

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6°)

Envoi dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

Frais de port en sus (Chèques postaux : Paris 29.323; R. C. Seine 99.506.

Producteur Seine C. A. 4806. — O. P. I. A. C. L. 960 020

- INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE SOLVAY. — La Théorie du Rayonnement et les Quanta. Rapports et discussions du Premier Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 30 octobre au 3 novembre 1911, sous les auspices de E. SOLVAY, par LANGEVIN (P.) et DE BROGLIE (M.).** In-8 (25-16) de vi-461 pages, avec 21 figures; 1912 140 fr.
- **La structure de la matière. Rapports et discussions du Deuxième Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 27 au 31 octobre 1913, publiés par la Commission administrative et un des Secrétaires du Conseil.** In-8 (25-16) de xiv-328 pages, avec figures; 1921 140 fr.
- **Atomes et Électrons. Rapports et discussions du Troisième Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 1^{er} au 6 avril 1921, publiés par la Commission administrative de l'Institut et MM. les Secrétaires du Conseil.** In-8 (25-16) de 274 pages, avec figures; 1923 (Épuisé).
- **Conductibilité électrique des Métaux et Problèmes connexes. Rapports et discussions du Quatrième Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 24 au 29 avril 1924, publiés par la Commission administrative de l'Institut de Physique Solvay.** In-8 (25-16) de viii-361 pages, avec figures; 1927 175 fr.
- **Électrons et Photons. Rapports et discussions du Cinquième Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 24 au 29 octobre 1927, publiés par la Commission administrative de l'Institut et MM. les Secrétaires du Conseil.** In-8 (25-16) de viii-292 pages, avec figures; 1928 210 fr.
- **Le Magnétisme. Rapports et discussions du Sixième Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 20 au 25 octobre 1931, sous les auspices de l'Institut et publiés par la Commission administrative.** In-8 (25-16) de ix-488 pages; 1932 350 fr.
- **Structure et Propriétés des Noyaux atomiques. Rapports et discussions du Septième Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 22 au 29 octobre 1933, sous les auspices de l'Institut international de Physique Solvay, publiés par la Commission administrative de l'Institut.** In-8 (25-16) de xxv-364 pages; 1934 262 fr. 50
- TOURRIOL (Jean), Professeur au Lycée Saint-Louis. — Cours de Physique (Classes de Mathématiques spéciales). — Optique géométrique, à l'usage des Élèves de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Grandes Écoles, avec une Préface de M. CH. FABRY, Membre de l'Institut.** Volume in-8 (25-16) de vi-300 pages, avec 275 figures; 1934 125 fr.
- **Chaleur.** In-8 (25-16) de 310 pages, avec 128 figures; 1935. 125 fr.
- **Électricité.** In-8 (25-16) de 312 pages, avec 197 fig.; 1937. 225 fr.

122204-45. — Paris. Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins (6°).

Poids : 0 kg, 330.

THÉORIE GÉNÉRALE
DES
PARTICULES A SPIN
(MÉTHODE DE FUSION)

PAR

Louis de BROGLIE

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

—
1943

THÉORIE GÉNÉRALE
DES
PARTICULES A SPIN

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Ondes et mouvements (*Collection de Physique Mathématique*).

In-8 de 132 pages; 1926..... (Épuisé.)

La Mécanique ondulatoire (*Mémorial des Sciences physiques*,

fascicule 1). In-8 25 fr.

La Mécanique ondulatoire des systèmes de Corpuscules

(*Collection de Physique mathématique*). In-8 de vi-224 pages;

1939..... 120 fr.

THÉORIE GÉNÉRALE
DES
PARTICULES A SPIN
(MÉTHODE DE FUSION)

PAR

Louis de BROGLIE

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—
1943

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.**

PRÉFACE

Dans le présent Volume, j'ai exposé la théorie générale des particules de spin quelconque en m'appuyant sur les idées qui m'ont servi dans ces dernières années à développer la théorie quantique du rayonnement sous la forme d'une Mécanique ondulatoire des photons.

J'ai commencé par rappeler les principes généraux de la Mécanique ondulatoire et de son interprétation physique. Puis j'ai introduit la notion de spin d'une particule et je l'ai examinée sous divers aspects. J'ai fait ensuite un nouvel exposé de la belle théorie de l'électron considéré comme un corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ qui est due à M. Dirac et qui reste à la base de toutes les extensions actuelles. Grâce à la méthode générale de « fusion » qui m'a servi dans mes études sur la lumière, je passe alors des équations de Dirac pour le corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ d'abord à la théorie des particules de spin 1 [photons, mésons (¹), etc.], puis à celle des particules de spin quelconque. Me laissant enfin guider par de beaux travaux récents de M^{me} Tonnelat, je montre alors comment la théorie de la particule de spin 2 contient à la fois les équations de l'électromagnétisme et les équations de la gravitation, du moins à l'approximation cinématique.

Dans cet Ouvrage, j'ai laissé de côté l'étude du mouvement des particules chargées de spin quelconque dans un champ électromagnétique, étude qui me paraît comporter des difficultés particulières, non encore résolues.

LOUIS DE BROGLIE.

30 Mars 1942.

(¹) A l'heure où j'écris, les physiciens ne paraissent pas avoir choisi définitivement entre les termes « mésotons » et « mésons » pour désigner les électrons lourds.

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

PARTICULES A SPIN

CHAPITRE I.

IDÉES ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. **Point de départ de la Mécanique ondulatoire.** — L'idée qui a servi de point de départ à la Mécanique ondulatoire a été la suivante : puisque, pour la lumière, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire reliés entre eux par la relation : énergie = $h \times$ fréquence où figure la constante h des quanta de Planck, il est naturel de supposer que, pour la matière aussi, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire, ce dernier longtemps méconnu. Ces deux aspects doivent être reliés par des relations générales où figure la constante de Planck et doivent contenir comme cas particuliers les relations applicables à la lumière.

Pour développer cette idée, il faut chercher à associer un élément périodique au concept de corpuscule. Imaginons un corpuscule qui se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme dans une certaine direction en l'absence de tout champ. Nous fixerons uniquement notre attention sur *l'état de mouvement* du corpuscule, abstraction faite de sa position dans l'espace. Ce mouvement s'effectue dans une certaine direction que nous prendrons comme axe des z et il est défini par les deux grandeurs « énergie » et « quantité de mouvement » dont les expressions relativistes en fonction de la masse propre m_0 du corpuscule et de sa vitesse $v = \beta c$ sont données par les formules (1)

$$(1) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(1) c désigne, suivant l'usage, la vitesse de la lumière dans le vide.

dont on tire la relation

$$(2) \quad \left| \frac{\vec{p}}{p} \right| = p = \frac{W_0}{c^2}.$$

L'état de mouvement se trouve ainsi défini pour un certain observateur A lié à un certain système de référence galiléen, observateur qui emploie un temps t et des coordonnées rectangulaires x, y, z .

Soit maintenant un autre observateur B qui possède par rapport à A la vitesse $\vec{v}$ dans la direction Oz , autrement dit un observateur lié au corpuscule. Nous pouvons supposer que B a choisi un axe O_0z_0 qui glisse sur l'axe Oz et des axes O_0x_0 et O_0y_0 respectivement parallèles à Ox et Oy . Cela étant, les coordonnées $x_0y_0z_0t_0$ employées par B sont reliées aux coordonnées $xyz t$ de A par les formules bien connues de la transformation de Lorentz

$$(3) \quad x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_0 = \frac{t - \frac{v}{c}z}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Or, pour l'observateur B, la vitesse du corpuscule est nulle; il pose donc comme valeurs de l'énergie et de la quantité de mouvement

$$(4) \quad W_0 = m_0 c^2, \quad \vec{p}_0 = 0.$$

Suivant notre idée de base, nous devons maintenant chercher à introduire un élément périodique et nous tenterons de définir cet élément dans le système propre du corpuscule, c'est-à-dire dans le système de l'observateur B. Comme dans ce système tout est au repos, il est naturel d'y définir l'élément périodique souhaité sous la forme d'une onde stationnaire. Pour cela, nous définirons l'élément périodique par la grandeur supposée scalaire

$$(5) \quad \Psi_0 = A e^{2\pi i \nu_0 t_0}$$

qui a la forme de la représentation complexe d'une onde stationnaire. Ψ_0 oscille en fonction du temps propre avec une fréquence ν_0 caractéristique de la nature du corpuscule envisagé. Nous admettrons que A est une constante (en général complexe), de sorte que Ψ_0 ait la même valeur en tout point du système propre de l'observateur B à l'instant t_0 .

Nous pouvons nous représenter la répartition des valeurs de Ψ_0 en imaginant une infinité de petites horloges disposées en tous les points du système propre du corpuscule, synchronisées entre elles et possédant une période $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$. Si l'aiguille de l'horloge a pour longueur A, Ψ_0 est

en somme l'affixe de l'extrémité de l'aiguille dans le plan du cadran, si l'on considère ce plan comme celui d'une variable complexe ayant son origine au centre du cadran.

Quelle valeur convient-il de donner à la fréquence propre ν_0 ? Nous devons évidemment chercher à la définir à partir d'une grandeur non nulle qui caractérise le corpuscule dans le système propre B et nous n'avons à notre disposition comme telle grandeur que l'énergie W_0 . Étant donné le rôle joué par la constante des quanta h dans toutes les théories quantiques, il est naturel de poser la relation

$$(6) \quad \nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{m_0 c^2}{h},$$

analogue à la relation d'Einstein pour les photons.

Comment va se manifester pour l'observateur A l'élément périodique que nous venons ainsi de définir entièrement pour l'observateur B? En supposant, ce qui est naturel ici, que l'élément Ψ est un invariant, il suffira pour obtenir son expression pour A de substituer dans son expression pour B la valeur de t_0 fournie par la 4^e équation (3) de Lorentz, ce qui donnera

$$(7) \quad \Psi(x, y, z, t) = A e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{z}{V}\right)}$$

si l'on pose

$$(8) \quad \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}.$$

Ainsi, pour l'observateur A, les phases de l'élément périodique introduit sont réparties comme les phases d'une onde plane monochromatique dont la fréquence ν et la vitesse de propagation de la phase V ont les valeurs (8).

En comparant les formules (1), (4), (6) et (8), on trouve

$$(9) \quad W = h \nu,$$

et cette relation sera évidemment valable dans tous les systèmes galiléens puisque rien ne distingue l'observateur A d'un autre observateur galiléen. De plus, en définissant comme d'habitude la longueur d'onde de l'onde Ψ , on trouve pour cette longueur d'onde la valeur

$$(10) \quad \lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{c^2}{v} \frac{h}{W} = \frac{h}{p},$$

formule fondamentale qui pour les faibles vitesses se réduit à

$$(11) \quad \lambda = \frac{h}{mv},$$

et qui a été vérifiée avec une grande précision par les expériences de diffraction des électrons par les cristaux.

Pour une particule de vitesse égale à c ou indiscernable de c , on a

$$(12) \quad v = V = c, \quad W = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}.$$

On retrouve bien ainsi les formules fondamentales de la théorie des quanta de lumière applicables aux photons.

Nous pouvons maintenant écrire la grandeur Ψ vue par l'observateur A sous la forme

$$(13) \quad \Psi = A e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)},$$

ou, plus généralement, si l'on n'a pas pris la direction de propagation comme axe des z :

$$(14) \quad \Psi(x, y, z; t) = A e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)} = A e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})}.$$

Cette formule nous montre que la *phase* de l'onde Ψ coïncide, au facteur $\frac{2\pi}{h}$ près, avec l'Action hamiltonienne du corpuscule. En constatant cette proportionnalité entre l'action du corpuscule et la phase de l'onde Ψ qui lui est associée, on aperçoit que le principe d'action stationnaire valable pour la Dynamique du corpuscule doit n'être qu'une traduction du principe de Fermat valable pour l'onde associée. Mais la théorie ondulatoire nous apprend que le principe de Fermat est valable seulement dans le domaine où l'Optique géométrique est utilisable et perd sa valeur dans le domaine de l'Optique physique proprement ondulatoire. On parvient ainsi à l'idée fondamentale que l'ancienne Mécanique (aussi bien sous sa forme relativiste que sous sa forme newtonienne classique) n'est qu'une approximation ayant le même caractère de validité que l'optique géométrique. Dès lors, on est amené à concevoir la nécessité de construire une nouvelle Mécanique, une Mécanique ondulatoire, qui serait à la Mécanique ancienne ce qu'est l'Optique ondulatoire à l'Optique géométrique. C'est cette idée dont nous allons voir le développement.

2. Équations d'ondes de la Mécanique ondulatoire. — Nous sommes donc arrivés à l'idée qu'il y a lieu d'associer à un corpuscule une onde représentée par une fonction $\Psi(x, y, z; t)$ qui sera généralement différente de zéro dans une région étendue de l'espace. En d'autres termes, nous adjoignons à l'idée de corpuscule celle d'un *champ* au sens de la Physique du champ, le champ Ψ .

La fonction Ψ devra satisfaire à une certaine équation de propagation qui va remplacer les équations classiques de Newton et servir de base à la nouvelle Mécanique. Nous allons chercher à écrire cette équation de propagation sans nous préoccuper pour l'instant de satisfaire aux exigences de la Relativité. Nous obtiendrons ainsi une Mécanique ondulatoire non relativiste qui ne sera applicable qu'aux mouvements de vitesse très inférieure à c .

Considérons un corpuscule de masse m se déplaçant dans un champ de force qui dérive de la fonction potentielle $U(x, y, z; t)$. Soient $\vec{p}$ l'impulsion du corpuscule et E son énergie définie par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$(15) \quad E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x, y, z; t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t).$$

Par définition, on appelle fonction hamiltonienne

$$H(x, y, z; p_x, p_y, p_z)$$

la fonction des coordonnées, des composantes de l'impulsion et du temps qui donne la valeur de l'énergie. On a donc ici

$$(16) \quad H(x, y, z; p_x, p_y, p_z; t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z; t).$$

Le développement de la Mécanique ondulatoire a montré que l'on obtient l'équation de propagation pour les ondes Ψ à partir de la fonction hamiltonienne H par le procédé suivant : on commence par remplacer dans l'expression de H chacun des moments p_q par l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial q}$, ce qui nous fournit l'opérateur

$$(17) \quad H_{\text{op}} = H\left(x, y, z; t, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

dit « opérateur hamiltonien », ou plus brièvement « hamiltonien ». Puis on écrit

$$(18) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{\text{op}} \Psi,$$

Ψ étant la fonction d'onde, et l'on a ainsi obtenu l'équation de propagation pour l'onde Ψ du corpuscule considéré.

Nous pouvons expliciter cette équation, car la forme (16) de la fonction hamiltonienne nous fournit l'opérateur hamiltonien

$$(19) \quad H_{op} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(x, y, z; t),$$

et l'équation d'ondes s'écrit

$$(20) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi + U \Psi,$$

ou encore

$$(21) \quad \Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U \Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Cette équation aux dérivées partielles étant du premier ordre par rapport au temps permet en principe de calculer la forme de la fonction Ψ à tout instant t , quand on connaît sa forme $\Psi(x, y, z; t_0)$ à un instant initial t_0 .

L'équation (21) est à coefficients complexes : la fonction Ψ est donc essentiellement complexe et ne peut pas représenter la vibration d'un milieu réel comme le faisaient les fonctions d'onde réelles de l'ancienne Physique. Ceci crée en particulier une différence très visible entre la fonction d'onde Ψ et les champs électromagnétiques de la théorie électromagnétique de la lumière qui avaient toujours été regardés comme devant être, d'après leur nature même, essentiellement réels. Pourtant, ainsi que je l'ai expliqué dans d'autres exposés, il semble que, dans la description des phénomènes quantiques élémentaires produits par la lumière, il faille employer des champs électromagnétiques complexes, ce qui permet de rapprocher ces champs des ondes Ψ de la Mécanique ondulatoire. Nous retrouverons cette question ultérieurement.

Nous désignerons désormais toujours par F^* la quantité complexe conjuguée d'une grandeur complexe F . L'équation de propagation satisfaite par la grandeur Ψ^* s'obtient naturellement en prenant l'équation complexe conjuguée de (20).

Posons par définition

$$(22) \quad \rho = \Psi \Psi^* = |\Psi|^2; \quad \vec{j} = \frac{h}{4\pi i m} (\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}} \Psi - \Psi \overrightarrow{\text{grad}} \Psi^*).$$

Des équations satisfaites par Ψ et Ψ^* , on déduit aisément que les deux grandeurs réelles ρ et $\vec{f}$ satisfont à l'équation

$$(23) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{f} = 0.$$

Cette équation a la forme classique d'une équation de continuité hydrodynamique; si l'onde Ψ occupe un domaine D de l'espace (fini ou infini) et est nulle aux limites de ce domaine, on conclut de l'équation (23) que l'intégrale

$$(24) \quad \int_D \rho \, d\tau = \int_D |\Psi|^2 \, d\tau$$

est constante au cours du temps. Comme la fonction Ψ , solution d'une équation *linéaire*, n'est définie qu'à une constante multiplicative près, on pourra choisir cette constante de façon à avoir *constamment*

$$(25) \quad \int_D |\Psi|^2 \, d\tau = 1.$$

On dit alors que la fonction Ψ est « normée » et nous admettrons que toutes les fonctions Ψ doivent être normées, hypothèse que justifiera l'interprétation physique donnée plus loin à la grandeur $|\Psi|^2$. Remarquons que, même normée, la fonction Ψ contient encore un facteur arbitraire de module unité $e^{i\alpha}$.

On démontre que la Mécanique ondulatoire, dont nous venons d'obtenir l'équation de base, admet la Mécanique ancienne comme approximation au degré d'approximation de l'optique géométrique. Nous n'insisterons pas sur ce point, d'ailleurs capital, que nous avons longuement développé dans nos autres Ouvrages sur la Mécanique ondulatoire.

Un cas particulier très important à étudier est celui où la fonction Ψ ne dépend pas du temps (champ extérieur permanent). L'équation des ondes Ψ admet alors des solutions « monochromatiques » ne contenant le temps que par un facteur exponentiel de la forme $e^{\frac{2\pi i}{h} E t}$. Une telle solution monochromatique satisfait à l'équation

$$(26) \quad \Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(x, y, z, t)] \Psi = 0,$$

comme on le voit par substitution dans l'équation générale (21).

Dans le cas plus particulier encore où $U \equiv 0$, on trouve comme solutions de l'équation des ondes les « ondes planes monochromatiques » du type

$$(27) \quad \Psi(x, y, z, t) = A e^{\frac{2\pi i}{h} [Et - \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \gamma z)]},$$

où A est une constante complexe et où α, β, γ sont les cosinus directeurs d'une même direction ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$). Cette solution représente une onde plane monochromatique de fréquence $\nu = \frac{E}{h}$ et de longueur d'onde

$$(28) \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

se propageant dans la direction α, β, γ .

Nous retrouvons donc (avec seulement une différence sans importance pratique dans la définition de la fréquence ν) l'onde plane monochromatique que, dès ses débuts, la Mécanique ondulatoire avait fait correspondre au mouvement rectiligne et uniforme, en l'absence de champ, d'un corpuscule de masse m , d'énergie E et de quantité de mouvement mv dans la direction α, β, γ .

3. Nouvelle conception des grandeurs attachées à un corpuscule. —

Dans la méthode que nous venons de développer, on substitue aux grandeurs p_x, p_y, p_z , qui dans l'ancienne Mécanique représentaient les composantes de la quantité de mouvement du corpuscule, les opérateurs respectifs $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$. Cette idée de substituer ou de faire correspondre des « opérateurs » aux « grandeurs » classiques a été érigée en principe général au cours du développement de la Mécanique ondulatoire. On a admis qu'à toute grandeur mesurable (« observable ») définie par la Mécanique ancienne doit correspondre dans la nouvelle Mécanique un certain opérateur. Pour parvenir à former à partir de l'expression classique d'une grandeur observable l'opérateur qui lui correspond, on a été amené à adopter les règles suivantes. Aux grandeurs classiques p_x, p_y, p_z , nous avons déjà fait correspondre les opérateurs $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \dots$; nous admettrons, en plus, qu'aux coordonnées x, y, z du corpuscule nous devons faire correspondre les opérateurs « multiplication par x , par y ou par z », tandis que le temps t conserve son ancien caractère de variable numérique. Or, la Mécanique classique nous fournit l'expression de toute grandeur attachée au corpuscule en fonction

de $x, y, z, p_x, p_y, p_z, t$. Nous n'aurons alors qu'à remplacer dans l'expression classique d'une grandeur en fonction des variables précédentes chacune de ces variables par l'opérateur correspondant pour obtenir l'opérateur qui doit correspondre à la grandeur considérée. Cet opérateur pourra d'ailleurs contenir le temps comme paramètre numérique si l'expression classique de la grandeur le contenait. Remarquons que c'est précisément en appliquant la méthode précédente à la grandeur énergie que nous avons obtenu plus haut l'opérateur hamiltonien.

En appliquant cette méthode à la composante suivant l'axe des z du moment cinétique (moment de quantité de mouvement) d'un corpuscule par rapport à l'origine, on trouve l'opérateur

$$(29) \quad (M_z)_{op} = (xp_y - yp_x)_{op} = -\frac{h}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

φ étant l'azimut compté autour de l'axe oz .

Les opérateurs que l'on forme ainsi en Mécanique ondulatoire pour les faire correspondre à des grandeurs mesurables sont des opérateurs, en général complexes, appartenant à la catégorie des opérateurs hermitiens que nous allons maintenant définir : nous dirons par définition qu'un opérateur A est hermitien dans le domaine D si l'on a

$$(30) \quad \int f^* A g \, d\tau = \int g A^* f^* \, d\tau.$$

Dans cette formule, f et g représentent deux fonctions quelconques du domaine D assujetties seulement à être linéaires, uniformes et continues dans ce domaine et à s'annuler à ses limites de telle façon que les intégrales de surface apparaissant par l'intégration par parties des $\int_{\partial D}$ soient nulles.

Tous les opérateurs qui, en Mécanique ondulatoire, correspondent à des grandeurs observables sont hermitiens. On peut, par exemple, le vérifier aisément pour H et pour M_z . La raison physique de ce fait apparaîtra plus loin.

Les opérateurs de la Mécanique ondulatoire ne sont pas seulement hermitiens; ils sont linéaires, c'est-à-dire que l'on a

$$(31) \quad A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2); \quad A(c\varphi) = cA(\varphi),$$

c étant une constante complexe quelconque.

Il y a encore lieu de distinguer en Mécanique ondulatoire deux catégories d'opérateurs : les opérateurs « complets » qui intéressent l'en-

semble des variables du domaine D (ici coordonnées x, y, z du corpuscule) et les opérateurs « incomplets » qui n'intéressent qu'une partie de ces variables. L'opérateur hamiltonien H est le type d'un opérateur complet, alors que l'opérateur $(p_x)_{op}$ est visiblement incomplet.

Bref, en Mécanique ondulatoire, on fait correspondre à toute grandeur mécanique observable attachée à un corpuscule un opérateur linéaire et hermitien, en général complexe. Mais il est bien évident que, si l'on parvient à effectuer une mesure précise de cette grandeur, cette mesure s'exprimera par un nombre *réel*. La Mécanique ondulatoire doit donc pouvoir dire quels sont les nombres réels qu'une mesure précise peut nous fournir comme valeurs d'une certaine grandeur mécanique.

De l'opérateur linéaire et hermitien que la nouvelle Mécanique fait correspondre à une grandeur mesurable, nous devons donc pouvoir déduire une *liste* de nombres réels représentant tous les résultats possibles de la mesure de cette grandeur. Ceci est précisément rendu possible par le fait que les opérateurs linéaires et hermitiens de la Mécanique ondulatoire possèdent une suite de « valeurs propres » qui sont toujours des nombres réels. Nous allons étudier ce point d'une manière générale.

4. Valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur linéaire et hermitien. — Soit A un opérateur linéaire et hermitien. Écrivons l'équation

$$(32) \quad A \varphi = \alpha \varphi,$$

où φ est une fonction de xyz et α une constante. Le temps t peut figurer comme paramètre numérique dans A , φ et α . Par définition, nous appellerons « valeurs propres de l'opérateur A dans le domaine D » les valeurs de la constante α pour lesquelles l'équation précédente admet au moins une ⁽¹⁾ solution $\varphi(x, y, z, \alpha)$, dite « fonction propre », jouissant des propriétés suivantes : elle est uniforme et continue dans D et l'intégrale du carré de son module dans ce domaine est convergente. De cette dernière condition résulte que, si D est infini, φ doit décroître suffisamment vite à l'infini. Si D est fini, φ doit de plus être nulle aux limites de D .

Nous admettrons l'existence des valeurs propres pour les opérateurs rencontrés en Mécanique ondulatoire et nous allons montrer qu'elles

⁽¹⁾ Nous ne considérons comme distinctes que les solutions linéairement indépendantes.

sont réelles. En effet, de l'équation (32) et de sa conjuguée, on tire aisément

$$(33) \quad \int_{\Omega} [\varphi^* A \varphi - \varphi A^* \varphi^*] d\tau = (\alpha - \alpha^*) \int_{\Omega} |\varphi|^2 d\tau,$$

A étant hermitien par hypothèse, le premier membre est nul; l'intégrale du second membre étant essentiellement positive, on doit avoir $\alpha^* = \alpha$, donc α est réel.

L'ensemble des valeurs propres de l'équation (32) forme le « spectre » de cette équation. Si ces valeurs propres sont isolées, le spectre est discontinu : c'est un « spectre de raies ». C'est, au contraire, « un spectre continu » si les valeurs propres forment une suite continue. Le spectre peut d'ailleurs être en partie continu, en partie discontinu.

Occupons-nous d'abord des spectres discontinus. Désignons par α_i une valeur propre isolée : il existe au moins une fonction propre $\varphi_i(x, y, z, t)$ qui lui correspond.

Montrons que l'ensemble des fonctions propres du spectre discontinu forme un système orthogonal, c'est-à-dire que si φ_i et φ_j sont deux fonctions propres correspondant à des valeurs propres distinctes α_i et α_j , on a

$$(34) \quad \int_{\Omega} \varphi_i^* \varphi_j d\tau = 0.$$

En effet, comme nous savons déjà que tous les α_i sont réels, nous tirons de l'équation (32) et de sa conjuguée

$$(35) \quad \int_{\Omega} [\varphi_i^* A \varphi_j - \varphi_j A^* \varphi_i^*] d\tau = (\alpha_j - \alpha_i) \int_{\Omega} \varphi_i^* \varphi_j d\tau.$$

Le premier membre de (35) étant nul et α_i étant différent de α_j , nous obtenons bien la relation (34).

Toutefois, la démonstration précédente serait en défaut pour deux fonctions propres qui se trouveraient correspondre à une même valeur propre. Quand ce cas se présente, on dit qu'on a affaire à une valeur propre « multiple » ou « dégénérée ». Soit α_i une telle valeur propre à laquelle correspondent p fonctions linéairement indépendantes $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ip}$. L'opérateur A étant toujours linéaire, toute combinaison linéaire de ces p fonctions propres est encore une fonction propre. On peut donc remplacer $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$ par p combinaisons linéaires linéairement indépendantes de ces fonctions, et l'on peut voir aisément qu'il est possible de choisir ces combinaisons de façon qu'elles soient orthogo-

nales entre elles. On peut donc toujours supposer que l'ensemble des fonctions propres d'un opérateur linéaire hermitien est orthogonal.

Les fonctions propres ne sont évidemment déterminées qu'à une constante multiplicative complexe près, car si φ_i est solution de $A\varphi_i = \alpha_i\varphi_i$, $C\varphi_i$ sera aussi solution en raison du caractère linéaire de A . On convient de toujours choisir la constante complexe C de façon à avoir

$$(36) \quad \int_0 \varphi_i \varphi_i^* dt = \int_0 |\varphi_i|^2 d\tau = 1.$$

La fonction φ_i est alors dite normée : elle contient encore un facteur arbitraire de la forme $e^{i\gamma}$.

Les fonctions φ_i étant à la fois normées et orthogonales, on peut aussi écrire la relation d'orthonormalité

$$(37) \quad \int_0 \varphi_i^* \varphi_j d\tau = \delta_{ij},$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et à 0 si $i \neq j$.

Nous avons jusqu'ici raisonné sur le cas d'un spectre discontinu. Passons maintenant au cas d'un spectre continu. Si A possède un spectre continu, à toute valeur propre de ce spectre correspondra une fonction propre $\varphi(x, y, z, \alpha)$ où nous écrivons α comme une variable, parce qu'elle est susceptible de varier d'une façon continue. On démontre aisément que toute fonction propre du spectre continu est orthogonale aux fonctions propres du spectre discontinu s'il y en a un. Mais, pour exprimer que les fonctions propres du spectre continu sont normées et orthogonales entre elles, il y a lieu, pour éviter certaines difficultés de convergence, de considérer, au lieu des fonctions propres elles-mêmes $\varphi(x, y, z, \alpha)$, les expressions $\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha$ dites « différentielles propres » correspondant à des intervalles $\alpha \rightarrow \alpha + \Delta\alpha$ choisis aussi petits que l'on veut dans le domaine de variation du paramètre continu α . Cette substitution correspond physiquement à celle que l'on fait dans l'ancienne théorie des ondes quand on considère, à la place de l'onde plane monochromatique qui est une abstraction, le groupe d'ondes formé par une superposition d'ondes de fréquences très voisines. Pour exprimer que les différentielles propres sont normées et orthogonales entre elles, on doit remplacer la relation (37) par la suivante

$$(38) \quad \frac{1}{\Delta\alpha} \int_0 d\tau \left[\int_{\alpha'}^{\alpha'+\Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right] \left[\int_{\alpha''}^{\alpha''+\Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right]^* = \delta_{\alpha'\alpha''}.$$

Les fonctions propres des opérateurs complets de la Mécanique ondulatoire possèdent la propriété importante de former un système « complet ». Cela veut dire que, sous des conditions très larges, une fonction définie dans le domaine D des variables intéressées par l'opérateur A se laisse développer en une somme des fonctions propres de cet opérateur. Si, par exemple, $f(x, y, z)$ est une fonction des variables x, y, z , elle se laisse très généralement ⁽¹⁾ développer suivant les fonctions propres d'un opérateur hermitien complet sous la forme

$$(39) \quad f(x, y, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) + \int c(\alpha) \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha,$$

la somme Σ étant étendue au spectre discontinu et l'intégrale au spectre continu. Dans le développement précédent, nous pouvons mettre en évidence les différentielles propres du spectre continu en écrivant

$$(40) \quad f(x, y, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) + \sum_{\Delta\alpha} c(\alpha) \int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha.$$

En utilisant les formules qui expriment le caractère orthonormal des fonctions propres du spectre discontinu et des différentielles propres du spectre continu, on trouve les expressions

$$(41) \quad \begin{cases} c_i = \int_0 \varphi_i^* f(x, y, z) d\tau; \\ c(\alpha) = \frac{1}{\Delta\alpha} \int_0 d\tau \left[\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right]^* f(x, y, z). \end{cases}$$

Les coefficients c_i et $c(\alpha)$ sont souvent appelés les coefficients de Fourier du développement de la fonction $f(x, y, z)$ suivant les fonctions propres de l'opérateur A. La série et l'intégrale de Fourier sont des cas particuliers simples de ce type de développements. Il est à noter que le temps peut figurer comme paramètre numérique dans l'expression des c_i et des $c(\alpha)$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Pour plus de rigueur, il faudrait introduire ici la notion de « convergence en moyenne ». Dans cet exposé résumé, nous laissons de côté ce raffinement.

⁽²⁾ Notons encore que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ sont les valeurs propres d'un opérateur A, $\alpha_1^n \dots \alpha_n^n \dots$ sont valeurs propres de l'opérateur A^n , les fonctions propres étant les mêmes pour A et pour A^n . La démonstration est immédiate.

§. Le spectre continu de l'opérateur hamiltonien d'un corpuscule libre. — L'équation qui détermine les valeurs propres de l'opérateur hamiltonien (ou valeurs propres de l'énergie) est

$$(42) \quad H\varphi = E\varphi,$$

en appelant E le paramètre α du cas général. Pour un corpuscule libre ($U \equiv 0$), on a

$$(43) \quad H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta,$$

et l'équation (42) s'écrit

$$(44) \quad -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta\varphi = E\varphi.$$

Soit $\vec{p}$ le vecteur impulsion du corpuscule. On trouve les fonctions propres

$$(45) \quad \varphi(x, y, z, \vec{p}) = a e^{-\frac{2\pi i}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)} = a e^{-\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}, \vec{r})}$$

avec

$$(46) \quad \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{p^2}{2m} = E.$$

On voit donc : 1° que toute valeur positive de E est valeur propre; 2° qu'à une valeur propre positive de E , correspond une infinité de fonctions propres du type précédent obtenues en donnant à p_x, p_y, p_z toutes les valeurs compatibles avec (46). Donc, pour l'énergie, on trouve un spectre continu allant de 0 à $+\infty$ avec dégénérescence d'ordre infini pour toute valeur de E autre que 0.

A chaque fonction propre correspond une onde plane monochromatique, solution de l'équation des ondes de la forme

$$(47) \quad \Psi(\vec{p}, x, y, z, t) = \varphi(\vec{p}, x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E t} \\ = a e^{\frac{2\pi i}{h} [E t - \vec{p}, \vec{r}]}$$

On écrit souvent cette expression en introduisant les notations suivantes

$$(48) \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{h} \vec{p}; \quad k = \frac{2\pi}{hc} E,$$

ce qui donne

$$(49) \quad \Psi(\vec{k}, x, y, z, t) = a e^{i(k c t - \vec{k}, \vec{r})}$$

avec la relation

$$(50) \quad kc = \frac{1}{2m} \left| \vec{k} \right|^2 \frac{h}{2\pi}.$$

Le vecteur $\vec{k}$ est nommé le « vecteur de propagation » de l'onde plane qui est entièrement spécifiée par cette seule donnée. Il y a lieu, avec les notations précédentes, de bien distinguer k et $\left| \vec{k} \right|$.

Remarquons qu'on peut prendre indifféremment comme fonctions propres de H soit les $\Psi_{\vec{k}}$, soit les $\varphi_{\vec{k}}$ qui ne diffèrent que par le facteur e^{ikct} , car nous avons vu qu'un facteur de ce genre reste toujours arbitraire dans la définition des fonctions propres même normées.

On peut exprimer l'orthonormalité des ondes planes en introduisant les différentielles propres. Au cours de ce calcul que nous ne reproduirons pas ici, on est amené à considérer avec Dirac la fonction « impropre » ou « singulière » $\delta(x)$ définie par les deux propriétés suivantes :

1° C'est une fonction impaire de l'argument x .

2° On a toujours

$$(51) \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0) & \text{si } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont de signes contraires,} \\ 0 & \text{si } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont de même signe.} \end{cases}$$

On peut représenter $\delta(x)$ par la fonction singulière de Dirichlet en posant

$$(52) \quad \delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\pi Nx}{\pi x}.$$

Ces propriétés des fonctions singulières de Dirac pourront nous être utiles.

Finalement, le calcul en question montre que les fonctions propres *normées* du spectre continu du corpuscule libre doivent s'écrire

$$(53) \quad \varphi(\vec{k}, x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \text{ou} \quad \Psi(\vec{k}, x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

Le caractère complet de l'ensemble des $\varphi_{\vec{k}}$ se traduit par le fait que, sous des conditions très générales, une fonction $f(x, y, z)$ sera développable en intégrale de Fourier de la forme

$$(54) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k},$$

dk signifiant $dk_x dk_y dk_z$. Les $c(\vec{k})$ sont donnés par la formule

$$(55) \quad c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\vec{r}} f(x, y, z) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r},$$

$d\vec{r}$ signifiant $dx dy dz$. C'est la formule classique donnant les coefficients d'un développement en intégrale de Fourier.

On peut aussi écrire

$$(56) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\vec{k}, t) \Psi(\vec{k}, x, y, z, t) d\vec{k}$$

avec

$$(57) \quad c(\vec{k}, t) = c(\vec{k}) e^{-i k c t}.$$

CHAPITRE II.

INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Principes généraux de l'interprétation physique de la nouvelle Mécanique. — D'après ce que nous avons vu au chapitre précédent, la Mécanique ondulatoire doit pouvoir calculer les valeurs possibles des grandeurs mesurables attachées à un corpuscule et leurs probabilités respectives. Or, nous avons appris à représenter l'état d'un corpuscule par une fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$, solution de l'équation de propagation, fonction que nous supposons toujours normée. De plus, nous avons fait correspondre à toute grandeur attachée à un corpuscule un opérateur linéaire et hermitien qui permet de définir un ensemble de nombres réels, ses valeurs propres, et un système complet de fonctions orthonormales, ses fonctions propres. Nous sommes ainsi en mesure d'énoncer les deux principes fondamentaux de l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire :

Premier principe. — Les valeurs possibles d'une grandeur mesurable, c'est-à-dire les divers résultats possibles d'une mesure de cette grandeur, sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire et hermitien correspondant à cette grandeur.

Second principe. — Quand l'état d'un corpuscule est représenté par une certaine fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$, solution de l'équation de propagation, la probabilité pour qu'une mesure précise de la grandeur mesurable correspondant à l'opérateur linéaire et hermitien A , complet et à valeurs propres non dégénérées, fournisse à l'instant t une certaine valeur propre est égale au carré du module du coefficient de la fonction propre correspondante dans le développement de la fonction Ψ suivant les fonctions propres normées de A .

Plus précisément, si la fonction Ψ se développe suivant les fonctions propres et les différentielles propres de A par la formule

$$(1) \quad \Psi(x, y, z, t) = \sum_i c_i \varphi_i + \sum_{\Delta z} c(\alpha) \int_x^{\alpha + \Delta z} \varphi(\alpha) d\alpha.$$

la probabilité de la valeur propre α_i est $|c_i|^2$ et la probabilité d'une valeur comprise dans l'intervalle $\alpha \rightarrow \alpha + \Delta z$ est $|c(\alpha)|^2 \Delta \alpha$. On vérifiera que, la fonction Ψ étant normée par hypothèse, la probabilité totale de toutes les hypothèses possibles est bien égale à l'unité. Naturellement, les probabilités des valeurs possibles peuvent être fonctions du temps.

Si l'opérateur A a des valeurs propres multiples, l'énoncé du second principe doit être complété. Soit α_i une valeur propre multiple à laquelle correspondent p fonctions propres $\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_p}$ normées, orthogonales et linéairement indépendantes. La probabilité de trouver par une mesure faite à l'instant t la valeur α_i pour la grandeur A est alors la somme des carrés des modules des coefficients de $\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_p}$ dans le développement

du Ψ , soit $\sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2$. On vérifie que cette expression est indépendante de

la façon (dans une certaine mesure arbitraire) dont sont choisies les fonctions $\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_p}$.

Quand l'opérateur A est incomplet, l'énoncé du second principe doit subir une modification. Alors, en effet, les fonctions propres de A ne contiennent pas toutes les variables x, y, z et les coefficients c_i et $c(\alpha)$ sont alors des fonctions des variables non intéressées par A . La probabilité d'une valeur propre α_i ne peut donc pas être le $|c_i|^2$ correspondant, quantité qui dépendrait encore de certaines variables. Pour obtenir cette probabilité, il faut intégrer les expressions indiquées plus haut par rapport aux variables non intéressées par A . On vérifiera qu'avec cette modification, la probabilité totale de toutes les valeurs possibles est égale à l'unité.

Un exemple simple d'application des deux principes est fourni par le cas de l'opérateur hamiltonien H qui est complet. Si H est indépendant du temps, il admet des valeurs propres constantes E_i et des fonctions propres φ_i . Une mesure précise de l'énergie ne peut fournir que l'une des valeurs E_i et, si l'on a $\Psi = \sum_k c_k \Psi_k$, la probabilité de la valeur E_k

est $|c_k|^2$. Si le spectre est discret, on a une suite discrète d'états stationnaires à énergies quantifiées. C'est le cas qui se présente pour les systèmes atomiques.

Prenons un autre cas : celui de la coordonnée x du corpuscule correspondant à l'opération « multiplication par x ». L'équation aux valeurs propres est

$$(2) \quad x\varphi = x\varphi.$$

Cette équation peut être considérée comme vérifiée pour toute valeur réelle de x en posant

$$(3) \quad \varphi(x, \alpha) = \delta(x - \alpha),$$

$\delta(x - \alpha)$ étant la fonction singulière de Dirac nulle pour $x \neq \alpha$. Donc, d'après le premier principe, une mesure de x peut nous fournir n'importe quelle valeur réelle comprise entre $-\infty$ et $+\infty$. De plus, les différentielles propres de ce spectre continu $\int_x^{x+\Delta x} \delta(x - \alpha) d\alpha$ forment un système complet satisfaisant à la relation d'orthonormalité. Comme on a évidemment

$$(4) \quad \Psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha, y, z, t) \delta(x - \alpha) d\alpha,$$

la probabilité pour qu'une mesure de x fournisse à l'instant t une valeur comprise dans l'intervalle $\alpha \rightarrow \alpha + \Delta\alpha$ est

$$(5) \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} dz dy |\Psi(z, x, y, z, t)|^2 \Delta z.$$

On en déduit aisément que la probabilité pour que la présence du corpuscule se manifeste à l'instant t dans l'élément de volume $d\tau$ entourant le point x, y, z est $|\Psi(x, y, z, t)|^2 d\tau$. La probabilité totale de présence en un point quelconque de l'espace est bien égale à l'unité puisque Ψ est normé : c'est là la raison physique pour laquelle on doit normer la fonction d'onde. L'interprétation ainsi donnée à $|\Psi|^2$ est en accord avec le caractère défini positif de cette grandeur ($|\Psi|^2 \geq 0$).

Des deux principes fondamentaux, on tire par des raisonnements sur lesquels nous n'insisterons pas ici la conclusion suivante : deux grandeurs mesurables ne peuvent être simultanément mesurées avec précision dans une même opération de mesure que si les opérateurs correspondants A et B commutent, c'est-à-dire si l'on a $AB \equiv BA$.

L'exemple le plus connu de deux grandeurs non simultanément mesurables est celui d'une coordonnée x et de la composante conjuguée

de la quantité de mouvement p_x . On a, en effet,

$$(6) \quad (xp_x - p_x x)_{op} = \frac{h}{2\pi i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x - x \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{h}{2\pi i} \neq 0.$$

Donc une coordonnée et le moment de Lagrange canoniquement conjugué ne sont jamais connus simultanément qu'avec de certaines « incertitudes » qui ne peuvent être nulles en même temps. Nous démontrerons plus loin qu'on a toujours pour ces incertitudes Δx et Δp_x la relation

$$(7) \quad \Delta x \cdot \Delta p_x \geq h,$$

en ordre de grandeur. Ce sont les inégalités d'incertitude de M. Heisenberg. Plus généralement, pour deux quantités canoniquement conjuguées p et q quelconques, on a aussi

$$(8) \quad \Delta q \cdot \Delta p \geq h.$$

On dit, avec M. Bohr, que les quantités p et q correspondent à des aspects « complémentaires » de la réalité qu'on ne peut jamais connaître simultanément avec exactitude.

On peut dire que, quand deux quantités p et q sont canoniquement conjuguées, on doit faire correspondre à p l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}$ ou inversement. Comme exemple, rappelons que le moment cinétique d'un corpuscule autour d'un axe oz est canoniquement conjugué de l'angle d'azimut autour de cet axe : or, nous avons déjà montré qu'en Mécanique ondulatoire l'on doit faire correspondre à la grandeur classique M_z l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, ce qui confirme bien les énoncés précédents.

2. Les matrices algébriques et leurs propriétés. — On appelle « matrice » un tableau de nombres contenant un nombre fini ou infini de lignes et de colonnes. Si ce tableau est de dimensions finies, nous le supposons carré pour simplifier. Chaque nombre figurant dans le tableau (ou « élément » de la matrice) peut être repéré à l'aide de deux indices qui spécifient respectivement la ligne et la colonne du tableau auquel appartient l'élément. Nous désignerons donc par a_{ik} l'élément inscrit à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ème}}$ colonne. L'ensemble de la matrice sera représenté par la lettre A . Les éléments a_{ii} à indices égaux sont les « éléments diagonaux ». Une matrice dont seuls les éléments diagonaux sont différents de zéro est une matrice diagonale. Deux matrices sont

dites égales ($A = B$) si les éléments correspondants sont tous égaux ($a_{ik} = b_{ik}$ pour tout i et tout k).

Les matrices se présentent en Algèbre quand on étudie les transformations linéaires. En effet, si des variables x'_i sont des combinaisons linéaires d'autres variables x_i , on a des formules de transformation du type

$$(9) \quad x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

qu'on écrit symboliquement

$$(10) \quad X' = AX$$

avec la convention

$$(11) \quad (AX)_i = \sum_j a_{ij} x_j.$$

Ces formules conduisent aisément à définir la somme et le produit de deux matrices par les règles suivantes :

1° La somme de 2 matrices A et B est par définition la matrice $A + B$ dont l'élément d'indices ik est $a_{ik} + b_{ik}$;

2° Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice AB dont l'élément d'indices ik est $\sum_j a_{ij} b_{jk}$.

De cette deuxième définition résulte, qu'en général, la matrice AB n'est pas égale à la matrice BA . Si, par exception, $AB = BA$, on dit que les matrices A et B commutent. On désigne sous le nom de « commutateur » des matrices A et B la matrice

$$(12) \quad AB - BA \equiv [A, B]$$

qui, si elle n'est pas nulle, sert à mesurer le défaut de commutation entre A et B . Parfois, on introduit aussi la matrice

$$(13) \quad AB + BA \equiv [A, B]_+$$

ou « anticommutateur » de A et de B . Si cette matrice est nulle $AB = -BA$, et l'on dit que A et B anticommulent; si elle n'est pas nulle, elle mesure le défaut d'anticommutation entre A et B .

Les matrices peuvent être réelles ou complexes suivant que leurs éléments sont réels ou complexes. Nous envisagerons le cas général des matrices complexes.

Une matrice est dite « hermitienne » si l'on a

$$(14) \quad a_{ik} = a_{ki}^*$$

pour tout i et tout k . Une matrice hermitienne réelle est donc symétrique par rapport à sa diagonale. Les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.

Une matrice est « antihermitienne » si l'on a

$$(15) \quad a_{ik} = -a_{ki}^*$$

pour tout i et tout k . Les éléments diagonaux d'une matrice antihermitienne sont purement imaginaires.

Le produit de deux matrices hermitiennes A et B est lui-même hermitien si A et B commutent et dans ce cas seulement; il est antihermitien si A et B anticommulent.

La matrice $\widetilde{A}$ est la matrice « transposée » de la matrice A si l'on a

$$(16) \quad \widetilde{a}_{ik} = a_{ki}.$$

On appelle matrice « adjointe » d'une matrice A la matrice A^+ définie par

$$(17) \quad a_{ik}^+ = a_{ki}^* \quad A^+ = \widetilde{A}^*.$$

Si A est hermitienne, on a $A = A^+$, la matrice A est alors sa propre adjointe. On a évidemment $(A^+)^+ = A$ et l'on démontre aisément que

$$(18) \quad (AB)^+ = B^+ A^+.$$

Une matrice hermitienne qui est diagonale est nécessairement réelle. La matrice d'éléments $a_{ik} = \delta_{ik}$ est diagonale, tous ses termes diagonaux sont égaux à un. On l'appelle la matrice unité et on la représente souvent par I .

Étant donnée une matrice A , s'il existe une matrice A^{-1} telle que l'on ait

$$(19) \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

la matrice A^{-1} est dite l'inverse de A . Si A a un nombre fini de lignes et de colonnes, A^{-1} existe toujours quand le déterminant déduit du tableau des a_{ik} est différent de zéro. Si A a un nombre infini de lignes ou de colonnes, A^{-1} peut exister ou ne pas exister suivant les cas. On démontre aisément que

$$(20) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Quand A est une matrice réelle et que l'on a

$$(21) \quad \sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad \sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk},$$

on dit que cette matrice est orthogonale, elle définit à l'aide des formules (9) une transformation linéaire orthogonale qui laisse invariante la somme $\sum_i x_i^2$; cela est bien connu en géométrie. On généralise cette définition pour une matrice complexe A en disant que, si l'on a

$$(22) \quad \sum_i a_{ij} a_{ik}^* = \delta_{jk}, \quad \sum_i a_{ji} a_{ki}^* = \delta_{jk},$$

la matrice A définit une transformation orthogonale complexe ou encore une transformation unitaire. Pour une telle transformation, la quantité $\sum_i x_i x_i^*$ reste invariante comme on le vérifie aisément. Pour une matrice A unitaire, on a

$$(23) \quad \sum_i a_{ki}^* a_{ij} = \delta_{kj}, \quad \sum_i a_{ji} a_{ik}^* = \delta_{jk}$$

ou encore

$$(24) \quad A^+ A = A A^+ = 1 \quad \text{d'où} \quad A^+ = A^{-1}.$$

Donc l'adjointe d'une matrice unitaire coïncide avec son inverse.

La « trace » d'une matrice A est la somme de ses termes diagonaux

$$(25) \quad \text{Tr. } A = \sum_i a_{ii}.$$

On démontre aisément que

$$(26) \quad \text{Tr. } AB = \text{Tr. } BA = \sum_{ik} a_{ik} b_{ki}.$$

Soient encore une matrice carrée quelconque A et une matrice *unitaire* S ayant le même nombre de lignes et de colonnes. La matrice

$$(27) \quad B = S^{-1} A S$$

est dite obtenue à partir de A par une « transformation canonique ». On vérifie facilement que, si A est hermitienne, B l'est aussi. Les transformations canoniques conservent donc le caractère hermitien des

matrices ⁽¹⁾. De plus, si deux matrices carrées A et A' sont transformées respectivement en B et B' par la transformation canonique S , leur produit AA' est transformé en BB' par cette transformation canonique (car $S^{-1}AS \cdot S^{-1}A'S = S^{-1}AA'S$).

3. Opérateurs et matrices en Mécanique ondulatoire. — Supposons que nous connaissions un système de fonctions orthonormales $\varphi_1 \dots \varphi_i \dots$ dans un domaine D de variation de certaines variables. Nous les appellerons des fonctions de base. Ce système pourra être, par exemple, celui des fonctions propres normées d'un opérateur linéaire et hermitien de la Mécanique ondulatoire. Avec ce système de base, à tout opérateur linéaire nous pouvons faire correspondre une matrice. Soit, en effet, A un opérateur linéaire. L'application de cet opérateur à une des fonctions de base φ_i nous fournira une nouvelle fonction qui pourra se développer suivant le même système de fonctions de base. Nous aurons donc une relation de la forme

$$(28) \quad A \varphi_i = \sum a_{ji} \varphi_j$$

avec

$$(29) \quad a_{ji} = \int_D \varphi_j^* A \varphi_i d\tau,$$

D étant le domaine de variation des variables figurant dans les φ_i . Par définition, les a_{ij} sont les éléments de la matrice engendrée par l'opérateur A dans le système de base des φ_i . Nous désignerons cette matrice par le même symbole A que l'opérateur ou, si nous voulons préciser le système de base employé, par $A?$. Il est facile de vérifier que les matrices ainsi définies satisfont aux règles d'addition et de multiplication des matrices algébriques indiquées plus haut.

Si le système de base est formé par les fonctions propres d'un opérateur de la Mécanique ondulatoire et si l'opérateur A est lui-même un opérateur linéaire et hermitien de cette Mécanique, nous dirons que la matrice A est une matrice de la Mécanique ondulatoire. On voit immédiatement que ces matrices sont toujours elles-mêmes hermitiennes car, avec la définition (29), le caractère hermitien de A entraîne

$$(30) \quad a_{ij} = a_{ji}^*.$$

⁽¹⁾ La trace d'une matrice est également conservée par une transformation canonique.

On voit d'ailleurs que la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice engendrée par un opérateur Λ dans un système de base soit hermitienne est que l'opérateur soit lui-même hermitien. L'hermitianité est donc une propriété intrinsèque des opérateurs, en ce sens qu'un opérateur hermitien engendre des matrices hermitiennes dans tous les systèmes de base. Toutes les matrices de la Mécanique ondulatoire sont donc hermitiennes.

Nos définitions établissent une corrélation très étroite entre les opérateurs et les matrices. En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices commutent (ou anticommutent) est que les opérateurs correspondants commutent (ou anticommutent) et *vice versa*. Ceci amène à définir le commutateur et l'anticommutateur de deux opérateurs A et B par les formules

$$(31) \quad [A, B] = AB - BA, \quad [A, B]_{\mp} = AB + BA.$$

Une catégorie particulièrement importante de matrices de la Mécanique ondulatoire est obtenue en prenant toujours comme fonctions de base les fonctions propres de l'opérateur hamiltonien correspondant au problème considéré. Soient $\Psi_1 \dots \Psi_i \dots$ les fonctions propres de cet opérateur H . Les matrices A^{Ψ} engendrées par un opérateur linéaire et hermitien A dans le système des Ψ_i , dont les éléments sont

$$(32) \quad a_{jk} = \int_{\Omega} \Psi_j^* A \Psi_k d\tau,$$

peuvent être appelées « matrices de la Mécanique quantique », car ce sont elles que M. Heisenberg a mises, sans les interpréter explicitement ainsi, à la base de sa Mécanique quantique. Si l'on comprend dans les Ψ_k les facteurs exponentiels $e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}$, c'est-à-dire si l'on pose

$$(33) \quad \Psi_k = a_k(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t},$$

on aura

$$(34) \quad a_{jk} = \int_{\Omega} a_j^* A a_k d\tau \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - E_j) t}.$$

Ces éléments définissent la matrice d'Heisenberg proprement dite qui dépend du temps. Parfois on supprime dans l'expression de Ψ_k le facteur exponentiel et l'on pose simplement

$$(35) \quad a'_{jk} = \int_{\Omega} a_j^* A a_k d\tau.$$

La matrice A' d'éléments a'_{jk} indépendants du temps est souvent nommée la matrice de Schrödinger correspondant à l'opérateur A . Nous nous servirons en général des matrices d'Heisenberg.

4. Valeurs moyennes et grandeurs de champs en Mécanique ondulatoire. — Envisageons un certain corpuscule et supposons connue l'onde Ψ qui lui est associée. Soit une certaine grandeur observable attachée à ce corpuscule et à laquelle correspond un opérateur linéaire et hermitien A . Les principes de la Mécanique ondulatoire nous permettent de prévoir les valeurs observables possibles de la grandeur A et leurs probabilités respectives. Comme il y a, en général, plusieurs valeurs possibles de probabilité non nulle pour la grandeur A , on ne peut pas parler sans équivoque de la valeur de A à chaque instant, mais on peut aisément définir une « valeur moyenne » de A . Si α_i et φ_i sont les valeurs et fonctions propres de A , la valeur moyenne de A sera tout naturellement définie par la somme des produits de chaque valeur possible par sa probabilité, c'est-à-dire par l'expression

$$(36) \quad \bar{A} = \sum_k \alpha_k |c_k|^2.$$

Il est facile de vérifier, en s'appuyant sur le développement du Ψ et sur le caractère orthonormal des φ_i , que l'on peut aussi écrire

$$(37) \quad \bar{A} = \int_D \Psi^* A \Psi d\tau.$$

Soit maintenant une grandeur observable B autre que A attachée au corpuscule et à laquelle correspond un opérateur linéaire et hermitien B . Soient $\beta_1 \dots \beta_i \dots$ et $\chi_1 \dots \chi_i \dots$ les valeurs et fonctions propres de B . Si la fonction Ψ du corpuscule se développe suivant les χ_i sous la forme

$$(38) \quad \Psi = \sum_i d_i \chi_i,$$

on trouve aisément par substitution de ce développement dans l'expression de A

$$(39) \quad \bar{A} = \sum_{ki} d_i^* d_k a'_{ik},$$

où a'_{ik} est l'élément d'indices i, k de la matrice engendrée par l'opérateur A dans le système des χ_i . Donc, la valeur moyenne de A peut toujours

s'exprimer linéairement à l'aide des éléments de la matrice qu'engendre l'opérateur A dans le système des fonctions propres d'un autre opérateur B.

En particulier, si le corpuscule se trouve dans l'un des états propres relatifs à la grandeur B, on aura

$$(40) \quad \Psi = d_i \chi_i \quad \text{avec} \quad \sum d_i = 1,$$

et l'on trouve

$$(41) \quad \bar{A} = a_{ii}^{\chi}.$$

D'où le théorème : « L'élément diagonal d'indices i, i de la matrice engendrée par l'opérateur A dans le système des fonctions propres de l'opérateur B représente la valeur moyenne de la grandeur A quand on sait que la grandeur B a la valeur β_i ».

Faisons maintenant quelques remarques importantes sur les quantités qui viennent d'être définies. Les éléments des matrices d'Heisenberg peuvent dépendre du temps envisagé comme paramètre numérique, mais ils ne dépendent pas des variables x, y, z parce qu'ils sont obtenus par intégration sur ces variables. Il en est de même des valeurs moyennes qui peuvent d'ailleurs, nous venons de le voir, s'exprimer à l'aide d'éléments de matrice. Par contre, la quantité sous le signe $\int_{\nu}$ dans la définition des éléments de matrice et des valeurs moyennes sont des fonctions de x, y, z, t : nous les nommerons « densités d'éléments de matrice » ou « densités de valeurs moyennes ». Ces densités, variables en général d'un point à un autre de l'espace, ont le caractère de grandeurs de champ attachées au corpuscule. Ainsi, à toute grandeur observable A, on pourra associer une grandeur de champ, la densité de moyenne de A, donnée par la formule

$$(42) \quad \rho(A) = \Psi^* A \Psi.$$

Toutefois, les grandeurs de champ ainsi définies n'ont pas un sens physique aussi précis que dans les théories classiques de la Physique du champ. Elles se présentent ici comme étant seulement « les quantités qu'il faut intégrer pour obtenir les valeurs moyennes (ou les éléments de matrice) ». Ce sont souvent des grandeurs complexes et elles ne sont définies qu'à une divergence près. Néanmoins, comme ce sont des grandeurs de champ attachées aux corpuscules, leur considération facilite la fusion assez subtile que les théories quantiques ont pour mission de réaliser entre la Physique corpusculaire et la Physique du champ. En particulier, dans la Mécanique ondulatoire du photon, ce

sont des grandeurs de cette espèce qui représentent les champs électromagnétiques maxwelliens liés au photon.

Terminons par une remarque sur les matrices d'Heisenberg. Ce système de matrices a ceci de particulier que la matrice H correspondant à l'énergie y est représentée par une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les diverses valeurs propres de l'énergie (si toutefois on a eu soin, dans le cas où H possède des valeurs propres multiples, de choisir les fonctions propres correspondantes de façon qu'elles soient orthogonales). On a, en effet,

$$(43) \quad H_{ik} = \int_0 \Psi_i^* H \Psi_k d\tau = E_k \int_0 \Psi_i^* \Psi_k d\tau = E_k \delta_{ik}.$$

Ceci n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème général suivant :
« Si l'on construit la matrice engendrée par un opérateur A dans le système des fonctions orthonormales de cet opérateur, cette matrice est diagonale et ses éléments diagonaux sont égaux aux valeurs propres de A . »

5. Intégrales premières en Mécanique ondulatoire. — Considérons la matrice d'Heisenberg A dont les éléments sont définis par

$$(44) \quad a_{jk} = \int_0 \Psi_j^* A \Psi_k d\tau.$$

L'élément a_{jk} peut dépendre de t par l'intermédiaire de Ψ_j^* et Ψ_k et aussi de A si cet opérateur dépend explicitement du temps. Dérivons donc a_{jk} par rapport au temps en tenant compte des faits que Ψ_j et Ψ_k obéissent à l'équation des ondes et que l'opérateur A est hermitien. Il vient aisément

$$(45) \quad \frac{da_{jk}}{dt} = \int_0 \Psi_j^* \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) \right] \Psi_k dt,$$

où $\frac{\partial A}{\partial t}$ est l'opérateur obtenu en dérivant formellement A par rapport au paramètre t . Nous pouvons interpréter la formule (45) en disant : la matrice d'Heisenberg dont l'élément d'indices jk est $\frac{da_{jk}}{dt}$ est engendrée dans le système des Ψ_i par l'opérateur

$$(46) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA).$$

Très fréquemment, l'opérateur A ne dépend pas explicitement du temps : on a alors simplement

$$(47) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi i}{h} [A, H].$$

Par définition, dans un problème où l'hamiltonien H est donné, la grandeur observable correspondant à un opérateur A est dite « intégrale première » ou « constante du mouvement » pour le problème considéré si $\frac{dA}{dt}$ est nul, c'est-à-dire si

$$(48) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} [A, H] = 0.$$

Si A ne dépend pas du temps, A est intégrale première s'il commute avec H .

On peut aussi définir les intégrales premières de la façon suivante : une grandeur, dont l'opérateur est A , est intégrale première si, Ψ étant une solution quelconque de l'équation des ondes, $A\Psi$ en est également solution. En effet, si l'on a par hypothèse

$$(49) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} H\Psi,$$

on aura

$$(50) \quad A \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} AH\Psi \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} A\Psi = \frac{\partial A}{\partial t} \Psi + \frac{2\pi i}{h} AH\Psi.$$

Pour que $A\Psi$ soit solution de l'équation des ondes, il faudra donc que

$$(51) \quad \frac{\partial A}{\partial t} \Psi + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA)\Psi = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (51) soit satisfaite, quelle que soit la solution Ψ de l'équation des ondes, est précisément la condition (48). C. Q. F. D.

Voici quelques exemples d'intégrales premières. Si le champ extérieur agissant sur le corpuscule est indépendant du temps, l'opérateur H ne contient pas t et, comme il commute évidemment avec lui-même, l'énergie est alors intégrale première : nous retrouvons l'analogie de la conservation de l'énergie pour les systèmes conservatifs en Mécanique classique. De même, si la composante x du champ est nulle, l'opérateur H ne dépend pas de x et par suite commute avec $(p_x)_{op}$: la composante x de la quantité de mouvement est donc alors intégrale première, autre résultat analogue à un théorème de la Mécanique classique.

Enfin, si la fonction U possède la symétrie cylindrique autour de l'axe Oz , l'hamiltonien H ne dépend pas de l'azimut φ autour de cet axe. Dans ce cas, la composante M_z du mouvement cinétique est une intégrale première. Si le champ de force est central, les trois composantes du moment cinétique $\vec{M}$ sont intégrales premières, et il en est de même de la grandeur $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$. Ce cas du moment cinétique est si important pour nous que nous lui consacrerons tout le chapitre suivant.

6. Forme précise des relations d'incertitude d'Heisenberg. — Pour terminer, nous donnerons une forme précise aux relations d'incertitude (8) d'Heisenberg en utilisant les notions introduites dans les derniers paragraphes. A cette fin, nous commencerons par introduire une définition qui se relie tout naturellement à celles posées précédemment : nous dirons que l'opérateur F^+ est l'opérateur adjoint de l'opérateur F dans le domaine D si l'on a

$$(52) \quad \int_0 f^* F g \, d\tau = \int_0 (F^+ f)^* g \, d\tau,$$

f et g étant deux fonctions du domaine D choisies arbitrairement sous les seules conditions d'être finies, uniformes et continues dans D et de s'annuler aux limites de D de façon que les intégrales de surface pouvant apparaître dans l'intégration par parties des $\int_0$ soient nulles. En comparant la définition (52) avec la définition des opérateurs hermitiens donnée par la formule (35) du Chapitre I, on voit qu'un opérateur hermitien est son propre adjoint, c'est-à-dire que $F^+ = F$ si F est hermitien.

Que l'opérateur linéaire F soit ou non hermitien, la valeur moyenne de FF^+ au sens du paragraphe 4 est toujours réelle et positive (ou nulle) car

$$(53) \quad \overline{FF^+} = \int_0 \Psi^* FF^+ \Psi \, d\tau = \int_0 (F^+ \Psi)^* F^+ \Psi \, d\tau = \int_0 |F^+ \Psi|^2 \, d\tau \geq 0.$$

Ceci posé, nous sommes en état de démontrer le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME. — *Si deux grandeurs physiques observables correspondent respectivement aux deux opérateurs linéaires et hermitiens A et B , on a*

$$(54) \quad \Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\overline{[A, B]}|,$$

$[A, B]$ étant le commutateur de A et de B et ΔA , ΔB étant les écarts quadratiques définis par les formules

$$(55) \quad \Delta A = \sqrt{(\overline{A - \bar{A}})^2}, \quad \Delta B = \sqrt{(\overline{B - \bar{B}})^2}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous considérons l'opérateur linéaire (non hermitien) $A + i\lambda B$ où λ est une constante réelle : son adjoint est $A - i\lambda B$ et, par application de la formule (53), nous voyons que la valeur moyenne

$$(56) \quad \overline{(A + i\lambda B)(A - i\lambda B)} = \overline{A^2 + \lambda^2 B^2 - i\lambda [A, B]}$$

est réelle, positive ou nulle. Donc la fonction de λ

$$(57) \quad f(\lambda) = \overline{A^2} + \lambda^2 \overline{B^2} - i\lambda \overline{[A, B]}$$

est réelle, positive ou nulle, et l'on en conclut que $\overline{[A, B]}$ est purement imaginaire. Or $f(\lambda)$ est minimum pour

$$(58) \quad \lambda_0 = \frac{i}{2} \frac{\overline{[A, B]}}{\overline{B^2}}$$

et a alors pour valeur

$$(59) \quad f(\lambda_0) = \overline{A^2} + \frac{1}{4} \frac{(\overline{[A, B]})^2}{\overline{B^2}}.$$

Comme cette valeur doit être positive ou nulle, on a

$$(60) \quad \overline{A^2} \cdot \overline{B^2} \geq -\frac{1}{4} (\overline{[A, B]})^2.$$

Posons par définition

$$(61) \quad \delta A = A - \bar{A}, \quad \delta B = B - \bar{B}.$$

$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont des nombres, mais, comme A et B sont des opérateurs, δA et δB sont aussi des opérateurs. On trouve aisément

$$(62) \quad [\delta A, \delta B] = [A - \bar{A}, B - \bar{B}] = [A, B].$$

Nous pouvons appliquer l'inégalité (60) aux opérateurs δA et δB et, en tenant compte de (62), nous obtiendrons l'inégalité

$$(63) \quad \overline{(\delta A)^2} \cdot \overline{(\delta B)^2} \geq -\frac{1}{4} (\overline{[A, B]})^2.$$

Comme $[\overline{A}, B]$ est purement imaginaire, nous en tirons, en introduisant les définitions (55),

$$(64) \quad \Delta A \cdot \Delta B = \sqrt{(\delta A)^2} \cdot \sqrt{(\delta B)^2} \geq \frac{1}{2} |[\overline{A}, B]|.$$

Notre théorème est ainsi démontré.

En mécanique ondulatoire, on dit que deux grandeurs observables sont « canoniquement conjuguées » quand les opérateurs A et B qui leur correspondent satisfont à la relation de commutation

$$(65) \quad [A, B] = -\frac{h}{2\pi i} \cdot 1.$$

On a alors

$$(66) \quad [\overline{A}, B] = \int_{\Omega} \Psi^* \cdot \left(-\frac{h}{2\pi i}\right) \Psi \, d\tau = -\frac{h}{2\pi i},$$

quantité purement imaginaire comme cela doit être. De (64), nous tirons alors

$$(67) \quad \Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Grâce aux définitions (55), nous obtenons ainsi une forme précise des relations d'incertitude d'Heisenberg entre grandeurs canoniquement conjuguées. En particulier, la coordonnée x d'un corpuscule et la composante correspondante p_x de sa quantité de mouvement sont canoniquement conjuguées et nous avons

$$(68) \quad \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}.$$

CHAPITRE III.

THÉORIE QUANTIQUE DES MOMENTS CINÉTIQUES ET DES SPINS.

1. **Moment cinétique orbital.** — Nous appellerons moment cinétique ordinaire ou moment cinétique orbital ⁽¹⁾ d'une particule par rapport à un point O (qu'on prendra comme origine des coordonnées) le moment de la quantité de mouvement de la particule par rapport à ce point. Ce moment cinétique orbital est un vecteur dont l'expression est

$$(1) \quad \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

C'est donc le produit vectoriel du rayon vecteur $\vec{r}$ de la particule (dont les composantes sont x, y, z) et de la quantité de mouvement $\vec{p}$. En composantes, on a donc

$$(2) \quad M_x = yp_z - zp_y; \quad M_y = zp_x - xp_z; \quad M_z = xp_y - yp_x.$$

La propriété essentielle du moment cinétique, celle qui rend cette grandeur particulièrement importante au point de vue mécanique, c'est que, si le potentiel des forces agissant sur la particule ne dépend pas de l'azimut pris autour d'un des axes de coordonnées (autrement dit si la force est partout dans un même plan avec cet axe), la composante du moment cinétique orbital le long de cet axe est constante au cours du mouvement, est intégrale première.

La longueur M du moment cinétique est définie par

$$(3) \quad M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = r^2 p^2 - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2,$$

d'après l'identité de Lagrange. Cette quantité est intégrale première si la force passe constamment par le point O (champ central).

En théorie quantique, nous devons remplacer les quantités ainsi définies classiquement par des opérateurs. Il résulte de ce que nous

⁽¹⁾ On dit aussi moment de rotation ou moment d'impulsion au lieu de moment cinétique.

avons déjà vu que l'on doit poser

$$(4) \quad \begin{cases} (M_x)_{op} = -\frac{h}{2\pi i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_x}, \\ (M_y)_{op} = -\frac{h}{2\pi i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_y}, \\ (M_z)_{op} = -\frac{h}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_z}. \end{cases}$$

Dans ces formules, φ_x , φ_y , φ_z sont les azinuts comptés respectivement autour des axes Ox , Oy , Oz . L'un quelconque de ces trois opérateurs désigné par $M_k = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$, avec $k = 1, 2, 3$, admet pour valeurs propres les valeurs $m \frac{h}{2\pi}$ où m est entier et pour fonctions propres normées $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi_k}$, comme on le vérifie aisément.

D'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, nous devons donc conclure que la mesure exacte d'une des composantes rectangulaires du moment cinétique donne toujours une valeur égale à un multiple entier de $\frac{h}{2\pi}$. Pour cette raison, la quantité $\frac{h}{2\pi}$ peut être appelée l'unité quantique de moment cinétique.

Mais on aperçoit maintenant que l'image vectorielle du moment cinétique fournie par la théorie classique a quelque chose de trompeur à l'échelle quantique. En effet, les trois composantes du moment cinétique ne sont pas en général simultanément mesurables à l'échelle quantique, car les trois opérateurs M_x , M_y et M_z ne commutent pas entre eux. Si donc on effectue avec précision la mesure d'une composante rectangulaire, la valeur exacte des deux autres restera inconnue : il y aura seulement une distribution de probabilité pour les valeurs possibles de ces deux autres composantes. On ne pourra donc tracer réellement le vecteur $\vec{M}$, puisqu'on ne connaîtra jamais exactement plus d'une de ses composantes. Par contre le vecteur $\vec{\bar{M}}$ dont les composantes sont les valeurs moyennes $\bar{M}_x$, $\bar{M}_y$ et $\bar{M}_z$ est bien défini du point de vue quantique, et c'est là ce qui permet d'employer utilement à l'échelle macroscopique, où seules comptent les valeurs moyennes, la représentation du moment cinétique par un vecteur.

L'impossibilité de connaître simultanément les trois composantes du moment cinétique s'exprime par la non-commutation des opérateurs correspondants. Pour écrire ces formules de non-commutation qui sont

très importantes, nous poserons, en mettant en évidence l'unité quantique $\frac{h}{2\pi}$,

$$(5) \quad M_x = \frac{h}{2\pi} m_x, \quad M_y = \frac{h}{2\pi} m_y, \quad M_z = \frac{h}{2\pi} m_z,$$

où m_x, m_y, m_z sont les opérateurs suivants

$$(6) \quad \begin{aligned} m_x &= i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right); & m_y &= i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right); \\ m_z &= i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que l'on a

$$(7) \quad [m_x, m_y] = -im_z; \quad [m_y, m_z] = -im_x; \quad [m_z, m_x] = -im_y.$$

Nous verrons tout à l'heure quelle signification profonde ont ces formules.

Examinons maintenant l'opérateur qui correspond à la grandeur (3) de la Mécanique classique. Nous la définirons par l'opérateur

$$(8) \quad (M^2)_{op} = (M_x)_{op}^2 + (M_y)_{op}^2 + (M_z)_{op}^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} [m_x^2 + m_y^2 + m_z^2] = \frac{h^2}{4\pi^2} m^2,$$

et nous trouvons aisément d'après (6)

$$(9) \quad m^2 = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right],$$

en prenant des coordonnées polaires autour du point O. Cet opérateur m^2 n'est pas autre chose que le laplacien à la surface d'une sphère de rayon 1. L'équation aux valeurs propres

$$(10) \quad m^2 f = \alpha f$$

n'admet comme solutions finies, uniformes et continues sur la sphère de rayon 1, que les fonctions de Laplace $Y_k(\theta, \varphi)$, la valeur propre correspondant à la fonction Y_l , où l est un certain indice entier positif ou nul, étant $l(l+1)$. On voit donc ainsi que finalement les valeurs propres de l'opérateur M^2 sont

$$(11) \quad M^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} l(l+1) \quad (l = 0, 1, 2, \dots).$$

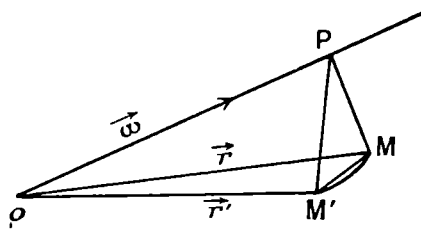
Il est aisé de vérifier que $(m^2)_{op}$ est commutable avec m_x, m_y, m_z . Ceci nous montre que la grandeur M^2 est mesurable en même temps que l'une des grandeurs M_x, M_y, M_z .

2. **Le moment cinétique et le groupe des rotations spatiales.** — Nous allons essayer de comprendre le sens des relations de non-commutation obtenues pour le moment cinétique. Pour cela, nous allons d'abord montrer comment le caractère d'intégrale première de la composante M_z du moment cinétique est relié aux rotations possibles autour de Oz . Pour que M_z soit intégrale première, il faut que le potentiel U ne dépende pas de l'azimut φ compté autour de Oz . Mais alors le problème de Mécanique considéré n'est aucunement modifié par la rotation du système d'un angle quelconque $\Delta\varphi$ autour de Oz . Donc si $\Psi(r, \varphi, \theta, t)$ est, en coordonnées polaires avec Oz comme axe polaire, l'expression d'une certaine solution de l'équation des ondes, $\Psi(r, \theta, \varphi + \Delta\varphi, t)$ sera aussi solution et il en sera encore de même de

$$\frac{\Psi(r, \theta, \varphi + \Delta\varphi, t) - \Psi(r, \theta, \varphi, t)}{\Delta\varphi}.$$

Or, si $\Delta\varphi$ est infiniment petit, ceci est égal à $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$. Donc l'hypothèse que le problème mécanique n'est pas modifié par une rotation autour de Oz entraîne que, si Ψ est une solution de l'équation des ondes, $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$ et par suite $M_z\Psi$ en est une autre. Nous avons vu que ce résultat entraîne pour M_z le caractère d'intégrale première. Ainsi se trouve mise en lumière la relation entre la composante du moment cinétique dans une certaine direction et les rotations autour de cette direction.

Fig. 1.



Nous allons de même montrer comment les relations de non-commutation des composantes du moment cinétique sont reliées à la non-commutation des rotations spatiales. Soit un point M de coordonnées x, y, z formant les composantes du rayon vecteur $\vec{OM} = \vec{r}$ et soit une rotation infinitésimale définie par un vecteur $\vec{\omega}$ passant par l'origine O sous l'influence de la rotation $\vec{\omega}$, le point M vient en M' en décrivant un

arc de cercle infiniment petit MM' égal à $\omega \cdot \overline{MP}$ ou $\omega r \sin \widehat{POM}$. On a donc

$$(12) \quad \vec{r}' = \vec{r} + [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

Considérons maintenant trois rotations infinitésimales de même valeur absolue autour de trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz . Il leur correspond trois vecteurs $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ et $\vec{\omega}_3$ de même longueur portés respectivement sur Ox , Oy , Oz . On a évidemment

$$(13) \quad \vec{\omega}_1 = [\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_3]; \quad \vec{\omega}_2 = [\vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_1]; \quad \vec{\omega}_3 = [\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2].$$

Désignons par $(\omega_1 \omega_2)_{op}$ l'opération qui consiste à appliquer à un point P d'abord la rotation $\vec{\omega}_2$, puis la rotation $\vec{\omega}_1$ et par $(\omega_2 \omega_1)_{op}$ l'opération qui fait subir à P d'abord la rotation $\vec{\omega}_1$, puis la rotation $\vec{\omega}_2$. L'opération $(\omega_1 \omega_2)_{op}$ conduit du point P initial au point P_1 tel que

$$(14) \quad \vec{r}_1 = \vec{r} + [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}] + [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}] + [\vec{\omega}_1 \times [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}]],$$

et l'opération $(\omega_2 \omega_1)_{op}$ conduit de P à P_2 tel que

$$(15) \quad \vec{r}_2 = \vec{r} + [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}] + [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}] + [\vec{\omega}_2 \times [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}]].$$

Les deux opérations ne sont donc pas équivalentes rigoureusement et ne donnent pas le même résultat : les rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ ne sont pas commutables. La différence des résultats correspondant au symbole $(\omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1)_{op}$ est donnée par

$$(16) \quad \begin{aligned} \vec{r}_1 - \vec{r}_2 &= [\vec{\omega}_1 \times [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}]] - [\vec{\omega}_2 \times [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}]] \\ &= [\vec{\omega}_1 \times [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}]] + [\vec{\omega}_2 \times [\vec{r} \times \vec{\omega}_1]]. \end{aligned}$$

Or, d'une façon générale, on a entre trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ la relation facile à vérifier

$$(17) \quad [\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] + [\vec{B} \times [\vec{C} \times \vec{A}]] + [\vec{C} \times [\vec{A} \times \vec{B}]] = 0.$$

En appliquant cette formule aux vecteurs $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ et $\vec{r}$, il vient

$$(18) \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -[\vec{r} \times [\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2]] = [[\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2] \times \vec{r}] = [\vec{\omega}_3 \times \vec{r}].$$

Nous en concluons que l'opération $(\omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1)_{op}$ est équivalente à la rotation $\xrightarrow{\omega_3}$, ce que nous écrivons en opérateurs

$$(19) \quad [\omega_1, \omega_2] = \omega_3.$$

Cette relation est bien celle qui correspond à la première relation (7), car m_k est égal à $i \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$ et, comme une rotation dans un certain sens autour de Oz correspond à un déplacement en sens inverse des valeurs du Ψ , le symbole $i \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$ correspond au symbole $-i(\omega_k)_{op}$.

On trouve des correspondances analogues par permutation circulaire de x, y, z . Ainsi les formules de non-commutation (7) se trouvent rattachées à la non-commutation des opérations de rotation dans l'espace.

3. Résultats généraux sur les valeurs propres des opérateurs satisfaisant aux relations (7). — Nous voulons maintenant effectuer l'étude générale des valeurs propres de trois opérateurs linéaires et hermitiens m_x, m_y, m_z au sujet desquels nous supposons seulement qu'ils satisfassent aux relations de non-commutation (7) sans supposer qu'ils aient précisément les formes (6). Nous chercherons à établir le rapport de ces valeurs propres avec celles de l'opérateur

$$(20) \quad m^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2.$$

Les valeurs propres de tous ces opérateurs sont réelles puisqu'ils sont hermitiens. Les valeurs propres de m_x^2, m_y^2 et m_z^2 sont donc positives ou nulles puisqu'elles sont les carrés des valeurs propres de m_x, m_y et m_z ⁽¹⁾. Les valeurs moyennes de m_x^2, m_y^2, m_z^2 sont donc nécessairement positives ou nulles, et il en est de même de celles de m^2 . De là, on conclut que les valeurs propres de m^2 sont positives ou nulles, sans quoi, pour un état propre de m^2 correspondant à une valeur propre négative de m^2 , la valeur moyenne de m^2 serait négative, ce qui est impossible.

Par raison de symétrie, les valeurs propres de m_x, m_y, m_z sont les mêmes et nous savons que m^2 commute avec m_x, m_y, m_z . Comme m_x et m_y sont hermitiens, en aucun cas la valeur moyenne de m_z^2 ne peut pas être supérieure à m^2 . Donc, les valeurs propres de m_z^2 sont inférieures ou au plus égales aux valeurs correspondantes de m^2 . Autrement dit, les valeurs propres de m_z ne peuvent être ni supérieures à m , ni inférieures à $-m$.

(1) Voir note (2), p. 13.

Ceci dit, on vérifie aisément la relation

$$(21) \quad (m_x - im_y) m_z - m_z (m_x - im_y) = -(m_x - im_y)$$

d'où

$$(22) \quad (m_x - im_y) m_z = (m_z - 1)(m_x - im_y).$$

Soient γ_i et φ_i les valeurs et fonctions propres de m_z . Nous allons nous servir des φ_i comme système de base pour construire toutes les matrices dont nous allons faire usage. A un opérateur A, correspondent alors les éléments de matrice A_{ik}^z que nous écrirons simplement A_{ik} .

A l'équation (22) entre opérateurs, correspondra entre éléments de matrice l'équation

$$(23) \quad \sum_k (m_x - im_y)_{ik} (m_z)_{kj} = \sum_k (m_z - 1)_{ik} (m_x - im_y)_{kj}$$

qui, avec le système de base choisi, devient

$$(24) \quad (m_x - im_y)_{ij} \gamma_j = (\gamma_i - 1)(m_x - im_y)_{ij}.$$

Pour que (24) soit vérifiée, il faut avoir

$$\text{soit } \gamma_j = \gamma_i - 1, \quad \text{soit } (m_x - im_y)_{ij} = 0.$$

Maintenant, pour un γ_k , valeur propre quelconque de m_z , on a

$$(25) \quad [(m_x - im_y)(m_x + im_y)]_{kk} = \sum_l (m_x - im_y)_{kl} (m_x + im_y)_{lk},$$

où dans la somme du second membre, tous les termes sont nuls sauf peut-être, s'il existe, celui où $\gamma_l = \gamma_k - 1$. Donc, si $\gamma_k - 1$ n'est pas valeur propre de m_z , tous les termes de la somme seront nuls et l'on aura

$$(26) \quad [(m_x - im_y)(m_x + im_y)]_{kk} = 0.$$

Or, on a aussi

$$(27) \quad (m_x - im_y)(m_x + im_y) = m_x^2 + m_y^2 + i[m_x, m_y] = m_x^2 + m_y^2 + m_z \\ = m^2 - m_z^2 + m_z = m^2 + \frac{1}{4} - \left(m_z - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Si $\gamma_k - 1$ n'est pas valeur propre de m_z , on a donc

$$(28) \quad \left[m^2 + \frac{1}{4} - \left(m_z - \frac{1}{2}\right)^2 \right]_{kk} = m^2 + \frac{1}{4} - \left(\gamma_k - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

d'où

$$(29) \quad \gamma_k = \frac{1}{2} \pm \Theta \quad \text{avec} \quad \Theta = \sqrt{m^2 + \frac{1}{4}}.$$

Bref, si γ_k est une valeur propre de m_z , γ_{k-1} , γ_{k-2} , ... le seront aussi jusqu'à ce qu'on arrive à une valeur propre égale à $\frac{1}{2} \pm \Theta$. On aura ainsi une suite décroissante de valeurs propres qui sera nécessairement bornée inférieurement puisque toutes les valeurs propres de m_z sont supérieures à $-m$. Le dernier terme de cette suite sera $\frac{1}{2} + \Theta$ ou $\frac{1}{2} - \Theta$. Mais, comme toute valeur propre de m_z est inférieure à m et que Θ est supérieur à m , ce dernier terme sera forcément $\frac{1}{2} - \Theta$. La suite sera donc

$$\gamma_k, \gamma_{k-1}, \gamma_{k-2}, \dots, -\Theta + \frac{1}{2}.$$

En raisonnant sur $(m_x + im_y)(m_x - im_y)$ comme nous venons de le faire sur $(m_x - im_y)(m_x + im_y)$, on trouverait de même que, si γ_k est valeur propre de m_z , γ_{k+1} l'est aussi sauf si $\gamma = -\frac{1}{2} \pm \Theta$. On en conclut comme plus haut qu'on a la suite croissante de valeurs propres

$$\gamma_k, \gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}, \dots, \Theta - \frac{1}{2}.$$

La suite complète des valeurs propres est donc

$$-\Theta + \frac{1}{2}, -\Theta + \frac{3}{2}, \dots, \Theta - \frac{3}{2}, \Theta - \frac{1}{2},$$

et il faut par suite que $\Theta - \frac{1}{2} - \left(-\Theta + \frac{1}{2}\right) = 2\Theta$ soit entier, c'est-à-dire que l'on ait

$$(30) \quad \text{soit} \quad \Theta = n, \quad \text{soit} \quad \Theta = \frac{2n+1}{2}$$

avec n entier.

La valeur correspondante de m^2 est $\Theta^2 - \frac{1}{4}$ d'après (29). Si donc nous posons par définition

$$(31) \quad \Theta = j + \frac{1}{2}$$

alors j sera soit un entier positif ou nul (0, 1, 2, ...), soit un demi-entier

positif $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right)$, car m^2 doit être positif ou nul. Comme alors $\theta^2 - \frac{1}{4} = j(j+1)$, on voit que les valeurs propres possibles de m^2 seront de la forme $j(j+1)$ avec soit $j = 0, 1, 2, \dots$, soit $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ et pour une même valeur donnée de m^2 , m_z a les $2j+1$ valeurs propres possibles

$$-j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

En résumé, l'opérateur m^2 a les valeurs propres $j(j+1)$ avec $j = 0, 1, \dots$ ou $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$; pour une valeur donnée de j , chacun des opérateurs m_x, m_y, m_z a les $2j+1$ valeurs possibles $-j, -j+1, \dots, j-1, j$.

Telles sont les conclusions que nous pouvons tirer du seul fait que m_x, m_y et m_z satisfont aux relations de non-commutation (7). ■

Si l'on applique ces résultats généraux au moment cinétique orbital défini par les équations (5) et (6), on voit que l'opérateur M^2 a bien pour valeurs propres $l(l+1) \frac{h^2}{4\pi^2}$ avec $l = 0, 1, 2, \dots$ et que pour l donné, chacun des opérateurs M_x, M_y, M_z a bien les $(2l+1)$ valeurs propres $= -l \frac{h}{2\pi}, -(l-1) \frac{h}{2\pi}, \dots, (l-1) \frac{h}{2\pi}, l \frac{h}{2\pi}$, mais ici le nombre l ne peut pas prendre les valeurs demi-entières $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$. Ceci vient de ce qu'ici m_x, m_y, m_z doivent satisfaire non seulement aux relations de non-commutation (7), mais aussi aux définitions (6) plus restrictives. Si donc l'on considère les relations de non-commutation (liées, nous l'avons vu, au groupe des rotations) comme ce qui est le plus essentiel dans la théorie des moments cinétiques, on peut penser que, si les moments cinétiques orbitaux ne font intervenir que les valeurs entières du nombre j de la théorie générale, d'autres formes de moments cinétique pourraient faire intervenir les valeurs demi-entières. C'est le cas qui se présente dans la théorie du spin.

4. Le spin des particules. — Pendant longtemps, on a considéré que les particules matérielles étaient caractérisées entièrement par deux constantes : leur masse (ou plus exactement en théorie relativiste leur masse propre) et leur charge électrique. Mais l'existence de divers phénomènes (effets Zeeman anormaux, structure fine de certaines raies, etc.), impossibles à interpréter par les théories quantiques de l'atome, même en employant la Mécanique ondulatoire, a montré la nécessité

d'attribuer aux électrons, en dehors de leur masse propre et de leur charge, une troisième caractéristique essentielle : leur *spin* ⁽¹⁾.

Si l'on reste dans le cadre des images classiques, le spin de l'électron peut se représenter par une rotation du corpuscule « électron » supposé sphérique autour d'un de ses diamètres : cette rotation a pour conséquence l'existence d'un moment cinétique propre auquel nous réserverons le nom de spin et, puisque le corpuscule « électron » est chargé, celle d'un moment magnétique propre. Pour interpréter les faits expérimentaux, il est nécessaire d'attribuer au moment cinétique propre de l'électron la valeur $\pm \frac{h}{4\pi}$ et à son moment magnétique propre la valeur $\frac{eh}{4\pi m_0 c}$ égale à un magnéton de Bohr (hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit). On voit donc que pour le spin on est amené à faire usage de la possibilité, prévue par la théorie générale du paragraphe précédent, d'attribuer au moment cinétique une valeur égale à un nombre demi-entier de fois l'unité $\frac{h}{2\pi}$ (en l'espèce $\frac{1}{2}$ fois).

Par généralisation de ce qui vaut pour l'électron, il semble bien qu'il y ait lieu aujourd'hui d'attribuer un spin à toute particule. Au point de vue classique, ce moment cinétique propre devrait être représenté par un vecteur $\vec{S}$ de composantes rectangulaires S_x, S_y, S_z dont le carré de la longueur est donné par $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$. Au point de vue quantique, nous devons remplacer les grandeurs classiques S_x, S_y et S_z par des opérateurs, mais *a priori* nous ne connaissons pas la forme explicite de ces opérateurs, car nous ne connaissons plus, comme c'était le cas pour le moment cinétique orbital, des expressions classiques susceptibles de guider notre choix. Ce que cependant nous pouvons admettre, c'est que le spin, ayant la nature d'un moment cinétique, doit être relié au groupe des rotations spatiales de la même manière que le moment cinétique orbital. Mettant en évidence l'unité quantique $\frac{h}{2\pi}$ de moment cinétique, nous écrirons d'abord

$$(32) \quad (S_x)_{op} = \frac{h}{2\pi} s_x, \quad (S_y)_{op} = \frac{h}{2\pi} s_y, \quad (S_z)_{op} = \frac{h}{2\pi} s_z$$

et nous admettrons que les opérateurs s_x, s_y et s_z satisfont aux relations de non-commutation

$$(33) \quad [s_x, s_y] = -is_z; \quad [s_y, s_z] = -is_x; \quad [s_z, s_x] = -is_y$$

⁽¹⁾ Voir, à ce sujet, Louis DE BROGLIE, *l'Électron magnétique*, Hermann, Paris, 1934.

correspondant aux relations (7) et exprimant les relations du spin avec le groupe des rotations spatiales. Enfin, à la place de la grandeur classique S^2 , nous introduirons « l'opérateur du spin total »

$$(34) \quad (S^2)_{op} = \frac{h^2}{4\pi^2} \mathbf{s}^2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{s}^2 = \mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2 + \mathbf{s}_z^2.$$

Dans ces conditions, il résulte de la démonstration générale donnée au paragraphe précédent que les valeurs propres possibles de S^2 sont de la forme $s(s+1) \frac{h^2}{4\pi^2}$ avec soit $s = 0, 1, 2, \dots$, soit $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ et que, pour une valeur donnée de s , chacun des opérateurs S_x , S_y et S_z a les $(2s+1)$ valeurs possibles

$$-s \frac{h}{2\pi}, \quad -(s-1) \frac{h}{2\pi}, \quad \dots, \quad (s-1) \frac{h}{2\pi}, \quad s \frac{h}{2\pi}.$$

Pour l'électron, on devra prendre des opérateurs S_x , S_y et S_z tels que S^2 ait la valeur propre $\frac{3}{4} \frac{h^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \frac{h^2}{4\pi^2}$ correspondant à $s = \frac{1}{2}$; alors S_x , S_y , S_z ont les deux valeurs propres $\pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, ce qui représente bien le spin de l'électron. Nous verrons comment la théorie de Dirac a précisé la forme des opérateurs S_x , S_y , S_z .

En partant de l'électron de Dirac considéré comme type de corpuscule élémentaire, le procédé de la « fusion » des corpuscules élémentaires nous permettra de construire des particules ayant plusieurs « états » de spin total différent. Pour chacun de ses états, le nombre s aura une valeur bien déterminée qui, pour les particules obtenues par fusion d'un nombre pair $2n$ de constituants, pourra varier par unités de $s = 0$ à $s = n$ et qui, pour les particules obtenues par fusion d'un nombre impair $2n+1$ de constituants, peut varier par unités de $s = \frac{1}{2}$ à $s = \frac{2n+1}{2}$. Nous aurons à revenir longuement sur cette question.

CHAPITRE IV.

LES MOMENTS CINÉTIQUES PROPRES DU POINT DE VUE RELATIVISTE.

1. Généralités. — La théorie de l'électron de Dirac nous apprend, nous le verrons plus loin, qu'en Mécanique ondulatoire on doit introduire simultanément le spin et la relativité qui sont étroitement liés l'un à l'autre. Ceci nous amène donc à étudier comment se présente au point de vue relativiste la notion de moment cinétique. La question peut d'abord paraître simple : nous allons voir dans ce chapitre qu'elle l'est beaucoup moins qu'en apparence, notamment pour les moments cinétiques propres, donc pour les spins. La question est d'autant plus intéressante à étudier qu'il paraît régner certaines confusions à ce sujet dans la littérature.

Nous supposerons connus du lecteur les principes généraux et le formalisme de la Relativité restreinte. Cependant nous allons rappeler quelques points concernant le choix des variables. Au cours de cet exposé, nous emploierons en effet tantôt les variables de Minkowski, tantôt les variables réelles d'espace-temps et, pour éviter toute confusion, nous allons préciser la forme et les propriétés de ces deux catégories de variables.

On peut repérer un *événement* qui, dans un système de référence galiléen, se produit en un certain point à un certain instant en se donnant les quatre coordonnées d'Univers (au sens de Minkowski) de cet événement. Ce sont

$$(1) \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$$

où la quatrième coordonnée est purement imaginaire. Avec ce choix des coordonnées la distance dans l'espace-temps de deux événements infiniment voisins est donnée en Relativité restreinte par ds tel que

$$(2) \quad ds^2 = \sum_i^4 dx_i^2.$$

Le ds^2 a donc une forme euclidienne et c'est ce qui constitue l'avantage de ces coordonnées. Il n'y a pas lieu alors de distinguer les composantes covariantes d'un tenseur de ses composantes contrevariantes et l'on aura

$$(3) \quad T_{ij\ldots}^{rst\ldots} = T_{ijk\ldots rst\ldots}.$$

A la place des variables de Minkowski, on peut aussi utiliser (comme cela est plus usuel en Relativité généralisée) les coordonnées *réelles* d'espace-temps définies par

$$(4) \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ct,$$

mais alors il faut adopter pour le ds^2 l'expression

$$(5) \quad ds^2 = dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

qu'on peut écrire avec une notation bien connue

$$(6) \quad ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k,$$

si l'on pose

$$(7) \quad g_{44} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0 \quad \text{si } i \neq k.$$

Le ds^2 n'ayant plus la forme Euclidienne, il faut alors distinguer les composantes covariantes des tenseurs de leurs composantes contrevariantes. On aura

$$(8) \quad T_{ij\ldots r\ldots}^{st\ldots} = \sum g_{ur} T_{ij\ldots}^{st\ldots u\ldots}.$$

Donc, d'après les valeurs (7), pour abaisser un indice 1, 2 ou 3, il faut simplement changer le signe de la composante tandis que pour abaisser l'indice 4 il n'y a aucun changement à faire

$$(9) \quad T_{ij\ldots r\ldots}^{st\ldots} = -T_{ij\ldots}^{st\ldots r\ldots} \quad \text{si } r = 1, 2, 3; \quad T_{ij\ldots r\ldots}^{st\ldots} = T_{ij\ldots}^{st\ldots r\ldots} \quad \text{si } r = 4.$$

Il est d'ailleurs aisé de passer des variables réelles d'espace-temps aux variables d'Univers ou inversement. Connaissant les composantes contrevariantes $T^{ij\ldots}$ d'un tenseur T quand on emploie les variables d'espace-temps, on obtient en effet ses composantes dans le système des variables d'Univers en multipliant respectivement chaque $T^{ij\ldots}$ par autant de fois le facteur $i = \sqrt{-1}$ que la suite $ij\ldots$ contient de fois le facteur 4.

Après ce bref rappel de notions relativistes, revenons au moment cinétique.

2. Représentation relativiste du moment cinétique orbital. — Considérons un corpuscule de masse propre m_0 . La suite de ses positions dans l'espace au cours du temps est représentée dans l'espace-temps, suivant les conceptions classiques, par une courbe continue, sa « ligne d'Univers ». Chaque élément ds de la ligne d'Univers se compose de composantes dx_i satisfait à la relation

$$(10) \quad ds = dx_4 \sqrt{1 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dx_4^2}} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Nous employons ici les variables réelles d'espace-temps; v désigne la vitesse du corpuscule dans le système de référence employé à l'instant t correspondant à l'élément ds . A chaque point de la ligne d'Univers, on peut donc attacher un quadrivecteur, la vitesse d'Univers, définie par ses composantes contrevariantes

$$(11) \quad w^i = \frac{dx^i}{ds}.$$

En multipliant par le scalaire invariant $m_0 c$, on définit les composantes d'un autre quadrivecteur, l'Impulsion d'Univers $\vec{p}$ du corpuscule, de composantes

$$(12) \quad p^i = m_0 c \frac{dx^i}{ds}.$$

Dans le système galiléen où le corpuscule a la vitesse $\vec{v}$, on aura explicitement

$$(13) \quad p^1 = p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots W = p^4 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

p_x, p_y, p_z étant les composantes de la quantité de mouvement du corpuscule et W son énergie.

Si maintenant nous formons les grandeurs

$$(14) \quad M^{ik} = x^i p^k - x^k p^i \quad i, k = 1, 2, 3, 4,$$

nous obtenons les composantes d'un tenseur antisymétrique de rang 2. Explicitement, on a

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} M^{23} = -M^{32} = y p_z - z p_y, & M^{14} = -M^{41} = x \frac{W}{c} - c t p_x, \\ M^{31} = -M^{13} = z p_x - x p_z, & M^{24} = -M^{42} = y \frac{W}{c} - c t p_y, \\ M^{12} = -M^{21} = x p_y - y p_x, & M^{34} = -M^{43} = z \frac{W}{c} - c t p_z. \end{array} \right.$$

Les trois premières composantes se comportent, pour une rotation des axes d'espace, comme les composantes d'un trivecteur : elles définissent le moment cinétique orbital du corpuscule *par rapport à l'origine des coordonnées*. Les trois dernières composantes qui, elles aussi, se transforment comme les composantes d'un vecteur pour un simple changement des axes d'espace, peuvent s'interpréter comme les composantes du moment barycentrique rapporté à la position initiale (à un facteur c près) ; en introduisant la masse en mouvement $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, on

a en effet pour un mouvement rectiligne et uniforme

$$(16) \quad \begin{cases} M^{14} = mc(x - v_x t) = mcx_0, & M^{24} = mc(y - v_y t) = mcy_0, \\ M^{34} = mc(z - v_z t) = mcz_0, \end{cases}$$

$x_0 y_0 z_0$ étant les coordonnées du corpuscule à l'instant $t = 0$.

Si l'on fait un changement de système de référence galiléen dans l'espace-temps, les M^{ik} se transforment comme les composantes d'un tenseur antisymétrique du second rang. Si, par exemple, on passe d'un système de référence $Oxyz$ à un autre système de référence $O'x'y'z'$ d'axes parallèles qui est un mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier avec la vitesse relative βc dans la direction Oz , de sorte que les coordonnées d'espace-temps subissent la transformation simple de Lorentz

$$(17) \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct' = \frac{ct - \beta z}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

les composantes M'^{ik} du tenseur M dans le second système s'expriment à l'aide des composantes M^{ik} du même tenseur dans le premier système par les formules classiques

$$(18) \quad \begin{cases} M'^{23} = \frac{M^{23} - \beta M^{14}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & M'^{31} = \frac{M^{31} + \beta M^{24}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & M'^{12} = M^{12}, \\ M'^{14} = \frac{M^{14} + \beta M^{23}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & M'^{24} = \frac{M^{24} - \beta M^{31}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & M'^{34} = M^{34}. \end{cases}$$

Le résultat que nous venons de rappeler a été souvent exprimé en disant qu'on doit toujours considérer tout moment cinétique comme défini par un tenseur antisymétrique de rang 2 ou tout au moins par les composantes d'espace d'un tel tenseur. A notre avis, cette manière de parler est un peu trompeuse. En effet, dans chaque système de référence, l'origine des coordonnées est un point arbitraire et le moment cinétique par rapport à ce point arbitraire n'a pas de signification

physique particulière. Ce qui a une signification physique intéressante, c'est le moment cinétique par rapport à un centre doué de propriétés physiques, par exemple par rapport à une particule source d'un champ de force central. Considérons par exemple un observateur qui voit passer devant lui avec la vitesse βc un atome d'hydrogène avec son noyau et son électron-planète : si cet observateur veut étudier la dynamique de cet atome, ce qui l'intéressera ce n'est pas le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine arbitraire des coordonnées qu'il emploie, c'est le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau, source du champ coulombien. Si l'on suppose le noyau animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, ce qui est approximativement vrai, il existe en Mécanique classique une relation entre les deux moments cinétiques fournie par l'un des théorèmes de Kœnig. Mais, en théorie relativiste, à cause de la forme plus compliquée de la composition des vitesses, il n'en est pas de même. Dans ce cas, il importe d'étudier comment l'observateur va pouvoir représenter par un vecteur d'espace dans son système de référence le moment cinétique de l'électron autour du noyau. Le résultat de cette étude est le suivant : le moment cinétique relatif de l'électron autour de son noyau est bien représenté pour chaque observateur galiléen par un vecteur d'espace, mais quand on change d'observateur galiléen, les composantes de ce moment cinétique ne se transforment pas comme les composantes d'espace d'un tenseur antisymétrique de rang deux. On voit donc que, même dans le cas d'une seule particule en mouvement (le noyau ne joue ici que le rôle d'un centre de force), la représentation du moment cinétique orbital par un tenseur antisymétrique de rang deux a, au point de vue physique, quelque chose de fallacieux.

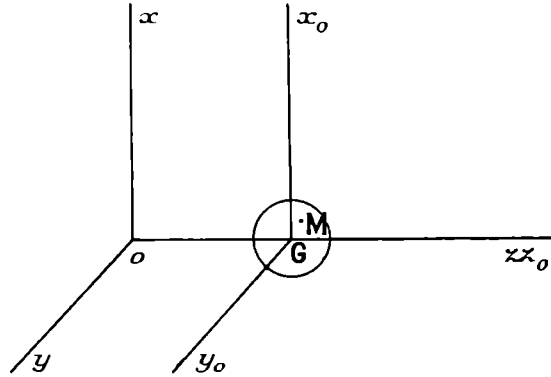
Nous retrouverons la même circonstance pour le moment cinétique *propre* d'une masse fluide, et nous devrons étudier ce cas à fond à cause de sa parenté avec celui du spin.

3. Étude du moment cinétique propre du point de vue relativiste. — Soit un observateur galiléen que nous appellerons l'observateur A : il emploie un système de référence cartésien $Oxyz$ et un temps t . Devant lui, passe un système formé d'une molécule M de masse propre m_0 tournant autour d'un centre G. Nous supposons que ce système est animé d'un mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme par rapport à l'observateur A, c'est-à-dire qu'il existe un référentiel cartésien $Gx_0y_0z_0$ dont le mouvement est rectiligne et uniforme par rapport à A et qui accompagne le système dans son mouvement. Nous nommerons

« moment cinétique propre » du système entraîné son moment cinétique par rapport au point G, *tel qu'il apparaît à l'observateur A.*

Pour préciser la définition de ce moment cinétique propre, plaçons-nous d'abord dans le système de référence $Gx_0y_0z_0$ que nous nommerons le système propre.

Fig. 2.



Nous supposons que les axes $Oxyz$ et $Gx_0y_0z_0$ sont parallèles et que le second référentiel est animé de la vitesse βc par rapport au premier dans le sens Oz , ce qui ne diminue aucunement la généralité. Alors, le moment cinétique du système sera défini dans le système propre $Gx_0y_0z_0$ par les composantes d'espace du tenseur antisymétrique de rang deux donné par

$$(21) \quad M_{(0)}^i{}^k = m_0 (x_{(0)}^i u_{(0)}^k - x_{(0)}^k u_{(0)}^i).$$

Explicitement, le moment cinétique sera donc représenté dans le système $Gx_0y_0z_0$ par un trivecteur $\vec{S}^{(0)}$ de composantes

$$(22) \quad S_x^{(0)} = M_{(0)}^{23} = m_0 \frac{y_0 v_z^{(0)} - z_0 v_y^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \dots,$$

Plaçons-nous maintenant avec l'observateur A dans le système $Oxyz$. Dans ce système, le tenseur antisymétrique M défini par (21) a pour composantes

$$(23) \quad \begin{cases} M^{23} = \frac{M_{(0)}^{23} - \beta M_{(0)}^{24}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & M^{31} = \frac{M_{(0)}^{31} + \beta M_{(0)}^{14}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & M^{12} = M_{(0)}^{12}, \\ M^{14} = \frac{M_{(0)}^{14} + \beta M_{(0)}^{31}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & M^{24} = \frac{M_{(0)}^{24} - \beta M_{(0)}^{23}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & M^{34} = M_{(0)}^{34}. \end{cases}$$

mais, si l'origine du temps est choisie de façon qu'au temps $t = 0$ le point G coïncide avec O, les composantes M^{21} , M^{31} et M^{12} représentent les composantes du moment cinétique orbital de la molécule par rapport au point O. Or, nous l'avons remarqué, ce moment cinétique par rapport à l'origine des coordonnées n'a pas d'intérêt physique : ce qui a un intérêt physique pour l'observateur A, c'est le moment cinétique de la molécule en mouvement par rapport au point central G, quantité qui sera pour A le moment cinétique *propre* du système entraîné. Comment l'observateur A va-t-il définir mathématiquement le vecteur d'espace qui représentera pour lui ce moment propre? Il imaginera par exemple des axes $G\xi\eta\zeta$ liés à G et parallèles à $Oxyz$. Ces axes, je les appelle $G\xi\eta\zeta$ bien qu'ils coïncident avec $Gx_0y_0z_0$ pour rappeler que, du moins pour l'axe $G\xi$, les longueurs évaluées par A le long de ces axes ne coïncident pas, en raison de la contraction de Lorentz, avec les longueurs évaluées dans le système propre. Les coordonnées ξ, η, ζ , de la molécule de coordonnées xyz sont pour l'observateur A

$$(24) \quad \xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z - \beta ct.$$

De plus, les composantes de la quantité de mouvement de la molécule de masse propre m_0 , dans la mesure où ces composantes *proviennent du mouvement de rotation autour de G*, sont données par

$$(25) \quad p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_z = m_0 \frac{v_z - \beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

En effet, $m_0 \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ représente pour la molécule dont la vitesse

totale est v la partie de la composante z de l'impulsion qui est due à la vitesse d'ensemble βc . Le vecteur d'espace qui représentera pour l'observateur A le moment cinétique propre sera donc défini par les formules

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_x = m_0 \left[y \frac{v_z - \beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - (z - \beta ct) \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right], \\ S_y = m_0 \left[(z - \beta ct) \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - x \frac{v_z - \beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right], \\ S_z = m_0 \left[x \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - y \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]. \end{array} \right.$$

En comparant avec les expressions (22), on voit tout d'abord que, si l'observateur A était lié au système entraîné, il trouverait (ce qui est évident *a priori*) pour vecteur $\vec{S}$ le vecteur $\vec{S}^{(0)}$ défini par (22), car on aurait alors $\beta = 0$, $x = x_0$, ..., $v_z = v_z^{(0)}$. D'autre part, on a les formules de transformation

$$(27) \quad y = y_0, \quad x = x_0, \quad z - \beta ct = z_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

et, des formules de composition des vitesses

$$(28) \quad v_x = \frac{v_x^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{\beta}{c} v_z^{(0)}}; \quad v_y = \frac{v_y^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{\beta}{c} v_z^{(0)}}; \quad v_z = \frac{v_z^{(0)} + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c} v_z^{(0)}},$$

on tire d'abord

$$(29) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \cdot \frac{1 + \frac{\beta}{c} v_z^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

puis

$$(30) \quad \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}; \quad \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}};$$

$$\frac{v_z - \beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_z^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}.$$

De là, on tire aisément, en comparant les expressions (26) et (22),

$$(31) \quad S_x = S_x^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}; \quad S_y = S_y^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}; \quad S_z = S_z^{(0)}.$$

Or, ces formules de transformation sont tout à fait différentes de celles des composantes d'espace d'un tenseur antisymétrique de rang deux. Ainsi, par exemple, si l'on fait tendre β vers 1, le vecteur d'espace dont les composantes sont M^{23} , M^{31} et M^{12} tend, d'après (23), à se placer perpendiculairement à Oz , tandis que $\vec{S}$ tend à se placer le long de Oz . On peut bien, pour un observateur A donné, trouver un tenseur antisymétrique qui ait pour composantes d'espace S_x , S_y , S_z dans le système $Oxyz$ et $S_x^{(0)}$, $S_y^{(0)}$ et $S_z^{(0)}$ dans le système $Gx_0y_0z_0$: il suffit, en effet, pour cela de définir ce tenseur par les équations

$$(32) \quad \begin{cases} S^{23} = S_x, & S^{31} = S_y, & S^{12} = S_z, \\ S^{14} = 0, & S^{24} = 0, & S^{34} = 0, \end{cases}$$

ce qui donnera bien

$$(33) \quad S_{(0)}^{23} = S_x^{(0)}, \quad S_{(0)}^{31} = S_y^{(0)}, \quad S_{(0)}^{12} = S_z^{(0)}.$$

Mais, et ceci est essentiel, le tenseur S ainsi défini change quand on passe d'un observateur A à un autre A' qui est en mouvement relatif par rapport à A . Pour le voir, il suffit de remarquer que, s'il y avait un seul tenseur S , ce tenseur devrait d'après (32) avoir ces composantes S^{i4} nulles dans tous les systèmes galiléens, ce qui est impossible. Nous retrouverons plus loin la même conclusion par une voie différente.

Finalement, nous avons pu définir pour chaque observateur Galiléen un vecteur $\vec{S}$ d'espace définissant le moment cinétique propre du système considéré, mais nous n'avons pas pu rattacher ce vecteur d'espace d'une façon unique à un être mathématique à caractère tensoriel dans l'espace-temps.

Cherchons maintenant ⁽¹⁾ à définir dans tout référentiel galiléen une densité de moment cinétique propre telle que l'on ait

$$(34) \quad \vec{S} = \int_0 \vec{\sigma} d\tau.$$

Dans le système propre, nous aurons alors

$$(35) \quad S_x^{(0)} = \int_{n_0} \sigma_x^{(0)} d\tau_0, \quad S_y^{(0)} = \int_{n_0} \sigma_y^{(0)} d\tau_0, \quad S_z^{(0)} = \int_{n_0} \sigma_z^{(0)} d\tau_0,$$

et nous supposons $\vec{\sigma}^{(0)}$ indépendant de t_0 .

Si l'on veut effectuer les intégrations en se servant des variables xyz , on devra remplacer $d\tau_0$ par $\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$ à cause de la contraction de Lorentz et l'on trouvera

$$(36) \quad S_x^{(0)} = \frac{S_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \int_0 \frac{\sigma_x^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\tau; \quad S_y^{(0)} = \frac{S_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \int_0 \frac{\sigma_y^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\tau, \\ S_z^{(0)} = S_z = \int_0 \frac{\sigma_z^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\tau,$$

d'où l'on tirera

$$(37) \quad \sigma_x = \sigma_x^{(0)}; \quad \sigma_y = \sigma_y^{(0)}; \quad \sigma_z = \frac{\sigma_z^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Les quantités σ_x , σ_y , σ_z se transforment donc comme les trois composantes rectangulaires d'espace d'un quadrivecteur $\vec{\Sigma}$ dont la 4^e compo-

(1) Cette tentative est conforme à l'esprit de la Mécanique ondulatoire qui cherche toujours à associer à toute particule des grandeurs de champ à caractère continu.

sante $\sigma_4^{(0)}$ serait nulle dans le système propre. Pour β tendant vers 1, le vecteur $\vec{\sigma}$ se couche sur la direction du mouvement. Ainsi donc, tandis que le moment cinétique propre n'a pas de caractère tensoriel bien défini, on peut par contre définir d'une manière univoque une « densité de moment cinétique propre » à l'aide d'un quadri-vecteur $\vec{\Sigma}$ dont la composante de temps est nulle dans le système propre (ce qui paraît naturel du point de vue physique). Cette dernière condition nous permet d'ailleurs d'exprimer σ_4 en fonction du vecteur d'espace $\vec{\sigma}$ dans n'importe quel système de référence Galiléen. En effet, le produit scalaire d'espace-temps

$$(38) \quad (\vec{\Sigma}, \vec{ds}) = \sigma_4 c dt - \sigma_1 dx_1 - \sigma_2 dx_2 - \sigma_3 dx_3$$

est nul comme on le voit immédiatement en se plaçant dans le système propre : autrement dit le vecteur $\vec{\Sigma}$ est orthogonal dans l'espace-temps à la ligne d'Univers correspondante. On a donc dans tout système Galiléen

$$(39) \quad \sigma_4 = \frac{1}{c} (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}).$$

Les résultats précédents sont obtenus ainsi par une méthode à caractère physique. M. Olivier Costa de Beauregard a retrouvé les mêmes conclusions sous une forme plus générale par une étude récente, un peu plus abstraite, consacrée à la théorie relativiste des moments propres (¹). Nous allons résumer l'essentiel de ses résultats.

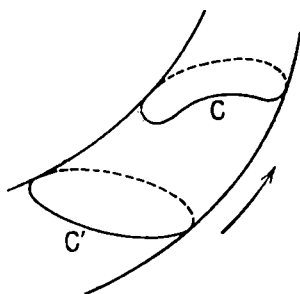
4. Théorie relativiste générale des moments cinétiques propres. — Considérons un fluide en mouvement. L'ensemble des lignes d'Univers de ses divers éléments forme un tube d'Univers occupant dans l'espace-temps un domaine à quatre dimensions allongé dans le sens du temps.

Nous coupons ce tube par des hypercloisons C, C' ... à trois dimensions qui sont des volumes au sens ordinaire du mot. M. Costa de Beauregard suppose que chaque élément du fluide transporte au cours du temps un moment cinétique propre et, pour préciser cette hypothèse, il cherche à définir en chaque point du tube d'Univers une densité de moment cinétique propre qui, intégrée sur une cloison C quelconque, donne un moment cinétique ou plus précisément un tenseur

(¹) Diplôme d'études supérieur.

antisymétrique du second rang dont les composantes d'espace définissent un moment cinétique. La cloison C étant à trois dimensions, un élément de cette cloison pourra être défini comme un parallélépipède construit sur trois petits vecteurs non coplanaires $\vec{ds}^I$, $\vec{ds}^{II}$, $\vec{ds}^{III}$ contenus dans cette multiplicité. Cet élément de volume peut, on le sait, être considéré

Fig. 3.



comme un vecteur (ou plus exactement un tenseur du troisième rang complètement antisymétrique) dont la composante d'indice i (c'est-à-dire la projection du volume sur l'hyperplan perpendiculaire à l'axe des x_i) est donnée par le déterminant

$$(40) \quad [dx_j, dx_k, dx_l] = \begin{vmatrix} dx_j^I & dx_k^I & dx_l^I \\ dx_j^{II} & dx_k^{II} & dx_l^{II} \\ dx_j^{III} & dx_k^{III} & dx_l^{III} \end{vmatrix}.$$

M. Costa de Beauregard montre alors qu'en adoptant des hypothèses très simples et physiquement très naturelles, le moment cinétique propre de la cloison C doit pouvoir s'écrire :

$$(41) \quad dS_{ij} = \sum_{k=1}^4 \sigma^k [dx_i, dx_j, dx_k],$$

où les quatre σ^k forment les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps (ou ce qui revient au même en Relativité restreinte les quatre composantes d'un tenseur complètement antisymétrique de rang 3). Ce quadrivecteur est la « densité de moment cinétique propre ».

En intégrant la quantité dS_{ij} sur toute la cloison C , on obtient la grandeur

$$(42) \quad S_{ij}^{(C)} = \int_C \sum_{k=1}^4 \sigma^k [dx_i, dx_j, dx_k].$$

Nous avons écrit $S_{ij}^{(C)}$, car nous ne savons pas encore si cette grandeur dépend ou ne dépend pas de la cloison C que nous avons choisie pour couper le tube d'Univers. C'est là la question que nous avons maintenant à examiner et pour cela, il est très intéressant de comparer les définitions précédentes à celles que l'on adopte usuellement en Relativité restreinte pour la charge et le courant électriques.

En Relativité, en effet, on définit le mouvement d'une distribution d'électricité par un quadrivecteur d'espace-temps $\vec{J}$ de composantes spatiales j_1, j_2 et j_3 égales aux composantes de la densité de courant et de 4^e composante égale à $c\rho$, c'est-à-dire égale à c fois la densité de charge électrique. Le mouvement d'ensemble de la distribution d'électricité au cours du temps sera représenté par un « tube d'Univers » formé par l'ensemble des lignes d'Univers correspondant aux divers éléments de la distribution. Sur les parois de ce tube, le quadrivecteur $\vec{J}$ est par définition toujours tangent à la paroi, ce qui exprime le fait physique que l'électricité ne traverse pas cette paroi. Nous pouvons encore couper le tube d'Univers par une cloison C à 3 dimensions (voir *fig. 3*).

Avec les mêmes notations que plus haut, nous définirons ici la grandeur

$$\begin{aligned}
 (43) \quad F_{(C)}(\vec{J}) &= \int_C ((\rho c)[dx_1, dx_2, dx_3] - j_1[dx_2, dx_3, dx_4] \\
 &\quad - j_2[dx_3, dx_4, dx_1] - j_3[dx_4, dx_1, dx_2]) \\
 &= \int_C \begin{vmatrix} dx_1^I & dx_2^I & dx_3^I & dx_4^I \\ dx_1^{II} & dx_2^{II} & dx_3^{II} & dx_4^{II} \\ dx_1^{III} & dx_2^{III} & dx_3^{III} & dx_4^{III} \\ j_1 & j_2 & j_3 & \rho c \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

La grandeur $F_{(C)}(\vec{J})$ est donc le flux du quadrivecteur $\vec{J}$ à travers l'hypersurface C . Cette grandeur a deux propriétés essentielles :

1° $F_{(C)}(\vec{J})$ est un invariant relativiste, c'est-à-dire que, pour une cloison C donnée, elle a la même valeur, quel que soit le système de référence utilisé pour l'évaluer. Cette propriété résulte du caractère tensoriel de $\vec{J}$ et des éléments d'hypersurface : elle est tout à fait indépendante de la conservation de l'électricité.

2° Si l'on considère deux cloisons différentes quelconques C et C' coupant le tube d'Univers, on a

$$(44) \quad F_{(C)}(\vec{J}) = F_{(C')}(\vec{J}).$$

Cette seconde propriété résulte de la conservation de l'électricité. En effet, le théorème flux-divergence appliqué dans l'espace-temps au domaine D compris à l'intérieur du tube d'Univers entre les cloisons C et C' donne, en tenant compte du sens positif choisi sur le tube :

$$(45) \quad F_{(C)}(\vec{J}) - F_{(C')}(\vec{J}) = \int_D \left(\frac{d\rho}{dt} + \text{div} \vec{j} \right) [dx_1, dx_2, dx_3, dx_4] \\ = \int_D \text{Div} \vec{J} [dx_1, dx_2, dx_3, dx_4]$$

où

$$(46) \quad \text{Div} \vec{J} = \frac{d\rho}{dt} + \text{div} \vec{j}$$

est la divergence quadri-dimensionnelle de J. Si l'on admet la conservation de l'électricité traduite par l'équation de continuité

$$(47) \quad \text{Div} \vec{J} = 0,$$

on a bien

$$(48) \quad F_{(C)}(\vec{J}) = F_{(C')}(\vec{J}).$$

Si le quadrivecteur $\vec{J}$ n'obéissait pas à l'équation de continuité (47), la première des propriétés de $F_{(C)}(\vec{J})$, son invariance, resterait vraie, mais la seconde, sa constance, ne le serait plus, et ceci met bien en évidence la différence entre l'invariance de la charge électrique représentée par l'intégrale (43) et sa conservation.

Finalement la quantité $F_{(C)}(\vec{J})$, qui a même valeur pour toutes les cloisons C coupant le tube d'Univers, est caractéristique de l'ensemble de ce tube : par définition, on la considère comme mesurant au facteur $\frac{1}{c}$ près la *charge électrique totale* de la distribution dont le tube d'Univers représente le mouvement. Pour voir que cette définition ramène bien à la notion usuelle de charge, il suffira de remarquer qu'un observateur considérera toujours une cloison C formée par des points de l'espace-temps qui, pour lui, sont simultanés et qu'il définira la charge électrique par l'intégrale

$$(49) \quad e = \int_V \rho \, dv,$$

V étant le volume qu'occupe la distribution d'électricité pour cet observateur à l'instant t de son temps propre où il fait l'intégration.

Après cette étude rapide de la définition relativiste de la charge électrique, revenons à la définition (42) du moment cinétique propre. Pour une valeur donnée des indices ij , il n'y a que deux termes non nuls dans la somme du second membre : de plus, l'antisymétrie de $S_{ij}^{(C)}$ est évidente. Mais, et ceci est essentiel, le tenseur antisymétrique du second rang ainsi défini dépend du choix de la cloison C .

C'est là une grande différence avec la quantité invariante $F_{(C)}(\vec{J})$ qui, en raison de la conservation de l'électricité, ne dépend pas du choix de la cloison C .

Physiquement, il est naturel (et nous verrons qu'il est même nécessaire dans la théorie quantique du spin) de définir dans chaque système de référence galiléen un tenseur S à l'aide d'une cloison C dont tous les points sont simultanés dans ce système de référence. Si le mouvement du fluide est un mouvement d'ensemble à caractère permanent, le tenseur ainsi défini pour un certain observateur galiléen restera constant au cours du temps, mais quand on passe de ce premier observateur à un second en mouvement relatif par rapport au premier, on passera d'une cloison C_1 à une cloison C_2 et par suite d'un tenseur S_1 à un tenseur S_2 . Les tenseurs S sont donc définis *relativement* à un observateur.

Pour chaque observateur, on aura

$$(50) \quad S_j = \int_C \sigma^k [dx_i, dx_j, dx_k] \quad \text{avec } i, j, k = 1, 2, 3;$$

$$S_{i4} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

C'est précisément un tenseur de ce type que nous avons rencontré au paragraphe précédent et dont nous avons défini les composantes par les formules (26) et (32).

Nous connaissons ainsi les composantes du tenseur S pour l'observateur auquel il correspond. Naturellement, un deuxième observateur peut en principe calculer les composantes $S_{ij}^{(1)}$ du tenseur $S^{(1)}$ du premier observateur, mais il ne s'y intéressera pas et emploiera les composantes du tenseur $S^{(2)}$ qui lui correspond à lui-même et dont les composantes S_{i4} sont nulles. Comme nous l'avons déjà noté au paragraphe précédent, le fait que, pour chaque observateur les composantes S_{ik} sont nulles montrent bien que les tenseurs S des observateurs galiléens ne coïncident pas, car un même tenseur antisymétrique

de rang 2 ne peut pas avoir ses trois composantes S_{ik} nulles dans tous les systèmes de référence galiléens.

Dans la théorie du spin, les remarques précédentes trouveront leur application. La propagation de l'onde Ψ de la particule à spin considérée (électron dans le cas le plus simple) définira un tube d'Univers dans l'espace-temps et nous serons amenés à considérer une « densité de spin » définie par un quadrivecteur dont les quatre composantes σ^i seront données par des formules du type

$$(51) \quad \sigma^i = \Psi^* (\sigma^i)_{op} \Psi,$$

où $(\sigma^i)_{op}$ sera un opérateur dont nous aurons à préciser la forme dans chaque cas. La définition (51) est conforme à la définition générale des densités en Mécanique ondulatoire. Suivant ces mêmes principes, on pourra calculer, pour chaque observateur, à chaque instant t de son temps propre, le tenseur S en intégrant sur la cloison C du tube d'Univers qui est formée par les points *simultanés* pour l'observateur envisagé correspondant au temps t . Si le mouvement de la particule est permanent, le tenseur S reste le même au cours du temps pour chaque observateur, mais même en ce cas le tenseur S change quand on change d'observateur. C'est là le point essentiel, car il en résulte que les *valeurs moyennes*

$$S_i = S_{jk} = \int_0 \sigma_i d\tau = \int_0 \Psi^* (\sigma_i)_{op} \Psi d\tau$$

(où ijk forment une permutation *paire* des indices 1, 2, 3) ne se transforment pas comme les composantes d'espace d'un tenseur antisymétrique de rang 2 quand on passe d'un observateur à un autre en mouvement relatif par rapport au premier. Cette circonstance, qui semble avoir été souvent méconnue, doit rendre très prudent quand on veut assimiler le spin à un tenseur antisymétrique d'espace-temps.

En réalité, quand on s'occupe des variances relativistes, il paraît préférable de considérer uniquement la « densité de spin » qui, elle, a toujours un caractère tensoriel tout à fait bien défini puisque les quatre σ^i se transforment toujours comme les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps. Le spin intégral doit plutôt être envisagé comme un vecteur d'espace bien défini dans chaque système de référence que comme un tenseur. Pourtant, nous le verrons, c'est ce vecteur sans caractère tensoriel d'espace-temps qui a un sens physique dans la théorie quantique. C'est là un exemple des oppositions assez fréquentes qui se présentent entre les idées quantiques et les idées relativistes.

5. Remarque sur l'aspect relativiste des moments magnétiques propres. — Nous avons vu que la théorie des particules à spin dote ces particules non seulement d'un moment cinétique propre, mais aussi d'un moment magnétique propre. L'examen de ce moment magnétique propre conduit à des conclusions qui sont assez analogues à celles des paragraphes précédents. Ce n'est pas le moment magnétique lui-même, c'est la densité de moment magnétique (intensité d'aimantation) qui a une variance tensorielle bien déterminée. Plus exactement, on ne peut séparer l'étude relativiste du moment magnétique propre de celle du moment électrique propre, les deux notions étant du point de vue relativiste aussi liées l'une à l'autre que celles de champ électrique et de champ magnétique. De même qu'en Électromagnétisme relativiste les six composantes du champ électrique et du champ magnétique s'unissent pour former un tenseur antisymétrique de rang deux, les *densités* de moment électrique et de moment magnétique s'unissent pour former un autre tenseur antisymétrique de second rang. Soient $\vec{M}$ le vecteur d'espace « moment magnétique » et $\vec{P}$ le vecteur d'espace « moment électrique », les densités $\vec{\mu}$ et $\vec{\pi}$ correspondantes sont par définition telles que l'on ait

$$(52) \quad M_i = \int_0 \mu_i d\tau, \quad P_i = \int_0 \pi_i d\tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

En posant

$$(53) \quad \begin{cases} m_{23} = -m_{32} = \mu_x, & m_{31} = -m_{13} = \mu_y, & m_{12} = -m_{21} = \mu_z, \\ m_{14} = -m_{41} = \pi_x, & m_{24} = -m_{42} = \pi_y, & m_{34} = -m_{43} = \pi_z, \end{cases}$$

on définit un tenseur m antisymétrique de rang 2. D'après les formules de transformation des tenseurs de cette espèce, on voit que si, par exemple, le moment électrique d'un corps dans un certain système galiléen où il est au repos se trouve être nul sans que son moment magnétique le soit, dans un autre système de référence en mouvement par rapport au premier, le corps possédera à la fois un moment magnétique et un moment électrique : on peut dire qu'en passant du premier au deuxième système, on voit le corps, qui dans son système propre était magnétique sans être polarisé électriquement, devenir polarisé électriquement par suite de son mouvement. C'est là précisément ce qui se passe pour l'électron. Envisagé dans un système où il est au repos, l'électron a un moment magnétique propre, mais pas de moment électrique propre : envisagé dans un système où il est en mouvement, il a à la fois un moment magnétique propre et un moment électrique propre.

Il est facile de trouver l'expression du vecteur $\vec{\pi}$ en fonction du vecteur $\vec{\mu}$ pour une particule à moment magnétique propre en mouvement uniforme. En effet, dans le système propre de la particule, nous aurons par hypothèse

$$(54) \quad \vec{\pi}^{(0)} = 0.$$

Or, le tenseur m étant antisymétrique, on a

$$(55) \quad \sum_{i=1}^3 m_{il} dx_l - m_{is} dx_s = 0,$$

comme on le voit aisément en écrivant cette équation dans le système propre. Si l'on fait dans l'équation (55) $i = 1, 2$ ou 3 , on trouve

$$(56) \quad m_{ij} dx_j + m_{ik} dx_k = m_{is} c dt,$$

où i, j, k forment une permutation paire des indices $1, 2, 3$. Tenant compte des valeurs (53) des m_{ij} , on trouve donc

$$(57) \quad \vec{\pi} = \frac{1}{c} [\vec{\mu} \times \vec{v}],$$

ce qui nous donne l'expression de $\vec{\pi}$ en fonction de celle de $\vec{\mu}$ dans tout système de référence.

De plus, si dans (55) on fait $i = 4$, on obtient

$$(58) \quad \left(\vec{\pi}, \vec{v} \right) = 0.$$

Le vecteur $\vec{\pi}$ engendré par le mouvement est donc toujours normal à la vitesse. Ces formules sont valables dans la théorie de l'électron de Dirac, et plus généralement dans celles de toutes les particules à moment magnétique propre.

CHAPITRE V.

LA THÉORIE DE L'ÉLECTRON A SPIN DE DIRAC ⁽¹⁾

(*Théorie de la particule de spin $\frac{1}{2}$*).

1. **Les équations d'ondes de l'électron à spin.** — M. Dirac a trouvé les équations fondamentales de sa théorie en cherchant à construire une Mécanique ondulatoire de l'électron qui soit relativiste et qui permette de conserver pour la densité de probabilité de présence une forme analogue à la forme définie positive $|\Psi|^2$ valable dans la Mécanique ondulatoire non relativiste primitive.

S'inspirant d'une tentative antérieure de M. Pauli, il a admis que la fonction d'onde Ψ de l'électron devait en réalité avoir plusieurs composantes Ψ_k et que la densité de probabilité de présence devait être définie positive, s'exprimait en fonction des Ψ_k par

$$(1) \quad \rho = \sum_k |\Psi_k|^2.$$

Pour que la probabilité totale de toutes les hypothèses possibles sur la position de l'électron soit égale à 1, il faut alors normer la fonction d'onde Ψ en posant

$$(2) \quad \int_D \sum_k |\Psi_k|^2 d\tau = 1,$$

où D est le domaine d'espace où l'électron peut se trouver. Mais cette condition n'est acceptable que, si une fois réalisée à un instant donné, elle reste ensuite réalisée en vertu des équations d'ondes. Or, M. Dirac a remarqué que, pour qu'il en soit ainsi, les équations satisfaites par les Ψ_k devaient être du premier ordre en t , puisqu'il faut que la seule

⁽¹⁾ On pourra compléter les indications contenues dans ce chapitre et dans le suivant en se reportant au livre *l'Électron magnétique* déjà cité.

donnée des Ψ_k à un instant initial suffise pour déterminer toute l'évolution ultérieure. La symétrie relativiste entre le temps et les coordonnées d'espace indique alors que l'on doit chercher pour les Ψ_k un système d'équations aux dérivées partielles qui soient du premier ordre par rapport aux quatre variables d'espace et de temps.

Parvenu à cette conclusion, M. Dirac a montré que l'on devait prendre au moins quatre fonctions Ψ_k , et il a admis qu'on devait se borner à quatre.

Or, au début du développement de la Mécanique ondulatoire, on avait déjà essayé de donner à l'équation d'ondes une forme relativiste. Pour cela, on était parti de la remarque qu'en Dynamique relativiste ancienne, l'énergie W d'un corpuscule est reliée, en l'absence de champ, aux composantes de son impulsion $\vec{p}$ et à sa masse propre m_0 par la formule

$$(3) \quad \frac{W^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2) = 0.$$

Remplaçant dans cette formule W par l'opérateur $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$ et chaque p_i par l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_i}$, on obtenait un opérateur et, en appliquant cet opérateur à la fonction d'onde Ψ et en égalant le résultat à zéro, on parvenait à l'équation

$$(4) \quad \square \Psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \Psi = 0, \quad \left(\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)$$

que l'on avait proposé de prendre comme équation de propagation de la Mécanique ondulatoire relativiste avec une fonction d'onde à une seule composante.

Cette tentative n'avait pas donné de résultats satisfaisants et les raisonnements de M. Dirac montraient qu'une telle équation du second ordre ne pouvait pas servir de base à une Mécanique ondulatoire cohérente de l'électron et qu'il fallait prendre quatre équations du premier ordre pour l'ensemble des quatre Ψ_k . Néanmoins, il était naturel de penser que, du moins en l'absence de champ extérieur, chacun des quatre Ψ_k devait obéir à l'équation du second ordre (4). Bref, M. Dirac a été amené à chercher pour les quatre Ψ_k quatre équations du premier ordre en x, y, z, t valables en l'absence de champ et entraînant alors pour chacun des Ψ_k la validité de l'équation (4).

Pour écrire ces équations du premier ordre, on est amené à employer quatre matrices hermitiennes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ à quatre lignes et quatre

colonnes et l'on définit le symbole $\alpha_i \Psi_k$ par la formule

$$(5) \quad \alpha_i \Psi_k = \sum_j (\alpha_i)_{kj} \Psi_j,$$

de sorte qu'appliquer l'opération α_i à Ψ_k revient à faire une certaine combinaison linéaire des quatre Ψ_j .

On impose aux quatre matrices α_i les conditions suivantes : 1° le carré de chacune d'elles doit être égal à la matrice unité; 2° deux matrices α_i et α_j différentes anticommulent. On peut résumer ces deux conditions par l'unique formule

$$(6) \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} \cdot 1.$$

Ces conditions ne suffisent d'ailleurs pas à déterminer complètement les matrices α_i , mais nous allons voir que l'indétermination qui subsiste sur les matrices α_i n'entraîne aucune indétermination dans les conséquences physiques de la théorie.

Les équations de Dirac s'écrivent symboliquement avec l'aide des matrices α_i satisfaisant à (6) et compte tenu de la convention (5)

$$(7) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 + \alpha_4 m_0 c \right) \right] \Psi_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

en posant $\alpha = \frac{2\pi i}{h}$.

Si l'on applique au premier membre de (7) l'opérateur

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 + \alpha_4 m_0 c \right) \right],$$

on vérifie aisément à l'aide de (6) que l'on trouve pour chacun des Ψ_k l'équation

$$(8) \quad \square \Psi_k + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \Psi_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Il nous reste à expliquer pourquoi le choix, arbitraire dans une large mesure, des matrices α_i n'entraîne pas une indétermination des conséquences physiques des équations (7). Pour cela, nous partirons du résultat suivant : on peut démontrer que si $\alpha_1 \dots \alpha_4$ et $\alpha'_1 \dots \alpha'_4$ sont deux ensembles de matrices hermitiennes satisfaisant chacun aux conditions (6), il est possible de trouver une matrice unitaire S à quatre lignes et quatre colonnes telle que l'on ait

$$(9) \quad \alpha'_i = S^{-1} \alpha_i S = S^+ \alpha_i S.$$

Autrement dit, on peut toujours passer des α_k aux α'_k par une transformation canonique qui conserve à la fois l'hermitianité et les relations de non-commutation (6). De l'équation de Dirac écrite avec les α'_k

$$(10) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha'_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha'_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha'_3 + \alpha'_4 m_0 c \right) \right] \Psi'_k = 0,$$

ou encore

$$(11) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} S^{-1} \alpha_1 S - \frac{\partial}{\partial y} S^{-1} \alpha_2 S - \frac{\partial}{\partial z} S^{-1} \alpha_3 S - \alpha_4 m_0 c S^{-1} S \right] \Psi'_k = 0,$$

on tire immédiatement, par multiplication en avant par S , que les quantités $S \Psi'_k$ sont solutions des équations de Dirac écrites avec les α_k . Ces quantités

$$(12) \quad \Psi_k = S \Psi'_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

sont des combinaisons linéaires des Ψ'_k . Donc, changer les α_i revient à opérer une transformation unitaire sur les Ψ_k . Or, les grandeurs ayant un sens physique que l'on rencontre en théorie de Dirac sont toutes,

nous le verrons, de la forme $\sum_k \Psi_k^* \cdot A \Psi_k$ ou $\int_D \sum_k \Psi_k^* \cdot A \Psi_k d\tau$, où A est

un opérateur linéaire et hermitien qui peut contenir les α_i ou leurs produits. Quand on passe d'un système de matrices α_i à un système de matrices α'_i (on dit alors qu'on passe de la représentation α_i à la représentation α'_i), l'opérateur A devient $A' = S^{-1} A S$ et la quantité

$\sum_k \Psi_k^* \cdot A \Psi_k$ devient en tenant compte de $S^{-1} = S^+$

$$(13) \quad \sum_k \Psi_k^* \cdot A \Psi_k = \sum_k S^+ \Psi_k'^* \cdot A S \Psi'_k = \sum_k \Psi_k'^* \cdot S^{-1} A S \Psi'_k = \sum_k \Psi_k'^* \cdot A' \Psi'_k.$$

Donc, les grandeurs ayant un sens physique gardent la même valeur quand on change de représentation. Grâce à cette circonstance, l'indétermination des α_i n'entraîne aucune indétermination dans les prévisions physiquement vérifiables de la théorie de Dirac, ce qui est évidemment nécessaire pour que cette indétermination des α_i soit acceptable.

Les équations de Dirac peuvent s'écrire sous la forme condensée

$$(14) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi,$$

H étant l'opérateur hamiltonien de l'électron de Dirac donné par

$$(15) \quad H = \frac{c}{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 + z_0 c \alpha_4 \right).$$

Dans le cas général où l'électron se meut dans un champ électromagnétique dérivant du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur $\vec{A}$, M. Dirac remplace les équations de propagation valables pour l'électron libre par les équations suivantes :

$$(16) \quad \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{e}{c} V \right) \Psi_k = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - z \frac{e}{c} A_x \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial}{\partial y} - z \frac{e}{c} A_y \right) \alpha_2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} - z \frac{e}{c} A_z \right) \alpha_3 + z m_0 c \alpha_4 \right] \Psi_k,$$

où la charge de l'électron est désignée par $-e$. Nous n'étudierons pas en détail cette équation dont nous aurons peu à nous servir dans cet exposé.

Profitant de l'indétermination des α_i , nous ferons généralement usage des matrices suivantes qui sont très commodes

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \alpha_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

Avec ce choix des α_i , les équations de Dirac s'écrivent

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_4 + \frac{\partial}{\partial z} \Psi_3 - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \Psi_1, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \Psi_4 - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \Psi_2, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \Psi_1 + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \Psi_3, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_1 - \frac{\partial}{\partial z} \Psi_2 + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \Psi_4. \end{array} \right.$$

Ces équations ont une forme très dissymétrique et font jouer un rôle particulier à l'axe des z . Pour comprendre l'origine de cette dissymétrie, il faut se rappeler que le rôle des fonctions d'onde est essentiellement

de permettre l'évaluation de certaines probabilités. Or, pour l'électron avec spin, les questions de probabilité doivent être posées relativement à un certain axe de référence : on peut, par exemple, se demander quelles sont les valeurs possibles de la composante du spin dans une direction de référence D et les probabilités de ces valeurs possibles. Notre choix (17) des α_i implique que la direction de référence D a été prise pour axe des z : les Ψ_k solutions des équations (18) donnent alors, nous le verrons plus loin, les probabilités des deux valeurs possibles $\pm \frac{h}{4\pi}$ pour la composante z du spin. Si l'on veut répondre à une question de probabilité posée par rapport à une direction de référence qui ne coïncide pas avec l'axe des z choisi initialement, il faudra d'abord faire un changement d'axes de référence amenant l'axe Oz dans la direction D , et ce sont les nouveaux Ψ'_k (qui, nous allons le voir au paragraphe suivant, sont des combinaisons linéaires des anciens Ψ_k) qui nous fourniront les probabilités cherchées.

2. Invariance relativiste des équations de Dirac. — M. Dirac a montré que, si l'on fait un changement du système de référence galiléen s'exprimant par une transformation de Lorentz pour les coordonnées, les équations de propagation gardent la même forme dans le nouveau système que dans l'ancien avec les mêmes valeurs des α_i , les composantes Ψ_k de la fonction d'onde subissant une transformation linéaire de la forme

$$(19) \quad \Psi'_k = \sum_l \Lambda_{kl} \Psi_l \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Les coefficients Λ_{kl} sont les éléments d'une matrice A à quatre lignes et quatre colonnes qui, dans le cas général, n'est ni hermitienne, ni unitaire. La matrice A dépend naturellement de la transformation de Lorentz qui est effectuée, mais il faut noter que la transformation des quatre Ψ_k n'est pas celle que subissent les composantes d'un quadrivecteur d'espace temps. L'être mathématique Ψ de la théorie de Dirac, bien qu'ayant quatre composantes, n'est donc pas un quadrivecteur : il appartient à une catégorie d'êtres mathématiques que l'on n'avait pas systématiquement étudiés en Physique avant la théorie de Dirac et que l'on étudie maintenant dans la théorie des spineurs. Pour trouver dans la Mécanique ondulatoire relativiste de Dirac des grandeurs se transformant lors d'une transformation de Lorentz comme les composantes d'un tenseur, il faut former certaines combinaisons bilinéaires des Ψ_k et des Ψ_k^* dont nous aurons à parler longuement plus loin.

Pour démontrer l'invariance des équations de Dirac, nous nous servirons dans ce paragraphe des variables d'Univers de Minkowski

$$(20) \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

et, par définition, nous poserons

$$(21) \quad P_j = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e}{c} A_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad P_4 = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_4} - \frac{e}{c} iV.$$

Nous écrirons alors les équations générales (16) de Dirac sous la forme symbolique

$$(22) \quad \left(\frac{P_4}{i} + \sum_j^3 P_j \alpha_j + m_0 c \alpha_4 \right) \Psi_k = 0,$$

d'où, après multiplication par $i\alpha_4$ en avant,

$$(23) \quad \left(\alpha_4 P_4 + \sum_j^3 i\alpha_4 \alpha_j P_j + im_0 c \right) \Psi_k = 0.$$

Nous remplacerons maintenant, avec von Neumann, les matrices α_i par des matrices γ_i définies par les équations

$$(24) \quad \gamma_1 = i\alpha_4 \alpha_1, \quad \gamma_2 = i\alpha_4 \alpha_2, \quad \gamma_3 = i\alpha_4 \alpha_3, \quad \gamma_4 = \alpha_4.$$

Il est facile de vérifier que l'on a encore comme pour les α_i

$$(25) \quad \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 \delta_{ij} \mathbf{1},$$

$\mathbf{1}$ étant la matrice unité. On vérifie aussi que les matrices γ_i sont hermitiennes. Avec ces notations nouvelles, l'équation de Dirac prend la forme condensée

$$(26) \quad \left(\sum_j^4 P_j \gamma_j + im_0 c \right) \Psi_k = 0$$

que nous écrirons symboliquement

$$(27) \quad \left(\sum_j^4 P_j \gamma_j + im_0 c \right) \Psi = 0.$$

Cette forme très élégante est en accord avec l'idée relativiste que les coordonnées d'espace et de temps doivent toujours jouer un rôle symétrique; elle a, par contre, l'inconvénient de mettre moins en évidence que l'équation en α_i le rôle particulier que joue le temps dans les théories quantiques.

Supposons maintenant que nous changions d'axes galiléens, les coordonnées d'espace-temps subissant alors une transformation générale de Lorentz. Il est bien connu en Relativité qu'une telle transformation de Lorentz équivaut à une rotation des axes dans l'Univers de Minkowski. Les nouvelles variables x'_i après la transformation seront donc reliées aux anciennes variables par les formules

$$(28) \quad x_i = \sum_j o_{ij} x'_j,$$

O étant une matrice à quatre lignes et quatre colonnes. En raison du caractère purement imaginaire de la variable x_4 d'Univers, O n'est pas une matrice réelle : ceux de ses éléments qui contiennent une fois l'indice 4 sont purement imaginaires. De plus, on a la relation d'orthogonalité

$$(29) \quad \sum_i^4 o_{ij} o_{ik} = \delta_{jk}.$$

Il est visible que les P_i se transforment comme les x_i , c'est-à-dire que

$$(30) \quad P_i = \sum_j^4 o_{ij} P'_j.$$

Après le changement d'axes, l'équation de Dirac s'écrira donc

$$(31) \quad \left(\sum_i^4 \gamma_i \sum_j^4 o_{ij} P'_j + im_0 c \right) \Psi = 0,$$

où les composantes Ψ_k du Ψ doivent être exprimées à l'aide des nouvelles variables x'_i . Si nous posons

$$(32) \quad \gamma'_j = \sum_i^4 o_{ij} \gamma_i,$$

nous pourrions encore écrire

$$(33) \quad \left(\sum_j^4 \gamma'_j P'_j + im_0 c \right) \Psi = 0.$$

L'équation (32) exprime les matrices γ'_j en fonction des matrices γ_i . Si l'on veut préciser son sens, on écrira

$$(34) \quad (\gamma'_j)_{mn} = \sum_i^4 o_{ij} (\gamma_i)_{mn},$$

où $(\gamma_i)_{mn}$ par exemple désigne l'élément mn de la matrice γ_i .

Comme l'on a

$$(35) \quad (\gamma'_i)_{mn}^* = \sum_1^4 o_{ij}^* (\gamma_i)_{mn}^* = \sum_1^4 o_{ij}^* (\gamma_i)_{nm} \neq (\gamma'_i)_{nm},$$

on voit que les γ'_i ne sont pas hermitiennes en général parce que les o_{ij} ne sont pas tous réels.

Par contre, il est facile de vérifier que l'on a

$$(36) \quad \begin{aligned} \gamma'_i \gamma'_j + \gamma'_j \gamma'_i &= \sum_{k,l} o_{ki} o_{lj} (\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k) = \sum_{k,l} o_{ki} o_{lj} \cdot 2 \delta_{kl} \cdot 1 \\ &= 2 \sum_k o_{ki} o_{kj} \cdot 1 = 2 \delta_{ij} \cdot 1. \end{aligned}$$

Si les γ'_k étaient hermitiennes, elles seraient reliées aux γ_i , d'après un résultat général énoncé au paragraphe précédent, par la formule

$$(37) \quad \gamma'_i = S^{-1} \gamma_i S,$$

où S serait une matrice unitaire. Il ne peut en être ainsi puisque les transformations canoniques conservent le caractère hermitien et que les γ'_i ne sont pas hermitiennes. Par contre, nous pouvons avoir une relation de la forme

$$(38) \quad \gamma'_i = \Lambda^{-1} \gamma_i \Lambda,$$

Λ étant matrice qui *n'est pas unitaire* en général ($\Lambda^+ \neq \Lambda^{-1}$). La relation (38) conservera en effet les relations de commutation (25) sans conserver le caractère hermitien.

Nous allons admettre pour l'instant l'existence de la relation (38), quitte à revenir plus loin sur sa démonstration. L'équation (33) pourra alors s'écrire

$$(39) \quad \left(\sum_1^4 \Lambda^{-1} \gamma_j \Lambda P'_j + im_0 c \right) \Psi = 0.$$

Multiplions en avant par Λ et remarquons que la matrice Λ correspondant à une opération effectuée sur les indices des Ψ_k permute avec P'_j . Nous obtenons

$$(40) \quad \left(\sum_1^4 \gamma_j P'_j + im_0 c \right) \Lambda \Psi = 0.$$

Il en résulte que la fonction $\Psi' = \Lambda \Psi$ de composantes $\Psi'_k = \sum_j \Lambda_{kj} \Psi_j$ est solution des équations de Dirac écrites dans le système des variables primées avec les mêmes matrices γ_j (ou α_j) que dans le système primitif. C'est bien là le résultat que nous voulions établir.

Mais il nous reste à démontrer la relation (38). Pour cela, nous remarquerons d'abord que la transformation (38) forme un groupe, car, si l'on a

$$(41) \quad \gamma'_i = \Lambda_1^{-1} \gamma_i \Lambda_1, \quad \gamma''_i = \Lambda_2^{-1} \gamma'_i \Lambda_2,$$

on a aussi

$$(42) \quad \gamma''_i = \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} \gamma_i \Lambda_1 \Lambda_2 = (\Lambda_1 \Lambda_2)^{-1} \gamma_i \Lambda_1 \Lambda_2.$$

On en conclut aisément que, si la formule est vraie pour une rotation infinitésimale des axes d'Univers, elle est encore vraie pour une rotation finie : il suffit donc de le démontrer pour une rotation infinitésimale. Or, pour une telle rotation, on pourra poser

$$(43) \quad o_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij},$$

les ε_{ij} étant des quantités très petites dont on pourra négliger les carrés et les produits. Pour que la condition d'orthogonalité (29) soit satisfaite, il faut alors que

$$(44) \quad \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}.$$

La matrice Λ est très peu différente de la matrice 1 et nous pourrions poser

$$(45) \quad \Lambda = 1 + \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} T^{kl} \quad (T^{kl} = -T^{lk}),$$

les ε étant très petits; d'où au second ordre près en ε

$$(46) \quad \Lambda^{-1} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} T^{kl}.$$

Les T^{kl} sont des matrices dont les éléments sont inconnus. Nous avons à démontrer que l'on peut choisir les T^{kl} de façon à avoir

$$(47) \quad \sum_j o_{ji} \gamma_j = \Lambda^{-1} \gamma_i \Lambda,$$

c'est-à-dire d'après (45), (46) et (43)

$$(48) \quad \gamma_i + \sum_j \varepsilon_{ji} \gamma_j = \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} T^{kl}\right) \gamma_i \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} T^{kl}\right) \\ = \gamma_i + \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} (\gamma_i T^{kl} - T^{kl} \gamma_i)$$

aux termes en ε^2 près, soit

$$(49) \quad \sum_j \varepsilon_{ji} \gamma_j = \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} (\gamma_i T^{kl} - T^{kl} \gamma_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On vérifie aisément que l'équation matricielle (49) admet comme solution

$$(50) \quad T^{kl} = -T^{lk} = -\frac{1}{2} \gamma_k \gamma_l.$$

Nous avons ainsi démontré l'existence de la matrice Λ pour la rotation infinitésimale des axes d'Univers considérée, et nous en avons trouvé l'expression. Il en résulte, nous l'avons dit, l'existence générale d'une matrice Λ pour une transformation quelconque de Lorentz. La démonstration de l'invariance relativiste des équations de Dirac se trouve ainsi achevée.

La matrice Λ n'est unitaire que si la transformation de Lorentz envisagée se réduit à une simple rotation des axes d'espace sans mouvement relatif. Pour un changement d'axes avec mouvement relatif, Λ n'est pas unitaire ⁽¹⁾ et il en résulte que

$$\sum_k \Psi_k^* \Psi_k = \sum_k (\Lambda \Psi_k)^* \Lambda \Psi_k = \sum_k \Psi_k^* \Lambda^{-1} \Lambda \Psi_k$$

n'est pas égal à $\sum_k \Psi_k^* \Psi_k$. La probabilité de présence n'est donc pas invariante pour une transformation de Lorentz avec mouvement relatif : nous verrons, en effet, qu'elle est la composante de temps d'un quadri-vecteur.

3. Le spin de l'électron en théorie de Dirac. — Ce qu'il y a de vraiment remarquable dans la théorie de Dirac, c'est que, partie d'un effort pour constituer une Mécanique ondulatoire relativiste de l'électron,

(1) On peut, en effet, démontrer que l'on a $\Lambda^{-1} = \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4$ et non $\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}$.

sans qu'il soit explicitement question de spin, elle s'est trouvée avoir *automatiquement* introduit l'existence du moment cinétique propre et du moment magnétique propre qui était réclamée par l'interprétation des faits expérimentaux.

En Mécanique ondulatoire non relativiste, nous avons trouvé le résultat suivant tout à fait analogue à un résultat de Mécanique classique : « Dans un champ de force central, les grandeurs composantes du moment cinétique orbital $\vec{M}$ correspondant aux opérateurs $(xp_y - yp_x)_{op}$, . . . , sont des intégrales premières ». Au contraire, en Mécanique ondulatoire de l'électron de Dirac, les composantes du moment cinétique orbital ne commutent pas avec l'hamiltonien et ne sont pas des intégrales premières. Pour obtenir des intégrales premières, c'est-à-dire des opérateurs qui commutent avec l'Hamiltonien H , on est conduit à ajouter respectivement à chacune des composantes du moment orbital des grandeurs nouvelles, les composantes du moment cinétique propre ou spin de l'électron, composantes définies à la manière quantique par les opérateurs

$$(51) \quad (S_x)_{op} = \frac{h}{4\pi} i \alpha_2 \alpha_3; \quad (S_y)_{op} = \frac{h}{4\pi} i \alpha_3 \alpha_1; \quad (S_z)_{op} = \frac{h}{4\pi} i \alpha_1 \alpha_2$$

dont les valeurs propres sont, on le vérifie aisément, $\pm \frac{h}{4\pi}$. C'est donc ici le vecteur $\vec{M} + \vec{S}$ qui, étant intégrale première dans un champ central, joue le rôle de moment cinétique total de l'électron : il est la somme du moment cinétique orbital et du spin. Chacune des composantes du spin $\vec{S}$ a bien les valeurs possibles $\pm \frac{h}{4\pi}$ prévues par l'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit.

Si nous écrivons l'opérateur $(\vec{S})_{op}$ sous la forme déjà employée

$$(52) \quad (\vec{S})_{op} = \frac{h}{2\pi} (\vec{s})_{op},$$

on voit qu'il faut poser pour le spin de l'électron

$$(53) \quad (\mathbf{s}_x)_{op} = \frac{1}{2} i \alpha_2 \alpha_3; \quad (\mathbf{s}_y)_{op} = \frac{1}{2} i \alpha_3 \alpha_1; \quad (\mathbf{s}_z)_{op} = \frac{1}{2} i \alpha_1 \alpha_2$$

et, avec ces définitions, on trouve les relations de non-commutation

$$(54) \quad [\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y] = -i \mathbf{s}_z, \quad [\mathbf{s}_y, \mathbf{s}_z] = -i \mathbf{s}_x, \quad [\mathbf{s}_z, \mathbf{s}_x] = -i \mathbf{s}_y.$$

Ce sont bien les relations exigées par la théorie quantique générale du

chapitre précédent, ce qui achève bien de montrer la cohérence de nos définitions.

L'opérateur $\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2 + \mathbf{s}_z^2$ correspondant est égal à

$$(55) \quad \mathbf{s}^2 = -\frac{1}{4} [(\alpha_1 \alpha_2)^2 + (\alpha_3 \alpha_1)^2 + (\alpha_2 \alpha_1)^2],$$

ce qui correspond à la valeur $s = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à la valeur propre

$$(56) \quad s(s+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

pour $\mathbf{s}^2$.

Nous avons vu qu'au moment cinétique propre de l'électron était associé un moment magnétique propre. Ce moment magnétique propre, la théorie de Dirac parvient aussi à le retrouver et voici sous quelle forme. En cherchant l'équation du second ordre qui remplace l'équation (4) dans le cas où il existe un champ électromagnétique extérieur, elle arrive à la conclusion que l'électron se comporte alors comme doué d'un moment magnétique propre $\vec{\mathcal{M}}$ et d'un moment électrique propre $\vec{\mathcal{E}}$. Cette conclusion est bien en accord avec les hypothèses d'Uhlenbeck et Goudsmit puisque l'électron possédant dans ces hypothèses un moment magnétique dans son système propre doit, par un effet de relativité, posséder aussi un moment électrique dans un système galiléen où il est en mouvement. Comme toujours en Mécanique ondulatoire, les composantes de $\vec{\mathcal{M}}$ et de $\vec{\mathcal{E}}$ doivent être définies par des opérateurs. Le raisonnement que nous allons développer plus loin conduit à poser

$$(57) \quad \begin{cases} (\mathcal{M}_x)_{op} = B i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4; & (\mathcal{M}_y)_{op} = B i \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4; & (\mathcal{M}_z)_{op} = B i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4; \\ (\mathcal{E}_x)_{op} = B i \alpha_1 \alpha_4; & (\mathcal{E}_y)_{op} = B i \alpha_2 \alpha_4; & (\mathcal{E}_z)_{op} = B i \alpha_3 \alpha_4, \end{cases}$$

où B désigne le magnéton de Bohr

$$(58) \quad B = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}.$$

Les six opérateurs (57) ont tous pour valeurs propres $\pm B$, et cette conclusion est bien en accord avec l'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit sur la valeur du moment magnétique propre de l'électron.

Il nous reste à reproduire le raisonnement qui conduit aux opérateurs (57). Pour cela, nous rappellerons qu'en posant

$$(59) \quad p_i = \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_j = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3),$$

l'équation de la Mécanique ondulatoire non relativiste pour un électron s'écrit

$$(60) \quad \left[cp_4 - \left(\frac{1}{2m_0} \sum_1^3 p_j^2 + U \right) \right] \Psi = 0.$$

ou encore

$$(61) \quad \left(2m_0 cp_4 - \sum_1^3 p_j^2 - 2m_0 U \right) \Psi = 0.$$

D'autre part, nous avons vu que, pour un électron libre, une Mécanique ondulatoire relativiste qui emploie une seule fonction Ψ doit écrire l'équation (4), ou, ce qui revient au même,

$$(62) \quad \left(p_4^2 - \sum_1^3 p_j^2 - m_0^2 c^2 \right) \Psi = 0.$$

Pour l'électron placé dans un champ électromagnétique, on devra remplacer dans (62) les opérateurs p par les opérateurs suivants :

$$(63) \quad P_4 = p_4 + \frac{e}{c} V, \quad P_j = p_j + \frac{e}{c} A_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

et l'on aura l'équation de propagation

$$(64) \quad \left(P_4^2 - \sum_1^3 P_j^2 - m_0^2 c^2 \right) \Psi = 0.$$

Dans la théorie de Dirac, on part du système d'équations

$$(65) \quad \left(P_4 + \sum_1^3 \alpha_j P_j - \alpha_4 m_0 c \right) \Psi_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Si nous appliquons à cette équation l'opérateur

$$\left[P_4 - \left(\sum_1^3 \alpha_j P_j - \alpha_4 m_0 c \right) \right],$$

il vient aisément

$$(66) \quad \left[P_4^2 - \sum_1^3 P_j^2 - m_0^2 c^2 + \sum_1^3 \alpha_j (P_4 P_j - P_j P_4) - \sum_{1 \neq j}^3 (\alpha_i \alpha_j P_i P_j + \alpha_j \alpha_i P_j P_i) \right] \Psi_k = 0.$$

En se souvenant que les champs se déduisent des potentiels par les formules

$$(67) \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

on trouve, en développant l'équation (66),

$$(68) \quad \left[P_i^2 - \sum_{j=1}^3 P_j^2 - m_0^2 c^2 - \frac{e}{c} \frac{h}{2\pi i} (\alpha_1 E_x + \alpha_2 E_y + \alpha_3 E_z) + \frac{e}{c} \frac{h}{2\pi i} (\alpha_2 \alpha_3 H_x + \alpha_3 \alpha_1 H_y + \alpha_1 \alpha_2 H_z) \right] \Psi_k = 0.$$

Si les trois premiers termes de cette équation existaient seuls, on retomberait sur l'équation (64) appliquée à chaque Ψ_k . L'élément nouveau introduit ici par la théorie de Dirac, c'est la présence des deux derniers termes qu'il s'agit donc d'interpréter. Pour cela, nous comparerons (68) avec l'équation non relativiste (61). Cette comparaison montre que les deux termes à interpréter doivent être, du moins à l'approximation non relativiste, considérés comme le produit par le facteur $-2m_0$ d'une énergie potentielle entre le champ électromagnétique et l'électron. Mais, si l'on ne veut pas s'en tenir à l'approximation non relativiste, on devra dans cet énoncé remplacer la masse propre m_0 par la quantité $\alpha_4 m_0$ qui figure dans les équations de Dirac ⁽¹⁾. En écrivant que $-2m_0 \alpha_4 U$ est égal aux deux derniers termes de (68), on voit alors que U est la somme des termes suivants

$$(69) \quad \begin{cases} U_e = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i(\alpha_1 \alpha_4 E_x + \alpha_2 \alpha_4 E_y + \alpha_3 \alpha_4 E_z), \\ U_m = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i(\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 H_x + \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 H_y + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 H_z). \end{cases}$$

Or, un corps doué d'un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ et d'un moment électrique $\vec{\mathcal{E}}$ placé dans un champ électromagnétique défini par les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ y possède une énergie potentielle égale à

$$(70) \quad U = U_e + U_m = -(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{H}) - (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{E}) \\ = -(\mathcal{M}_x H_x + \mathcal{M}_y H_y + \mathcal{M}_z H_z) - (\mathcal{E}_x E_x + \mathcal{E}_y E_y + \mathcal{E}_z E_z).$$

⁽¹⁾ Ce point est développé dans mon Livre *l'Électron magnétique* : on pourra s'y reporter en tenant compte de ce que j'y avais choisi pour α_4 une définition différant par le facteur -1 de celle qui est employée ici.

En identifiant les expressions (69) et (70), on retrouve immédiatement les définitions (57) pour les composantes des vecteurs $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\mathcal{E}}$. Les moments magnétiques et électriques propres de l'électron sont ainsi définis par des opérateurs, conformément aux idées générales de la Mécanique ondulatoire : leur existence apparaît comme contenue implicitement dans la forme même des équations de Dirac.

CHAPITRE VI.

FORMALISME ET INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE LA THÉORIE DE DIRAC.

1. Formalisme général de la Mécanique ondulatoire de l'électron de Dirac. — En Mécanique ondulatoire de Dirac, on retrouve un formalisme tout à fait analogue à celui que nous avons développé en Mécanique ondulatoire non relativiste. Tous les énoncés valables dans celle-ci vont pouvoir se transposer dans celle-là, à condition toutefois d'admettre, à côté des opérateurs agissant sur les coordonnées, l'intervention d'autres opérateurs agissant sur les indices k des fonctions Ψ_k (tels que les matrices α_i ou leurs combinaisons linéaires et hermitiennes par addition et multiplication) et aussi à condition de toujours ajouter, dans toutes les formules, une sommation de 1 à 4 sur l'indice k .

C'est ainsi que les expressions déjà données pour la densité de probabilité et pour la formule de normalisation de l'onde Ψ s'obtiennent à partir des formules correspondantes de la Mécanique ondulatoire non relativiste en ajoutant une sommation sur l'indice k . Cependant la définition du vecteur « flux de probabilité de présence » qu'il faut ajointre à $\rho = \sum_k |\Psi_k|^2$ pour former un quadrivecteur a , en théorie de Dirac, une forme particulière; on doit en effet poser

$$(1) \quad \vec{f} = -c \sum_k \Psi_k^* \vec{\alpha} \Psi_k,$$

$\vec{\alpha}$ désignant la matrice-vecteur dont les trois composantes rectangulaires sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. On démontre aisément, à l'aide des équations de Dirac et de leurs conjuguées, que les quantités ρ et $\vec{f}$ obéissent à la relation de conservation

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{f} = 0.$$

Il en résulte, en raison des conditions toujours imposées à Φ à la limite de D , que $\int_D \rho \, d\tau$ est une constante : donc, si cette intégrale est égale à 1 à un instant quelconque, elle reste égale à 1, ce qui permet de normer la fonction Ψ par la formule

$$(3) \quad \int_D \rho \, d\tau = \int_D \sum_k |\Psi_k|^2 \, d\tau = 1.$$

En Mécanique ondulatoire de Dirac comme en Mécanique ondulatoire non relativiste, à toute grandeur mesurable (observable) attachée à un corpuscule, on fait correspondre un opérateur linéaire et hermitien A , A pouvant en général agir non seulement sur les coordonnées, mais aussi sur les indices k des composantes Ψ_k .

Pour les coordonnées et les composantes de l'impulsion, les opérateurs restent les mêmes que précédemment et n'agissent que sur les coordonnées. Pour l'énergie, l'opérateur est l'opérateur H défini par l'équation (15) du chapitre précédent : il agit à la fois sur les indices k et sur les variables xyz . Pour les nouvelles grandeurs introduites par la théorie de Dirac (moments cinétiques propres, moments magnétiques et électriques propres), les opérateurs n'agissent que sur l'indice k .

Les valeurs possibles de la grandeur mesurable correspondant à un opérateur linéaire et hermitien A sont ici les valeurs propres de l'équation

$$(4) \quad A \varphi_k = \alpha \varphi_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

A la valeur propre α_l , correspond une fonction propre $\varphi^{(l)}$ à quatre composantes $\varphi_1^{(l)}, \dots, \varphi_4^{(l)}$. Ces fonctions propres sont orthogonales entre elles (si, du moins, on choisit convenablement les cas de dégénérescence), c'est-à-dire que l'on a

$$(5) \quad \int_D \sum_k \varphi_k^{(l)*} \varphi_k^{(l')} \, d\tau = 0 \quad (l' \neq l).$$

On les normera en posant

$$(6) \quad \int_D \sum_k \varphi_k^{(l)*} \varphi_k^{(l)} \, d\tau = 1.$$

De plus, elles forment un système complet, c'est-à-dire qu'on peut

toujours, par exemple, développer les composantes Ψ_k de la fonction d'onde Ψ sous la forme

$$(7) \quad \Psi_k = \sum_l c_l \varphi_k^{(l)} \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

les c_l étant indépendants de l'indice k considéré.

La probabilité de la valeur propre α_l est donnée par $|c_l|^2$. On en déduit aisément que la valeur moyenne de A doit se définir par

$$(8) \quad \bar{A} = \sum_l \alpha_l |c_l|^2 = \int_0^1 \sum_k \Psi_k^* \cdot A \Psi_k d\tau.$$

De même si $\Psi_{i,1}, \dots, \Psi_{i,4}$ sont les composantes de la $i^{\text{ème}}$ fonction propre de l'opérateur hamiltonien, les éléments de la matrice d'Heisenberg engendrée par l'opérateur A dans le système des fonctions propres de H sont, par définition,

$$(9) \quad a_{ij} = \int_0^1 \sum_k \Psi_{i,k}^* \cdot A \Psi_{j,k} d\tau.$$

Les densités de matrice ou de valeur moyenne définies par $\sum_k \Psi_{i,k}^* A \Psi_{j,k}$

ou par $\sum_k \Psi_k^* A \Psi_k$ sont des grandeurs définies en chaque point de l'espace à chaque instant, donc des grandeurs de champ : elles jouent un rôle très important en théorie de Dirac, car ce sont elles qui présentent un caractère tensoriel analogue à celui des grandeurs de champ des théories relativistes classiques. Nous y reviendrons au paragraphe suivant.

Comme exemple important d'application de ces principes généraux, on peut considérer le cas de la composante z du spin. L'opérateur correspondant est, nous l'avons vu, $\frac{h}{4\pi} i\alpha_1\alpha_2$: ses valeurs propres, c'est-à-dire les résultats possibles d'une mesure de S_z sont $\pm \frac{h}{4\pi}$, en accord avec les hypothèses d'Uhlenbeck et Goudsmit.

En appliquant les principes généraux, on trouve avec le choix fait pour les α_i que la probabilité de la valeur propre $\frac{h}{4\pi}$ dans un état caractérisé par une certaine fonction d'onde Ψ est $\int_0^1 (|\Psi_1|^2 + |\Psi_3|^2) d\tau$, tandis que

la probabilité de la valeur propre $-\frac{h}{4\pi}$ est $\int_0 (|\Psi_2|^2 + |\Psi_4|^2) dx$.

La somme de ces deux probabilités est bien égale à l'unité puisque la fonction Ψ est normée. On peut retrouver très aisément la valeur de ces deux probabilités par le calcul de la valeur moyenne $\bar{S}_z$. On a, en effet, par définition,

$$(10) \quad \bar{S}_z = \frac{h}{4\pi} \int_0 \sum_k^4 \Psi_k^* i x_1 x_2 \Psi_k d\tau,$$

Or, avec les valeurs adoptées pour les α_i , la règle de multiplication des matrices nous donne

$$(11) \quad i x_1 x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$(12) \quad \bar{S}_z = \frac{h}{4\pi} \int_0 [|\Psi_1|^2 + |\Psi_3|^2 - |\Psi_2|^2 - |\Psi_4|^2] d\tau,$$

formule qui concorde avec les expressions données plus haut pour les probabilités des deux valeurs possibles $\pm \frac{h}{4\pi}$.

2. Les grandeurs de champ définies par la théorie de Dirac. — Nous avons déjà signalé la manière dont la Mécanique ondulatoire non relativiste introduit sous la forme de densités (de valeur moyenne ou d'éléments de matrice) des grandeurs de champ qui permettent de rapprocher le point de vue de la Physique corpusculaire de celui de la Physique du champ, mais dont le sens physique est mal défini. En théorie de Dirac, on retrouve de telles grandeurs de champ, et ce sont elles qui ont des variances relativistes simples et donnent un aspect relativiste à tout le formalisme. Mais ici, comme en Mécanique ondulatoire non relativiste, ces grandeurs de champ se présentent sous la forme de densités dont, au point de vue quantique, le véritable sens physique n'est pas net. Ce sont les intégrales d'espace de ces quantités (valeurs moyennes ou éléments de matrice) qui, du point de vue quantique, ont une signification physique certaine : mais, par contre, ces intégrales n'ont pas un caractère tensoriel relativiste. Cette circonstance curieuse est l'un des aspects du désaccord qui subsiste actuellement entre les conceptions quantiques et les conceptions relativistes.

On peut classer rationnellement les grandeurs de champ de la théorie de Dirac en partant de la remarque suivante : les matrices $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ (qui jouent le rôle d'opérateurs agissant sur les indices k des fonctions Ψ_k), si on leur adjoint la matrice 1 à 4 lignes et 4 colonnes, permettent de former par multiplication 16 matrices hermitiennes linéairement indépendantes que nous ordonnerons dans le tableau suivant :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_0 = \alpha_4, \\ \Gamma_1 = \alpha_1; \quad \Gamma_2 = \alpha_2; \quad \Gamma_3 = \alpha_3; \quad \Gamma_4 = 1; \\ \Gamma_{23} = i\alpha_2\alpha_3\alpha_4; \quad \Gamma_{31} = i\alpha_3\alpha_1\alpha_4; \quad \Gamma_{12} = i\alpha_1\alpha_2\alpha_4; \\ \Gamma_{14} = i\alpha_1\alpha_4; \quad \Gamma_{24} = i\alpha_2\alpha_4; \quad \Gamma_{34} = i\alpha_3\alpha_4; \\ \Gamma_{234} = i\alpha_2\alpha_3; \quad \Gamma_{314} = i\alpha_3\alpha_1; \quad \Gamma_{124} = i\alpha_1\alpha_2; \quad \Gamma_{123} = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3; \\ \Gamma_{1234} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4. \end{array} \right.$$

Dans ce tableau, les facteurs i ont été introduits pour rendre hermitiennes les matrices produits qui, sans ce facteur, seraient antihermitiennes. Avec ces 16 opérateurs, nous pouvons former 16 densités de valeurs moyennes ayant une variance relativiste simple. Nous allons les expliciter en employant une abréviation très usuelle qui consiste à

écrire $\Psi^* \cdot A \Psi$ au lieu de $\sum_k \Psi_k^* \cdot A \Psi_k$.

$$(14) \quad \begin{aligned} I_1 &= \Psi^* \cdot \alpha_4 \Psi, \\ f_x &= -c \Psi^* \cdot \alpha_1 \Psi; \quad f_y = -c \Psi^* \cdot \alpha_2 \Psi; \quad f_z = -c \Psi^* \cdot \alpha_3 \Psi; \quad \rho = \Psi^* \cdot \Psi; \\ \left\{ \begin{array}{l} \mu_x = B \Psi^* \cdot i\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \Psi; \quad \mu_y = B \Psi^* \cdot i\alpha_3\alpha_1\alpha_4 \Psi; \quad \mu_z = B \Psi^* \cdot i\alpha_1\alpha_2\alpha_4 \Psi; \\ \pi_x = B \Psi^* \cdot i\alpha_1\alpha_4 \Psi; \quad \pi_y = B \Psi^* \cdot i\alpha_2\alpha_4 \Psi; \quad \pi_z = B \Psi^* \cdot i\alpha_3\alpha_4 \Psi; \end{array} \right. \\ \sigma_x &= \frac{h}{4\pi} \Psi^* \cdot i\alpha_2\alpha_3 \Psi; \quad \sigma_y = \frac{h}{4\pi} \Psi^* \cdot i\alpha_3\alpha_1 \Psi; \\ \sigma_z &= \frac{h}{4\pi} \Psi^* \cdot i\alpha_1\alpha_2 \Psi; \quad \sigma_4 = -\frac{h}{4\pi} \Psi^* \cdot i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \Psi; \\ I_2 &= \Psi^* \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \Psi. \end{aligned}$$

La grandeur I_1 est invariante pour une transformation de Lorentz, comme cela résulte des formules de transformation pour les Ψ_k . De même, I_2 est un autre invariant (ou plus exactement un tenseur complètement antisymétrique de rang 4, ce qui pratiquement revient au même).

Les grandeurs $\vec{f}$ et ρ de la deuxième ligne du tableau forment les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps. C'est le quadrivecteur

flux-densité pour la probabilité de présence qui satisfait à l'équation de continuité (2).

Les 6 quantités $\mu_x, \dots, \pi_z$ forment les 6 composantes distinctes d'un tenseur antisymétrique de rang 2. Le vecteur $\vec{\mu}$ représente la densité moyenne de moment magnétique propre pour l'électron dans l'état Ψ , car en intégrant les composantes de $\vec{\mu}$ dans le domaine, on obtient les valeurs moyennes des composantes du moment magnétique propre de l'électron définies à la fin du précédent chapitre. De même, le vecteur $\vec{\pi}$ donne la densité moyenne du moment électrique propre, complément relativiste du moment magnétique propre.

Les grandeurs de l'avant-dernière ligne du tableau se transforment comme les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps lors d'une transformation de Lorentz (ou plutôt comme celles d'un tenseur complètement antisymétrique de rang 3, ce qui revient pratiquement au même). Les composantes de ce quadrivecteur sont liées à l'invariant I_2 par la formule

$$(15) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \sigma_4}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma} = -m_0 c I_2.$$

Les grandeurs $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont les densités de moyenne des composantes du moment cinétique de l'électron dans l'état Ψ ; σ_4 est la composante de temps qui complète cette densité au point de vue relativiste. Le spin de l'électron est donc bien défini par un quadrivecteur densité (et non par un tenseur antisymétrique du second rang), comme nous l'avions prévu précédemment. Nous verrons plus loin que, dans le cas où l'onde Ψ est plane et monochromatique et où, par suite, on peut attribuer à l'électron un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}$, on a la relation

$$(16) \quad \sigma_4 = \frac{1}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{v})$$

déjà rencontrée dans nos considérations relativistes de l'avant-dernier chapitre.

Enfin, aux 16 grandeurs de champ du tableau (14), nous ajouterons 16 autres grandeurs de champ formant les 16 composantes *réelles* d'un tenseur symétrique de rang 2 auquel on peut attribuer la signification de tenseur densité d'énergie-impulsion pour l'électron. En employant les coordonnées réelles d'espace-temps, nous définirons ces grandeurs

par les formules

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} T^{ij} = T^{ji} = \frac{hc}{8\pi i} \left[\Psi^* \cdot \alpha_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_j} \cdot \alpha_i \Psi \right. \\ \quad \left. + \Psi^* \cdot \alpha_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_i} \cdot \alpha_j \Psi \right] \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ T^{i4} = T^{4i} = -\frac{hc}{8\pi i} \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_i} \Psi \right. \\ \quad \left. + \Psi^* \cdot \alpha_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_4} \cdot \alpha_i \Psi \right] \quad (i = 1, 2, 3), \\ T^{44} = \frac{hc}{4\pi i} \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_4} \Psi \right]. \end{array} \right.$$

T^{44} représente la densité moyenne d'énergie associée à l'onde Ψ et les trois T^{i4} représentent les densités moyennes du flux de cette énergie le long des 3 axes. Les T^{ij} avec $i, j = 1, 2, 3$ représentent les densités moyennes du flux des 3 composantes de l'impulsion le long des 3 axes. C'est ce que l'on vérifie facilement sur l'exemple de l'onde plane monochromatique.

Les équations de Dirac permettent d'établir que l'on a, en l'absence de champ, les équations

$$(18) \quad \sum_{j=1}^4 \frac{\partial T^{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

qui expriment la conservation de l'énergie et des composantes de l'impulsion.

On peut désigner le tenseur T sous le nom de « tenseur corpusculaire d'énergie-impulsion », pour distinguer ce type de tenseur d'autres types d'énergie-impulsion qui n'existent pas pour l'électron, mais que nous rencontrerons pour les particules de spin plus élevé et dont le tenseur électromagnétique de Maxwell sera un cas particulier ⁽¹⁾.

3. Les ondes planes monochromatiques en théorie de Dirac. — D'après les idées fondamentales de la Mécanique ondulatoire, au mouvement rectiligne et uniforme d'un électron avec une énergie W et une quantité

⁽¹⁾ Des travaux tout récents de M. Olivier Costa de Beauregard semblent montrer qu'il y a lieu d'adopter pour l'électron de Dirac non pas le tenseur symétrique T^{ij} indiqué dans le texte, mais un tenseur *non symétrique*, et cela en raison de l'existence même du spin. Une modification analogue serait à apporter aux définitions des tenseurs impulsion-énergie que nous donnerons plus loin pour les particules de spin supérieur à $\frac{1}{2}$.

de mouvement $\vec{p}$ doit correspondre une onde Ψ plane et monochromatique qui, en théorie de Dirac, devra être définie par ses composantes

$$(19) \quad \Psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

En substituant dans les quatre équations de Dirac la forme (19), on obtient 4 relations algébriques linéaires et homogènes entre les 4 amplitudes a_k . Pour que ces équations admettent pour solutions des valeurs non toutes nulles des a_k , il faut que leur déterminant soit nul. En faisant le calcul, on trouve

$$(20) \quad \frac{W^2}{c^2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2,$$

c'est-à-dire précisément la relation qui, en théorie relativiste, lie l'énergie et la quantité de mouvement d'un corpuscule de masse propre m_0 . Si la condition (20) est satisfaite, non seulement le déterminant des équations en a_k , mais les mineurs du premier ordre sont nuls, de sorte que deux des a_k sont arbitraires, les deux autres étant déterminés en fonction de ceux-là. Si nous posons arbitrairement $a_3 = C_1$ et $a_4 = C_2$, nous obtiendrons

$$(21) \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{p_z C_1 + (p_x + ip_y) C_2}{\frac{W}{c} + m_0 c}; & a_2 = -\frac{(p_x - ip_y) C_1 - p_z C_2}{\frac{W}{c} + m_0 c}; \\ a_3 = C_1; & a_4 = C_2. \end{cases}$$

Pour interpréter ce résultat, supposons que l'axe des z soit pris dans la direction du mouvement (direction du vecteur $\vec{p}$). Ceci ne restreint pas la généralité puisqu'on sait en principe comment se transforment les Ψ_k lors d'une rotation des axes d'espace. On a $p_x = p_y = 0$ et

$$(22) \quad \Psi_1 = -\frac{Pz}{\Delta} C_1 P; \quad \Psi_2 = \frac{Pz}{\Delta} C_2 P; \quad \Psi_3 = C_1 P; \quad \Psi_4 = C_2 P,$$

avec les abréviations

$$(23) \quad \Delta = \frac{W}{c} + m_0 c, \quad P = e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)}.$$

On peut énoncer ce résultat de la manière suivante : Toute onde Ψ plane et monochromatique correspondant à un mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule de Dirac peut être considérée comme la superposition de deux ondes $\Psi^{(g)}$ et $\Psi^{(d)}$ suivant la formule

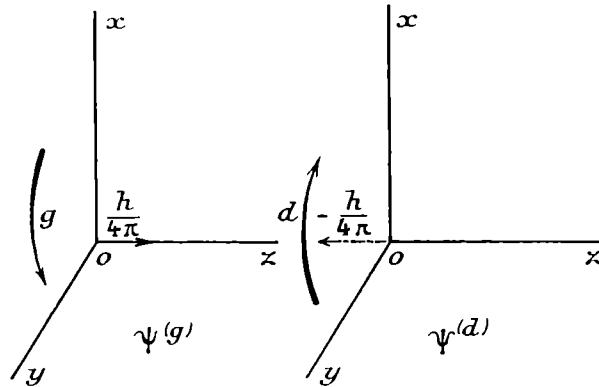
$$(24) \quad \Psi = C_1 \Psi^{(g)} + C_2 \Psi^{(d)},$$

$\Psi^{(g)}$ et $\Psi^{(d)}$ ayant les composantes suivantes :

$$(25) \quad \begin{cases} \Psi_1^{(g)} = -\frac{p_z}{\Delta} P; & \Psi_3^{(g)} = P; & \Psi_2^{(g)} = \Psi_4^{(g)} = 0, \\ \Psi_1^{(d)} = \Psi_3^{(d)} = 0; & \Psi_2^{(d)} = \frac{p_z}{\Delta} P; & \Psi_4^{(d)} = P. \end{cases}$$

Si l'on se souvient que les probabilités des deux valeurs possibles $\pm \frac{h}{4\pi}$ de la composante z du spin sont proportionnelles à $|\Psi_1|^2 + |\Psi_3|^2$ et à $|\Psi_2|^2 + |\Psi_4|^2$, l'on voit que $\Psi^{(g)}$ correspond au spin $\frac{h}{4\pi}$ et $\Psi^{(d)}$ au spin $-\frac{h}{4\pi}$. En associant par la règle habituelle une rotation dans le plan xOy à un vecteur porté le long de Oz , on fait correspondre $\Psi^{(g)}$ à une rotation lévogyre ou circulaire gauche et $\Psi^{(d)}$ à une rotation dextrogyre ou circulaire droite, comme l'indique le schéma ci-contre :

Fig. 4.



Toute onde plane monochromatique est donc la somme de deux ondes planes $\Psi^{(g)}$ et $\Psi^{(d)}$ correspondant chacune à une des valeurs propres de la composante du spin dans la direction de propagation, la proportion des deux ondes et leur différence de phase dans la superposition étant données par les valeurs des deux constantes complexes C_1 et C_2 .

Sur les formules précédentes, nous voyons aisément que Ψ_1 et Ψ_2 sont négligeables devant Ψ_3 et Ψ_4 lorsque $p_z c$ est négligeable devant $m_0 c^2$, c'est-à-dire au degré d'approximation de la Mécanique newtonienne ($v \ll c$). Dans le cas limite opposé d'une vitesse voisine de c , $m_0 c^2$ est négligeable devant W et $|\vec{p}|$ est sensiblement égal à $\frac{W}{c}$; on a alors

$$(26) \quad \Psi_1^{(g)} = \Psi_3^{(g)} = P; \quad \Psi_2^{(g)} = \Psi_4^{(g)} = 0; \quad \Psi_2^{(d)} = \Psi_4^{(d)} = P; \quad \Psi_3^{(d)} = \Psi_1^{(d)} = 0.$$

Revenant au cas général, il va maintenant être très intéressant de calculer les 16 densités de moyenne définies par les formules (14) dans le cas d'une onde plane monochromatique. Nous remarquerons tout d'abord que les constantes C_1 et C_2 sont reliées par la relation de normalisation des ondes Ψ . Pour éviter l'introduction des formules un peu compliquées relatives aux spectres continus, nous emploierons un artifice souvent utilisé en supposant que le corpuscule est enfermé dans une enceinte de volume $\mathcal{V}$ dont les dimensions sont très grandes par rapport à la longueur d'onde. On peut alors écrire les conditions de normalisation sous la forme

$$(27) \quad \int_{\mathcal{V}} \sum_k \Psi_k^* \Psi_k d\tau = (|C_1|^2 + |C_2|^2) \left[1 + \frac{p^2}{\Delta^2} \right] \mathcal{V} = 1,$$

qui s'écrit grâce à la relation (20)

$$(28) \quad (|C_1|^2 + |C_2|^2) \frac{2 \frac{W}{c}}{\Delta} \mathcal{V} = 1.$$

Calculons maintenant les 16 densités de moyenne (14) en tenant compte de (20) et (28). On trouve d'abord

$$(29) \quad I_1 = |\Psi_2|^2 + |\Psi_4|^2 - |\Psi_1|^2 - |\Psi_3|^2 = \frac{m_0 c^2}{W} \cdot \frac{1}{\mathcal{V}}.$$

Si nous introduisons dans cette expression la vitesse βc du mouvement rectiligne correspondant définie par la formule relativiste $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, on trouve

$$(30) \quad I_1 = \sqrt{1-\beta^2} \frac{1}{\mathcal{V}}; \quad \int_{\mathcal{V}} I_1 d\tau = \sqrt{1-\beta^2},$$

et l'on voit que l'invariant I_1 est lié étroitement à la contraction de Lorentz. Le facteur de contraction de Lorentz $\frac{m_0 c^2}{W}$, qui apparaît ici pour la première fois, jouera dans la suite de notre exposé un rôle considérable.

Pour l'invariant I_2 , on trouve de même

$$(31) \quad I_2 = i[\Psi_1^* \Psi_3 + \Psi_2^* \Psi_4 - \Psi_3^* \Psi_1 - \Psi_4^* \Psi_2] = 0.$$

Cet invariant est donc nul pour une onde plane monochromatique.

Un calcul analogue nous fournit pour les composantes du quadri-vecteur densité-flux

$$(32) \quad f_x = f_y = 0; \quad f_z = (|C_1|^2 + |C_2|^2) \frac{2pc}{\Delta}; \quad \varphi = (|C_1|^2 + |C_2|^2) \frac{2 \frac{W}{c}}{\Delta}.$$

En comparant ces expressions de f_z et de ρ et en se rappelant la relation relativiste $p = \frac{W}{c^2} v$, on a

$$(33) \quad f_z = \frac{pc^2}{W} = v, \quad f_x = f_y = 0.$$

Il y a donc un flux de probabilité de présence dirigée dans la direction de propagation de l'onde Ψ et correspondant à la vitesse v . C'est bien ce qu'on pouvait attendre.

Passons maintenant au calcul du quadrivecteur spin. On trouve

$$(34) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{h}{4\pi} (C_1^* C_2 + C_2^* C_1) \frac{2m_0 c}{\Delta}; & \sigma_y = \frac{h}{4\pi} i (C_1^* C_2 - C_2^* C_1) \frac{2m_0 c}{\Delta}; \\ \sigma_z = \frac{h}{4\pi} (|C_1|^2 - |C_2|^2) \frac{2}{\Delta} \frac{W}{c}; & \sigma_4 = \frac{h}{4\pi} (|C_1|^2 - |C_2|^2) \frac{2p}{\Delta}. \end{cases}$$

La relation de normalisation (28) permet d'écrire

$$(35) \quad \sigma_z = \frac{1}{V} \frac{h}{4\pi} \frac{|C_1|^2 - |C_2|^2}{|C_1|^2 + |C_2|^2}; \quad S_z = \int_V \sigma_z d\tau = \frac{h}{4\pi} \frac{|C_1|^2 - |C_2|^2}{|C_1|^2 + |C_2|^2}.$$

De plus, en comparant les expressions de σ_z et de σ_4 , on tire

$$(36) \quad \sigma_4 = \sigma_z \frac{pc}{W} = \frac{1}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}).$$

C'est bien la relation que nous avons prévue ⁽¹⁾ entre les composantes de la densité de spin pour un corps animé de la vitesse de translation $\vec{v}$. Or, dans le cas où l'onde Ψ est monochromatique plane, le corpuscule peut être considéré comme animé de la vitesse de translation $v = \frac{pc^2}{W}$ bien déterminée.

Donnons enfin les composantes des densités moyennes de moment magnétique et de moment électrique propre pour l'onde plane monochromatique

$$(37) \quad \begin{cases} \mu_x = B (C_1^* C_2 + C_2^* C_1) \frac{2}{\Delta} \frac{W}{c}; & \mu_y = iB (C_1^* C_2 - C_2^* C_1) \frac{2}{\Delta} \frac{W}{c}; \\ \mu_z = B (|C_2|^2 - |C_1|^2) \frac{2m_0 c}{\Delta}; \\ \pi_x = iB (C_1 C_2^* - C_2 C_1^*) \frac{2P}{\Delta}; & \pi_y = B (C_1 C_2^* + C_2 C_1^*) \frac{2P}{\Delta}; & \pi_z = 0. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Voir Chapitre IV, formule (39).

Sur ces formules, on vérifie aisément les relations

$$(38) \quad \vec{\pi} = \left[\vec{\mu} \times \frac{\vec{v}}{c} \right], \quad (\vec{\pi}, \vec{v}) = 0$$

que nous avons prévues précédemment par des considérations de variance relativiste ⁽¹⁾. Nous voyons que le vecteur $\vec{\pi}$ est toujours transversal par rapport à la direction de propagation, tandis que $\vec{\mu}$ peut faire un angle quelconque avec elle, mais $\vec{\pi}$ et $\vec{\mu}$ sont toujours perpendiculaires entre eux.

Lorsque la vitesse v tend vers c , le vecteur $\vec{\sigma}$ se couche sur la direction de propagation : au contraire, le vecteur $\vec{\mu}$ tend à se mettre perpendiculaire à cette direction, les vecteurs $\vec{\mu}$ et $\vec{\pi}$ étant à la limite tous deux dans le plan d'onde, égaux en module et perpendiculaires comme les champs électromagnétiques d'une onde lumineuse. Ainsi les vecteurs $\vec{\mu}$ et $\vec{\sigma}$ dont les directions coïncident dans le système propre de la particule sont à angle droit pour un observateur qui voit passer la particule avec une vitesse très voisine de c .

Les équations de Dirac admettent des solutions ayant la forme d'ondes planes monochromatiques à énergie négative. Cela provient du fait que la relation (20) pour une valeur donnée du vecteur $\vec{p}$ est satisfaite par deux valeurs égales et opposées de W . Ces solutions à énergie négative auraient des propriétés paradoxales et leur apparition en théorie de Dirac a paru d'abord constituer une objection grave contre cette théorie. On les interprète maintenant comme manifestant l'existence des électrons positifs. Nous ne ferons pas ici l'étude de ces solutions qui ne joueront pas explicitement un rôle dans le présent exposé.

4. Théorème de M. de Kronig. — Soit un corpuscule de Dirac, c'est-à-dire un corpuscule dont l'onde Ψ obéit aux équations de Dirac pour l'électron. Supposons ce corpuscule animé d'un mouvement rectiligne et uniforme et ayant son spin $\vec{\sigma}$ parallèle ou antiparallèle à la direction du mouvement. On a alors le théorème suivant dû à De Kronig : « Pour qu'un changement quelconque d'un système de référence galiléen transforme ce mouvement en un autre mouvement correspondant égale-

⁽¹⁾ Voir Chapitre IV, formules (57) et (58).

ment à un spin parallèle ou antiparallèle à la vitesse, il faut et suffit que le corpuscule ait une masse propre nulle ».

Écrivons l'onde plane correspondant au mouvement du corpuscule sous la forme

$$(39) \quad \Psi_j = a_j e^{i(kx + \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

avec

$$(40) \quad k = \frac{2\pi}{h} \frac{W}{c} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{h} \vec{p}.$$

La phase, qui est un invariant relativiste, est le produit scalaire d'espace-temps du quadrivecteur de composantes x, y, z, ct et du quadrivecteur $\vec{K}$ de composantes k_x, k_y, k_z, k . Soit alors $\vec{\Sigma}$ le quadrivecteur dont les composantes sont $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ et σ_t .

Par hypothèse, dans le premier système de référence galiléen, le vecteur d'espace $\vec{\sigma}$ est parallèle ou antiparallèle au vecteur d'espace $\vec{v}$, celui-ci étant naturellement parallèle au vecteur $\vec{k}$, d'où l'on conclut :

$$(41) \quad |(\vec{v}, \vec{\sigma})| = |\vec{\sigma}| \cdot v.$$

Le rapport des composantes d'espace des deux quadrivecteurs $\vec{\Sigma}$ et $\vec{K}$ est

$$\frac{|\vec{\sigma}|}{|\vec{k}|} = \frac{c |\vec{\sigma}|}{ck} \quad \text{car} \quad |\vec{k}| = \frac{kv}{c},$$

tandis que le rapport de leurs composantes de temps est $\frac{(\vec{v}, \vec{\sigma})}{ck} = \frac{c |\vec{\sigma}|}{kc}$.

Pour que $\vec{\Sigma}$ et $\vec{K}$ soient parallèles dans l'espace-temps, les deux rapports précédents doivent être égaux, d'où

$$(42) \quad \frac{c |\vec{\sigma}|}{kv} = \frac{v |\vec{\sigma}|}{ck} \quad \text{ou} \quad |\vec{v}| = c.$$

Si cette condition est remplie et dans ce cas seulement, les deux quadrivecteurs $\vec{\Sigma}$ et $\vec{K}$ ont leurs composantes parallèles dans tous les systèmes de référence galiléens. Or, pour que l'on puisse avoir $v = c$, il faut et suffit que le corpuscule ait une masse propre m_0 nulle. Le théorème de De Kronig en résulte.

5. Le quadrivecteur densité-courant d'électricité et sa décomposition.

— Nous avons défini plus haut les grandeurs ρ et $\vec{j}$ pour un électron (ou plus généralement pour un corpuscule de Dirac). En multipliant ces

grandeurs par la charge électrique $-e$ de l'électron, on obtient un quadrivecteur dont la composante de temps donne la densité de moyenne $-e |\Psi|^2$ de l'électricité pour l'électron dans l'état Ψ et dont les composantes d'espace

$$(43) \quad j_i = -ef_i = ec \sum_k^4 \Psi_k^* \alpha_i \Psi_k \quad (i = 1, 2, 3)$$

donnent les densités de courant correspondantes.

Nous allons montrer comment on peut décomposer en deux parties le courant $\vec{j}$ et le résultat obtenu, la décomposition de Gordon, nous montrera qu'en raison de l'existence du moment magnétique propre et du moment électrique propre du corpuscule impliquée par la forme même des équations de Dirac, ce courant $\vec{j}$ ne se réduit pas au courant de convection dû au déplacement du corpuscule chargé.

Pour faire cette décomposition, nous partons des équations de Dirac en l'absence de champ

$$(44) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 \Psi_k + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 \Psi_k + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 \Psi_k + \alpha_4 m_0 c \Psi_k$$

et des équations conjuguées que le caractère hermitien des α_i nous permet d'écrire

$$(45) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \Psi_k^* \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \Psi_k^* \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \Psi_k^* \alpha_3 - \alpha_4 m_0 c \Psi_k^*$$

en employant la convention

$$(46) \quad \Psi_k^* \alpha_i = \sum_l^4 \Psi_l^* (\alpha_i)_{lk}.$$

Multiplions alors (44) en avant par $\Psi_k^* \alpha_i \alpha_4$, et (45) en arrière par $\alpha_4 \alpha_i \Psi_k$, ajoutons les résultats obtenus et sommons sur k . Il vient facilement en notation symbolique

$$(47) \quad \Psi^* \alpha_1 \Psi = \frac{h}{4\pi i m_0 c} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \alpha_1 \alpha_4 \Psi) + \Psi^* \alpha_4 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \alpha_4 \Psi + \frac{\partial}{\partial y} (\Psi^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \Psi) - \frac{\partial}{\partial z} (\Psi^* \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 \Psi) \right],$$

d'où l'on déduit facilement en multipliant par ec et en tenant compte des définitions (14)

$$(48) \quad j_x = \frac{\partial \pi_x}{\partial t} + c (\text{rot } \vec{\pi})_x + \frac{eh}{4\pi i m_0} \left(\Psi^* \alpha_4 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \alpha_4 \Psi \right).$$

On démontrerait de même les deux relations qui se déduisent de (48) par permutation circulaire sur x, y, z , et l'on conclut que

$$(49) \quad \vec{j} = \vec{j}' + \vec{j}''$$

avec

$$(50) \quad \begin{cases} \vec{j}' = \frac{eh}{4\pi im_0} (\Psi^* \cdot \alpha_i \text{ grad } \Psi - \text{grad } \Psi^* \cdot \alpha_i \Psi), \\ \vec{j}'' = \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + c \text{ rot } \vec{\mu}. \end{cases}$$

Le terme $\vec{j}'$ de (49) est facile à interpréter en se plaçant dans le cas où l'onde Ψ est plane monochromatique, c'est-à-dire où l'on peut attribuer à l'électron un mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse $\vec{v} = \frac{\vec{pc}^2}{W}$. On a alors, d'après les formules démontrées plus haut,

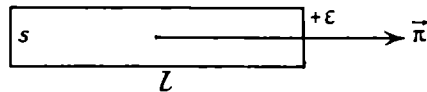
$$(51) \quad \vec{j}' = \frac{eh}{4\pi im_0} \cdot 2 \left(-\frac{2\pi i}{h} \vec{p} \right) \cdot |\Psi^* \alpha_i \Psi| = -\varphi e \frac{\vec{p}}{m_0} \cdot \frac{m_0 c^2}{W} = -\varphi e \frac{\vec{pc}^2}{W} = (-\varphi e) \cdot \vec{v}.$$

$\vec{j}'$ est donc simplement la densité de moyenne pour le courant de convection dû au mouvement de la charge électrique.

L'interprétation du terme $\vec{j}''$ est plus intéressante, mais elle exige quelques considérations préliminaires.

Considérons d'abord un milieu polarisé électriquement et dans ce milieu un élément cylindrique de longueur l et de section s dont l'axe coïncide avec la direction du vecteur polarisation.

Fig. 5.



Une des bases porte la charge $+\varepsilon$, l'autre la charge $-\varepsilon$. Le moment électrique du cylindre est εl correspondant à une densité $\pi = \frac{\varepsilon l}{s} = \frac{\varepsilon}{s}$. Si la première charge devient $\varepsilon + d\varepsilon$ et la seconde $-(\varepsilon + d\varepsilon)$, la grandeur π augmente de $\frac{d\varepsilon}{s}$ et, si cette augmentation a lieu dans un temps dt , comme on peut la considérer comme due au transport de la charge $d\varepsilon$ de la seconde base à la première, elle est liée à un courant égal à $\frac{d\varepsilon}{dt}$, c'est-à-dire à une densité de courant $\frac{1}{s} \frac{d\varepsilon}{dt}$. Finalement, on voit

que l'augmentation de $\vec{\pi}$ est équivalente à l'existence d'une densité de courant égale à $\frac{d\vec{\pi}}{dt}$.

D'autre part, considérons un aimant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$. Le champ magnétique créé par cet aimant dérive, on le sait, du potentiel magnétique $-\left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}\right)$, mais il dérive aussi du potentiel vecteur

$$(52) \quad \vec{A} = -\left[\vec{\mathcal{M}} \times \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}\right],$$

comme on le voit facilement en démontrant que

$$(53) \quad -\text{grad}\left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}\right) = \text{rot}\left[\vec{\mathcal{M}} \times \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}\right].$$

Le champ créé à l'extérieur par une distribution de magnétisme d'intensité d'aimantation $\vec{\mu}$ occupant un volume V dérive donc du potentiel-vecteur

$$(54) \quad \vec{A} = -\int_V \left[\vec{\mu} \times \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}\right] d\tau = \int_V \frac{\text{rot} \vec{\mu}}{r} d\tau,$$

la dernière expression résultant d'une intégration par parties. En comparant avec la formule classique des potentiels retardés

$$(55) \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}}{r} d\tau,$$

on voit donc que l'intensité d'aimantation $\vec{\mu}$ est équivalente à une densité de courant égale à $c \text{ rot } \vec{\mu}$.

En résumé, nous avons retrouvé le résultat suivant classique en électromagnétisme : « Quand une région de l'espace est le siège d'une distribution de moment électrique définie en chaque point par une certaine polarisation $\vec{\pi}$ et d'une distribution de moment magnétique définie en chaque point par une certaine intensité d'aimantation $\vec{\mu}$, cette région de l'espace est le siège de courants microscopiques dont la densité est donnée par le vecteur $\frac{d\vec{\pi}}{dt} + c \text{ rot } \vec{\mu}$. »

Revenons alors à la décomposition (49) de Gordon. Nous voyons que le terme $\vec{j}''$ a pour origine l'existence des moments magnétique et électrique propres de l'électron.



CHAPITRE VII.

THÉORIE DE LA PARTICULE DE SPIN 1 (PHOTON, MÉSON, ...)

(Fusion de 2 corpuscules de spin $\frac{1}{2}$).

1. Considérations générales sur la fusion des corpuscules de spin $\frac{1}{2}$.

— La théorie de Dirac nous a fourni une Mécanique ondulatoire que nous pouvons considérer comme étant celle qui est valable d'une façon générale pour les corpuscules élémentaires de spin $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour les électrons, les protons, les neutrons et éventuellement les neutrinos. Évidemment, les moments magnétiques propres du proton et du neutron ont des valeurs en quelque sorte anormales différentes de celle ⁽¹⁾ que feraient prévoir les équations de Dirac, mais il semble que ces anomalies puissent s'expliquer par des effets perturbateurs. Tant qu'on ne s'occupe que des moments cinétiques propres ou spins proprement dits, la théorie paraît en tout cas bien convenir pour la description des corpuscules de spin $\frac{1}{2}$.

Cependant, il existe des particules dont le spin est supérieur à $\frac{1}{2}$, tels que les photons, les électrons lourds, peut-être les gravitons, sans parler du noyau de certains atomes. Il est donc nécessaire de créer des formes de la Mécanique ondulatoire susceptibles de s'appliquer à ces cas divers. Il y a deux manières d'envisager ce problème. On peut, par définition, nommer « particule de spin s » une particule dont le spin total S^2 a l'unique valeur propre $s(s+1) \frac{h^2}{4\pi^2}$, s étant un entier ou un demi-entier positif ou nul ($s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$) : les composantes rectangulaires S_x, S_y, S_z du spin auront alors les valeurs propres $-s, -(s-1), \dots (s-1),$

⁽¹⁾ Égale à $\frac{eh}{4\pi M_0 c}$, où M_0 est la masse du proton ou du neutron.

s en unité $\frac{h}{2\pi}$. Mais on peut aussi, et c'est l'alternative que nous adopterons ici dans la théorie de la fusion, appeler par définition « particule de spin maximum $\mathfrak{S}$ » une particule dont le spin total S^2 aurait toutes les valeurs propres de la forme $s(s+1) \frac{h^2}{4\pi^2}$, s pouvant prendre toutes les valeurs demi-entières de $\frac{1}{2}$ à $\mathfrak{S}$ si $\mathfrak{S}$ est demi-entier et toutes les valeurs entières de 0 à $\mathfrak{S}$ si $\mathfrak{S}$ est entier. La particule sera alors susceptible de plusieurs « états de spin total », savoir $\mathfrak{S} + \frac{1}{2}$ états si $\mathfrak{S}$ est demi-entier et $\mathfrak{S} + 1$ états si $\mathfrak{S}$ est entier. Chacun de ces états admettra $2s+1$ valeurs propres pour chacune des grandeurs S_x, S_y, S_z : ce sera donc un état singulet, doublet, triplet, etc., suivant que s sera égal à 0, $\frac{1}{2}$, 1, ...

Comme exemple, prenons le cas du spin 1. Si nous adoptons la première définition, nous nommerons « particule de spin 1 » une particule pour laquelle le spin total aura l'unique valeur propre $\sqrt{1(1+1)} \frac{h}{2\pi} = \sqrt{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$ correspond à l'unique valeur $s=1$. La composante S_z pourra avoir les valeurs $-\frac{h}{2\pi}, 0, +\frac{h}{2\pi}$. Avec la deuxième définition, au contraire, on nommera « particule de spin maximum $\mathfrak{S}=1$ » une particule dont le spin total S^2 aura les deux valeurs propres 0 et $2 \cdot \frac{h^2}{4\pi^2}$ correspondant aux valeurs $s=0$ et $s=1$. Quand la particule sera dans l'état défini par $s=0$, S_z aura la seule valeur possible 0 de sorte qu'on aura un état singulet; quand la particule sera dans l'état défini par $s=1$, S_z aura les trois valeurs possibles $-\frac{h}{2\pi}, 0, \frac{h}{2\pi}$ correspondant à un état triplet.

La première définition peut paraître la plus simple, mais on est assez naturellement amené à la seconde si l'on admet que les corpuscules élémentaires ont tous un spin égal à $\frac{1}{2}$, tandis que les particules dont le spin est différent de $\frac{1}{2}$ seraient en dernière analyse formées par l'union de corpuscules de spin $\frac{1}{2}$. Diverses raisons, certaines en particulier tirées du fait que les particules suivent la statistique de Bose ou celle de Fermi suivant le caractère entier ou demi-entier de leur spin, rendent assez vraisemblable que les corpuscules physiques véritablement élémentaires ont tous le spin $\frac{1}{2}$ et que, par suite, les particules de spin différent de $\frac{1}{2}$ sont complexes. J'oppose à dessein dans ces définitions les termes

« corpuscule » et particule », le corpuscule jouant dans ce langage le rôle de l'atome en Chimie et la particule le rôle de la molécule. L'hypothèse que nous suggérons est évidemment, par sa nature même, aventureuse, mais l'histoire de la Physique a montré que ce genre d'hypothèse, qui tend à réduire le nombre des entités indépendantes, a souvent réussi en Physique; c'est ainsi que les éléments chimiques ont d'abord paru irréductibles et l'hypothèse déjà plus que séculaire du chimiste Prout, suivant laquelle tous les éléments chimiques doivent en dernière analyse se ramener au plus léger d'entre eux, l'hydrogène, a paru d'abord bien téméraire; c'est elle cependant qui a aujourd'hui triomphé.

Quoi qu'il en soit, nous admettrons, pour employer un langage prudent, que tout se passe comme si les particules de spin quelconque étaient formées de corpuscules de spin $\frac{1}{2}$: cette hypothèse conduit pour l'étude de la Mécanique ondulatoire de ces particules à employer une méthode générale qu'on peut appeler la « méthode de fusion ». Nous avons été amenés à cette méthode, il y a quelques années, pour construire la Mécanique ondulatoire du photon.

Comme nous le verrons, la méthode de fusion conduit à définir la particule de spin maximum $\mathcal{S}$ par des groupes d'équations généralisant les quatre équations de Dirac. Ces groupes d'équations correspondent aux diverses valeurs du nombre s compatibles avec la valeur de $\mathcal{S}$. On peut trouver pour ces groupes d'équations des solutions indépendantes telles que les grandeurs (composantes du Ψ) intervenant dans un des groupes soient totalement indépendantes de celles qui figurent dans les autres groupes. Toutefois, ceci n'est vrai en toute rigueur que si l'on considère le mouvement libre des particules et, de plus, dans certains cas, les solutions générales des divers groupes d'équations peuvent être couplées entre elles : cette circonstance jouera un rôle quand nous chercherons à relier les phénomènes de gravitation à la théorie des particules de spin maximum 2.

L'indépendance des groupes d'équations correspondant aux diverses valeurs de s permet de considérer isolément chacun des états de spin total de la particule en supposant nulles les grandeurs qui correspondent aux autres états, et finalement chacun des états ainsi isolés représente une particule de spin s au sens de la première définition. Ainsi, partant de la seconde définition des particules à spin, la méthode de fusion permet finalement de rejoindre la première définition en isolant les états correspondant aux diverses valeurs du nombre s . Et ceci nous

montre que les deux points de vue sont moins opposés qu'on aurait pu le croire au début.

Comme exemple, considérons le cas simple de la particule de spin $S = 1$ obtenue par fusion de deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$. Elle possède *a priori* deux états de spin total possible : l'état triplet correspondant à $s = 1$ et l'état singulet correspondant à $s = 0$. Nous trouverons par la méthode de fusion deux groupes d'équations complètement séparées décrivant l'un l'état triplet et l'autre l'état singulet. En annulant les grandeurs représentant l'état singulet, nous pourrions isoler l'état triplet et inversement.

Il est vrai que, s'il existe des interactions, il peut en général y avoir des passages d'un état triplet à l'état singulet et alors on ne pourra plus isoler ces états et les considérer comme définissant des particules distinctes. Mais, si les interactions ne permettent pas de tels passages, on pourra toujours isoler les états et, au besoin, on pourra supposer que l'un d'eux n'existe pas, n'est pas réalisé dans la nature. Une circonstance de ce genre se rencontre d'ailleurs déjà dans la Mécanique ondulatoire non relativiste des ensembles de corpuscules identiques : on montre, en effet, dans cette théorie, que les fonctions d'onde Ψ d'un tel ensemble sont soit symétriques, soit antisymétriques pour tout couple de particules et que, de plus, les interactions ne peuvent jamais faire passer le système d'un état à fonction d'onde symétrique à un état à fonction d'onde antisymétrique ou inversement. On en conclut qu'il est possible de considérer isolément les états symétriques, d'une part, et les états antisymétriques, d'autre part, et par suite de supposer qu'un genre donné de particules physiques n'est susceptible que d'états symétriques ou que d'états antisymétriques. Rien n'empêcherait par exemple au point de vue logique de supposer que les électrons, définis par leur masse propre, leur charge et leur spin, soient susceptibles d'un « état de Fermi » où leur fonction d'onde serait antisymétrique et où ils suivraient la statistique de Fermi, et d'un « état de Bose » où leur fonction d'onde serait symétrique et où ils suivraient la statistique de Bose. En vertu des résultats de la Mécanique ondulatoire que nous venons de rappeler, jamais un électron de Bose ne pourrait devenir un électron de Fermi, ni inversement : c'est là ce qui permet, en accord avec les faits expérimentaux, de supposer que l'état de Bose n'est jamais réalisé dans la nature et que tous les électrons sont des électrons de Fermi.

On voit ainsi clairement que, si les interactions ne peuvent provoquer de passage d'un état de spin total à un autre état de spin total, ces

états sont si complètement séparés qu'on pourra les considérer comme définissant une particule de spin total déterminé s . La différence entre les deux points de vue signalés plus haut se trouve alors très atténuée. Il paraît certain que la méthode de fusion conduit pour les particules libres *aux mêmes équations* que les méthodes qui cherchent, comme celle de M. Fierz, à isoler *a priori* les diverses valeurs du spin total. La méthode de fusion a, de plus, l'avantage de suggérer immédiatement toutes les formes analytiques dont on a besoin pour représenter les diverses grandeurs liées aux particules des divers spins, et cela par analogie directe avec les grandeurs correspondantes de la théorie de Dirac.

C'est la méthode que nous emploierons systématiquement dans cet exposé. Nous commencerons par le cas le plus simple, celui de la fusion de deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ fournissant les équations d'une particule de spin total maximum $S = 1$ ou, si l'on préfère ce langage, fournissant à la fois les équations d'une particule de spin total unique $s = 1$ et celles d'une particule de spin total unique $s = 0$. Cette théorie contiendra comme cas particulier celle du photon et celle du mésoton.

2. Fusion de deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ ⁽¹⁾. — Pour réaliser la fusion de deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ en une seule particule de spin 1, nous partirons des idées qui suivent.

Considérons d'abord une particule complexe formée de deux corpuscules de même masse et dépourvus de spin : admettons de plus que nous puissions négliger les corrections de relativité. Nous pourrions appliquer la Mécanique ondulatoire ancienne et non relativiste des corpuscules sans spin.

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'un des corpuscules, par x_2, y_2, z_2 celles de l'autre; nous aurons à considérer la propagation d'une onde $\Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)$ dans l'espace de configuration à six dimensions et à écrire l'équation des ondes

$$(1) \quad \frac{2\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \Psi + \left(\frac{2\pi i}{h} \right)^2 U \Psi,$$

U étant l'énergie potentielle mutuelle des deux corpuscules que nous supposerons dépendre seulement de leur distance.

⁽¹⁾ Je vais exposer cette fusion en employant une autre représentation que dans mon livre sur la Lumière. « Une nouvelle théorie de la Lumière : la Mécanique ondulatoire du photon ». Paris, Hermann, 1940.

Maintenant, à la place des six variables $x_1 \dots x_2$, nous pouvons introduire les six variables

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, & y = \frac{y_1 + y_2}{2}, & z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \\ \xi = \frac{x_1 - x_2}{2}, & \eta = \frac{y_1 - y_2}{2}, & \zeta = \frac{z_1 - z_2}{2}. \end{cases}$$

Les trois premières variables sont les coordonnées du centre de gravité de deux corpuscules de même masse. Les trois dernières sont les composantes de la demi-distance des corpuscules, et il est évident que U ne dépendra que de ξ, η, ζ . Avec les nouvelles variables (2), l'équation (1) prend la forme

$$(3) \quad \frac{2\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{4m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Psi + \left(\frac{2\pi i}{h} \right)^2 U \Psi.$$

Si la particule complexe a un état interne bien déterminé et n'est soumise à aucune action extérieure, on pourra poser

$$(4) \quad \Psi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \Phi(x, y, z, t) \varphi(\xi, \eta, \zeta, t),$$

où φ représente l'état intérieur et Φ l'état de translation du centre de gravité, c'est-à-dire de la particule considérée comme une unité. En substituant (4) dans (3), on voit que Φ doit obéir à l'équation.

$$(5) \quad \frac{2\pi i}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi,$$

où l'on a posé $M = 2m$. Comme l'équation (5) n'est pas autre chose que l'équation d'ondes non relativiste pour une particule de masse M , nous pouvons dire : « Tout se passe comme si le centre de gravité de la particule complexe était un corpuscule physique de masse $M = 2m$ égale à la masse totale de la particule. »

Il existe une méthode plus rapide, mais moins rigoureuse, pour retrouver le résultat précédent sans faire explicitement appel à la Mécanique ondulatoire des systèmes. Elle consiste à écrire les équations d'ondes pour les deux corpuscules de masse m constituant la particule complexe en les considérant comme indépendants et sans distinguer x_1, y_1, z_1 de x_2, y_2, z_2 , c'est-à-dire à écrire

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{2\pi i}{h} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_1 \\ \frac{2\pi i}{h} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_2, \end{cases}$$

Ψ_1 et Ψ_2 étant les fonctions d'onde des deux corpuscules. Puis pour exprimer, d'une manière peu correcte, que les deux corpuscules sont en réalité liés l'un à l'autre, on écrira que les ondes Ψ_1 et Ψ_2 doivent correspondre à la même énergie et à la même quantité de mouvement, ce qui s'exprime par les relations

$$(7) \quad \begin{cases} \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1 \Psi_2), \\ \Psi_1 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = \Psi_2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Psi_1 \Psi_2), \end{cases}$$

et des relations analogues à la dernière en y et z . Si nous posons alors

$$(8) \quad \Phi = \Psi_1 \Psi_2,$$

et si nous ajoutons l'une à l'autre les deux équations (6), compte tenu de (7), nous retrouverons l'équation

$$(9) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2M} \Delta \Phi.$$

Nous avons ainsi trouvé un moyen, en principe peu correct mais qui réussit, d'exprimer en Mécanique ondulatoire le mouvement du centre de gravité de la particule complexe considérée comme une unité, en liant le mouvement des deux constituants sans avoir à préciser la nature de leur interaction.

Pour réaliser la fusion de deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ en une particule de spin total maximum 1, nous devons chercher des équations qui représentent le mouvement de ladite particule considérée comme une unité, c'est-à-dire chercher à opérer un passage tout à fait semblable à celui que nous avons effectué dans les deux modes de raisonnement précédents. Mais ici il nous faut employer une Mécanique ondulatoire relativiste et, si l'on veut utiliser un mode de raisonnement rigoureux analogue à la première déduction que nous avons faite plus haut avec la Mécanique ondulatoire non relativiste, on se heurte à une grave difficulté, car on a alors affaire à un système de deux corpuscules et l'on ne sait pas à l'heure actuelle traiter rigoureusement la Mécanique ondulatoire *relativiste* d'un système de corpuscules. En profitant de la circonstance simplificatrice que les deux corpuscules ont ici même masse par hypothèse, on peut bien tenter de faire une telle théorie ⁽¹⁾, mais elle est sujette à pas mal

(1) Voir la Note de l'auteur aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 203, 1936, p. 473.

de difficultés et d'objections. Par contre, il est aisé de reprendre en Mécanique ondulatoire relativiste le second genre de raisonnement peu rigoureux que nous avons employé tout à l'heure dans le cadre de la Mécanique ondulatoire non relativiste. C'est cette voie que nous allons suivre.

Tout d'abord, nous écrirons les équations d'ondes des deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ et de même masse propre $\frac{m_0}{2}$ comme s'ils étaient indépendants et sans distinguer les coordonnées du premier de celles du second. Comme nous supposons que ces corpuscules obéissent aux équations de Dirac, nous écrirons en explicitant complètement

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^4 (\alpha_1)_{il} \Psi_l^{(1)} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_1^4 (\alpha_2)_{il} \Psi_l^{(1)} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \sum_1^4 (\alpha_3)_{il} \Psi_l^{(1)} + z \frac{m_0 c}{2} \sum_1^4 (\alpha_4)_{il} \Psi_l^{(1)}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_k^{(2)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^4 (\alpha_1)_{kl} \Psi_l^{(2)} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_1^4 (\alpha_2)_{kl} \Psi_l^{(2)} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \sum_1^4 (\alpha_3)_{kl} \Psi_l^{(2)} + z \frac{m_0 c}{2} \sum_1^4 (\alpha_4)_{kl} \Psi_l^{(2)}, \end{aligned} \right.$$

où $\Psi^{(1)}$ et $\Psi^{(2)}$ désignent respectivement les fonctions d'onde du premier et du second corpuscule et où $i, k = 1, 2, 3, 4$. Dans ces équations, nous avons désigné par $\frac{m_0}{2}$ la masse propre de chacun des corpuscules, m_0 devant désigner plus loin la masse propre de la particule formée par leur ensemble ⁽¹⁾.

Continuant à transposer le second mode de raisonnement que nous avons utilisé plus haut en Mécanique ondulatoire non relativiste, nous devons maintenant exprimer que les deux corpuscules constituants sont liés et qu'ils ont même énergie et même quantité de mouvement, ce qui nous conduit à écrire

$$(11) \quad \Psi_k^{(2)} \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial q} = \Psi_i^{(1)} \frac{\partial \Psi_k^{(2)}}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\Psi_i^{(1)} \Psi_k^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \Psi_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

q étant l'une quelconque des quatre variables d'espace-temps $xyzt$ et $\Psi_{ik} = \Psi_i^{(1)} \Psi_k^{(2)}$ étant l'une quelconque des seize composantes d'une

(1) En adoptant pour les α_i les mêmes valeurs dans les deux équations (10), nous prenons une autre représentation que dans nos exposés antérieurs.

fonction d'onde que nous considérerons comme étant celle de la particule complexe résultant de la « fusion » des deux corpuscules et qui nous servira à décrire le mouvement de cette particule considérée comme une unité physique.

Pour aller plus loin, nous définirons maintenant huit matrices $\alpha_r^{(1)}$ et $\alpha_r^{(2)}$ avec $r = 1, 2, 3, 4$ ayant chacune seize lignes et seize colonnes par les formules

$$(12) \quad (\alpha_r^{(1)})_{ik,lm} = (\alpha_r)_{il} \delta_{km}; \quad (\alpha_r^{(2)})_{ik,lm} = (\alpha_r)_{km} \delta_{il},$$

tous les indices pouvant varier de 1 à 4. D'après les propriétés des matrices α de Dirac, les matrices α satisferont aux relations

$$(13) \quad \alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(1)} + \alpha_s^{(1)} \alpha_r^{(1)} = 2 \delta_{rs} 1; \quad \alpha_r^{(2)} \alpha_s^{(2)} + \alpha_s^{(2)} \alpha_r^{(2)} = 2 \delta_{rs} 1, \quad \alpha_s^{(1)} \alpha_r^{(2)} = \alpha_r^{(2)} \alpha_s^{(1)}.$$

Adoptant une convention tout à fait analogue à celle qui a été employée en théorie de Dirac, nous poserons par définition

$$(14) \quad \alpha_r^{(j)} \Psi_{ik} = \sum_{l,m}^4 (\alpha_r^{(j)})_{ik,lm} \Psi_{lm}, \quad (j = 1, 2).$$

Ceci posé, multiplions la première équation (10) par $\Psi^{(2)k}$ et la seconde par $\Psi^{(1)k}$: il vient en tenant compte des conditions et définitions admises

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3^{(1)} + m_0 c \alpha_4^{(1)} \right) \Psi_{ik} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2^{(2)} + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3^{(2)} + m_0 c \alpha_4^{(2)} \right) \Psi_{ik} \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ce système comprend deux groupes de seize équations chacun, ce qui fait au total trente-deux équations auxquelles doivent satisfaire les seize composantes du Ψ de la particule. Nous montrerons plus loin que ces équations sont compatibles.

Tels sont les raisonnements qui nous ont conduit à considérer les équations (I) comme étant les équations d'ondes de la particule de spin total maximum 1 et de masse propre m_0 obtenue par fusion de deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ et de même masse propre.

L'opération physique de fusion des deux corpuscules est en somme exprimée mathématiquement par la définition (12) des matrices α à seize lignes et seize colonnes à partir des matrices α de Dirac à quatre lignes et quatre colonnes. Or, il se trouve que ces définitions (12) correspondent précisément à l'opération mathématique que l'on nomme fusion (*Verschmelzung*) des matrices.

Maintenant que nous avons obtenu les équations fondamentales (I), nous pouvons naturellement faire abstraction de la méthode plus ou moins batarde qui a permis de les obtenir et les considérer *par définition* comme étant les équations d'ondes de la particule de spin total maximum $s = 1$. C'est ce que nous ferons désormais.

3. Diverses formes des équations d'ondes de la particule de spin total maximum 1. — La forme (I) des équations d'ondes de la particule de spin maximum 1 nous paraît être fondamentale : elle est aussi très utile dans beaucoup de calculs. Néanmoins, d'autres formes sont aussi intéressantes à considérer.

Tout d'abord, nous pouvons combiner les équations (I) par addition et soustraction; nous obtenons alors le système équivalent

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1^{(1)} + a_1^{(2)}}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{a_2^{(1)} + a_2^{(2)}}{2} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \frac{a_3^{(1)} + a_3^{(2)}}{2} + \kappa m_0 c \frac{a_4^{(1)} + a_4^{(2)}}{2} \right] \Psi_{ik}, \\ (B) \quad 0 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1^{(1)} - a_1^{(2)}}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{a_2^{(1)} - a_2^{(2)}}{2} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \frac{a_3^{(1)} - a_3^{(2)}}{2} + \kappa m_0 c \frac{a_4^{(1)} - a_4^{(2)}}{2} \right] \Psi_{ik}. \end{array} \right.$$

Sous cette forme, les équations se répartissent encore en deux groupes de seize équations chacun. Les seize équations du groupe (A) contiennent chacune l'une des dérivées $\frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial t}$: elles déterminent complètement l'évolution au cours du temps des seize Ψ_{ik} à partir de leurs formes initiales supposées données à un instant initial quelconque. On peut les nommer les « équations d'évolution ». Elles sont tout à fait comparables aux équations

en $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ de la théorie de Maxwell. Les seize équations du groupe (B), au contraire, ne contiennent pas les dérivées des Ψ_{ik} par rapport au temps : ce sont des conditions que les Ψ_{ik} doivent remplir à chaque instant. Nous les nommerons les équations de condition : elles sont tout à fait analogues aux équations en divergence de la théorie de Maxwell.

Comme cela a déjà lieu pour les équations de Maxwell, on peut démontrer que les équations de condition sont compatibles avec les équations d'évolution, c'est-à-dire que, si l'on se donne à l'instant initial des Ψ_{ik} satisfaisant aux équations de condition, les Ψ_{ik} satisferont toujours ensuite à ces conditions en vertu même des équations d'évolution. Pour le voir, il suffit évidemment de prouver que la dérivée par rapport au

temps du second membre des équations (B) est nulle en vertu des équations (A), ce qui s'exprime par la relation

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1^{(1)} - a_1^{(2)}}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{a_2^{(1)} - a_2^{(2)}}{2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{a_3^{(1)} - a_3^{(2)}}{2} + z m_0 c \frac{a_4^{(1)} - a_4^{(2)}}{2} \right] \\ & \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1^{(1)} + a_1^{(2)}}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{a_2^{(1)} + a_2^{(2)}}{2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{a_3^{(1)} + a_3^{(2)}}{2} + z m_0 c \frac{a_4^{(1)} + a_4^{(2)}}{2} \right] \Psi_{ik} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, cette équation est bien vérifiée en raison des relations de commutation existant entre les a .

Nous pouvons aussi démontrer le théorème suivant : « Quand le développement du Ψ en série (ou intégrale) de Fourier ne contient pas de termes de fréquence nulle (ce qui est toujours le cas si m_0 n'est pas nulle), les équations (B) sont toujours satisfaites si les équations (A) le sont. » En effet, nous avons alors par hypothèse

$$(16) \quad \Psi_{ik} = \sum_n c_{ik}^{(n)}(x, y, z) e^{2\pi i \nu_n t} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

tous les ν_n étant différents de zéro. Désignons par $[\]$ l'opérateur qui figure au second membre de (B). La dérivée de ce second membre par rapport au temps sera

$$\sum_n 2\pi i \nu_n e^{2\pi i \nu_n t} [\] c_{ik}^{(n)}(x, y, z).$$

Or, nous avons démontré que les équations (A) entraînent la nullité de cette dérivée. Puisque, par hypothèse, aucun des ν_n n'est nul, il faut que tous les $[\] c_{ik}^{(n)}$ soient nuls et il en est de même de $[\] \Psi_{ik}$. Les équations (B) sont bien automatiquement satisfaites si les équations (A) le sont.

On peut mettre les équations de la particule de spin maximum 1 sous beaucoup d'autres formes équivalentes aux précédentes. Les équations (I) ont une forme analogue aux équations de Dirac écrites avec les matrices α , ce qui isole au premier membre les termes en $\frac{\partial}{\partial t}$. Quand on les combine par addition et soustraction, on obtient les équations (II) dont l'un des groupes contient seize équations avec termes en $\frac{\partial}{\partial t}$ et l'autre groupe seize équations sans termes en $\frac{\partial}{\partial t}$. Si l'on multiplie les équations (I) par $a_4^{(1)}$ et $a_4^{(2)}$ respectivement, on obtiendra des équations analogues aux équations de Dirac écrites avec les matrices γ de von Neumann qui font jouer un rôle symétrique aux coordonnées d'espace et de temps. En les com-

binant par addition et soustraction, on pourra obtenir d'autres formes encore. Nous signalerons particulièrement la forme suivante qui présente un intérêt spécial en théorie du photon pour l'étude des interactions entre matière et rayonnement :

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} (C) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{a_i^{(1)} + a_i^{(2)}}{2} \Psi_{ik} \\ \quad = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1^{(1)} a_i^{(2)} + a_1^{(2)} a_i^{(1)}}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{a_2^{(1)} a_i^{(2)} + a_2^{(2)} a_i^{(1)}}{2} \right. \\ \quad \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \frac{a_3^{(1)} a_i^{(2)} + a_3^{(2)} a_i^{(1)}}{2} + z m_0 c a_i^{(1)} a_i^{(2)} \right] \Psi_{ik}, \\ (D) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{a_i^{(1)} - a_i^{(2)}}{2} \Psi_{ik} \\ \quad = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1^{(1)} a_i^{(2)} - a_1^{(2)} a_i^{(1)}}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{a_2^{(1)} a_i^{(2)} - a_2^{(2)} a_i^{(1)}}{2} \right. \\ \quad \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \frac{a_3^{(1)} a_i^{(2)} - a_3^{(2)} a_i^{(1)}}{2} \right] \Psi_{ik}. \end{array} \right.$$

Ici le groupe (C) contient toutes les seize équations renfermant un terme de masse, tandis que le groupe (D) contient les seize équations sans termes de masse. Au lieu de séparer les équations contenant les dérivées $\frac{\partial}{\partial t}$ de celles qui ne les contiennent pas, on sépare les équations contenant des termes en m_0 de celles qui n'en contiennent pas.

Les équations (III) présentent une particularité intéressante. Tandis que le premier groupe des équations (II) suffit à déterminer l'évolution de l'onde Ψ à partir d'un état initial donné, il n'en est pas de même *a priori* pour les équations (III), car le premier groupe de ces équations contient seulement huit des seize $\frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial t}$. Néanmoins, si la masse propre m_0 n'est pas nulle, ce premier groupe d'équations entraîne automatiquement le second et suffit par suite pour déterminer l'évolution du Ψ . On le démontre aisément.

Partant de l'ensemble des équations fondamentales prises, par exemple, sous la forme (I) et tenant compte des relations entre les $a_r^{(j)}$, on voit facilement que *chacun* des seize Ψ_{ik} satisfait à l'équation du second ordre

$$(IV) \quad \square \Psi_{ik} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_{ik}}{\partial t^2} - \Delta \Psi_{ik} = z^2 m_0^2 c^2 \Psi_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Si l'on suppose les termes en m_0^2 nuls ou négligeables, on retrouve l'équation classique de propagation des ondes lumineuses, et l'on voit ainsi que, pour faire rentrer la théorie du photon dans la Mécanique ondulatoire des particules de spin 1, il faudra faire tendre la masse propre m_0 du photon vers zéro.

4. Composantes tensorielles de l'onde Ψ . Équations maxwelliennes et non maxwelliennes. — Les composantes Ψ_{ik} de l'onde Ψ pour une particule de spin maximum 1 se transforment comme les produits $\Psi_i \Psi_k$ des composantes d'un Ψ de Dirac et n'ont pas le caractère de composantes de tenseurs. Néanmoins, il est ici possible (et nous verrons que cette circonstance se retrouve pour toutes les particules de spin entier) de remplacer les seize Ψ_{ik} par seize de leurs combinaisons linéaires ayant le caractère de composantes de tenseur. Nous emploierons, pour le montrer, une méthode qui a été utilisée par M. Petiau et M^{me} Tonnelat.

Dans la présente étude, nous allons utiliser les coordonnées d'Univers

$$(17) \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

et les matrices de von Neumann

$$(18) \quad \gamma_1 = i\alpha_1\alpha_1; \quad \gamma_2 = i\alpha_1\alpha_2; \quad \gamma_3 = i\alpha_1\alpha_3; \quad \gamma_4 = \alpha_1$$

satisfaisant aux relations

$$(19) \quad \gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2\delta_{ik}1.$$

Nous remarquerons qu'avec la représentation adoptée pour les α [formules (17) du Chapitre V], les matrices γ_2 et γ_4 sont réelles, alors que les matrices γ_1 et γ_3 sont purement imaginaires. Introduisons encore la notation abrégée

$$(20) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

Les équations (I) pourront alors s'écrire

$$(21) \quad \begin{cases} \sum_{\mu=1}^4 \partial_\mu \sum_{l=1}^4 (\gamma_\mu)_{il} \delta_{km} \Psi_{lm} + i\alpha m_0 c \Psi_{ik} = 0 \\ \sum_{\mu=1}^4 \partial_\mu \sum_{l=1}^4 (\gamma_\mu)_{km} \delta_{il} \Psi_{lm} + i\alpha m_0 c \Psi_{ik} = 0 \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ou encore

$$(22) \quad \begin{cases} \sum_{\mu=1}^4 \partial_\mu \sum_{l=1}^4 (\gamma_\mu)_{il} \Psi_{lk} + i\alpha m_0 c \Psi_{ik} = 0, \\ \sum_{\mu=1}^4 \partial_\mu \sum_{m=1}^4 (\gamma_\mu)_{km} \Psi_{im} + i\alpha m_0 c \Psi_{ik} = 0. \end{cases}$$

Remarquons maintenant que les seize composantes Ψ_{ik} de l'onde Ψ peuvent être considérées comme les éléments d'une matrice à quatre lignes et quatre colonnes. On pourra donc écrire les équations (22) sous la forme matricielle

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \gamma_{\mu} \Psi + i \kappa m_0 c \Psi = 0, \\ \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \Psi \widetilde{\gamma}_{\mu} + i \kappa m_0 c \Psi = 0. \end{array} \right.$$

Multiplions ces deux équations matricielles en arrière par une même matrice Γ à quatre lignes et quatre colonnes, matrice que nous déterminerons plus loin. Il vient

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \gamma_{\mu} \Psi \Gamma + i \kappa m_0 c \Psi \Gamma = 0, \\ \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \Psi \widetilde{\gamma}_{\mu} \Gamma + i \kappa m_0 c \Psi \Gamma = 0. \end{array} \right.$$

Remarquons que les $\widetilde{\gamma}_{\mu}$ anticommulent entre eux et que, les γ_i étant hermitiens et ayant les caractères de réalité précisés plus haut, on a

$$(25) \quad \widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1^* = -\gamma_1; \quad \widetilde{\gamma}_2 = \gamma_2^* = \gamma_2; \quad \widetilde{\gamma}_3 = \gamma_3^* = -\gamma_3; \quad \widetilde{\gamma}_4 = \gamma_4^* = \gamma_4.$$

Si Γ commute avec γ_1 et γ_3 et anticommute avec γ_2 et γ_4 , on pourra alors écrire les équations (24) sous la forme

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \gamma_{\mu} \Psi \Gamma + i \kappa m_0 c \Psi \Gamma = 0, \\ \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \Psi \Gamma \gamma_{\mu} - i \kappa m_0 c \Psi \Gamma = 0. \end{array} \right.$$

Or, nous pouvons obtenir une matrice Γ ayant les propriétés demandées en posant

$$(27) \quad \Gamma = i \gamma_2 \gamma_4 \quad (\Gamma^2 = 1).$$

Notons maintenant qu'avec les γ_i on peut écrire les seize matrices fondamentales de la théorie de Dirac sous la forme

$$(28) \quad 1 = \gamma_0, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3, \quad \gamma_4, \quad i \gamma_1 \gamma_2 = \gamma_{12}, \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \gamma_{1234}$$

en faisant les produits des γ . Ce sont là seize matrices à quatre lignes et quatre colonnes qui forment ce que les mathématiciens nomment un système complet de nombres hypercomplexes. Chacune de ces matrices a pour carré l'unité. Toutes ont leur trace nulle sauf, bien entendu, la matrice $\gamma_0 = 1$ dont la trace est égale à 4.

Ceci posé, nous allons développer la matrice $\Psi \Gamma$ à quatre lignes et quatre colonnes suivant ce système de seize matrices de base en posant

$$(29) \quad \Psi \Gamma = \gamma_0 \varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2 + \dots + i \gamma_1 \gamma_2 \varphi_{12} + \dots \\ + i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \varphi_{123} + \dots + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \varphi_{1234} = \sum_1^{16} \varphi_a (\gamma_a),$$

ou plus explicitement

$$(30) \quad (\Psi \Gamma)_{ik} = \sum_1^{16} \varphi_a (\gamma_a)_{ik}.$$

D'après le caractère tensoriel des seize matrices (28), on peut penser que les seize φ_a auront des caractères tensoriels correspondant à leurs indices et faciles à prévoir d'après le développement ci-dessus : φ_0 sera un invariant; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps; $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{34}, \varphi_{13}, \varphi_{24}, \varphi_{34}$ les six composantes distinctes d'un tenseur antisymétrique de rang 2; $\varphi_{234}, \varphi_{341}, \varphi_{412}, \varphi_{123}$ les quatre composantes distinctes d'un tenseur complètement antisymétrique de rang 3, c'est-à-dire pratiquement d'un quadrivecteur; enfin φ_{1234} sera l'unique composante distincte d'un tenseur complètement antisymétrique de rang 4, c'est-à-dire pratiquement un invariant.

Nous saisisons ici l'occasion d'introduire des conventions qui nous seront souvent utiles dans la suite. Chaque fois qu'un tenseur sera antisymétrique sur certains de ses indices, nous mettrons ces indices entre crochets : nous écrirons donc ici $\varphi_{[12]}, \varphi_{[123]}, \varphi_{[1234]}, \dots$. Quand, par contre, il nous arrivera d'avoir affaire à des tenseurs qui soient symétriques sur certains de leurs indices, nous mettrons ces indices entre parenthèses : ainsi $a_{(ik)}$ représentera une des composantes d'un tenseur symétrique de rang 2.

En substituant le développement (30) dans les équations (26), nous trouvons

$$(31) \quad \begin{cases} \sum_a \left[\sum_1^4 \partial_\mu \gamma_\mu \gamma_a \varphi_a + i \kappa m_0 c \gamma_a \varphi_a \right] = 0, \\ \sum_a \left[\sum_1^4 \partial_\mu \gamma_a \gamma_\mu \varphi_a - i \kappa m_0 c \gamma_a \varphi_a \right] = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_a \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} (\gamma_{\mu} \gamma_a - \gamma_a \gamma_{\mu})_{ik} \varphi_a + i \kappa m_0 c (\gamma_a)_{ik} \varphi_a = 0, \\ \sum_a \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} (\gamma_{\mu} \gamma_a + \gamma_a \gamma_{\mu})_{ik} \varphi_a = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \end{array} \right.$$

En écrivant que dans chacune des équations précédentes, les coefficients de chacune des seize matrices fondamentales sont nuls, on obtient trente-deux équations entre les φ_a dont l'une se réduit d'ailleurs à une identité. En posant

$$(33) \quad k_0 = -i \kappa m_0 c = \frac{2\pi}{h} m_0 c,$$

les équations obtenues prennent la forme tensorielle suivante :

$$(M.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \varphi_{[\mu\nu]} = k_0 \varphi_{\nu}, \quad \partial_{\mu} \varphi_{\nu} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu} = k_0 \varphi_{[\mu\nu]}, \\ \partial_{\mu} \varphi_{[\nu\rho]} + \partial_{\nu} \varphi_{[\rho\mu]} + \partial_{\rho} \varphi_{[\mu\nu]} = 0, \quad \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \varphi_{\mu} = 0, \end{array} \right.$$

$$(N. M.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \varphi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = k_0 \varphi_{[\nu\rho\sigma]}, \quad \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \varphi_{[\mu\nu\rho]} = 0; \\ \partial_{\mu} \varphi_{[\nu\rho\sigma]} + \partial_{\nu} \varphi_{[\rho\sigma\mu]} + \partial_{\rho} \varphi_{[\sigma\mu\nu]} + \partial_{\sigma} \varphi_{[\mu\nu\rho]} = k_0 \varphi_{[\mu\nu\rho\sigma]}, \\ m_0 \varphi_0 = 0; \quad \partial_{\nu} \varphi_0 = 0. \end{array} \right.$$

Rappelons que nous employons ici les variables d'Univers. On voit que les équations se divisent en deux groupes entièrement séparés. Si nous posons

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x = K k_0 \varphi_{23}, \quad H_y = K_0 k_0 \varphi_{31}, \quad H_z = K k_0 \varphi_{12}, \\ E_x = i K k_0 \varphi_{11}, \quad E_y = i K k_0 \varphi_{23}, \quad E_z = i K k_0 \varphi_{34}, \\ A_x = K \varphi_1, \quad A_y = K \varphi_2, \quad A_z = K \varphi_3, \quad iV = K \varphi_4, \end{array} \right.$$

où K est une constante complexe qu'en théorie du photon, si l'on emploie les unités d'Heaviside, on doit prendre égale à $\frac{h}{4\pi\sqrt{m_0}}$, les équations (M) prennent la forme familière

$$(M.) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E}; \quad \text{div } \vec{H} = 0; \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} + k_0^2 \vec{A}; \quad \text{div } \vec{E} = -k_0^2 V; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0. \end{array} \right.$$

Ce sont des équations de Maxwell complétées par des termes en m_0^2 : elles coïncident avec les équations ordinaires de Maxwell dans le vide si les termes en m_0^2 sont nuls ou négligeables. C'est sur cette remarque que repose la Mécanique ondulatoire du photon telle que nous l'avons développée dans d'autres Ouvrages.

En posant encore

$$(35) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= I_1; & \varphi_{1234} &= I_2; & \varphi_{234} &= i\sigma_1; \\ \varphi_{341} &= i\sigma_2; & \varphi_{412} &= i\sigma_3; & \varphi_{123} &= -\sigma_1, \end{aligned}$$

nous mettons les équations (N. M.) sous la forme

$$(N. M.) \quad \left\{ \begin{aligned} m_0 I_1 &= 0; & \frac{1}{c} \frac{\partial I_1}{\partial t} &= 0; & \overrightarrow{\text{grad}} I_1 &= 0; \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial I_2}{\partial t} &= ik_0 \sigma_4; & \overrightarrow{\text{grad}} I_2 &= ik_0 \vec{\sigma}; & \frac{1}{c} \frac{\partial \sigma_4}{\partial t} + \text{div} \vec{\sigma} &= -ik_0 I_2; \\ \text{rot} \vec{\sigma} &= 0; & \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \text{grad} \sigma_4 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les équations non maxwelliennes de la théorie du photon (1).

La division des équations tensorielles en deux groupes complètement indépendants doit évidemment être mise en rapport avec l'existence, pour la particule obtenue par la fusion de deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$, de deux états de spin total, l'un correspondant à $s=1$ (état triplet), l'autre à $s=0$ (état singulet). Nous verrons en effet que les équations (M) décrivent un état triplet $s=1$ avec, pour la composante S_z , les trois états correspondant à $s_z=-1, 0$ et $+1$ et que les équations (N. M.) décrivent l'état singulet correspondant à $s=0, s_z=0$. Comme nous l'avons remarqué en considérant cette question d'une façon générale, l'indépendance des grandeurs maxwelliennes et des grandeurs non maxwelliennes nous permet de considérer les équations (M) comme décrivant une particule de spin total unique $s=1$ et les équations (N. M.) comme décrivant une autre particule de spin total unique $s=0$, sans qu'on puisse dire *a priori* si ces particules existent réellement dans la nature.

Envisagées à ce point de vue, les équations (M) considérées isolément seront, pour une masse propre m_0 nulle ou évanouissante, les équations de la particule photon, et nous rejoindrons ainsi la théorie électromagnétique de Maxwell.

(1) Voir *Mécanique ondulatoire du photon*, p. 153 et 159.

De même, avec une masse m_0 égale à environ 250 fois celle de l'électron, les mêmes équations (M) seront les équations de l'électron lourd ou Méson dont la forme avait été prévue par M. Proca dans le cas d'absence de champ extérieur. Quant aux équations (N. M.) considérées isolément, elles décrivent une particule de spin total $s = 0$: jusqu'ici on ne connaît pas effectivement de particules représentées par ces équations, à moins qu'on ne puisse les appliquer à des noyaux atomiques de spin zéro (tels que les noyaux He et O) considérés comme des unités.

Partant des résultats acquis en théorie de Dirac, il est aisé de montrer que, quand on change de représentation en prenant d'autres valeurs des α et par suite des a , chaque matrice a se transforme en une matrice $S^{-1}aS$, la matrice S à seize lignes et seize colonnes étant unitaire ($S^{-1} = S^+$), et simultanément toute solution Ψ est transformée en $S\Psi$. Toujours comme en théorie de Dirac, il en résulte qu'une densité d'élément de matrice $\Psi_1^* F \Psi_2$ devient $\Psi_1'^* S^+ F S \Psi_2' = \Psi_1'^* F' \Psi_2'$, ce qui établit l'invariance de ces densités à signification physique (ainsi d'ailleurs que des densités de moyenne) par rapport au choix en partie arbitraire de la représentation. De même encore, à partir de l'invariance relativiste des équations de Dirac, on démontre celle des équations (I), la fonction Ψ devenant après une transformation de Lorentz $A\Psi$ où A est une matrice à seize lignes et seize colonnes, généralement non unitaire : plus précisément, Ψ_{ik} se transforme comme le produit $\Psi_i \Psi_k$ de deux composantes d'un Ψ de Dirac.

En théorie du photon, il est intéressant de définir les composantes tensorielles de l'onde Ψ comme étant des densités d'éléments de matrice correspondant au passage de la particule depuis l'état défini par l'onde Ψ considérée jusqu'à un *état d'annihilation* décrit par une certaine solution invariante $\Psi^{(0)}$ de l'équation des ondes ⁽¹⁾ : l'on montre que ces définitions coïncident avec les précédentes. Il en résulte que les grandeurs tensorielles ne changent pas quand on change de représentation, comme physiquement cela doit être. Par contre, les composantes Ψ_{ik} du Ψ changent quand on change les valeurs de $a_r^{(j)}$. En particulier, ces composantes du Ψ n'ont pas la même valeur avec le choix *symétrique* des $a_r^{(j)}$ fait dans le présent exposé et avec le choix différent que nous avons jusqu'ici l'habitude de faire en exposant la théorie du photon. Mais, répétons-le, les grandeurs tensorielles sont, elles, indépendantes du choix des a .

⁽¹⁾ Voir *Mécanique ondulatoire du photon*, p. 153 et 192.

Le développement (29) de $\Psi\Gamma$ nous permet aisément d'obtenir l'expression des seize composantes Ψ_{ik} en fonction linéaire des seize φ_a ou inversement. De ce développement, on tire d'abord, en effet,

$$(36) \quad \Psi\Gamma = \sum_a \Psi_a \gamma_a \Gamma$$

ou plus explicitement

$$(37) \quad \Psi_{ik} = \sum_a \varphi_a (\gamma_a \Gamma)_{ik},$$

car Γ donné par (27) a son carré égal à 1. La formule (37), en nous fournissant l'expression de chacune des composantes Ψ_{ik} en fonction linéaire des φ_a , nous permet d'exprimer chaque Ψ_{ik} en fonction linéaire des seize grandeurs tensorielles $A_x, \dots, I_2$. Ce sont ces expressions qui avaient été calculées en théorie du photon par M. Géhéniau, il y a quelques années, et dont nous nous sommes servis dans d'autres exposés⁽¹⁾.

Si l'on se souvient maintenant que, parmi les seize matrices γ_a , seule la matrice $\gamma_0 = 1$ a une trace non nulle (égale à 4), on obtient d'abord, en multipliant le développement (29) par γ_b en avant,

$$(38) \quad \gamma_b \Psi\Gamma = \sum_a \varphi_a \gamma_b \gamma_a,$$

puis, en prenant la trace des deux membres de cette équation,

$$(39) \quad \varphi_b = \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma_b \Psi\Gamma),$$

formule qui nous permet d'exprimer les composantes φ , et par suite les seize grandeurs tensorielles $A_x, \dots, I_2$, sous forme de combinaisons linéaires des Ψ_{ik} . Ces combinaisons sont bien connues en théorie du photon⁽¹⁾.

Donnons, pour terminer, quelques explications sur la question suivante : pourquoi avons-nous développé suivant les matrices γ_a la matrice $\Psi\Gamma$ plutôt que, par exemple, la matrice Ψ elle-même ? Cela tient à la représentation que nous avons employée. Si nous étions partis de la fusion de deux corpuscules de Dirac complémentaires, comme nous l'avons fait habituellement dans nos exposés antérieurs de la théorie du photon, nous aurions abouti à une représentation utilisant d'autres $\alpha_r^{(j)}$ que ceux que nous avons obtenus ici en combinant *symétriquement*

(1) Voir *Mécanique ondulatoire du photon*, p. 160.

deux corpuscules de Dirac, et nous aurions dû alors, pour obtenir les équations tensorielles (M.) et (N. M.), développer suivant les γ_a la matrice Ψ multipliée par une matrice Γ autre que (27). Par exemple, avec la représentation adoptée par M^{me} Tonnelat dans sa thèse de doctorat ⁽¹⁾, on est amené à développer la matrice Ψ elle-même suivant les γ_a , c'est-à-dire à prendre $\Gamma = 1$; les formules obtenues sont alors un peu plus simples qu'avec la représentation adoptée ici. Mais notre représentation a, de par sa symétrie, des avantages importants pour trouver très rapidement les solutions « ondes planes monochromatiques » pour des particules de spin quelconque à partir des solutions correspondantes de la théorie de Dirac : c'est la raison qui nous a décidé à choisir ici cette représentation.

5. Ondes planes monochromatiques pour la particule de spin maximum 1. — Il s'agit de trouver les ondes monochromatiques planes, solutions des équations (I) définies par

$$(40) \quad \Psi_{ik} = a_{ik} e^{i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Il est facile de les former en partant des solutions planes monochromatiques des équations de Dirac. Nous allons récrire ces solutions en introduisant les relations

$$(41) \quad k = \frac{2\pi}{hc} W; \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{h} \vec{p}; \quad k^2 = |\vec{k}|^2 - z^2 m_0^2 c^2 = |\vec{k}|^2 + k_0^2$$

et les abréviations

$$(42) \quad \Delta = k + \frac{2\pi}{h} m_0 c = k + k_0; \quad P = e^{i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

En prenant, pour simplifier, la direction de propagation comme axe des z , une onde plane monochromatique de l'électron de Dirac s'exprime sous la forme

$$(43) \quad \Psi_1 = -\frac{k_z}{\Delta} C_1 P; \quad \Psi_2 = \frac{k_z}{\Delta} C_2 P; \quad \Psi_3 = C_1 P; \quad \Psi_4 = C_2 P.$$

Nous savons que les composantes Ψ_k d'indice impair et par suite la constante C_1 correspondent à l'état de spin $S_z = \frac{h}{4\pi}$, tandis que les composantes d'indice pair et par suite la constante C_2 correspondent à

⁽¹⁾ Paris, Masson, 1940,

l'état de spin $S_z = -\frac{h}{2\pi}$, l'onde plane générale étant une superposition de ces deux états de spin.

Écrivons maintenant une autre solution du même type avec d'autres constantes C'_1 et C'_2

$$(44) \quad \Psi'_1 = -\frac{k_z}{\Delta} C'_1 P; \quad \Psi'_2 = \frac{k_z}{\Delta} C'_2 P; \quad \Psi'_3 = C'_1 P; \quad \Psi'_4 = C'_2 P.$$

Pour obtenir la composante Ψ_{ik} d'une solution des équations (I) représentant une onde plane monochromatique se propageant le long de l'axe des z , nous formerons le produit $\frac{\Psi_i \Psi'_k}{P}$ et, dans ce produit, nous remplacerons la constante $C_\mu C'_\nu$ (où $\mu, \nu = 1, 2$) qui s'y présente par une constante $C_{\mu\nu}$; nous aurons ainsi la composante cherchée. Cette règle se déduit de la façon dont les équations (I) ont été formées et de la représentation qui est employée dans le présent exposé.

On obtient ainsi pour l'onde plane monochromatique les composantes suivantes :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{11} = \left(\frac{k_z}{\Delta}\right)^2 C_{11} P; \quad \Psi_{13} = \Psi_{31} = -\frac{k_z}{\Delta} C_{11} P; \quad \Psi_{33} = C_{11} P, \quad S_z = +\frac{h}{2\pi}, \\ \Psi_{22} = \left(\frac{k_z}{\Delta}\right)^2 C_{22} P; \quad \Psi_{42} = \Psi_{24} = \frac{k_z}{\Delta} C_{22} P; \quad \Psi_{44} = C_{22} P, \quad S_z = -\frac{h}{2\pi}, \\ \Psi_{12} = -\left(\frac{k_z}{\Delta}\right)^2 C_{12} P; \quad \Psi_{14} = -\Psi_{32} = -\frac{k_z}{\Delta} C_{12} P; \quad \Psi_{34} = C_{12} P, \quad S_z = 0, \\ \Psi_{21} = -\left(\frac{k_z}{\Delta}\right)^2 C_{21} P; \quad \Psi_{23} = -\Psi_{41} = \frac{k_z}{\Delta} C_{21} P; \quad \Psi_{43} = C_{21} P, \quad S_z = 0. \end{array} \right.$$

La façon même dont ces expressions sont formées nous montre que chaque indice impair (dans les Ψ_{ik} et dans les $C_{\mu\nu}$) correspond à une contribution $+\frac{h}{4\pi}$ au spin S_z et chaque indice pair à une contribution $-\frac{h}{4\pi}$. Donc C_{11} et les Ψ_{ik} à deux indices impairs correspondent au spin $S_z = \frac{h}{2\pi}$, C_{22} et les Ψ_{ik} à deux indices pairs correspondent au spin $S_z = -\frac{h}{2\pi}$; enfin C_{12} et C_{21} ainsi que les Ψ_{ik} à deux indices de parité différente correspondent au spin $S_z = 0$. C'est ces correspondances que nous avons indiquées à droite du tableau (45). De plus, nous voyons aussi que chaque Ψ_{ik} contient dans son expression autant de fois le facteur $\frac{k_z}{\Delta}$ qu'il a d'indices appartenant à la paire 1, 2. Toutes ces remarques se

généraliseront pour les particules de spin supérieur à 1, et c'est ce qui fait l'intérêt de la représentation que nous avons adoptée.

Les $C_{\mu\nu}$ étant arbitraires sous réserve de normalisation, on voit que pour la particule de spin maximum 1, l'onde plane générale est formée par la superposition d'un état de spin $S_z = \frac{h}{2\pi}$, d'un état de spin $S_z = -\frac{h}{2\pi}$ et de deux états de spin $S_z = 0$.

Si l'on calcule les grandeurs tensorielles correspondantes, on trouve pour les grandeurs maxwelliennes les valeurs (à une constante multiplicative près)

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = (C_{22} - C_{11})P; \quad A_y = (C_{22} + C_{11})iP; \quad A_z = (C_{12} + C_{21})\frac{k}{k_0}P; \\ V = (C_{12} + C_{21})\frac{|\vec{k}|}{k_0}P; \\ E_x = -ik(C_{22} - C_{11})P; \quad E_y = k(C_{22} + C_{11})P; \quad E_z = -ik_0(C_{21} + C_{12})P; \\ H_x = -|\vec{k}|(C_{22} + C_{11})P; \quad H_y = -i|\vec{k}|(C_{22} - C_{11})P; \quad H_z = 0 \end{array} \right.$$

et pour les grandeurs non maxwelliennes les valeurs

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = -i|\vec{k}|(C_{12} - C_{21})P; \quad \sigma_4 = -ik(C_{12} - C_{21})P; \\ I_2 = ik_0(C_{12} - C_{21})P. \end{array} \right.$$

Si la masse propre m_0 est nulle ou évanouissante, on pourra confondre k et $\vec{k}$ et l'on aura alors

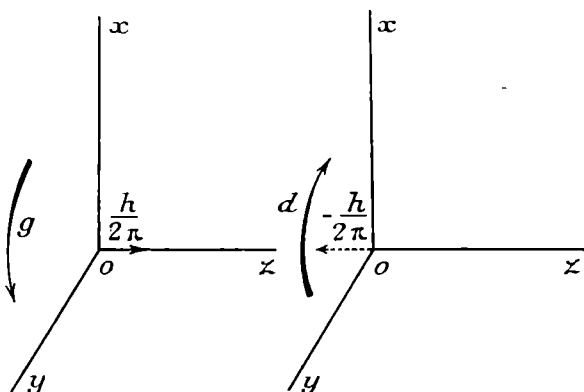
$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = H_y; \quad E_y = -H_x; \quad E_z = H_z = 0, \\ \sigma_z = \sigma_4; \quad I_2 = I_1 = \sigma_x = \sigma_y = 0. \end{array} \right.$$

Les grandeurs maxwelliennes obéiront alors aux équations classiques de Maxwell qui décrivent donc le mouvement d'un photon supposé de masse propre nulle. Si m_0 n'est pas nul, il y a une onde électromagnétique longitudinale qui reste naturellement très faible si m_0 est très petit : ces circonstances sont bien connues en théorie du photon.

En examinant les valeurs (46) des grandeurs maxwelliennes, on voit que les composantes transversales de ces grandeurs correspondent aux valeurs $\pm \frac{h}{2\pi}$ du spin S_z , puisqu'elles dépendent des constantes C_{11} et C_{22} . Si $C_{11} \neq 0$ et $C_{22} = 0$, on a $E_x = iE_y$ et l'onde plane a une polarisation circulaire gauche; si au contraire $C_{11} = 0$ et $C_{22} \neq 0$, on a $E_x = -iE_y$

et l'onde plane a une polarisation circulaire droite. Donc, la polarisation circulaire gauche de l'onde maxwellienne correspond à l'état de spin $S_z = \frac{h}{2\pi}$ et la polarisation circulaire droite à l'état de spin $S_z = -\frac{h}{2\pi}$, ce qui correspond à la représentation d'une rotation par un vecteur comme le montrent les schémas suivants :

Fig. 6.



Dans le cas général, l'onde transversale est formée par la superposition d'une onde circulaire gauche et d'une onde circulaire droite dont les proportions et les phases relatives sont données par le module et par l'argument des constantes complexes C_{11} et C_{22} . Il en résulte en général une polarisation elliptique. Cependant, si $|C_{11}| = |C_{22}|$, la polarisation est rectiligne et le vecteur $\vec{E}$ vibre dans le plan d'onde dans une direction faisant avec l'axe ox l'angle

$$(49) \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} (\arg C_{11} - \arg C_{22}).$$

L'égalité des modules de C_{11} et de C_{22} permet de dire en ce cas que la polarisation rectiligne s'obtient en superposant en proportions égales deux vibrations rectilignes de sens inverse, ce qui est un énoncé bien connu en théorie de la lumière.

La constante $C_{12} + C_{21} = C_{(12)}$, combinaison *symétrique* des constantes C_{12} et C_{21} , correspond à l'onde maxwellienne longitudinale, c'est-à-dire au cas $s_z = 0$ de l'état triplet $s = 1$: elle est représentée par les grandeurs A_z , V et E_z , cette dernière étant nulle si $m_0 = 0$ (théorie classique de Maxwell).

Enfin, la constante $C_{12} - C_{21} = C_{[12]}$, combinaison *antisymétrique* des constantes C_{12} et C_{21} , correspond à l'onde non maxwellienne, c'est-à-dire à l'état singulet $s = s_z = 0$.

Il est facile d'apercevoir l'analogie de tous ces résultats avec la théorie de l'atome d'Hélium telle qu'on la trouvera notamment exposée dans notre livre *Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules*, Chapitre VIII.

CHAPITRE VIII.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE DE LA PARTICULE DE SPIN MAXIMUM 1 (suite).

1. **Le quadrivecteur densité-flux.** — Dans toutes les formes de la Mécanique ondulatoire que nous avons étudiées jusqu'ici, nous avons rencontré une densité de probabilité de présence ρ qui était définie positive. En théorie de Dirac, cette grandeur apparaît comme la composante de temps d'un quadrivecteur densité-flux de probabilité obéissant à une équation de continuité, ce qui est conforme aux conceptions relativistes.

Dans la théorie de la particule de spin maximum 1, on doit aussi trouver un quadrivecteur densité-flux, puisqu'on a encore affaire à une théorie relativiste. Des considérations de variance montrent que ce quadrivecteur doit être défini par les composantes

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \sum_1^4 \Psi_{ik}^* \cdot \frac{a_i^{(1)} + a_i^{(2)}}{2} \Psi_{ik}; \\ \vec{f} = -c \sum_1^4 \Psi_{ik}^* \cdot \frac{\vec{a}^{(1)} a_i^{(2)} + \vec{a}^{(2)} a_i^{(1)}}{2} \Psi_{ik}, \end{array} \right.$$

où $\vec{a}^{(1)}$ et $\vec{a}^{(2)}$ sont les vecteurs-matrices ayant respectivement pour composantes $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}$ et $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}$. Les équations fondamentales prises par exemple sous la forme (III C) montrent aisément qu'avec les définitions (1), on a l'équation de continuité

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{f} = 0.$$

Il en résulte toujours que l'intégrale $\int_{\eta} \rho \, d\tau$ est constante au cours du temps et, par suite, qu'on peut normer la fonction Ψ d'une façon permanente si l'on impose à cette intégrale d'être égale à 1. On prendra donc

ici comme formule de normalisation du Ψ

$$(3) \quad \int_0^1 \sum_i \Psi_{ik}^* \cdot \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} \Psi_{ik} d\tau = 1.$$

Il est intéressant d'appliquer les définitions précédentes au cas de l'onde plane monochromatique pour vérifier qu'elles donnent des résultats satisfaisants. L'expression explicite de ρ est la suivante :

$$(4) \quad \rho = |\Psi_{33}|^2 + |\Psi_{44}|^2 + |\Psi_{34}|^2 + |\Psi_{43}|^2 - |\Psi_{11}|^2 - |\Psi_{22}|^2 - |\Psi_{12}|^2 - |\Psi_{21}|^2.$$

Substituons dans cette expression les valeurs des Ψ_{ik} précédemment calculées pour l'onde plane. Il vient

$$(5) \quad \rho = \sum_{\mu, \nu} |C_{\mu, \nu}|^2 \left(1 - \frac{|\vec{k}|^4}{\Delta^4} \right) = \sum_{\mu, \nu} |C_{\mu, \nu}|^2 \frac{8\pi k m_0 c}{h \Delta^2}.$$

[Cette expression est calculée pour une onde plane se propageant le long de l'axe des z , mais elle ne change évidemment pas pour un simple changement des axes d'espace sans mouvement relatif puisque ρ est une composante de temps et par suite l'expression (5) est générale.]

On trouve de même

$$(6) \quad f_x = f_y = 0, \quad f_z = c \sum_{\mu, \nu} |C_{\mu, \nu}|^2 \frac{8\pi |\vec{k}| m_0 c}{h \Delta^2} = \rho c \frac{|\vec{k}|}{k} = \rho \frac{|\vec{p}| c^2}{W}.$$

Le vecteur $\vec{f}$ correspond donc bien à un flux s'effectuant dans la direction de propagation avec la vitesse $\frac{pc^2}{W}$ qui est bien la vitesse attribuée à la particule par la Mécanique classique. Nos définitions (1) donnent donc bien ici le résultat qu'on devait attendre.

Si dans les expressions (1) de ρ et de $\vec{f}$, on remplace les Ψ_{ik} par leurs expressions à l'aide des grandeurs tensorielles, on trouve les formules

$$(7) \quad \begin{cases} \rho = \frac{2\pi i}{hc} \{ (\vec{\Lambda}^* \cdot \vec{E}) - (\vec{E}^* \cdot \vec{\Lambda}) \} + \frac{1}{i} (I_3^* \sigma_3 + \sigma_3^* I_2), \\ \vec{f} = \frac{2\pi i}{h} \{ [\vec{\Lambda}^* \times \vec{H}] + \vec{V}^* \cdot \vec{E} + [\vec{H}^* \times \vec{\Lambda}] - \vec{E}^* \cdot \vec{V} \} + \frac{c}{i} (I_3^* \vec{\sigma} + \vec{\sigma}^* I_2) \end{cases}$$

qui ont été données par M. Géhéniau et sont très utiles en théorie du photon.

Malgré les résultats satisfaisants auxquels elles nous conduisent, les définitions de ρ et de $\vec{f}$ soulèvent certaines difficultés que nous devons

maintenant examiner et qui toutes se rattachent au fait que l'expression (1) de ρ n'est pas définie positive.

Prenons d'abord le cas particulier de l'onde plane monochromatique. Dans la présente théorie de la particule de spin 1, il existe des ondes planes à énergie négative pour lesquelles k est négatif. Pour ces ondes, ρ est négatif et la formule de normalisation conduit à une impossibilité, son premier membre étant négatif. Cette difficulté ne pourrait être levée que par des théories s'apparentant à la seconde quantification, et ce sont des questions que nous voulons laisser en dehors des limites de cet exposé.

Remarquons seulement que, si au lieu de vouloir normaliser l'onde plane à énergie négative par rapport au nombre de particules (nombre supposé ici égal à 1), on normalisait cette onde en « énergie » par la formule

$$(8) \quad \int_D \rho W d\tau = h\nu,$$

la même difficulté n'apparaîtrait plus, car, ρ et W étant négatifs en même temps, le produit ρW proportionnel à W^2 serait toujours positif.

Si maintenant nous passons au cas général d'une onde Ψ quelconque, des difficultés analogues pourront se présenter chaque fois que, dans la composition spectrale de cette onde, figureront des composantes à énergie négative. La formule de normalisation pourra encore en ce cas être employée, car l'intégrale du premier membre sera toujours positive, comme on le voit aisément en remarquant que l'intégration détruit l'effet des interférences locales et ne laisse subsister que la somme des contributions dues aux diverses ondes planes composantes considérées isolément. Néanmoins, la grandeur ρ ne pourra plus être regardée d'une façon générale comme donnant en chaque point la probabilité de présence de la particule.

En résumé, nous pouvons présenter les choses de la façon suivante. En Mécanique ondulatoire non relativiste et en théorie de Dirac, nous avons pu trouver une grandeur ρ définie positive qui était susceptible de jouer deux rôles distincts : 1° la grandeur $\rho d\tau$ représentait pour chaque élément de volume la probabilité pour qu'une observation permette de localiser le corpuscule dans cet élément de volume à cet instant; 2° l'intégrale $\int_D \rho d\tau$ donnait le nombre total des corpuscules présents dans le domaine D, c'est-à-dire 1 puisque nous nous bornons ici à la Mécanique ondulatoire d'un seul corpuscule. Ici, en Mécanique ondulatoire de la particule de spin 1, nous pouvons bien encore définir

une grandeur ρ satisfaisante à certains égards, mais cette grandeur, n'étant plus définie positive, ne peut jouer le rôle de densité de localisation, d'une manière générale. Par contre, quand l'onde Ψ est une onde plane à énergie positive ou une superposition de telles ondes planes, la densité ρ peut toujours servir à normer la fonction d'onde.

Revenons au cas de l'onde plane pour faire encore une remarque importante. Pour l'onde plane, on trouve aisément

$$(9) \quad \sum_1^4 |\Psi_{ik}|^2 = \sum_1^2 |C_{\mu\nu}|^2 \left[1 + \left(\frac{k_z}{\Delta} \right)^2 \right]^2,$$

d'où

$$(10) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \sum_1^2 |C_{\mu\nu}|^2 \left(1 - \frac{k_z^2}{\Delta^2} \right) = \sum_1^4 |\Psi_{ik}|^2 \frac{1 - \frac{k_z^2}{\Delta^2}}{1 + \frac{k_z^2}{\Delta^2}} = \frac{m_0 c^2}{W} \sum_1^4 |\Psi_{ik}|^2 \\ &= \sum_1^4 |\Psi_{ik}|^2 \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

β étant le quotient par c de la vitesse corpusculaire qui, d'après les formules de la dynamique relativiste, correspond à l'énergie W . Nous voyons reparaître le facteur $\sqrt{1 - \beta^2}$ de la contraction de Lorentz et nous voyons que c'est par ce facteur que ρ diffère de la quantité

définie positive $\sum_1^4 |\Psi_{ik}|^2$.

Ce dernier résultat peut suggérer que la forme anormale de la densité ρ vient ici de ce que nous avons affaire à une particule complexe subissant dans sa structure interne une contraction de Lorentz. Nous retrouverons d'ailleurs le facteur de contraction de Lorentz $\frac{m_0 c^2}{W}$ pour toutes les particules de spin supérieur à 1.

2. Formalisme général de la Mécanique ondulatoire pour la particule de spin 1. — Nous devons maintenant développer pour la particule de spin maximum 1 un formalisme analogue à celui que nous avons établi pour la particule de spin $\frac{1}{2}$ (théorie de l'électron de Dirac).

Pour construire ce formalisme, nous partirons de la remarque préliminaire que les opérateurs rencontrés dans la théorie de la particule de spin maximum 1 ont toujours une structure particulière liée à la manière dont cette particule est obtenue par la fusion symétrique de

deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$. En règle générale ⁽¹⁾, ces opérateurs se décomposent, en effet, en une somme de deux opérateurs, chacun pouvant être regardé comme relatif à l'un des corpuscules constituants.

Pour préciser, si F est un des opérateurs de notre théorie, nous admettons qu'on peut l'écrire

$$(11) \quad F = F^{(1)} + F^{(2)},$$

$F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ étant des opérateurs linéaires et hermitiens agissant de la même manière sur les variables x, y, z ; mais, tandis que $F^{(1)}$ agit seulement sur le premier indice des fonctions à seize composantes, $F^{(2)}$ agit seulement sur le second. Par exemple, l'opérateur Hamiltonien est ici, d'après l'équation (IIA), de la forme

$$(12) \quad H = H^{(1)} + H^{(2)}$$

avec

$$(13) \quad \begin{cases} H^{(1)} = \frac{c}{2z} \left(\frac{\partial}{\partial x} a_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial y} a_2^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z} a_3^{(1)} + z m_0 c a_4^{(1)} \right), \\ H^{(2)} = \frac{c}{2z} \left(\frac{\partial}{\partial x} a_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial y} a_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial z} a_3^{(2)} + z m_0 c a_4^{(2)} \right), \end{cases}$$

et ces opérateurs ont bien les propriétés annoncées.

Les valeurs propres des opérateurs $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ seront définies par les équations couplées

$$(14) \quad F^{(1)} \varphi_n = f_n^{(1)} \varphi_n, \quad F^{(2)} \varphi_n = f_n^{(2)} \varphi_n.$$

Les fonctions propres φ_n doivent satisfaire aux conditions usuellement imposées aux fonctions propres. On peut les considérer comme des fonctions à seize composantes.

Les valeurs propres couplées $f_n^{(1)}$ et $f_n^{(2)}$ ne sont d'ailleurs pas indépendantes. Si les opérateurs $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ agissent sur les variables x, y, z , on doit avoir $f_n^{(1)} = f_n^{(2)}$. Si, au contraire, ces opérateurs n'agissent pas sur x, y, z , on doit avoir seulement $f_n^{(1)} = \pm f_n^{(2)}$. Ce sont là des règles faciles à vérifier sur des exemples et résultant du caractère de la fusion opérée pour obtenir la particule du spin maximum 1.

Si $f_n^{(1)} = f_n^{(2)}$, on a évidemment

$$(15) \quad F^{(1)} \varphi_n = F^{(2)} \varphi_n = \frac{F^{(1)} + F^{(2)}}{2} \varphi_n$$

⁽¹⁾ Cependant pour l'opérateur S^2 , se reporter au dernier paragraphe du chapitre.

ou

$$(16) \quad F^{(1)} \varphi_n = F^{(2)} \varphi_n = \frac{F}{2} \varphi_n,$$

en introduisant la définition

$$(17) \quad F = F^{(1)} + F^{(2)}.$$

De là, on conclut à partir des équations (14), que l'on a, aussi bien dans le cas où $f_n^{(1)} = f_n^{(2)}$ que dans le cas où $f_n^{(1)} = \pm f_n^{(2)}$, la relation

$$(18) \quad F \varphi_n = f_n \varphi_n$$

avec

$$(19) \quad f_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)} = \begin{cases} 2f_n^{(1)} \\ 0 \end{cases}.$$

Comme les opérateurs $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ sont toujours hermitiens, les valeurs propres f_n sont toujours réelles et un raisonnement déjà fait plus d'une fois montre que les φ_n sont des fonctions orthogonales au sens usuel du mot : nous admettrons qu'elles forment un système complet.

La formule adoptée pour la densité ρ nous conduit à normer toutes les fonctions propres par la formule

$$(20) \quad \int_D \sum_1^4 (\varphi_n)_{ik}^* \cdot \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} (\varphi_n)_{ik} d\tau = 1.$$

Nous dirons que les φ_n sont normées en $\frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2}$; nous allons montrer qu'elles sont aussi orthogonales en $\frac{\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}}{2}$. En effet, des équations (14) et leurs conjuguées, on tire d'abord aisément

$$(21) \quad \begin{cases} (f_n^{(1)} - f_m^{(1)}) \int_D \sum_1^4 (\varphi_m)_{ik}^* \cdot \alpha_i^{(2)} (\varphi_n)_{ik} d\tau = 0, \\ (f_n^{(2)} - f_m^{(2)}) \int_D \sum_1^4 (\varphi_m)_{ik}^* \cdot \alpha_i^{(1)} (\varphi_n)_{ik} d\tau = 0. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on désigne par $\Psi(\vec{k})$ l'onde plane dont le vecteur de propagation est $\vec{k}$, on vérifie aisément sur les formules de l'onde plane que

$$(22) \quad \int_D \sum_1^4 \Psi_{ik}^* \cdot (\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}) \Psi_{ik} d\tau = 0,$$

et comme les φ_{ik} sont développables suivant les Ψ_{ik} , on aura aussi

$$(23) \quad \int_0^1 \sum_{i,k}^4 (\varphi_m)_{ik}^* \cdot (\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}) (\varphi_n)_{ik} d\tau = 0,$$

d'où

$$(24) \quad \begin{aligned} \int_0^1 \sum_{i,k}^4 (\varphi_m)_{ik}^* \cdot \alpha_i^{(1)} (\varphi_n)_{ik} d\tau &= \int_0^1 \sum_{i,k}^4 (\varphi_m)_{ik}^* \cdot \alpha_i^{(2)} (\varphi_n)_{ik} d\tau \\ &= \int_0^1 \sum_{i,k}^4 (\varphi_m)_{ik}^* \cdot \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} (\varphi_n)_{ik} d\tau, \end{aligned}$$

formule valable que m soit ou ne soit pas égal à n .

En rapprochant les formules (21) et (24), on voit aisément que, chaque fois que f_n est différent de f_m , on a

$$(25) \quad \int_0^1 \sum_{i,k}^4 (\varphi_m)_{ik}^* \cdot \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} (\varphi_n)_{ik} d\tau = 0,$$

c'est-à-dire que φ_n et φ_m sont orthogonales en $\frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2}$.

Les formules que nous avons obtenues nous permettent maintenant de construire le formalisme général pour la Mécanique ondulatoire de la particule de spin maximum 1.

Tout d'abord, les valeurs possibles d'une grandeur observable correspondant à un opérateur linéaire et hermitien F seront les valeurs propres f_n de cet opérateur.

Ensuite, si l'état de la particule est représenté par une certaine fonction d'onde Ψ et si le développement de cette fonction d'onde suivant les fonctions propres φ_n de l'opérateur F a la forme

$$(26) \quad \Psi = \sum_n c_n \varphi_n.$$

la probabilité de trouver la valeur f_n pour la grandeur observable F dans l'état représenté par la fonction d'onde Ψ sera $|c_n|^2$. Comme Ψ et les φ_n sont normées en $\frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2}$, on trouve

$$(27) \quad \int_0^1 \Psi^* \cdot \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} \Psi d\tau = \sum_{nn'} c_n c_{n'}^* \int_0^1 \varphi_{n'}^* \cdot \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} \varphi_n d\tau = \sum_n |c_n|^2 = 1,$$

de sorte que le théorème des probabilités totales est bien satisfait.

D'après ces principes généraux, la valeur moyenne de la grandeur F sera

$$(28) \quad \bar{F} = \sum_n f_n |c_n|^2.$$

On peut montrer qu'il est équivalent de poser

$$(29) \quad \bar{F} = \int_0 \sum_{ik} \Psi_{ik}^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \Psi_{ik} d\tau$$

ou en écriture symbolique

$$(30) \quad \bar{F} = \int_0 \Psi^* (F^{(1)} a^{(2)} + F^{(2)} a^{(1)}) \Psi d\tau.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} (31) \quad \int_0 \Psi^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \Psi d\tau &= \sum_{nn'} c_{n'}^* c_n \int_0 \varphi_{n'}^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \varphi_n d\tau \\ &= \sum_{nn'} c_{n'}^* c_n f_n^{(1)} \int_0 \varphi_{n'}^* (\alpha_i^{(2)} \pm \alpha_i^{(1)}) \varphi_n d\tau \\ &= \sum_{n'p} c_{n'}^* c_p \cdot 2 f_p^{(1)} \int_0 \varphi_{n'}^* \cdot \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} \varphi_p d\tau, \end{aligned}$$

les φ_p étant les fonctions propres telles que $f_p^{(1)} = f_p^{(2)} = \frac{1}{2} f_p$. Les formules (31) se trouvent en remarquant que $f_n^{(1)} = \pm f_n^{(2)}$ et que si l'on prend le signe —, l'intégrale est nulle d'après (23). Mais, à la place de (31), on peut évidemment écrire aussi

$$(32) \quad \int_0 \Psi^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \Psi d\tau = \sum_{n'n} c_{n'}^* c_n f_n \cdot \int_0 \varphi_{n'}^* \cdot \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} \varphi_n d\tau,$$

avec sommation sur tous les n , car en passant de (31) à (32), on ajoute seulement des termes pour lesquels $f_n = 0$, c'est-à-dire des termes nuls.

D'après l'orthonormalité en $\frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2}$ des φ_n , on a donc finalement

$$(33) \quad \int_0 \Psi^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \Psi d\tau = \sum_{n'n} c_{n'}^* c_n f_n \delta_{n'n} = \sum_n f_n |c_n|^2,$$

et c'est ce qu'il fallait démontrer.

La quantité $\sum_{ik}^4 \Psi_{ik}^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \Psi$ est la densité de moyenne correspondant à l'opérateur F . On remarquera que les grandeurs ρ et $\vec{f}$ de la formule (1) appartiennent à ce type.

Pour définir la matrice engendrée par un opérateur F dans un système quelconque de fonctions orthonormales χ_n , nous partirons des développements

$$(34) \quad F^{(1)} \chi_n = \sum_m F_{mn}^{(1)} \chi_m; \quad F^{(2)} \chi_n = \sum_m F_{mn}^{(2)} \chi_m.$$

Multiplions la première formule par $\chi_l^* a_i^{(2)}$ en avant et la seconde par $\chi_l^* a_i^{(1)}$, ajoutons membre à membre et intégrons dans D . Il vient, en tenant compte de (24),

$$(35) \quad \int_D \chi_l^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \chi_n d\tau = \sum_m (F_{mn}^{(1)} + F_{mn}^{(2)}) \int_D \chi_l^* \cdot \frac{a_i^{(1)} + a_i^{(2)}}{2} \chi_m d\tau,$$

et puisque les χ_m sont orthonormaux en $\frac{a_i^{(1)} + a_i^{(2)}}{2}$

$$(36) \quad F_{ln} = F_{ln}^{(1)} + F_{ln}^{(2)} = \int_D \chi_l^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \chi_n d\tau.$$

Les F_{ln} sont, par définition, les éléments de la matrice engendrée par l'opérateur F dans le système χ_n . Généralement, on construit les matrices dans le système des fonctions propres de l'opérateur H , c'est-à-dire dans le système des $\Psi(\vec{k})$. On aura donc

$$(37) \quad F_{\vec{k}\vec{k}'} = \int_D \Psi(\vec{k}')^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \Psi(\vec{k}) d\tau.$$

Les quantités $\sum_{ik}^4 \Psi_{ik}(\vec{k}) (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \Psi_{ik}(\vec{k})$ sont donc les densités d'éléments de matrice correspondant à l'opérateur F .

Par définition, nous dirons encore qu'une grandeur F est intégrale première quand tous les éléments de la matrice qui lui correspond sont indépendants du temps. Supposons (comme c'est le cas usuel) que $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ soient indépendants du temps, la condition pour que F soit intégrale première est alors la suivante :

$$(38) \quad \frac{\partial F_{\vec{k}\vec{k}'}}{\partial t} = \int_D \left[\frac{\partial \Psi(\vec{k}')^*}{\partial t} (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \Psi(\vec{k}) + \Psi(\vec{k}')^* (F^{(1)} a_i^{(2)} + F^{(2)} a_i^{(1)}) \frac{\partial \Psi(\vec{k})}{\partial t} \right] d\tau = 0,$$

pour tout $\vec{k}$ et tout $\vec{k}'$. Or, comme nous l'avons déjà vu dans le calcul de la densité ρ et comme on peut le vérifier aussi ici, l'action des opérateurs $\alpha_i^{(i)}$ a pour effet de multiplier l'onde plane par le facteur de contraction de Lorentz $\frac{m_0 c^2}{W}$. On a donc comme condition équivalente à (38)

$$(39) \quad \int_0 \left[\frac{\partial \Psi^*(\vec{k}')}{\partial t} \cdot F \Psi(\vec{k}) + \Psi^*(\vec{k}') \cdot F \frac{\partial \Psi(\vec{k})}{\partial t} \right] d\tau = 0.$$

En écrivant l'équation fondamentale (1) sous la forme

$$(40) \quad \frac{1}{z} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi.$$

et en tenant compte du caractère hermitien de H , on trouve alors la condition

$$(41) \quad \int_0 \Psi^*(\vec{k}') \cdot [F, H] \Psi(\vec{k}) d\tau = 0.$$

Si F est intégrale première, le second membre doit être nul, quels que soient $\vec{k}$ et $\vec{k}'$: cela signifie que tous éléments de la matrice correspondant à l'opérateur $[F, H]$ sont nuls. Donc, cet opérateur appliqué à l'un quelconque des $\Psi(\vec{k})$ doit donner zéro et, comme les $\Psi(\vec{k})$ forment un système complet, on doit avoir

$$(42) \quad [F, H] \equiv 0,$$

ou plus explicitement

$$(43) \quad [F^{(1)} + F^{(2)}, H^{(1)} + H^{(2)}] \equiv 0.$$

C'est la condition pour que F soit intégrale première : elle sera en particulier applicable aux composantes du spin.

Nous avons ainsi terminé l'esquisse du formalisme que l'on doit appliquer en Mécanique ondulatoire de la particule de spin maximum 1. Ce formalisme présente certaines difficultés, en particulier en ce qui concerne les solutions à énergie négative, auxquelles échappaient les formes plus simples de la Mécanique ondulatoire. Ces difficultés se rattachent toutes à l'introduction des facteurs $\alpha_i^{(1)}$ et $\alpha_i^{(2)}$ dans la définition des densités et nous en retrouverons d'analogues pour les particules de spin supérieur à 1. L'introduction sous une forme convenable de la seconde quantification permettrait de les lever ou, du moins, de les atténuer.

3. **Les tenseurs symétriques énergie-impulsion** ⁽¹⁾. — Dans la Mécanique ondulatoire du corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ (théorie de Dirac), nous avons pu définir un tenseur T réel et symétrique de rang 2 qui joue le rôle de tenseur énergie-impulsion. En Mécanique ondulatoire de la particule de spin maximum 1, nous allons pouvoir définir un tenseur analogue réel et symétrique de rang 2 qui sera le tenseur énergie-impulsion particulière. En raison de la séparation des grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes, ce tenseur se décompose en un tenseur relatif à la particule de spin $s = 1$ et un tenseur relatif à la particule de spin $s = 0$. Dans le cas général, la composante T_{11} de ce tenseur, qui correspondrait à une densité d'énergie, n'est pas nécessairement positive; mais il existe ici un deuxième tenseur symétrique de rang 2 et réel M dont la composante M_{11} est toujours positive, tenseur qui pour une onde Ψ plane monochromatique coïncide avec T et qui, même dans le cas général, lui est *intégralement* équivalent, car on a toujours

$$(44) \quad \int_{\Omega} M_{ik} d\tau = \int_{\Omega} T_{ik} d\tau \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Comme M se décompose en un tenseur relatif à la particule de spin $s = 1$ et un autre tenseur relatif à la particule de spin $s = 0$, on voit que dans les cas $s = 1$ et $s = 0$, on peut trouver pour la densité d'énergie une expression définie positive (savoir M_{11}). Il est d'ailleurs aisé de voir que pour la particule de spin $s = 1$, le tenseur M est la généralisation du tenseur de Maxwell et se réduit exactement à celui-ci si la masse propre m_0 est nulle. Nous allons maintenant étudier les tenseurs T et M .

a. *Le tenseur T.* — Pour former ce tenseur, il suffit de se reporter aux expressions obtenues antérieurement pour les composantes du tenseur T de l'électron et à remplacer dans ces expressions l'opérateur 1 par l'opérateur $\frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2}$ et chaque opérateur α_i par l'opérateur $\frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_i^{(2)} + \alpha_i^{(2)}\alpha_i^{(1)}}{2}$, substitution qui correspond à la fusion de 2 corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ avec normalisation en $\frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2}$. On obtient ainsi les composantes de T : pour les écrire commodément, nous emploierons ici les coordonnées réelles d'espace-temps et nous poserons

$$(45) \quad \begin{cases} u_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)}, & u_i^{(2)} = \alpha_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, 3); \\ u_4^{(1)} = u_4^{(2)} = 1. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Voir la note, page 83.

Nous aurons alors

$$(46) \quad T_{ij} = T_{ji} = \frac{hc}{8\pi i} \left[\Psi^* \cdot \frac{u_i^{(1)} a_k^{(2)} + u_i^{(2)} a_k^{(1)}}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_j} \cdot \frac{u_i^{(1)} a_k^{(2)} + u_i^{(2)} a_k^{(1)}}{2} \Psi + \Psi^* \cdot \frac{u_j^{(1)} a_k^{(2)} + u_j^{(2)} a_k^{(1)}}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_i} \cdot \frac{u_j^{(1)} a_k^{(2)} + u_j^{(2)} a_k^{(1)}}{2} \Psi \right],$$

formules sur lesquelles on voit immédiatement que T est symétrique et réel.

Les équations d'ondes permettent de démontrer aisément les relations de conservation

$$(47) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} T^{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Pour $i = 4$, cette relation exprime la conservation de l'énergie, T_{44} jouant le rôle de densité de l'énergie et les T_{j4} (pour $j = 1, 2, 3$) le rôle de flux de l'énergie divisés par c ou de densités des composantes de l'impulsion multipliées par c . Pour $i = 1, 2, 3$, la relation (47) exprime la conservation des composantes de l'impulsion, T_{ij} pour $i, j = 1, 2, 3$ étant le flux de la composante i de l'impulsion le long de l'axe j .

Ainsi le tenseur T est bien le tenseur « particulaire » d'énergie-impulsion pour la particule de spin maximum 1, analogue au tenseur T défini en théorie de Dirac. Cette interprétation est d'ailleurs confirmée par l'étude du cas où l'onde Ψ est plane monochromatique et correspond à l'énergie W et à l'impulsion $\vec{p}$ pour la particule associée. On trouve en effet pour les composantes T^{ij} le tableau suivant

$$(48) \quad \begin{cases} \rho p_x v_x & \rho p_x v_y & \rho p_x v_z & \rho \frac{W}{c} v_x = \rho p_x c, \\ \rho p_y v_x & \rho p_y v_y & \rho p_y v_z & \rho \frac{W}{c} v_y = \rho p_y c, \\ \rho p_z v_x & \rho p_z v_y & \rho p_z v_z & \rho \frac{W}{c} v_z = \rho p_z c, \\ \rho \frac{W}{c} v_x & \rho \frac{W}{c} v_y & \rho \frac{W}{c} v_z & \rho W. \end{cases}$$

Le tenseur T se décompose en un tenseur $T^{(1)}$ relatif à la particule de spin $s = 1$ et un tenseur $T^{(0)}$ relatif à la particule de spin $s = 0$. Les composantes du premier de ces tenseurs s'expriment naturellement à l'aide des grandeurs mawelliennes, celles du second à l'aide des grandeurs

non maxwelliennes. On trouve par exemple (en donnant à la constante K la valeur $\frac{h}{4\pi\sqrt{m_0}}$)

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{44}^{(1)} = \frac{1}{2c} \left\{ \left(\vec{\Lambda}^* \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \left(\vec{E}^* \cdot \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t} \cdot \vec{\Lambda} \right) - \left(\frac{\partial \vec{\Lambda}^*}{\partial t} \cdot \vec{E} \right) \right\}, \\ T_{4i}^{(0)} = -\frac{hc}{4\pi i} \left[I_2^* \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + \sigma_i^* \frac{\partial I_2}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_i^*}{\partial t} I_2 - \frac{\partial I_2^*}{\partial t} \sigma_i \right]. \end{array} \right.$$

Pour une onde plane monochromatique, on a toujours

$$(50) \quad T_{4i}^{(1)} = \rho W \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et, nous l'avons vu, cette quantité est toujours positive, même pour une onde plane à énergie négative. T_{44} est donc définie positive *pour toute onde plane*, mais elle ne l'est pas en général pour une onde quelconque, c'est-à-dire pour une superposition d'ondes planes. Il en est différemment pour le tenseur M , comme nous allons le voir maintenant.

b. Le tenseur M. — Nous définirons le tenseur M (ou tenseur de Maxwell) pour la particule de spin maximum 1 par les formules suivantes écrites en employant les définitions (45)

$$(51) \quad M_{ij} = M_{ji} = m_0 c^2 \Psi^* \cdot \frac{u_i^{(1)} u_j^{(2)} + u_j^{(1)} u_i^{(2)}}{2} \Psi \quad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Ces formules mettent nettement en évidence la symétrie et la réalité du tenseur M . On remarquera que la composante M_{44} a pour valeur

$$(52) \quad M_{44} = m_0 c^2 |\Psi|^2.$$

C'est M_{44} (et non ρ) qui, pour la particule de spin maximum 1, s'exprime à l'aide de la quantité définie positive $|\Psi|^2$; il en résulte que M_{44} sera toujours définie positive, et nous verrons que cette quantité peut jouer le rôle de densité d'énergie à la place de T_{44} .

Les équations d'ondes (1) permettent de démontrer aisément la formule

$$(53) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} M^{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

qui exprime la conservation de l'énergie et celle des composantes de l'impulsion.

Le tenseur M se décompose en un tenseur $M^{(1)}$ relatif à la particule de spin total $s = 1$ et en un tenseur $M^{(0)}$ relatif à la particule de spin total $s = 0$. Le premier tenseur s'exprime à l'aide des grandeurs maxwel-

liennes et constitue la généralisation (pour une particule de masse propre non nulle) du tenseur classique de Maxwell. On trouve par exemple (toujours avec $K = \frac{h}{4\pi\sqrt{m_0}}$)

$$(54) \quad \begin{cases} M_{ik} = [\vec{E}^* \times \vec{H}]_i - [\vec{H}^* \times \vec{E}]_k - k_0^2 (V^* A_i + V A_i^*), \\ M_{44} = |\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2 + k_0^2 (|\vec{A}|^2 + |V|^2). \end{cases}$$

En faisant tendre m_0 (et k_0) vers zéro, on trouve bien des expressions qui sont la transposition, pour des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ complexes, des expressions classiques de la théorie électromagnétique.

Le tenseur $M^{(0)}$ s'exprime à l'aide des grandeurs non maxwelliennes. On trouve, par exemple,

$$(55) \quad M_{44}^{(0)} = \frac{m_0 c^2}{4} (|I_1|^2 + |I_2|^2 + |\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2).$$

c. Rapport entre les deux tenseurs T et M. — Les deux tenseurs T et M sont en général essentiellement distincts, car le premier dépend des dérivées $\frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial x_j}$, tandis que le second ne dépend que des Ψ_{ik} eux-mêmes.

Néanmoins, ils ont entre eux des rapports étroits. Les équations d'ondes permettent de vérifier aisément que, dans le cas particulier de l'onde monochromatique, les deux tenseurs coïncident partout

$$(56) \quad T_{ij} = M_{ij}.$$

Dans le cas général, les deux tenseurs ne coïncident plus en chaque point, mais ils sont encore intégralement équivalents, c'est-à-dire que l'on a, du moins pour toute superposition d'ondes planes à énergie positive

$$(56 \text{ bis}) \quad \int_D T_{ij} d\tau = \int_D M_{ij} d\tau$$

pour tout i et tout j . Ceci résulte du fait que les combinaisons d'une onde plane avec une autre onde plane dans les expressions de T_{ij} et de M_{ij} donnent zéro par intégration (l'intégration fait disparaître les interférences!), de sorte qu'il ne subsiste plus dans les intégrales que les termes provenant de la combinaison de chaque onde plane avec elle-même, termes égaux deux à deux pour T_{ij} et M_{ij} , comme nous venons de le constater (¹).

(¹) Si l'onde Ψ contient des composantes à énergie négative, l'intégration peut laisser subsister des termes de haute fréquence, de sorte que (56 bis) n'est alors vérifiée qu'en moyenne dans le temps.

Si nous fixons notre attention sur les composantes d'indices 44, nous voyons que T_{44} et M_{44} ne coïncident pas en général en dehors du cas particulier de l'onde plane. On peut considérer ces deux grandeurs comme des densités d'énergie puisque, par intégration, elle donne la même valeur pour l'énergie moyenne totale. T_{44} a l'avantage d'être la densité de moyenne définie naturellement par la théorie quantique, mais M_{44} a l'avantage d'être toujours positive ou nulle, tandis que T_{44} peut être négative. Pour les particules de spin total supérieur à 1, nous ne trouverons plus, pour l'énergie, de densité définie positive. La possibilité de choisir entre plusieurs définitions pour la densité d'énergie, le caractère non nécessairement positif défini de ces densités, tout cela nous montre combien la notion même de densité n'a dans les théories quantiques, qu'un sens un peu fictif : la véritable grandeur à sens physique, c'est l'intégrale de la densité donnant la valeur moyenne.

4. **Étude du spin.** — Le spin s'introduit dans la théorie de la particule de spin maximum 1 comme en théorie de Dirac. Nous étudierons successivement les composantes du spin et le spin total.

a. *Les composantes du spin.* — Désignons par $(\vec{M})_{op}$ l'opérateur correspondant au mouvement cinétique orbital de la particule défini par

$$(57) \quad (\vec{M})_{op} = [\vec{r} \times \vec{p}]_{op},$$

et écrivons les équations d'ondes sous la forme

$$(58) \quad \frac{1}{z} \frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial t} = H_{op} \Psi_{ik},$$

avec

$$(59) \quad H_{op} = \frac{c}{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}}{2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\alpha_3^{(1)} + \alpha_3^{(2)}}{2} + z m_0 c \frac{\alpha_4^{(1)} + \alpha_4^{(2)}}{2} \right).$$

Nous avons vu que, pour qu'une grandeur F soit intégrale première, F doit commuter avec l'opérateur $\vec{H}$. Or on vérifie facilement que M_x, M_y, M_z ne sont pas intégrales premières, mais en ajoutant à $\vec{M}$ un vecteur $\vec{S}$ dont les composantes sont définies par les opérateurs

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} (S_x)_{op} &= \frac{h}{2\pi} \frac{i\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} + i\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(2)}}{2}; & (S_y)_{op} &= \frac{h}{2\pi} \frac{i\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(1)} + i\alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(2)}}{2}; \\ (S_z)_{op} &= \frac{h}{2\pi} \frac{i\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}}{2}, \end{aligned} \right.$$

on obtient des intégrales premières, car on vérifie que l'on a

$$(61) \quad [M_x + S_x, H] = 0; \quad [M_y + S_y, H] = 0; \quad [M_z + S_z, H] = 0.$$

Le moment cinétique total de la particule est la somme du moment cinétique orbital $\vec{M}$ et du moment cinétique propre ou « spin » $\vec{S}$. Ce dernier, d'après (60), apparaît comme la somme des spins des deux corpuscules fondus dans la particule de spin 1. On le voit mieux encore en écrivant

$$(62) \quad \vec{S} = \frac{h}{2\pi} \mathbf{s}$$

avec

$$(63) \quad \vec{s} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)}$$

et

$$(64) \quad \begin{cases} \mathbf{s}_x^{(1)} = \frac{ia_2^{(1)}a_3^{(1)}}{2}; & \mathbf{s}_y^{(1)} = \frac{ia_3^{(1)}a_1^{(1)}}{2}; & \mathbf{s}_z^{(1)} = \frac{ia_1^{(1)}a_2^{(1)}}{2}, \\ \mathbf{s}_x^{(2)} = \frac{ia_2^{(2)}a_3^{(2)}}{2}; & \mathbf{s}_y^{(2)} = \frac{ia_3^{(2)}a_1^{(2)}}{2}; & \mathbf{s}_z^{(2)} = \frac{ia_1^{(2)}a_2^{(2)}}{2}. \end{cases}$$

Comme on a

$$(65) \quad [\mathbf{s}_x^{(1)}, \mathbf{s}_y^{(1)}] = -i\mathbf{s}_z^{(1)} \dots [\mathbf{s}_z^{(2)}, \mathbf{s}_x^{(2)}] = -i\mathbf{s}_y^{(2)}$$

et que $\vec{s}^{(1)}$ commute avec $\vec{s}^{(2)}$, on vérifie aisément les relations de commutation

$$(66) \quad [\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y] = -i\mathbf{s}_z; \quad [\mathbf{s}_y, \mathbf{s}_z] = -i\mathbf{s}_x; \quad [\mathbf{s}_z, \mathbf{s}_x] = -i\mathbf{s}_y,$$

et ceci nous montre que le spin $\vec{S}$ est bien relié comme il doit l'être au groupe des rotations spatiales.

On trouve aussi

$$(67) \quad (\mathbf{s}_i)^2 = (\mathbf{s}_i^{(1)} + \mathbf{s}_i^{(2)})^2 = (\mathbf{s}_i^{(1)})^2 + (\mathbf{s}_i^{(2)})^2 + 2\mathbf{s}_i^{(1)}\mathbf{s}_i^{(2)} = \frac{1}{2} + 2\mathbf{s}_i^{(1)}\mathbf{s}_i^{(2)},$$

d'où

$$(68) \quad (\mathbf{s}_i)^3 = \frac{\mathbf{s}_i}{2} + 2(\mathbf{s}_i^{(1)} + \mathbf{s}_i^{(2)})\mathbf{s}_i^{(1)}\mathbf{s}_i^{(2)} = \mathbf{s}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Il en résulte que $\mathbf{s}_i$ a les trois valeurs propres +1, 0 et -1 et que, par suite, chacun des opérateurs S_x , S_y et S_z a les trois valeurs propres $\frac{h}{2\pi}$, 0 et $-\frac{h}{2\pi}$. On pouvait prévoir ce résultat en se plaçant au point de vue intuitif de la fusion, puisque les spins des deux corpuscules constituants peuvent s'ajouter ou se retrancher.

Examinons en particulier l'opérateur S_z . Avec les valeurs adoptées pour les α_i et la définition des $\alpha_i^{(1)}$ et des $\alpha_i^{(2)}$, on trouve

$$(69) \quad (i\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)})_{ik,lm} = (i\alpha_1\alpha_2)_{il}\delta_{km}; \quad (i\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)})_{ik,lm} = \delta_{il}(i\alpha_1\alpha_2)_{km}$$

avec

$$(70) \quad i\alpha_1\alpha_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

ou

$$(71) \quad i\alpha_1\alpha_2 = -(-1)^i\delta_{il}.$$

On en tire

$$(72) \quad S_z = -\frac{h}{2\pi} \frac{(-1)^i + (-1)^k}{2} \delta_{il}\delta_{km},$$

S_z est donc une matrice diagonale, c'est-à-dire une matrice pour laquelle tous les éléments sont nuls, sauf ceux pour lesquels $i = l$ et $k = m$. On trouve donc

$$(73) \quad (S_z)_{op}\Psi_{ik} = \sum_{lm} (S_z)_{ik,lm}\Psi_{lm} = -\frac{h}{4\pi} [(-1)^i + (-1)^k] \Psi_{ik}.$$

Le coefficient de Ψ_{ik} au dernier membre est nul si i et k sont de parités différentes, égal à $-\frac{h}{2\pi}$ si i et k sont pairs et à $+\frac{h}{2\pi}$ si i et k sont impairs. Donc les composantes $\Psi_{12}, \Psi_{44}, \Psi_{21}, \Psi_{23}, \Psi_{32}, \Psi_{34}, \Psi_{41}$ et Ψ_{43} correspondent à $S_z = 0$; les composantes $\Psi_{11}, \Psi_{33}, \Psi_{31}$ et Ψ_{13} correspondent à $S_z = \frac{h}{2\pi}$; enfin les composantes $\Psi_{22}, \Psi_{44}, \Psi_{24}$ et Ψ_{42} correspondent à $S_z = -\frac{h}{2\pi}$. Cette classification correspond exactement à celle que nous avons été amenés à adopter dans l'étude des ondes planes. Le fait qu'il y ait 8 composantes correspondant à $s_z = 0$ vient en somme, nous le verrons, de ce que la valeur $s_z = 0$ existe à la fois pour les états maxwelliens ($s = 1$) et pour les états non maxwelliens ($s = 0$).

On peut naturellement compléter le vecteur $\vec{S}$ et le transformer en un quadrivecteur d'espace-temps en lui adjoignant une composante de temps définie par l'opérateur

$$(74) \quad (S_4)_{op} = -\frac{h}{2\pi} \frac{i\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} + i\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(2)}}{2}.$$

D'après le formalisme général, pour une particule dans l'état Ψ , on doit définir les densités de valeurs moyennes des composantes du spin par les formules

$$(75) \quad \sigma_{ic} = \frac{h}{2\pi} \sum_{ik} \Psi_{ik}^* \frac{i a_2^{(1)} a_3^{(1)} a_4^{(2)} + i a_2^{(2)} a_3^{(2)} a_4^{(1)}}{2} \Psi_{ik} \dots$$

Exprimées à l'aide des grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes, ces grandeurs s'écrivent

$$(76) \quad \begin{cases} \vec{\sigma} = \frac{1}{c} \left\{ [\vec{E}^* \times \vec{A}] + [\vec{E} \times \vec{A}^*] + \vec{V}^* \vec{H} + \vec{V} \vec{H}^* \right\} + \frac{i\hbar}{8\pi} (\vec{\sigma}^* I_1 - \vec{\sigma} I_1^*), \\ \sigma_i = \frac{1}{c} \left\{ (\vec{A}^* \cdot \vec{H}) + (\vec{H}^* \cdot \vec{A}) \right\} + \frac{i\hbar}{8\pi} (\sigma_i^* I_1 - \sigma_i I_1^*). \end{cases}$$

b. Le spin total. — L'étude du spin total va nous permettre d'approfondir la classification des états de spin.

L'opérateur de spin total est défini par

$$(77) \quad (\mathbf{S}^2)_{op} = \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \mathbf{s}^2$$

avec

$$(78) \quad \mathbf{s}^2 = (\mathbf{s}_x^{(1)} + \mathbf{s}_x^{(2)})^2 + (\mathbf{s}_y^{(1)} + \mathbf{s}_y^{(2)})^2 + (\mathbf{s}_z^{(1)} + \mathbf{s}_z^{(2)})^2 = (\mathbf{s}^{(1)})^2 + (\mathbf{s}^{(2)})^2 + 2(\vec{\mathbf{s}}^{(1)} \cdot \vec{\mathbf{s}}^{(2)}).$$

On trouve immédiatement d'après les définitions (64)

$$(79) \quad (\mathbf{s}^{(1)})^2 = (\mathbf{s}^{(2)})^2 = \frac{3}{4},$$

puis, en évaluant $(\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{s}^{(2)})^2$, on obtient

$$(80) \quad (\vec{\mathbf{s}}^{(1)} \cdot \vec{\mathbf{s}}^{(2)})^2 = \frac{3}{16} - \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{s}}^{(1)} \cdot \vec{\mathbf{s}}^{(2)}),$$

d'où

$$(81) \quad (\vec{\mathbf{s}}^{(1)} \cdot \vec{\mathbf{s}}^{(2)}) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \\ -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

En portant (79) et (81) dans (78), on trouve

$$(82) \quad \mathbf{s}^2 = \frac{3}{2} + 2 \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}.$$

Les deux valeurs possibles de S^2 correspondent donc aux deux valeurs $s = 1$ et $s = 0$ dans la formule

$$(83) \quad S^2 = s(s+1) \frac{h^2}{4\pi^2}.$$

Nous avons donc bien à considérer deux états possibles de spin total correspondant à $s = 1$ et à $s = 0$. D'après la théorie générale du spin, l'état $s = 1$ est un état triplet comprenant les trois états $s_z = -1, 0, +1$, tandis que l'état $s = 0$ est un état singulet correspondant à l'unique valeur $s_z = 0$. Les deux états $s = 1$ et $s = 0$ peuvent, nous l'avons dit dans nos considérations générales sur la fusion, être considérés isolément, le premier définissant une particule de spin total unique $s = 1$ et le second une particule de spin total unique $s = 0$. Cette séparation correspond évidemment à la séparation des grandeurs maxwelliennes et des grandeurs non maxwelliennes obéissant à deux systèmes d'équations totalement indépendants. Nous avons vu, en effet, que les grandeurs maxwelliennes décrivent bien un état triplet correspondant aux valeurs $s_z = -1, 0, +1$, tandis que les grandeurs non maxwelliennes décrivent l'état unique $s_z = 0$,

Néanmoins, une étude plus approfondie montre que la correspondance entre les grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes d'une part et les deux états de spin $s = 1$ et $s = 0$, d'autre part, n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire de prime abord. On peut le pressentir par le résultat suivant : s'il y avait une correspondance simple entre chaque groupe de grandeurs et les états de spin total, comme l'un des états de spin est triple et l'autre simple, les seize composantes tensorielles du Ψ devraient se répartir en un groupe de $12 = 3 \cdot 4$ et un groupe de 4 : or il y a dix grandeurs maxwelliennes (4 composantes de potentiel et 6 composantes de champs) et six grandeurs non maxwelliennes, ou plus exactement $5 + 1$ (car l'invariant I_4 fait bande à part). D'où peut provenir cette divergence? Elle provient de ce que l'opérateur

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

n'étant pas un invariant d'espace-temps, la séparation de l'état triplet et de l'état singulet ne peut pas présenter l'invariance relativiste : pour réaliser rigoureusement cette séparation, il faudra nécessairement se placer dans un certain système de référence galiléen, et c'est bien ce qu'une étude plus approfondie va nous montrer plus clairement.

Si l'on étudie l'opérateur s^2 et son équation aux valeurs propre :

$$(84) \quad s^2 \varphi = \alpha \varphi,$$

on constate que les 12 grandeurs tensorielles $A_x, A_y, A_z, E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \sigma_x, \sigma_y$ et σ_z sont fonctions propres de s^2 pour la valeur propre $\alpha = 2$ et que les 4 grandeurs tensorielles V, σ_1, I_1 et I_2 sont fonctions propres de s^2 pour la valeur propre $\alpha = 0$. Autrement dit, si l'on construit la matrice s^2 en prenant comme fonctions de base les seize grandeurs tensorielles $A_x, \dots, I_2$, on obtient le tableau suivant :

Fig. 7.

	A_x	A_y	A_z	V	E_x	E_y	E_z	H_x	H_y	H_z	I_1	σ_x	σ_y	σ_z	σ_1	I_2
A_x	2															
A_y		2														
A_z			2													
V				0												
E_x					2											
E_y						2										
E_z							2									
H_x								2								
H_y									2							
H_z										2						
I_1											0					
σ_x												2				
σ_y													2			
σ_z														2		
σ_1															0	
I_2																0

S'il y avait une correspondance exacte entre grandeurs maxwelliennes et état $s=1$ d'une part, grandeurs non maxwelliennes et état $s=0$ d'autre part, le carré du haut à gauche ne contiendrait que des 2 et le carré du bas à droite que des zéros : or il n'en est pas ainsi. Si dans un certain système de référence galiléen, les grandeurs V, σ_x, σ_y et σ_z sont nulles, la séparation aura bien lieu, mais elle ne subsistera pas en général dans un autre système de référence galiléen, puisque V, σ_x, σ_y et σ_z ne sont que certaines composantes de deux quadrivecteurs.

Pour réaliser la séparation, nous devons donc nous placer dans un certain système de référence : or il y en a un qui a une signification physique particulière, c'est celui où la particule est au repos. On définira ce « système propre de la particule » en considérant un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire une onde plane monochromatique et en posant égale à zéro dans le système propre la vitesse de la particule, c'est-à-dire le vecteur de propagation $\vec{k}$ de son onde.

En se reportant aux formules qui donnent les grandeurs tensorielles $A_x, \dots, I_2$ pour l'onde plane [formule (46) et (47) du Chapitre VII], on trouve alors que les grandeurs V, σ_x, σ_y et σ_z sont nulles dans le

système propre : ceci exprime le fait que le quadrivecteur potentiel de composantes $\vec{A}$, V est un quadrivecteur du genre espace tandis que le quadrivecteur de composantes $\vec{\sigma}$, σ_4 est du genre temps. On voit alors que dans le système propre de la particule, les grandeurs maxwelliennes décrivent bien l'état $s = 1$ et les grandeurs non maxwelliennes l'état $s = 0$. Mais cette séparation ne jouit pas de l'invariance relativiste.

Bref, au lieu de dire : « les grandeurs maxwelliennes décrivent l'état de spin total $s = 1$ de la particule et les grandeurs non maxwelliennes l'état de spin total $s = 0$ », nous devons dire plus exactement : « les grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes décrivent respectivement les états de la particule qui, *envisagés dans le système propre de cette particule*, sont les états de spin total $s = 1$ et $s = 0$ ».

Nous retrouverons, dans la théorie générale des particules à spin, cette nécessité de se placer dans le système propre pour pouvoir séparer les états de spin total.

La grandeur S^2 qui, au point de vue quantique, a un sens physique bien défini, n'est pas une grandeur à caractère tensoriel au point de vue relativiste, et c'est encore un nouvel aspect de la difficulté qu'il y a à concilier entièrement relativité et quanta. D'ailleurs l'opérateur S^2 soulève aussi une difficulté particulière en ce qui concerne la définition de sa valeur moyenne, car il ne se décompose pas en une forme de la forme $F^{(1)} + F^{(2)}$. Si l'on adopte comme définition de sa valeur moyenne

$$(85) \quad \bar{S}^2 = \int_0 \sum_{ik} \psi_{ik}^* \cdot S^2 \frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{2} \psi_{ik} d\tau.$$

On trouve bien que pour un état maxwellien $\bar{S}^2 = 2 \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2$ et pour un état non maxwellien $\bar{S}^2 = 0$; au point de vue de la valeur moyenne ainsi définie, la séparation aurait lieu dans tous les systèmes de référence. Mais la définition (85) est sujette à caution et cadre mal avec le formalisme général que nous avons adopté. A plusieurs points de vue, l'emploi de l'opérateur S^2 de spin total soulève donc des difficultés; néanmoins, il a certainement un sens physique, et il est très utile pour comprendre pourquoi les équations et les grandeurs se séparent en groupes indépendants.



CHAPITRE IX.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PARTICULES A SPIN OBTENUES PAR FUSION.

1. **Équations fondamentales.** — Nous avons précédemment indiqué comment on pouvait obtenir une particule de spin maximum $\mathcal{S} = \frac{n}{2}$ en « fondant » n corpuscules de spin $\frac{1}{2}$. Nous avons dit qu'à chaque valeur $s = \mathcal{S}, \mathcal{S} - 1, \mathcal{S} - 2, \dots, \frac{1}{2}$ (ou 0 suivant que n est impair ou pair) on peut faire correspondre des groupes de grandeurs obéissant à des groupes d'équations indépendantes et que cette circonstance permet de considérer isolément les états correspondant aux diverses valeurs de s . Nous allons chercher à développer cette théorie en généralisant la méthode que nous avons utilisée pour obtenir la théorie de la particule de spin maximum 1.

La fonction d'onde Ψ d'une particule obtenue par la fusion de n corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ aura évidemment 4^n composantes à n indices $\Psi_{ikl\dots}$, chaque indice pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4. C'est ce que suggère immédiatement la généralisation du processus qui nous a permis de passer du corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ à la particule de spin maximum 1. Le même raisonnement qui, au Chapitre VII, nous avait fourni les équations (I) pour la particule de spin 1, nous conduit ici à écrire les n groupes de 4^n équations symbolisés par

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{ikl\dots} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1^{(p)} + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2^{(p)} + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3^{(p)} + \alpha_4^{(p)} \right) \Psi_{ikl\dots}$$

avec $p = 1, 2, \dots, n$; $i, k, l, \dots = 1, 2, 3, 4$. Dans (1), les matrices $\alpha_r^{(p)}$ sont des matrices dont les éléments ont deux fois n indices susceptibles de prendre les valeurs 1, 2, 3, 4 et sont donc au nombre de 4^{2n} .

Ces éléments sont définis par les formules

$$(2) \quad (\alpha_r^{(p)})_{ik\dots opq\dots, i'k'\dots o'p'q'\dots} = \delta_{ii'} \delta_{kk'} \dots \delta_{oo'} (\alpha_r)_{pp'} \delta_{qq'} \dots$$

Les matrices $\alpha_r^{(p)}$ sont ainsi obtenues par le processus général de fusion des matrices qui traduit mathématiquement l'idée physique de fusion des corpuscules : elles obéissent aux relations

$$(3) \quad \alpha_r^{(p)} \alpha_s^{(p)} + \alpha_s^{(p)} \alpha_r^{(p)} = 2 \delta_{rs} 1; \quad \alpha_r^{(p)} \alpha_s^{(q)} = \alpha_s^{(q)} \alpha_r^{(p)} \quad \text{si } p \neq q.$$

Nous écrirons les équations (I) sous une forme plus condensée en définissant les opérations

$$(4) \quad \mathbf{F}^{(p)} = \alpha^{(p)} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^{(p)} \frac{\partial}{\partial y} + \alpha^{(p)} \frac{\partial}{\partial z} + \alpha m_0 c \alpha^{(p)},$$

qui satisfont aux relations

$$(5) \quad \mathbf{F}^{(p)} \mathbf{F}^{(q)} = \mathbf{F}^{(q)} \mathbf{F}^{(p)} \quad \text{pour tout } p \text{ et tout } q, \quad (\mathbf{F}^{(p)})^2 = \Delta + \alpha^2 m_0^2 c^2 = \Delta - k_0^2.$$

Les équations fondamentales (I) prennent alors la forme

$$(I') \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_{ik...}}{\partial t} = \mathbf{F}^{(p)} \Psi_{ik...} \quad (p = 1, 2, \dots, n; i, k, \dots = 1, 2, 3, 4).$$

De (I'), on tire

$$(6) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_{ik...}}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}^{(p)} \Psi_{ik...} = \mathbf{F}^{(p)} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_{ik...}}{\partial t} = (\mathbf{F}^{(p)})^2 \Psi_{ik...}$$

ou encore d'après (5)

$$(7) \quad \square \Psi_{ik...} = \alpha^2 m_0^2 c^2 \Psi_{ik...} = -k_0^2 \Psi_{ik...}.$$

Chacune des composantes du Ψ obéit donc toujours à l'équation bien connue du deuxième ordre.

En s'appuyant sur l'invariance des équations de Dirac par rapport aux changements soit de représentation, soit de système de référence galiléen, on montre aisément que les équations (I) possèdent aussi cette double invariance

Pour une onde plane monochromatique, on devra poser

$$(8) \quad \Psi_{ik...} = a_{ik...} e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathbf{w} \cdot \vec{p} - \vec{r} \cdot \vec{r})} = a_{ik...} e^{i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

les $a_{ik...}$ étant des constantes complexes. Pour que les expressions (8) satisfassent aux équations (7), il faut avoir

$$(9) \quad \frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2 \quad \text{ou} \quad k^2 = |\vec{k}|^2 + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 = |\vec{k}|^2 + k_0^2.$$

Ce sont toujours les relations relativistes classiques entre l'énergie et la quantité de mouvement.

Il est aisé de passer des équations générales (I), analogues aux équations (I) que nous avons placées à la base de l'étude des particules de spin 1, à des équations (II) analogues aux équations (II) de la même étude. Pour cela, nous additionnerons d'abord toutes les équations (I) en divisant le résultat par n et nous obtiendrons ainsi les « équations d'évolution »

$$(II A) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_{ik\dots}}{\partial t} = \frac{\sum_p^n F^{(p)}}{n} \Psi_{ik\dots}$$

qui suffisent pour déterminer l'évolution du Ψ à partir d'un état initial connu. On obtiendra en plus $(n-1)$ équations de condition en formant $(n-1)$ combinaisons linéaires des n équations (I) de façon à faire disparaître les termes $\frac{\partial}{\partial t}$. Par exemple, nous formerons les combinaisons

$$(II B) \quad G_q \Psi_{ik\dots} = \frac{F^{(1)} - F^{(q)}}{2} \Psi_{ik\dots} = 0 \quad (q = 2, 3, \dots, n).$$

Il est facile de voir que l'ensemble des équations (II) est équivalent à l'ensemble des équations (I). En effet, les équations (II) constituent pour chaque choix des indices $i, k, \dots$ un ensemble de n équations linéaires non homogènes entre les n quantités $F^{(p)} \Psi_{ik\dots}$ dont le déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \end{vmatrix} = n(-1)^{n-1}$$

et est donc différent de zéro. Le système (II), résolu par rapport aux n quantités $F^{(p)} \Psi_{ik\dots}$, redonnera le système (I).

Supposons qu'à l'instant initial $t=0$, les équations de condition (II B) soient satisfaites.

En leur appliquant l'opérateur $\frac{1}{n} \sum_p^n F^{(p)}$, on trouve à l'instant $t=0$

$$\begin{aligned} (10) \quad \frac{1}{n} \sum_p^n F^{(p)} \frac{F^{(1)} - F^{(q)}}{2} \Psi_{ik\dots} &= \frac{F^{(1)} - F^{(q)}}{2} \frac{\sum_p^n F^{(p)}}{n} \Psi_{ik\dots} \\ &= \frac{F^{(1)} - F^{(q)}}{2} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_{ik\dots}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{F^{(1)} - F^{(q)}}{2} \Psi_{ik\dots} = 0. \end{aligned}$$

Les équations (II B) sont donc encore vérifiées à l'instant dt et par suite elles le resteront constamment, comme on le voit aisément : elles sont donc compatibles avec les équations d'évolution (II A).

Il resterait à montrer que les conditions (II B) sont compatibles entre elles, c'est-à-dire qu'il est possible de trouver à un instant initial quelconque 4^n fonctions $\Psi_{ik\dots}$ satisfaisant aux $(n-1)4^n$ équations (II B). Dans l'étude des ondes planes monochromatiques, nous verrons que cela est possible pour les solutions de la forme $\Psi_{ik\dots} = a_{ik\dots} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ grâce à un choix convenable des constantes $a_{ik\dots}$. Toute fonction obtenue par superposition de telles ondes planes est donc solution des équations (II B), ce qui prouve la compatibilité de ces équations.

Il est intéressant de comparer la démonstration que nous venons de donner avec celle que nous avons précédemment donnée dans le cas de la particule de spin $\mathcal{S} = 1$. Dans ce dernier cas, nous avons trouvé une équation d'évolution de la forme

$$(11) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = F \Psi$$

et une équation de condition

$$(12) \quad G \Psi = 0;$$

les opérateurs F et G obéissent aux relations

$$(13) \quad FG = GF = 0.$$

Si l'on admet l'équation d'évolution (11), on trouve

$$(14) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} G \Psi = G \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = GF \Psi = FG \Psi = 0.$$

Donc, si à l'instant initial $G \Psi = \text{const.} = C$, la quantité $G \Psi$ garde toujours sa valeur initiale. En particulier, pour $C = 0$, on voit que la condition (12) est compatible avec l'équation d'évolution (11).

Ici, dans la théorie générale, nous avons encore trouvé une équation d'évolution du type (11) avec $F = \frac{1}{n} \sum_p^n F^{(p)}$ et $(n-1)$ équations de condition du type

$$(15) \quad G_q \Psi = 0 \quad (q = 2, 3, \dots, n).$$

Les opérateurs F et G_q satisfont aux relations

$$(16) \quad FG_q = G_q F \neq 0.$$

Nous pouvons écrire

$$(17) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} G_q \Psi = G_q \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = G_q F \Psi = F G_q \Psi,$$

mais cette fois ces expressions ne sont plus égales à 0. Si nous posons $G_q \Psi = g_q(x, y, z, t)$, il viendra

$$(18) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial g_q}{\partial t} = F g_q,$$

d'où

$$(19) \quad g_q(x, y, z, t) = e^{ctF} g_q(x, y, z, 0),$$

où e^{ctF} est l'opérateur $1 + ctF + \frac{(ct)^2}{2} F^2 + \dots + \frac{(ct)^n}{n!} F^n + \dots$

Donc si $g_q(x, y, z, 0) = 0$, on aura à toute époque $g_q(x, y, z, t) = 0$. Autrement dit, si l'on admet l'équation d'évolution et si la condition $G^{(q)} \Psi = 0$ est satisfaite à l'instant initial, elle l'est toujours ensuite. Mais, si à l'instant origine on avait simplement $G_q \Psi = C$, la quantité $G_q \Psi$ ne resterait pas forcément égale à C . Il en résulte qu'on ne peut pas démontrer dans le cas général le théorème valable pour la particule de spin maximum 1 d'après lequel ⁽¹⁾, pour toute onde Ψ formée par superposition d'ondes de fréquence non nulle, l'équation d'évolution entraîne l'équation de condition.

2. Les grandeurs tensorielles pour les particules de spin entier.

— Dans la théorie de la particule de spin total maximum 1 qui contient celles des particules de spin total 1 et de spin total 0, nous avons pu remplacer les composantes du Ψ par des grandeurs tensorielles. Pour cela, nous avons considéré les seize Ψ_{ik} comme formant une matrice Ψ , puis multipliant cette matrice par une matrice Γ convenablement choisie, nous avons développé la matrice $\Psi\Gamma$ suivant les matrices fondamentales $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1234}$ de la théorie de Dirac sous la forme de von Neumann en écrivant

$$(20) \quad \Psi\Gamma = \sum_a \varphi_a \gamma_a.$$

⁽¹⁾ Voir Chap. VIII, § 3.

Les φ_a ainsi définis qui s'expriment linéairement à l'aide des Ψ_{ik} par la formule

$$(21) \quad \varphi_a = \frac{1}{4} \text{trace} (\gamma_a \Psi \Gamma)$$

sont les grandeurs tensorielles en question.

Pouvons-nous étendre cette méthode au cas des particules de spin total maximum supérieur à 1? La réponse est affirmative dans le cas des spins entiers $\mathcal{S} = \text{entier}$; elle est négative dans le cas des spins demi-entiers $\mathcal{S} = \text{entier} + \frac{1}{2}$. On pourrait justifier cette affirmation en se plaçant au point de vue général de la théorie des spineurs. Nous nous contenterons de montrer pourquoi le mode de définition des φ_a rappelé ci-dessus peut être généralisé dans le cas des spins entiers et pourquoi il échoue dans le cas des spins demi-entiers.

La particule de spin total maximum entier $\mathcal{S} = n$ peut être considérée comme formée par la fusion de $2n$ corpuscules de spin $\frac{1}{2}$: sa fonction d'onde aura donc des composantes $\Psi_{ik\dots}$ à $2n$ indices au nombre de $4^{2n} = 16^n$, et l'on pourra la considérer comme une matrice Ψ à 4^n lignes et 4^n colonnes. Maintenant considérons la particule de spin total maximum demi-entier $\mathcal{S} = \frac{n}{2}$, où n est le même nombre entier que plus haut: elle peut être considérée comme formée par la fusion de n corpuscules de spin $\frac{1}{2}$. A chacun de ces corpuscules sont attachées 16 matrices fondamentales de Dirac à 4 lignes et à 4 colonnes qui, par fusion, donnent 16 matrices à 4^n lignes et 4^n colonnes: en formant les produits de ces dernières matrices, on obtiendra 16^n matrices fondamentales à 4^n lignes et 4^n colonnes attachées à la particule de spin total maximum $\frac{n}{2}$. On pourra donc développer le Ψ de la particule de spin total maximum $\mathcal{S} = n$ suivant les 16^n matrices fondamentales à 4^n lignes et 4^n colonnes attachées à la particule de spin total maximum $\mathcal{S} = \frac{n}{2}$, et les coefficients de ce développement seront les 16^n grandeurs tensorielles φ_a pour la particule de spin $\mathcal{S} = n$. On posera donc

$$(22) \quad (\Psi \Gamma)_{\underbrace{ik\dots}_{2n}} = \sum_1^{16^n} \varphi_a (\gamma_a)_{\underbrace{ik\dots}_{2n}}.$$

Par contre, la même méthode de développement ne pourra plus être employée pour une particule de spin total maximum demi-entier

$\mathcal{S} = n + \frac{1}{2}$, car il n'y a pas de particule pour laquelle $\mathcal{S}$ ait une valeur moitié de celle-là.

De là résulte une grande différence entre les particules de spin entier et celles de spin demi-entier. Pour les particules de spin entier, on pourra trouver des grandeurs tensorielles qui pourront remplacer les composantes des Ψ et obéiront à des équations de forme tensorielle. Nous en avons eu un exemple avec la particule de spin maximum 1; nous en étudierons un autre exemple en détail avec la particule de spin maximum 2. Il en est tout autrement pour les particules à spin demi-entier : pour elles, il n'existe pas de grandeurs tensorielles pouvant jouer le rôle de composantes de la fonction d'onde, et les équations d'onde gardent nécessairement une forme « spinorielle » comme dans la théorie de la particule de spin $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire comme dans la théorie de Dirac.

Sans nous attacher pour l'instant à cette importante différence entre le cas des spins entiers et celui des spins demi-entiers, nous allons continuer l'étude des particules obtenues par fusion en nous servant uniquement des composantes Ψ_{ik} .

3. Ondes planes monochromatiques pour la particule de spin maximum quelconque. — Il est tout aussi facile de former les solutions « ondes planes » dans le cas général que dans le cas particulier des particules de spin maximum 1, le procédé qui, grâce à la représentation choisie, nous a permis de former les ondes planes de la particule de spin 1 à partir des ondes planes de la théorie de Dirac se généralisant sans difficulté.

Il s'agit toujours de trouver des solutions de la forme

$$(23) \quad \Psi_{ik\dots} = \underbrace{a_{ik\dots}}_n \theta^{i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (i, k, \dots = 1, 2, \dots, n)$$

avec les relations

$$(24) \quad k = \frac{2\pi}{hc} W, \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{h} \vec{p}, \quad k^2 = |\vec{k}|^2 + k_0^2$$

et les abréviations

$$(25) \quad \Delta = k + k_0; \quad \mathbf{p} = \theta^{i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

nombre des indices impairs et le nombre des indices pairs de $\Psi_{ik\dots r}$ (ou ce qui revient au même de $C_{\mu\nu\dots\rho}$). Cette règle permet de classer les diverses composantes du Ψ par rapport à la composante S_z du spin. En particulier, comme $n_i + n_p = n$, on voit que les composantes $\Psi_{ik\dots r}$ dépendant de $C_{11\dots 1}$ correspondent à la valeur $S_z = n \frac{h}{4\pi}$ et que les composantes $\Psi_{ik\dots r}$ dépendant de $C_{22\dots 2}$ correspondent à la valeur $S_z = -n \frac{h}{4\pi}$.

Nous préciserons ces premières indications quand nous nous occuperons du dénombrement et de la nomenclature des divers états de spin.

4. **Le quadrivecteur densité-flux.** — En théorie de la particule de spin maximum $\frac{n}{2}$, nous définirons le quadrivecteur densité-flux en généralisant les formules valables pour la particule de spin 1. Pour cela, nous poserons d'abord

$$(28) \quad B_k^{(p)} = \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_k^{(p-1)} \alpha_{k+1}^{(p+1)} \dots \alpha_n^{(n)},$$

$B_k^{(p)}$ est donc le produit de tous les $\alpha_i^{(i)}$, sauf de celui qui correspond à l'indice p .

Avec cette notation, nous écrirons les composantes du quadrivecteur densité-flux

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \sum_{ik\dots} \Psi_{ik\dots}^* \frac{\sum_p B_k^{(p)}}{n} \Psi_{ik\dots}, \\ \vec{f} &= -c \sum_{ik\dots} \Psi_{ik\dots}^* \frac{\sum_p \vec{\alpha}^{(p)} B_k^{(p)}}{n} \Psi_{ik\dots}. \end{aligned} \right.$$

où $\vec{\alpha}^{(p)}$ est la matrice vecteur de composantes $\alpha_1^{(p)}$, $\alpha_2^{(p)}$ et $\alpha_3^{(p)}$. Nous avons obtenu ces définitions à partir de celles qui sont valables pour la particule de spin maximum 1, en y remplaçant les facteurs α_i par les produits de tous les α_i sauf un.

Avec les définitions (29), on vérifie immédiatement sur les équations de propagation la validité de l'équation de continuité

$$(30) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{f} = 0.$$

D'après la définition de ρ , on devra normer la fonction Ψ en posant

$$(31) \quad \int_0^1 \sum_{i,k,\dots} \Psi_{ik,\dots}^* \frac{\sum_p B_p^{(\rho)}}{n} \Psi_{ik,\dots} d\tau = 1.$$

Il est particulièrement intéressant d'étudier les valeurs de ρ pour une onde plane monochromatique. Dans ce but, nous allons démontrer une formule générale qui a été donnée par M. Petiau et qui nous sera très utile pour la suite.

Considérons l'expression

$$(32) \quad \sum_{i,k,\dots} \Psi_{ik,\dots}^* \frac{\sigma^{(\rho)} a_i^{(1)} a_i^{(2)} \dots a_i^{(\rho)}}{C_n^{(\rho)}} \Psi_{ik,\dots},$$

où $\sigma^{(\rho)}$ indique une sommation sur tous les produits de p opérateurs a_i , distincts, sommation dont nous avons écrit seulement le premier terme, et où $C_n^{(\rho)} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est le nombre des termes figurant dans $\sigma^{(\rho)}$, c'est-à-dire le nombre des combinaisons de n objets pris p à p . Remarquons que si dans (32) nous faisons $p = n - 1$, comme on a $C_n^{n-1} = n$, nous retrouverons l'expression (29) de ρ .

Cherchons maintenant la valeur de l'expression (32) pour une onde plane monochromatique du type étudié au paragraphe 3. Si nous considérons d'abord le terme

$$(33) \quad \sum_{i,k,\dots} \Psi_{ik,\dots}^* a_i^{(1)} a_i^{(2)} \dots a_i^{(\rho)} \Psi_{ik,\dots},$$

nous voyons que chacun des termes de la somme Σ contient le facteur $|C_{\mu\nu\dots\rho}|^2$ correspondant aux indices de $\Psi_{ik,\dots,r}$ multiplié par autant de fois le facteur $\delta = \left(\frac{k_z}{\Delta}\right)^2$ qu'il y a de fois les indices 1 et 2 dans les $(n-p)$ derniers indices de la suite $ik\dots r$ et par autant de fois, en vertu de la forme des a_i , le facteur $-\delta$ qu'il y a de fois les valeurs 1 et 2 dans les p premiers indices de la suite $ik\dots r$. Il en résulte que la contribution à la somme (33) des termes qui contiennent une même constante $C_{\mu\nu\dots\rho}$ est

$$\sum_k C_{n-p}^k \delta^k \sum_l C_p^l (-\delta)^l |C_{\mu\nu\dots\rho}|^2,$$

et par suite l'expression (33) a pour valeur

$$\sum_1^{n-p} C_{n-p}^k \delta^k \sum_1^p C_p^l (-\delta)^l \sum_1^2 \sum_{\mu\nu\dots\rho} |C_{\mu\nu\dots\rho}|^2.$$

Pour obtenir l'expression (32), il faut faire la somme de C_n'' termes ayant la valeur précédente, puis diviser par C_n'' , ce qui nous donne finalement la formule

$$\begin{aligned} (34) \quad & \sum_1^s \Psi_{ik\dots r}^* \cdot \frac{\sigma^{(p)} a_k^{(1)} a_k^{(2)} \dots a_k^{(p)}}{C_n''} \Psi_{ik\dots r} \\ &= \sum_1^{n-p} C_{n-p}^k \delta^k \cdot \sum_1^p C_p^l (-\delta)^l \cdot \sum_1^2 \sum_{\mu\nu\dots\rho} |C_{\mu\nu\dots\rho}|^2 \\ &= (1+\delta)^{n-p} (1-\delta)^p \cdot \sum |C_{\mu\nu\dots\rho}|^2 = (1+\delta)^n \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^p \sum |C_{\mu\nu\dots\rho}|^2. \end{aligned}$$

Mais nous avons déjà trouvé précédemment

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} 1+\delta &= 1 + \frac{|\vec{k}|^2}{\Delta^2} = \frac{2k}{\Delta}; & 1-\delta &= 1 - \frac{|\vec{k}|^2}{\Delta^2} = \frac{2k_0}{\Delta}; \\ \frac{1-\delta}{1+\delta} &= \frac{k_0}{k} = \frac{m_0 c^2}{W}. \end{aligned} \right.$$

On a donc en fin de compte l'importante formule

$$(36) \quad \sum_1^s \Psi_{ik\dots r}^* \cdot \frac{\sigma^{(p)} a_k^{(1)} a_k^{(2)} \dots a_k^{(p)}}{C_n''} \Psi_{ik\dots r} = \left(\frac{2k}{\Delta} \right)^n \left(\frac{m_0 c^2}{W} \right)^p \cdot \sum_1^2 \sum_{\mu\nu\dots\rho} |C_{\mu\nu\dots\rho}|^2.$$

Cette formule nous montre qu'introduire un facteur a_k en plus au premier membre a pour effet d'introduire un facteur $\frac{m_0 c^2}{W}$ au second membre, c'est-à-dire d'introduire au second membre un facteur de contraction de Lorentz.

Si nous appliquons la formule générale (36) au cas $p = n - 1$, nous trouvons

$$(37) \quad \rho = \left(\frac{2k}{\Delta} \right)^n \left(\frac{m_0 c^2}{W} \right)^{n-1} \sum_1^2 \sum_{\mu\nu\dots\rho} |C_{\mu\nu\dots\rho}|^2.$$

Telle est l'expression générale de la densité ρ . En y faisant $n = 2$, on retrouverait aisément l'expression de ρ pour le cas de la particule de spin maximum 1 donnée par la formule (5) du Chapitre VIII.

De plus, si dans la formule (36), nous faisons $p = 0$ et $C_n^0 = 1$, nous trouvons

$$(38) \quad \sum_{i,k,\dots,r} \Psi_{ik,\dots,r}^* \Psi_{ik,\dots,r} = \sum_{i,k,\dots,r} |\Psi_{ik,\dots,r}|^2 = \left(\frac{2k}{\Delta}\right)^n \sum_{\mu,\nu,\dots,\rho} |C_{\mu,\nu,\dots,\rho}|^2$$

et, en comparant avec (37)

$$(39) \quad \rho = \left(\frac{m_0 c^2}{W}\right)^{n-1} \sum_{i,k,\dots,r} |\Psi_{ik,\dots,r}|^2.$$

Cette formule, qui généralise la formule (10) du Chapitre VIII, montre que la densité ρ est positive pour toute onde plane à énergie positive, mais que pour une onde plane à énergie négative elle n'est positive que si la particule est obtenue par la fusion d'un nombre *impair* de corpuscules de spin $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si elle a un spin total demi-entier.

Le calcul du vecteur flux $\vec{f}$ conduirait à la même conclusion que dans le cas de la particule de spin 1. On trouverait pour l'onde plane se propageant le long de Oz

$$(40) \quad f_x = f_y = 0, \quad f_z = \rho c \frac{|\vec{k}|}{k} = \rho \cdot \frac{|\vec{p}| c^2}{W},$$

ce qui correspond bien à un mouvement dans la direction Oz avec la vitesse $\frac{pc^2}{W}$.

Comme dans le cas de la particule de spin 1, la densité ρ n'est pas ici définie positive pour une onde Ψ quelconque, formée par une superposition quelconque d'ondes planes. Cette circonstance donne lieu aux mêmes remarques que précédemment.

L'intégrale

$$\int_0 \rho \, d\tau = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{m_0 c^2}{W}\right)^{n-1} \int_0 |\Psi(\vec{k})|^2 \, d\tau$$

est toujours positive pour n impair (c'est-à-dire s demi-entier); elle ne l'est pas nécessairement pour n pair (c'est-à-dire s entier) à cause de l'existence des ondes planes à énergie négative.

Par contre, l'énergie moyenne d'une onde plane

$$\int_0 \rho W \, d\tau = \left(\frac{m_0 c^2}{W}\right)^{n-1} W \int_0 |\Psi|^2$$

est toujours positive si n est pair (s entier), mais ne l'est pas nécessairement si n est impair (s demi-entier).

On voit clairement ainsi les complications qui s'introduisent dans la théorie des particules de spin quelconque. Ces complications apparaissent sur les formules comme reliées aux facteurs de contraction de Lorentz $\frac{m_0 c^2}{W}$: elles trouveraient leur explication si l'on parvenait à montrer que ces facteurs de contraction ont pour origine le fait que l'on représente par une unité ponctuelle dans l'espace physique une particule dont en réalité la structure est complexe. Cette explication serait en accord avec l'idée de « fusion » qui sert de base à nos développements.

§. Formalisme général de la Mécanique ondulatoire des particules de spin quelconque. — On peut généraliser pour une particule de spin quelconque le formalisme qui a été développé précédemment pour la particule de spin maximum 1.

Nous admettrons d'abord que tous les opérateurs rencontrés dans la théorie comme correspondant à des grandeurs physiques observables ont la forme suivante

$$(41) \quad F = F^{(1)} + F^{(2)} + \dots + F^{(n)},$$

où $F^{(1)}, \dots, F^{(n)}$ sont des opérateurs linéaires et hermitiens agissant de la même manière sur les variables x, y, z , mais où $F^{(p)}$ agit seulement sur le $p^{\text{ième}}$ indice des composantes $\Psi_{ik\dots r}$. On vérifie aisément que l'hamiltonien H est un opérateur de ce type avec

$$(42) \quad H^{(p)} = \frac{c}{n\alpha} \left(a_1^{(p)} \frac{\partial}{\partial x} + a_2^{(p)} \frac{\partial}{\partial y} + a_3^{(p)} \frac{\partial}{\partial z} + \alpha m_0 c a_4^{(p)} \right).$$

On écrira les équations aux valeurs propres des opérateurs $F^{(p)}$ sous la forme

$$(43) \quad F^{(p)} \varphi_i = f_i^{(p)} \varphi_i \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

et l'on pourra vérifier que les valeurs propres de F sont de la forme

$$(44) \quad f_i = f_i^{(1)} \pm f_i^{(2)} \pm \dots \pm f_i^{(n)},$$

car $f_i^{(p)} = \pm f_i^{(1)}$.

On normalisera naturellement toutes les fonctions propres, y compris celles de l'hamiltonien, de la même façon que le Ψ lui-même en posant

$$(45) \quad \int_V \sum_{i,k\dots r} \Psi_{ik\dots r}^* \cdot \frac{\sum_p B_i^{(p)}}{n} \Psi_{ik\dots r} d\tau = 1,$$

et l'on démontrera que deux fonctions propres φ_m et φ_n correspondant à

des valeurs propres distinctes sont orthogonales en $\frac{\sum_p^n B_i^{(p)}}{n}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(46) \quad \int_D \sum_1^k \sum_{ik\dots r} (\varphi_m)_{ik\dots r}^* \cdot \frac{\sum_p^n B_i^{(p)}}{n} (\varphi_n)_{ik\dots r} d\tau = 0.$$

On admettra alors les principes suivants, tout à fait analogues à ceux que nous avons rencontrés dans les formes précédemment étudiées de la Mécanique ondulatoire :

1° Les valeurs possibles d'une grandeur observable correspondant à l'opérateur linéaire et hermitien F sont les valeurs propres f_n de cet opérateur.

2° Si l'état de la particule est représenté par la fonction d'onde

$$(47) \quad \Psi = \sum_n c_n \varphi_n,$$

la probabilité pour qu'une mesure de la grandeur F fournisse la valeur f_n est donnée par $|c_n|^2$ et l'on aura $\sum_n |c_n|^2 = 1$, comme on le vérifie aisément.

Avec ces principes, la valeur moyenne de F sera

$$(48) \quad \bar{F} = \sum_n |c_n|^2 f_n,$$

et en généralisant un raisonnement fait au Chapitre VIII, on montrera que l'expression (48) est équivalente à la suivante

$$(49) \quad \bar{F} = \int_D \sum_1^k \sum_{ik\dots} \Psi_{ik\dots}^* \cdot \sum_1^n F^{(p)} B_i^{(p)} \Psi_{ik\dots} d\tau.$$

La quantité sous le signe $\int$ sera la densité de valeur moyenne. On remarquera que les grandeurs φ et $\bar{f}$ sont des densités de ce type.

De même encore, nous définirons l'élément de matrice F_{mn} de la matrice engendrée par un opérateur F dans un système de fonctions

orthonormales χ_n par les formules symboliques

$$(50) \quad F_{mn} = \int_0^1 \chi_m^* \cdot \sum_{\mu=1}^n F^{(\mu)} B_{\mu}^{(\mu)} \chi_n d\tau.$$

Généralement, on appliquera la définition (50) au cas où les χ_m sont les fonctions propres de l'opérateur hamiltonien, c'est-à-dire les ondes planes $\Psi(\vec{k})$, et l'on aura alors

$$(51) \quad F_{\vec{k}\vec{k}'} = \int_0^1 \Psi(\vec{k}')^* \cdot \sum_{\mu=1}^n F^{(\mu)} B_{\mu}^{(\mu)} \Psi(\vec{k}) d\tau.$$

Ici encore la quantité sous le signe $\int$ sera la densité de l'élément de matrice.

Enfin, nous dirons toujours qu'une grandeur observable est une intégrale première quand tous les éléments de la matrice qui lui correspond dans le système des fonctions propres de H sont des constantes.

Cette définition conduit toujours à la condition

$$(52) \quad [F, H] \equiv 0,$$

pour exprimer le caractère d'intégrale première de F.

On retrouve donc dans l'ensemble le même formalisme que pour la particule de spin 1. Il soulève toujours des difficultés pour les solutions à énergie négatives, difficultés liées à l'apparition des facteurs de contraction de Lorentz et qu'on pourrait chercher à lever par l'introduction de la seconde quantification.

6. Les tenseurs symétriques énergie-impulsion ⁽¹⁾. — Pour la particule de spin maximum 1, nous avons rencontré un tenseur symétrique d'énergie-impulsion qu'on peut appeler le tenseur corpusculaire parce qu'on le forme comme il est naturel de former le tenseur énergie-impulsion en théorie quantique. La densité d'énergie définie par la composante 44 de ce tenseur n'est pas nécessairement positive ou nulle en tout point. À côté de ce tenseur corpusculaire, nous avons pu aussi former un autre tenseur symétrique d'énergie-impulsion qui correspond au tenseur classique de Maxwell en électromagnétisme et qui définit une densité d'énergie $m_0 c^2 |\Psi|^2$ définie positive. Ces deux tenseurs énergie-impulsion

⁽¹⁾ Voir note page 83.

ne coïncident pas localement, mais ils sont intégralement équivalents suivant la formule

$$(53) \quad \int_0 T_{ik} d\tau = \int_0 M_{ik} d\tau \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ceci rappelé, comment les choses vont-elles se présenter pour une particule de spin maximum quelconque obtenue par fusion? Pour toute particule obtenue par fusion, nous pourrions définir un tenseur énergie-impulsion du type corpusculaire, mais nous pourrions aussi en définir d'autres : seulement, en général, aucun de ces tenseurs ne nous permettra de définir une densité qui ne soit nulle part négative. Tous ces tenseurs sont d'ailleurs intégralement équivalents, c'est-à-dire que les intégrales des composantes de mêmes indices ont la même valeur pour tous ces tenseurs. Commençons par l'étude du tenseur corpusculaire.

a. Tenseur corpusculaire. — Quel que soit le spin de la particule envisagée, on pourra toujours définir un tenseur corpusculaire T en généralisant la définition employée pour la particule de spin 1. On posera encore

$$(54) \quad U_i^{(p)} = a_i^{(p)} \quad (i = 1, 2, 3); \quad U_4^{(p)} = 1 \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

et l'on écrira

$$(55) \quad T_{ij} = T_{ji} = \frac{hc}{8\pi i} \left[\Psi^* \cdot \frac{\sum_p U_i^{(p)} B_i^{(p)}}{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_j} \frac{\sum_p U_i^{(p)} B_i^{(p)}}{n} \Psi + \Psi^* \frac{\sum_p U_j^{(p)} B_j^{(p)}}{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_i} \frac{\sum_p U_j^{(p)} B_j^{(p)}}{n} \Psi \right].$$

On vérifie aisément sur les équations d'ondes la relation de conservation

$$(56) \quad \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

L'interprétation des diverses composantes de T_{ij} est la même que dans le cas $\mathcal{S} = 1$.

En particulier le calcul des T_{ij} pour une onde plane se fait facilement en remarquant que chaque facteur U_i est alors équivalent à la multiplication par $-\frac{v_i}{c}$ pour $i = 1, 2, 3$ et à la multiplication par 1 pour $i = 4$

et que les opérateurs $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \dots$ sont alors équivalents à la multiplication par $p_{x\dots}$. Enfin chaque facteur α_k introduit une fois le facteur de contraction $\frac{m_0 c^2}{W}$. Si l'on tient compte de la valeur (39) de ρ , on retrouve toujours pour les T^{ij} le tableau classique déjà donné en (48) du Chapitre VIII et où l'on voit que T^{44} est bien égal à ρW .

b. Les tenseurs du type M. — Pour définir le tenseur du type M, nous introduirons les quantités

$$(57) \quad B_k^{pq\dots} = \alpha_k^{(1)} \alpha_k^{(2)} \dots \alpha_k^{(p-1)} \alpha_k^{(p+1)} \dots \alpha_k^{(q-1)} \alpha_k^{(q+1)} \dots,$$

qui sont les produits de tous les α_k sauf de ceux dont l'indice supérieur est un des indices supérieurs de $B_k^{pq\dots}$. Avec la notation (57), on définira un tenseur symétrique de rang m par la formule

$$(58) \quad M_{\frac{ij\dots}{m}} = m_0 c^2 \Psi^* \cdot \frac{\Sigma_{pq\dots} U_i^{(p)} U_j^{(q)} \dots \widetilde{B_i^{pq\dots}}^m}{\mathfrak{A}_n^m} \Psi,$$

où $\mathfrak{A}_n^m$ est le nombre des *arrangements* de n objets pris m à m ($\mathfrak{A}_n^m = \frac{n!}{(m-n)!}$). Les tenseurs obtenus en donnant à m des valeurs allant de 0 à n dans la formule (58) sont visiblement symétriques. Parmi ces tenseurs, nous ne considérerons que ceux dont le rang $m = 2r$ est *pair*. Pour la particule obtenue par fusion de n corpuscules de spin $\frac{1}{2}$, nous pourrions former $\frac{n}{2}$ de ces tenseurs si n est pair et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair.

Ceci fait, en contractant le tenseur de rang $2r$ sur $2r - 2$ de ses indices, nous obtiendrons un tenseur symétrique de rang 2 suivant la formule

$$(59) \quad M_{ij}^{(r)} = \sum_l M_{ijkl\dots}^{kl\dots}$$

En appliquant cette dernière formule, il faudra se souvenir que, si l'on écrit les composantes du tenseur dans le système des coordonnées réelles d'espace-temps, il faut changer le signe de chaque composante quand on « élève » un des indices 1, 2, 3, comme nous l'avons précédemment rappelé.

Par ce procédé, nous aurons finalement formé $\frac{n}{2}$ tenseurs symétriques $M^{(r)}$ de rang 2 si n est pair et $\frac{n-1}{2}$ tenseurs de ce type si n est impair.

Nous pouvons dire aussi que nous avons ainsi formé un nombre de tenseurs symétriques $M^{(r)}$ de rang 2 égal à la moitié du plus grand nombre pair contenu dans n , soit 0 pour $n = 1$, 1 pour $n = 2$ et $n = 3$, 2 pour $n = 4$ et $n = 5$, etc.

En partant des équations générales (1), il est aisé de vérifier que l'on a l'équation de conservation

$$(60) \quad \sum_1^4 \frac{\partial M^{(r)ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Tous les tenseurs $M^{(r)}$ satisfont donc à des relations de conservation qui permettent de les assimiler à des tenseurs énergie-impulsion.

Pour voir quelles relations existent entre les divers tenseurs $M^{(r)}$ et le tenseur T , nous envisagerons encore le cas de l'onde plane monochromatique. Dans ce cas, comme nous l'avons rappelé plus haut, nous avons les correspondances suivantes

$$(61) \quad U_1^{(p)} \sim -\frac{v_x}{c}.; \quad U_2^{(p)} \sim -\frac{v_y}{c}.; \quad U_3^{(p)} \sim -\frac{v_z}{c}.; \quad U_4^{(p)} \sim 1.,$$

quel que soit p . Donc

$$(62) \quad \sum_1^4 U_l^{(p)} U_l^{(q)} = U_4^{(p)} U_4^{(q)} - U_1^{(p)} U_1^{(q)} \\ - U_2^{(p)} U_2^{(q)} - U_3^{(p)} U_3^{(q)} \sim \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \left(\frac{m_0 c^2}{W}\right) .,$$

quels que soient p et q . On a donc pour toute valeur de r

$$(63) \quad (M^{(r)})_{12} = m_0 c^2 \Psi^* \cdot \frac{v_x v_y}{c^2} \cdot \left(\frac{m_0 c^2}{W}\right)^{n-2} \Psi \\ = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot v_y \cdot \Psi^* \left(\frac{m_0 c^2}{W}\right)^{n-1} \Psi = \gamma p_x v_y.$$

En opérant de même sur les autres composantes de $M^{(r)}$, on voit que les tableaux des composantes contrevariantes de tous les $M^{(r)}$ coïncident et sont identiques au tableau valable pour T . D'où cette conclusion importante qui généralise le résultat obtenu pour la particule de spin $s = 1$: « Pour une onde plane monochromatique, le tenseur T et tous les tenseurs $M^{(r)}$ coïncident. »

Il en résulte immédiatement que, même dans le cas général d'une onde Ψ quelconque, cas où les tenseurs T et $M^{(r)}$ sont distincts, ils restent

cependant tous intégralement équivalents, c'est-à-dire que l'on a

$$(64) \quad \int_0 M_{ik}^{(1)} d\tau = \int_0 M_{ik}^{(2)} d\tau = \dots = \int_0 T_{ik} d\tau,$$

pour tout i et tout k . Pour prouver les relations (64), il suffit toujours de remarquer que l'intégration supprime l'effet des interférences entre les ondes planes ⁽¹⁾.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'unique tenseur M pour la particule de spin $s = 1$, les facteurs de contraction de Lorentz $\alpha_i^{(p)}$ interviendront pour $s > 1$ dans la définition de tous les tenseurs énergie-impulsion, tant du type T que du type $M^{(r)}$. Il en résulte que pour aucun de ces tenseurs la composante d'indices 44 ou densité d'énergie n'est définie positive. Pour l'onde plane, elle a pour tous ces tenseurs la valeur commune

$$(65) \quad \rho W = \Psi^* \left(\frac{m_0 c^2}{W} \right)^{n-1} W \Psi.$$

Elle ne sera donc définie positive que si n est pair; pour n impair, elle sera négative pour les ondes à énergie négative. Dans le cas général où l'onde Ψ est une superposition d'ondes planes, les composantes 44 seront différentes pour les divers tenseurs et aucune n'est définie-positive. La définition de la densité d'énergie n'a donc plus un caractère univoque, car il n'y a aucune raison physique de préférer T_{44} ou l'un des $M_{44}^{(r)}$.

Cette indétermination du tenseur énergie-impulsion se rattache toujours au fait qu'en théorie quantique, ce sont les intégrales d'espace et non les densités qui ont un sens physique. Pour la valeur moyenne de l'énergie obtenue en intégrant la densité de l'énergie, il n'y a, en effet, aucune ambiguïté, puisque cette intégrale ne dépend pas du tenseur choisi. Il en est de même pour les autres composantes du tenseur énergie-impulsion.

D'après les remarques faites plus haut, la valeur moyenne de l'énergie est toujours positive si n est pair : si n est impair, elle peut être négative quand les ondes à énergie négative interviennent dans la composition du Ψ .

7. Récapitulation des résultats obtenus sur le caractère défini-positif de certaines grandeurs. — Il est intéressant de résumer en un tableau récapitulatif les résultats obtenus quand au caractère défini-positif de la densité de probabilité de présence, de la densité d'énergie et de leurs intégrales d'espace.

(¹) Voir cependant note page 130.

1° Densités.

a. *Densité de présence.* — On a

$$(66) \quad \varrho = \sum_{i,k,\dots} \Psi_{ik\dots}^* \cdot \frac{\sum_p^n B_p^{(p)}}{n} \Psi_{ik\dots}.$$

Cette densité est définie positive si $n = 1$ (car c'est alors le $|\Psi|^2$ de la théorie de Dirac). Elle n'est pas définie positive pour $n > 1$ ($s \geq 1$).

b. *Densités d'énergie.* — Nous pouvons poser à volonté $\omega = T_{44}$ ou $\omega = M_{44}^{(r)}$. Aucune de ces densités n'est en général définie positive. Néanmoins dans le cas $n = 2$, la densité M_{44} correspondant à l'unique tenseur du type maxwellien est définie positive, car elle est égale à $m_0 c^2 |\Psi|^2$. Pour les particules de spin $s = 0$ et $s = 1$, on peut donc définir une densité d'énergie qui n'est jamais négative, mais cela n'est plus possible pour $s > 1$.

2° Valeurs intégrales.

a. *Probabilité de présence.* — On a

$$(67) \quad \int_0 \varrho \, d\tau = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{m_0 c^2}{W} \right)^{n-1} \int_0 |\Psi_{\vec{k}}|^2 \, d\tau,$$

la somme Σ étant étendue à toutes les ondes planes dont la superposition donne le Ψ . Cette quantité est définie positive pour n impair (s demi-entier), elle n'est pas définie positive pour n pair (s entier) à cause de l'existence des ondes à énergie négative.

b. *Énergie.* — La valeur moyenne de l'énergie est donnée par l'une des intégrales équivalentes $\int_0 T_{44} \, d\tau$ ou $\int_0 M_{44}^{(r)} \, d\tau$. Elle a pour valeur

$$\sum_{\vec{k}} \left(\frac{m_0 c^2}{W} \right)^{n-1} W \int_0 |\Psi_{\vec{k}}|^2 \, d\tau.$$

Elle est donc définie positive si n est pair (s entier); elle ne l'est pas si n est impair (s demi-entier) à cause de l'existence des ondes à énergie négative.

Telles sont les conclusions générales de la théorie des particules à spin, du moins sous la forme non-superquantifiée que nous exposons ici.



CHAPITRE X.

ÉTUDE ET NOMENCLATURE DES ÉTATS DE SPIN. PRÉVISION DES GRANDEURS TENSORIELLES.

1. Les composantes du spin. — Nous définirons les opérateurs correspondant aux trois composantes rectangulaires du spin par une généralisation immédiate des définitions adoptées dans le cas $s = 1$. Soient

$$(1) \quad \mathbf{s}_1^{(p)} = \frac{i a_2^{(p)} a_3^{(p)}}{2}, \quad \mathbf{s}_2^{(p)} = \frac{i a_3^{(p)} a_1^{(p)}}{2}, \quad \mathbf{s}_3^{(p)} = \frac{i a_1^{(p)} a_2^{(p)}}{2},$$

et posons

$$(2) \quad \sigma_i^{(n)} = \sum_p^n \mathbf{s}_i^{(p)}.$$

Aux composantes rectangulaires du spin pour la particule obtenue par fusion de n corpuscules de spin $\frac{1}{2}$, nous ferons correspondre les opérateurs

$$(3) \quad S_i = \frac{\hbar}{2\pi} \sigma_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

On aura alors

$$(4) \quad [\sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)}] = -i \sigma_1^{(n)}; \quad [\sigma_3^{(n)}, \sigma_1^{(n)}] = -i \sigma_2^{(n)}; \quad [\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}] = -i \sigma_3^{(n)},$$

c'est-à-dire les relations habituelles de non-commutation apparentées au groupe des rotations spatiales.

Pour déterminer les valeurs propres de S_i , nous emploierons un raisonnement de récurrence. Supposons connues les valeurs propres de $\sigma_i^{(n)}$ et cherchons celles de $\sigma_i^{(n+1)}$. Nous avons

$$(5) \quad \sigma_i^{(n+1)} - \sigma_i^{(n)} = \mathbf{s}_i^{(n+1)}$$

et, en élevant au carré

$$(6) \quad (\sigma_i^{(n+1)})^2 - 2 \sigma_i^{(n)} \sigma_i^{(n+1)} + (\sigma_i^{(n)})^2 = (\mathbf{s}_i^{(n+1)})^2 = \frac{1}{4}.$$

Donc, si k est une valeur propre de $\sigma_i^{(n)}$, les valeurs propres de $\sigma_i^{(n+1)}$ seront

$$(7) \quad k \pm \sqrt{k^2 - \left(k^2 - \frac{1}{4}\right)} = k \pm \frac{1}{2}.$$

Or pour $n = 1$, on est dans le cas de l'électron de Dirac et les valeurs propres de $\sigma_i^{(n)}$ sont $\pm \frac{1}{2}$. Pour $n = 2$, on aura pour $\sigma_i^{(2)}$ les valeurs propres $-1, 0$ et 1 . Pour $n = 3$, on aura les valeurs propres $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, etc. En résumé, pour n pair, $\sigma_i^{(n)}$ a pour valeurs propres $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n}{2}$ et, pour n impair, $\sigma_i^{(n)}$ a pour valeurs propres $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{n}{2}$. Autrement dit, $S_i^{(n)}$ a pour n pair les valeurs propres $0, \pm \frac{h}{2\pi}, \pm 2 \frac{h}{2\pi}, \dots, \pm \frac{n}{2} \frac{h}{2\pi}$ et pour n impair les valeurs propres $\pm \frac{h}{4\pi}, \pm 3 \frac{h}{4\pi}, \dots, \pm n \frac{h}{4\pi}$. C'est bien ce que l'on pouvait prévoir en ajoutant algébriquement les composantes des spins des divers corpuscules fondus.

En généralisant le raisonnement fait pour le cas $n = 2$, on trouverait

$$(8) \quad S_z \Psi_{ik\dots} = -\frac{h}{4\pi} [(-1)^l + (-1)^k + \dots] \Psi_{ik\dots}.$$

Cette formule permet de classer les composantes $\Psi_{ik\dots}$ par rapport aux diverses valeurs propres de S_z . Si $\Psi_{ik\dots}$ a r indices impairs et s indices pairs, elle correspond à la valeur propre $s_z = (r - s) \frac{h}{4\pi} = (2r - n) \frac{h}{4\pi}$.

Bien entendu, on complètera le quadrivecteur spin en posant

$$(9) \quad S_i = \frac{h}{2\pi} \sigma_i^{(n)}, \quad \text{avec } \sigma_i^{(n)} = \sum_1^n s_i^{(p)} = \sum_1^n \frac{i a_1^{(p)} a_2^{(p)} a_3^{(p)}}{2}.$$

2. Le spin total. — Posons

$$(10) \quad \sigma_n^2 = (\sigma_x^{(n)})^2 + (\sigma_y^{(n)})^2 + (\sigma_z^{(n)})^2 = \left(\sum_1^n s_x^{(p)} \right)^2 + \left(\sum_1^n s_y^{(p)} \right)^2 + \left(\sum_1^n s_z^{(p)} \right)^2.$$

L'opérateur de spin total sera encore défini par

$$(11) \quad S^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \sigma_n^2.$$

Cherchons les valeurs propres de σ_n^2 en suivant une marche indiquée par M. Petiau. Nous avons

$$(12) \quad \sigma_n^2 = \frac{3}{4}n + 2 \sum_{\substack{p,q \\ p>q}} (\mathbf{s}_1^{(p)} \mathbf{s}_1^{(q)} + \mathbf{s}_2^{(p)} \mathbf{s}_2^{(q)} + \mathbf{s}_3^{(p)} \mathbf{s}_3^{(q)}),$$

Nous avons de même

$$(13) \quad \begin{aligned} \sigma_{n+1}^2 &= \frac{3}{4}(n+1) + 2 \sum_{\substack{p,q \\ p>q}} (\mathbf{s}_1^{(p)} \mathbf{s}_1^{(q)} + \mathbf{s}_2^{(p)} \mathbf{s}_2^{(q)} + \mathbf{s}_3^{(p)} \mathbf{s}_3^{(q)}) \\ &\quad + 2 \sum_p (\mathbf{s}_1^{(p)} \mathbf{s}_1^{(n+1)} + \mathbf{s}_2^{(p)} \mathbf{s}_2^{(n+1)} + \mathbf{s}_3^{(p)} \mathbf{s}_3^{(n+1)}) \\ &= \frac{3}{4} + \sigma_n^2 + 2 \sum_p (\mathbf{s}_1^{(p)} \mathbf{s}_1^{(n+1)} + \mathbf{s}_2^{(p)} \mathbf{s}_2^{(n+1)} + \mathbf{s}_3^{(p)} \mathbf{s}_3^{(n+1)}). \end{aligned}$$

De (12) et (13), on tire par des calculs sans difficultés, en s'appuyant sur les relations de commutation,

$$(14) \quad \left(\sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 - \frac{3}{4} \right)^2 = \sigma_n^2 - 2 \sum_p (\mathbf{s}_1^{(p)} \mathbf{s}_1^{(n+1)} + \mathbf{s}_2^{(p)} \mathbf{s}_2^{(n+1)} + \mathbf{s}_3^{(p)} \mathbf{s}_3^{(n+1)}),$$

d'où en tirant la valeur de la Σ de (13) et la portant dans (14)

$$(15) \quad \left(\sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 - \frac{3}{4} \right)^2 = 2\sigma_n^2 - \sigma_{n+1}^2 + \frac{3}{4},$$

σ_{n+1} satisfait donc à l'équation bicarrée

$$(16) \quad \sigma_{n+1}^4 - 2 \left(\sigma_n^2 + \frac{1}{4} \right) \sigma_{n+1}^2 + \sigma_n^4 - \frac{1}{2} \sigma_n^2 - \frac{3}{16} = 0.$$

Si α_n et α_{n+1} sont respectivement valeurs propres de σ_n^2 et de σ_{n+1}^2 , on a donc

$$(17) \quad \alpha_{n+1}^2 - 2 \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{4} \right) \alpha_{n+1} + \alpha_n^2 - \frac{1}{2} \alpha_n - \frac{3}{16} = 0,$$

équation du second degré en α_{n+1} dont les racines sont

$$(18) \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{1}{4} \pm \sqrt{\alpha_n + \frac{1}{4}}.$$

Ainsi, si $\alpha_n = s(s+1)$ avec s entier positif ou nul, on a

$$(19) \quad \alpha_{n+1} = \begin{cases} \left(s + \frac{1}{2}\right) \left(s + \frac{3}{2}\right), \\ \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(s + \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

à condition que ces valeurs ne soient pas négatives, car α_{n+1} est d'après sa définition essentiellement non négatif.

Or, pour l'électron de Dirac ($n=1$), on a $s = \frac{1}{2}$. Donc pour $n=2$, on a $s = \frac{1}{0}$; pour $n=3$, on a $s = \frac{3}{2}$, etc.

Bref, pour la particule formée par la fusion de n corpuscules de spin $\frac{1}{2}$, on a les valeurs propres

$$(20) \quad S^2 = s(s+1) \frac{h^2}{4\pi^2},$$

avec $s = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ si n est pair et $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ si n est impair.

Ce sont bien les résultats auxquels on pouvait s'attendre en combinant l'idée de fusion avec la théorie quantique générale du spin.

3. Nomenclature des états de spin. — Joints aux prévisions générales de la théorie du spin, les résultats précédents nous apprennent que la particule formée par la fusion de n corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ est susceptible de divers états de spin total correspondant aux nombres quantiques $s = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}$ si n est pair, et aux nombres quantiques $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ si n est impair. De plus, chacun de ces états de spin total doit se décomposer en $2s+1$ états correspondant aux valeurs propres d'une des composantes, mettons S_z , du spin, c'est-à-dire en $2s+1$ états caractérisés par les nombres quantiques $m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$, où m est défini par

$$(21) \quad S_z = m \frac{h}{2\pi}.$$

Chaque état défini par l'ensemble des deux nombres quantiques s et m est obtenu un certain nombre de fois par le processus de fusion; ce nombre, nous le nommerons le « poids » de l'état considéré $p_{s,m}$. Mais comme à chaque valeur de s doit correspondre $2s+1$ valeurs de m , nous voyons facilement qu'en réalité le poids $p_{s,m}$ ne peut dépendre que de s et non de m : pour cette raison, nous l'écrirons simplement p_s .

Dressons maintenant le tableau suivant :

$$(22) \quad \begin{array}{c|cccccccc} & m & & & & & & & \\ & s & & & & & & & \\ \hline & -\mathcal{S} & -\mathcal{S}+1 & \dots & -\mathcal{S}+k & \dots & \mathcal{S}-k & \dots & \mathcal{S}-1 & \mathcal{S} \\ \hline \mathcal{S} & p_{\mathcal{S}} & p_{\mathcal{S}} & \dots & p_{\mathcal{S}} & & p_{\mathcal{S}} & & p_{\mathcal{S}} & p_{\mathcal{S}} \\ \mathcal{S}-1 & \dots & p_{\mathcal{S}-1} & & p_{\mathcal{S}-1} & & p_{\mathcal{S}-1} & & p_{\mathcal{S}-1} & \\ \mathcal{S}-2 & \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\ \vdots & \dots & & & \dots & & \dots & & & \\ \mathcal{S}-k & & & & p_{\mathcal{S}-k} & & p_{\mathcal{S}-k} & & & \\ \vdots & & & & \dots & & \dots & & & \end{array}$$

Dans ce tableau, nous avons porté en haut les valeurs possibles de m et à gauche les valeurs de s en appelant $\mathcal{S}$ la valeur maxima de s égale à $\frac{n}{2}$. Pour une valeur donnée de s , m varie de $-s$ à $+s$ par unités et les états représentés par une même ligne horizontale ont le même poids p_s . Il s'agit maintenant de déterminer la valeur de p_s .

Tout d'abord considérons l'état $m = s = \mathcal{S}$ représenté par la case du haut à droite de notre tableau. Il correspond visiblement au cas où les spins de tous les corpuscules constituants sont parallèles et dirigés dans le sens positif de Oz : comme il n'y a qu'une manière d'obtenir ce résultat, le poids à inscrire dans la case en question est 1. Donc $p_{\mathcal{S}} = 1$ et la première ligne du tableau (22) devra porter $2s + 1$ fois le poids 1.

Considérons l'une des colonnes de notre tableau, par exemple celle qui correspond à $m = \mathcal{S} - p$. Elle correspond au cas où sur les $n = 2\mathcal{S}$ constituants de la particule, $2\mathcal{S} - p$ ont leur composante S_z de spin égale à $+\frac{h}{4\pi}$ et p ont cette composante égale à $-\frac{h}{4\pi}$, de sorte que la valeur totale résultante de S_z soit

$$(23) \quad S_z = \frac{h}{4\pi} (2\mathcal{S} - p - p) = \frac{h}{2\pi} (\mathcal{S} - p).$$

Or, il y a $C_{2\mathcal{S}}^{2\mathcal{S}-p}$ façons de choisir les $(2\mathcal{S} - p)$ corpuscules constituants avec S_z égal à $\frac{h}{4\pi}$ sur le total des $2\mathcal{S}$ corpuscules. Le total des poids figurant dans la colonne verticale du tableau (22) qui correspond à $m = \mathcal{S} - p$ sera donc

$$(24) \quad \sum_s^{m=2\mathcal{S}-p} p_s = C_{2\mathcal{S}}^{2\mathcal{S}-p} = \frac{(2\mathcal{S})!}{(2\mathcal{S}-p)!p!} = \frac{(2\mathcal{S})!}{(\mathcal{S}+m)!(\mathcal{S}-m)!}.$$

Cette formule nous fournit la somme de tous les poids figurant dans le tableau qui sera

$$(25) \quad \sum_{\text{Tableau}} p_s = \sum_0^{2S} \frac{(2S)!}{p! (2S-p)!} = (1+1)^{2S} = 2^{2S} = 4^S = 2^n,$$

car, m variant de $-S$ à $+S$, p varie de 0 à $2S$.

Dans une onde plane monochromatique, le nombre des constantes indépendantes, $C_{\lambda, \mu, \nu} \dots$ (où $\lambda, \mu, \nu \dots = 1, 2$) est 2^n . Nous voyons donc que chaque unité de poids doit en ce cas correspondre à une constante indépendante, et cette affirmation peut être vérifiée dans le cas précédemment étudié en détail $n = 2$, $S = 1$.

Revenons au calcul des p_s en appliquant la formule (24) à l'avant-dernière colonne du tableau pour laquelle $m = S - 1$. Cette colonne porte seulement deux p_s , savoir p_S et p_{S-1} , et par suite, nous devons avoir

$$(26) \quad p_S + p_{S-1} = C_{2S}^{2S} = 2^S,$$

d'où l'on tire, puisque $p_S = 1 = C_{2S}^{2S}$,

$$(27) \quad p_{S-1} = C_{2S}^{2S-1} - C_{2S}^{2S} = 2^{S-1}.$$

Sur la seconde ligne du tableau (22), on aura donc à écrire $2^S - 1$ fois le poids 2^{S-1} .

La continuation du même procédé, en prenant successivement toutes les colonnes de droite à gauche jusqu'au milieu du tableau, nous fournira, un par un, tous les p_s . Considérons, par exemple, la $(k+1)^{\text{ème}}$ ligne du tableau correspondant à la valeur $s = S - k$. La multiplicité correspondante étant $2s + 1 = 2S - 2k + 1$, elle porte 2^{S-2k+1} fois le poids p_{S-k} . Le dernier de ces poids vers la droite se trouve à l'intersection de la ligne considérée et de la colonne définie par $m = S - k$. On aura donc

$$(28) \quad p_{S-k} = C_{2S}^{2S-k} - C_{2S}^{2S-k+1} = (2S)! \left[\frac{1}{(2S-k)! k!} - \frac{1}{(2S-k+1)! (k-1)!} \right] \\ = \frac{(2S)! (2S-2k+1)}{k! (2S-k+1)!}.$$

Telle est la formule générale qui nous donne l'un quelconque des poids cherchés.

Il va sans dire qu'en faisant le total d'une colonne du tableau (22) avec ces valeurs (28) des p_s , on retrouve facilement la formule (24). Il est plus intéressant de faire la somme des p_s par ligne, ce qui donne pour la ligne $\mathfrak{S} - k$:

$$(29) \quad \sum_{m=-(\mathfrak{S}+k)}^{m=(\mathfrak{S}+k)} p_{\mathfrak{S}-k} = (2\mathfrak{S} - 2k + 1) p_{\mathfrak{S}-k} = \frac{(2\mathfrak{S})! (2\mathfrak{S} - 2k + 1)^2}{k! (2\mathfrak{S} - k + 1)!} \\ = \frac{(2\mathfrak{S})! (2s + 1)^2}{(\mathfrak{S} + s + 1)! (\mathfrak{S} - s)!}.$$

On peut vérifier que l'on a, comme cela doit être,

$$(30) \quad \sum_{\substack{s \\ 0 \text{ ou } \frac{1}{2}}}^{\mathfrak{S}} \frac{(2\mathfrak{S})! (2s + 1)^2}{(\mathfrak{S} + s + 1)! (\mathfrak{S} - s)!} = 4 = 2^n.$$

Pour illustrer la méthode précédente, il est intéressant d'écrire complètement les tableaux de poids du type (22) pour les premières valeurs de $\mathfrak{S}$ ou de n . On obtient ainsi les tableaux suivants :

$$n = 1 \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} \quad (\text{Électron de Dirac}).$$

Nombre des composantes du $\Psi = 4$.

Nombre des constantes arbitraires par onde plane = 2.

$s \backslash m$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	1	1	2
	1	1	2

$$n = 2 \quad \mathfrak{S} = 1 \quad (\text{photon, méson}).$$

Nombre des composantes du $\Psi = 16 = 4^2$.

Nombre des constantes arbitraires par onde plane = 4.

$s \backslash m$	-1	0	+1	
1	1	1	1	3
0		1		1
	1	2	1	4 = 2^2

$$n = 3 \quad \mathcal{S} = \frac{3}{2}.$$

Nombre des composantes du $\Psi = 4^3 = 64$.

Nombre des constantes arbitraires par onde plane = 8.

$s \backslash m$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	
$\frac{3}{2}$	1	1	1	1	4
$\frac{1}{2}$		2	2		4
	1	3	3	1	$8 = 2^3$

$$n = 4 \quad \mathcal{S} = 2.$$

Nombre des composantes du $\Psi = 4^4 = 256$.

Nombre des constantes arbitraires dans l'onde plane = 16.

$s \backslash m$	-2	-1	0	+1	+2	
2	1	1	1	1	1	5
1		3	3	3		9
0			2			2
	1	4	6	4	1	$16 = 2^4$

$$n = 5 \quad \mathcal{S} = \frac{5}{2}.$$

Nombre des composantes du $\Psi = 4^5 = 1024$.

Nombre des constantes arbitraires dans l'onde plane = 32.

$s \backslash m$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{5}{2}$	
$\frac{5}{2}$	1	1	1	1	1	1	6
$\frac{3}{2}$		4	4	4	4		16
$\frac{1}{2}$			5	5			10
	1	5	10	10	5	1	$32 = 2^5$

$$n = 6 \quad \mathfrak{S} = 3.$$

Nombre des composantes du $\Psi = 4^6 = 4096$.

Nombre des constantes arbitraires dans l'onde plane = 64.

$\begin{smallmatrix} m \\ s \end{smallmatrix}$	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	
3	1	1	1	1	1	1	1	7
2		5	5	5	5	5		35
1			9	9	9			27
0				5				5
	1	6	15	20	15	6	1	$64 = 2^6$
	etc....							

4. **Remarques générales sur les résultats précédents.** — Tous les résultats précédents peuvent se retrouver rapidement par l'application d'un théorème important de la théorie des groupes connu sous le nom de théorème de Clebsch-Gordan ⁽¹⁾ d'après lequel, quand on considère le « produit » de deux représentations irréductibles D_j et $D_{j'}$ (ce qui correspond exactement à notre opération de fusion), la représentation obtenue peut être réduite suivant le schéma

$$(31) \quad D_j \times D_{j'} = D_{j+j'} + D_{j+j'-1} + D_{j+j'-2} + \dots + D_{|j-j'|}.$$

Appliquons d'abord ce théorème au cas $j = j' = \frac{1}{2}$. $D_{\frac{1}{2}}$ est la représentation irréductible du groupe attaché à un corpuscule de Dirac de spin $\frac{1}{2}$. La fusion de deux de ces corpuscules nous conduira donc à une particule dont la représentation sera d'après (31)

$$(32) \quad D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} = D_1 + D_0,$$

ce qui correspond à notre tableau $n = 2$, $\mathfrak{S} = 1$.

La fusion d'un troisième corpuscule de Dirac donnera de même

$$(33) \quad D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} = (D_1 + D_0) \times D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{3}{2}} + D_{\frac{1}{2}} + D_{\frac{1}{2}},$$

ce qui correspond à notre tableau $n = 3$, $\mathfrak{S} = \frac{3}{2}$.

⁽¹⁾ Voir par exemple E. BAUER : *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la Physique quantique*, Presses universitaires, Paris, 1933, p. 135.

On trouvera de même

$$(34) \quad \begin{cases} D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} = D_2 + 3 D_1 + 2 D_0, \\ D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{5}{2}} + 4 D_{\frac{3}{2}} + 5 D_{\frac{1}{2}}, \\ D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}} = D_3 + 5 D_2 + 9 D_1 + 5 D_0, \end{cases}$$

etc., ce qui correspond bien à nos tableaux $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, etc.

D'après ce que nous avons vu dans le cas $\mathcal{S} = 1$, on peut penser que, dans le système propre de la particule, le nombre des composantes $\Psi_{ik\dots}$ d'une onde plane Ψ qui ne sont pas nulles se réduit au nombre des constantes indépendantes; ainsi, à chaque case des tableaux du type étudié plus haut, correspondrait un nombre de constantes égal au poids qui est inscrit dans cette case. C'est bien ce que l'on peut vérifier dans chaque cas.

Si nous considérons les composantes du Ψ qui correspondent à une certaine valeur de m , nous savons déjà que ces composantes sont celles pour lesquelles la différence du nombre des indices pairs et du nombre des indices impairs est égale à m . Si nous combinons ces composantes linéairement de toutes les manières possibles, il y a une des combinaisons obtenues qui est seule de son espèce : c'est la combinaison symétrique fournie par la somme de toutes les composantes. Cette combinaison symétrique, désignons-la par $\Psi_{sym}^{(m)}$. D'après la forme des tableaux précédents et les résultats obtenus pour la particule de spin maximum 1, il est *a priori* très vraisemblable que cette combinaison symétrique doit représenter l'état de poids 1 figuré par la case qui, dans la première ligne du tableau, correspond à la valeur m considérée.

Voici comment on peut raisonner pour justifier cette intuition. On a, d'après (12),

$$(35) \quad \begin{aligned} \sigma_n^2 \Psi_{sym}^{(m)} &= \left[\frac{3}{4} n + 2 \sum_{p>q} \left(\mathbf{s}_1^{(p)} \mathbf{s}_1^{(q)} + \mathbf{s}_2^{(p)} \mathbf{s}_2^{(q)} + \mathbf{s}_3^{(p)} \mathbf{s}_3^{(q)} \right) \right] \Psi_{sym}^{(m)} \\ &= \frac{1}{4} \left[3n + 2 \sum_{p>q} \left(i a_2^{(p)} a_3^{(p)} i a_2^{(q)} a_3^{(q)} + i a_3^{(p)} a_1^{(p)} i a_3^{(q)} a_1^{(q)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i a_1^{(p)} a_2^{(p)} i a_1^{(q)} a_2^{(q)} \right) \right] \Psi_{sym}^{(m)}. \end{aligned}$$

En se reportant à la forme des matrices a , on peut voir assez facilement que chacun des termes de la somme Σ_{pq} donne l'unité; comme cette somme comporte $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ termes, on a donc

$$(36) \quad \sigma_n^2 \Psi_{sym}^{(m)} = \frac{1}{4} \left[3n + 2 \frac{n(n-1)}{2} \right] \Psi_{sym}^{(m)} = \frac{n(n+2)}{4} \Psi_{sym}^{(m)} = \mathcal{S}(\mathcal{S}+1) \Psi_{sym}^{(m)}.$$

Donc la composante $\Psi_{sym}^{(m)}$ est bien fonction propre de l'opérateur σ_n^2 pour la valeur propre $\mathcal{S}(\mathcal{S} + 1)$, et c'est ce que nous voulions montrer. M. Gérard Petiau a donné de cette proposition une démonstration plus générale s'appuyant uniquement sur les propriétés algébriques des matrices s_1 , s_2 et s_3 .

§. **Prévision des grandeurs tensorielles pour les particules à spin entier.** Cas $\mathcal{S} = 2$. — Nous avons vu que pour les particules de spin entier obtenues par la fusion d'un nombre entier de corpuscules de spin $\frac{1}{2}$, on pouvait définir des combinaisons linéaires des $\Psi_{ik\dots}$ ayant le caractère de grandeurs tensorielles. Ce cas des spins entiers présentant un grand intérêt, l'étude générale des composantes tensorielles de ce genre a de l'importance. Nous allons montrer qu'il est possible de prévoir *a priori* d'une façon simple la nature de ces composantes tensorielles. Pour cela, nous partirons de l'idée que la fusion d'un nombre *pair* n de corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ est équivalente à la fusion de $\frac{n}{2}$ particules de spin 1, et nous appliquerons d'abord cette idée à la particule de spin maximum 2.

Pour la particule de spin 1, les grandeurs tensorielles non nulles dérivent toutes des 4 composantes A_x, A_y, A_z, V du potentiel d'Univers et de l'invariant I_2 (car l'invariant I_1 est nul si $m_0 \neq 0$). En fondant deux particules de spin 1, on obtiendra des grandeurs tensorielles dont toutes les autres dériveront en combinant les grandeurs $A_x^{(1)}, A_y^{(1)}, A_z^{(1)}$ et $V^{(1)}$ de la première particule avec les grandeurs $A_x^{(2)}, A_y^{(2)}, A_z^{(2)}$ et $V^{(2)}$ de la seconde. On obtiendra ainsi des grandeurs qu'on pourra représenter symboliquement par

$$(37) \quad \vec{A}^{(1)} \times \vec{A}^{(2)}, \quad \vec{A}^{(1)} \times I_2^{(2)}, \quad I_2^{(1)} \times \vec{A}^{(2)}, \quad I_2^{(1)} \times I_2^{(2)}.$$

Le premier symbole représente un tenseur d'espace-temps qui n'est ni symétrique, ni antisymétrique (car $A_i^{(1)} \times A_j^{(2)}$ n'a aucune raison d'être égal à $\pm A_j^{(1)} \times A_i^{(2)}$) : c'est donc un tenseur général du second rang. Si A_{ij} est l'une des composantes de ce tenseur, on définira un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique par les formules

$$(38) \quad A_{ij}^{(s)} = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2}, \quad A_{ij}^{(a)} = \frac{A_{ij} - A_{ji}}{2}.$$

On décompose ainsi le tenseur général en un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique. D'autre part, le symbole $\vec{A}^{(1)} \times I_2^{(2)}$ correspond à un quadrivecteur $B^{(1)}$ et le symbole $I_2^{(1)} \times \vec{A}^{(2)}$ à un quadrivecteur $B^{(2)}$. Enfin, le symbole $I_2^{(1)} \times I_2^{(2)}$ définit un invariant I .

Finalement, les grandeurs tensorielles de la particule de spin maximum 2 dériveront toutes des grandeurs suivantes : 1 tenseur symétrique $\vec{A}^{(1)}$, 1 tenseur antisymétrique $\vec{A}^{(a)}$, 2 vecteurs $\vec{B}^{(1)}$ et $\vec{B}^{(2)}$ et 1 invariant I.

Considérons le cas de l'onde plane. Le vecteur $\vec{A}$ d'une particule de spin 1 étant du genre espace, sa composante de temps est nulle dans le système propre et le vecteur ne dépend que de 3 constantes arbitraires. Comme l'invariant I_2 dépend d'une 4^e constante arbitraire, l'onde plane de la particule de spin maximum 1 dépend, comme nous l'avons vu, de 4 constantes arbitraires. En fondant deux particules de spin maximum 1, nous obtenons une particule de spin maximum 2 dépendant de $4 \times 4 = 16$ constantes arbitraires. Or les tenseurs $A^{(s)}$ et $A^{(a)}$ et les vecteurs $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ définis plus haut sont visiblement du genre espace. Dans le système propre de la particule, $A^{(s)}$ a donc 6 composantes distinctes non nulles, $A^{(a)}$ en aura 3, $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ 3 également. Il y aura donc 15 constantes arbitraires auxquelles il faut ajouter celle qui correspond à I et cela fait bien en tout 16 constantes arbitraires.

Reportons-nous maintenant au tableau dressé au paragraphe 3 pour le cas $n = 4$, $\mathfrak{S} = 2$. En comparant la répartition de nos constantes arbitraires avec ce tableau, nous apercevons une difficulté. En effet, il apparaît tout de suite que le tenseur symétrique doit correspondre à $s = 2$, le tenseur antisymétrique et les deux quadrivecteurs à $s = 1$ et l'invariant à $s = 0$. Mais cette répartition nous donne une constante de trop pour le cas $s = 2$ (6 constantes au lieu de 5) et une constante de moins pour le cas $s = 0$ (1 constante au lieu de 2). Il doit donc y avoir une circonstance qui nous permet d'extraire du tenseur symétrique une grandeur tensorielle dépendant d'une constante et correspondant à $s = 0$, et il est évident que cette grandeur doit être un invariant, puisqu'elle est isolée. En effet, du tenseur $A^{(s)}$ nous pouvons tirer un invariant qui est la trace de ce tenseur

$$(39) \quad T = \text{tr } A^{(s)} = \sum_{\kappa} \Lambda_{\kappa}^{\kappa} = \sum_{i\kappa} g^{i\kappa} A_{i\kappa}.$$

Cette trace dépend d'une constante arbitraire et, quand on l'aura retirée du tenseur (1) , celui-ci ne dépendra plus que de 5 constantes arbitraires. En attribuant le tenseur ainsi réduit au cas $s = 2$ et la trace invariante au cas $s = 0$, on aura exactement la répartition prévue par le tableau.

(1) Nous verrons au chapitre suivant comment s'effectue cette séparation.

Bref, on arrive ainsi à la répartition suivante :

- $s = 2$. Tenseur symétrique réduit de trace nulle dépendant de 5 constantes arbitraires, une pour chacune des cases de la première ligne du tableau.
- $s = 1$. Un tenseur antisymétrique de rang 2 et deux quadrivecteurs, dépendant chacun de 3 constantes arbitraires, soit au total 9 constantes qui se répartiront à raison de 3 par case dans les trois cases de la seconde ligne du tableau.
- $s = 0$. Un invariant et la trace invariante T du tenseur symétrique $A^{(s)}$. Ces deux grandeurs invariantes dépendent chacune d'une constante arbitraire, ce qui fera 2 constantes pour l'unique case de la 3^e ligne du tableau.

L'étude détaillée de la particule de spin maximum 2, que nous ferons au chapitre suivant, confirmera entièrement ces conclusions.

En choisissant nulles un certain nombre de constantes arbitraires, on pourra toujours, dans le cas des ondes planes, isoler les cas $s = 2$, $s = 1$ et $s = 0$, ce qui correspond à l'indépendance déjà signalée des grandeurs et des équations pour ces divers états de spin total. Ainsi, en annulant toutes les grandeurs tensorielles, sauf le tenseur symétrique de trace nulle, on isolera le cas $s = \mathcal{S} = 2$. On retrouve ainsi dans un cas particulier un résultat général énoncé par M. Fierz : « le cas du spin total maximum est représenté par un tenseur symétrique de rang $s = \frac{n}{2}$ ayant ses traces nulles ». Nous reviendrons sur ce point.

6. Prévision des grandeurs tensorielles pour le cas $\mathcal{S} = 3$. — Le cas $\mathcal{S} = 3$ s'étudie comme le cas $\mathcal{S} = 2$, mais il est naturellement plus compliqué. Pour l'étudier, nous devons nous reporter au tableau donné au paragraphe 3 pour le cas $n = 6$, $\mathcal{S} = 3$.

La particule envisagée peut s'obtenir par la fusion de trois particules de spin maximum 1. Chacune de ces particules sera caractérisée par un quadrivecteur A et un invariant I_2 . En combinant les trois vecteurs et les trois invariants, on obtiendra

- 1° Un tenseur général de rang 3

$$A_{ijk} = A_i^{(1)} \times A_j^{(2)} \times A_k^{(3)}.$$

- 2° Trois tenseurs généraux de rang 2

$$\begin{aligned} B_{ik}^{(1)} &= A_i^{(1)} \times A_k^{(2)} \times I_2^{(3)}, \\ B_{ik}^{(2)} &= A_i^{(1)} \times I_2^{(2)} \times A_k^{(3)}, \\ B_{ik}^{(3)} &= I_2^{(1)} \times A_i^{(2)} \times A_k^{(3)}. \end{aligned}$$

3° Trois vecteurs du genre espace

$$C_i^{(1)} = \Lambda_i^{(1)} \times I_2^{(2)} \times I_2^{(3)},$$

$$C_i^{(2)} = I_2^{(1)} \times \Lambda_i^{(2)} \times I_2^{(3)},$$

$$C_i^{(3)} = I_2^{(1)} \times I_2^{(2)} \times \Lambda_i^{(3)}.$$

4° Un invariant

$$I = I_2^{(1)} \times I_2^{(2)} \times I_2^{(3)}.$$

Dans le cas de l'onde plane, on voit aisément en se plaçant dans le système propre de la particule que le tenseur de rang 3 dépend de $3^3 = 27$ constantes arbitraires, que les trois tenseurs de rang 2 dépendent chacun de 9 constantes arbitraires, que les trois vecteurs dépendent chacun de 3 constantes arbitraires, tandis que l'invariant I dépend naturellement d'une seule constante. Cela nous fait bien en tout 64 constantes arbitraires comme prévu, mais leur répartition ne s'adapte pas bien à première vue au tableau des poids. Ici encore, il va falloir décomposer les grandeurs tensorielles de façon à les adapter au tableau en question. Cette décomposition est assez compliquée : je me borne à la résumer.

L'étude du tenseur général de rang 3 montre qu'il se décompose : 1° en un tenseur symétrique de rang 3, $A^{(s)}$; 2° en un tenseur complètement antisymétrique de rang 3 assimilable à un vecteur, $A^{(a)}$; 3° en deux tenseurs $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ de rang 3 antisymétriques sur deux de leurs indices et dont toutes les traces sont nulles, c'est-à-dire que

$$(40) \quad \sum_{l,m} g^{lm} \Lambda_{[k]l[m]}^{(1)} = 0; \quad \sum_{l,m} g^{lm} \Lambda_{[k]l[m]}^{(2)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Le tenseur $A^{(s)}$ est du genre espace; $A^{(a)}$ est équivalent à un vecteur du genre temps. A a 64 composantes indépendantes : $A^{(s)}$ en a 20, $A^{(a)}$ 4, $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ 20 chacun parce que leurs traces sont nulles [un tenseur du 3° rang antisymétrique sur deux indices a $6 \cdot 4 = 24$ composantes indépendantes entre lesquelles la condition de trace vectorielle nulle (40) donne 4 relations]

Les trois tenseurs généraux du second rang $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(3)}$ se décomposent chacun en un tenseur symétrique $B_i^{(s)}$ et un tenseur antisymétrique $B_i^{(a)}$, tous deux du genre espace. Chaque $B_i^{(s)}$ a 10 composantes indépendantes, chaque $B_i^{(a)}$ en a 3.

Enfin, remarquons que le tenseur symétrique $A^{(s)}$ a une trace vecto-

rielle à 4 composantes $\sum_1^4 g_{ij} A_{(ij)k}^{(s)}$ et que chacun des tenseurs $B_i^{(s)}$ a une trace invariante de la forme $\sum_1^4 g^{kl} B_i^{(s)}{}_{(kl)}$.

Revenons toujours au cas de l'onde plane et plaçons-nous dans le système propre de la particule qui alors est bien défini. $A^{(s)}$ y a 10 composantes dépendant de 7 constantes arbitraires + 3 traces. $A^{(a)}$, pseudo-vecteur du genre temps, a une seule composante dépendant d'une constante arbitraire. $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ se réduisent chacun à un tenseur de rang 2 et de trace nulle : ils se décomposent donc chacun en un tenseur symétrique de trace nulle dépendant de 5 constantes arbitraires et en un tenseur antisymétrique dépendant de 3 constantes arbitraires. $B_1^{(s)}$, $B_2^{(s)}$, $B_3^{(s)}$ dépendent chacun de 5 constantes arbitraires et d'une trace invariante formant une 6^e constante arbitraire. $B_1^{(s)}$, $B_2^{(s)}$, $B_3^{(s)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ et $C^{(3)}$ dépendent chacun de 3 constantes arbitraires. Enfin I dépend d'une constante arbitraire. En récapitulant, cela fait en tout les 64 composantes arbitraires dont nous avons besoin.

Il est maintenant facile de répartir les grandeurs tensorielles et, par suite, les constantes arbitraires d'une façon qui cadre avec le tableau des « poids ». Voici cette répartition :

$s = \mathfrak{S} = 3$	Tenseur symétrique obtenu à partir de $A^{(s)}$ en en retirant les 4 traces (40); il dépend de 7 constantes correspondant aux 7 états de la première ligne du tableau des poids réalisés chacun une fois.
$s = 2$	Les 5 grandeurs symétriques $A_1^{(s)}$, $A_2^{(s)}$, $B_1'^{(s)}$, $B_2'^{(s)}$ et $B_3'^{(s)}$, ces trois dernières obtenues à partir de $B_1^{(s)}$, $B_2^{(s)}$ et $B_3^{(s)}$ en en retirant la trace. Ces grandeurs dépendent chacune de 5 constantes arbitraires et correspondent aux 5 états de la seconde ligne du tableau des poids réalisés chacun 5 fois conformément au dit tableau.
$s = 1$	Les 9 grandeurs $B_1^{(a)}$, $B_2^{(a)}$, $B_3^{(a)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, $A_1^{(a)}$, $A_2^{(a)}$ et la trace vectorielle de $A^{(s)}$ dépendant chacune de 3 constantes arbitraires, ce qui correspond aux 3 états de la 3 ^e ligne du tableau des poids réalisés chacun 9 fois conformément à ce tableau.
$s = 0$	Le tenseur $A^{(a)}$, l'invariant I et les traces invariantes des trois $B_i^{(s)}$, soit 5 grandeurs dépendant chacune d'une seule constante arbitraire, ce qui correspond à l'état unique de la dernière ligne du tableau des poids réalisés 5 fois conformément à ce tableau.

On voit, par l'exemple précédent, combien ce mode d'analyse de la répartition des grandeurs tensorielles entre états de spin se complique quand $\mathfrak{S}$ s'élève.

7. **Cas général : $\mathfrak{S}$ entier quelconque.** — La particule de spin total maximum $\mathfrak{S}$ entier peut être considérée comme formée par un nombre pair $n = 2\mathfrak{S}$ de corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ ou d'un nombre $\mathfrak{S}$ de particules de spin 1. En combinant les quadrivecteurs d'espace-temps et les invariants de ces $\mathfrak{S}$ particules de spin 1, on obtiendra pour la particule de spin maximum $\mathfrak{S}$ des grandeurs tensorielles dont toutes les autres grandeurs tensorielles de la théorie dériveront. En particulier, la combinaison des $\mathfrak{S}$ vecteurs conduira à un tenseur général de rang $\mathfrak{S}$ dont on pourra extraire un tenseur symétrique de rang $\mathfrak{S}$ donné par la formule

$$(41) \quad A_{(ik\dots)}^{(sym)} = \sum_p P A_{(ik\dots)},$$

où $\sum_p P$ indique la somme des composantes obtenues à partir d'une composante $A_{(ik\dots)}$ par toutes les permutations possibles des indices. Débarrassé de ses traces, le tenseur $A^{(sym)}$ représentera l'état de spin total maximum $s = \mathfrak{S}$. En procédant comme pour $\mathfrak{S} = 1$ et $\mathfrak{S} = 2$, on trouverait que chaque valeur de s de poids p_s (du moins pour $s > 1$) correspond à p_s tenseurs du genre espace, symétriques de rang s et de traces nulles. Les constantes arbitraires dont dépend chacun de ces tenseurs doivent se répartir une par une, entre les $2s + 1$ états $m = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$, qui finalement se trouvent ainsi réalisés p_s fois chacun. Pour que cela soit possible, il faut qu'un tenseur du genre espace symétrique de rang s et de trace nulle dépende de $2s + 1$ constantes. C'est ce que nous allons démontrer.

Demandons-nous d'abord quel est le nombre des composantes *distinctes* d'un tenseur symétrique de rang s dans un espace à p dimensions. Chacun de ces indices pouvant prendre les valeurs $1, \dots, p$, ce nombre est égal au nombre des combinaisons *avec répétition* de p objets pris à s , nombre qui est donné par la formule suivante d'analyse combinatoire

$$(42) \quad B_s^p = \frac{(s + p - 1)!}{s!(p - 1)!}.$$

Donc pour un tenseur d'espace-temps ($p = 4$) symétrique de rang s , on a

$$\frac{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}{6}$$

composantes distinctes. Ses traces, obtenues par la formule

$$(43) \quad T_{(lm\dots)} = \sum_{ik} g^{ik} T_{(iklm\dots)},$$

forment visiblement les composantes d'un tenseur $A^{(s-2)}$ symétrique de rang $(s-2)$. Nous voulons chercher le nombre de constantes arbitraires dont dépend $A^{(s)}$ quand toutes ses traces, donc $A^{(s-2)}$, sont nulles.

Pour l'onde plane, dans le système propre de la particule, comme $A^{(s)}$ est un vecteur du genre espace, toutes les composantes $A^{(s)}_{(ik\dots)}$, où figurent au moins une fois l'indice 4, sont nulles. Le nombre des composantes distinctes non nulles de $A^{(s)}$ dans le système propre est donc égal à $B_s^3 = \frac{(s+1)(s+2)}{2}$ et c'est là aussi le nombre des constantes arbitraires dont dépend $A^{(s)}$, mais il faut les lier entre elles par la condition que $A^{(s-2)}$ soit nul. Comme $A^{(s-2)}$ a dans le système propre $B_{s-2}^3 = \frac{s(s-1)}{2}$ composantes, nous trouvons finalement pour le tenseur $A^{(s)}$ symétrique de rang s dont toutes les traces sont nulles un nombre de constantes arbitraires indépendantes égal à

$$(44) \quad B_s^3 - B_{s-2}^3 = \frac{(s+1)(s+2)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} = 2s+1,$$

et c'est bien le résultat que nous voulions démontrer.

Donc, chacun des $2s+1$ états de spin correspondant au spin total entier s est représenté (du moins pour $s > 1$) par un tenseur symétrique de rang s dont toutes les traces sont nulles. On retrouve ainsi un résultat important dû à M. Fierz ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Voir le Mémoire fondamental de Fierz dans *Helvetica Acta*, XII, Jahrgang, n° 1, 1939.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DE LA PARTICULE DE SPIN MAXIMUM 2.

1. Généralités et nomenclature des grandeurs. — La théorie de la particule de spin maximum 2 a été développée récemment par M^{me} Tonnclat et M. Gérard Petiau. Elle comporte des aspects très intéressants : nous allons en résumer les résultats essentiels.

Rappelons d'abord le tableau des poids relatif à $n = 4$, $\mathcal{S} = 2$

$s \backslash m$	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2
2	1	1	1	1	1
1		3	3	3	
0			2		

On peut naturellement prendre pour point de départ de la théorie les équations ⁽¹⁾

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_{ik...}}{\partial t} = \left(a_1^{(p)} \frac{\partial}{\partial x} + a_2^{(p)} \frac{\partial}{\partial y} + a_3^{(p)} \frac{\partial}{\partial z} + \kappa \mu_0 c a_4^{(p)} \right) \Psi_{ik...}$$

avec $p = 1, 2, 3, 4$; $ik \dots = 1, 2, 3, 4$. Comme il s'agit ici d'une particule de spin entier, on introduira des grandeurs tensorielles suivant la méthode générale que nous connaissons. On trouvera entre ces grandeurs des équations de forme tensorielle qui formeront des groupes tout à fait indépendants correspondant aux diverses valeurs de s .

Avant d'étudier ces équations, il est intéressant de faire *a priori* la nomenclature des grandeurs tensorielles en partant de l'idée que l'on peut obtenir la particule de spin maximum 2 par la fusion de deux corpuscules de spin maximum 1.

⁽¹⁾ Dans ce Chapitre, nous désignerons la masse propre de la particule par μ_0 au lieu de m_0 .

Comme la particule $\mathcal{S} = 1$ est représentée par 16 grandeurs tensorielles, savoir 10 grandeurs maxwelliennes et 6 non maxwelliennes, on pourrait s'attendre à avoir pour la particule $\mathcal{S} = 2$ un nombre de grandeurs tensorielles égal à $16 \times 16 = 256$. Mais, les invariants I_1 étant toujours nuls, du moins par les particules de masse non nulle, 31 de ces grandeurs seront nulles (savoir $I_1^{(1)} \times I_1^{(2)}$, 15 grandeurs du type $I_1^{(1)} \times F_i^{(2)}$ et 15 du type $F_i^{(1)} \times I_1^{(2)}$). Il ne doit donc y avoir au maximum que 225 grandeurs qui ne soient pas nulles.

Chacune des particules constituantes de spin maximum 1 comportant 10 grandeurs maxwelliennes, leur combinaison nous donneront 100 grandeurs pour la particule $\mathcal{S} = 2$. Or, en combinant chaque grandeur maxwellienne $F_i^{(1)}$ de la première particule constituante avec la même grandeur $F_i^{(2)}$ de la seconde particule, nous obtiendrons 10 grandeurs symétriques : il restera 90 grandeurs du type $F_i^{(1)} \times F_j^{(2)}$ qui nous fourniront 45 grandeurs symétriques du type $\frac{F_i^{(1)} \times F_j^{(2)} + F_j^{(1)} \times F_i^{(2)}}{2}$ et 45 grandeurs antisymétriques $\frac{F_i^{(1)} \times F_j^{(2)} - F_j^{(1)} \times F_i^{(2)}}{2}$. Au total, nous obtenons ainsi $10 + 45 = 55$ grandeurs symétriques et 45 grandeurs antisymétriques. Les 55 grandeurs symétriques nous fourniront plus loin 40 grandeurs correspondant au cas $s = \mathcal{S} = 2$ et 15 grandeurs correspondant à l'une des deux réalisations du cas $s = 0$. Quant aux 45 grandeurs antisymétriques, elles nous fourniront une des trois réalisations de l'état de spin total $s = 1$.

Les combinaisons des grandeurs maxwelliennes de l'une des particules constituantes avec les grandeurs non maxwelliennes de l'autre fournissent deux fois $10 \times 5 = 50$ grandeurs. Ces 100 grandeurs se répartiront également entre la deuxième et la troisième réalisation de l'état de spin total $s = 1$.

Enfin, la combinaison des grandeurs non maxwelliennes donne $5 \times 5 = 25$ grandeurs. De ces 25 grandeurs, 5 sont du type $F_i^{(1)} \times F_i^{(2)}$ et sont par suite symétriques. Les 20 autres du type $F_i^{(1)} \times F_j^{(2)}$ donnent 10 combinaisons symétriques $\frac{F_i^{(1)} \times F_j^{(2)} + F_j^{(1)} \times F_i^{(2)}}{2}$ et 10 combinaisons antisymétriques $\frac{F_i^{(1)} \times F_j^{(2)} - F_j^{(1)} \times F_i^{(2)}}{2}$. Il se trouve que les combinaisons antisymétriques sont nulles identiquement : il ne reste donc ici finalement que $5 + 10 = 15$ grandeurs symétriques qui correspondent à la deuxième réalisation de l'état $s = 0$.

Au total, en retranchant les 10 grandeurs nulles identiquement, nous avons ainsi trouvé $225 - 10 = 215$ grandeurs non nulles. Or, M. Petiau

a pu montrer par des raisonnements très généraux que 168 de ces grandeurs seulement étaient indépendantes. Il doit donc exister 47 relations algébriques entre les 215 grandeurs non nulles. En effet, entre les 40 grandeurs symétriques du cas $s = \mathfrak{S} = 2$, nous trouverons 5 relations algébriques, ce qui réduit à 35 le nombre des grandeurs indépendantes; entre les 45 grandeurs antisymétriques formant la première réalisation du cas $s = 1$, existent 10 relations algébriques et pour chacun des deux groupes de 50 grandeurs formant la deuxième et la troisième réalisation du cas $s = 1$, existent 15 relations algébriques, de sorte que pour chacune des trois réalisations du cas $s = 1$, subsistent seulement 35 grandeurs indépendantes; enfin, pour chacun des deux groupes de 15 grandeurs formant les deux réalisations du cas $s = 0$, existe une relation algébrique, ce qui réduit chaque groupe à 14 grandeurs indépendantes. Finalement on a le tableau suivant pour les grandeurs indépendantes,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} s = \mathfrak{S} = 2 & 35 \\ s = 1 & 35, \quad 35, \quad 35 \\ s = 0 & 14, \quad 14 \end{array} \right.$$

ce qui fait bien en tout 168 grandeurs indépendantes.

2. Équations tensorielles pour la particule de spin maximum 2. — La méthode générale exposée au Chapitre IX conduit à introduire systématiquement les grandeurs tensorielles et à rechercher les équations auxquelles elles obéissent. Nous allons écrire une première fois ces équations, nous réservant d'en faire ensuite un examen plus détaillé. Pour les écrire, nous emploierons les variables d'univers (avec $x_4 = ict$), ainsi que la notation

$$(3) \quad k_0 = \frac{2\pi}{h} \mu_0 c = -i\kappa \mu_0 c.$$

Le caractère de symétrie ou d'antisymétrie des tenseurs sera toujours indiqué par des parenthèses ou des crochets portant sur les indices correspondants. Nous diviserons les équations en trois groupes A, B, C.

A. Le groupe d'équations (A) fait intervenir un tenseur symétrique de rang 2, $\Phi_{(\mu\nu)}$, un tenseur de rang 3 antisymétrique sur deux indices $\Phi_{[\mu\nu]\rho}$ et un tenseur de rang 4 $\Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}$ antisymétrique en μ, ν et en ρ, σ , mais symétrique pour une permutation de la paire d'indices $\mu,$

ν avec la paire d'indices $\rho\sigma$. Ces équations sont les suivantes :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu \Phi_{[\nu\rho]} - \partial_\nu \Phi_{[\mu\rho]} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}, \\ \sum_{\rho=1}^4 \partial_\rho \Phi_{[\rho\mu]\nu} = k_0 \Phi_{(\mu\nu)}, \\ \partial_\mu \Phi_{[\rho\sigma]\nu} - \partial_\nu \Phi_{[\rho\sigma]\mu} = k_0 \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}, \\ \sum_{\varepsilon=1}^4 \partial_\varepsilon \Phi_{([\varepsilon\rho][\mu\nu])} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}. \end{array} \right.$$

B. Le groupe des équations (B) se subdivise en trois sous-groupes que nous nommerons B_1 , B_2 , B_3 .

Le sous-groupe (B_1) fait intervenir un tenseur antisymétrique du second rang $\Phi_{[\mu\nu]}^{(1)}$, un tenseur de rang 3 antisymétrique sur deux indices $\Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}$ et un tenseur du quatrième rang $\Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}^{(1)}$ antisymétrique en μ, ν et en ρ, σ et également antisymétrique pour une permutation de la paire d'indices $\mu\nu$ avec la paire $\rho\sigma$. Les équations du sous-groupe (B_1) sont les suivantes :

$$(B_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu \Phi_{[\nu\rho]}^{(1)} - \partial_\nu \Phi_{[\mu\rho]}^{(1)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}, \\ \sum_{\rho=1}^4 \partial_\rho \Phi_{[\rho\mu]\nu}^{(1)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]}^{(1)} \left(= \sum_{\rho=1}^4 \frac{1}{2} (\partial_\rho \Phi_{[\rho\mu]\nu}^{(1)} - \partial_\rho \Phi_{[\rho\nu]\mu}^{(1)}) \right), \\ \partial_\mu \Phi_{[\rho\sigma]\nu}^{(1)} - \partial_\nu \Phi_{[\rho\sigma]\mu}^{(1)} = k_0 \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}^{(1)}, \\ \sum_{\varepsilon=1}^4 \partial_\varepsilon \Phi_{([\varepsilon\rho][\mu\nu])}^{(1)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}. \end{array} \right.$$

Le sous-groupe (B_2) fait intervenir un vecteur $\chi_\mu^{(1)}$, un tenseur antisymétrique du second rang $\chi_{[\mu\nu]}^{(1)}$, un tenseur général de rang 2 $\chi_{\mu\nu}^{(1)}$ et un tenseur de rang 3 antisymétrique sur deux indices $\chi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}$.

Les équations du sous-groupe (B_2) sont les suivantes :

$$(B_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu \chi_\nu^{(1)} - \partial_\nu \chi_\mu^{(1)} = k_0 \chi_{[\mu\nu]}^{(1)}, \\ \sum_{\rho=1}^4 \partial_\rho \chi_{[\rho\nu]}^{(1)} = k_0 \chi_\nu^{(1)}, \\ \partial_\mu \chi_\nu^{(1)} = k_0 \chi_{[\mu\nu]}^{(1)}, \\ \partial_\rho \chi_{[\mu\nu]}^{(1)} = k_0 \chi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}. \end{array} \right.$$

Enfin le sous-groupe (B_3) fait également intervenir un vecteur, un tenseur antisymétrique de rang 2, un tenseur général de rang 2 et un

tenseur de rang 3 antisymétrique sur deux indices. Les équations (B₃) ont exactement la même forme que les équations (B₂), de sorte qu'il n'est pas utile de les écrire.

C. Les équations (C) font intervenir un invariant $\varphi^{(0)}$, un vecteur $\varphi_{\mu}^{(0)}$ et un tenseur symétrique $\varphi_{(\mu\nu)}^{(0)}$. Elles ont la forme suivante :

$$(C) \quad \begin{cases} \partial_{\mu} \varphi_{\nu}^{(0)} = \partial_{\nu} \varphi_{\mu}^{(0)} = k_0 \varphi_{(\mu\nu)}^{(0)}, \\ \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \varphi_{\mu}^{(0)} = k_0 \varphi^{(0)}, \\ \partial_{\mu} \varphi^{(0)} = k_0 \varphi_{\mu}^{(0)}. \end{cases}$$

Si maintenant nous regardons l'ensemble des équations (A), (B) et (C) ⁽¹⁾, nous apercevons tout de suite que les équations (B₁), (B₂), (B₃) vont correspondre aux trois réalisations de l'état de spin total $s = 1$, tandis que les équations (C) correspondront à l'une des réalisations de l'état $s = 0$. Il faut donc que les équations (A) contiennent l'état de spin total maximum $s = \mathfrak{S} = 2$ et l'autre réalisation de l'état $s = 0$. D'après ce que nous avons vu au chapitre précédent, on comprend aisément la raison de ce fait : le tenseur symétrique $\Phi_{(\mu\nu)}$ des équations (A) n'a pas en général sa trace nulle et pour séparer les cas $s = 2$ et $s = 0$, il faudrait réduire ce tenseur en lui retirant sa trace et séparer les équations auxquelles obéit ce tenseur réduit et celles que satisfont les grandeurs dérivant de la trace. C'est cette dissociation des équations (A) que nous allons chercher à effectuer dans la mesure où elle est effectivement possible.

Nous commencerons par poser

$$(4) \quad \Phi^{(0)} = T = \sum_{\rho=1}^4 \Phi_{\rho\rho}$$

(car ici nous employons les coordonnées d'univers et nous n'avons pas à distinguer les composantes covariantes et contravariantes) et nous remarquerons que les grandeurs définies par

$$(5) \quad \Phi_{\mu}^{(0)} = \sum_{\rho=1}^4 \Phi_{[\mu\rho]\rho}; \quad \Phi_{(\mu\nu)}^{(0)} = \sum_{\rho=1}^4 \Phi_{([\mu\rho][\nu\rho])} - \Phi_{(\mu\nu)}$$

⁽¹⁾ Dans les équations (A) et (B₁) la dernière relation est une conséquence des précédentes.

dérivent de la trace $\Phi^{(0)}$, car on tire aisément des équations (A),

$$(6) \quad \Phi_{\mu}^{(0)} = \frac{1}{k_0} \partial_{\mu} \Phi^{(0)}; \quad \Phi_{(\mu\nu)}^{(0)} = \frac{1}{k_0^2} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \Phi^{(0)}.$$

Nous allons d'abord chercher à isoler les grandeurs $\Phi_{\dots}^{(0)}$ qui doivent correspondre à l'état de spin total $s = 0$. De la deuxième équation (A), nous tirons

$$(7) \quad \sum_{\mu}^4 \partial_{\mu} \Phi_{(\mu\nu)} = 0$$

et, en contractant la première équation (A) sur ν et ρ , la seconde sur μ et ν et la troisième sur ν et σ , on trouve

$$(C') \quad \begin{cases} \partial_{\mu} \Phi^{(0)} = k_0 \Phi_{\mu}^{(0)}, \\ \sum_{\mu}^4 \partial_{\mu} \Phi_{\mu}^{(0)} = k_0 \Phi^{(0)}, \\ \partial_{\mu} \Phi_{\nu}^{(0)} = \partial_{\nu} \Phi_{\mu}^{(0)} = k_0 \Phi_{(\mu\nu)}^{(0)}, \end{cases}$$

et les équations (C') sont identiques aux équations (C) à la substitution près des $\Phi_{\dots}^{(0)}$ aux $\varphi_{\dots}^{(0)}$. Nous voyons donc que les $\Phi_{\dots}^{(0)}$ nous fournissent bien la deuxième réalisation du cas $s = 0$.

Maintenant, pour isoler le cas $s = \mathfrak{S} = 2$, il faudrait en quelque sorte extraire des $\Phi_{\dots}$ figurant dans les équations (A) les grandeurs $\Phi_{\dots}^{(0)}$ qui, elles, se rapportent au cas $s = 0$. Cela ne va pas sans quelques difficultés qui sont très intéressantes à regarder de près. Si nous supposons *a priori* (comme l'a fait M. Fierz dans son mémoire) que nous prenions, comme solutions des équations (A), des fonctions $\Phi_{(\mu\nu)}$ telles que $\Phi^{(0)}$ et par suite les grandeurs (6) soient nulles, alors les Φ seront des solutions des équations (A) représentant l'état de spin total $s = 2$. Mais, dans le cas général, l'isolement d'équations représentant le seul état $s = 2$ et indépendantes de l'état $s = 0$ ne se fait pas. Considérons, en effet, des Φ solutions quelconques des équations (A) : en général le $\Phi^{(0)}$ correspondant n'est pas nul, mais nous pouvons poser

$$(8) \quad \Phi_{(\mu\nu)} = \Phi_{(\mu\nu)}^{(2)} + \Phi'_{(\mu\nu)},$$

avec les définitions

$$(9) \quad \Phi_{(\mu\nu)}^{(2)} = \Phi_{(\mu\nu)} - \delta_{\mu\nu} \frac{1}{4} \Phi^{(0)}; \quad \Phi'_{(\mu\nu)} = \delta_{(\mu\nu)} \frac{1}{4} \Phi^{(0)};$$

$\Phi^{(0)}$ étant toujours défini par (4). On a évidemment

$$(10) \quad \sum_{\rho}^4 \Phi_{\rho\rho}^{(2)} = 0; \quad \sum_{\rho}^4 \Phi'_{\rho\rho} = \Phi^{(0)};$$

et l'on a bien ainsi en quelque sorte extrait du tenseur $\Phi_{(\mu\nu)}$ sa trace $\Phi^{(0)}$.
Posons de même

$$(11) \quad \Phi_{[\mu\nu]\rho} = \Phi_{\mu\nu\rho}^{(2)} + \Phi'_{\mu\nu\rho},$$

avec

$$(12) \quad \Phi_{\mu\nu\rho}^{(2)} = \Phi_{([\mu\nu]\rho} - \delta_{\nu\rho} \frac{1}{4} \Phi_{\mu}^{(0)}; \quad \Phi'_{\mu\nu\rho} = \delta_{\nu\rho} \frac{1}{4} \Phi_{\mu}^{(0)},$$

$\Phi_{\mu}^{(0)}$ étant définie par (5). Nous avons

$$(13) \quad \sum_{\rho}^4 \Phi_{\mu\rho\rho}^{(2)} = 0; \quad \sum_{\rho}^4 \Phi'_{\mu\rho\rho} = \Phi_{\mu}^{(0)}.$$

Posons encore

$$(14) \quad \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])} = \Phi_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} + \Phi'_{\mu\nu\rho\sigma},$$

avec

$$(15) \quad \Phi_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} = \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])} - \delta_{\nu\sigma} \frac{1}{4} \Phi_{(\mu\rho)}^{(0)}; \quad \Phi'_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\nu\sigma} \frac{1}{4} \Phi_{(\mu\rho)}^{(0)},$$

où $\Phi_{(\mu\rho)}^{(0)}$ est définie par (5), et l'on a

$$(16) \quad \sum_{\sigma}^4 \Phi_{\mu\sigma\rho\sigma}^{(2)} = 0; \quad \sum_{\sigma}^4 \Phi'_{\mu\sigma\rho\sigma} = \Phi_{(\mu\rho)}^{(0)}.$$

Si maintenant l'on introduit dans les équations (A) les décompositions (8), (11) et (14), on constate que : 1° si toutes les grandeurs $\Phi_{\dots}^{(0)}$ sont nulles, les grandeurs $\Phi_{\dots}^{(2)}$ obéissent aux équations (A) où $\Phi_{\dots}^{(2)}$ remplace $\Phi_{\dots}$, c'est le cas de M. Fierz; 2° si la masse propre μ_0 est nulle et si $\Phi^{(0)}$ est constant (ce qui est alors possible et entraîne la nullité des $\Phi_{\mu}^{(0)}$ et des $\Phi_{(\mu\nu)}^{(0)}$), on a encore, pour les $\Phi_{\dots}^{(2)}$, des équations de la forme (A) : nous verrons que ceci correspond au cas de présence de gravitation dans un espace-temps qui n'a pas de courbure naturelle. Dans les deux cas précédents, la séparation est complète entre l'état de spin $s = 0$ et l'état de spin $s = 2$.

Par contre, dans le cas général où μ_0 et $\Phi^{(0)}$ ne sont pas nuls, les équations auxquelles satisfont les grandeurs $\Phi_{\dots}^{(2)}$ diffèrent des équations

tions (A) par des termes contenant les grandeurs $\Phi_{[\mu\nu]}^{(0)}$. Il n'y a pas alors indépendance de l'état de spin $s = 2$ par rapport à l'état de spin $s = 0$, car les valeurs des $\Phi_{[\mu\nu]}^{(2)}$ sont influencées par celles des $\Phi_{[\mu\nu]}^{(0)}$. Quand nous chercherons plus loin à faire découler la théorie de la gravitation à l'approximation linéaire des équations (A), nous verrons que l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$ correspond à l'hypothèse d'une courbure naturelle de l'espace-temps et que la variation des $\Phi_{[\mu\nu]}^{(0)}$ dans l'espace-temps, conséquence nécessaire de l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$, dérive de cette courbure. Dire que les équations auxquelles obéissent les $\Phi_{[\mu\nu]}^{(2)}$ dépendent des $\Phi_{[\mu\nu]}^{(0)}$ revient ainsi à dire que la propagation des $\Phi_{[\mu\nu]}^{(2)}$ dépend de la courbure naturelle de l'Univers, et il semble assez évident qu'il doit en être ainsi.

Dans le cas général, nous n'avons donc pas une séparation complète entre les divers états de spin. Néanmoins, nous nous placerons pour le moment dans un cas où cette séparation est réalisée (cas de Fierz par exemple) et nous allons classer définitivement nos équations par rapport aux états de spin total.

3. Classification des équations par rapport aux états de spin total. — 1^{er} État de spin total $s = \mathfrak{S} = 2$.

Nous savons que cet état doit être représenté par 40 grandeurs tensorielles. Les 10 composantes distinctes $\Phi_{(\mu\nu)}$, les 24 composantes distinctes $\Phi_{[\mu\nu]\rho}$ et les 21 composantes distinctes $\Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}$ nous fournissent 55 grandeurs non nulles, mais nous devons en retirer la trace $\Phi^{(0)}$ et les grandeurs dérivées $\Phi_{\mu}^{(0)}$ et $\Phi_{(\mu\nu)}^{(0)}$ que nous supposons nulles, soit 15 grandeurs : il nous reste donc 40 grandeurs non nulles qui obéissent aux équations

$$\begin{aligned} s = 2 \\ (A') \quad \left\{ \begin{aligned} & \partial_{\mu} \Phi_{(\nu\rho)}^{(2)} - \partial_{\nu} \Phi_{(\mu\rho)}^{(2)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(2)}, \\ & \sum_{\rho=1}^4 \partial_{\rho} \Phi_{[\rho\mu]\nu}^{(2)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]}^{(2)}, \\ & \partial_{\mu} \Phi_{[\rho\sigma]\nu}^{(2)} - \partial_{\nu} \Phi_{[\rho\sigma]\mu}^{(2)} = k_0 \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}^{(2)}, \\ & \sum_{\varepsilon=1}^4 \partial_{\varepsilon} \Phi_{([\varepsilon\rho][\mu\nu])}^{(2)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(2)}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ces équations entraînent les relations

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(2)} + \Phi_{[\rho\mu]\nu}^{(2)} + \Phi_{[\nu\rho]\mu}^{(2)} = 0, \\ & \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}^{(2)} + \Phi_{([\mu\sigma][\nu\rho])}^{(2)} + \Phi_{([\mu\rho][\sigma\nu])}^{(2)} = 0, \end{aligned} \right.$$

soit $4 + 1 = 5$ relations entre 40 grandeurs. Il reste donc bien 35 grandeurs indépendantes en conformité avec le Tableau (2). Ces 35 grandeurs, dans le cas de l'onde plane, s'expriment toutes à l'aide des 5 constantes arbitraires qui sont nécessaires pour représenter le tenseur symétrique de trace nulle $\Phi_{(\mu\nu)}^{(2)}$ du genre espace dans le système propre de la particule.

2° État de spin total $s = 1$.

a. Première réalisation par le tenseur antisymétrique $\Phi_{[\mu\nu]}^{(1)}$.

Nous avons vu qu'il doit y avoir ici 45 grandeurs non nulles : ce sont les 6 composantes distinctes $\Phi_{[\mu\nu]}^{(1)}$, les 24 composantes distinctes $\Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}$ et les 15 composantes distinctes $\Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}^{(1)}$. Ces 45 grandeurs satisfont aux équations

$$(B_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu \Phi_{[\nu\rho]}^{(1)} - \partial_\nu \Phi_{[\mu\rho]}^{(1)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}, \\ \sum_{\rho=1}^4 \partial_\rho \Phi_{[\rho\mu]\nu}^{(1)} = k_0 \Phi_{\mu\nu}^{(1)} \left[= \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^4 (\partial_\rho \Phi_{[\rho\mu]\nu}^{(1)} - \partial_\rho \Phi_{[\rho\nu]\mu}^{(1)}) \right], \\ \partial_\mu \Phi_{[\rho\sigma]\nu}^{(1)} - \partial_\nu \Phi_{[\rho\sigma]\mu}^{(1)} = k_0 \Phi_{[[\mu\nu][\rho\sigma]]}^{(1)}, \\ \sum_{\varepsilon=1}^4 \partial_\varepsilon \Phi_{[[\varepsilon\rho][\mu\nu]]}^{(1)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}, \end{array} \right.$$

qui entraînent les relations

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\nu=1}^4 \Phi_{[\nu\mu]\nu}^{(1)} = 0, \\ \sum_{\nu=1}^4 \Phi_{[[\mu\nu][\rho\nu]]}^{(1)} = 0, \end{array} \right.$$

au nombre de $4 + 6 = 10$. Il reste donc 35 grandeurs indépendantes conformément au Tableau (2). Dans le cas de l'onde plane, ces 35 grandeurs s'expriment toutes à l'aide des 3 constantes arbitraires nécessaires pour définir le tenseur antisymétrique $\Phi_{[\mu\nu]}^{(1)}$ du genre espace dans le système propre de la particule.

b. Deuxième réalisation du cas $s = 1$ à l'aide d'un quadrivecteur $\chi_\mu^{(1)}$.

Cette réalisation fait intervenir 50 grandeurs non nulles qui sont : les 4 composantes $\chi_\mu^{(1)}$, les 6 composantes indépendantes $\chi_{[\mu\nu]}^{(1)}$, les 16 composantes indépendantes $\chi_{[\mu\nu]}^{(1)}$ et les 24 composantes indépendantes $\chi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)}$.

Elles sont liées par les équations

$$\begin{aligned} s = 1 \\ (B_2) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_\mu \chi_\nu^{(1)} - \partial_\nu \chi_\mu^{(1)} &= k_0 \chi_{[\mu\nu]}^{(1)}, \\ \sum_{\rho=1}^4 \partial_\rho \chi_{[\rho\nu]}^{(1)} &= k_0 \chi_\nu^{(1)}, \\ \partial_\mu \chi_\nu^{(1)} &= k_0 \chi_{\mu\nu}^{(1)}, \\ \partial_\rho \chi_{[\mu\nu]}^{(1)} &= k_0 \chi_{\mu\nu[\rho]}^{(1)}, \end{aligned} \right.$$

d'où résultent les relations

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_{[\mu\nu]\rho}^{(1)} + \chi_{[\nu\rho]\mu}^{(1)} + \chi_{[\rho\mu]\nu}^{(1)} &= 0, \\ \sum_{\mu=1}^4 \chi_{\mu\mu}^{(1)} &= 0, \\ \sum_{\rho=1}^4 \chi_{[\nu\rho]\rho}^{(1)} &= -\chi_\nu^{(1)}, \\ \chi_{\mu\nu}^{(1)} - \chi_{\nu\mu}^{(1)} &= \chi_{\mu\nu}^{(1)}, \end{aligned} \right.$$

soit en tout $4 + 1 + 4 + 6 = 15$ relations, ce qui réduit à 35 le nombre des grandeurs indépendantes, conformément au Tableau (2). Dans le cas de l'onde plane, ces 35 grandeurs s'expriment à l'aide des 3 constantes arbitraires nécessaires pour définir dans le système propre de la particule le vecteur d'espace $\chi_\mu^{(1)}$.

c. La troisième réalisation du cas $s = 1$ est identique à la précédente. Elle fait intervenir aussi 35 grandeurs indépendantes s'exprimant dans le cas de l'onde plane à l'aide de 3 constantes arbitraires.

Au total, pour l'ensemble des trois réalisations du cas $s = 1$, nous avons trouvé trois fois 35 grandeurs indépendantes, soit 105 grandeurs, s'exprimant dans le cas de l'onde plane à l'aide de $3 \cdot 3 = 9$ constantes arbitraires, ce qui est conforme au tableau des poids.

3° État de spin total $s = 0$.

Nous avons une première réalisation de ce cas correspondant aux équations (C) du paragraphe précédent. Elle fait intervenir 15 grandeurs : l'invariant $\varphi^{(0)}$, les 4 composantes $\varphi_\mu^{(0)}$ et les 10 composantes distinctes $\varphi_{[\mu\nu]}^{(0)}$. Ces 15 grandeurs satisfont aux équations

$$\begin{aligned} s = 0 \\ (C) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_\mu \varphi^{(0)} &= k_0 \varphi_\mu^{(0)}, \\ \sum_{\mu=1}^4 \partial_\mu \varphi_\mu^{(0)} &= k_0 \varphi^{(0)}, \\ \partial_\mu \varphi_\nu^{(0)} - \partial_\nu \varphi_\mu^{(0)} &= k_0 \varphi_{[\mu\nu]}^{(0)}, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$(20) \quad \sum_{\mu}^s \varphi_{\mu\mu}^{(0)} = \varphi^{(0)},$$

soit une relation entre les 15 grandeurs. Il reste donc 14 grandeurs indépendantes. Dans le cas de l'onde plane, elles s'expriment toutes à l'aide d'une seule constante arbitraire, puisqu'elles dérivent toutes de l'invariant $\varphi^{(0)}$.

Une deuxième réalisation du cas $s = 0$ est fournie par les grandeurs (4) et (5) extraites des Φ et obéissant aux équations que l'on obtient en remplaçant dans les équations (C) les $\varphi^{(0)}$ par les $\Phi^{(0)}$. Les $\Phi^{(0)}$ sont liées par la relation

$$(21) \quad \sum_{\mu}^s \Phi_{\mu\mu}^{(0)} = \Phi^{(0)},$$

analogue à (20) et facile à vérifier à l'aide des définitions (4) et (5) et des équations (A). Ici encore, nous avons donc 14 grandeurs indépendantes qui, dans le cas de l'onde plane, s'expriment à l'aide d'une constante arbitraire.

Au total, l'état de spin $s = 0$ est représenté par 28 grandeurs indépendantes s'exprimant dans le cas de l'onde plane par 2 constantes arbitraires, ce qui est encore conforme au Tableau des poids.

Voici un Tableau récapitulatif des résultats obtenus.

États de spin total.	Grandeurs non nulles.	Nombre de relations.	Grandeurs indépendantes.	Nombre de constantes arbitraires dans l'onde plane.
$s = S = 2 \dots$	40	5	35	5
$s = 1 \dots \dots \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} 45 \\ 50 \\ 50 \end{array} \right\}$ 145	$\left\{ \begin{array}{l} 10 \\ 15 \\ 15 \end{array} \right\}$ 40	$\left\{ \begin{array}{l} 35 \\ 35 \\ 35 \end{array} \right\}$ 105	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right\}$ 9
$s = 0 \dots \dots \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 15 \end{array} \right\}$ 30	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right\}$ 2	$\left\{ \begin{array}{l} 14 \\ 14 \end{array} \right\}$ 28	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right\}$ 2
	215	47	168	16

4. Examen des résultats obtenus. — L'examen des équations (C) du cas $s = 0$ montre qu'elles sont entièrement équivalentes (du moins quand on assimile vecteurs et pseudo-vecteurs) aux équations non maxwelliennes rencontrées dans la théorie de la particule de spin total maximum 1. Ceci nous porte à penser que, pour chaque valeur de s , il

n'y a au fond qu'un seul type d'équations qui seront les équations de toute particule obtenue par fusion et se trouvant dans l'état de spin total s : on pourra donc dire que ce sont là les équations de la particule de spin total s .

Si cette idée est exacte, nous devons pouvoir identifier les équations (B_1) , (B_2) et (B_3) avec les équations maxwelliennes de la particule de spin maximum 1. En ce qui concerne les deux groupes de formes identiques (B_2) et (B_3) , cette coïncidence est évidente. En effet, définissons à partir des $\chi^{(1)}$ un potentiel d'Univers F_μ et un tenseur antisymétrique de champ $F_{[\mu\nu]}$ par les formules

$$(22) \quad F_\mu = K \chi_\mu^{(1)}; \quad F_{[\mu\nu]} = K k_0 \chi_{[\mu\nu]}^{(1)},$$

où K est une constante et souvenons-nous qu'on nomme « tenseur dual » d'un tenseur antisymétrique de rang 2 le tenseur F^+ défini par

$$(23) \quad F_{[\mu\nu]}^+ = F_{[\rho\sigma]},$$

où $\mu\nu\rho\sigma$ forme une permutation paire des quatre indices 1, 2, 3, 4. Les équations (B_2) prennent alors la forme

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \partial_\mu F_\nu - \partial_\nu F_\mu = F_{[\mu\nu]}; & \sum_{\varepsilon=1}^4 \partial_\varepsilon F_\varepsilon = 0; \\ \sum_{\varepsilon=1}^4 \partial_\varepsilon F_{[\varepsilon\nu]} = k_0^2 F_\nu; & \sum_{\varepsilon=1}^4 \partial_\varepsilon F_{[\varepsilon\nu]}^+ = 0. \end{array} \right.$$

En posant

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{llll} A_x = F_1; & A_y = F_2; & A_z = F_3; & iV = F_4; \\ F_{23} = H_x; & F_{31} = H_y; & F_{12} = H_z; & \\ F_{14} = -iE_x; & F_{24} = -iE_y; & F_{34} = -iE_z, & \end{array} \right.$$

on retrouve aisément les équations maxwelliennes

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{H} = \text{rot } \vec{A}; & \vec{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0; & \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot } \vec{H} = k_0^2 \vec{A}; & \text{div } \vec{E} = k_0^2 V, \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E}; & \text{div } \vec{H} = 0, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire les équations de Maxwell complétées par des termes de masse.

Mais, si maintenant l'on inspecte les équations (B₁), on peut être surpris de leur trouver une forme qui paraît être très différente de celle des précédentes. Il n'en est rien cependant et l'on peut ramener les équations (B₁) à la forme (24) en posant

$$(27) \quad F_{[\mu\nu]} = K k_0 \Phi_{[\mu\nu]}^{(1)}; \quad F_{\mu} = F_{\nu\rho\sigma} = \frac{K}{2} [\Phi_{[\nu\rho]\sigma}^{(1)} + \Phi_{[\rho\sigma]\nu}^{(1)} + \Phi_{[\sigma\nu]\rho}^{(1)}],$$

comme on le vérifie sans peine. Ainsi, finalement, les trois groupes d'équations (B₁), (B₂) et (B₃) se ramènent à la forme (24), c'est-à-dire aux équations maxwelliennes (26) qui apparaissent donc comme étant spécifiquement les équations de l'état de spin total $s = 1$.

Quant aux équations (A'), elles représentent la particule dans l'état de spin total $s = \mathfrak{S} = 2$ ou, si l'on veut, les équations d'une particule de spin $s = 2$. Elles coïncident entièrement avec celles données par M. Fierz.

§. La particule de spin total maximum 2 et la théorie de la gravitation. — MM. Pauli et Fierz (1) ont signalé que les équations de la particule de spin 2 présentaient une analogie étroite avec les équations générales de la gravitation prises à l'approximation linéaire. La méthode qu'ils ont employée pour le montrer paraît un peu artificielle, parce qu'ils sont partis des équations (A') portant sur le tenseur $\Phi_{[\mu\nu]}^{(2)}$ de trace nulle (équations de Fierz). Dans notre mode d'exposition, on pourra atteindre la même conclusion d'une façon plus naturelle en partant non des équations (A'), mais des équations (A) où les cas $s = 2$ et $s = 0$ se trouvent mélangés. Ce point est intéressant, car nous verrons ainsi que, pour obtenir une théorie de la gravitation à l'approximation linéaire, il paraît nécessaire de considérer non pas une particule de spin total $s = 2$, mais une particule de spin total maximum $\mathfrak{S} = 2$ telle que celle que nous avons obtenue par le procédé de la fusion. De surcroît, la théorie de la particule de spin total maximum $\mathfrak{S} = 2$ contient aussi, nous l'avons vu, les équations maxwelliennes qui, en théorie du photon, servent à représenter le rayonnement : elle réalise donc une synthèse des théories de la Lumière et de l'Électromagnétisme d'une part, de la gravitation d'autre part : pour cette raison, elle présente un très grand intérêt.

(1) *Helvetica Physica Acta*, vol. XII, fasc. 4.

La manière exacte dont on doit utiliser les équations de la particule de spin total maximum 2 pour retrouver la théorie de la gravitation à l'approximation linéaire a été indiquée par M^{me} Tonnelat. M. Petiau a ensuite repris toute la théorie de la particule de spin 2 en se plaçant dans un espace à 5 dimensions. Nous allons exposer cette question en restant toujours dans le cadre de l'espace-temps à 4 dimensions, c'est-à-dire en suivant la voie indiquée par M^{me} Tonnelat.

Nous devons d'abord écrire à nouveau les équations (A)

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \partial_{\mu} \Phi_{(\nu\rho)} - \partial_{\nu} \Phi_{(\mu\rho)} = k_0 \Phi_{[\mu\nu]\rho}, \\ (2) \quad \sum_{\rho}^4 \partial_{\rho} \Phi_{[\rho\mu]\nu} = k_0 \Phi_{(\mu\nu)}, \\ (3) \quad \partial_{\mu} \Phi_{[\rho\sigma]\nu} - \partial_{\nu} \Phi_{[\rho\sigma]\mu} = k_0 \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}, \\ (4) \quad \sum_{\varepsilon}^4 \partial_{\varepsilon} \Phi_{([\varepsilon\rho][\mu\nu])} = k_0 \Phi_{(\mu\nu)\rho}. \end{array} \right.$$

De ces équations, on tire aisément les relations suivantes :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} (5) \quad \sum_{\mu}^4 \partial_{\mu} \Phi_{(\mu\nu)} = 0, \\ (6) \quad \sum_{\rho}^4 \partial_{\rho} \Phi_{(\nu\rho)} = \frac{1}{2k_0} \sum_{\rho}^4 \sum_{\varepsilon}^4 \partial_{\rho} \partial_{\varepsilon} \Phi_{[\rho\nu]\varepsilon}, \\ (7) \quad \sum_{\rho}^4 \Phi_{(\nu\rho)\rho} = \frac{1}{k_0} \partial_{\nu} \sum_{\rho}^4 \Phi_{(\rho\rho)}, \\ (8) \quad \sum_{\mu}^4 \sum_{\rho}^4 \Phi_{([\mu\rho][\mu\rho])} = \frac{1}{k_0} \sum_{\mu}^4 \sum_{\rho}^4 (\partial_{\mu} \Phi_{[\mu\rho]\rho} - \partial_{\rho} \Phi_{[\mu\rho]\mu}) = 2 \sum_{\rho}^4 \Phi_{(\rho\rho)}. \end{array} \right.$$

D'autre part, toutes les grandeurs Φ satisfont à l'équation de propagation

$$(28) \quad \square \Phi \dots = - \sum_{\rho}^4 \partial_{\rho} \partial_{\rho} \Phi \dots = -k_0^2 \Phi \dots \quad \left(\square \equiv - \sum_{\rho}^4 \partial_{\rho} \partial_{\rho} \right).$$

MM. Pauli et Fierz ont, nous l'avons dit, signalé l'analogie des équations de la particule de spin 2 avec celles de la théorie relativiste de la gravitation à l'approximation linéaire. Par définition, cette approximation est valable lorsque les $g_{(\mu\nu)}$ figurant dans le ds^2

$$(29) \quad ds^2 = \sum_{\mu\nu}^4 g_{(\mu\nu)} dx_{\mu} dx_{\nu},$$

ont des valeurs très voisines des valeurs « galiléennes ». Comme nous employons ici les coordonnées d'Univers (avec $x_4 = ict$), les valeurs galiléennes des $g_{\mu\nu}$ sont

$$(30) \quad \gamma_{(\mu\nu)} = \delta_{\mu\nu}.$$

Elles sont réalisées dans une région de l'espace-temps où le champ de gravitation est nul, si l'on suppose l'espace-temps sans courbure naturelle. L'approximation linéaire sera caractérisée par le fait que les grandeurs

$$(31) \quad h_{(\mu\nu)} = g_{(\mu\nu)} - \gamma_{(\mu\nu)}$$

sont considérées comme des quantités très petites. On négligera donc à cette approximation les carrés et les produits de ces quantités.

Si l'on désigne par $R_{([\mu\nu][\rho\sigma])}$ le tenseur de Riemann-Christoffel dans la région de l'espace-temps considérée et par

$$R_{(\mu\nu)} = \sum_{\rho\sigma}^4 g^{\rho\sigma} R_{([\mu\rho][\nu\sigma])}$$

le tenseur symétrique de rang 2 obtenu par la contraction du précédent, on démontre dans les traités de Relativité généralisée ⁽¹⁾ que la propagation de la gravitation s'exprime à l'approximation linéaire par l'équation

$$(32) \quad \square g_{(\mu\nu)} = -2 R_{(\mu\nu)}$$

(soit $\square g_{\mu\nu} = 0$ dans les parties euclidiennes de l'espace-temps), à condition de choisir un système de coordonnées « isothermes » x_μ , tel que l'on ait

$$(33) \quad D_2 x_\mu = 0.$$

D_2 étant le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami. Si nous voulons établir un lien entre les grandeurs qui figurent dans les équations et celles qui interviennent en théorie de la gravitation, la première idée qui se présente à l'esprit est de poser

$$(34) \quad g_{(\mu\nu)} = \Phi_{(\mu\nu)}.$$

⁽¹⁾ Voir par exemple VON LAUE, *Relativitätstheorie*, tome II, p. 195, ou encore CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste* (Paris, Gauthier-Villars, 1930), tome II, Chap. X.

En réalité, cette identification simple n'est pas possible, comme l'a montré M^{me} Tonnelat, car, avec les coordonnées isothermes, on doit avoir

$$(35) \quad \sum_{\mu}^4 \partial_{\mu} g_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \partial_{\nu} \sum_{\rho}^4 g_{(\rho\rho)}, \quad \text{avec} \quad g_{(\rho\rho)} = \sum_{\sigma}^4 g'_{\rho\sigma} \gamma^{\rho\sigma} = \sum_{\sigma}^4 g'_{\rho\sigma} \delta^{\rho\sigma}$$

(on remarquera en passant que $\sum_{\rho}^4 g'_{(\rho\rho)}$ n'est pas égal à

$$\sum_{\rho}^4 g'_{\rho}^{\rho} = \sum_{\rho\sigma}^4 g'_{\rho\sigma} g'^{\rho\sigma},$$

qui, lui, est toujours égal à 4). Comme $\sum_{\rho}^4 g'_{\rho\rho}$ n'est pas nul, le premier membre de (35) ne serait pas nul, ce qui, avec l'hypothèse (34), se trouverait en contradiction avec l'équation (A₅).

Par contre, rien n'empêche de poser avec M^{me} Tonnelat

$$(36) \quad g_{(\mu\nu)} = \sum_{\rho}^4 \Phi_{([\mu\rho][\nu\rho])} = \Phi_{(\mu\nu)} + \frac{1}{k_0^2} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \sum_{\rho}^4 \Phi_{(\rho\rho)}.$$

Si l'on adopte cette définition, les équations (A₄) et (A₇) nous donnent

$$(37) \quad \sum_{\mu}^4 \partial_{\mu} g_{\mu\nu} = \sum_{\mu\rho}^4 \partial_{\mu} \Phi_{([\mu\rho][\nu\rho])} = k_0 \sum_{\rho}^4 \Phi_{[\nu\rho]\rho} = \partial_{\nu} \sum_{\rho}^4 \Phi_{(\rho\rho)},$$

et, de plus, (A₈) nous donne

$$(38) \quad \sum_{\rho}^4 g_{(\rho\rho)} = 2 \sum_{\rho}^4 \Phi_{(\rho\rho)},$$

d'où

$$(39) \quad \sum_{\mu}^4 \partial_{\mu} g_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \partial_{\nu} \sum_{\rho}^4 g_{(\rho\rho)},$$

ce qui est bien en accord avec (35).

D'autre part, on aura

$$(40) \quad \square g_{(\mu\nu)} = \square \sum_{\rho}^4 \Phi_{([\mu\rho][\nu\rho])} = -k_0^2 \sum_{\rho}^4 \Phi_{([\mu\rho][\nu\rho])} = -k_0^2 g_{(\mu\nu)}.$$

Pour être en accord avec (32), on supposera que

$$(41) \quad R_{(\mu\nu)} = \frac{k_0^2}{2} g_{(\mu\nu)}.$$

En théorie relativiste de la gravitation, on a

$$(42) \quad R_{(\mu\nu)} = \lambda g_{(\mu\nu)},$$

λ étant la constante cosmologique. Si l'espace-temps est euclidien (sans courbure naturelle), on a $\lambda = 0$. Dans un espace-temps à courbure naturelle, $\lambda \neq 0$. On sait que dans le cas de l'Univers sphérique de de Sitter, le rayon R de l'Univers sphérique est relié à la constante cosmologique par la relation

$$(43) \quad \lambda = \frac{3}{R^2}.$$

La comparaison de (42) avec (41) donne

$$(44) \quad \lambda = \frac{k_0^2}{2} = \frac{2\pi^2}{h^2} \mu_0^2.$$

Appelons « graviton » la particule de spin maximum 2 décrite par les équations (A) et que nous supposons correspondre au champ gravifique. Nous voyons que l'hypothèse d'un espace-temps sans courbure naturelle ($\lambda = 0$) correspond à l'hypothèse que la masse propre du graviton μ_0 est nulle. Pour $\mu_0 > 0$, on aura $\lambda \neq 0$, donc un espace-temps avec courbure naturelle.

Admettons l'hypothèse de l'espace-temps sphérique de de Sitter. En comparant (44) avec (43), on aura alors

$$(45) \quad \mu_0 = \frac{h\sqrt{6}}{2\pi R c}.$$

Les astronomes relativistes admettent généralement que le rayon R de l'Univers est de l'ordre de 10^{26} cm; avec cette évaluation on trouve

$$(46) \quad \mu_0 \simeq 10^{-66} \text{ gr.}$$

Telle serait en ordre de grandeur la masse propre des gravitons et probablement celle des photons, puisque la théorie de la particule de spin total maximum 2 fournit une théorie *unitaire* de la Lumière et de la Gravitation. Dans la théorie des photons, on montre que, pour éviter d'être en contradiction avec l'expérience, on doit, si l'on attribue au photon une masse non nulle, ne pas attribuer à cette masse propre une

valeur supérieure à environ 10^{-15} gramme ⁽¹⁾. Il n'y a donc pas de contradiction avec le résultat obtenu ci-dessus.

A l'aide de la définition (36) et des équations (A), on trouve aisément les formules suivantes

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{(\mu\nu)} &= \sum_1^4 \Phi_{([\mu\rho][\nu\rho])} - \frac{1}{k_0^2} \partial_\mu \partial_\nu \sum_1^4 \Phi_{(\rho\rho)} = g_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2k_0^2} \partial_\mu \partial_\nu \sum_1^4 g_{(\rho\rho)}; \\ \Phi_{(\mu\nu)\rho} &= \frac{1}{k_0^2} (\partial_\mu \Phi_{(\nu\rho)} - \partial_\nu \Phi_{(\mu\rho)}) = \frac{1}{k_0^2} (\partial_\mu g_{(\nu\rho)} - \partial_\nu g_{(\mu\rho)}); \\ \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])} &= \frac{1}{k_0^2} (\partial_\mu \Phi_{(\rho\sigma)\nu} - \partial_\nu \Phi_{(\rho\sigma)\mu}) \\ &= \frac{1}{k_0^2} (\partial_\mu \partial_\rho g_{(\sigma\nu)} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{(\rho\nu)} + \partial_\nu \partial_\sigma g_{(\mu\rho)} - \partial_\nu \partial_\rho g_{(\mu\sigma)}), \end{aligned} \right.$$

ce qui permet aussi d'écrire à l'approximation linéaire

$$(48) \quad \Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])} \simeq \frac{2}{k_0^2} R_{([\mu\nu][\rho\sigma])}.$$

On peut vérifier l'accord de (48) avec (36) par le calcul suivant

$$(49) \quad \begin{aligned} \sum_1^4 \Phi_{([\mu\rho][\nu\rho])} &\simeq \frac{2}{k_0^2} \sum_1^4 R_{([\mu\rho][\nu\rho])} \\ &= \frac{2}{k_0^2} \sum_1^4 \gamma^{\rho\sigma} R_{([\mu\rho][\nu\sigma])} \simeq \frac{2}{k_0^2} R_{(\mu\nu)} = \frac{2}{k_0^2} \lambda g_{(\mu\nu)} = g_{(\mu\nu)}. \end{aligned}$$

Nous avons finalement obtenu ainsi une théorie de la gravitation à l'approximation linéaire s'appuyant sur les équations (A) de la particule de spin total maximum 2. Or ces équations contiennent un mélange du cas de spin total $s=2$ et du cas de spin total $s=0$. Nous avons signalé l'intérêt de cette circonstance qui plaide en faveur de la méthode de fusion : en effet, une méthode qui isolerait systématiquement les cas $s=2$ et $s=0$ ne parviendrait pas aussi naturellement à cette théorie.

Il est intéressant de chercher à préciser les rôles que jouent respectivement dans cette théorie linéaire de la gravitation les grandeurs se rapportant au cas $s=2$ et celles qui se rapportent au cas $s=0$. Pour cela, nous devons d'abord décomposer les $\Phi_{(\mu\nu)}$ à l'aide des formules (8) et (9) dont dérive (10) en nous souvenant des définitions (4) et (5).

(1) Voir *Mécanique ondulatoire du photon*, déjà citée p. 39-40.

Nous trouvons alors aisément

$$(50) \quad g_{(\mu\nu)} = \sum_1^4 \Phi_{([\mu\rho][\nu\rho])} = \Phi_{(\mu\nu)} + \frac{1}{k_0^2} \partial_\mu \partial_\nu \Phi^{(0)} = \Phi_{(\mu\nu)}^{(2)} + \Phi_{(\mu\nu)}' + \Phi_{(\mu\nu)}^{(0)}$$

ou encore

$$(51) \quad g_{(\mu\nu)} = \Phi_{(\mu\nu)}^{(2)} + \frac{1}{k_0^2} \partial_\mu \partial_\nu \Phi^{(0)} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \Phi^{(0)}.$$

Ainsi se trouvent mis en évidence les rôles respectifs des états $s = 2$ et $s = 0$ dans l'expression des $g_{(\mu\nu)}$. De plus, on a pour la quantité $\sum_1^4 g_{\mu\mu}$

$$(52) \quad \sum_1^4 g_{\mu\mu} = \frac{1}{k_0^2} \partial_\mu \partial_\mu \Phi^{(0)} + \Phi^{(0)} = 2 \Phi^{(0)},$$

d'après (51), (10) et (28). Cette quantité ne dépend donc que de $\Phi^{(0)}$, c'est-à-dire que de l'état $s = 0$.

Si nous supposons que quand il n'y a pas de gravitation (absence de gravitons), $\Phi^{(2)}$ est nul, les $g_{(\mu\nu)}$ se réduisent alors à

$$(53) \quad g_{(\mu\nu)} = \frac{1}{k_0^2} \partial_\mu \partial_\nu \Phi^{(0)} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \Phi^{(0)}.$$

C'est donc l'état $s = 0$ qui détermine seul la métrique en l'absence de gravitation. La présence de gravitation se traduit (à l'approximation linéaire ici envisagée) par la superposition de l'état $s = 2$, c'est-à-dire par l'addition du terme $\Phi_{(\mu\nu)}^{(2)}$ au second membre de (53).

Si, en l'absence de gravitation, la fonction $\Phi^{(0)}$ est constante et si on la normalise en la prenant égale à 4, les $g_{(\mu\nu)}$ prennent la forme euclidienne et l'on a

$$(54) \quad g_{(\mu\nu)} = \delta_{(\mu\nu)}; \quad \sum_1^4 g_{\rho\rho} = 4.$$

Mais la fonction $\Phi^{(0)} = \text{Const.}$ n'est solution des équations (C) que si k_0 et par suite μ_0 sont nulles. Ceci est facile à comprendre : si l'Univers est euclidien, le rayon de l'Univers est infini et la formule (45) montre que μ_0 est nulle.

De ce qui précède, résulte que la fonction $\Phi^{(0)}$, caractérisant l'état de spin total nul $s = 0$ caractérise l'univers vide sans champ de gravitation. Dans cet Univers vide, il n'y a ni gravitons, ni photons, si l'on suppose également nulles les grandeurs se rapportant à l'état $s = 1$. Cet

état « vide » de l'Univers, qui est l'état euclidien si le rayon de l'Univers est infini, paraît bien être apparenté à l'état d'annihilation dont on se sert en théorie du photon.

Malgré ses aspects séduisants, la théorie précédente a quelque chose d'assez incomplet. En effet, elle s'appuie sur les équations (A) qui sont écrites en supposant l'espace-temps euclidien et elle cherche à trouver des $g_{(\mu\nu)}$ correspondant à un espace-temps non euclidien. En réalité, une théorie vraiment satisfaisante devrait permettre de retrouver rigoureusement les équations de la gravitation; mais, comme ces équations ne sont pas linéaires, il faudrait partir d'une Mécanique ondulatoire elle-même non linéaire, c'est-à-dire d'une Mécanique ondulatoire où les équations d'ondes contiendraient des coefficients dépendant eux-mêmes de la fonction d'onde. Ceci porterait à penser que toutes les formes actuellement connues de la Mécanique ondulatoire, reposant toutes sur des équations linéaires, sont seulement des approximations d'une théorie rigoureuse à caractère non linéaire. Bien entendu, comme les équations du photon font partie de la Mécanique ondulatoire générale, il en résulterait en particulier que les équations électromagnétiques du type de Maxwell seraient à remplacer par des équations non linéaires. On sait d'ailleurs que l'utilité de construire une théorie électromagnétique non linéaire pour rendre compte de l'existence des particules élémentaires et pour lever certaines difficultés des théories quantiques actuelles (énergies propres infinies des particules, etc.) a déjà été plusieurs fois envisagée et a donné lieu à quelques tentatives, notamment de la part de M. Born. La question prend ici un aspect très intéressant car, les équations rigoureuses de la gravitation étant connues, on pourrait peut-être se servir de cette connaissance pour tenter de deviner la forme non linéaire que devraient prendre les équations rigoureuses de la Mécanique ondulatoire. Toutes ces questions sont difficiles, mais ouvrent un vaste champ de recherches : elles montrent le grand intérêt de la théorie de la particule de spin maximum 2.

Nous devons encore faire remarquer que la précédente théorie de la gravitation est une théorie *microscopique* où les $g_{(\mu\nu)}$ sont représentés par des fonctions *complexes*, tout comme en théorie du photon, les grandeurs électromagnétiques aussi sont représentées par des grandeurs complexes. C'est en passant du point de vue macroscopique que l'on doit retrouver les valeurs *réelles* $g_{(\mu\nu)}$ employées par la théorie habituelle de la gravitation, tout comme en théorie de la Lumière, le passage au point de vue macroscopique doit permettre de s'élever des grandeurs électromagnétiques complexes de la théorie du photon aux

grandeurs électromagnétiques réelles de la théorie usuelle. C'est un point que nous avons longuement développé dans d'autres exposés.

6. Calcul effectif des grandeurs pour la particule de spin maximum 2.

— Revenons maintenant à la théorie de la particule de spin maximum 2 esquissée dans les quatre premiers paragraphes de ce chapitre. On peut développer les formules qui permettent d'exprimer les grandeurs tensorielles en fonction des composantes Ψ_{iklm} de l'onde Ψ ou, inversement, celles qui donnent ces composantes en fonction des grandeurs tensorielles. On peut ensuite construire le quadrivecteur flux-densité, puis les *trois* tenseurs énergie-impulsion (savoir le tenseur corpusculaire T et les deux tenseurs du type M) tels qu'ils ont été définis d'une manière générale au Chapitre IX. Pour les états de spin total $s = 1$ et $s = 0$, on retombe ainsi sur les formules données précédemment dans la théorie de la particule de spin total maximum 1. Nous ne développerons pas entièrement les calculs qui sont assez longs : nous en indiquerons seulement les principaux résultats.

Pour le quadrivecteur courant-densité, on trouve d'abord une expression linéaire en Ψ_{iklm} et Ψ_{iklm}^* et, en exprimant ces composantes en grandeurs tensorielles, on trouve pour ce quadrivecteur $\vec{J}$, une expression de la forme

$$(55) \quad \vec{J} = \vec{J}_2 + \vec{J}_1 + \vec{J}_0,$$

où $\vec{J}_2$ dépend seulement des grandeurs se rapportant au cas de spin total $s = 2$, $\vec{J}_1$ des grandeurs se rapportant au cas de spin total $s = 1$ et $\vec{J}_0$ au cas de spin total $s = 0$. Les quadrivecteurs $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_0$ se ramènent à ceux que nous avons trouvés précédemment pour les cas $s = 1$ et $s = 0$ dans la théorie de la particule de spin maximum 1. Le seul résultat nouveau est donc l'expression des composantes de $\vec{J}_2$ qui est la suivante

$$(56) \quad (J_2)_\mu = \sum_{\rho\sigma\tau} \frac{1}{2i} [\Psi_{(\rho\sigma)\tau}^{(2)*} \Psi_{([\rho\sigma][\mu\tau])}^{(2)} - \Psi_{([\rho\sigma][\mu\tau])}^{(2)*} \Psi_{(\rho\sigma)\tau}^{(2)}] \quad (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

Les équations (A') permettent de vérifier la rotation de conservation

$$(57) \quad \sum_{\mu}^4 \partial_{\mu} (J_2)_{\mu} = 0.$$

Pour le tenseur corpusculaire d'énergie-impulsion T , on trouve de même la décomposition

$$(58) \quad T = T_2 + T_1 + T_0,$$

T_1 et T_0 qui s'expriment respectivement à l'aide des grandeurs tensorielles correspondant aux cas $s = 1$ et $s = 0$, se ramènent, à une divergence près, aux tenseurs déjà rencontrés dans la théorie du spin maximum 1. Quant à T_2 , ses composantes ont pour expressions

$$(59) \quad (T_2)_{\mu\nu} = (T_2)_{\nu\mu} = \frac{\hbar}{8\pi i} \sum_1^4 \rho_{\sigma\tau} [\Psi_{(\rho\sigma)\tau}^{(2)*} \partial_\mu \Psi_{([\rho\sigma][\nu\tau])}^{(2)} + \Psi_{(\rho\sigma)\tau}^{(2)*} \partial_\nu \Psi_{([\rho\sigma][\mu\tau])}^{(2)}] + \text{quantité conjuguée}$$

et l'on vérifie la relation de conservation

$$(60) \quad \sum_1^4 \partial_\mu (T_2)_{\mu\nu} = 0, \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Enfin, les deux tenseurs de type M peuvent aussi se mettre sous la forme

$$(61) \quad M^{(i)} = M_2^{(i)} + M_1^{(i)} + M_0^{(i)} \quad (i = 1, 2).$$

L'évaluation de $M_1^{(i)} + M_0^{(i)}$ ne donne rien de nouveau, car elle nous ramène, aussi bien pour $i = 1$ que pour $i = 2$, aux expressions précédemment exposées dans la théorie de la particule de spin maximum 1. Quant à $M_2^{(1)}$ et à $M_2^{(2)}$, ils sont en général différents l'un de l'autre et ne coïncident que dans le cas particulier de l'onde plane : ce sont les deux tenseurs distincts correspondant au cas $s = 2$. Ils satisfont tous deux à la relation de conservation

$$(62) \quad \sum_1^4 \partial_\mu (M_2^{(i)})_{\mu\nu} = 0, \quad (i = 1, 2; \nu = 1, 2, 3, 4).$$

Voici leurs expressions assez compliquées qui concordent avec les formules générales données par M. Fierz

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} (M_2^{(1)})_{\mu\nu} &= (M_2^{(1)})_{\nu\mu} \\ &= \sum_1^4 \rho_{\sigma\tau} \left\{ \frac{1}{2} \Psi_{([\rho\mu]\sigma)}^{(2)*} \Psi_{([\rho\nu]\sigma)}^{(2)} + \frac{k_0^2}{2} \Psi_{([\rho\mu]\sigma)}^{(2)*} \Psi_{([\rho\nu]\sigma)}^{(2)} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{1}{2} \Psi_{([\rho\sigma]\tau)}^{(2)*} \Psi_{([\rho\sigma]\tau)}^{(2)} + k_0^2 \Psi_{([\rho\sigma]\tau)}^{(2)*} \Psi_{([\rho\sigma]\tau)}^{(2)} \right] \right\} + q^{16} \text{ conj.} \\ (M_2^{(2)})_{\mu\nu} &= (M_2^{(2)})_{\nu\mu} \\ &= \sum_1^4 \rho_{\sigma\tau} \left\{ \frac{1}{2} \Psi_{([\rho\sigma][\tau\mu])}^{(2)*} \Psi_{([\rho\sigma][\tau\nu])}^{(2)} + \frac{k_0^2}{2} \Psi_{([\rho\sigma]\mu)}^{(2)*} \Psi_{([\rho\sigma]\nu)}^{(2)} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{1}{2} \Psi_{([\rho\sigma][\tau\nu])}^{(2)*} \Psi_{([\rho\sigma][\tau\nu])}^{(2)} + k_0^2 \Psi_{([\rho\sigma]\tau)}^{(2)*} \Psi_{([\rho\sigma]\tau)}^{(2)} \right] \right\} + q^{16} \text{ conj.} \end{aligned} \right.$$

Nous savons par notre étude générale que les tenseurs $M_2^{(1)}$ et $M_2^{(2)}$, qui sont localement distincts en dehors du cas particulier de l'onde plane, sont néanmoins intégralement équivalents entre eux et avec le tenseur T_2 , c'est-à-dire que l'on a

$$(64) \quad \int_D (T_2)_{\mu\nu} d\tau = \int_D (M_2^{(1)})_{\mu\nu} d\tau = \int_D (M_2^{(2)})_{\mu\nu} d\tau.$$

M^{me} Tonnelat a effectué d'une façon détaillée une grande partie des calculs dont nous venons d'indiquer quelques résultats. Elle a notamment calculé les expressions explicites de toutes les grandeurs dans le cas de l'onde plane monochromatique (en se servant d'ailleurs d'une représentation différente de celle qui a été employée ici), et elle les a utilisées pour introduire la seconde quantification, question que nous avons laissée en dehors de cet exposé. Elle a aussi calculé l'expression du tenseur T et celles des deux tenseurs M et montré quelles sont les relations exactes existant entre ces tenseurs. Sur tous ces points, nous renvoyons aux travaux de M^{me} Tonnelat ⁽¹⁾.

(¹) On trouvera les principaux résultats des travaux de M^{me} Tonnelat et de M. Petiau sur la particule de spin 2 dans des Notes parues dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en 1940, 1941 et 1942.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE.....	v

CHAPITRE I

IDÉES ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Point de départ de la Mécanique ondulatoire.....	1
2. Équations d'ondes de la Mécanique ondulatoire.....	5
3. Nouvelle conception des grandeurs attachées à un corpuscule.....	8
4. Valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur linéaire et hermitien.....	10
5. Le spectre continu de l'opérateur hamiltonien d'un corpuscule libre	14

CHAPITRE II.

INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Principes généraux de l'interprétation physique de la nouvelle Mécanique	17
2. Les matrices algébriques et leurs propriétés	20
3. Opérateurs et matrices en Mécanique ondulatoire.....	24
4. Valeurs moyennes et grandeurs de champ en Mécanique ondulatoire.....	26
5. Intégrales premières en Mécanique ondulatoire.....	28
6. Forme précise des relations d'incertitude d'Heisenberg.....	30

CHAPITRE III.

THÉORIE QUANTIQUE DES MOMENTS CINÉTIQUES ET DES SPINS.

1. Moment cinétique orbital.....	33
2. Le moment cinétique et le groupe des rotations spatiales	36
3. Résultats généraux sur les valeurs propres des opérateurs satisfaisant aux relations (7).....	38
4. Le spin des particules.....	41

CHAPITRE IV.

LES MOMENTS CINÉTIQUES PROPRES DU POINT DE VUE RELATIVISTE.

1. Généralités.....	44
2. Représentation relativiste du moment cinétique orbital.....	46
3. Étude du moment cinétique propre du point de vue relativiste.....	48
4. Théorie relativiste générale des moments cinétiques propres	53
5. Remarque sur l'aspect relativiste des moments magnétiques propres.....	59

CHAPITRE V.

LA THÉORIE DE L'ÉLECTRON A SPIN DE DIRAC.

	Pages.
1. Les équations d'onde de l'électron à spin	61
2. Invariance relativiste des équations de Dirac.....	66
3. Le spin de l'électron en théorie de Dirac.....	71

CHAPITRE VI.

FORMALISME ET INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE LA THÉORIE DE DIRAC.

1. Formalisme général de la Mécanique ondulatoire de l'électron de Dirac	77
2. Les grandeurs de champ définies par la théorie de Dirac.....	80
3. Les ondes planes monochromatiques en théorie de Dirac.....	83
4. Théorèmes de M. de Kronig	88
5. Le quadrivecteur densité-courant d'électricité et sa décomposition	89

CHAPITRE VII.

THÉORIE DE LA PARTICULE DE SPIN 1 (PHOTON, MÉSON, ...).

1. Considérations générales sur la fusion des particules de spin $1/2$	93
2. Fusion de deux corpuscules de spin $1/2$	97
3. Diverses formes des équations d'ondes de la particule de spin total maximum 1.	102
4. Composantes tensorielles de l'onde Ψ . Équations maxwelliennes et non maxwelliennes	105
5. Ondes planes monochromatiques pour la particule de spin maximum 1.....	112

CHAPITRE VIII.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE DE LA PARTICULE DE SPIN MAXIMUM 1 (*suite*).

1. Le quadrivecteur flux-densité.....	117
2. Formalisme général de la Mécanique ondulatoire pour la particule de spin 1...	120
3. Les tenseurs symétriques énergie-impulsion.....	127
4. Étude du spin.....	131

CHAPITRE IX.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PARTICULES A SPIN OBTENUES PAR FUSION.

1. Équations fondamentales	138
2. Les grandeurs tensorielles pour les particules de spin entier.....	142
3. Ondes planes monochromatiques pour la particule de spin maximum quelconque.	144
4. Le quadrivecteur densité-flux.....	146
5. Formalisme général de la Mécanique ondulatoire des particules de spin quelconque.....	150
6. Les tenseurs symétriques énergie-impulsion.....	152
7. Récapitulation des résultats obtenus sur le caractère défini-positif de certaines grandeurs.....	156

CHAPITRE X.

ÉTUDE ET NOMENCLATURE DES ÉTATS DE SPIN. — PRÉVISION DES GRANDEURS TENSORIELLES.

	Pages.
1. Les composantes du spin.....	158
2. Le spin total.....	159
3. Nomenclature des états de spin.....	161
4. Remarques générales sur les résultats précédents.....	166
5. Prévision des grandeurs tensorielles pour les particules à spin entier. Cas $\mathfrak{S} = 2$	168
6. Prévision des grandeurs tensorielles pour le cas $\mathfrak{S} = 3$	170
7. Cas général : $\mathfrak{S}$ entier quelconque.....	173

CHAPITRE XI.

THÉORIE DE LA PARTICULE DE SPIN MAXIMUM 2.

1. Généralités et nomenclature des grandeurs.....	175
2. Équations tensorielles pour la particule de spin maximum 2.....	177
3. Classification des équations par rapport aux états de spin total.....	182
4. Examen des résultats obtenus.....	185
5. La particule de spin maximum 2 et la théorie de la gravitation.....	187
6. Calcul effectif des grandeurs pour la particule de spin maximum 2.....	195
TABLE DES MATIÈRES.....	199

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

116788-43 Quai des Grands-Augustins, 55.

Autorisation n° 11498