nous avons par expérience une certaine connaissance de ce qu'est la vie et que nous pouvons faire la distinction à notre échelle entre la matière animée et l'inanimée. Certaines fonctions, certaines réactions sont caractéristiques à cette échelle. L'existence d'un métabolisme, la capacité de se mouvoir, de croître et de se reproduire sont autant de critères permettant la distinction. La difficulté commence lorsqu'on descend dans l'échelle de complication des organismes vers ceux qui ont une structure de plus en plus simple. La définition de la vie devient alors de plus en plus difficile.

On peut énumérer les qualités et les fonctions qui nous semblent caractéristiques de la vie et examiner des cas concrets. Et l'on constate alors que que nous ne pouvons définir ce qu'est la vie même d'une manière approchée. Une telle analyse a été faite par PIRIE dans un ouvrage publié en 1937 et intitulé "The meaningless of the terms "life" and "living". Il conclut "qu'aucune des qualités dont il a été question n'est à elle seule caractéristique de la vie et que leur combinaison ne peut nous tirer d'embarras: il existe beaucoup de choses que nous qualifions de vivantes et qui ne possèdent pas ces qualités; et d'autres qui les ont sans être pour cela vivantes".

Il s'agit d'ailleurs de s'entendre. Nous pouvons naturellement adopter le point de vue qui a conduit à l'emploi du terme "vie" et admettre que, superposé à un ensemble de molécules, il existe quelque chose, un "principe vital", ou encore une "âme", dont la présence suffit pour transformer le corps "inerte" en corps "vivant". Lorsque ce principe disparaît, la vie se retire du corps considéré.

Mais cela revient à déplacer le problème et à chercher ce que c'est que ce principe vital ou cette "âme"; nous n'avons fait qu'introduire un terme nouveau.

Le problème peut devenir encore plus précis et se formuler de la façon suivante: est-on absolument obligé de supposer l'existence d'un tel principe vital? Nos connaissances actuelles ne permettent-elles pas d'expliquer le phénomène de la vie et son apparition sans l'intervention de ce principe vital ? Il ne s'agit pas d'un parti-pris, il ne s'agit pas d'éliminer à tout prix cette "âme" mais en analysant les phénomènes, de voir si elle correspond à une réalité ou si elle n'est qu'une simplification commode et pour tout dire un manteau dont nous couvrons notre ignorance.

Mais alors il faut de nouveau préciser ce que nous entendons par "vie" et "vivant"; quelles sont les caractéristiques que nous attribuons à la vie. Allons nous choisir le mouvement? mais une auto se meut aussi. Ou la croissance? mais les cristaux croissent également. La reproduction? Laissons de côté la reproduction à l'échelle humaine des animaux supérieurs avec son mécanisme compliqué, sa technique spéciale et ses prolongements inattendus: il y a des organismes vivants qui se reproduisent en se divisant et nous pouvons imaginer plus d'un mécanisme matériel, certainement non-vivant suivant notre terminologie, et qui se multiplie de la même façon.

BERNAL rapelle une discussion avec EINSTEIN sur la définition de la vie en général et sa remarque qu'une telle définition devrait inclure des systèmes auxquels nous appliquons le qualificatif de "vivants" uniquement comme figure de style. Pourquoi, par exemple, la Galaxie ne serait-elle pas appelée "vivante"? ou une flamme ? Une société humaine, un peuple, une civilisation naissent vivent et meurent; ce sont des systèmes vivants.

En un mot, tout système qui se conserve, qui est dynamiquement stable et qui transforme de l'énergie, devrait légitimement être appelé "vivant". Cette permanence est peut-être plus que toute autre une caractéristique de la vie.

En réalité, pour donner un sens au problème, il faut nous limiter à certains types de "vie", à certains types d'organismes vivants, par exemple à ceux que nous connaissons sur terre et la question est de savoir si les lois actuellement connues de la physique et de la chimie nous permettent de nous imaginer, seules, l'apparition de la "vie" sur terre, c'est-à-dire le passage des corps simples de la chimie à l'extraordinaire complexité du corps humain.

Simplifié à l'extrême, ce problème demande cependant pour sa solution une connaissance approfondie de l'ensemble des faits et des théories, de probablement toutes les sciences exactes. Il est vaste et on ne saurait lui fournir de solution meme approximative, mais au fond ce n'est pas là ce qu'on doit chercher. La question est: peut-on imaginer que la vie est apparue sur terre comme conséquence d'une série de processus physico-chimiques de la nature de ceux que nous connaissons ?

La réponse vers laquelle tendent les chercheurs est affirmative. On imagine mal, d'ailleurs, comment on pourrait démontrer, sauf par un acte de foi, que cette réponse dût être non. La question est de celles auxquelles on ne peut répondre que par "oui" ou par "nous ne pouvons pas le savoir". Et cette dernière affirmation n'est jamais faite qu'à regret et avec de fortes restrictions mentales.

Quoi qu'il en soit, il n'y aurait qu'une seule manière de répondre définitivement "oui" à la question de tout à l'heure: ce serait de créer la vie à partir d'éléments chimiques déterminés. Nous n'en sommes pas là et ce qu'il nous reste à faire c'est d'abord imaginer une suite de processus conduisant de la matière inanimée à un organisme vivant et ensuite montrer qu'aucun principe, aucune règle ne s'oppose à leur réalisation, c'est-à-dire qu'aucun obstacle fondamental ne barre la route à cette possibilité; et enfin, si nous y arrivons, situer les phénomènes vitaux entre tous les autres.

Dans l'état actuel de nos connaissances, ces obstacles sont nombreux et de toute nature. Aussi tous ceux qui se sont penchés sur ce problème n'ont-ils pu s'attaquer qu'à un certain nombre restreint d'entre eux, ceux que leur spécialisation leur avait fait le mieux connaître. Pour un biologiste le problème a un autre aspect que pour un chimiste ou un géophysicien. Et les travaux de Bernal, Schroedinger ou Dauvillier s'attaquent chacun à ce qui leur paraît être l'essentiel du problème et chaque fois cet essentiel est différent.

Je ne ferai pas exception à cette règle ce soir et j'examinerai le problème plutôt du point de vue du physicien théoricien.

Chaque examen du problème perd en surface ce qu'il gagne en profondeur et on est vite amené à se limiter à un domaine très restreint d'expériences d'un intérèt certainement passionnant, mais nécessairement limité. Pour plusieurs raisons, incompétence, tactique de conférencier, manque de temps, nous n'aborderons pas la question sous cet angle mais dans son ensemble.

Si l'on aborde le problème dans son ensemble deux grandes catégories de questions attirent notre attention:

1) d'abord le problème de la substance vivante, sa composition et sa structure, examiné toujours sous l'angle de la question de savoir si avec ce que nous connaissons de physique et chimie nous serons en mesure de nous en tirer; et ensuite

2) le problème du fonctionnement de cette matière vivante, le problème du mécanisme même, en vue de savoir si celui que nous imaginons n'est pas en contradiction avec les grandes lois de la nature ou si au contraire il faut en prévoir d'autres pour expliquer ce fonctionnement.

En ce qui concerne la substance, le problème est simple. Les organismes vivants sont composés d'un nombre étonnement restreint de types de molécules simples (sucres, acides aminiques, purines) lesquelles composent à leur tour les macro-molécules beaucoup plus compliquées des protéines et des acides nucléiques ainsi que les membranes et fibres etc. On dénombre environ 30 types de molécules différentes contenant chacune de 4 à 40 atomes.

D'une façon générale les organismes vivants (dans la biosphère terrestre au moins) peuvent être caractérisés par la présence des protéines d'une part en ce qui concerne la substance et par des processus de catalyse isothermique de composés organiques transformant par degrés des substances inorganiques en protoplasme.

Dans notre monde, les organismes vivants sont des mécanismes déterminés (déterminés probablement par les conditions extérieures) et l'on a défini depuis longtemps le processus vital comme "le mode d'action des substances protéiques".

On connait assez bien les phénomènes chimiques proprement dits, - il faudrait dire physico-chimiques, - qui provoquent les échanges ou la constitution des molécules vivantes.

Les récentes découvertes ont permis d'améliorer considérablement les méthodes expérimentales. Notons les indicateurs radio-actifs qui permettent de localiser et de suivre les réactions dans des structures très complexes. Notons la spectroscopie infra-rouge, les rayons X et leurs applications cristallographiques. Les travaux récents sur les polymères et leurs applications industrielles ont fait faire des progrès considérables à l'analyse des molécules très complexes. La chromatographie différentielle permet l'analyse des protéines. Le microscope électronique enfin a ouvert des domaines insoupçonnés.

Il est inutile d'insister. La conclusion générale est que le problème de la vie n'est pas un problème de composition chimique, qu'il n'est pas lié à la présence de tel ou tel corps chimique simple. Ce n'est également pas un problème de structure chimique.

Dans les conditions dans lesquelles la vie est apparue sur terre - et il faut souligner cette restriction - la matière vivante est composée d'un nombre relativement petit de types d'atomes simples (je dis bien de types d'atomes parce que les organismes eux-mêmes sont composés d'un très grand nombre de molécules). Ce qui est important ce n'est ni la composition chimique, ni la structure, mais leur agencement et la permanence de leurs fonctions.

Comme le dit Bernal:

> "Nous commençons à voir que l'aspect matériel d'un système vivant, ne nous fait apparaître que les organes d'une machine qui permet en particulier les échanges d'énergie".

Peu importe qu'une auto soit constituée par de l'acier, du cuivre et par-ci par-là d'autres substances: l'important est la manière dont ces matériaux sont distribués, dont ils sont agencés. C'est la configuration de l'ensemble qui permet à l'auto de se mouvoir c'est-à-dire la disposition qui lie les différentes parties d'une seule façon possible par leurs fonctions respectives et non par des règles de structure dans l'espace.

Dans un sens physique très précis, "la fonction, les processus ont le pas sur la structure" ou si l'on préfère, "la fonction précède la structure".

Des conditions extérieures différentes auraient pu conduire à des organismes ayant les mêmes fonctions vitales que ceux que nous connaissons, mais une structure et une composition différentes.

Cela nous oblige à considérer le problème de la vie non seulement sous l'aspect sous lequel il se présente à nous aujourd'hui mais aussi sous l'aspect de ses origines et de son évolution.

Nous connaissons l'hydrogène et les autres corps simples certainement inanimés; et nous connaissons l'homme qui est formé par un certain nombre de ces éléments, mais qui vit. Entre les deux, nous connaissons une série de corps plus complexes que les corps simples mais moins compliqués que l'homme. A quel moment la vie est-elle apparue et dans lequel ?

Naivement parlant, on peut dire ceci. Prenons les corps simples inertes qui constituent un organisme vivant très simple. Formons avec eux des molécules de plus en plus compliquées, et avec elles des corps de plus en plus complexes dans les conditions extérieures de température de pression de rayonnement etc. qui existent ou qui ont existé sur terre. Dans ces conditions, à un certain moment, lorsque la complication sera suffisamment grande, le corps formé présentera une certaine fonction parmi celles qui caractérisent la vie. Du moins c'est ce que nous croyons. Une complication plus grande donnant au corps une structure et une configuration convenable ajoutera à cette première fonction une deuxième. On pourrait ainsi arriver à créer un organisme vivant.

Une telle hypothèse est-elle plausible ? Si c'est de cette façon que la vie est apparue sur terre on doit pouvoir imaginer en détail la suite des opérations nécessaires et voir si elles ont pu avoir lieu au cours des siècles.

C'est ce qu'a fait magnifiquement M. Dauvillier. Il n'est pas question d'exposer le détail de ses travaux; qu'il suffise de dire qu'il a imaginé une suite de réactions chimiques conduisant à un état métastable à grande énergie de l'univers dans lequel a eu lieu brusquement une organisation qui est la vie. L'apparition de la vie est pour Dauvillier un phénomène général analogue à la cristallisation.

Il n'est pas question de les examiner ici, il suffira de savoir qu'elles existent. Beaucoup plus importantes pour le problème même de la vie est une analyse des conditions générales dans lesquelles la vie est apparue et de la possibilité de son maintien, de sa permanence. C'est ce que nous allons tenter d'esquisser dans ce qui suit.

Nous n'avons pas été capables de définir exactement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un organisme puisse mériter le qualificatif de "vivant". Cependant l'observation nous conduit à constater l'existence d'une caractéristique commune à tous les organismes vivants à savoir leur complexité. Il semble que pour qu'un amas de molécules puisse constituer quelque chose qui vit, pour que les fonctions vitales puissent s'organiser, dans un tel amas, il faut que celui-ci contienne un grand nombre de molécules. La différentiation indispensable semble ne pas pouvoir s'instaurer si le nombre des molécules n'est pas suffisant.

Schroedinger essaie même de démontrer cela par le raisonnement en partant d'autres constatations expérimentales. Il écrit: "le comportement des organismes vivants suit des lois strictes bien définies, causales, continues, et au surplus simples". Or les lois qui gouvernent les molécules isolées sont des lois de hasard à cause de leur incessante agitation thermique. Comment passer des lois des molécules isolées à celles des organismes vivants? Pour fixer les idées prenons le cas de la diffusion, phénomène qui se présente certainement dans les organismes vivants. Entre deux régions de concentration différente les molécules se déplacent vers la région de moindre concentration et un équilibre ou un état de régime parfaitement définissable sera atteint. Il y aura mouvement d'un ensemble de molécules d'un point à un autre. Mais si l'on ne considère qu'une seule particule, le mouvement de celle ci, où quelle se trouve, sera le mouvement brownien, c'est-à-dire un mouvement qui aura lieu au hasard. Une molécule ou un petit nombre de molécules auront un mouvement désordonné. Or les lois de la diffusion fournissent des résultats qui correspondent à des mouvements ordonnés, avec une très grande approximation. Pour concilier ces deux exigences il n'y a qu'une possibilité: Les phénomènes vitaux font intervenir un très grand nombre de molécules dont le mouvement individuel est désordonné; leur comportement global suit des lois statistiques, qui sont des lois bien définies, "ordonnées" et cela avec une approximation d'autant plus grande que le nombre de molécules est plus grand.

Ce raisonnement, valable en général, est néanmoins mis en défaut dans certains cas, comme le montre Schroedinger lui-même.

Ainsi les lois des phénomènes vitaux sont des lois statistiques concernant un grand nombre de molécules. La simple supposition que la vie, ou l'apparition de la vie, peut s'expliquer sans l'intervention d'autres principes que ceux de la physique et de la chimie, nous oblige à admettre que la substance vivante est composée de molécules dont le mouvement est soumis au hasard.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent pourrait s'appliquer aussi bien à la matière animée qu'à la matière inanimée. Mais justement, le hasard peut, dans un groupement à très grand nombre de particules intervenir pour fournir à ce groupement une des caractéristiques de la matière vivante.

Nous avons vu qu'on peut s'imaginer une suite de réactions amenant les substances inertes qui composent un organisme vivant (le plus simple imaginable) dans un état métastable renfermant une énergie considérable; que dans cet amas en équilibre instable un phénomène général analogue à la cristallisation peut avoir lieu et dans lequel l'énergie interne est utilisée pour donner à l'ensemble la configuration fonctionnelle qu'il a dans l'organisme vivant. Cette hypothèse est très plausible, ou plutôt n'est pas en contradiction avec les principes généraux.

L'équilibre instable réalisé est certainement affecté par les fluctuations inévitables de tout ensemble statistique. Et cet équilibre instable, détruit par ces fluctuations a une probabilité faible mais non nulle de réaliser une configuration fonctionelle, qui soit celle de la matière vivante dans sa plus simple expresssion.

C'est la création, par hasard, de ces centres d'activité chimique (de ces centres de cristallisation dans l'analogie ci-dessus) qui rompent l'équilibre instable et donnent naissance à la vie. Dauvillier identifie même ces centres aux granulations auxquels les virus filtrants doivent leur opalescence; mais on ne peut ici entrer dans ces détails.

Voilà donc une hypothèse sur l'apparition de la vie qui n'est pas en contradiction avec les lois connues et en conséquence peut avoir été réalisée.

Mais cela ne constitue pas encore une solution du problème envisagé. La vie peut apparaitre, encore faut-il que sa permanence soit assurée, qu'elle dure et que nous puissions imaginer comment il se fait que, en dépit du fait que tous les êtres vivants vieillissent et finalement meurent, la Vie elle peut se perpétuer. C'est là, au fond, que gît la vraie difficulté du problème de l'explication de la vie au moyen de nos théories physico-chimiques.

Vous auriez préféré peut-être que je m'étendisse davantage sur certaines questions ou que je multiplie les exemples, mais il n'y a vraiment plus le temps. Cette conférence, - qui est un organisme vivant, remarquez le - touche à sa fin. Vous l'avez vu naître et se développer et vous allez la voir mourir. Elle a eu sa vie propre, elle s'est nourrie d'idées et les a transformées en réflexions. A-t-elle eu une progéniture? Ce n'est pas impossible: quelque auditeur se sera déjà dit: "le conférencier dit trop de bêtises; il faut que je fasse moi aussi une conférence sur le même sujet !"

Elle va mourir comme tout être vivant et comme lui elle laissera un souvenir. Après son enterrement, les gens diront peut-être quelques mots et, comme toujours en pareil cas, ils seront indulgents et ne diront pas toute leur pensée; après quoi certains d'entre eux iront prendre un bock à la taverne près du cimetière.

Vous voyez d'ailleurs qu'elle n'a plus longtemps à vivre: ses idées se brouillent, elle délire. Elle se meurt.

Elle - est - morte.

LE FIGARO LITTERAIRE — SAMEDI 23 AVRIL 1955

CE QUE NOUS DEVONS A EINSTEIN

PAR A. PROCA

L'UN des phénomènes les plus prodigieux de l'histoire de la science récente a été l'influence extraordinaire que les idées d'Einstein ont exercée non seulement sur les théories scientifiques contemporaines, mais aussi sur leurs applications.

La grandeur et la beauté de ces idées rendent superflue et même déplacée toute épithète laudative ; c'est pour cette raison que nous préférons ici un effort pour rendre accessibles quelques-unes de ces idées au non-spécialiste ou au profane. Nous essayerons donc, autant que faire se peut, de suivre la pensée d'Einstein dans certains de ses travaux, de saisir le moment où elle s'écarte des sentiers battus et de démontrer vers quelles nouvelles régions elle se dirige. C'est peut-être le meilleur hommage qu'il soit possible de rendre aujourd'hui à la mémoire de celui qu'on s'apprêtait à fêter à Berne en juillet prochain à l'occasion du cinquantenaire de son premier mémoire sur la relativité.

Einstein est devenu célèbre par sa théorie de la relativité. Tout le monde s'imagine comprendre ce qu'est la relativité dans le sens courant du terme, et cela est vrai tant qu'il s'agit de choses simples, par exemple d'une position dans l'espace. La position d'un corps ne peut être définie que relativement à un repère donné, mais le corps et ses propriétés sont indépendants du repère choisi. Cela est évident, mais n'apporte rien de nouveau. En quoi consiste le changement introduit par Einstein ? En une simple petite addition, mais dont les conséquences sont incalculables : pour Einstein, cette « relativité » concerne non seulement l'espace mais aussi le temps ; plus exactement, il faut l'appliquer à l'ensemble de l'espace et du temps, à ce qu'on appelle aujourd'hui l'espace-temps.

Il ne faut pas beaucoup de réflexion pour se rendre compte des conséquences d'une pareille hypothèse et arriver à concevoir qu'une véritable révolution a pu en résulter. Elle nous oblige à une analyse de la notion de temps, non pas d'une façon philosophiquement vague, mais d'une manière liée aux exigences mathématiques précises de la relativité. Elle enlève au temps son caractère universel et absolu et attache à chaque point un temps qui lui est propre. Enfin, elle permet d'établir les conditions que doivent remplir les lois naturelles pour satisfaire à ce « principe de relativité ».

Il ne saurait être question de passer en revue ici tous les aspects de la question. Mentionnons seulement le fait qu'il découle de ce qui précède que tout corps qui émet de l'énergie perd une partie correspondante de sa masse. C'est cette transformation de la masse en énergie, vue par Einstein dès 1905, qui constitue le processus de l'explosion d'une bombe atomique ou de phénomènes analogues.

La généralisation de la théorie précédente devait amener Einstein à s'occuper et à résoudre le problème de la gravitation.

L'essence même de la notion de « relativité » exige que les lois des phénomènes naturels soient absolument indépendantes du repère utilisé. Or ce n'est pas le cas pour la « relativité » examinée précédemment et qu'on appelle, pour cette raison, la « relativité restreinte ». Le passage de cette dernière à la « relativité généralisée » a été effectué par Einstein qui a résolu par cela même l'énigme de la gravitation, force omniprésente dont l'origine avait toujours été jusqu'alors mystérieuse et inexplicable.

Qu'est-ce que la gravitation ? La réponse se résume en peu de mots : « La force de gravitation est une manifestation de la courbure de l'espace. »

Assurément, cette phrase laisse totalement à désirer du point de vue de la clarté, mais l'idée qu'elle recouvre est tellement hardie et originale que cela vaut la peine d'essayer de la comprendre, au moins par analogie.

D'abord, qu'est-ce qu'un espace courbe ? Evidemment, nous ne pouvons nous imaginer un espace comme celui, à trois dimensions, dans lequel nous vivons et qui ait une courbure. Mais essayons de nous imaginer un espace à *deux* dimensions, quelque chose comme une feuille de papier par exemple. Cette feuille peut être posée à plat sur une table, mais un de ses bouts peut aussi être retourné, roulé sur lui-même, *courbé* en un mot. Cet espace peut donc être courbe dans certaines régions et plan dans d'autres.

Imaginons maintenant que cet espace soit peuplé d'êtres à deux dimensions formés de petites lamelles d'acier. Rien d'insolite ne se passera pour ces êtres tant qu'ils se mouvront dans la région plane de leur espace. Mais, dès qu'ils pénétreront dans une région courbe, les lamelles, qui ne peuvent sortir de leur espace, se courberont, ce qui entraînera, en raison de leur élasticité, l'apparition d'une tension, d'une force élastique. *Cette force est due uniquement au fait que l'espace est courbe* en cet endroit et disparaît avec cette courbure.

Il va sans dire que ce mécanisme ne représente absolument pas celui de la gravitation. Il ne s'agit que d'une analogie approximative destinée à faire sentir que dans certains cas il est parfaitement possible que la courbure d'un espace se manifeste comme une force.

D'après l'analogie précédente, l'espace peut avoir une courbure. On montre qu'il peut aussi jouir d'autres propriétés intrinsèques, avoir, par exemple, une « torsion ». Ce sont des propriétés de ce type qu'Einstein a mises en œuvre dans ses tout derniers travaux pour découvrir l'origine des forces électromagnétiques et les interpréter comme des manifestations de certaines caractéristiques de l'espace. Mais ces travaux n'ont pas atteint, malheureusement, leur forme définitive et la solution n'est pas aussi satisfaisante que celle concernant la gravitation.

Dans tous les travaux dont il a été question jusqu'ici, il n'a pas été question de discontinuités ou de quanta. Pourtant, dans ce domaine aussi, Einstein a été en son temps à la pointe du progrès. Dès 1905, il avait réintroduit l'hypothèse des « quanta de lumière » en optique, en la justifiant et en ne l'opposant pas comme on l'avait fait autrefois à l'hypothèse ondulatoire. En précisant cette hypothèse et en laissant ouverte la question des ondes, Einstein a préparé la voie à la mécanique ondulatoire, laquelle, comme l'on sait, attribue non seulement au photon mais aussi aux particules matérielles le double caractère corpusculaire et ondulatoire.

Toujours dans le domaine du discontinu et des probabilités, ses travaux sur le mouvement brownien, les fluctuations, la thermodynamique statistique font époque. Cependant, Einstein est toujours resté au fond de lui-même « l'homme du continu », celui dont l'espoir était de tout déduire des propriétés du vrai continu, l'espace. Pour cette raison, il n'a jamais pu admettre toutes les conclusions auxquelles conduit l'interprétation statistique de la mécanique ondulatoire. Convaincu que tout « champ » pouvait être justiciable d'une théorie du type de celles qu'il avait développées, il nourrissait le « modeste espoir » qu'une telle théorie livrerait peut-être aussi la clé de celle des quanta.

Regrettons que cet espoir n'ait pas eu le temps de se réaliser, mais admirons sans réserve cette œuvre gigantesque, qui demeure l'un des plus admirables monuments de la pensée humaine.

A. Proca,

directeur des recherches au C.N.R.S.

PAUL LANGEVIN

(1872 - 1946)

par

A. Proca

Le 19 décembre 1946, après des périodes d'espoir assombries par une sorte de certitude intuitive que rien n'arrêterait désormais l'inévitable, nous avons appris la mort de Paul Langevin.

Le bouleversement a été profond au coeur de ses élèves, de ses amis et de tous ceux qui le connaissaient. Dans ce Paris qu'il aimait tant et dont il ornait si magnifiquement la vie spirituelle, il a fermé ses yeux pour toujours au petit matin; et la nouvelle de sa mort s'est répandue en ondes de tristesse au delà de la cité, dans le monde tout entier, nous rappelant tout à coup, brutalement, que même ce que nous aimons n'est pas éternel.

Paul Langevin n'est plus. En réalité, pour nous, il n'a pas disparu, parce que son image ne peut pas s'effacer. Dans notre esprit, dans notre coeur, cette image s'est seulement figée, ce jour glacial de décembre, en ses contours définitifs. Et c'est la déchirante certitude qu'elle ne changera plus jamais qui fait aujourd'hui notre douleur.

★

★ ★

Il était né à Montmartre, le 23 janvier 1872, fils d'une modeste famille parisienne. A 16 ans, il entrait premier à l'Ecole de Physique et Chimie de la Ville de Paris. Sorti premier, il devait revenir par la suite dans cette Ecole qu'il aimait et y rester jusqu'à sa mort, remplissant successivement les fonctions d'interrogateur, de professeur, de Directeur des Etudes et enfin de Directeur.

Après avoir passé sa licence ès sciences physiques, il prépare seul le concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure. Il y entre le premier en 1893 et rencontre

Jean Perrin, auquel devait le lier toute sa vie une solide amitié. Il passe, l'agrégation, toujours premier, en 1897.

Ses dons exceptionnels avaient attiré très tôt l'attention sur lui. Aussi, à la sortie de l'Ecole de Physique et Chimie, la Ville de Paris lui accorda-t-elle une bourse qui lui permit de passer une année en Angleterre, au laboratoire Cavendish de Cambridge. Dans ce laboratoire, dirigé alors par J.J. Thomson qui en avait fait un centre extrêmement vivant, il prit contact direct et personnel avec les savants étrangers, et noua de belles amitiés, en particulier avec Rutherford et Wilson.

Revenu en France en 1898 il est successivement préparateur, puis chef de travaux àuprès de la Chaire d'enseignement de Physique à la Sorbonne, où il prépare sa Thèse "Recherches sur les gaz ionisés" qu'il passe en 1902. Il supplée ensuite Mascart au Collège de France où il est nommé professeur titulaire quelques années plus tard (1909). Entre temps, il était devenu professeur à l'Ecole de Sèvres et avait succédé à Pierre Curie comme professeur à l'Ecole de Physique et Chimie (1905); il y deviendra Directeur des Etudes et enfin Directeur de l'Ecole en 1925.

Son activité s'exerce sur plusieurs plans: celui de l'enseignement, celui de la découverte, celui de l'action sociale. Elle est jalonnée par de nombreuses publications et par des marques d'estime venues des principales sociétés scientifiques françaises et étrangères; plusieurs fois lauréat de l'Institut, l'Académie des Sciences le nomme en 1934 membre de la section de Physique générale et le Conseil Solvay l'appelle à la présidence d'abord de son Comité scientifique ensuite du Conseil lui-même.

Deux guerres passent; Dès la première, certains travaux de Langevin trouvent une application extrêmement importante au repérage des sous-marins. En 1940, il dirige un groupe de recherches. L'armistice trouve Langevin et son Ecole repliés à Toulouse. Malgré le danger, il retourne à Paris et reprend ses cours au Collège de France mais ne peut en faire que deux. Le 30 Octobre 1940, il est arrêté par la Gestapo et incarcéré à la prison de la Santé. En raison des nombreuses protestations de ses élèves, les Allemands l'en retirent après six semaines de détention et le placent en résidence surveillée à Troyes. En 1944, redoutant le pire, ses amis le font passer clandestinement, le 2 Mai, en Suisse d'où il revient après la Libération le 25 Septembre de la même année.

Il reprend ensuite avec un courage admirable son activité, la santé durement atteinte toutefois par les épreuves de la guerre. En 1945, on a célébré en Sorbonne, au cours d'une cérémonie extrêmement émouvante son 73ème anniversaire et un an et demie après, le 19 Décembre 1946, il s'éteint doucement au milieu des siens. La France décide de lui faire des funérailles nationales et le 21 Décembre, tout le peuple de Paris en deuil le conduit à sa dernière demeure.

La vie de Paul Langevin a été toute de labeur et de lutte, d'idéal et de passion. Sur le plan proprement scientifique, celui de la découverte, sur le plan de l'action sociale nationale ou internationale, ce Parisien fut un travailleur et un lutteur acharné. Il joignait à un amour profond de la science et de la justice une bonté foncière, naturelle, une compréhension des misères humaines qui en ont fait un des grands esprits et des grands coeurs du siècle. Son intelligence, son savoir et sa qualité d'âme étaient telles qu'on aurait reconnu en lui, n'importe quand et n'importe où le grand homme qu'il a été. Grand, il l'a été non pas uniquement par rapport à ses contemporains, mais d'une façon absolue; grand il l'aurait été aussi bien s'il avait vécu dans la Grèce antique, dans l'Italie de la Renaissance ou la France de la Révolution. Le Panthéon l'accueillera sans nul doute d'abord parce que c'était un grand Français, mais il était en même temps un citoyen du monde et un sommet de l'humanité.

L'activité scientifique proprement dite de Paul Langevin a été à la fois d'ordre expérimental, théorique et technique. Elle présente un développement harmonieux et l'on y trouve, outre la contribution personnelle, la résonance de tous les grands problèmes qui ont agité la science durant ces cinquante dernières années.

Ses travaux personnels ont commencé à une époque où, par sa découverte des rayons X, Roentgen avait suscité l'intérêt considérable que l'on sait. Aussi les premiers travaux de Langevin commencés à l'Ecole Normale avec Jean Perrin et continués à Cambridge et à Paris, ont-ils trait aux rayons de Roentgen et à l'ionisation des gaz. Sa première publication parue au Bulletin des séances de la Société française de Physique du 20 Avril 1900 est intitulée: "sur l'ionisation des gaz"; sa thèse, "recherches sur les gaz ionisés" (1902) contient le premier exposé d'ensemble, tant du point de vue expérimental que théorique de ses recherches sur les propriétés des ions gazeux.

Dans ce domaine touffu, difficile à explorer, Langevin, pour ses débuts, apporte une contribution extrêmement importante. Il découvre et étudie les rayons secondaires des rayons X, met au point des méthodes nouvelles pour l'étude des ions par la mesure de leurs charges, de leurs mobilités et de leurs coefficients de recombinaison. Il est obligé également d'améliorer la technique des mesures et perfectionne en particulier la technique électrométrique pour l'adapter à la mesure de toutes petites charges, rendant ainsi un service considérable aux chercheurs engagés dans cette voie.

Ses études sur les ions l'amènent à découvrir dans l'atmosphère des ions quelques milliers de fois plus lents que ceux produits directement par le rayonnement. Ce sont les <<gros ions>> dont il étudie l'origine, la nature et la formation à partir des particules en suspension dans l'air. De cet ensemble de travaux, il peut tirer une interprétation de certains phénomènes météorologiques et en particulier de la formation des nuages; la discontinuité existant entre les couches inférieures (stratus, cumulus, nimbus) et les couches supérieures (cirrus) correspond à la différence de formation de ces nuages, issus de gros ions ou d'ions ordinaires.

A côté de ces travaux expérimentaux et pour interpréter les nouvelles propriétés des ions, Langevin a été amené à perfectionner non seulement les méthodes de mesure, mais aussi la théorie. C'est ainsi qu'il a repris la théorie cinétique des gaz pour examiner l'image corpusculaire du mécanisme de la conductibilité et montrer comment on peut prévoir les résultats concernant la diffusion, la mobilité et la recombinaison des ions. Le problème est essentiellement celui des échanges de quantité de mouvement entre la particule et les molécules d'un gaz. Langevin donna la solution générale pour le cas d'une loi d'interaction mutuelle quelconque entre molécules, problème que Maxwell n'avait résolu que dans un cas particulier. Ces recherches ainsi que l'étude du mouvement brownien devaient l'amener à reprendre d'une façon générale les raisonnements du calcul des Probabilités appliqués à un grand nombre de faits physiques, fluctuations, désintégrations radioactives, rayonnements en équilibre. Ces problèmes l'ont préoccupé jusqu'à sa mort et dans les dernières années de sa vie il en a encore étudié l'application au problème du mouvement des neutrons et de leur passage à travers la matière.

Les travaux sur les ions, particules chargées d'électricité, ont amené Langevin, tout naturellement, à s'occuper de la théorie de l'électromagnétisme et de celle des électrons suivant Lorentz. Ses travaux ont largement contribué au développement de cette dernière en fournissant une analyse complète de l'émission du rayonnement par une particule en mouvement et sa relation avec l'inertie d'origine électromagnétique. Signalons d'autre part qu'il a pu pour la première fois donner une théorie électromagnétique de la théorie du bleu du ciel de Lord Rayleigh.

Mais c'est dans les applications au magnétisme que les travaux de Langevin lui ont acquis un de ses plus beaux titres de gloire. Sa théorie si simple et si belle, correspond probablement si bien au mécanisme intime du phénomène que ses formules n'ont pas été altérées par le bouleversement profond introduit par la théorie des quantas.

Partant des idées d'Ampère, et considérant que les courants particulaires correspondraient précisément à une circulation d'électrons en mouvement autour d'un noyau central, Langevin a analysé pour la première fois d'une manière correcte l'action d'un champ magnétique sur un système d'électrons en mouvement autour d'un noyau central. Il résulte de cette analyse que l'effet de l'établissement d'un champ magnétique est la superposition aux mouvements électroniques initiaux d'un mouvement de rotation d'ensemble autour de la direction de ce champ. Cette rotation fait apparaître un moment magnétique d'ensemble dirigé en sens inverse du champ magnétique, et proportionnel à celui-ci avec un coefficient que l'on calcule aisément. C'est là la théorie du diamagnétisme, propriété commune à tous les atomes, dépendant uniquement de la configuration électronique (et non pas du spin du moment magnétique de l'électron).

Les raisonnements précédents supposent que, normalement, l'atome ne possède pas de moment magnétique résultant, comme dans la grande majorité des cas. Il existe cependant des substances, appelées paramagnétiques ,dont les atomes ou molécules ont des moments résultants dont les directions sont réparties au hasard. Lorsqu'on plonge une telle substance dans un champ magnétique, deux sortes de phénomènes ont lieu. On a d'abord l'orientation diamagnétique dont il a été question plus haut des configurations électroniques de chacun des atomes; et il y a en plus l'orientation dans le sens du champ des moments magnétiques de chaque atome. Cette dernière orientation est cependant contrariée par l'agitation thermique et en fait, un équilibre statistique s'établit entre cette action et celle du champ magnétique extérieur. En écrivant que cet équilibre existe, Langevin a pu retrouver les lois du paramagnétisme qui se réduisent à la loi de Curie pour les faibles champs.

La pénétrante analyse de Langevin a eu un retentissement considérable. Elle forme encore aujourd'hui la base de l'explication du magnétisme, même en théorie quantique. Le nombre de travaux qu'elle a suscités est énorme et les résultats obtenus souvent essentiels, non seulement dans ce domaine, mais dans les domaines connexes. Ainsi, par exemple, la théorie moderne des diélectriques a été développée initialement par Debye exactement sur le modèle de celle du magnétisme et le nombre de travaux effectués sur ce même sujet dans le monde entier est considérable. Il en est de même pour la détermination du moment magnétique individuel des molécules des divers corps qui peuvent être calculés à partir du terme paramagnétique et du coefficient d'aimantation. Dans le cas du ferromagnétisme, Langevin avait signalé que son explication devait être trouvée en faisant intervenir les actions mutuelles des molécules voisines; on sait avec quel succès P. Weiss a introduit son hypothèse du champ moléculaire équivalent à l'ensemble de ces actions mutuelles.

Langevin avait signalé également que la désaimantation paramagnétique devait s'accompagner d'un refroidissement de la substance. L'application de cette remarque est un des moyens expérimentaux les plus puissants qu'on ait trouvé pour descendre aux températures extrêmement basses, de l'ordre d'une petite fraction du degré absolu.

Enfin, la méthode utilisée par Langevin, à savoir le calcul des conditions d'équilibre entre l'agitation thermique et une tendance quelconque à l'orientation moléculaire a une portée beaucoup plus générale. Elle permet d'analyser les phénomènes où la dissymétrie de la molécule donne naissance à des actions extérieures qui tendent à l'orienter. Langevin lui-même l'a appliquée aux phénomènes de la biréfringence électrique et magnétique et a obtenu des résultats conformes à l'expérience. De nombreux travaux l'ont développée et ont permis d'obtenir des renseignements précis sur la structure des molécules.

S'étant penché sur les problèmes les plus ardus de l'électromagnétisme, contemporain d'Einstein et ayant suivi depuis le début le développement de ses travaux, Langevin ne pouvait se désintéresser de la théorie de la relativité. En fait il a été un de ceux auxquels cette théorie doit le plus son développement et sa diffusion. Son esprit critique, sa pénétration ont fait énormément pour que cette théorie soit débarassée des interprétations erronées. Ses conférences, son cours au Collège de France ont puissamment contribué à sa diffusion. En dehors de cette action Langevin a apporté lui-même sa contribution au développement de la théorie par des travaux d'importance capitale; il suffira de citer les conséquences qui en découlent pour le problème de l'inertie de l'énergie.

La possibilité de transformation de la masse en énergie donne, d'une part, la clé d'une énigme qui n'avait pas été déchiffrée: atomes et le multiple le plus rapproché de la masse de l'atome d'hydrogène. Langevin a interprété ces "défauts de masse" comme donnant précisément les énergies de liaison responsables de la stabilité des atomes. La décomposition des atomes ou la dématérialisation permet par un processus inverse la libération d'une quantité considérable d'énergie. Il est inutile d'insister sur l'importance de cette découverte puisqu'aussi bien elle a reçu non seulement une confirmation expérimentale au laboratoire, mais aussi une application industrielle ou plutôt guerrière inattendue.

Langevin a eu une action considérable sur les physiciens français dont la plupart ont été ses élèves, par son action personnelle et par ses cours. Ceux-ci étaient un reflet des travaux les plus modernes exposés avec une clarté inimitable et passés au crible d'un esprit critique acéré. Il avait accepté de présider le jury de soutenance de la thèse de L. de Broglie à une époque où les hypothèses de celui-ci étaient loin de laisser clairement deviner ce qu'elles recelaient de sensationnel. Lorsque la révolution introduite par les idées de la mécanique ondulatoire eut pris l'ampleur que l'on sait, Langevin fut un des premiers à envisager les problèmes divers et multiples qu'elle suscitait. Il examina et mit en ordre divers problèmes concernant les chocs entre particules rapides, l'effet Compton, l'équilibre entre la matière et le rayonnement. Son cours du Collège de France sur les statistiques modernes a clarifié pas mal de points laissés dans l'ombre. Enfin les problèmes philosophiques que posent les nouvelles mécaniques, en particulier ceux qui ont trait au déterminisme, ne l'ont pas laissé indifférent.

Comme dans le cas de la relativité, Langevin a été ici aussi, non seulement le critique avisé qui par son action empêche le foisonnement d'interprétations erronnées, - et il y en a eu ! - mais aussi le travailleur heureux qui apporte sa contribution personnelle à l'édifice en construction. Son influence en tant que professeur pour faire connaître les idées nouvelles a été considérable. Il repensait effectivement celles-ci avant d'en donner la quintessence dans ses cours, qui apparaissaient clairs et simples, mais dont précisément la simplicité était le plus sûr indice d'un labeur de tous les instants. Je me rappelle encore l'avoir trouvé à cette époque dans son cabinet de travail, par une après midi torride, pestant contre le "rétablissement mental" qu'on était obligé de faire chaque matin pour suivre de près toutes les nouvelles découvertes et les nouveaux travaux de mécanique quantique qui se succédaient à ce moment à une vitesse "dangereusement proche de celle de la lumière".

D'autres domaines de la science pure ont tenté Langevin, soit par des problèmes précis comme par exemple l'interprétation cinétique de la pression osmotique ou des problèmes de radioactivité (entre autres la loi de probabilité des émissions des particules alpha) soit par des questions générales commes celles ayant trait à la classification des grandeurs physiques, aux unités, au principe de Carnot.

Mais l'activité de Langevin ne s'est pas bornée à des recherches de science pure, les applications de celle-ci ont également bénéficié de son esprit inventif. Parmi celles-ci il faut citer en première ligne ses travaux sur les ultra-sons. Il s'agit là non seulement d'un travail purement théorique, mais de la résolution heureuse de toute une série de problèmes pratiques, permettant l'application des ondes ultra-sonores à la détection des sous-marins. La contribution de Langevin consiste non seulement en l'idée d'utiliser le quartz piézo-électrique comme émetteur, mais aussi en la résolution des problèmes pratiques concernant: l'amplification de la puissance de celui-ci par l'emploi de la résonance, la construction des émetteurs sous forme de sandwich, trilame quartz-acier et la construction de détecteurs utilisant l'effet piézo-électrique inverse. La première publication sur ce sujet est le brevet pris en commun avec M. Chilovosky, le 29 Mai 1916 et intitulé "procédé et appareil pour la production de signaux sous-marins dirigés et la localisation d'obstacles sous-marins". On sait le prodigieux essor de cette technique qui s'est développée constamment depuis, pour atteindre son maximum pendant la deuxième guerre mondiale, dans laquelle le repérage par ultra-sons (asdic) était une arme indispensable dans la lutte anti sous-marins. On doit aussi à Langevin, directement ou indirectement, le développement des applications pacifiques des propriétés du quartz piézo-électrique, par exemple à la mesure des pressions dans divers cas, à la stabilisation des fréquences; etc; sans parler des applications directes de la technique signalée plus haut comme par exemple le sondage continu et l'enregistrement des profondeurs. Enfin, au cours de sa longue carrière, Langevin a été conduit occasionnellement à s'occuper de diverses autres questions de sciences appliquées, d'acoustique, de balistique, et d'électro-technique.

Le travail proprement scientifique de Langevin ne représente qu'un aspect de son infatigable activité. En réalité, à ce genre de travail se mêlaient chaque jour des préoccupations d'un ordre plus général, plus directement humain, pourrait on dire. Loin d'être un savant isolé du reste du monde, et préoccupé uniquement des lois qui régissent la matière inanimée, Langevin se penchait sur l'homme lui-même, phénomène merveilleux; et, tout comme il avait étudié par la théorie cinétique les ensembles d'atomes ou de molécules, il envisageait le problème des collectivités humaines, non pas cette fois-ci en théoricien, pour dégager simplement les lois de leur comportement, mais pour tenter de réaliser dans la mesure où la condition humaine le permet, un état d'équilibre harmonieux conforme à un idéal de justice et de bonté.

Professeur toute sa vie, le problème de l'éducation des masses et de individus, et singulièrement celui de l'organisation de l'enseignement l'a toujours attiré. Il estimait très haut le rôle de l'enseignement des sciences dans la culture générale et voulait l'y incorporer véritablement au lieu de simplement le juxtaposer. Il pensait que l'histoire des idées au cours des siècles était particulièrement apte à extraire de l'enseignement scientifique la quintessence de la contribution que celui-ci peut apporter au développement de l'esprit. Jusqu'aux derniers jours de sa vie il a poursuivi cette tâche à la commission pour la réforme de l'enseignement créée à la libération et qui portait son nom.

En fait ces préoccupations n'étaient que l'application pratique à un domaine déterminé des conceptions et des idées dont son esprit était pétri. Comprendre autrui a-t-il écrit, savoir sortir de soi et de son égoisme pour se mettre au point de vue des autres, saisir leurs besoins, leurs raisons d'agir, leurs façons de voir, les tolérer et les aider, collaborer à leur tâche comme à une tâche commune, n'est-ce pas un des aspects de la vie sociale et morale ?

La vie sociale et les devoirs qu'elle implique, il en avait pris conscience en même temps qu'il faisait ses premiers pas dans la vie scientifique. Avec Péguy il entrait dans la bataille pour la première fois dans l'affaire Dreyfus et depuis, tous les grands courants d'idées du siècle l'ont trouvé à son poste de combat.

Nous ne pouvons ici, comme nous l'avons fait pour son activité scientifique retracer ses efforts dans cette voie. L'idée dominante; le leit-motiv, de toutes ses actions, l'atmosphère qui baignait toutes ses pensées et la constante de tous ses mouvements dans l'ordre social était l'idée de Justice, justice individuelle, sociale, internationale. Il associait d'ailleurs dans un même amour passionné la Justice et la Science et se plaisait à rappeler que les Grecs avaient déjà fait de Minerva la déesse commune de ces deux aspirations humaines.

Et enfin parce qu'il était lui-même, juste et bon, il voulait qu'à côté de la Justice, la Bonté régnât dans les relations humaines. Les dernières paroles qu'il ait prononcées sur son lit de mort étaient ces deux là. Son charme était incomparable et vous saisissait dès le premier contact. On n'aurait su dire ce qui, de sa voix grave ou de ses yeux profonds, contribuait ensuite à en fortifier l'emprise. On subissait un envoûtement délicieux; on suivait le brillant développement des idées et puis lentement tout celà passait au second plan: il ne restait plus que l'enchantement d'un contact purement humain fait de douceur de force et d'harmonie. Il avait des gestes caractéristiques; au tableau noir, lorsqu'il exposait quelque théorie, ses mains décrivaient sans cesse dans l'espace des courbes apparemment fermées. On les retrouve dans les gestes de certains de ses disciples: au Collège de France devant le même tableau noir, les mains de M. Joliot-Curie attestent, sans le vouloir qu'il a été un des élèves préférés du Maître.

Il avait enfin une voix aux inflexions profondes, aux larges contours, au timbre chaud et je ne connais rien de plus émouvant que de l'entendre résonner à nouveau.

Deux mois après sa mort a eu lieu en Sorbonne une cérémonie à la gloire de Paul Langevin. Les vivants apportèrent l'un après l'autre leur hommage à sa mémoire. Lorsque le dernier se fut tu, un silence total envahit l'auditoire, silence intolérable, comme celui qui sépare la vie de la mort. Puis, soudain, le grésillement à peine perceptible d'un haut parleur s'enfla et la voix de Langevin remplit l'amplithéâtre.

Elle était là, vivante, chaude, caressante; elle résonnait comme autrefois, avec ses inflexions coutumières; libérait les larmes. Et l'on cherchait en vain sur l'estrade la silhouette familière et les gestes qui avaient ponctué autrefois les mêmes phrases à la même place.

La voix s'est tue, mais ses vibrations continuent dans nos coeurs où elles sont gravées à jamais; elle nous a rappelé qu'un homme de bonne volonté est passé sur la Terre, qu'il y a laissé son empreinte profonde et ineffaçable et que le trésor de l'humanité s'en est trouvé prodigieusement accru.

VII

Documents additionnels

VII. DOCUMENTS ADDITIONNELS

V11.1 Scrisoarea catre Tineri.
DACIA; p1, Dec 20, 1918.

V11.2 Traduction française correspondante.

V11.3 Mémorandum concernant l'activité du Séminaire de Physique Théorique pendant l'année 1943-1944.
Université de Pôrto, Faculté des Sciences.
Avril 24, 1944.

V11.4 Mémorandum: Le Séminaire de Physique Théorique du CNRS.
Paris, Novembre 1954.

LETTRE AUX JEUNES

Note de l'Editeur:

Le format (in folio) du journal DACIA où cette lettre a été publiée et la disposition du texte sous forme de deux pleines colonnes en première page ont rendu impossible une reproduction correcte de l'original roumain auquel a dû être substitué une copie dactylographie.

D A C I A

Al. Vlăhuţă şi I. Al Brătescu Voineşti.

Sâmbătă $\dfrac{\text{20 Decembrie}}{\text{11 Ianuarie}}$ 1918

<u>Scrisoare către tineri.</u>

M'ai învăţat, Durere, ce e să ai o ţară.
Al. Vlăhuţă

Iubiţii mei prieteni,

Iată-ne acuma, după doi ani şi mai bine de trudă şi de zbucium, în pragul unui an nou care vine încărcat cu atâta nădejde pentru neamul nostru - iată-ne în sfârşit în zilele acestea de sfântă sărbătoare, din nou singuri stăpâni peste tot pământul românesc cu sufletele pline de negrăita bucurie a unei fericiri cum numai în vis ne-o puteam închipui.

Cine ar fi crezut acum un an în tristele zile ale armistiţiului, că eram atât de aproape de împlinirea acestui vis, pentru care atâţia şi atâţia au suferit şi au sângerat, şi pe care acum, în aceste clipe deapururi neuitate, noi îl trăim aievea?

Atunci, cu sufletele pline de amărăciune, ne socoteam păcatele care ne aduseseră în nenorocire şi căutam în tot felul chipul de a le înlătura pe viitor; astăzi, cu lacrimi de bucurie în ochi, mulţumim Domnului că ne-a învrednicit să trăim asemenea vremi şi,- în clipa aceasta de fericire - ştergem din amintirea noastră pagina cea tristă a anilor de urgie, uităm tot ce am suferit şi am îndurat pînă acum, pentru ca, cu toate puterile sufletului, să ne putem bucura de bucuria cea mare a Neamului.

Si e bine să uităm, fără îndoială, dar nu totul. Un lucru va trebui să rămâie nesters din amintirea noastră, - mai mult- să dăinuiască veşnic, săpat ca în granitul care înfruntă veacurile, în amintirea tuturor celor ce vor veni după noi. Ceea ce am gîndit atunci, în acele zile de restrişte, ceea ce am hotărît atunci, cînd eram strânşi în cătuşa suferinţei, va trebui să gândim din nou, să îndeplinim cu eroism acuma, cînd norocul nu ne mai e împotrivă, - căci aceste gîndiri, aceste hotărîri închid în ele o parte din experienţa pe care n'am avut-o şi pe care am plătit-o aşa de scump în aceşti doi ani de grea învăţătură.

Vă mai aduceţi aminte cum ne-am întors acasă,demobilizaţi, astă vară?

Veneam tăcuţi, fără steag fâlfâitor în vânt, fără arme, fără flori, şi în bucuria revederii unor locuri şi fiinţe scumpe, se amestecă amărăciunea unor umilinţe, pe care, orice ar fi fost, nu le meritau desigur măcar acei admirabili soldaţi, care ne-au dat Mărăşeştii şi Mărăştii, chiar a doua zi după dezastru.

Veneam înapoi tăcuţi,- cu inima îndurerată, dar îndârjiţi, hotărâţi să reparăm cu munca noastră ceea ce distruseseră păcatele unei societăţi întregi şi o fatalitate care mereu ne-a fost împotrivă.

Şi în acele frumoase zile de vară cînd după atîtea nenorociri sufletul încerca să se lecuiască şi el de rănile sale, - vă veţi fi întâlnit desigur, - faţă'n faţă, ochi în ochi, cu vre-un străin în uniformă - cu un neamţ, cu un bulgar - şi veţi fi citit atunci în ochii lui, mai lămurit decît în toate tratatele de pace şi în toate comentariile lor, soarta care ne aştepta.

Aţi văzut acel rânjet sălbatec de bestie triumfătoare, care voia să fie surâsul mândru şi batjocoritor al unui biruitor fără milă şi fără scrupule: aţi văzut privirea aceea dispreţuitoare a Bulgarului, plină de ură, de invidie şi de o satisfacţie care-l făcea să nu-şi mai încapă în piele de mândrie că a zdrobit o ţară aşa de frumoasă şi de bogată; privirea, în care înadins tot ce putea da sufletul său josnic, pentru ca să te umilească după ce ţi-a luat totul, privirea aceea insultătoare ca o palmă şi arzătoare ca o lovitură de biciu. Atunci vederea probabil vi s-a întunecat deodată şi pumnii vi s-au strâns nervos, gata de un gest care totuşi a fost înfrânat.

Voi toţi - acei care veniţi din tranşeele unde atâta timp, sub ameninţarea continuă a glonţului duşman, aţi îndurat atâtea, pentru ca ţara să ne fie mai mare, mai mândră, mai bogată,- gândiţi-vă bine la cele ce s-au petrecut şi la cele ce au să se mai petreacă de acum înainte.

N-am intenţia, nu pot să vă dau sfaturi. Alţii au s-o facă, mai cu folos, cu experienţa şi cu autoritatea lor morală. Dar aşi vrea să vă spun, dragii mei, ce cred eu, - şi ce cred mulţi în ţara aceasta atât de frumoasă şi de năpăstuită,- despre ce avem de făcut noi tinerii,- acum a doua zi după nenorocirea de la care de abia am scăpat, cînd neamul întreg aşteaptă cu o îndoială dureroasă de la generaţia care s-a oţelit în lupta cu vrăşmaşul, munca şi jertfele care-l vor mîntui de păcatele de până azi şi-i vor îngădui să-şi poată îndeplini rostul lui pe pământ, între popoarele lumii.

Opera de realizat este imensă şi o viaţă de om nu-i poate da de capăt. Multe generaţii vor trebui să lupte din răsputeri pentru desăvârşirea acestei "opere de regenerare",- trei cuvinte ajunse, vai, banale- din care un singur om nu poate aduce la îndeplinire, în toată viaţa lui, decât o foarte mică părticică.

Acum este vorba de acea hotărîre generală pe care trebuie s-o ia oricine în această ţară atât de urgisită de soartă până acum, de a-şi închina viaţa lui de aici înainte unei munci neurmate, cinstite şi pururea însufleţită de o aprigă dorinţă de a ridica şi întări cât mai mult iubita noastră ţară, atât de umilită şi batjocorită până ieri, din propria noastră vină.

O, dragii mei, cuvintele mari au ajuns atât de goale de când le auzim mereu în gura atâtor şarlatani care ne tot asurzesc cu ele, - că le citim şi nu ne mai simţim, ca altă dată, înfiorați din tălpi până-n creştet de acel avânt generos care hotărăşte faptele cele bune - după cum tremură şi cântă o coardă când din întâmplare o izbesc undele sunetului pe care şi ea le-ar puteaproduce. Uitaţi-vă, suntem tineri, plini de energie, plini de vlagă şi viaţa ne îmbie cu frumuseţile ei. Si ce nu putem face!

Drumul nostru trebuie să fie bine ales dela început; priviţi unde păşiţi şi nu lăsaţi, pentru Dumnezeu, atâtea comori de energie, - nădejdea tuturor - să se risipească în vântul plăcerilor sau într-o activitate seacă sau neroditoare fiind că este izolată. Tinta de atins trebuie hotărîtă cu precizіune. Si înţelegeţi bine - orice aţi vrea să deveniţi, ingineri, avocaţi, funcţionari, negustori, etc. - că acum nu mai este vorba ca, liberi ca altă dată, să ne cheltuim energia într'o activitate, care nu ne-ar ajuta decât în chip indirect, sau în al doilea rând, ţara.

Avântul generos al tinereţii, daţi-l pentru Ţară!

Faceţi, - în pornirea de entuziasm care vă însufleţeşte, din arzătoarea dragoste de ţară dobândită în tranşee sau în durerile pribegiei, - legământul sfânt de a lucra pentru ea, fără preget, din toate puterile, cu toată râvna de care suntem în star

Băgaţi de seamă; nu: "tot lucrul meu va fi pentru ţară; ci: " pentru ridicarea ţării mele îmi voi înzeci puterile, îmi voiu sângera mâinile, voiu ţinea piept furtunilor; pentru ea mă voiu frânge în două la nevoie şi cu sângele meu voiu scrie în cartea progresului un pas al înaintării ei".

Suntem ai ţării acum; nu mai avem dreptul să fim, - nu, Doamne iartă-mă, internaţionali - dar nici măcar deopotrivă de interesaţi în trebile ţării şi ale noastre. Toată activitatea să fie pentru ea, scumpa noastră ţară fără de noroc.

Iar voi, care încă şovăiţi şi acuma, reţinuţi de plăcuta perspectivă a unei vieţi paşnice, fără luptă, fără zbucium, dar care totuşi, - vă cunosc - aţi vrea să lucraţi cu aceeaşi ardoare pentru ţară, - ascultaţi măcar acum ce vă şoptşte partea cea bună a sufletului vostru şi ţineţi seama de cuvintele ei, căci prin ele vorbesc atâţia şi atâţia fraţi de acelaşi sânge care, - zdrobiţi de schije sau doborîţi de boli - putrezesc acum în fiecare colţişor al acestei ţări şi cari cer, cu glas îndurerat, de dincolo de mormânt ca jertfa lor să nu rămână de tot zădarnică.

Ascultăţi-o cum, chinuită de îndoială, se smulge biruitoare din ghiarele ei, şi se ridică mândră şi hotărîtă, înţelegeţi-o şi însuşiţi-vă în totul cuvintele ei, căci ele spun adevărul.

Ascultaţi-o cum spune: "Aşi vrea să lucrez. Dar cîte odată, cînd mă gândesc cât de enormă e sarcina aceasta, mă apucă groaza şi îndoiala dacă am să pot lupta. Si uneori mirajul unei vieţi potrivite caracterului meu, mai mult izolată de ceilalţi oameni şi de treburile lor, - o viaţă muncitoare desigur, dar fără luptă, o viaţă searbădă, criminală prin inacţiune, o dezertare dela marea şi sfânta noastră datorie, - mă îmbie, cu atât mai mult cu cât se împacă mai bine cu felul meu de a prefera să stau departe de luptă, de orice luptă.

Dar parcă nu mă lasă ceva, şi toată fiinţa mea se revoltă la o astfel de idee. N'am fost luptător, dar voiu fi, şi cu atît mai aprig. Voiu fi luptător, voiu fi muncitor, pentru că aşa cere ţara mea, până nu voiu mai avea nci un pic de vlagă în mine. Va fi aprigă lupta. Cu atât mai bine. Mă voiu obişnui cu ea, din ea voiu trăi. Si, atâtea şi atâtea sforţări cinstite, stângaci făcute la început, cu unele greşeli, vor duce la un rezultat. Din toată energia depusă cu stăruinţă, cu răbdare, cu încăpăţinare, nu se poate să nu lasă ceva bun; nu se poate fiindcă nici o mişcare nu e pierdută, ea se înregistrează ori cât de mică ar fi ea şi în sufletul oamenilor ele se adună şi cu putere nebiruită îi îndeamnă la lucru şi aduc rezultatul dorit.

Si mai târziu, poate îmi va fi dat să te văd, ţara mea, împodobită iarăşi cu nestematele virtuţii şi ale bogăţiei, cu totul altele decât acele false pietre preţioase de până acum; o, de-aşi putea să te văd aşa cum te visez!

Al. Proca.

DACIA

Journal de Al Vlahuta et I. Al. Bratescu Voinesti

Samedi 20 Décembre 1918

LETTRE AUX JEUNES

"Tu m'as appris, ô souffrance, ce que c'est d'avoir une Patrie"

Al. Vlahuta

Mes très chers amis,

Nous voici maintenant après plus de deux ans de peine et de tourment au seuil d'une année nouvelle porteuse de tant d'espérance pour notre nation, nous voici donc enfin, en ces jours de saintes fêtes, à nouveau seuls souverains sur tout le sol roumain et nos coeurs débordent de la joie indicible d'un bonheur tel que seul le rêve pouvait nous le faire concevoir.

Qui eût cru il y a un an, aux tristes jours de l'armistice, que l'accomplissement de ce rêve était si proche, en vue duquel tant et tant d'hommes ont souffert et versé leur sang, que nous vivons véritablement maintenant en ces moments à jamais inoubliables?

A l'époque, l'âme emplie d'amertume, nous faisions le décompte des fautes qui nous avaient conduit à la catastrophe et cherchions, de toutes manières, le moyen de les écarter à l'avenir. Aujourd'hui, les larmes aux yeux de joie, nous remercions Dieu de nous avoir trouvés dignes de vivre une pareille époque et - en cet instant de bonheur - nous effaçons de notre souvenir cette page affligeante des années d'horreur; nous oublions tout ce que nous nous avons souffert et enduré jusqu'à présent afin qu'il nous soit possible, de toute la force de l'esprit, de nous réjouir de la joie même, immense, de la Nation.

Et il faut oublier, certainement, mais non point tout.

Il y a un aspect qui ne devra pas être effacé de notre souvenir - je dirai plus - qui devra persister éternellement, gravé comme dans le granit qui défie les siècles, dans le souvenir de tous ceux qui viendront après nous: ce que nous avons pensé en ce temps-là, en ces jours de pénurie; ce que nous avons pris comme résolutions alors que nous étions ligotés dans les chaînes de la souffrance; tout cela, il va falloir le penser de nouveau et l'accomplir avec héroisme, maintenant, pendant que le sort ne nous est plus contraire car ces pensées, ces choix contiennent en partie cette expérience qui nous a fait défaut et pour laquelle nous avons acquitté un prix si élevé durant ces deux années de rudes leçons.

Vous souvenez vous encore comment nous sommes rentrés chez nous, l'été dernier après la démobilisation?

Nous étions réduits au silence. Nous revenions sans drapeau flottant au vent, sans armes, sans fleurs et, à la joie de revoir des lieux et êtres chèrs se mêlait l'amertume d'humiliations que, indépendamment des circonstances, ne méritaient assurément pas ces admirables soldats qui nous ont gagné Màràsestii et Màràstii même au lendemain du désastre.

Nous revenions sans voix, le coeur serré mais opiniâtres, résolus à restaurer par notre labeur ce qu'avait détruit les fautes d'une société entière et une fatalité sans cesse contraire.

Et en ces beaux jours d'été où, après tant de calamités, le coeur s'efforce de panser ses plaies vous aurez sûrement rencontré face à face un étranger en uniforme, un allemand ou un bulgare, et vous aurez lu dans ses yeux plus clair que dans mille traités de paix et tous leurs commentaires, quel sort nous attendait.

Vous avez vu ce ricanement sauvage d'animal triomphant qui se voulait le sourire hautain et insultant du vainqueur sans pitié ni scrupules. Vous avez vu le regard méprisant du Bulgare, haineux, envieux, plein de satisfaction à n'en plus pouvoir, orgueilleux d'avoir anéanti un pays si beau et si opulent; ce regard où il laisse voir intentionnellement toute la bassesse de son esprit afin d'humilier encore après avoir tout pris, ce regard insultant comme une gifle et brûlant comme un coup de fouet. Vous vous êtes alors probablement assombris d'un coup, les poings serrés nerveusement, prêts à un geste toutefois réprimé.

Tous, vous qui venez des tranchées où vous avez tant enduré, pendant tant de temps sous la menace des balles ennemies afin que la patrie en soit grandie, plus fière, plus riche, pensez bien à ce qui s'est passé et à ce qui va avoir lieu à partir de maintenant.

Je n'ai pas l'intention de vous donner des conseils ni ne le puis. A d'autres de le faire plus utilement à partir de leur expérience et leur autorité morale. Mais je voudrais vous dire, mes très chers, ce que moi je crois - comme bien d'autres en ce pays si magnifique et accablé - ce que nous, les jeunes, nous devons faire aujourd'hui, au lendemain du désastre dont nous venons à peine de réchapper, en ce moment où la nation entière attend avec douloureuse incertitude le travail et les sacrifices de cette génération trempée par la lutte contre l'ennemi afin d'être exonérée des fautes commises jusqu'ici et de pouvoir accomplir sa tâche sur cette terre parmi les peuples du monde.

L'oeuvre à réaliser est immense et la vie entière d'un homme ne peut en venir à bout. Bien des générations devront lutter de toutes leur forces pour achever ce "travail de renouveau" - trois mots mis ensemble, hélas, parfaitement banaux - et dont un homme seul ne peut, au cours de sa vie entière, accomplir qu'une toute petite partie.

C'est maintenant que chacun en ce pays si délaissé par le sort jusqu'à ce jour doit prendre une résolution générale, celle de consacrer désormais sa vie à un labeur continuel, honnête, et animé toujours du désir ardent de relever et raffermir le plus possible notre Patrie bien-aimée qui fut tellement bafouée et humiliée jusqu'à hier par notre propre faute.

O mes très chers, les phrases ronflantes se sont tellement vidées de leur sens à force d'entendre tant de charlatans nous en rebattre les oreilles que nous les lisons mais ne frémissons plus des pieds à la tête comme autrefois de cet élan généreux qui dicte les actes purs - un peu comme vibre et chante une corde lorsque, par hasard, la frôlent les ondes d'un son qu'elle pourrait émettre. Voyez, nous sommes jeunes pleins de sève et d'énergie et la vie nous invite à ses beautés. Et que ne pouvons nous pas faire ?

Notre voie doit être bien tracée dès le début; regardez bien où vous allez et ne laissez pas, au nom de Dieu, se dissiper tous ces trésors d'énergie - qui sont notre espoir à tous - au vent des plaisirs ou en activités de valeur nulle ou improductives tant qu'elles demeurent isolées. Le but à atteindre doit être choisi avec précision. Comprenez bien, quoi que vous souhaitiez devenir - ingénieurs, avocats, fonctionnaires, hommes d'affaires, etc - il ne s'agit plus, maintenant que nous sommes de nouveau libres, de dissiper notre énergie en activités utiles pour nous seulement de manière indirecte ou qui placeraient l'intérêt du pays au second rang.

L'élan généreux des jeunes, donnez le pour la Patrie!

Faites, au nom de l'élan enthousiaste qui vous anime, au nom de l'amour ardent pour le pays affermi dans les tranchées ou les vicissitudes de l'exil, le serment sacré d'oeuvrer pour Elle, sans trêve, de toutes vos forces, avec toute l'ardeur dont nous sommes capables.

Attention; non pas simplement: "tout mon travail sera pour le pays" mais: "pour le redressement de mon pays je décuplerai mes forces, je m'ensanglanterai les mains, je tiendrai tête au malheur; pour mon pays je me mettrai en mille si besoin est et de mon sang j'inscrirai au livre du progrès une nouvelle page à son développement".

Nous faisons maintenant part intégrante du pays. Non seulement nous n'avons plus le droit d'avoir - que le Seigneur me pardonne - des aspirations internationales, mais nous n'avons même pas celui de porter un intérêt égal aux affaires du pays et aux nôtres propres. Que toute notre activité lui soit consacrée, à notre chère patrie désertée par la chance.

Et vous, qui même maintenant continuez à hésiter, retenus par la perspective agréable d'une existence paisible dépourvue de luttes et de violence mais qui néanmoins - je vous connais -voudriez employer la même ardeur à travailler pour la patrie, écoutez du moins ce que vous murmure votre conscience et tenez compte de ses paroles car, à travers elle, c'est la voix de tous ces frères par le sang qui se fait entendre; eux qui - criblés d'éclats ou abattus par la maladie - sont en train de se putréfier aux quatre coins de ce pays-ci et réclament d'une voix affligée depuis l'outre-tombe que leur sacrifice ne demeure pas entièrement vain.

Obéissez lui quand, torturée par les griffes de l'incertitude, elle s'en arrache victorieuse et se dresse fière et déterminée; entendez la et faites vôtres tous ses discours car ils disent le vrai. Ecoutez la dire: "Je voudrais travailler".

Mais il m'arrive, en pensant à l'énormité du fardeau, d'être saisi d'épouvante et de douter d'avoir la force de lutter. Parfois aussi le mirage d'une vie en harmonie avec mon caractère, à l'écart des autres hommes et de leurs occupations m'attire; une vie laborieuse certes mais dont la lutte soit absente, une vie insipide, criminelle par manque d'action; la désertion de notre devoir sacré. Et ce, d'autant plus que cela s'accorde mieux avec ma préférence à demeurer à l'écart du combat, de tout combat.

Mais je sens bien que c'est fallacieux et tout mon être se révolte contre ce genre de pensées. Je n'ai pas été un combattant mais je le serai et d'autant plus ardent. Je combattrai, j'oeuvrerai car ainsi l'exige mon pays jusqu'à l'épuisement de mes forces. Ce sera une lutte âpre. Et tant mieux. Je m'y habituerai et d'elle je vivrai. Et tous ces efforts honnêtes conduiront à un résultat en dépit des gaucheries du début et de quelques erreurs. De toute l'énergie accumulée avec patience, persévérance, obstination, il est impossible qu'il n'émerge pas quelque chose de valable puisque nul acte ne se perd mais s'enregistre dans l'âme humaine, aussi minime soit-il, pour y être recueilli avec d'autres et ensemble, d'une invincible puissance, ils incitent à l'ouvrage et conduisent au résultat voulu.

Et plus tard, peut être me sera-t-il donné de te contempler, ô ma Patrie, à nouveau parée de vertus inestimables et de richesses qui n'aient plus rien à voir avec les bijoux de pacotille portés jusqu'ici.

O, comme je voudrais pouvoir te contempler ainsi que je te vois en rêve.

Université de Pôrto
Faculté des Sciences

MEMORANDUM

CONCERNANT L'ACTIVITE DU SEMINAIRE DE PHYSIQUE THEORIQUE PENDANT L'ANNEE 1943-44

Le but de ce séminaire était double :

1. Etudier les mémoires et ouvrages récents de Physique Théorique moderne, de façon à fournir une base de départ pour l'élaboration des travaux originaux ; et

2. Développer, non seulement parmi les étudiants mais aussi dans un public spécialisé aussi nombreux que possible, le goût des recherches physiques, de façon à créer un climat favorable et un milieu propice aux découvertes dans le domaine mentionné.

Pour atteindre ce double but tout en ne dispersant pas les efforts, les travaux du séminaire ont été groupés autour d'un sujet central, suffisamment vaste pour présenter un intérêt général, mais assez précis pour éviter toute dispersion, à savoir
l'étude théorique générale des particules élémentaires.

Un programme a été établi, divisant cette étude en séances qui comportaient chacune l'examen d'un mémoire, d'un groupe de mémoires ou, plus généralement, d'une question, permettant d'examiner successivement les divers aspects du problème général: on trouvera ce programme en annexe. Il prévoit aussi bien l'analyse de mémoires de nature théorique que des conférences d'ensemble sur des résultats d'ordre expérimental, destinées à préciser aux théoriciens les bases physiques des phénomènes dont ils étudient la théorie.

Les mémoires inscrits au programme devaient être étudiés puis présentés au séminaire, le plus souvent possible par les élèves eux-mêmes; ils devaient être suivis d'une discussion ou de remarques critiques, qui, seules, permettent de situer la question dans le cadre des connaissances déjà acquises et saisir ses rapports avec d'autres problèmes, exercice d'une importance capitale pour tous ceux qui se consacrent au travail de recherche.

Dans la première période d'activité, allant du début de l'année jusqu'au 31 décembre, l'intérêt s'est concentré sur les questions d'ordre général, concernant d'une part les résultats les plus importants de la mécanique ondulatoire, nécessaires à l'étude à entreprendre, et, d'autre part, les résultats expérimentaux sur lesquels est basée la théorie, (voir rapport).

Dans la seconde partie, (allant jusqu'au vacances de Pâques), nous avons développé à fond l'étude théorique de la particule élémentaire la mieux connue, l'électron, de manière à obtenir non seulement les résultats particuliers concernant cette particule, mais aussi à donner un type de théorie sur laquelle les autres (et en particulier celle du méson) puisse se modeler. Parallèlement, M. le Prof. R. Sarmento de Beires, dont le concours a été infiniment précieux pendant la première période, a continué ses conférences, destinées à rappeler ou à compléter les notions fondamentales de mécanique quantique et ses applications non relativistes. Enfin, les procédés de superquantification ont été examinés d'un point de vue général, comme introduction à l'application au problème des ensembles de corpuscules.

La troisième partie de l'activité du Séminaire (qui devrait se terminer fin juin), sera consacrée à l'étude détaillée des mésons de différents types et spins, avec la mise en oeuvre des procédés de superquantification mentionnés. Ces corpuscules seront étudiés sous l'aspect sous lequel ils se présentent dans les théories les plus modernes et avec références au problème de leur interaction mutuelle. De la sorte, sera amorcée d'une part l'étude générale des forces nucléaires et de la radioactivité, qui constituent à l'heure actuelle, la matière d'un des chapitres les plus importants de la Physique Théorique et l'un de ceux qui, probablement, se développera le plus dans un avenir immédiat, grâce aux nombreux travaux expérimentaux déjà entrepris.

Parallèlement à ce travail collectif, s'est poursuivie une autre activité, nécessairement plus restreinte, de recherches proprement dites. Trois élèves, M. Fernandes de Sa, David et Abeillard ont commencé des travaux de ce genre; M. David a même fait un exposé au séminaire sur le problème de l'atome d'hydrogène dans le cas relativiste. Enfin, il ne faut pas manquer de mentionner ici le travail considérable de M. le Prof. R. Sarmento de Beires dont les nombreuses conférences sur les principes de la mécanique ondulatoire ont permis à l'auditoire de mieux saisir l'esprit de la théorie et dont l'activité a été extrêmement précieuse et féconde.

En ce qui concerne l'activité future, on peut dire qu'il serait dommage qu'un travail si bien commencé et, au surplus, continué malgré tout, en dépit de difficultés de tous ordres, fût interrompu. Le travail de recherches des élèves qui l'ont déjà commencé ou d'autres qui voudraient s'y consacrer, pourraient être continué avec profit pendant une partie des vacances, ces élèves ne disposant pas toujours d'assez de temps libre pendant l'année scolaire.

Pour l'année 1944/45, l'expérience déjà faite montre qu'il serait indiqué de dédoubler les séances: une série qui constituerait, à proprement parler un cours élémentaire destiné à faire connaître aux élèves les bases de la vaste discipline qu'est devenue aujourd'hui la mécanique ondulatoire, - et une seconde série, d'un niveau plus élevé, dont le but serait la préparation aux recherches proprement dites par l'étude de travaux récents.

Cette seconde série étudierait, à la suite des exposés de cette année, le problème des particules élémentaires en vue de son application aux problème des forces nucléaires.

On pourrait compléter ainsi un ensemble de connaissances amenant les élèves suffisamment loin pour qu'ils puissent entreprendre par eux-mêmes des recherches originales, but initial de l'activité du Séminaire de Physique Théorique tel qu'il a été conçu au début.

Pôrto, le 24 avril 1944.

MEMORANDUM

LE SEMINAIRE DE PHYSIQUE THEORIQUE DU C.N.R.S.

(M.A. Proca, Directeur de Recherches)

1 .- Ce Séminaire a débuté après la Libération, en 1946/1947. Il s'agissait alors de donner aux jeunes gens que la Physique Théorique intéressait un enseignement moderne, qui préparât à la recherche, et qui leur permît d'atteindre plus facilement le niveau indispensable à toute compétition sur le plan international.

Il est inconstestable que ce Séminaire répondait à cette époque à un besoin profond, comme le démontre le fait que son succès a dépassé les prévisions les plus optimistes. Dès le début, et pendant 8 ans, il a été possible d'intéresser à certains problèmes ardus de Physique Théorique une moyenne de 20-25 jeunes gens chaque année. Ces jeunes gens ont participé à nos séances hebdomadaires sans y être obligés en aucune façon, sans espérer la sanction d'un diplôme ou d'un certificat, en un mot sans que cette participation leur procurât un avantage extra-scientifique quelconque, direct ou indirect. Cela est encore plus remarquable si l'on songe que les possibilités d'emploi offertes en France aux jeunes physiciens théoriciens sont extrêmement réduites et l'étaient encore davantage au moment où le Séminaire a débuté.

2 - Le recrutement a toujours été très varié, et les origines des travailleurs du Séminaire très diverses.

Les chercheurs du C.N.R.S. sont toujours venus en bon nombre, sans toutefois constituer la majorité. Les grands Laboratoires, Instituts ou Ecoles de Paris ont toujours eu des représentants au Séminaire, en nombre variable suivant les années. Dans l'ensemble l'Ecole Polytechnique a fourni un contingent supérieur à l'Ecole Normale. Quelques ingénieurs des Corps de l'Etat (Mines, Ponts et Chaussées, Poudres), spécialement détachés en vue de recherches scientifiques ont joint leurs efforts aux nôtres. Enfin, notons un certain nombre, petit mais sensiblement constant, d'étrangers venus achever à Paris leur éducation scientifique.

Le niveau des travaux étant élevé, cette diversité d'origine, loin d'être un obstacle, constituait un avantage pour l'intérêt des discussions. Elle n'a pas non plus empêché la formation, à la longue, d'une sorte d'esprit de corps parmi les chercheurs que le travail en commun avait rapproché.

3 - La méthode de travail a été celle de tous les bons séminaires, à savoir l'étude en commun soit d'un problème unique pendant toute l'année, soit de diverses questions d'actualité, au fur et à mesure qu'elles pénétraient dans le cercle de l'intérêt général.

Tout au début, nous avons commencé par l'étude de l'Electrodynamique Quantique, en prenant comme base le traité de W. HEITLER qui venait de paraître. L'an dernier, nous avons examiné toujours un problème unique, à savoir celui des modèles nucléaires. Cette année, nous reviendrons à l'étude de divers problèmes d'actualité dont l'étude reste indispensable à la culture générale des physiciens théoriciens.

Quel que soit l'objet de nos études, nous avons toujours intercalé dans notre programme:

- 1 des comptes rendus des travaux originaux dûs aux membres du Séminaire;
- 2 des comptes rendus des résultats expérimentaux ou d'observation, dans les domaines qui nous intéressaient.

Enfin, nous nous sommes efforcés de développer le travail par équipe, indispensable de nos jours; au bout de quelques années, nous avons réussi à voir un certain nombre de travailleurs se grouper par affinités et par sujets d'intérêt, et constituer ainsi le meilleur type de formation d'attaque pour un travail sérieux et efficace.

4 - Une autre de nos préoccupations majeures a été le souci constant d'intégrer les travailleurs du Séminaire dans la grande famille internationale des physiciens théoriciens. On imagine mal, si on ne l'a pas connue de près, la situation de la Physique Théorique française à la fin de la guerre, et la manière dont elle était jugée à l'étranger. Il était de la plus haute importance pour nous d'élever le niveau intrinsèque des travaux, de façon à ne plus mériter les critiques qu'on nous adressait de toutes parts; cela n'était relativement pas difficile étant donné les qualités intrinsèques de nos jeunes gens et l'enthousiasme qui les animait. Ensuite il s'agissait de faire connaître les travaux et les travailleurs hors de nos frontières. Nous avons utilisé tous les moyens pour provoquer ces contacts, soit en France même, soit à l'étranger. Nous avons ainsi, par exemple, mis à profit la présence à Paris de savants

invités par l'Institut Henri Poincaré, par la Faculté des Sciences, etc., ou simplement de passage, et nous leur avons demandé, à titre amical, de nous faire une communication au Séminaire.

Nous avons pu ainsi inscrire dès le début de notre programme quelques uns des plus grands noms de la physique actuelle. Entre autres MM. A. BOHR, BORN, DIRAC, FLOWERS, HEITLER, VAN HOVE, CORTER, de KARMAN, LONDON, MOLLER, MATTHEWS, PAULI, PRYCE, RABI, RACAH, RIEZ, ROSENFELD, WATAGHIN, YUKAWA, nous ont prêté leur bienveillant concours. M. WEISSKOPF, professeur au M.I.T., a bien voulu unir ses efforts aux nôtres lors de son séjour à Paris comme professeur d'échange, et pendant toute une année nous avons réalisé un Séminaire commun, basé sur son cours concernant les réactions nucléaires.

5 - Ces concours, très précieux, présentaient en outre l'avantage d'être gratuits, ce qui n'est pas négligeable si l'on tient compte du fait que le Séminaire a commencé et continué son travail jusqu'à tout récemment sans aucun crédit de fonctionnement. Cependant, on ne peut axer toute l'activité sur ces concours gratuits, qui ne nous laissent pas entièrement maîtres du choix des sujets d'étude.

Cette situation nous a incité à élargir le cadre du Séminaire, et à essayer de le placer en quelque sorte sur un plan international, ou plutôt européen. Il se trouve souvent en effet que le meilleur spécialiste dans une question que nous étudions ne réside pas à Paris. Pour aller aux meilleures sources, nous nous efforçons chaque fois que cela est possible, de l'inviter à nous donner un exposé pour le Séminaire, ce qui est maintenant matériellement possible grâce à la bienveillante compréhension du C.N.R.S., mais aussi tous ceux auxquels nous nous sommes adressés (Direction des Relations Culturelles, etc., et particulièrement la Commission de l'Energie Atomique) ont répondu favorablement à notre appel.

Nous avons été obligés d'organiser nos propres invitations adaptées à notre programme, d'autant plus qu'en général les chercheurs dont les découvertes nous intéressent sont en majorité des jeunes. Se trouvant au début de leur carrière, ils ne jouissent pas déjà d'une notoriété suffisante pour que leur invitation puisse être envisagée par la Faculté des Sciences ou par d'autres organismes, de sorte que nous ne pourrions en bénéficier si nous ne nous en occupions pas nous-mêmes.

A ces chercheurs nous ne demandons pas seulement une ou deux conférences. Nous les prions systématiquement de se prêter à des entretiens privés avec les chercheurs du Séminaire, car c'est plus précisément dans ces contacts que réside tout le bénéfice scientifique de leur visite.

Accessoirement, il en découle une connaissance humaine proprement dite entre jeunes gens qui sont à peu près de la même génération, et qui est indispensable à l'établissement d'un climat favorable à toute coopération efficace.

Dans cette voie, nous avons eu la chance d'être puissamment aidés par le Colloque de Physique Théorique de 1950 du C.N.R.S. L'organisation de ce Colloque avait été confiée a Mr. P. AUGER et à moi-même, mais l'infra-structure de l'organisation a été constituée par les chercheurs du Séminaire. Ceux-ci ont ainsi largement profité de l'occasion qui leur était offerte de prendre contact avec les délégués de 14 pays étrangers, et d'en tirer les bénéfices escomptés.

6 - Une autre manière d'assurer ces contacts indispensables est la participation à des congrès internationaux. Nous nous sommes efforcés dès le début de faciliter l'invitation des travailleurs de notre Séminaire à ces congrès et ensuite de trouver les moyens pour assurer matériellement leur participation.

La première réunion internationale de Physique Théorique après la constitution du Séminaire s'est tenue à Birmingham et a été organisée par le professeur PEIERLS. Nous avons réussi à y emmener une délégation d'une dizaine de travailleurs du Séminaire, physiciens inconnus à cette date, qui étaient d'ailleurs les seuls représentants de la France à ce congrès.

Depuis cette époque, la situation a changé, et s'est grandement améliorée. Au dernier congrès en date (Glasgow, juillet 1954), mais qui ne traitait pas exclusivement de Physique Théorique, 17 Français ont pris part et le Séminaire était représenté par 9 de ses membres.

Je signale aussi qu'à la suite de conversations engagées à Paris, un groupe de chercheurs du Séminaire a été invité en bloc à Bruxelles pour prendre une part active à un Colloque restreint organisé par le Centre Belge de Recherches Mathématiques, en avril 1953. Il est inutile de souligner l'importance de ce genre d'échanges pour l'activité du Séminaire.

7 - Nous nous sommes également occupés des échanges de longue durée, bourses, subventions, etc. Dans la mesure du possible, et n'ayant en tous cas rencontré que bienveillance et appuis efficaces, nous nous sommes efforcés de ménager à nos chercheurs la possibilité d'un séjour, même court, dans un laboratoire spécialisé. Aujourd'hui la situation n'est évidemment plus la même qu'au début de nos efforts; néanmoins notre action peut continuer à être efficace, et je signalerai que, par deux fois cette année, des laboratoires hors de France

ont estimé que notre Séminaire constituait une réserve de théoriciens d'un niveau suffisant pour qu'on pût avec avantage faire appel à leurs services éventuels.

De même, il nous a été possible récemment de mettre au point les échanges avec le Japon, pays où la Physique Théorique est très développée. Un de nos chercheurs, M. VISCONTI, chargé de recherches, est agréé comme "chercheur d'échange", et ira à Tokyo dès que son séjour à Copenhague, où il se trouve en ce moment, aura pris fin. Entre temps nous avons une autre possibilité ouverte, celle d'un professorat d'échange, qui n'est actuellement pas encore utilisée. Il faut d'ailleurs dire que ces négociations n'ont pu être menées à bien que grâce à la compréhension du C.N.R.S., lequel a fait les premiers pas en donnant à M. ARAKI, professeur à l'université de Kyoto, la possibilité de séjourner une année parmi nous. C'est la première fois qu'un chercheur japonais de Physique Théorique fait un séjour prolongé dans notre pays, autrement qu'à l'aide du très aléatoire moyen des "bourses du gouvernement français".

8 - Que peut-on dire sur les résultats de ces efforts à la date actuelle ?

Le Séminaire a rempli son rôle de catalyseur, et, grâce essentiellement à la qualité de ses membres, il a été possible de créér après guerre un climat très favorable au développement de la physique théorique, en groupant des jeunes forces qui autrement se seraient probablement dispersées. On peut dire sans exagérations que, depuis sa fondation et jusqu'à ce jour, le Séminaire a vu passer la très grande majorité des jeunes qui se sont fait depuis une place dans la Physique Théorique française.

Ce n'est pas par hasard que l'actuel chef de la Section de Physique Théorique du Commissariat à l'Energie Atomique est un "ancien" du Séminaire. Ce n'est pas non plus par chance que presque toute son équipe est constituée également par des physiciens qui ont contribué dès le début à donner au Séminaire tout son éclat. Le Commissariat dispose ainsi d'un groupe de chercheurs d'une classe exceptionnelle, et n'a rien à envier dans ce domaine aux établissements similaires de l'étranger.

D'autres travailleurs du Séminaire sont retournés à leur laboratoire d'origine ou ont été rattachés à divers laboratoires expérimentaux; là, tout en poursuivant leurs travaux personnels, ils collaborent à des tâches pour lesquelles une connaissance approfondie de certains problèmes théoriques est indispensable.

Il est significatif que les seuls physiciens théoriciens français au Laboratoire International récemment créé à Genève soient deux "anciens" du

Séminaire et qu'un troisième, toujours appartenant au Séminaire, attende pour être très probablement engagé dans un proche avenir.

Sur un autre plan, il n'est pas inutile de noter également que le délégué élu par les chercheurs à la Commission de Physique Théorique du C.N.R.S. est aussi un membre du Séminaire. Et que, lorsque dans cette dernière Commission il a été demandé à l'improviste des suggestions pour l'attribution de récompenses (médailles nouvellement créées), les seuls noms qui aient été prononcés étaient des noms de chercheurs appartenant au Séminaire.

Enfin, on peut dire que les efforts faits pour intégrer à nouveau après la guerre les travailleurs français dans la grande communauté internationale des physiciens théoriciens ont été couronnés de succès. A vrai dire cette intégration s'effectue d'elle-même dès que les travaux ont atteint un certain niveau et sont suffisamment connus; c'est sur ces points qu'ont porté les efforts du Séminaire ainsi qu'il a déjà été écrit plus haut.

De tout ce qui précède, une fait capital surgit en pleine clarté. Tous les efforts du Séminaire, toute la bonne volonté dépensée, toute la compétence mise en jeu, n'auraient abouti à rien si les chercheurs qu'il groupe n'avaient fait preuve eux-mêmes de qualités exceptionnelles. La réussite même de ces efforts démontre clairement qu'il existe en France une nouvelle génération de physiciens théoriciens dont la compétence est au moins égale à celle de l'étranger. Et qu'il suffira de lui donner la possibilité et les moyens de travailler pour voir apparaître dans ce domaine le renouveau tant attendu.

(Novembre 1954)

Bibliographie

Dérivée

(1956 - 1986)

BIBLIOGRAPHIE

1956

Relativistic Invariance in Quantum Mechanics.
WIGNER, E.P.
Nuovo Cimento; Vol.III, No.3, p517-532;
March 1, 1956

Synthesis of Covariant Particle Equations.
FOLDY, L.L.
Phys.Rev.; Vol.102, No.2, p568-581; April 15, 1956

A Relativistic Field Theory of an Extended
Particle, I.
NAKANO, T.
Prog.Theor.Phys.; Vol.15, No.4, p333-368; April 1956

1957

Relativistic Kinematics of a Classical Point Particle
in Spinor Form.
GURSEY, F.
Nuovo Cimento; Vol.V, No.4, p784-809; April 1, 1957

The Causal Formulation of Quantum Mechanics of
Particles (the Theory of De Broglie, Bohm and
Takabayasi).
FREISTADT, H.
Nuovo Cimento Suppl.; Vol.V, Serie X, No.1, p1-70;
1957

Quantum Kinematics and Geometry.
SCHONBERG, M.
Nuovo Cimento Suppl.; Vol.VI, Serie X, No.1,
p356-379; 1957

Zur Deutung fuenf dimensionaler Feldgleichungen.
PETZOLD, J.
Zeitschrift fuer Physik; Vol.148, p192-208; 1957

1958

L'Hypothèse de l'Effet Gravitationnel de Spin.
COSTA DE BEAUREGARD, O.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.247, p1092-1094;
October 13, 1958

1959

L'Espace de Parité du Champ Electromagnétique.
TAKABAYASI, T.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.248, p70-73; January 5, 1959

Equations of Motion of Point Particles in Fields of
Nonzero Rest Mass and Spin.
HAVAS, P.
Phys.Rev.; Vol.113, No.2, p732-740; January 15 1959

Relativistic Particle with Internal Rotational
Structure.
TAKABAYASI, T.
Nuovo Cimento; Vol.XIII, No.3, p532-553;
August 1, 1959

1960

Elementary Particles and Symmetry Principles.
MELVIN, M.A.
Rev.Mod.Phys.; Vol.32, No.3, p477-518; July, 1960

1961

Corpuscules Mouvants et Rayonnants en Relativité
Générale.
HELY, J.
C.R.Acad.Sci.Paris; Vol.253, p2329-2331;
November 20, 1961

1963

Dynamics of Spinning Particles in Classical and Quantum Theory.
SZAMOSI, G.
Nuovo Cimento; Vol.XXIX, No.3, p677-686;
August 1, 1963

Electromagnetic Properties of a Charged Vector Meson.
YOUNG, J.A. ;BLUDMAN, S.A.
Phys. Rev.; Vol.131, No.5, p2326-2334;
September 1, 1963

Lorentz-Covariant Position Operators for Spinning Particles.
JORDAN, T.F. ;MUKUNDA, N.
Phys. Rev.; Vol.132, No.4, p1842-1848;
November 15, 1963

1964

The Relativistic Limit of the Theory of Vector Mesons.
STROCCHI, F.
Nuovo Cimento; Vol.XXXI, No.4, p884-889;
February 16, 1964

Electromagnetic Corrections to Muon and Beta Decays when Mediated by a Vector Boson.
BAILIN, D.
Phys. Rev.; Vol.135, No.1B, pB166-B180; July 13, 1964

Description of a Particle with Arbitrary Mass and Spin.
WEAVER, D.L. ;HAMMER, C.L. ;GOOD, R.H.(Jr)
Phys. Rev.; Vol.135, No.1B, pB241-B248; July 13, 1964

Radiative Decay of the Muon via W-Boson.
BAILIN, D.
Nuovo Cimento; Vol.XXXIII, No.2, p632-642; July 16, 1964

A Generalisation of the Stueckelberg Formalism of Vector Meson Fields.
FUJII, Y.; KAMEFUCHI, S.
Nuovo Cimento; Vol.XXXIII, No.6, p1639-1656;
Sept 16, 1964

An Extreme-Relativistic Representation for Kemmer Particles.
MATHEWS, P.M. ;SANKARANARAYANAN, A.
Nuovo Cimento; Vol.XXXIV, No.1, p101-105;
October 1, 1964

Connection between Garrido-Pascual and Lorentz Transformations.
SANKARANARAYANAN, A.
Nuovo Cimento; Vol.XXXIV, No.2, p442-449;
October 16, 1964

1965

Covariant Higher-Spin Equations.
BERG, R.A.
Jn.Math.Phys.; Vol.6, No.1, p24-33; January 1965

The Classical Motion of Spin-1 Particles.
SNIATYCKI, J.
Nuovo Cimento; Vol.XXXV, No.2, p664-665;
January 16, 1965

General Theory of Covariant Particle Equations.
PURSEY, D.L.
Ann. Phys.; Vol.32, p157-191; 1965

Spin-One Wave Equation.
SANKARANARAYANAN, A. ;GOOD, R.H.(Jr)
Nuovo Cimento; Vol.XXXVI, No.4, p1303-1315;
April 16, 1965

The Impact of Yukawa's Meson Theory on Workers in Europe - A Reminiscence -.
KEMMER, N.
Prog. Theor. Phys., Supplement; Commemoration Issue for the 30th Anniversary of the Meson Theory by Dr. H. Yukawa; p602-608; 1965.

Note on Relation between Foldy-Wouthuysen and Lorentz Transformations.
BRYDEN, A.D.
Nuovo Cimento; Vol.XXXVIII, No.3, p1420-1425;
August 1, 1965.

On the Classical Spin Motion of Spin-One Particles.
RAFANELLI, K.
Nuovo Cimento; Vol.XXXVIII, No.3, p ;
August 1, 1965.

"Vector" Clifford Algebras and the Classical Theory of Fields.
TEITLER, S.
Nuovo Cimento Suppl.; Vol.III, Serie 1, No.1, p1-14;
1965.

Electromagnetic Corrections to Muon and Beta Decays when Mediated by a Vector Boson - II.
BAILIN, D.
Nuovo Cimento; Vol.XL A, No.3, p822-838;
December 1, 1965.

Comments on a Paper by Majorana Concerning Elementary Particles.
FRADKIN, D.M.
Am. J. Phys.; Vol.34, p314-318; 1965.

1966

Construction of a Representation for Spin-2 Bargmann-Wigner Functions through Two Spin-1 Bargmann-Wigner Functions.
GALLARDO, J.C.; KALNAY, A.J.; RISEMBERG. S.H.
Prog. Theor. Phys.; Vol.36, No.3, p627-635;
September 1966.

Electromagnetic Form Factor of the Neutrino.
GOLDBERG, I.; HALLER, K.; LANDOVITZ, L.F.
Phys. Rev.; Vol.144, No.4, p1171-1176; April 29, 1966

Coulomb Scattering for Arbitrary Spin.
DOWKER, J.S.
Proc.Phys.Soc.; Vol.89, p353-364; 1966.

1967

Radiative Corrections to Muon and Beta Decay in the Intermediate Vector Boson Theory.
SCHILCHER, K.
Z. fuer Physik; Vol.201, p117-128; 1967.

The Stueckelberg Formalism for Rarita-Schwiger Field with Spin 3/2.
WATANABE, H.; SHIMODAIRA, H.; KAMEFUCHI, S.
Nucl. Phys. B; Vol.2, p360-368; 1967.

Meson Theoretic N-N Interactions for Nuclear Physics.
GREEN, A.E.S.; SAWADA, T.
Rev. Mod. Phys.; Vol.39, No.3, p594-610; July 1967.

Classical Theory of Lorentz Vector Fields.
GOLDBERG, I.; MARX, E.
Nuovo Cimento; Vol.LA, No.3, p477-491; August 1, 1967

Electromagnetic Corrections, Current Algebra, and the Intermediate Boson.
SIRLIN, A.
Phys. Rev. Letters; Vol.19, No.15, p877-880; October 9, 1967

Covariant Wave Equations for Charged Particles of Higher Spin in an Arbitrary Gravitational Field.
COHEN, H.A.
Nuovo Cimento; Vol.LIIA, No.4, p1242-1252; December 21, 1967

Invarianta la Etalon si Cîmpurile Generalizate Yang-Mills în Autointeractiune.
TUGULEA, M.N.; LYAKHOVSKI, V.D.
Studii si Cercetari Fiziche; Vol.19, No.8, p823-857; 1967.

1968

Sur les Equations du Méson Vectoriel en Relation avec la Description du Photon.
BECKERS, J.; PIROTTE, CH.
Physica; Vol.39, p205-212; August 1, 1968.

Equivalence of Two Formulations of Massive Spin-One Field Theory.
CUKIERDA, T.; LUKIERSKI, J.
Nucl. Phys B; Vol.5, p508-514; 1968.

Second-Quantization Process for Particles with Any Spin and with Internal Symmetry.
NELSON, T.J.; GOOD, R.H.(Jr.)
Rev. Mod. Phys.; Vol.40, No.3, p508-522; July 1968

Wave Equations on a Hyperplane.
HAMMER, C.L.; McDONALD, S.C.; PURSEY, D.L.
Phys. Rev; Vol.171, No.5, p1349-1356; July 25, 1968.

New Geomagnetic Limit on the Mass of the Photon.
GOLDHABER, A.S.; NIETO, M.M.
Phys.Rev.Letters; Vol.21, No.8, p567-569;
August 19, 1968

Transformation Properties and Relativistic Equations for Spin-One Elementary Systems.
FONDA, L.; GHIRARDI, G.C.
Phys. Rev.; Vol.175, No.5, p2082-2086;
November 25, 1968

Some Consequences of Infinite Mass Renormalization.
ZIMMERMANN, W.
Commun. Math. Phys.; Vol.8, p66-88; 1968.

Covariant Theories of Antisymmetric Massive Tensor of Rank Two.
CUKIERDA, T.; LUKIERSKI, J.
B. Pol. Math.; Vol.16, No.8, p657-662; 1968.

The Rest Mass of a Photon.
MAROCHNIK, L.S.
Soviet Astronomy -AJ.; Vol.12, No.1, p171-172;
July-August, 1968

1969

Spin-One Particle in an External Electromagnetic Field.
SHAY, D.; GOOD, R.H.(Jr)
Phys. Rev.; Vol.179, no.5, p1410-1417; March 25, 1969

Theory of High-Spin Fields.
AURILIA, A.; UMEZAWA, H.
Phys. Rev.; Vol.182, No.5, p1682-1694; June 25, 1969.

Noncausality and other Defects of Interaction Lagrangians for Particles with Spin-One and Higher.
VELO, G.; ZWANZINGER, D.
Phys. Rev.; Vol.188, No.5, p2218-2222;
December 25, 1969

On the Consistency of Wave Equations in De-Sitter Space.
VIDAL, A.
Ann. Acad. Brasil. Cienc.; Vol.42, No.3, p429-430; 1970.

Gauge-Independent Formulation of a Massive Field with Spin One.
TAKAHASHI, Y.; PALMER, R.
Phys. Rev.D; Vol.1, No.10, p2974-2976; May 15, 1970.

A Hamiltonian Form of Maxwell's Equations.
SANKARANARAYANAN, A.
Prog. Theor. Phys.; Vol.43, No.5, p1204-1212; May 1970.

Massive Vector Field: Covariant Definition of Independent Components and Quantization.
MATHEWS, P.M.
Jn. Math. Phys.; Vol.11, No.6, p1997-1999; June 1970.

A Rarita-Schwinger Formalism for Boson Fields.
NACK, M.L.
Nuovo Cimento; Vol.LXVIII A, No.1, p89-104; July 1, 1970.

A Reduction of the Kemmer Equation and the Singular Behaviour of Integer-Spin Relativistic Hamiltonians.
SEETHARAMAN, M.; JAYARAMAN, J.; MATHEWS, P.M.
Nucl. Phys. B; Vol.19, p625-631; 1970.

The Fundamental Nuclear Interaction.
GREEN, A.E.S.
Science, Vol.169, No.3949, p933-941; September 4, 1970

Teoria Clasica a Efectului Cerenkov Mezonic în Medii Nucleare.
ION, D.B.
Studii si Cercetari Fiziche; Vol.22, No.2, p125-149; 1970.

New Quantum Electrodynamics for Vector Mesons.
TUCKER, R.H.; HAMMER, C.L.
Phys. Rev. D; Vol.3, No.10, p2448-2460; May 15, 1971

New Experimental Test of Coulomb's Law: A Laboratory Upper Limit on the Photon Rest Mass.
WILLIAMS, E.R.; FALLER, J.E.; HILL, H.A.
Phys. Rev. Letters; Vol.26, No.12, p721-724; March 22, 1971.

Theoretical Interpretation of a Recent Experimental Investigation of the Photon Rest Mass.
KROLL, N.M.
Phys. Rev. Letters; Vol.26, No.22, p1395-1398; May 31, 1971.

How to Catch a Photon and Measure its Mass.
GOLDHABER, A.S.
Phys. Rev. Letters; Vol.26, No.22, p1390-1392; May 31, 1971.

Comments on a Proposal for Determining the Photon Mass.
PARK, D.; WILLIAMS, E.R.
Phys. Rev. Letters; Vol.26, No.22, p1393-1394; May 31, 1971.

Photon Mass and the Galactic Magnetic Field.
WILLIAMS, E.R.; PARK, D.
Phys. Rev. Letters; Vol.26, No.26, p1651-1652; June 28, 1971.

Terrestrial and Extraterrestrial Limits on the Photon Mass.
GOLDHABER, A.S.;NIETO, M.M.
Rev. Mod. Phys.; Vol.43, No.3, p277-296; July 1971.

On the Empirical Foundations of Special Relativity.
BREITENBERGER, E.
Nuovo Cimento B; Vol.1, No.1, p1-21; January 11, 1971

Motion of Charged Particles in a Homogeneous Magnetic Field.
TSAI, W.; YILDIZ, A.
Phys. Rev. D; Vol.4, No.12, p3643-3648; December 15, 1971.

Motion of Charged Particles in a Homogeneous Magnetic Field -II.
GOLDMAN, T.; TSAI, W.
Phys. Rev. D; Vol.4, No.12, p3648-3651;
December 15, 1971.

On the Metric of an Astronomical Object in the Lyttleton-Bondi Theory.
BURMAN, R.
J. & Proc. R.Soc.N.S.W.(Australia); Vol.104, Pt.1&2, p1-4; 1971.

Vector-Meson Contributions to N-N OBEP.
ROCHLEDER, E.; GERSTEN, A.; GREEN, A.E.S.
Nuovo Cimento B; Vol.6, No.2, p89-103;
December 11, 1971.

Methodological Approaches in the Development of the Meson Theory of Yukawa in Japan.
TAKETANI, M.
Prog. Theor. Phys. Suppl.; No.50, p12-24; 1971.

Relativistic Wave Equations for Particles with Arbitrary Spin.
HURLEY, W.J.
Phys. Rev. D; Vol.4, No.12, p3605-3616;
December 15, 1971.

1972

On the Generalisation of the Theory of the Spin Maximum 1 Particle to the Case of a Charged Particle Moving in an Electromagnetic Field.
VASSALO PEREIRA, J.
Intl.Jn.Theor.Phys.; Vol.5, No.6, p447-458; 1972

On Hoyle's Electrodynamic Version of the Steady-State Cosmology.
BURMAN, R.R.
J.& Proc. R.Soc.N.S.W.(Australia); Vol.104, Pt.1&2, p121-122; 1972.

A Photon Rest Mass and the Dispersion of Longitudinal Electric Waves in Interstellar Space.
BURMAN, R.R.
J. Phys. A; Vol.5, pL62-L63; July 1972.

A Photon Rest Mass and the Absorption of Longitudinal Electric Waves in Interstellar Space.
BURMAN, R.R.
J. Phys. A; Vol.5, pL78-L80; August 1972.

Frequency Dependence of the Speed of Light in Space.
BAY, Z.; WHITE, J.A.
Phys. Rev. D; Vol.5, No.4, p796-799;
February 15, 1972.

Calcul des Indices d'un Dioptre et des Champs dans l'Onde Evanescente de Fresnel dans le Cas d'un Photon Massif.
COSTA de BEAUREGARD, O.
C.R.Acad. Sci. Paris B; Vol.274, p1-3;
January 3, 1972.

Interacting-Field Propagation.
SHAMALY, A.; CAPRI, A.Z.
Nuovo Cimento Letters; Vol.3, No.11, p467-471;
March 11, 1972.

Propagation of Interacting Fields.
SHAMALY, A.; CAPRI, A.Z.
Ann. Phys.; Vol.74, p503-523; 1972.

Tensor Formulation of Spin-1 and Spin-2 Fields.
MACFARLANE, A.J.; TAIT, W.
Commun. Math. Phys.; Vol.24, p211-224; 1972.

Calculation and Experimental Proof of the Transverse Shift Induced by Total Internal Reflection of a Circularly Polarized Light Beam.
IMBERT, C.
Phys. Rev. D; Vol.5, No.4, p787-796;
February 15, 1972.

An Equivalence Theorem for a Massive Spin One Particle Interacting with Dirac Particles in Quantum Field Theory.
JENKINS, J.D.
J.Phys. A; Vol.5, p705-716; May 1972.

Some Remarks on an Equivalence Theorem for an Interacting Massive Spin One Particle in Quantum Field Theory.
JENKINS, J.D.
J.Phys. A; Vol.5, p1037-1042; July 1972.

The Electromagnetic Interaction of a Massive Spin One Particle: Some Equivalence Theorems and Remarks.
JENKINS, J.D.
J.Phys. A; Vol.5, p1461-1472; October 1972.

Vacuum Polarization of Gauge-Independent Spin-1 Field.
SHAMALY, A.; CAPRI, A.Z.
Nuovo Cimento Letters; Vol.3, No.15, p637-641; April 8, 1972.

Unitary Representations of the Homogeneous Lorentz Group in an O(1,1) x O(2) Basis and Some Applications to Relativistic Equations.
KALNINS, E.G.
J. Math. Phys.; Vol.13, No.9, p1304-1312; September 1972.

Are Vector Potentials Measurable Quantities in Electromagnetic Theory?
VIGIER, J.P.; MARCILHACY, G.
Nuovo Cimento Letters; Vol.4, No.13, p616-618; July 29, 1972.

A Simple Coupling between the Electromagnetic and Gravitational Fields.
MAJERNIK, V.
Nuovo Cimento Letters; Vol.5, No.2, p165-171; September 9, 1972.

High-Energy Scattering of a Charged Vector Meson in a Static Field: Simple Exponentiation and s-Channel Helicity Conservation.
TA-CHUNG, M.
Phys. Rev. D; Vol.6, No.4, p1169-1177; August 15, 1972.

1973

Energy-Momentum Quanta in Fresnel's Evanescent Wave-II.
COSTA DE BEAUREGARD, O.
Intl.Jn.Theor.Phys.; Vol.7, no.2, p129-143; 1973

A Photon Rest Mass and the Propagation of Longitudinal Electric Waves in Interstellar and Intergalactic Space.
BURMAN, R.R.
J.Phys. A; Vol.6, p434-444; March 1973.

A Photon Rest Mass and Electric Currents in the Galaxy.
BYRNE, J.C.; BURMAN, R.R.
J.Phys. A; Vol.6, pL12-L14; February 1973.

Manifestly Covariant and Manifestly Unitary Formulations of Massive Vector-Boson Theory in Indefinite-Metric Spaces.
HALLER, K.
Phys. Rev. D; Vol.8, No.6, p1796-1807; September 15, 1973.

Peut-on Construire un Photon avec Deux Neutrinos?
MOLES, M.
C.R.Acad. Sci. Paris B; Vol.276, p397-400; March 12,1973.

1974

A History of the Meson Theory of Nuclear Forces from 1935 to 1952
MUKHERJI, V.
Arch.Hist.E; Vol.13, p27-102; 1974

Propagation of Nonlinear Electromagnetic Field Theories.
SHAMALY, A.; CAPRI, A.Z.
Canad.J. Phys.; Vol.52, No.10, p917-918; 1974.

The Free Euclidean Proca and Electromagnetic Fields.
GROSS, L.
Am. Math. Soc. Notices; V21, No.5, p69-82; 1974.

Goldstone and Quasi-Goldstone Bosons in Massless and Massive Electrodynamics.
HALLER, K.
Phys. Rev. D; Vol.10, No.12, p4299-4303; December 15, 1974.

Bhabha First-Order Wave Equations: -I. C,P, and T.
KRAJCIK, R.A.; NIETO, M.M.
Phys. Rev. D; Vol.10, No.12, p4049-4063;
December 15, 1974.

Realizations of the Unitary Representations of the Inhomogeneous Space-Time Groups II. (Covariant Realizations of the Poincaré Group).
NIEDERER, U.H.; O'RAIFEARTAIGH, L.
Fortschritte der Physik; Vol.22, p131-157; 1974.

Theory of Relativistic String and Super-Wave Equation II.
TAKABAYASI, T.
Prog. Theor. Phys.; Vol.51, No.2, p571-591;
February 1974.

Stationary States of a Spin-1 Particle in a Homogeneous Magnetic Field.
MATHEWS, P.M.
Phys. Rev. D; Vol.9, No.2, p365-369; January 15, 1974

Invariant Quantization of the Vector Meson Field.
HALL, S.F.
J.Phys. A; Vol.7, No.12, p1369-1373; 1974.

Spontaneous Dynamical Breaking of Gauge Symmetry in Dual Models.
CREMMER, E.; SCHERK, J.
Nucl. Phys. B; Vol.72, No.2, p117-124; 1974.

Tachyon Behaviour in General Relativity.
SIGAL, I.; SHAMALY, A.
Phys. Rev. D; Vol.10, No.8, p2358-2361;
October 15, 1974.

Tired Light, Lorentz Covariance and Conservation Principles.
YOURGRAU, W.; WOODWARD, J.F.
Acta Phys.Acad.Sci. Hungaricae; Vol.37, No.3, p283-285; 1974.

Proca Electrodynamics and "Tired Light".
BYRNE, J.C.; BURMAN, R.R.
Acta Phys.Acad.Sci. Hungaricae; Vol.37, No.3, p281; 1974.

Quantum Electrodynamics with Compensating Current.
BECHLER, A.
Acta Phys. Polonica B; Vol.5, No.3, p353-360; 1974.

Vector Meson with Quadrupole Electric Moment.
VLASOV, P.A.
Ukr. Fiz. Zh. (USSR); Vol.19, No.2, p179-185;
February 1974.

On the Proca and Wigner Realizations for Spin One.
BOYA, L.J.; CARINENA, J.F.
J.Phys. A; Vol.7, No.3, p352-355; 1974.

Generalisation of Hubble's Law.
WEINSTEIN, D.H.; KEENEY, J.
Nature; Vol.247, p140; January 18, 1974.

1975

On External Fields of Collapsed Bodies.
SOLODOV, A.A.
Teoret. Mat. Fiz.; Vol.24, No.1, p136-140; 1975.

Improved Upper Limit on the Photon Rest Mass.
BARNES, A.; SCARGLE, J.D.
Phys. Rev. Letters; Vol.35, No.17, p1117-1120;
October 27, 1975.

Limit on the Photon Mass Deduced from Pioneer-10
Observations of Jupiter's Magnetic Field.
LEVERETT, D.(Jr); GOLDHABER, A.S.; NIETO, M.M.
Phys. Rev. Letters; Vol.35, No.21, p1402-1405;
November 24, 1975.

The Connection between an Euclidean Gauss Markov
Vector Field and the Real Proca Wightman Field.
YAO, T.H.
Commun. Math. Phys.; Vol.41, p267-271; 1975.

Of Fundamental Electrodynamics and Astrophysics.
BYRNE, J.C.; BURMAN, R.R.
Nature; Vol.253, p27; January 3, 1975.

16-Component Theory of the Spin-1 Particle and its Generalization to Arbitrary Spin.
DURAND, E.
Phys. Rev. D; Vol.11, No. 12, p3405-3416;
June 15, 1975.

Théorie à 10 Composantes de la Particule de Spin Un. (Rapport Gyromagnétique Quelconque).
DURAND, E.
Nuovo Cimento B; Vol.28, No.2, p415-426;
August 11, 1975.

1976

On a Possible Test of Massive High Spin Wave Equations in Heavy-Ion Scattering.
RUCK, H.M.; GREINER, W.
Phys. Letters B; Vol.61, No.4, p327-330;
April 12, 1976.

The Validity of Huyghens' Principle for Spinor Field Equations.
WUNSCH, V.
C.R.Acad.Sci.Paris A; Vol.283, No.14, p983-986;
November 29, 1976.

Dynamics of Fields of Higher Spin.
HAYWARD, R.W.
NBS Monograph; No.MN-154, p1-94; 1976.

A Canonical Formalism and its Geometric Interpretation in the Covariant Theory of the Classical Electron.
KRYLOVETSKII, A.G.; YATSKIN, N.I.
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Fizika;
Vol.1976, No.6, p88-92; June 1976.

On Unique Mass, Definite Parity Joos-Weinberg Field Equations.
TCHRAKIAN, D.H.; O'SULLIVAN, P.
Acta Phys. Austriaca; Vol.45, No.3-4, p291-295; 1976.

Astrophysical Upper Limits for Rest Mass of Photons.
CHIBISOV, G.V.
Usp. Fiz. Nauk; Vol.119, No.3, p551-555; July 1976.

The Mass of the Photon.
GOLDHABER, A.S.; NIETO, M.M.
Scientific American; Vol.234, No.5, p86-96; May 1976.

Solutions of Higher-Spin Wave Equations in External Electro-magnetic Plane-Wave Fields.
BECKER, W.
J.Phys. A; Vol.9, No.1, p149-157; January 1976.

Renormalizability Aspects of Massive Yang-Mills Field Models.
KTORIDES, C.N.
Phys.Rev. D; Vol.13, No.10, p2811-2825; May 15, 1976.

A Note on the Rarita-Schwinger Equation in a Gravitational Background.
GIBBONS, G.W.
J.Phys. A; Vol.9, No.1, p145-148; January 1976.

Construction of Quantum Fields from Euclidean Tensor Fields.
YAO, T.H.
J. Math. Phys.; Vol.17, No.2, p241-247; February 1976

1977

Historical Development of the Bhabha 1st-Order Relativistic Wave Equations for Arbitrary Spin.
KRAJCIK, R.A.; NIETO, M.M.
Am.J.Phys.; Vol.45, No.9, p818-822; September 1977.

Exact Diagonalisation of Relativistic Hamiltonians Including a Constant Magnetic Field.
WEAVER, D.L.
J. Math. Phys.; Vol.18, No.2, p306-307; February 1977

On the Strengths of Field Equations.
BURMAN, R.R.
Czech. J.Phys. B; Vol.27, no.1, p113-116; 1977.

Massive Photons and Tachyon Monopoles.
DATTOLI, G.; MATTIOLI, M.: MIGNANI, R.
Nuovo Cimento Letters; Vol.20, No.18, p686-687; December 31, 1977.

Particle-Like Solutions in the Theory of a Relativistic Self-Consistent Field.
KHLESTKOV, Y.A.; MOVSESYANTS, Y.B.
Phys. Letters A; Vol.64, no.2, p180-182; December 12, 1977.

Extension of the York Field Decomposition to General Gravi-tationally Coupled Fields.
ISENBERG, J.A.; NESTER, J.M.
Annals of Physics; Vol.108, p368-386; October 1977.

Torsion Singularities.
NESTER, J.M.; ISENBERG, J.A.
Phys. Rev. D; Vol.15, No.8, p2078-2087; April 15, 1977.

A Study of the Electromagnetic Interaction given by Relativistic Spin-1 Wave Equations in Elastic Scattering of Polarized Spin-1 Nuclei or Mesons.
RUCK, H.M.; GREINER, W.
J.Phys. G; Vol.3, No.5, p657-680; May 1977.

1978

A New Approach to the Lorentz Condition.
RAYSKI, J.
Nuovo Cimento A; Vol.47, No.3, p297-302; October 1, 1978.

Electrodynamic and Gravitational Effects of Proca Stresses in Astrophysics.
MURPHY, G.L.; BURMAN, R.R.
Astrophys.& Space Science; Vol.56, No.2, p363-370; July 1978.

Paradoxes of Unstable Electron.
OKUN, L.B.; ZELDOVICH, Y.B.
Inst.Theor.Exp.Phys. Moscow; ITEP-79; 1978.

Some Classical Solutions of the Sourceless SO(4,1) Gauge Field Equations.
SASAKI, R.
Nucl. Phys. B; Vol.142, No.4, p463-476; 1978.

On a New Variational Principle in General Relativity and the Energy of the Gravitational Field.
KIJOWSKI, J.
Gen. Relativity Gravitation; Vol.9, no.10, p857-877; 1978.

S-Matrix for the Interaction between Gravitational and Yang-Mills Fields.
TATOMIR, D.
An.Stiint.Univ."Al.I.Cuza".Iasi Sect. Ib Fiz (N.S.); Vol.24, p91-100; 1978.

Bremsstrahlung of Vector-Mesons Induced by Nuclei.
BOYARKIN, O.M.
Zh.Eksp.Teoret.Fiz.; Vol.75, no.1(7), p26-39; 1978.

Solving Spin-1 Problems using Spin-1/2 Methods.
WEAVER, D.L.
Am.J. Phys.; Vol.46, No.7, p721-724; July 1978.

Lorentz Transformations of Observable and Ghost Particle States in Quantum Electrodynamics and in a Massive Gauge Theory.
HALLER, K.; SOHN, R.B.
J.Math. Phys.; Vol.19, no.7, p1589-1593; July 1978.

1979

Cosmology of a Charged Universe.
BARNES, A.
Astrophys. J. (USA); Vol.227, No.1, Pt.1, p1-12; January 1, 1979.

The Problems of Quantum Gravity.
RAYSKI, J.
Gen. Relativ. Gravitat. (UK); Vol.11, No.1, p19-24; 1979.

Comment on the Multispinor Equation for Spin-1 Particles.
VIJAYALAKSHMI, B.; SEETHARAMAN, M.; WILLIAM, A.
Phys. Rev. D; Vol.20, No.6, p1463-1464; September 15, 1979.

Internal Rotations of Spinning Particles.
FENECH, C.; MOLES, M.; VIGIER, J.P.
Nuovo Cimento Letters; Vol.24, Ser.2, No.2, p56-62; January 13, 1979.

Consistency of Spin-1 Theories in External Electromagnetic Fields.
VIJAYALAKSHMI, B.; SEETHARAMAN, M.; MATHEWS, P.M.
J.Phys. A; Vol.12, No.5, p665-677; 1979.

Stochastic Derivation of Proca's Equations in Terms of a Fluid of Weyssenhoff Tops Endowed with Random Fluctuations at the Velocity of Light.
CUFARO PETRONI, N.; VIGIER, J.P.
Phys. Letters A; Vol.73, No.4, p289-291; October 1, 1979.

Discontinuities of the Green's Functions across the Character-istic Surfaces of Field Equations.
DARKHOSH, T.
J. Math. Phys.; Vol.20, No.7, p1466-1472; July 1979.

Representation of the Einstein-Proca Field by an A4*.
BUCHDAHL, H.A.
J.Phys. A; Vol.12, No.8, p1235-1238; August 1979.

1980

Parity Violation in Metric-Torsion Theories of Gravitation.
HOJMAN, R.; MUKKU, C.; SAYED, W.A.
Phys. Rev.D; Vol.22, No.8, p1915-1921; October 15, 1980.

Some Remarks on the Relativistic and Galilean Wave Equations of Particles with Spin.
ELIZALDE, E.; LOBO, J.A.
Phys. Letters A; Vol.77, No.4, p225-228; May 26, 1980

A Purely Affine Framework for Unified Theories of Gravitation.
CATTO, D.; FRANCAVIGLIA, M.; KIJOWSKI, J.
Bull.Acad.Pol.Sci., Ser.Sci.Phys.& Astron.(Poland); Vol.28, No.3-4, p179-186; 1980.

General Relativity is a Gauge Type Theory.
FERRARIS, M.; KIJOWSKI, J.
Proceedings of the Conference on Differential Geometry and its Applications (Nove Mesto na Morave 1980); p167-179. Publishers: Univ. Karlova, Prague; 1982.

Generators of the Poincaré Group for the Dirac and the Proca Fields in Terms of Normal Coordinates.
MUNAKATA, Y.
Mem.Fac.Sci.Shimane Univ.; Vol.14, p73-83; December 20, 1980.

Extended System of Equations for the Angular Momentum.
YAMALEEV, R.M.
NTIS report No. JINR-R-2-80-731; 11p.; 1980.

Classical and Quantum Equations of Movement for the Tensor of Angular Momentum.
YAMALEEV, R.M.
NTIS report No. JINR-R-2-80-619; 12p.; 1980.

Dirac-Equation with Arbitrary Mass and Spin - Simple and Natural Construction.
GAZEAU, J.P.
J.Phys. G; Vol.6, No.12, p1459-1475; 1980.

On the Degree of the Minimal Equation of the Matrices in 1st-Order Relativistic Wave-Equations.
MATHEWS. P.M.; SEETHARAMAN, M.; TAKAHASHI, Y.
J.Phys. A; Vol.13, No.9, p2863-2872; 1980.

Tachyons in the Framework of the 2 Centres Particles.
BASSILA, E.
Acta Phys.Acad.Sci.Hungaricae; Vol.48, No.1, p19-30; 1980.

A New Representation for Higher-Spin Fields.
ROSS, D.K.
Nuovo Cimento A; Vol.58, No.1, p11-20; July 1, 1980.

Derivation of Maxwell Equations from the Gauge-Invariance of Classical Mechanics.
KOBE, D.H.
Am. J. Phys.; Vol.48, No.5, p348-353; May 1980.

On the Additional Invariance of Equations for Vector Fields.
FUSHCHICH, V.I.; VLADIMIROV, V.A.
Sov.Phys.Dokl.(USA); Vol.26, No.4, p396-398; April 1981.

New Results in Conformal Supergravity.
DE WIT, B.
Unification of the Fundamental Particle Interactions II.
Proceedings of the Europhysics Study Conference.
Erice, Italy; October 6-14, 1981.

Quantum Theory of Massive Yang-Mills Fields. I. Basis of Formulation with Indefinite Metric.
FUKUDA, T.; MONDA, M.; TAKEDA, M.; YOKOYAMA, K.
Progr.Theor.Phys.; Vol.66, No.5, p1827-1842; November 1981.

Dually-Invariant Theory of Particles of Spin-1.
BOYARKIN, O.M.
Isv. Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Fizika,; Vol.1981, No.11, p29-32; November 1981.

Generalised Hamilton-Jacobi Theory for Particles with Intrinsic Angular Momentum.
YAMALEEV, R.M.
NTIS report No. JINR-R-2-81-849, 16p.; 1981.

Classical and Quantum Equations of Motion for Tensor of Angular Momentum.
YAMALEEV, R.M.
NTIS report No. JINR-R-E2-81-322, 12p.; 1981.

Exact Solutions of Equations of a General Type Vector Field for a Particle in a Plane Electromagnetic Wave Field.
KRUGLOV, S.I.; RADYUK, A.F.
Vestsi Akad. Navuk BSSR, Ser.Fiz.-Mat.Navuk; Vol.1981, No.3, p88-94,143; 1981.

Description of Spin in the Causal Stochastic Interpretation of Proca-Maxwell Waves: Theory of Einstein's "Ghost Waves".
GARUCCIO, W.; VIGIER, J.P.
Nuovo Cimento Letters; Vol.30, No.2, p57-63; January 10,1981.

General Relativity is a Gauge Type Theory.
FERRARIS, M.; KIJOWSKI, J.
Lett. Math.Phys.; Vol.5, No.2, p127-135; 1981.

Stochastic Quantization of Proca Fields.
LIM, S.C.
NTIS report No. IC-81/23, 27p.; March 1981.

Conformal Invariance of Some Massive and Massless Integral Spin Equations.
FOUSSATS, A.; LAURA, R.; ZANDRON, O.
Math. Notae; Vol.29, p117-128; 1981.

1982

Photon Behaviour and Einstein's "Ghost Waves" in General Relativity.
FENECH, C.
Nuovo Cimento Letters, Series 2; Vol.34, No.18, p579-582; August 28, 1982.

Connection between Generators of Three and Four Dimensional Turns with Hamilton's Operators for Particles with Spin 1 and 1/2.
YAMALEEV, R.M.
NTIS report No. JINR-R-2-82-910, 14p.; 1982.

Stochastic Model for the Motion of Correlated Photon Pairs.
CUFARO PETRONI, N.; VIGIER, J.P.
Phys Letters A; Vol.88, No.6, p272-274; March 22, 1982.

Polarization Symmetries of Relativistic Wave Equations.
STRAZHEV, V.I.; SHKOL'NIKOV, P.L.
Izv.Vyssh.Uchebn.Zaved.Fiz.; Vol.1982, No.11, p74-77; 1982.

The Maxwell and Proca Equations in Spaces with Torsion.
SMETANIN, E.V.
Sov.Phys.J.(USA); Vol.25, No.1, p26-30; January 1982.

Propagation of Light in a Maxwell-Like Gravitational-Field.
MAJERNIK, V.
Astrophys. & Space Science; Vol.82, No.2, p473-476; 1982.

Unitarity of the S-Matrix in a Dually-Invariant Theory of Vector Particles.
BOYARKIN, O.M.
Izv.Vyssh.Uchebn.Zaved.Fiz.; Vol.25, No.2, p102-104; February 1982.

Weyl's Geometry and Physics.
ROSEN, N.
Foundations of Physics (Israel); Vol.12, No.3, p213-248; 1982.

1983

Photon Mass Experiment.
CRANDALL, R.E.
Am. J. Phys.; Vol.51, No.8, p698-702; August 1983.

Charged Vector Particles in a Magnetic Field.
OBUKHOV, I.A.; PERES-FERNANDES, V.K.; TERNOV, I.M.; KHALILOV, V.R.
Theor. & Math.Phys.(USA); Vol.55,.No.3, p536-545; June 1983.

Spontaneous Symmetry Breaking in a Relativistic Statistical Model with Short-Range Vector Interaction.
IVANOV, G.G.
Sov.Phys.J.(USA); Vol.26, No.1, p41-45; January 1983.

Stochastic Quantization of the Vector-Meson Field.
DE SIENA, S.; GUERRA, F.; RUGGIERO, P.
Phys Rev. D; Vol.27, No.12, p2912-2915; June 15, 1983

The De Broglie Fusion Method applied to Quarks at the End of Strings.
BURDEN, C.J.; TASSIE, L.J.
Ann.Inst.Henri Poincaré Sect.A; Vol.38, No.3, p199-213; 1983.

Particle States and Scattering Theory in Abelian Gauge Model with Spontaneously Broken Symmetry.
BISHOP, G.; HALLER, K.
J.Math.Phys.; Vol.24, No.4, p932-948; April 1983.

Tensor Form of the Breit Equation.
KROLIKOWSKY, W.
Acta.Phys.Pol.B (Poland); Vol.14, No.2, p109-114; February 1983.

Relativistic Two-Body Equation for One Dirac and One Duffin-Kemmer Particle.
KROLIKOWSKI, W.
Acta.Phys.Pol.B (Poland); Vol.14, No.2, p97-107; February 1983.

On the New Conservation Laws for Vector Field Equations.
FUSHCHICH, W.I.; VLADIMIROV, V.A.
J.Phys. A; Vol.16, No.9, p1921-1925; 1983.

1984

Addendum: "Self-Duality in Odd Dimensions.
TOWNSEND, P.K.; PILCH, K.; VAN NIEWENHUIZEN, P.
Phys.Letters B; Vol.137, No. 5-6, p443; 1984

Self-Duality in Odd Dimensions.
TOWNSEND, P.K.; PILCH, K.; VAN NIEUWENHUIZEN, P.
Phys.Letters B; Vol.136, No.1-2,p38-42; February 23, 1984.

Stochastic Spin-One Massive Field.
LIM, S.C.
Phys. Letters B; Vol.135, No.5-6, p417-422; February 16, 1984.

Non-Gauge Real Vector Multiplets Coupled to the N=1 Supergravity.
KAKUTO, A.
Prog.Theor.Phys.; Vol.72, No.3, p594-605; September 1984.

Yukawa Potential in a Schwarzschild Background.
GOTTLIEB, D.; HOJMAN, R.; RODRIGUEZ, L.H.; ZAMORANO, N.
Nuovo Cimento B; Vol.80, Ser 2, No.1, p62-70; March 11, 1984.

Particle Physics and Cosmology - New Light on Heavy Light.
BARROW, J.D.; BURMAN, R.R.
Nature; Vol.307, No.5946, p14-15; January 5, 1984.

Equation with the Many Fathers - The Klein-Gordon Equation in 1926.
KRAGH, H.
Am.J.Phys.; Vol.52, No.11, p1024-1033; November 1984.

Space-Time Dual Geometry Theory of Elementary Particles and their Interaction Fields.
KELLER, J.
Intl.J.Theor.Phys.; Vol.23, No.9, p817-837; 1984.

Klein-Gordon Radio and the Problem of the Photon Mass.
CRANDALL, R.E.; WHEELER, N.A.
Nuovo Cimento B; Vol.80, No.2, p231-242; April 11, 1984.

A Lagrangian Theory of the Classical Spinning Electron.
NASH, P.L.
J.Math.Phys.; Vol.25, No.6, p2104-2108; June 1984.

Classical Model of the Dirac Electron.
BARUT, A.O.; ZANGHI, N.
Phys.Rev. Letters; Vol.52, No.23, p2009-2012; June 4, 1984.

On Three Equivalent Definitions for the Spin-1 Massive Particles in Robertson-Walker Universe.
CASTAGNINO, M.; CHIMENTO, L.; LACIANA, C.
Prog.Theor.Phys.; Vol.71, No.2, p309-319; February 1984.

1985

Practical Pretheories of QED. I. Properties of the Interaction Picture.
YOAKAM, M.C.
J.Math.Phys.; Vol.26, No.10, p2634-2638; October 1985

Practical Pretheories of QED. II. Choosing the Interaction.
YOAKAM, M.C.
J.Math.Phys.; Vol.26, No.10, p2639-2642; October 1985

Self-Interaction and Massive Vector Field in the Schwarzschild Space-Time.
LEAUTE, B.; LINET, B.
Gen.Relativ & Gravitation; Vol.17, No.8, p783-798; August 1985.

The Casimir Effect with Finite-Mass Photons.
BARTON, G.; DOMBEY, N.
Ann.Phys.; Vol.162, No.2, p231-272; July 1985.

Homogeneous, Nonsingular, Closed Einstein-Cartan Cosmological Model.
TEIXEIRA, A.F.da F.
Phys.Rev. D; Vol.31, No.8, p2132-2134; April 15, 1985

Six-Dimensional Unified Field Theory.
TELI, M.T.
Nuovo Cimento Letters; Vol.43, Ser.2, No.1, p26-30; May 1, 1985.

On the Association of Positive Probability Densities with Positive Energies in the Causal Theory of Spin-1 Particles.
HOLLAND, P.R.; KYPRIANIDIS, A.; VIGIER, J.P.
Phys. Letters A; Vol.107, No.8, p376-378; February 25, 1985.

From Special Relativity to Quantum-Mechanics through Interval and Phase.
MALCOR, R.
Nuovo Cimento Letters; Vol.42, No.8, p430-434; April 16, 1985

Boundary Effects and the Massless Limit of the Photon.
DAVIES, P.C.W.; TOMS, D.J.
Phys.Rev. D; Vol.31, No.6, p1363-1369; March 15, 1985.

1986

Proca Field in Spacetime with Curvature and Torsion.
SEITZ, M.
Classical and Quantum Gravity; Vol.3, No.6, p1265-1273; 1986

Proca and Electromagnetic-Fields.
HILLION, P.; QUINNEZ, S.
Intl.Jn.Theor.Phys.; Vol.25, No.7, p727-736; 1986

Self-Dual Factorization of the Proca Equation with Chern-Simons Term in 4K-1 Dimensions.
PAUL, S.K.; KHARE, A.
Phys.Letters B; Vol.171, No.2-3, p244-246; April 24, 1986

Gauge Invariance and Mass I. Abelian Case.
BURNEL, A.
Phys.Rev.D; Vol.33, No.10, p2981-2984; May 15, 1986

Relativistic Spin-1 Dynamics and Deuteron-Nucleus Elastic Scattering.
SANTOS, F.D.
Phys.Letters B; Vol.175, No.2, p110-114; July 31, 1986

Quantum Dynamics of Chiral Fermions in a Model with Anomolous Breaking of Gauge Invariance.
GIROTTI, H.O.; ROTHE, H.J.; ROTHE, K.D.
Phys.Rev.D; Vol.34, No.2, p592-597; July 15, 1986

Relativistic Dynamics of Spin-1 Particles and Deuteron-Nucleus Scattering.
SANTOS, F.D.; VAN DAM, H.
Phys.Rev.C; Vol.34, No.1, p250-261; July 1986

****

Les Equations de Proca et les Particules de Spin 1.
PERRIN, F.
Cours professé en 1956.
Annuaire du Collège de France; Vol 57, p80-91; 1957

Rayonnement de Photons doués de Masse Propre.
RUTILY, R.
Thèse Doct. Spec. Phys.; Phys, Theor. 3ème cycle;
Univ. Claude Bernard, Lyon; p1-47; 1976.

Sur la Théorie des Champs à Spin 1 et 3/2.
SPEHLER, D.
Thèse Doct.Spec.Phys.; Sci.de la Matière, 3ème cycle;
Univ. Louis Pasteur, Strasbourg I; p1-210; 1979.

A Causal Behaviour of the Proca Equation in an
External Field.
DARKHOSH, T.
Ph.D. 1976; New York University.
Ref: Vol.37/09-b; Dissertation Abstracts
International, p4526; 68 pages.

Field Theory of Spontaneous Symmetry Breaking:
Spontaneous Symmetry in Scalar Quantum
Electrodynamics.
BISHOP, G.C.
Ph.D. 1982; The University of Conneticut.
Ref: Vol.43/02-B; Dissertation Abstracts
International, p457; 270 pages.

Three Problems in the Theory of Nonlinear Wave
Equations.
BARAB, J.E.
Ph.D. 1982; Indiana University.
Ref: Vol.43/08-B; Dissertation Abstracts
International, p2576; 118 pages.

Reflections on the Simultaneous Existence of the
Heisenberg and Interaction Pictures in Practical
Pre-Theories of Q.E.D.
(QED, Quantum Electrodynamics)
YOAKAM, M.C.
Ph.D. 1983; Purdue University.
Ref: Vol.44/09-B; Dissertation Abstracts
International, p2791; 212 pages.

ENCYCLOPAEDIAS

Handwoerterbuch fuer Mathematik, Astronomie, Physik mit Geophysik, Chemie, Kristallographie und Werwandte Wissensgebiete.
POGGENDORF, J.C.
Band IV, Teil III, p2085;
Verlag Chemie G.m.b.H., Berlin; 1938.

Internationale Personalbibliographie 1800-1943.
ARNIM, M.
Band II, p361;
Hiersemann Verlag, Stuttgart; 1952.

Internationale Personalbibliographie 1944-1959.
ARNIM, M.; BOCK, G.; HODES, F.
Band III, p475;
Anton Hiersemann, Stuttgart; 1963.

Encyclopaedic Dictionary of Physics.
THEWLIS, J. et al.
p661;
Pergamon Press; 1962.

McGraw-Hill Encyclopaedia of Science and Technology.
(WEAVER, D.L.)
Vol 14, p480;
TOW-ZYT; 1971.

The International Dictionary of Physics and Electronics.
Second Edition, p904;
D. Van Nostrand Company Inc.; 1961.

A Dictionary of named effects and laws in Chemistry, Physics and Mathematics.
BALLENTYNE, D.W.G.; LOVETT, D.R.
3rd Edition;
Chapman and Hall Ltd., London; 1970.


PROCA