D. IVANENKO ★ A. SOKOLOV

TEORIA CLASICĂ A CÎMPULUI

EDITURA TEHNICĂ

TEORIA CLASICĂ A CÎMPULUI

D. IVANENKO • A. SOKOLOV

TEORIA CLASICĂ A CÎMPULUI

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI 1955

Prima ediţie a acestei cărţi a fost distinsă cu Premiul Stalin pe anul 1950

NOTA

Cartea este consacrată teoriei clasice (necuantice) a cîmpului. Totuşi, se folosesc în ea metode matematice, care şi-au căpătat dezvoltarea în mecanica cuantică. In particular se arată cum se găseşte funcţia lui Green cu ajutorul funcţiei δ şi cum se obţin prin aceste metode soluţiile unui şir de probleme ale electrodinamicii clasice, probleme care au şi o mare însemnătate practică.

Se lămureşte amănuţit o serie întreagă de rezultate noi reflectate pînă acum numai în periodice şi care sînt în mare parte cercetări originale ale savanţilor sovietici. Astfel, sînt expuse problemele teoriei electronului „supraluminos" al lui Cerenkov, problemele electrodinamicii neliniare, masei proprii, teoriile procesului λ şi a bi-cîmpului, teoria electronului luminos. Ultimul capitol este consacrat analizei problemelor mezodinamicii clasice,

In ediţia a doua s-au refăcut cîteva paragrafe, s-au făcut o serie de precizări şi s-au adăugat trimiteri la literatura cea mai recentă.

Cartea se adresează oamenilor de ştiinţă, aspiranţilor şi studenţilor din anii superiori ai facultăţilor de fizică.

Д. ИВАНЕНКО и А. СОКОЛОВ
КЛАССИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ ПОЛЯ
(НОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ)
Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва 1951 Ленинград

PREFAȚA LA EDIȚIA A DOUA

In ediția a doua planul general al cărții nu a fost supus vreunei modificări esențiale. In afară de îndreptarea greșelilor observate, s-au introdus în unele paragrafe o serie de precizări și s-au adăugat trimiteri la literatura recentă. Fizica particulelor elementare și a cîmpurilor, — în a căror teorie cartea noastră reprezintă, în mare măsură, o introducere, — continuă însă să se dezvolte rapid, fapt care ne-a îndemnat să facem adaosuri esențiale în următoarele puncte:

In primul rînd, teoria electronului „luminos" este completată cu examinarea contracției orbitelor. Apoi, am socotit necesară refacerea materialului privind originea și natura radiației cosmice și a diverșilor mezoni, în legătură cu o serie de lucrări efectuate în ultimul timp, în mare parte de fizicieni sovietici. In particular, trebuie subliniat că descoperirea mezonilor neutri (1950) a dat, pentru prima dată, un fundament real mezodinamicii clasice, a cărei expunere ocupă unul din locurile centrale în cartea noastră. Cîmpul mezonilor neutri, introdus mai înainte ca o ipoteză, capătă acum — cel puțin din punct de vedere calitativ — o confirmare experimentală.

In teoria forțelor nucleare, s-a făcut o adăugire în legătură cu noua variantă de eliminare a dificultății dipolare în teoria forțelor pseudoscalare. In afară de aceasta, s-a acordat o atenție deosebită experiențelor recente asupra difuziei nucleonilor rapizi, experiențe care permit să se tragă concluzii importante asupra caracterului forțelor nucleare.

Am adăugat de asemenea un paragraf suplimentar consacrat celei mai noi explicații a deplasării nivelelor de energie la electronii din atomi, precum și explicării originii momentului magnetic suplimentar al electronului, pe baza teoriei cuantice a vi-

dului, care într-o anumită măsură explică de asemenea și problema naturii masei proprii. Menționăm, de asemenea, că bi-cîmpul compensator examinat de noi încă din § 34 este folosit acum pentru eliminarea divergențelor cuantice. Acest exemplu arată încă o dată forța heuristică apreciabilă a cercetării preliminare a problemei masei proprii cu ajutorul teoriei clasice.

In încheiere, autorii consideră ca o datorie plăcută să mulțumească tuturor celor care au făcut observații cu privire la prima ediție. Autorii sînt recunoscători, de asemenea, redactorului cărții, V. A. Leșkovțev pentru atenția acordată ediției a doua și pentru ajutorul acordat la întocmirea indicelui alfabetic.

Facultatea de Fizică a Universității
de Stat din Moscova „M. V. Lomonosov"
noiembrie, 1950

D. IVANENKO
A. SOCOLOV

PREFAȚA LA EDIȚIA ÎNTÎI

Apariția unei cărți consacrate tratării clasice — adică necuantice — a diferitelor cîmpuri și particule elementare, necesită fără îndoială o explicație. Existența unui număr mare de monografii și cursuri, consacrate teoriei cîmpului electromagnetic și gravific, s-ar putea crede că face inutilă o nouă expunere a teoriei clasice. Afară de aceasta, se consideră de obicei — într-un mod aproape banal —, că examinarea proceselor în care intervin particulele elementare, în particular mezonii, necesită neapărat o teorie cuantică.

Cartea de față, pe care o supunem atenției cititorilor, în nici un caz nu-și propune scopul să înlocuiască cursul obișnuit de electrodinamică.

Una din problemele care ne preocupă este folosirea unor metode matematice ale teoriei cuantice pentru cercetarea fenomenelor clasice.

In legătură cu aceasta, noi expunem sistematic teoria funcției δ (cap. I), cu ajutorul căreia se pot descrie diferitele singularități legate de sarcini (sarcină punctiformă, sarcină superficială etc.), și se poate da o nouă tratare a funcției lui Green. In capitolele II și III am dezvoltat aparatul matematic care ne permite să folosim funcția δ în rezolvarea unui șir de probleme ale fizicii matematice și ale electrodinamicii. De exemplu, cu ajutorul teoriei funcției δ se formulează extrem de simplu, așa-numitul principiu de emisie.

In aceste trei capitole am arătat, în particular, modul în care pot fi folosite noile metode pentru rezolvarea multor probleme vechi. Prin aceasta, noi ne mărginim să oferim cititorilor aparatul matematic, lăsînd în seama matematicienilor o justificare mai riguroasă a noului formalism.

Teoria clasică a cîmpului şi a particulelor elementare, trăieşte în ultimii ani o anumită renaştere. Multe fenomene descoperite în ultimul timp, ca electronul „supraluminos“, electronul „luminos“, precum şi alte efecte legate de acceleraţia particulelor încărcate, pot fi deschise în esenţă cu ajutorul teoriei relativiste necuantice. Alături de aceasta, analiza problemei masei proprii, care din punct de vedere clasic, este încă departe de a fi rezolvată — contribuie la o înţelegere mai profundă a naturii fizice a acestei probleme şi, în orice caz, poate juca un rol heuristic într-o dezvoltare ulterioară a teoriei particulelor elementare. Tuturor acestor probleme le-am consacrat capitolul IV al cărţii noastre. Astfel, în acest capitol cititorul va găsi o expunere sistematică a unei serii de probleme care erau cunoscute numai din articole din reviste, ce tratau aceste probleme fragmentar.

In sfîrşit, capitolul ultim, — V —, al cărţii este consacrat, în mare parte, problemelor în legătură cu dezvoltarea teoriei clasice a cîmpului mezonic. Cu toate că existenţa mezonilor neutri, — cărora li se poate aplica direct tratarea clasică, — nu este încă deplin dovedită, totuşi multe din rezultatele şi metodele mezodinamicii clasice îşi păstrează valabilitatea şi într-o teorie cuantică riguroasă, care tratează atît mezonii neutri cît şi pe cei încărcaţi. Am dat, de asemenea, o atenţie deosebită problemei forţelor nucleare, care reprezintă una din problemele centrale ale întregii fizici moderne a particulelor elementare. Efectul în sine al interacţiunii particulelor prin intermediul cîmpului are o natură clasică; de aceea nu este de mirare că multe din rezultatele teoriei mezonice a forţelor nucleare pot fi obţinute, în esenţă, chiar dintr-o tratare clasică. Problema difuziei mezonilor pe nucleoni (protoni şi neutroni) cu considerarea amortizării, — problemă care este de asemenea examinată în acest capitol, — s-a dovedit a fi importantă nu numai în teoria trecerii razelor cosmice prin materie, ci şi în studiul problemelor generale legate de originea masei proprii. Problemele cîmpului gravitaţional sînt atinse doar in parte, mai ales pentru faptul că cercetările legate de lămurirea rolului gravitaţiei în teoria particulelor elementare, se găsesc încă într-un stadiu de elaborare.

O parte apreciabilă din toate aceste probleme a fost studiată pentru prima oară de către cercetătorii sovietici.

Cu toate că expunerea noastră este consacrată teoriei clasice a cîmpului, noi am dat totuşi, în toate punctele principale, şi indicaţii asupra datelor ulterioare obţinute printr-o generalizare cuantică.

Prin aceasta, cartea noastră poate servi — pe de o parte — ca o completare la cursurile cunoscute de electrodinamică şi teoria cîmpului, şi — pe de altă parte — ea reprezintă o introducere în teoria modernă a particulelor elementare, care în dezvoltarea ei se bazează pe mecanica cuantică.

Facultatea de Fizică a Universităţii de Stat „M. V. Lomonosov" din Moscova
septembrie, 1948

D. IVANENKO
A. SOKOLOV

CAPITOLUL I

TEORIA GENERALĂ A FUNCŢIEI δ

§ 1. Definiţia funcţiei δ

In fizica clasică şi cuantică modernă, alături de densităţi distribuite continuu, de multe ori se examinează şi mase, sarcini, dipoli etc. punctiforme.

Dacă vom căuta să păstrăm şi pentru mărimi punctiforme noţiunea de densitate a masei sau a sarcinilor, — care este foarte comodă atît fizic, cît şi matematic — atunci trebuie să folosim aşa-numita funcţie δ, introdusă de Dirac în 1926. De exemplu, în cazul unei distribuţii liniare a sarcinii e de-a lungul axei x, densitatea este:

$$\rho = \frac{de}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta x} \cdot \tag{1,1}$$

De aici se vede că, în cazul unei sarcini punctiforme, aşezate de exemplu în originea coordonatelor, densitatea ρ va fi nulă peste tot, afară de punctul $x=0$, în care tinde către infinit.

Să introducem funcţia $\delta(x'-x)$ definită pe toată axa şi anume: egală cu zero în toate punctele, afară de punctul singular $x'=x$, în care aceasta devine infinită, însă astfel ca integrala acestei funcţii peste întregul interval să rămînă finită şi egală cu unitatea:

$$\int \delta(x'-x)\, dx' = 1\,^{1)} \tag{1,2}$$

Atunci, funcţia δ va fi legată de densitatea de sarcină ρ a izvorului (sursei)[2]) punctual printr-o relaţie simplă:

$$\rho(x) = e\,\delta(x). \tag{1,3}$$

---

[1]) Aici şi în cele ce urmează, integrala scrisă fără limite se ia în intervalul de la $-\infty$ la $+\infty$.

[2]) In cele ce urmează cuvintele izvor şi sursă sînt întrebuinţate în acelaşi sens (n. r. E. T.).

Ţinînd seamă că funcţia δ este egală cu zero în toate punctele, afară de cel singular, în locul egalităţii (1,2) putem scrie pentru porţiunea $a<b$:

$$\int_a^b \delta(x'-x)\,dx = \begin{cases} 1\,; b>x>a, \\ 0\,; x>b \text{ sau } x<a. \end{cases} \tag{1,4}$$

La fel obţinem pentru o funcţie $f(x)$ continuă în domeniul examinat, relaţia [1])

$$\int_a^b f(x')\,\delta(x'-x)\,dx' = \begin{cases} f(x); b>x>a. \\ \quad 0;\ x>b \text{ sau } x<a. \end{cases} \tag{1,5}$$

Intr-adevăr, aplicînd teorema mediei, avem pentru $b>x>a$:

$$\int_a^b f(x')\,\delta(x'-x)\,dx' = f(x+\alpha\varepsilon)\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x'-x)\,dx', \quad |\alpha| \leqq 1, \quad \varepsilon>0, \tag{1,6}$$

de unde rezultă direct egalitatea (1,5), dacă ţinem seamă de (1,4) şi facem pe ε să tindă către zero.

Funcţia δ, definită în acest mod, iese din cadrul mărimilor care se examinează în analiza clasică. De aceea, integralele indicate nu trebuie interpretate în sensul definiţiei integralei obişnuite.

Se constată totuşi că integralele cu funcţii δ pot fi puse în legătură cu integrala Stieltjes sau pot fi privite ca rezultat al unei treceri la limită a integralei obişnuite.

§ 2. Funcţia δ şi integrala lui Stieltjes

Integrala lui Stieltjes [2]) se defineşte ca limită a următoarei sume:

$$I = \int_a^b f(x)\,d\Phi(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\Delta\Phi\left(a+k\frac{b-a}{n}\right). \tag{2,1}$$

---

[1]) Cazul limită $x=a$ sau $x=b$ cere o examinare suplimentară şi depinde de structura concretă a funcţiei δ. Mai detailat v. § 4, formula (4,15).

[2]) Despre integrala Stieltjes v. В. И. Смирнов, Курс высшей математики. т. IV. Гостехиздат, 1948.

Această expresie se poate interpreta intuitiv ca un moment generalizat de tipul $f(x)$, datorit distribuţiei anumitor mărimi (de exemplu, a maselor, sarcinilor etc.), caracterizate prin funcţia $\Phi(x)$, Pentru $f(x)=x$ avem un moment de ordinul întîi, pentru $f(x)=x^2$, x^3, etc., va fi vorba de momente pătratice sau de momente de ordin superior.

Dacă $\Phi(x)$ are o derivată integrabilă

$$d\Phi(x)=\Phi'(x)\,dx, \tag{2,2}$$

atunci integrala lui Stieltjes se va reduce la o integrală obişnuită

$$I=\int_a^b f(x)\,\Phi'(x)\,dx. \tag{2,3}$$

Totuşi integrala lui Stieltjes are sens şi în cazurile cînd funcţia de distribuţie $\Phi(x)$ nu este continuă, şi în general, poate fi definită în cadrul unor ipoteze foarte generale asupra caracterului discontinuităţilor funcţiei $\Phi(x)$.

De exemplu, să luăm cazul funcţiei discontinue

$$\Phi(x)=\gamma(x)=\begin{cases} +\frac{1}{2}; & x>0, \\ -\frac{1}{2}; & x<0. \end{cases} \tag{2,4}$$

In acest caz, creşterea funcţiei $\gamma(x)$ este peste tot egală cu zero $[\Delta\gamma(x)=0]$, afară de punctul $x=0$, unde această creştere devine egală cu unitatea: $\Delta\gamma(0)=1$.

Inlocuind (2,4) în (2,1), obţinem:

$$\int_a^b f(x)\,d\gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta\gamma(x_k), \tag{2,5}$$

unde $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$ şi, afară de aceasta, presupunem că punctul de discontinuitate $x=0$ cade în interiorul intervalului (a, b), adică $a<0<b$.

Trecînd la limită în expresia (2,5), obţinem:

$$\int_a^b f(x)\,d\gamma(x)=f(0); \quad a<0<b. \tag{2,6}$$

Comparînd (2,6) cu formula (1,5) şi presupunînd în aceasta din urmă, că punctul singular x' cade în originea coordonatelor ($x'=0$), vedem că funcţia δ — ca factor de sub integrală — poate fi definită ca derivată a unei funcţii discontinue:

$$\delta(x)=\frac{\partial\gamma(x)}{\partial x}=\gamma'(x). \tag{2,7}$$

Evident, o astfel de definiţie corespunde întru totul sensului intuitiv al funcţiei δ, care este nulă peste tot afară de punctul de discontinuitate.

In modul acesta, dacă am vrea să respectăm teoria matematică cunoscută şi riguros dezvoltată, atunci am fi putut să nu întroducem deloc funcţia δ şi să ne folosim de integrala lui Stieltjes. Totuşi aceasta ar fi — în cele mai multe cazuri — extrem de incomod şi ar corespunde utilizării sistematice a teoriei limitelor şi a sumelor infinite în locul calculului diferenţial şi integral. Afară de aceasta, formalismul funcţiei δ permite să rămînem în domeniul metodelor mai obişnuite ale analizei clasice, admiţînd generalizări simple la spaţiul cu mai multe dimensiuni şi ne dă o descriere comodă a discontinuităţilor complexe de tip multipolar, întîlnite în fizică.

§ 3. Funcţia δ, caz limită al unei funcţii continue

Intreaga teorie a funcţiei δ se poate construi aplicînd trecerea la limită la funcţii continue cunoscute, anume făcînd să tindă un anumit parametru către o limită determinată.

Să considerăm, de exemplu, funcţia auxiliară $\gamma(x,\alpha)$, care pentru $\alpha>0$ depinde în mod continuu de x şi la limită capătă valorile:

$$\lim_{\alpha\to 0}\gamma(x,\alpha)=\begin{cases}+\frac{1}{2}; & x>0,\\ -\frac{1}{2}; & x<0.\end{cases} \tag{3,1}$$

In particular, această condiţie este satisfăcută de funcţia:

$$\gamma(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha k}\frac{\sin kx}{k}\,dk=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}. \tag{3,2}$$

Derivata lui $\gamma(x, \alpha)$ în raport cu x, pe care o vom nota cu $\delta(x, \alpha)$, este în cazul nostru:

$$\delta(x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha k} \cos kx \, dk = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \cdot \tag{3,3}$$

La limită, cînd α tinde către zero, este uşor de arătat că:

$$\lim_{\alpha \to 0} \delta(x, \alpha) = \begin{cases} 0; & x \neq 0, \\ \infty; & x = 0, \end{cases} \tag{3,4}$$
$$\lim_{\alpha \to 0} \int \delta(x, \alpha) \, dx = 1.$$

Comparînd (3,4) cu definiţia noastră a funcţiei δ, (cf. § 1), putem privi funcţia δ ca valoare limită a funcţiei auxiliare $\delta(x, \alpha)$, pentru $\alpha \to 0$; adică:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \delta(x, \alpha). \tag{3,5}$$

Totuşi, pentru a lucra cu integrale proprii, trecerea la limită $\alpha \to 0$ trebuie efectuată *după*[1]) calculul integralei. Cu alte cuvinte, parametrul infinit mic α trebuie să fie de un ordin inferior creşterii infinit mici Δx, adică integrala cu funcţia δ înseamnă calculul limitei sumei, cînd

$$\Delta x \to 0 \quad \text{şi} \quad \alpha \to 0,$$

dar astfel ca

$$\frac{\Delta x}{\alpha} \to 0.$$

Astfel de integrale intră în clasa celor singulare.

Analog, în acest sens egalitatea (1,5) trebuie tratată ca:

$$\int_a^b f(x') \, \delta(x' - x) \, dx' =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \int_a^b f(x') \, \delta(x' - x, \alpha) \, dx' = f(x); \quad a < x < b. \tag{3,6}$$

Valabilitatea expresiei din urmă este uşor de verificat, dacă înlocuim în (3,6) valoarea concretă pentru $\delta(x, \alpha)$ din egalita-

[1]) Sublinierea noastră (E. T.)

tea (3,3). Atunci vom obține o relație cunoscută din teoria integralei Fourier:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_a^b f(x')\,\delta(x'-x,\alpha)\,dx' =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \int_a^b f(x')\cos k(x'-x)\,dx' = f(x), \qquad (3,7)$$

care coincide cu rezultatul (3,6).

Derivata funcției auxiliare $\delta(x,\alpha)$ se va defini prin relația:

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta(x,\alpha) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty k e^{-\alpha k}\sin kx\,dk = -\frac{2\alpha x}{\pi(\alpha^2+x^2)^2}. \qquad (3,8)$$

Integrala care conține în integrant (expresia de sub integrală) mărimea $\frac{\partial\delta(x)}{\partial x}$, trebuie interpretată drept limită a expresiei:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_a^b f(x')\frac{\partial\delta(x'-x,\alpha)}{\partial x'}\,dx' = \int_a^b f(x')\frac{\partial\delta(x'-x)}{\partial x'}\,dx'. \qquad (3,9)$$

Calculînd ultima integrală prin părți și ținînd seamă că la frontiera domeniului funcția $\delta(x)$ devine nulă, obținem:

$$\int_a^b f(x')\frac{\partial\delta(x'-x)}{\partial x'}\,dx' = -\frac{\partial f(x)}{\partial x}; \quad a<x<b. \qquad (3,10)$$

Intr-un mod asemănător putem generaliza noțiunea de integrală la cazul cînd sub integrală stau derivatele de ordin superior ale funcției δ:

In acest caz:

$$\int_a^b f(x')\,\delta^{(n)}(x'-x)\,dx' = (-1)^n f^{(n)}(x); \quad a<x<b. \qquad (3,11)$$

Reprezentările grafice ale funcțiilor auxiliare:

$$\gamma(x, \alpha), \quad \delta(x, \alpha) \quad \text{și} \quad \frac{\partial \delta(x, \alpha)}{\partial x} = \delta'(x, \alpha)$$

sînt date respectiv în fig. 1, 2 și 3. Ele au o semnificație foarte intuitivă și ajută la clarificarea importanței fizice a mărimilor limită $\gamma(x)$, $\delta(x)$ și $\delta'(x)$.

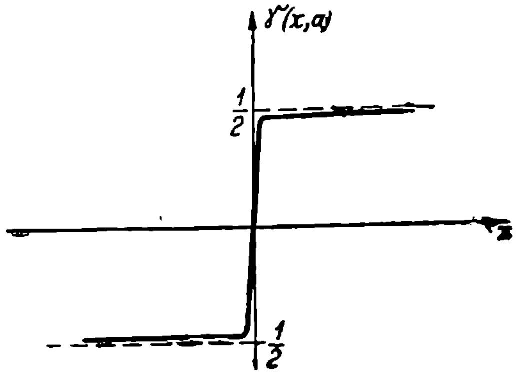

Fig. 1

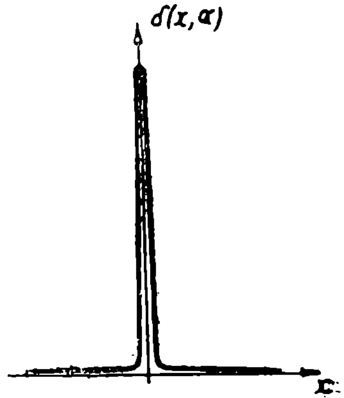

Fig. 2.

Pentru α tinzînd către zero, domeniul trecerii bruște a funcției $\gamma(x, \alpha)$, de la valoarea inferioară la cea superioară, se îngustează, și la limită în punctul $x=0$, avem un salt de la $-1/2$ la $+1/2$ (fig. 1, linia punctată). Dacă în același timp, pentru $\alpha \rightarrow 0$ curba $\delta(x, \alpha)$ se reduce la punctul $x=0$, iar în valoarea absolută tinde către infinit, obținem cazul ce corespunde densității unei sarcini punctuale.

Dacă extremele curbei $\delta'(x, \alpha)$ cresc nelimitat, luînd în două puncte vecine infinit apropiate, valori egale și de semn contrar, obținem cazul care corespunde fizic, de exemplu, unui dipol electric. Intr-adevăr, prin definiția momentului dipolului avem următoarea valoare pentru densitatea acestuia:

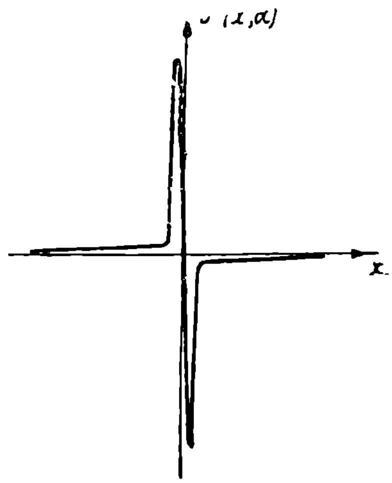

Fig. 3

$$\rho(x) = e\delta(x-l) - e\delta(x) = -p\delta'(x), \tag{3,12}$$

unde p este momentul dipolului și este egal cu produsul dintre sarcina pozitivă e și distanța dintre sarcini l.

In locul expresiilor examinate pentru funcţiile auxiliare $\gamma(x, \alpha)$ şi $\delta(x, \alpha)$, s-ar fi putut alege ca punct de plecare o infinitate de alte funcţii care satisfac relaţiilor la limită (3,1, (3,4) şi (3,10).

In felul acesta, aspectul concret al funcţiei auxiliare este neesenţial şi subînţelegînd de fiecare dată necesitatea efectuării trecerii concrete la limită, putem folosi direct expresiile definitive pentru $\gamma(x)$, $\delta(x)$ şi $\frac{\partial\delta(x)}{\partial x}$ pentru α egal cu zero.

Prin urmare, în locul funcţiilor ajutătoare (3,2), (3,3) şi 3,8) vom scrie

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin kx}{k}\, dk \tag{3,13}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos kx\, dk = \frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}\, dx \tag{3,14}$$

şi

$$\delta'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty k\cdot\sin kx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}\, dx. \tag{3,15}$$

Ca un exemplu de funcţie $\gamma(x, \alpha)$ să alegem expresia :

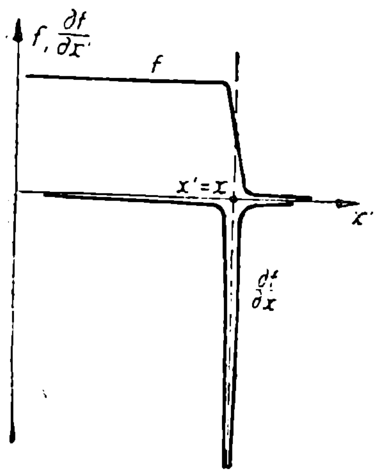

Fig. 4

$$f(x', x, \alpha) = \frac{1}{e^{\frac{x'-x}{\alpha}} + 1} \tag{3,16}$$

care la limita $\alpha \to 0$ dă pentru $f(x' x, \alpha)$ două valori :

$$\lim_{\alpha\to 0} f(x', x, \alpha) = \begin{cases} +1; & x' < x, \\ 0; & x' > x, \end{cases} \tag{3,17}$$

sau

$$f(x', x, 0) = +\frac{1}{2} - \gamma(x' - x).$$

De aceea derivata funcţiei $f(x' x, \alpha)$ în raport cu x' va avea un caracter *„deltaform"* (fig. 4) $\frac{\partial f(x', x, \alpha)}{\partial x'} = -\delta(x', x, \alpha)$.

O funcţie de acest gen caracterizează distribuţia particulelor în statistica lui Fermi-Dirac. Cazul limită $\alpha \to 0$ corespunde legii de distribuţie a particulelor la zero absolut (degenerescenţă totală).

Forma limită cunoscută a integralei lui Poisson

$$f(\varphi)=\lim_{r\to 1}\frac{(1-r^2)}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f(\varphi')\,d\varphi'}{1-2r\cos(\varphi'-\varphi)+r^2} \tag{3,18}$$

se poate exprima de asemenea prin funcţia δ. In acest caz funcţia auxiliară $\delta(\varphi, r)$ va avea forma:

$$\delta(\varphi, r)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}. \tag{3,19}$$

Este uşor de arătat că:

$$\lim_{r\to 1}\delta(\varphi, r)=\begin{cases}0\,; & \varphi\neq 0,\\ \infty\,; & \varphi=0\end{cases} \tag{3,20}$$

şi

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(\varphi, r)\,d\varphi=1.$$

In felul acesta putem pune:

$$\delta(\varphi'-\varphi)=\lim_{r\to 1}\frac{(1-r^2)}{2\pi}\,\frac{1}{1-2r\cos(\varphi'-\varphi)+r^2}. \tag{3,21}$$

§ 4. Funcţia δ şi dezvoltarea în serie şi integrală Fourier

Fie o funcţie $f(x)$ care se poate dezvolta după un sistem complet de funcţii $\varphi_n(x)$, ortogonale şi normate într-un interval dat a, b, $(a<b)$.

In cazul unui spectru discret avem:

$$f(x)=\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n\varphi_n(x). \tag{4,1}$$

Să înmulţim ambii membri ai egalităţii cu $\varphi^*_{n'}(x)$ şi să integrăm peste tot domeniul de variaţie a lui x. Atunci, ţinînd seamă de condiţiile de ortonormare:

$$\int_a^b\varphi^*_{n'}(x)\,\varphi_n(x)\,dx=\delta_{nn'}, \tag{4,2}$$

unde $\delta_{nn'}$, este simbolul lui Kroenecker-Weierstrass:

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1; & n' = n, \\ 0; & n' \neq n, \end{cases} \tag{4,3}$$

vom găsi următoarea valoare pentru coeficienţii dezvoltării [1])

$$a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n^*(x)\, dx. \tag{4,4}$$

De aici, înlocuind (4,4) în (4,1) obţinem:

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_a^b f(x')\, \varphi_n^*(x')\, \varphi_n(x)\, dx'. \tag{4,5}$$

Menţionăm că în egalitatea (4,5) ordinea operaţiilor de integrare şi sumare este esenţială. Intîi trebuie să efectuăm integrarea în raport cu x', şi apoi să luăm suma numărului infinit de termeni.

Totuşi, dacă vrem să expunem rezultatul obţinut cu ajutorul formalismului funcţiei δ, trebuie să introducem întîi o funcţie ajutătoare, egală cu suma unui număr finit de termeni:

$$\delta_N(x'-x) = \sum_{n=n_0}^{N} \varphi_n^*(x')\, \varphi_n(x), \tag{4,6}$$

şi să scriem (4,5) sub forma de limită:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=n_0}^{N} \int_a^b f(x')\, \varphi_n^*(x')\, \varphi_n(x)\, dx'. \tag{4,7}$$

Schimbînd acum ordinea de integrare şi sumare, vom obţine:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f(x')\, \delta_N(x'-x)\, dx'. \tag{4,8}$$

[1]) In calculul coeficienţilor Fourier a_n vom schimba ordinea de integrare şi sumare a numărului infinit de termeni. Posibilitatea acestei operaţii, dacă este nevoie, poate fi privită drept *condiţie* de dezvoltare a funcţiei $f(x)$ în serie Fourier.

Expresia (4,8) o vom scrie sub forma:

$$f(x)=\int_a^b f(x')\,\delta(x'-x)\,dx', \tag{4,9}$$

unde:

$$\delta(x'-x)=\lim_{N\to\infty}\delta_N(x'-x). \tag{4,10}$$

Caracterul impropriu al integralei (4,9) constă în aceea că trecerea la limită (4,10) trebuie efectuată după calculul integralei.

In felul acesta, după cum reiese din (4,9) funcţia δ reprezintă nucleul unui operator Ω, care transformă pentru orice funcţie, argumentul lui x' în x:

$$f(x)=\Omega f(x'). \tag{4,11}$$

Noua definiţie a funcţiei δ (4,10), ca limită a expresiei (4,6) este mai generală decît cea dată în paragraful precedent, deoarece ea se aplică şi funcţiilor $f(x)$ care au discontinuităţi de speţa întîia, şi de asemenea este valabilă în cazul cînd pentru valorile extreme $x'=a$ sau $x'=b$, funcţia $f(x)$ admite în punctele extreme o descompunere în funcţii ortonormate $\varphi_n(x)$.

Să examinăm acum o serie de exemple concrete de reprezentare a funcţiei δ prin diverse sisteme de funcţii ortonormate, întîlnite cel mai des în fizica matematică.

a) Drept prim exemplu să luăm sistemul funcţiilor trigonometrice scrise sub forma exponenţială:

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{i\frac{\pi}{l}nx}, \tag{4,12}$$

definite în intervalul de periodicitate $-l\leqq x\leqq l$, şi unde $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Atunci, conform (4,6):

$$\delta_N(x'-x)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2l}e^{-i\frac{\pi}{l}(x'-x)n}, \tag{4,13}$$

de unde:

$$\delta(x'-x)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{\pi}{l}(x'-x)n}, \tag{4,14}$$

Luînd în considerare discontinuitățile posibile ale funcției $f(x)$, avem conform cunoscutei teoreme a lui Fourier

$$\int_{-l}^{l} f(x')\,\delta(x'-x)\,dx' =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{cases} f(x+0)+f(x-0); & -l<x<l, \\ f(-l)+f(+l); & x=-l,\ x=l. \end{cases} \tag{4,15}$$

Pentru a face trecerea la spectrul continuu, adică la reprezentarea lui $f(x)$ printr-o integrală Fourier, trebuie să punem în primul rînd:

$$\frac{\pi n}{l}=k, \quad \frac{\pi}{l}\,\Delta n=\frac{\pi}{l}=\Delta k, \quad K=\frac{\pi N}{l}. \tag{4,16}$$

Apoi, trecînd la limită: $l\to\infty$, $N\to\infty$, K fiind o mărime finită, obținem:

$$\delta(x)=\lim_{K\to\infty}\delta(x,K), \tag{4,17}$$

unde funcția auxiliară:

$$\delta(x,K)=\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K} e^{-ikx}\,dk=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin Kx}{x}. \tag{4,18}$$

Egalitatea (4,15) se transformă, în acest caz, în expresia cunoscutei integrale discontinue a lui Dirichlet:

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\pi}\int f(x')\,\frac{\sin K(x'-x)}{x'-x}\,dx' =$$
$$=\frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)]. \tag{4,19}$$

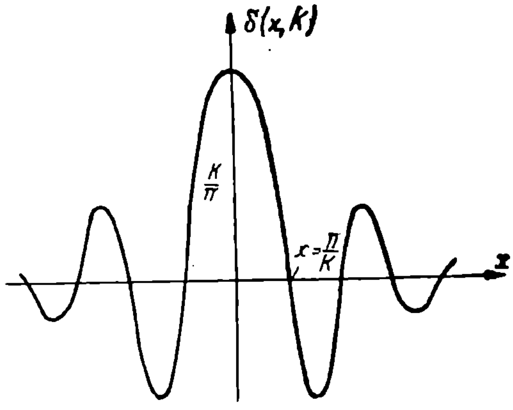

Fig. 5

Graficul funcției auxiliare (4,18), reprezentat în fig. 5, ilustrează încă o dată, intuitiv, caracterul impropriu al funcției δ. Intr-adevăr, prin trecerea lui K la infinit, maximul principal din punctul $x=0$ crește nelimitat; maximele laterale care scad, devin neglijabile la limită.

Conform celor de mai sus vom scrie:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int dk\,e^{ikx}, \tag{4,20}$$

unde se subînţelege că din punctul de vedere al integralei lui Riemann, trecerea la limită ($K \to \infty$) trebuie efectuată după calculul integralei, al cărei integrant are ca factor pe $\delta(x'-x)$.

Condiţia de ortonormare pentru un spectru continuu, adică pentru funcţii

$$\varphi(k, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+ikx}, \qquad (4,21)$$

$$\varphi^*(k', x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik'x},$$

va avea forma:

$$\int \varphi^*(k', x)\varphi(k, x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i(k'-k)x} dx = \delta(k'-k). \qquad (4,22)$$

In felul acesta funcţia δ, este în particular, o generalizare a simbolului lui Kroenecker-Weierstrass (4,3) pentru un spectru continuu.

Formula (4,6) care leagă $\delta(x-x')$ de un sistem de funcţii ortonormate se poate păstra şi în cazul unui spectru continuu.

Pentru aceasta, în locul funcţiilor (4,21) trebuie să introducem:

$$\tilde{\varphi}(k', x) = \sqrt{\frac{dk}{2\pi}}\, e^{ikx}, \quad \tilde{\varphi}^*(k, x') = \sqrt{\frac{dk}{2\pi}}\, e^{-ikx'},$$

după care condiţia de ortonormare capătă forma:

$$\int \tilde{\varphi}^*(k', x)\, \tilde{\varphi}(k, x)\, dx = \frac{dk}{2\pi}\int e^{ix(k-k')} dx = dk\, \delta(k-k').$$

In acest caz

$$\delta(x-x') = \sum_k \tilde{\varphi}^*(k, x')\, \tilde{\varphi}(k, x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')}. \qquad (4,23)$$

Dacă renunţăm la metoda funcţiei δ, atunci pentru normarea funcţiilor proprii într-un spectru continuu sîntem nevoiţi să folosim metoda mult mai complicată a lui Weyl. Această metodă are ca bază aşa-numita „diferenţială proprie“ a lui $\varphi(k, x)$ definită în modul următor:

$$\Delta f(k, x) = \int_{k-\frac{\Delta k}{2}}^{k+\frac{\Delta k}{2}} \varphi(k, x)\, dk,$$

unde integrala funcţiei examinate $\varphi(k, x)$ este extinsă asupra unui interval mic Δk de valori proprii.

Condiţia de normare a lui Weyl se scrie [1]):

$$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{1}{\Delta k} \int |\Delta f|^2 dx = 1. \tag{4,24}$$

De exemplu, pentru cazul (4,21) avem:

$$\Delta f^* (k, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ikx} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta k x}{2}}{x},$$

$$\Delta f (k, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{+ikx} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta k x}{2}}{x},$$

de unde

$$\frac{1}{\Delta k} \int |\Delta f|^2 dx = \frac{2}{\pi \Delta k} \int \frac{\sin^2 \frac{\Delta k x}{2}}{x^2} dx = 1,$$

ceea ce arată că metoda de normare mai simplă cu ajutorul funcţiei δ (4,22) este complet echivalentă cu metoda lui Weyl. Metoda lui Weyl se reduce, evident, la o netezire a funcţiei improprii δ.

Menţionăm că egalitatea (4,20) înseamnă reprezentarea funcţiei δ printr-o integrală Fourier, în care toţi coeficienţii Fourier devin constanţi şi egali cu $\frac{1}{2\pi}$.

Toate relaţiile obţinute pot fi stabilite de asemenea pentru orice alte sisteme de funcţii ortonormate.

b) La dezvoltarea după funcţiile lui Bessel $J_m(x)$, în intervalul $0 \leq r \leq R$ în cazul unui spectru discret, funcţiile ortonormate vor fi [2])

$$\varphi_n(r) = \frac{\sqrt{2r}}{R} \frac{J_m\left(s_n \frac{r}{R}\right)}{J'_m(s_n)}; \quad J'_m(x) = \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}, \tag{4,25}$$

unde $m > -1$, iar s_n sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$J_m(s_n) = 0.$$

Prin urmare, funcţia δ va avea în cazul de faţă forma:

$$\delta(r' - r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{rr'}}{R^2} \frac{J_m\left(s_n \frac{r'}{R}\right) J_m\left(s_n \frac{r}{R}\right)}{J'^2_m(s_n)}. \tag{4,26}$$

---

[1]) В. А. Фок, Начала квантовой механики, Кубуч, 1932, pag. 24-25, 36.

[2]) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, pag. 104.

Pentru a trece la un spectru continuu trebuie să punem: $s_n \to \infty$, $R \to \infty$, $\frac{s_n}{R} = k =$ finit. Pentru a determina rădăcinile s_n, vom lua expresia asimptotică pentru funcţiile J_m,

$$J_m = \sqrt{\frac{2}{\pi s_n}} \cos\left(s_n - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

de unde rezultă $s_n - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, unde n este un număr întreg, pe noi interesîndu-ne doar valorile mari ale lui n.

Din ultimele relaţii, găsim:

$$J_m'^2 = \frac{2}{\pi s_n} = \frac{2}{\pi R k}, \quad \Delta s_n = \pi \Delta n = \pi = R \Delta k.$$

De aceea, trecînd în (4,26) de la sumare la integrare, obţinem:

$$\delta(r' - r) = \sqrt{rr'} \int_0^\infty k J_m(kr) J_m(kr')\, dk; \quad 0 \leq r, r' < \infty. \qquad (4,27)$$

Această expresie pentru $r > 0$ este echivalentă cu egalitatea:

$$\int_0^\infty k\, dk \int_0^\infty r' f(r') J_m(kr) J_m(kr')\, dr' = \int_0^\infty \sqrt{\frac{r'}{r}} f(r') \delta(r' - r)\, dr' = f(r),$$

cunoscută sub denumirea de integrală a lui Fourier-Bessel, care se aplică funcţiilor f, ce satisfac condiţiile Dirichlet şi pentru care: $\int_0^\infty \sqrt{r} f(r)\, dr \neq \infty$.

Observăm că pentru cazul limită $r = 0$ (v. § 1), egalitatea (4,27) îşi păstrează valabilitatea dacă $m = 0$, adică:

$$\delta(r') = r' \int_0^\infty k J_0(kr')\, dk. \qquad (4,28)$$

Intr-adevăr, cu ajutorul egalităţii:

$$\delta(r', \alpha) = r' \int_0^\infty e^{-\alpha k} k J_0(kr')\, dk = \frac{r' \alpha}{(\alpha^2 + r'^2)^{3/2}}$$

se poate arăta uşor că:

$$\lim_{\alpha\to 0} \delta(r', \alpha)=0\,; \quad r'\neq 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\alpha\to 0} \int_0^{\infty} \delta(r', \alpha)\, dr' = 1,$$

sau:

$$\int_0^{\infty} \delta(r') f(r')\, dr' = f(0).$$

c) La dezvoltarea unei funcții arbitrare după polinoamele Legendre $P_n(x)$ în intervalul $-1 \leq x \leq 1$, funcțiile ortonormate vor fi:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x). \tag{4,29}$$

De aceea, în acest caz, funcția δ va căpăta forma:

$$\delta(x'-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x') P_n(x). \tag{4,30}$$

d) In sfîrşit, la dezvoltarea după funcțiile Hermite, cînd funcțiile proprii au forma:

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \tag{4,31}$$

unde $H_n(x)$ sînt polinoamele lui Hermite-Cebîşev, funcția δ poate fi prezentată sub forma:

$$\delta(x'-x) = \lim_{N\to\infty} \delta(x'-x, N),$$

unde funcția auxiliară este:

$$\delta(x'-x, N) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!} e^{-\frac{x^2+x'^2}{2}} H_n(x') H_n(x). \tag{4,32}$$

Ultima sumă poate fi calculată aproximativ [1])

$$\delta(x'-x, N) = \frac{\sin\sqrt{2(N+1)}\,(x'-x)}{\pi(x'-x)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right). \tag{4,33}$$

---

[1]) В. А. Фок, О несобственных функциях в квантовой механике, ЖРФХО (partea de fizică), 61,1, 1929, В. А. Кравцов, О математических обоснованиях новой квантовой механики, ЖРФХО (partea de fizică), 61,9, 1929.

Pentru valori suficient de mari ale lui N, funcțiile auxiliare (4,33) și (4,18) vor diferi între ele cu un termen care se anulează în cazul limită ($N \to \infty$).

§ 5. Funcția δ într-un spațiu cu n dimensiuni

Teoria funcției δ, dezvoltată mai sus pentru cazul unei singure variabile, se generalizează fără dificultate la cazul a n dimensiuni.

Drept bază pentru definiția funcției δ n-dimensionale, vom lua egalitățile:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx'_1 \int_{a_2}^{b_2} dx'_2 \ldots \delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \ldots) = 1 \quad (5,1)$$

$$\text{pentru } a_1 < x_1 < b_1, \text{ etc.,} \quad (5,3)$$

$$\delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2 \ldots) = 0 \quad \text{pentru } x_1 \neq x'_1 \text{ etc.} \quad (5,2)$$

Analog cazului unidimensional putem scrie pe baza ultimelor egalități:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx'_1 \int_{a_2}^{b_2} dx'_2 \ldots \delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2 \ldots) f(x'_1, x'_2, \ldots) = f(x_1, x_2, \ldots)$$

$$\text{pentru } a_1 < x_1 < b_1 \text{ etc.} \quad (5,3)$$

Ca exemplu de funcție δ bidimensională putem da integrala

$$\delta(\theta' - \theta, \varphi' - \varphi) = \lim_{r \to 1} \frac{1 - r^2}{4\pi} \times$$

$$\times \frac{\sin \theta'}{1 - 2r[\cos\theta' \cdot \cos\theta + \sin\theta' \cdot \sin\theta \cdot \cos(\varphi' - \varphi)] + r^2} \quad (5,4)$$

$$0 \leq \varphi', \quad \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \theta', \quad \theta \leq \pi.$$

Este ușor de verificat că expresia din urmă satisface ecuațiile (5,1) și (5,2).

Din (5,4) obținem relația

$$\lim_{r \to 1} \frac{1 - r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta' f(\theta', \varphi')\, d\theta'}{1 - 2r[\cos\theta' \cdot \cos\theta + \sin\theta' \cdot \sin\theta \cdot \cos(\varphi' - \varphi)] + r^2} =$$

$$= f(\theta, \varphi), \quad (5,5)$$

cunoscută din teoria rezolvării ecuației tridimensionale a lui Laplace.

In special generalizarea pentru cazul n-dimensional este uşoară dacă punem la baza definiţiei funcţiei δ integrala multiplă Fourier.

Datorită proprietăţilor simple de aditivitate a funcţiilor exponenţiale se poate pune:

$$\delta(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int dk_1 \int dk_2 \ldots e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots)} = \delta(x_1)\,\delta(x_2) \ldots \quad (5,6)$$

In particular, pentru cazul tridimensional[1])

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}}\,(d\vec{k}), \quad (5,7)$$

unde

$$(d\vec{k}) = dk_1\,dk_2\,dk_3 \quad \text{şi} \quad \vec{k}\vec{r} = k_1 x + k_2 y + k_3 z. \quad (5,8)$$

§ 6. Formulele mai importante care se obţin cu ajutorul funcţiei δ

Vom da rezumatul formulelor fundamentale care se obţin cu funcţia δ, întîlnite cel mai des în aplicaţii.

După cum este uşor de verificat

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (6,1)$$

adică funcţia δ este o funcţie pară.

Pentru derivata funcţiei δ avem:

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \quad (6,2)$$

adică derivata funcţiei δ este o funcţie impară, accentul însemnînd derivata în raport cu argumentul de care depinde funcţia. Mai departe avem o serie de formule importante:

$$f(x')\,\delta(x'-x) = f(x)\,\delta(x'-x), \quad (6,3)$$

$$x\delta(x) = 0, \quad (6,4)$$

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{|\varphi'(x)|} = \sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{|\varphi'(x_s)|}\,. \quad (6,5)$$

---

[1]) In egalitatea (5,7) avem o integrală triplă, extinsă peste tot spaţiul numerelor de undă $\vec{k}$ $(-\infty < k < \infty$ etc.). Pentru simplicitate vom scrie pentru o integrală multiplă numai un singur semn de integrare, subînţelegînd că peste tot numărul integralelor trebuie să fie egal cu numărul diferenţialelor.

Aici x_s sînt rădăcinile simple ale ecuației $\varphi(x)=0$, care sînt cuprinse în intervalul examinat.

$$\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|}, \tag{6,6}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|x|}. \tag{6,7}$$

In particular pentru $a\to 0$ găsim:

$$|x|\,\delta(x^2)=\delta(x), \tag{6,8}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,\delta(x_1-x_2)\,dx_2=\begin{cases}\int_{a_n}^{b_n} f(x,x)\,dx; & b_n>a_n,\\ 0; & b_n<a_n.\end{cases} \tag{6,9}$$

Aici a_n este cea mai mare din valorile a_1 și a_2, iar b_n cea mai mică din valorile b_1 și b_2 ($a_1<b_1$; $a_2<b_2$). Pentru funcții care au o discontinuitate finită în punctul x_0:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x); & x<x_0,\\ f_2(x); & x>x_0;\end{cases} \tag{6,10}$$

$$f_2(x_0)-f_1(x_0)=h,$$

$$f'(x)=h\delta(x-x_0)+\begin{cases} f_1'(x); & x<x_0,\\ f_2'(x); & x>x_0.\end{cases} \tag{6,11}$$

In particular:

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}-i\pi\delta(x). \tag{6,12}$$

Relațiile (6,1), (6,3) și (6,4) pot fi ușor verificate cu ajutorul ecuației (1,5). Astfel, de exemplu, expresia (6,1) este echivalentă cu egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,\delta(-x)\,dx=\int_b^a f(-x)\,\delta(x)\,dx,$$

unde $b>0>a$, de aceea $-a>0>-b$. Valabilitatea relației din urmă este asigurată, deoarece membrul din dreapta și din stînga sînt egali cu $f(0)$, iar funcția $f(x)$ nu trebuie să aibă în intervalul (a, b) discontinuități infinite.

In acelaşi mod, cu ajutorul egalităţii (3,10) verificăm relaţia (6,2).

Pentru deducerea formulei (6,5) vom împărţi întregul interval de integrare în intervale separate: $x_s-\varepsilon_s$, $x_s+\varepsilon_s$ $(\varepsilon_s>0)$, astfel încît, în fiecare din acestea să existe numai o singură rădăcină [în cazul rădăcinilor multiple, egalitatea (6,5) îşi pierde sensul].

Apoi făcînd schimbarea de variabilă

$$\varphi(x)=u,$$

găsim pentru fiecare interval:

$$F_s=\int\limits_{x_s-\varepsilon_s}^{x_s+\varepsilon_s} f(x)\,\delta(\varphi(x))\,dx=\int\limits_{-u_s'\varepsilon_s+\frac{\varepsilon_s^2}{2}u_s''}^{u_s'\varepsilon_s+\frac{\varepsilon_s^2}{2}u_s''} f(x)\frac{\delta(u)}{u'}\,du.$$

Aici am considerat $u_s=\varphi(x_s)=0$ şi $u_s'=\varphi'(x_s)\neq 0$ (presupunînd că nu există rădăcini multiple).

Mărimea ε_s poate fi aleasă totdeauna astfel ca semnele limitei superioare şi inferioare ale ultimei integrale să fie determinate de termenii liniari în raport cu ε_s.

Atunci pentru $u_s'>0$:

$$F_s=\frac{f(x_s)}{u_s'}=\frac{f(x_s)}{|u_s'|}.$$

Pentru $u_s'<0$ trebuie să schimbăm între ele limitele de integrare, pentru ca limita inferioară să fie mai mică decît cea superioară.

In acest caz:

$$F_s=-\int\limits_{u_s'\varepsilon_s}^{-u_s'\varepsilon_s} f(x)\frac{\delta(u)}{u'}\,du=-\frac{f(x_s)}{u_s'}=\frac{f(x_s)}{|u_s'|}.$$

Extinzînd integrarea peste întregul interval, obţinem egalitatea:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\delta[\varphi(x)]\,dx=\sum_s F_s=\sum_s\frac{f(x_s)}{|\varphi'(x_s)|},$$

scrisă simbolic sub forma (6,5).

Punînd în (6,5) $\varphi(x)=ax$ şi $\varphi(x)=x^2-a^2$, găsim formulele (6,6) şi (6,7) deduse de Dirac.

Punctul singular ($x=0$) al funcţiei δ, care intră în egalitatea (6,8) este un punct limită al integralei, deoarece:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\delta(x^2)\,dx = 2\int_0^{\infty} x\delta(x^2)\,dx.$$

Valoarea exactă a integralei depinde de structura funcţiei δ. Considerînd $\delta(x^2)$ ca limită a expresiei:

$$\delta(x^2)=\delta(x^2-\varepsilon)\,;\quad \varepsilon\to 0$$

şi ţinînd seamă că, conform (3,3) pentru $\alpha>0$:

$$\delta(x-\varepsilon)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\pi\left[\alpha^2+(x^2-\varepsilon)^2\right]}\,,$$

găsim

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|x|\,\delta(x^2-\varepsilon)=\begin{cases}\delta(x)\,; & \varepsilon>\alpha,\\ 0\,; & \varepsilon<-\alpha,\\ \frac{1}{2}\,\delta(x)\,; & \varepsilon=0.\end{cases}$$

De aceea egalitatea (6,8) are loc cînd $\varepsilon>0$. Pentru deducerea formulei (6,11) vom prezenta funcţia $f(x)$ sub forma:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}+\gamma(x-x_0)\right)f_2(x)+\left(\frac{1}{2}-\gamma(x-x_0)\right)f_1(x).$$

Luînd în considerare la derivarea ultimei relaţii, egalităţile (2,7) şi (6,10), vom putea demonstra uşor valabilitatea formulei (6,11).

In sfîrşit, relaţia (6,12) poate fi privită drept un caz particular al egalităţii precedente.

Intr-adevăr, avem:

$$\ln x=\begin{cases}\ln|x|\,; & x>0,\\ \ln|x|+i\pi\,; & x<0,\end{cases}$$

sau

$$\ln x=\ln|x|+i\pi\left(\frac{1}{2}-\gamma(x)\right),$$

de unde, derivînd în raport cu x, căpătăm relaţia (6,12).

§ 7. Funcția lui Green

Una din cele mai importante aplicații ale teoriei funcției δ este construirea funcției lui Green a ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți[1]).

Fie dată ecuația neomogenă:

$$L\varphi(x_1, x_2, \ldots,) = -\rho(x_1, x_2, \ldots,), \tag{7,1}$$

în care prin argumentele $x_1, x_2, \ldots$ putem, în cazul general, subînțelege atît coordonatele spațiale $r(x, y, z)$, cît și coordonata temporală t.

Aici operatorul liniar L are forma

$$L \equiv a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots, \tag{7,2}$$

iar ρ este densitatea sursei.

Soluția ecuației (7,1) se poate scrie simbolic sub forma:

$$\varphi = -L^{-1}\rho. \tag{7,3}$$

Reprezentînd membrul drept al ecuației (7,1) cu ajutorul funcției δ sub forma:

$$\rho(x_1, x_2 \ldots) = \int \rho(x_1', x_2' \ldots)\, \delta(x_1' - x_1, x_2' - x_2, \ldots)\, dx_1'\, dx_2' \ldots \tag{7,4}$$

și ținînd seamă că operatorul L operează numai asupra coordonatelor fără accent $x_1, x_2, \ldots$, avem în locul ecuației (7,3):

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots) = -\int \rho(x_1', x_2', \ldots) L^{-1} \delta(x_1' - x_1, x_2' - x_2, \ldots)\, dx_1'\, dx_2' \ldots \tag{7,5}$$

Prin aceasta, soluția ecuației (7,1) va căpăta forma:

$$\varphi(x) = \int \rho(x')\, G(x', x)\, (dx'). \tag{7,6}$$

Vectorul în spațiu n-dimensional are componentele $x_1, x_2, \ldots$, $(dx') = dx_1'\, dx_2' \ldots$ iar G este prin definiție funcția lui Green a ecuației date.

---

[1]) În general, putem folosi această metodă, chiar dacă coeficienții care formează operatorul L sînt variabili; este esențial că putem să reprezentăm funcția δ printr-o suprapunere de funcții ortonormate, pentru care valorile proprii λ ale operatorului L se pot determina ușor (v. §§ 17, 18) $Lu_n = -\lambda^2 u_n$.

Prin urmare, funcţia lui Green poate fi legată de funcţia δ cu ajutorul următoarei egalităţi simbolice[1]:

$$G(x', x) = -L^{-1}\delta(x'-x). \tag{7,7}$$

Inmulţind cu operatorul L, obţinem:

$$LG = -\delta(x'-x). \tag{7,8}$$

In mod riguros, împărţirea cu un operator este o operaţie neunivocă şi de aceea la membrul al doilea al egalităţii (7,7) putem adăuga acea parte nesingulară a funcţiei lui Green G_0, care este soluţia ecuaţiei omogene $LG_0=0$. Funcţia G_0 se alege prin condiţiile auxiliare (la limită, iniţiale etc.).

Integrînd (7,7) găsim că nucleul operatorului integral, care corespunde inversei operatorului, este funcţia Green

$$L^{-1} = -\int G(x', x) \ldots (dx'). \tag{7,9}$$

Reprezentînd funcţia δ sub forma unei integrale Fourier:

$$\delta(x'-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ik_\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)}\, dk_1\, dk_2 \ldots \tag{7,10}$$

$$(k_\alpha x_\alpha = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots)$$

şi observînd că acţiunea operatorului L^{-1} asupra unei funcţii exponenţiale este:

$$L^{-1}e^{+ik_\alpha x_\alpha} = \frac{e^{ik_\alpha x_\alpha}}{a_0 + ik_1 a_1 + ik_2 a_2 + \ldots + (ik_1)^2 a_{11} + \ldots}, \tag{7,11}$$

găsim pentru funcţia lui Green expresia:

$$G = G_1 + G_0,$$

unde

$$G_1 = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{e^{ik_\alpha x_\alpha}\, dk_1 dk_2}{a_0 + ik_1 a_1 + ik_2 a_2 + \ldots + (ik_1)^2 a_{11} + \ldots}. \tag{7,12}$$

---

[1]) Д. Иваненко и А. Соколов. Обобщённое волновое уравнение и классическая мезодинамика, ДАН, 36, 37, 1940; vezi de asemenea, A. Соколов, Дельта-функция и её применение к решению некоторых математических задач геофизики, Свердловск, 1946.

Această reprezentare pentru G_1 corespunde cunoscutei teoreme a lui Mercer[1]), conform căreia, de exemplu în cazul unui spectru discret:

$$G_1 = \sum_n \frac{\varphi_n^*(x')\,\varphi_n(x)}{\lambda_n},$$

unde λ_n sînt valorile proprii ale operatorului L.

Din egalitățile (7,7) și (7,8) rezultă următoarele proprietăți ale funcției G:

a) Partea singulară G_1, la fel ca și funcția δ, este simetrică în raport cu argumentele x' și x.

b) G_1 este soluția ecuației omogene în toate punctele afară de punctul $x_1'=x_1$ etc. In acest punct singularitățile lui x se determină prin funcția δ.

Sensul fizic al ecuației (7,1) constă în aceea că sursa ρ naște cîmpul dat. Funcția lui Green ne dă pentru punctul x și la momentul t, acea parte a cîmpului care este creată de o sursă de intensitate egală cu unitatea și care se află la momentul t' în punctul x'. Cîmpul total φ se obține ca rezultat al integrării peste întreaga distribuție a sursei și peste întregul interval de timp, în cursul căruia acționează aceasta.

O definiție apropiată a funcției lui Green se dă în așa-numitul calcul operațional, unde în locul dezvoltării în integrală Fourier se folosește dezvoltarea lui Laplace-Meslin[2]),

[1]) Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики т. I, pag. 124, Гостехиздат, 1951.

[2]) Bazele calculului operațional sînt expuse, de exemplu, în cartea lui А. И. Лурье „Операционное исчисление", Гостехиздат, 1950. Tot acolo este indicată literatura de bază asupra calculului operațional.

CAPITOLUL II

ECUAŢIILE STATICE DE TIP ELIPTIC

§ 8. Ecuaţia unidimensională a lui Laplace

In acest capitol vom examina soluţiile ecuaţiilor diferenţiale, care nu depind de timp. Printre acestea se numără în primul rînd, ecuaţia lui Laplace-Poisson:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho, \tag{8,1}$$

care, după cum se ştie, joacă un rol important în cele mai diferite domenii ale fizicii teoretice şi matematice: electrodinamică, hidrodinamică, teoria gravitaţiei etc.

Să găsim funcţiile lui Green pentru ecuaţiile Laplace-Poisson pentru cazul uni-bi- şi tridimensional.

In cazul unidimensional ecuaţia Laplace-Poisson are forma:

$$L\varphi = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -4\pi\rho(x). \tag{8,2}$$

Conform regulii generale (v. § 7), funcţia lui Green a operatorului L se determină din ecuaţia:

$$LG = -\delta(x-x') = -\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x-x')}, \tag{8,3}$$

de unde, conform regulii de împărţire printr-un operator (7,12), avem:

$$G = -L^{-1}\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int dk\, \frac{e^{ik(x-x')}-1}{k^2} + C_1 x + C_2. \tag{8,4}$$

Aici binomul C_1x+C_2 este soluţia ecuaţiei omogene:

$$L\varphi = 0. \tag{8,5}$$

Afară de aceasta am adăugat la partea singulară (pentru a o face finită) un termen constant infinit de forma:

$$J = -\frac{1}{2\pi}\int dk\, \frac{1}{k^2}. \tag{8,6}$$

Integrînd prin părţi în (8,4), avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int dk\frac{e^{ik(x-x')}-1}{k^2}=-\frac{|x-x'|}{2}, \tag{8,7}$$

de unde găsim, în definitiv, funcţia lui Green a ecuaţiei Laplace-Poisson pentru cazul unidimensional:

$$G=-\frac{1}{2}|x-x'|+C_1x+C_2. \tag{8,8}$$

Coeficienţii necunoscuţi C_1 şi C_2 trebuie determinaţi din condiţii suplimentare.

Cu ajutorul lui (8,8) găsim soluţia căutată a ecuaţiei (8,2):

$$\varphi=4\pi\int dx'\rho(x')G(x-x'). \tag{8,9}$$

In particular, dacă avem o sarcină electrică e, aşezată în originea coordonatelor, adică:

$$\rho(x')=e\delta(x'), \tag{8,10}$$

atunci pentru φ obţinem:

$$\varphi=-2\pi e|x|+4\pi ex\,C_1+4\pi e\,C_2. \tag{8,11}$$

La determinarea potenţialului, termenul constant $4\pi eC_2$ poate fi înlăturat, deoarece originea sistemului de referinţă nu este esenţială. Afară de aceasta, datorită simetriei potenţialului în raport cu semnul lui x, coeficientul C_1 trebuie luat în cazul de faţă, egal cu zero.

De aceea soluţia definitivă are forma:

$$\varphi=-2\pi e|x|. \tag{8,12}$$

Din punctul de vedere al cazului tridimensional aceasta soluţie corespunde potenţialului unui plan încărcat uniform cu electricitate cu densitate superficială:

$$\sigma=e. \tag{8,13}$$

In cazul cînd condiţiile la limită sînt:

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0, \tag{8,14}$$

sau

$$G(0-x')=G(1-x')=0, \tag{8,15}$$

găsim:

$$C_2=\frac{1}{2}|x'|,\quad C_1=\frac{1}{2}|1-x'|-\frac{1}{2}|x'|. \tag{8,16}$$

De aceea, expresia funcţiei lui Green va căpăta forma:

$$G(x,\,x')=-\frac{1}{2}(|x-x'|-x|1-x'|+x|x'|-|x'|),$$

sau pentru $0 \leqq x,\ x' \leqq 1$

$$G(x,\ x') = -\frac{1}{2}(|x-x'|-x-x'+2xx') = \begin{cases} +x'(1-x);\ x>x', \\ +x(1-x');\ x<x'. \end{cases} \tag{8,17}$$

Inlocuind (8,17) în (8,9), avem pentru $0<x<1$:

$$\varphi = 4\pi \int_0^x x'(1-x)\rho(x')\,dx' + 4\pi \int_x^1 x(1-x')\rho(x')\,dx'. \tag{8,18}$$

Această problemă s-ar fi putut rezolva de asemenea cu o altă alegere a funcţiilor proprii care formează funcţia δ.

Este comod să luăm funcţiile ortonormate:

$$\varphi_n = \sqrt{2}\sin \pi n x, \tag{8,19}$$

unde n este un număr întreg pozitiv.

Atunci:

$$\delta(x'-x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x' \cdot \sin \pi n x. \tag{8,20}$$

De aici, repetînd calculele precedente, găsim:

$$G(x', x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x' \cdot \sin \pi n x}{\pi^2 n^2} + G_0, \tag{8,21}$$

Dacă introducem şi condiţiile la limită (8,15), atunci soluţia nesingulară G_0 trebuie pusă egală cu zero şi:

$$G(x', x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n(x'-x) - \cos \pi n(x'+x)}{\pi^2 n^2}, \tag{8,22}$$

adică, în cazul dat, pentru a forma funcţiile δ, am reuşit să alegem astfel de funcţii ortonormate φ_n, care să satisfacă condiţiilor la limită date (8,15) şi de aceea am putut înlătura soluţia nesingulară.

Folosindu-ne de cunoscuta valoare a sumei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n y}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{6} + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}|y|, \tag{8,23}$$

găsim pentru G, o expresie care coincide cu (8,17).

Acest exemplu arată deosebit de clar, că alegerea diferită a sistemului de funcţii ortogonale, utilizat pentru construirea funcţiei δ, duce la aceeaşi expresie a funcției lui Green. Cu alte cuvinte, după cum s-a specificat de atîtea ori în cap. I, alegerea concretă a formei funcției δ este neesențială.

§ 9. Ecuația lui Laplace-Poisson în plan

Conform definiției generale, vom găsi funcția lui Green pentru ecuația bidimensională a lui Laplace-Poisson din ecuația:

$$LG=-\delta(x'-x)\,\delta(y'-y)=$$
$$=-\frac{1}{4\pi^2}\int e^{ik_1(x-x')+ik_2(y-y')}\,dk_1\,dk_2, \tag{9,1}$$

unde

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot \tag{9,2}$$

De aici, efectuînd calculele indicate în § 7, avem pentru partea singulară a funcției lui Green:

$$G=\frac{1}{4\pi^2}\int\frac{e^{ik_1(x-x')+ik_2(y-y')}-e^{ik_1+ik_2}}{k_1^2+k_2^2}\,dk_1\,dk_2. \tag{9,3}$$

La fel ca şi în cazul precedent, pentru a asigura lui G o valoare finită, am adăugat un termen constant infinit:

$$G_0=-\frac{1}{4\pi^2}\int\frac{e^{ik_1+ik_2}}{k_1^2+k_2^2}\,dk_1\,dk_2. \tag{9,4}$$

Trecînd la coordonate polare avem: $k^2=k_1^2+k_2^2$; $dk_1dk_2=k\,dk\,d\varphi$;

$$k_1(x-x')+k_2(y-y')=k\rho\cos\varphi,$$

unde:

$$\rho=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

Integrînd în raport cu variabila φ cu ajutorul egalității:

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\rho\cos\varphi}\,d\varphi=2\pi J_0(k\rho), \tag{9,5}$$

unde J_0 este funcția lui Bessel, obținem:

$$G(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{J_0(k\rho)-J_0(k)}{k}\,dk.$$

De aici se vede că:

$$G(1)=0. \qquad 9,6)$$

Derivînd funcţia $G(\rho)$ în raport cu ρ şi luînd în consideraţie că:

$$\frac{\partial J_0(k\rho)}{\partial\rho}=\frac{\partial J_0(\xi)}{\partial\xi}k, \text{ unde } \xi=k\rho, \text{ găsim}$$

$$\frac{dG(\rho)}{d\rho}=\frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{\infty}d\xi\,\frac{dJ_0(\xi)}{d\xi}=-\frac{1}{2\pi\rho}.$$

Ţinînd seamă de (9,6), avem:

$$G=-\frac{1}{2\pi}\ln\rho=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}, \qquad (9,7)$$

adică potenţialul logaritmic satisface ecuaţia:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln\sqrt{x^2+y^2}=2\pi\delta(x)\delta(y). \qquad (9,8)$$

De aici este uşor de văzut, că în cazul unei sarcini punctiforme e, — cînd membrul al doilea al ecuaţiei are forma $4\pi\rho=4\pi e\delta(x)\delta(y)$, — potenţialul φ se va determina prin egalitatea:

$$\varphi=-2e\ln\sqrt{y^2+y^2}.$$

Din punct de vedere al cazului tridimensional, acest potenţial corespunde potenţialului unei linii drepte, încărcate uniform cu electricitate de o densitate liniară $\varkappa=e$.

Funcţia bidimensională a lui Green permite să găsim corelaţia dintre funcţia δ şi operatorul lui Cauchy din teoria funcţiilor de variabilă complexă.

Pentru aceasta să considerăm integrala curbilinie

$$I=\oint\frac{w(x,y)}{z}dz \qquad (9,9)$$

extinsă pe un contor oarecare închis l. Aici $z=x+iy$, $w=u+iv$.

Funcţiile reale u şi v nu trebuie să posede singularităţi pe contur sau în interiorul acestuia.

Expresia (9,9) se poate considera ca sumă a două integrale de contur, din care una este reală, iar cealaltă imaginară.

Să aplicăm integralei (9,9) formula cunoscută de transformare a integralei de linie în integrală de suprafaţă:

$$\oint (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad (9,10)$$

unde integrarea se face pe suprafaţa S, limitată de conturul l.
Punînd:

$$P = \frac{w}{z}, \quad Q = i\frac{w}{z}, \qquad (9,11)$$

găsim:

$$I = i\int \left[w\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) w \right] dx\,dy. \qquad (9,12)$$

Deoarece:

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (9,13)$$

atunci:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln\sqrt{x^2 + y^2} = 2\pi\delta(x)\,\delta(y). \qquad (9,14)$$

Am utilizat aici formula (9.8).

Substituind ultima expresie în (9,12), obtinem:

$$\oint \frac{w}{z}\,dz = 2\pi i \int w\delta(x, \delta(y)\,dx\,dy + i\int \frac{1}{z}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) w\,dx\,dy. \qquad (9,15)$$

In sfîrşit, dacă w satisface ecuaţia lui Cauchy-Riemann

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) w = 0, \qquad (9,16)$$

sau

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (9,17)$$

atunci obţinem cunoscuta formulă a lui Cauchy din teoria funcţiilor de variabilă complexă:

$$\oint \frac{w(x, y)}{z}\,dz = 2\pi i w(0, 0). \qquad (9,18)$$

In felul acesta este valabilă următoarea relaţie operaţională:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\cdots}{z}\,dz = \int \ldots \delta(x)\,\delta(y)\,dx\,dy, \qquad (9,19)$$

unde în locul punctelor putem pune orice funcţie analitică.

§ 10. Ecuaţia tridimensională a lui Laplace-Poisson

Conform definiţiei generale, vom găsi funcţia lui Green pentru ecuaţia tridimensională Laplace-Poisson din formula:

$$LG=\nabla^2 G=-\delta(\vec{r}-\vec{r}')=-\frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}(d\vec{k}). \tag{10,1}$$

unde

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad (d\vec{k})=dk_1\,dk_2\,dk_3, \tag{10,2}$$

$$\vec{k}\vec{r}=k_1x+k_2y+k_3z.$$

De aici:

$$G=\frac{1}{8\pi^3}\int\frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k}(d\vec{k}). \tag{10,3}$$

In cazul condiţiilor la limită „naturale“, — cînd $G=0$ pentru $r\to\infty$, — trebuie să punem partea nesingulară $G_0=0$.

Integrarea expresiei (10,3) este uşor de efectuat introducînd coordonatele sferice (k, θ, φ) în spaţiul numerelor de undă $\vec{k}$:

$$k=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2},$$

$$(d\vec{k})=k^2dk\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{10,4}$$

Alegînd axa k_3 în direcţia vectorului $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$, obţinem:

$$G=\frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty dk\int_0^\pi\sin\theta\,e^{ikR\cos\theta}\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi. \tag{10,5}$$

Integrînd (10,5) în raport cu unghiurile θ şi φ şi ţinînd seamă de egalitatea:

$$\int_0^\pi\sin\theta\,e^{ikR\cos\theta}\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=4\pi\frac{\sin kR}{kR}, \tag{10,6}$$

obţinem:

$$G=\frac{1}{2\pi^2R}\int_0^\infty\frac{\sin kR}{k}dk=\frac{1}{4\pi R}. \tag{10,7}$$

Soluția ecuației Laplace-Poisson pentru cazul tridimensional:

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{10,8}$$

are deci forma

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(d\vec{r}'). \tag{10,9}$$

Diferitele cazuri de distribuție a sarcinilor, avînd particularități de un tip oarecare (sarcină punctiformă, sarcină superficială, etc.), care fără funcția δ au necesitat cercetări suplimentare cu ajutorul trecerilor la limită complicate, pot să fie descrise foarte simplu cu ajutorul formalismului funcției δ.

Fie întreaga sarcină așezată în punctul $\vec{l}$. Atunci densitatea ei va fi:

$$\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r}-\vec{l}). \tag{10,10}$$

Intr-adevăr:

$$\int \rho(\vec{r})(d\vec{r}) = e\int \delta(\vec{r}-\vec{l})(d\vec{r}) = e,$$

iar $\rho(\vec{r})$ devine nulă peste tot, afară de punctul $\vec{r}=\vec{l}$.

Dacă $\vec{r}$, adică distanța de la originea coordonatelor pînă la punctul de observație, este mult mai mare decît $\vec{l}\left(\frac{l}{r}\ll 1\right)$, atunci expresia (10,10) poate fi dezvoltată în serie:

$$e\delta(\vec{r}-\vec{l}) = e\delta(\vec{r}) - e(\vec{l}\cdot\nabla)\delta(\vec{r}) + \\ + \frac{e}{2}(\vec{l}\cdot\nabla)^2\delta(\vec{r}) + \ldots + \frac{e}{s!}(-1)^s(\vec{l}\cdot\nabla)^s\delta(\vec{r}) + \ldots$$

Densitatea:

$$\rho_0 = e\delta(\vec{r})$$

este densitatea sarcinii punctiforme; expresia

$$\rho_1 = -e\sum_{n=1,2,3} l_n\nabla_n\delta(\vec{r})$$

ne dă densitatea dipolară; termenul

$$\rho_2 = \frac{e}{2}\sum_{n,k} l_n l_k \nabla_n\nabla_k\delta(\vec{r})$$

este densitatea cvadrupolară. Termenii următori ai dezvoltării ne dau densităţile multipolilor punctiformi de ordin superior.

Potenţialele densităţii multipolilor „punctiformi" de ordin superior (sarcina punctiformă, dipol etc.) pot fi găsite fie cu ajutorul formulei (10,9), fie pe cale directă. Reprezentînd funcţia δ tridimensională prin integrala Fourier [v. (10,1)]:

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{r}}(d\vec{k}),$$

avem pentru potenţialul sarcinii:

$$\varphi_0 = -\frac{4\pi e\delta(\vec{r})}{\nabla^2} = \frac{e}{2\pi^2}\int \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2}(d\vec{k}) = \frac{e}{r}, \qquad (10,11)$$

pentru potenţialul dipolar:

$$\varphi_1 = \frac{4\pi e\sum l_n\nabla_n\delta(\vec{r})}{\nabla^2} = -\left(\vec{p}\,\mathrm{grad}\frac{1}{r}\right), \qquad (10,12)$$

unde $\vec{p} = e\cdot\vec{l}$ este momentul dipolar; în sfîrşit, pentru potenţialul cvadrupolului vom găsi:

$$\varphi = \frac{1}{3!}\sum_{n,n'} e(3l_nl_{n'} - l^2\delta_{nn'})\nabla_n\nabla_{n'}\frac{1}{r}, \qquad (10,13)$$

unde mărimile:

$$p_{nn'} = e(3l_nl_{n'} - l^2\delta_{nn'})$$

sînt componentele momentului cvadrupolului, formînd un tensor simetric de ordinul doi. El are 5 componente independente, deoarece între cele 6 componente ale tensorului simetric $p_{nn'} = p_{n'n}$ există identitatea:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 0. \qquad (10,14)$$

Menţionăm că am adăugat la potenţialul (10,13) termenul:

$$\varphi' = -\frac{el^2}{6}\sum_{n,n'}\delta_{nn'}\nabla_n\nabla_{n'}\frac{1}{r} = -\frac{el^2}{6}\nabla^2\frac{1}{r}, \qquad (10,15)$$

egal cu zero pentru $r \neq 0$. Datorită acestui fapt am reuşit să scriem sub forma cea mai simplă relaţia (10,14) dintre componentele momentului cvadrupolar.

Pentru o sarcină distribuită pe o suprafaţă dată de ecuaţia:

$$f(\vec{r})=0 \tag{10,16}$$

cu o densitate superficială $\sigma(\vec{r})$, în acest caz densitatea de volum va fi dată de expresia:

$$\rho=\sigma(\vec{r})\,\delta(f)\,|\operatorname{grad} f|. \tag{10,17}$$

Intr-adevăr, $\rho(\vec{r})$ va fi egală cu zero peste tot, afară de punctele situate pe suprafaţa determinată de ecuaţia (10,16). Sarcina totală va fi:

$$e=\int\rho(\vec{r})\,(d\vec{r})=\int\sigma(\vec{r})\,\delta(f)\,|\operatorname{grad} f|\,(d\vec{r}). \tag{10,18}$$

Pentru a demonstra relaţia (10.17), vom pune elementul de volum $(d\vec{r})$ egal cu produsul $dS\,dn$, unde dS este un element al suprafeţei $f=\text{const}$, iar dn — elementul de linie pe normala la această suprafaţă. Atunci:

$$\int\sigma(\vec{r})\left|\frac{\partial f}{\partial n}\right|\delta(f)\,dS\,dn=e. \tag{10,19}$$

Calculînd mai departe această integrală cu formula (6,5) obţinem:

$$e=\int\sigma\,dS. \tag{10,20}$$

In ultima expresie, integrarea trebuie efectuată pe suprafaţa $f=0$.

In felul acesta, ajungem la legătura obişnuită dintre mărimea sarcinii e şi densitatea superficială σ.

In particular, dacă suprafaţa încărcată este planul (x, y), atunci:

$$\rho=\sigma(x, y)\,\delta(z). \tag{10,21}$$

In cazul unei suprafeţe cilindrice încărcate, de rază a:

$$\rho=\sigma(z, \varphi)\,\delta(r-a). \tag{10,22}$$

Aici r, z, φ sînt coordonate cilindrice.

In sfîrşit, dacă suprafaţa încărcată este o sferă de rază a, atunci:

$$\rho=\sigma(\theta, \varphi)\,\delta(r-a), \tag{10,23}$$

unde θ şi φ sînt unghiurile sferice.

§ 11. Problemele cele mai simple ale electrostaticii

Să aplicăm acum soluţiile obţinute ale ecuaţiei Laplace-Poisson la diferite exemple concrete.

a) *Planul încărcat*

Să examinăm soluţia ecuaţiei Laplace-Poisson pentru cazul simetriei axiale, cînd sarcinile care crează cîmpul sînt distribuite pe planul $z=0$.

In acest caz, conform (10,21) desitatea de volum a sarcinilor ρ va fi legată de densitatea superficială σ cu ajutorul relaţiei:

$$\rho=\sigma(r)\delta(z), \tag{11,1}$$

unde $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Atunci ecuaţia lui Poisson va căpăta forma:

$$\nabla^2\varphi=-4\pi\sigma(r)\delta(z), \tag{11,2}$$

sau

$$\nabla^2\varphi=-4\pi\int\limits_0^\infty \sigma(r')\,\delta(r'-r)\,\delta(z)\,dr'. \tag{11,3}$$

Să substituim în (11,3) valoarea lui $\delta(z)$ din (4,20):

$$\delta(z)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\varkappa z}d\varkappa, \tag{11,4}$$

şi să folosim pentru problema cu simetrie axială, reprezentarea foa·te indicată în cazul de faţă a lui $\delta(r'-r)$ prin funcţiile Bessel [v. relaţia (4.27)]:

$$\delta(r'-r)=\sqrt{rr'}\int\limits_0^\infty kJ_0(kr')\,J_0(kr)\,dk=r'\int\limits_0^\infty kJ_0(kr')\,J_0(kr)\,dk. \tag{11,5}$$

In acest caz, din relaţia (6,3) avem:

$$\delta(r'-r)=\sqrt{\frac{r'}{r}}\,\delta(r'-r),$$

de unde:

$$\nabla^2\varphi=-2\int d\varkappa\int\limits_0^\infty k\,dk\int\limits_0^\infty r'\sigma(r')e^{i\varkappa z}J_0(kr')\,J_0(kr)\,dr'. \tag{11,6}$$

Aici J_0 este funcţia Bessel de ordin zero. Impărţirea cu operatorul ∇^2 dă:

$$\frac{e^{i\varkappa z}J_0(kr)}{\nabla^2}=-\frac{e^{i\varkappa z}J_0(kr)}{k^2+\varkappa^2}, \qquad (11,7)$$

ceea ce este uşor de verificat prin derivare directă, observînd că:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)J_0(kr)=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)J_0(kr)=-k^2J_0(kr) \qquad (11,8)$$

De aici găsim pentru potenţialul φ expresia:

$$\varphi=2\int_0^\infty r'\sigma(r')\,dr'\int_0^\infty k\,dk\,J_0(kr')\,J_0(kr)\int d\varkappa\frac{e^{i\varkappa z}}{k^2+\varkappa^2}. \qquad (11,9)$$

Integrala în raport cu $\varkappa$ poate fi calculată mai comod aplicînd metoda reziduurilor.

In cazul dat, integrala cu limitele de la $-\infty$ la $+\infty$, completată cu integrala de-a lungul unui cerc de rază infinită (fig. 6), — care la limita $\varkappa=i\infty$ adaugă un termen suplimentar care se anulează, — este de $2\pi i$ ori reziduul situat în semiplanul superior în punctul $\varkappa=ik$:

$$\int\frac{e^{i\varkappa z}}{k^2+\varkappa^2}d\varkappa=\int\frac{e^{i\varkappa|z|}}{k^2+\varkappa^2}d\varkappa=2\pi i\,\mathrm{Res}\frac{e^{i\varkappa|z|}}{k^2+\varkappa^2}=\pi\frac{e^{-k|z|}}{k}, \qquad (11,10)$$

drumul de integrare[1]), în planul complex din fig. 6, fiind reprezentat printr-o curbă închisă. Atunci (11,9) se transformă în:

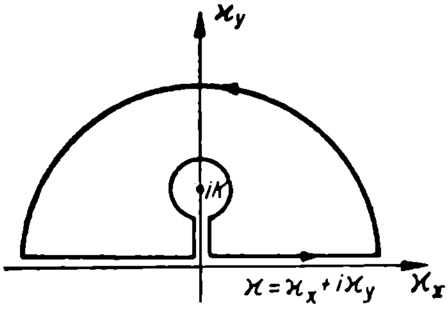

Fig. 6

$$\varphi=\int_0^\infty J_0(kr)\,e^{-|z|\,k}f(k)\,dk, \qquad (11,11)$$

unde

$$f(k)=2\pi\int_0^\infty r'\sigma(r')\,J_0(kr')\,dr'. \qquad (11,12)$$

In cazul particular cînd densitatea superficială este constantă $\sigma=\text{const}$, avem:

$$f(k)=\frac{2\pi\sigma\delta(k)}{k}. \qquad (11,13)$$

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1949, pag. 226.

Substituind (11,13) în (11,11) şi efectuînd integrarea în raport cu k, avem:

$$\varphi=2\pi\sigma \lim_{k\to 0}\frac{e^{-k|z|}}{k}=2\pi\sigma\left(\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}-|z|\right), \qquad (11,14)$$

unde termenul infinit constant $\frac{1}{k}$ poate fi îndepărtat.

In cazul unei surse punctiforme e, situată în originea coordonatelor avem:

$$\rho=e\,\delta(x)\,\delta(y)=\frac{e\delta(r)}{2\pi r}, \qquad (11,15)$$

deoarece în conformitate cu (4,28) avem:

$$\int \delta(x)\,\delta(y)\,dx\,dy=2\pi\int_0^\infty r\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,dr=1.$$

De aici rezultă:

$$f(k)=e \qquad (11,16)$$

şi

$$\varphi=e\int_0^\infty J_0(kr)\,e^{-|z|k}\,dk. \qquad (11,17)$$

Calculînd integrala (11,17) cu ajutorul formulei lui Lipschitz[1]) obţinem expresia cunoscută a potenţialului unei surse punctuale:

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{r^2+z^2}}\,. \qquad (11,18)$$

b) *Cilindrul încărcat*

Să căutăm potenţialul generat de sarcinile distribuite pe suprafaţa unui cilindru circular drept de rază a. Orientînd axa z pe axa geometrică a cilindrului şi presupunînd că densitatea superficială σ depinde numai de z, avem:

$$\rho=\sigma(z)\,\frac{\delta(r-a)}{2\pi a}\,. \qquad (11,19)$$

Luînd în considerare (v. de asemenea exemplul precedent), că:

$$\sigma(z)=\int\delta(z'-z)\,\sigma(z')\,dz'=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int d\varkappa\int\sigma(z')\,e^{i\varkappa(z-z')}\,dz', \qquad (11,20)$$
$$\delta(r-a)=a\int_0^\infty kJ_0(ka)\,J_0(kr)\,dk,$$

[1]) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, pag. 143.

avem:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int d\varkappa \int \sigma(z')\, e^{i\varkappa(z-z')}\, dz' \int_0^\infty k J_0(ka)\, J_0(kr)\, dk,$$

de unde

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int d\varkappa \int e^{i\varkappa(z-z')}\sigma(z')\, dz'\, \frac{1}{2}\int_0^\infty k\, \frac{J_0(ka)\, J_0(kr)}{\varkappa^2+k^2}\, dk. \qquad (11,21)$$

La integrarea în raport cu variabila k vom presupune că $r>a$, deoarece în virtutea simetriei integralei în raport cu mărimile r şi a, pentru a obţine cazul opus $r<a$, este suficient să schimbăm numai mărimile r şi a între ele în rezultatul final. Integrala care intră în ultima relaţie, o vom transforma în felul următor:

$$\int_0^\infty k\, \frac{J_0(ka)\, J_0(kr)}{\varkappa^2+k^2}\, dk = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} k\, \frac{H_0^{(1)}(kr)\, J_0(ka)}{\varkappa^2+k^2}\, dk.$$

Ultima relaţie poate fi verificată uşor dacă ţinem seama de expresia funcţiei lui Hanckel de speţa întîi:

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iN_0(x), \qquad (11,22)$$

$$H_0^{(1)}(-x) = H_0^{(1)}(x) - 2J_0(x). \qquad (11,23)$$

Închizînd apoi drumul de integrare de la $-\infty$ la $+\infty$ pe un cerc în planul complex, de rază infinită şi ţinînd seama că pentru $k=i\infty$ contribuţia integralei pe cerc se anulează (c. f. şi cu fig. 6), şi de asemenea că numitorul funcţiei de integratare în semiplanul superior un singur rezidiuu în punctul $i\varkappa$, obţinem:

$$F = \int_0^\infty k\, \frac{J_0(ka)\, J_0(kr)}{\varkappa^2+k^2}\, dk =$$

$$= \begin{cases} K_0(|\varkappa|\, r)\, I_0(|\varkappa|\, a); & r>a \text{ (în exteriorul cilindrului)} \\ K_0(|\varkappa|\, a)\, I_0(|\varkappa|\, r): & r<a \text{ (în interiorul cilindrului),} \end{cases} \qquad (11,24)$$

unde funcţiile cilindrice de argument imaginar sînt determinate de egalităţile:

$$I_0(x)=J_0(ix);\quad K_0(x)=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(ix). \qquad (11,25)$$

Atunci, pentru potenţialul căutat φ găsim:

$$\varphi=\frac{1}{\pi}\int e^{i\varkappa z}f(\varkappa)F\,d\varkappa, \qquad (11,26)$$

unde:

$$f(\varkappa)=\int e^{-i\varkappa z'}\sigma(z')\,dz'.$$

In cazul particular al densităţii superficiale constante ($\sigma=\text{const}$) avem

$$f(\varkappa)=2\pi\sigma\delta(\varkappa), \qquad (11,27)$$

şi prin urmare:

$$\varphi=\lim_{\varkappa\to 0}2\sigma\begin{cases}K_0(\varkappa r);\ r>a,\\ K_0(\varkappa a);\ r<a,\end{cases}$$

sau:

$$\varphi=2\sigma\cdot\lim_{\varkappa\to 0}\left(\ln\frac{2}{\varkappa}-C\right)-2\sigma\begin{cases}\ln r;\ r>a,\\ \ln a:\ r<a,\end{cases} \qquad (11,28)$$

unde $C=0{,}577\ldots$ este constanta lui Euler; în afară de aceasta, la fel ca şi în cazul precedent, termenul infinit constant $2\sigma\left(\ln\frac{2}{\varkappa}-C\right)$ poate fi lăsat la o parte.

Cînd raza a a cilindrului tinde către zero, obţinem potenţialul unei linii încărcate:

$$\varphi=\frac{1}{\pi}\int e^{i\varkappa z}f(\varkappa)K_0(|\varkappa|r)\,d\varkappa, \qquad (11,29)$$

In sfîrşit, considerînd o sarcină punctiformă drept un caz limită al unei linii încărcate, cînd:

$$\sigma(z')=e\,\delta(z'), \qquad (11,30)$$

găsim pentru potenţialul φ expresia cunoscută:

$$\varphi=\frac{2e}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\varkappa z\cdot K_0(\varkappa r)\,d\varkappa=\frac{e}{\sqrt{r^2+z^2}}. \qquad (11,31)$$

Ultima integrală se calculează cel mai simplu cu ajutorul relaţiei[1]) cunoscută din teoria funcţiilor cilindrice:

$$\int_0^\infty J_m(bt)\frac{K_n(a\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{n/2}}\,t^{m+}\,dt=$$

$$=\frac{b^m}{a^n}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x}\right)^{n-m-1}K_{n-m-1}(x\sqrt{a^2+b^2}) \qquad (11{,}32)$$

$(a>0,\ b>0,\ m>-1)$, în care trebuie să punem $m=-\frac{1}{2}$, $n=0$, $x=0$.

§ 12. Problemele la limită ale electrostaticii

Fie date sarcini electrice, distribuite cu o densitate ρ în două medii avînd constante dielectrice ε_1 şi ε_2 între care există o suprafaţă oarecare de separaţie. Se cere să se determine valoarea potenţialelor în ambele medii. In cele ce urmează, toate mărimile care se raportă la primul şi al doilea mediu vor fi indicate corespunzător prin indicii 1 şi 2.

Pe suprafaţa de separaţie trebuie să aibă loc condiţiile la limită obişnuite:

$$\varphi_1=\varphi_2,$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \qquad (12{,}1)$$

unde n este componenta normală la suprafaţa de separaţie.

Metoda de rezolvare va consta în introducerea artificială a unor anumite sarcini fictive; anume, pentru a găsi potenţialul φ, introducem în afară de densitatea de sarcină ρ_1, din primul mediu, o densitate fictivă a sarcinilor ρ_1^* în mediul al doilea. Analog, pentru a determina φ_2, introducem densitatea fictivă ρ_2^*.

Atunci, obţinem pentru potenţiale expresiile:

$$\varphi_1=\frac{1}{\varepsilon_1}\int\frac{\rho_1(\vec{r}')+\rho_1^*(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(d\vec{r}'),$$

$$\varphi_2=\frac{1}{\varepsilon_2}\int\frac{\rho_2(\vec{r}')+\rho_2^*(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(d\vec{r}'). \qquad (12{,}2)$$

---

[1]) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, pag. 151.

Densităţile fictive ρ_1^* şi ρ_2^*, deocamdată nedeterminate, trebuie găsite din condiţiile la limită (12,1).

Să examinăm cîteva cazuri concrete:

a) Dacă suprafaţa de separaţie este planul $z=0$, atunci pentru cazul unei singure sarcini punctiforme, situate în primul mediu în punctul $(x=y=0,\ z=z_0>0)$ — (fig. 7), avem:

$$\rho_1(\vec{r})=e\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z_0), \qquad (12,3)$$
$$\rho_2(\vec{r})=0.$$

Valorile densităţilor fictive le vom căuta la fel ca şi în metoda clasică a imaginilor, sub forma:

$$\left.\begin{aligned}\rho_1^*(\vec{r})&=e_1\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z+z_0),\\ \rho_2^*(\vec{r})&=e_2\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z_0).\end{aligned}\right\} \qquad (12,4)$$

In fig. 7, *a* este reprezentată aşezarea reală a sarcinii şi a mediilor dielectrice. In fig. 7, *b* şi 7, *c*, avem o reprezentare a sarcinilor şi a mediilor dielectrice pentru aflarea potenţialului în mediul superior $(z>0)$ şi cel inferior $(z<0)$.

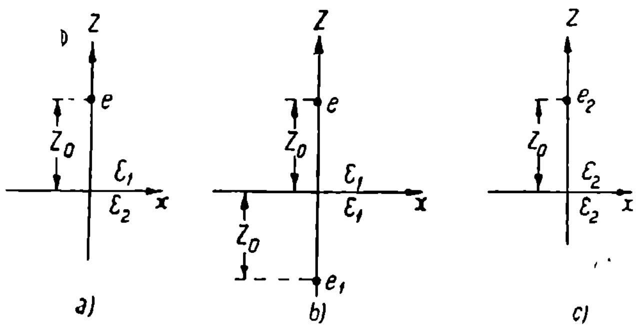

Fig. 7

De aici obţinem:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\frac{e}{\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}+\frac{e_1}{\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}},\\ \varphi_2&=\frac{e_2}{\varepsilon_2\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (12,5)$$

Substituind (12,5) în (12,1) găsim pentru determinarea sarcinilor fictive necunoscute e_1 și e_2 următoarele ecuații:

$$e+e_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}e_2, \qquad (12,6)$$

$$e-e_1=e_2,$$

de unde:

$$e_1=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}e, \quad e_2=\frac{2e\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot \qquad (12,7)$$

Substituind (12,7) în (12,5), găsim expresiile căutate ale potențialelor

$$\varphi_1=\frac{e}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}}\right),$$

$$\varphi_2=\frac{2e}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}\cdot \qquad (12,8)$$

b) Să presupunem că limita de separație a celor două medii este un cilindru circular infinit de rază a. Vom nota cu ε_1 constanta dielectrică a părții interioare a cilindrului ($r<a$) și cu ε_2 cea a spațiului exterior ($r>a$). Să găsim potențialele, produse de prezența unei sarcini punctiforme, situată pe axa cilindrului în originea coordonatelor (fig. 8).

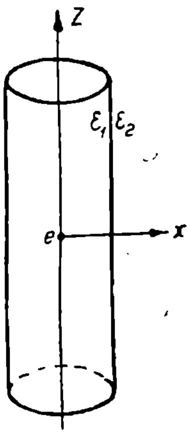

Fig. 8

Conform metodei de mai sus, situăm sarcinile auxiliare fictive pe suprafața cilindrului.

Atunci, conform formulelor (11,26) și (11,31) avem: pentru partea interioară a cilindrului $r<a$

$$\varphi_1=\frac{e}{\varepsilon_1\pi}\int e^{i\varkappa z}[K_0(|\varkappa|r)+$$
$$+f_1(\varkappa)K_0(|\varkappa|a)I_0(|\varkappa|r)]\,d\varkappa, \qquad (12,9)$$

și pentru partea exterioară a cilindrului:

$$\varphi_2=\frac{e}{\varepsilon_2\pi}\int e^{i\varkappa z}f_2(\varkappa)K_0(|\varkappa|r)\,I_0(|\varkappa|a)\,d\varkappa. \qquad (12,10)$$

După cum se vede din (11,26), am introdus mărimile auxiliare $f_1(\varkappa)$ și $f_2(\varkappa)$ în locul densităților superficiale fictive.

Folosind condiţiile la limită pentru găsirea lui f_1 şi f_2 obţinem ecuaţiile

$$\frac{1}{\varepsilon_1}[K_0(|\varkappa|a)+f_1 K_0(|\varkappa|a) I_0(|\varkappa|a)]= \\ =\frac{f_2}{\varepsilon_2} K_0(|\varkappa|a) I_0(|\varkappa|a), \tag{12,11}$$

$$K_1(|\varkappa|a)-f_1 K_0(|\varkappa|a) I_1(|x|a)= \\ =f_2 K_1(|\varkappa|a) I_0(|\varkappa|a|). \tag{12,12}$$

Determinînd de aici mărimile f_1 şi f_2, găsim expresiile căutate ale potenţialelor:

$$\varphi_1=\frac{2e}{\varepsilon_1\pi}\int_0^\infty \cos\varkappa z\left(K_0(\varkappa r)+\frac{(\alpha-1)K_0(\varkappa a)K_1(\varkappa a)I_0(\varkappa r)}{\alpha K_0(\varkappa a)I_1(\varkappa a)+I_0(\varkappa a)K_1(\varkappa a)]}\right.d\varkappa, \tag{12,13}$$

$$\varphi_2=\frac{2e}{\varepsilon_2\pi}\int_0^\infty \cos\varkappa z\frac{K_0(\varkappa r)}{\varkappa a[\alpha K_0(\varkappa a)I_1(\varkappa a)+I_0(\varkappa a)K_1(\varkappa a)]}d\varkappa. \tag{12,14}$$

In aceste calcule am ţinut seamă de următoarele relaţii:

$$\alpha=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2},\quad K_1(x)=-\frac{d}{dx}K_0(x),\quad I_1(x)=\frac{d}{dx}I_0(x), \\ I_1(x)K_0(x)+K_1(x)I_0(x)=\frac{1}{x}. \tag{12,15}$$

c) Cu ajutorul funcţiei δ se pot descrie de asemenea salturile potenţialului şi ale gradientului său, cînd există suprafeţe încărcate.

Să presupunem că în planul $z=0$ sînt situate sarcini superficiale cu o densitate $\sigma(x, y)$, precum şi un strat electric dublu de intensitate $\sigma^*(x, y)$.

Atunci valorile potenţialului φ pot fi găsite din următoarea ecuaţie;

$$\nabla^2\varphi=-4\pi\rho-4\pi\sigma\delta(z)-4\pi\sigma^*\delta'(z). \tag{12,16}$$

Densitatea sarcinii şi potenţialul părţii superioare a semiplanului le notăm prin ρ_1 şi φ_1, iar densitatea şi potenţialul părţii inferioare prin ρ_2 şi φ_2 adică punem:

$$\nabla^2\varphi_1=-4\pi\rho_1;\quad \nabla^2\varphi_2=-4\pi\rho_2. \tag{12,17}$$

Cu ajutorul funcţiei discontinue (2,4) putem scrie:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1\left(\frac{1}{2}+\gamma(z)\right)+\rho_2\left(\frac{1}{2}-\gamma(z)\right), \\ \varphi &= \varphi_1\left(\frac{1}{2}+\gamma(z)\right)+\varphi_2\left(\frac{1}{2}-\gamma(z)\right). \end{aligned} \tag{12,18}$$

Substituind ultimele egalităţi în (12,16) şi ţinînd seama că:

$$\begin{aligned} \gamma'(z) &= \delta(z), \\ \gamma''(z) &= \delta'(z), \\ f(z)\,\delta(z) &= f(0)\,\delta(z), \end{aligned} \tag{12,19}$$

găsim;

$$\delta(z)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0}+\delta'(z)\,(\varphi_1-\varphi_2)_{z=0}=-4\pi\sigma\delta(z)-4\pi\sigma^\star\delta'(z), \tag{12,20}$$

de unde obţinem automat condiţiile la limită căutate;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0} &= -4\pi\sigma, \\ (\varphi_1-\varphi_2)_{z=0} &= -4\pi\sigma^\star. \end{aligned} \tag{12,21}$$

In sfîrşit, avem ecuaţiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D} &= 4\pi\rho=4\pi\sigma\delta(z), \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= 0, \end{aligned} \tag{12,22}$$

unde σ este denistatea superficială a sarcinilor, iar cîmpurile în partea superioară (cu indicii 1) şi inferioară (cu indicii 2) a semispaţiului sînt determinate prin relaţiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D}_1 &= 4\pi\rho_1, \\ \operatorname{div}\vec{D}_2 &= 4\pi\rho_2. \end{aligned} \tag{12,23}$$

Atunci punînd:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{D}_1\left(\frac{1}{2}+\gamma(z)\right)+\vec{D}_2\left(\frac{1}{2}-\gamma(z)\right), \\ \vec{E} &= \vec{E}_1\left(\frac{1}{2}+\gamma(z)\right)+\vec{E}_2\left(\frac{1}{2}-\gamma(z)\right), \\ \rho &= \rho_1\left(\frac{1}{2}+\gamma(z)\right)+\rho_2\left(\frac{1}{2}-\gamma(z)\right), \end{aligned} \tag{12,24}$$

obţinem:

$$\operatorname{div}\vec{D}=\operatorname{div}\vec{D}_1\cdot\left(\frac{1}{2}+\gamma(z)\right)+$$

$$+\operatorname{div}\vec{D}_2\cdot\left(\frac{1}{2}-\gamma(z)\right)+\delta(z)[\vec{n}\cdot(\vec{D}_1-\vec{D}_2)],$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=\operatorname{rot}\vec{E}_1\cdot\left(\frac{1}{2}+\gamma(z)\right)+$$

$$+\operatorname{rot}\vec{E}_2\cdot\left(\frac{1}{2}-\gamma(z)\right)+\delta(z)[\vec{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)],$$

unde $\vec{n}$ este vectorul unitate, îndreptat după axa z; comparînd (12,24) cu (12,22), căpătăm condiţiile la suprafaţa de separaţie:

$$[\vec{n}(\vec{D}_1-\vec{D}_2)]=4\pi\sigma,$$

$$[\vec{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)]=0.$$

§ 13. Problemele la limită ale teoriei carotajului

Un domeniu interesant pentru aplicarea problemelor la limită al teoriei electricităţii este „carotajul“ care este una din metodele electro-prospecţiei geologice. După cum se ştie, problema fundamentală a teoriei carotajului constă în căutarea potenţialului creat de un curent într-un mediu conducător.

Nu este greu de arătat bazîndu-ne pe o anumită corespondenţă a mărimilor, că problemele fundamentale ale carotajului pot fi reduse la cele din electrostatică.

Intr-adevăr, pornind de la ecuaţia continuităţii pentru densitatea de curent $\vec{j}$ şi densitatea de sacină ρ

$$\operatorname{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{13,1}$$

şi de la legea lui Ohm:

$$\vec{j}=-\lambda\operatorname{grad}\varphi, \tag{13,2}$$

obţinem o ecuaţie care leagă potenţialul φ de densitatea ρ de distribuţie a sarcinilor:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{13,3}$$

Cînd există o sursă punctuală fixă, situată în punctul $\vec{r}'$, avem:

$$\rho = e(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \tag{13,4}$$

Substutuind (13,4) în (13,3) şi considerînd şi relaţia de definiţie a curentului:

$$I = -\frac{\partial e}{\partial t}, \tag{13,5}$$

găsim ecuaţia diferenţială fundamentală a teorii carotajului electric:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{I}{\lambda}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{13,6}$$

Cînd există două medii cu conductubilităţi diferite λ_1 şi λ_2, trebuie să mai luăm în considerare şi condiţiile la limită, care exprimă egalitatea potenţialelor şi a componentelor normale ale curenţilor $\vec{j}_n$ pe suprafaţa de separaţie:

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$
$$\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial_n} = \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial_n}. \tag{13,7}$$

Prin aceasta, problema carotajului se poate reduce la o problemă de electrostatică, dacă admitem următoarea corespondenţă:

$$I \to 4\pi e, \quad \lambda \to \varepsilon \tag{13,8}$$

(v. formulele corespunzătoare ale paragrafului precedent).

In modul acesta, rezultatele paragrafului precedent constituie un răspuns şi pentru probleme analoge ale carotajului; căutarea potenţialului creat de curent în două medii diferite, cînd avem o suprafaţă de separaţie plană sau cilindrică.

Totuşi, în cazul electrostaticii, contactul unui dielectric cu un metal duce la condiţia la limită:

$$\varphi = 0, \tag{13,9}$$

adică la problema lui Dirichlet, deoarece în metal putem pune cîmpul egal cu zero. In acelaşi timp, în teoria carotajului, contactul unui mediu conducător cu un dielectric duce la problema lui Neumann, avînd ca limită condiţia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0, \tag{13,10}$$

deoarece curentul nu poate intra în dielectric.

Să examinăm cîteva probleme tipice, care se reduc la problema lui Neumann.

a) *Sursă de curent într-un puţ*

Să găsim potenţialul unei surse punctuale de curent situată în originea coordonatelor, într-un mediu oarecare conductor şi separată de spaţiul exterior dielectric printr-o suprafaţă cilindrică de rază egală cu unitatea ($a=1$) şi cu axa dirijată pe axa z conform figurii 8, unde trebuie pus $a=1$, $e=\frac{1}{4\pi}$, $\varepsilon_1=\lambda$, $\varepsilon_2=$ $=\lambda'=0$). In cazul de faţă să aplicăm metoda expusă mai sus, deoarece la limita dielectricului cu conductorul:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=1}=0. \tag{13,11}$$

Pentru rezolvarea acestei probleme vom pleca dela ecuaţia generală:

$$\nabla^2\varphi=-\frac{I}{\lambda}\delta(\vec{r})=-\frac{I}{\lambda}\frac{\delta(r)\,\delta(z)}{2\pi r}. \tag{13,12}$$

In ultima expresie vom substitui în locul lui $\delta(z)$, valoarea obişnuită:

$$\delta(z)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\varkappa z}d\varkappa. \tag{13,13}$$

In construirea lui $\delta(r)$ să folosim egalitatea cunoscută în teoria funcţiilor Bessel [cf. de asemenea cu (4,26)]:

$$\frac{2}{J_0^2(s_n)}\int_0^1 r\,J_0(rs_n)\,J_0(rs_{n'})\,dr=\delta_{nn'}, \tag{13,14}$$

unde s_n sînt rădăcinile ecuaţiei

$$J_1(s_n)=0, \tag{13,15}$$

egale cu:

$$s_0=0, \quad s_1=3{,}83, \quad s_2=7{,}02 \text{ etc.}$$

Conform egalităţii (4,26) pentru $0 \leqslant r \leqslant 1$ putem scrie relaţia:

$$\frac{\delta(r-r')}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{J_0^2(s_n)} J_0(rs_n) J_0(r's_n),$$

care îşi păstrează valabilitatea şi pentru cazul limită $r' \to 0$:

$$\frac{\delta(r)}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{J^2(s_n)} J_0(rs_n). \tag{13,16}$$

Substituind aceste expresii pentru funcţia δ în (13,12) şi luînd în considerare egalitatea (11,7), găsim expresia potenţialului:

$$\varphi = \frac{I}{2\pi^2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{J_0(rs_n)}{J_0^2(s_n)} \int \frac{e^{i\varkappa z} d\varkappa}{\varkappa^2 + s_0^2} \right) + \varphi_0. \tag{13,17}$$

Calculînd valoarea integralei din urmă cu formula (11,10) căpătăm:[1])

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{J_0(rs_n)}{s_n J_0^2(s_n)} e^{-s_n |z|} - \frac{1}{s_0} \right) \right). \tag{13,18}$$

Ca soluţie a ecuaţiei omogene se alege $\varphi_0 = -\frac{I}{2\pi\lambda\, s_0}$, atunci potenţialul φ va rămîne finit în toate punctele. Această alegere a funcţiilor ortogonale pentru construirea lui $\frac{\delta(r)}{r}$ duce automat la îndeplinirea condiţiei la limită (13,11):

$$\left. \frac{dJ_0(rs_n)}{dr} \right|_{r=1} = -s_n J_1(s_n) = 0. \tag{13,19}$$

Punînd în evidenţă în suma (13,18) termenul cu $n=0$ găsim:

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\lambda} \left(-|z| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(rs_n)}{s_n J_0^2(s_n)} e^{-s_n |z|} \right). \tag{13,20}$$

---

[1]) Vezi В. А. Фок, Теория кароттажа, ГТТИ, 1933.

In particular, la distanţe mari de sursa de curent ($|z| \gg 1$) ne putem mărgini numai la primul termen, adică potenţialul φ va depinde numai de z:

$$\varphi = -\frac{I}{2\pi\lambda}|z|. \tag{13,21}$$

Valoarea densităţii de curent de-a lungul axei z va rămîne în acest caz constantă şi egală cu:

$$|j| = \lambda\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| = \frac{I}{2\pi a^2} = \frac{I}{2S}. \tag{13,22}$$

Reamintim că raza puţului a este în cazul nostru egală cu unitatea. Coeficientul $^1/_2$ se datoreşte ramificării curentului în ambele direcţii.

b) *Strat infinit de subţire*

Să găsim potenţialul în punctul B de coordonate $r = \sqrt{x^2+y^2} = 0$, z, creat de sursa punctuală de curent I, situată pe axa unui orificiu circular de rază $a=1$, la distanţa $z_0 > 0$ de originea coordonatelor [1]) (fig. 9).

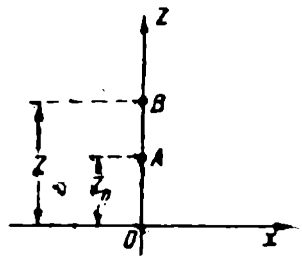

Fig. 9

Notînd conductibilitatea mediului cu λ şi considerînd stratul infinit de subţire ca fiind un izolator ideal ($\lambda' = 0$), trebuie să rezolvăm ecuaţia fundamentală (13,6) cu condiţia ca la suprafaţa de separaţie $z = \pm 0$, $r > 1$, să avem:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \tag{13,23}$$

adică în ipoteza că curentul nu trece prin strat.

Să împărţim întregul spaţiu în două domenii: $z > 0$ (vom nota mărimile corespunzătoare cu indicele 1) şi $z < 0$ (vom nota mărimile corespunzătoare cu indicele 2).

Pentru rezolvarea problemei, vom aplica prin analogie cu metoda sarcinilor fictive — examinată mai sus, — metoda introducerii curenţilor fictivi auxiliari, determinaţi apoi de condiţiile la limită.

---

[1]) Fără a micşora generalitatea problemei, putem întotdeauna să alegem o astfel de orientare a axei z, încît mărimea z_0 să aibă o valoare pozitivă.

Vom determina potenţialele căutate din ecuaţiile:

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{I}{\lambda}\left[\delta(z-z_0)\frac{\delta(r)}{2\pi r} + \delta(z+z_0)\frac{\delta(r)}{2\pi r} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\varphi}\delta(z)\int_0^1 \sigma_1(r')\,\delta(r-r')\,dr'\right], \qquad (13,24)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = -\frac{I}{\lambda}\frac{1}{2\pi}\delta(z)\int_0^1 \sigma_2(r')\,\delta(r-r')\,dr'.$$

Aici, în membrul al doilea al ecuaţiei pentru φ_1, este introdusă, în primul rînd sursa imagine fictivă de curent în punctul $-z_0$, de intensitate egală cu:

$$I\delta(z+z_0)\frac{\delta(r)}{2\pi r}, \qquad (13,25)$$

şi, în al doilea rînd, curenţii superficiali fictivi

$$\frac{I}{2\pi}\delta(z)\int_0^1 \sigma_1(r')\,\delta(r'-r)\,dr' = \begin{cases} \frac{I}{2\pi}\delta(z)\,\sigma_1(r); & r<1, \\ 0; & r>1, \end{cases} \qquad (13,26)$$

situaţi în orificiul stratului cu densitatea superficială $\sigma_1(r)$.

In membrul al doilea al ecuaţiei pentru φ_2 este suficient să ne mărginim la curentul superficial fictiv în orificiul puţului.

In cazul mostru, condiţiile la limită vor căpăta forma:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0; \quad z=0, \quad r>1 \qquad (13,27)$$

şi

$$\varphi_1=\varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}; \quad z=0, \quad r<1. \qquad (13,28)$$

Să substituim în (13,24) în locul lui $\delta(r-r')$ expresia (4,27), conform căreia:

$$\sqrt{\frac{r'}{r}}\,\delta(r-r') = r'\int_0^\infty kJ_0(kr)\,J_0(kr')\,dk. \qquad (13,29)$$

Afară de aceasta, să observăm că ultima relaţie îşi păstrează valabilitatea pentru cazul limită [v. egalitatea (4,28)], adică:

$$\frac{\delta(r)}{r} = \int_0^\infty k J_0(kr)\, dk. \tag{13,30}$$

În loc de $\delta(z)$ putem pune expresia (13,13). Atunci avem:

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{I}{4\pi^2\lambda} \int_0^\infty k J_0(kr)\, dk \int e^{i\varkappa z}\, d\varkappa \times$$
$$\times \left[e^{-i\varkappa z_0} + e^{i\varkappa z_0} + \int_0^1 r' J_0(\varkappa r')\, \sigma_1(r')\, dr' \right].$$

Folosindu-ne mai departe de regula de împărţire cu operatorul ∇^2, obţinem

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi^2\lambda} \int_0^\infty k J_0(kr)\, dk \int \frac{e^{i\varkappa z}}{\varkappa^2 + k^2}\, d\varkappa \times$$
$$\times \left[e^{-i\varkappa z_0} + e^{i\varkappa z_0} + \int_0^1 r' J_0(\varkappa r')\, \sigma_1(r')\, dr' \right]. \tag{13,31}$$

La integrarea în raport cu variabila $\varkappa$ vom ţine seama de egalitatea (11,10):

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\lambda} \int_0^\infty J_0(kr)\, dk \times$$
$$\times \left[e^{-k|z-z_0|} + e^{-k(z+z_0)} + e^{-kz} \int_0^1 r' J_0(kr')\, \sigma_1(r')\, dr' \right]. \tag{13,32}$$

Mai departe, cu ajutorul formulei (11,17) găsim:

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + z_0)^2}} + \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr)\, dk \int_0^1 r' J_0(kr')\, \sigma_1(r')\, dr' \right]. \tag{13,33}$$

Printr-un procedeu analog obtinem

$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\lambda} \int_0^\infty e^{kz} J_0(kr)\, dk \int_0^1 r' J_0(kr')\, \sigma_2(r')\, dr'. \qquad (13,34)$$

Pentru a determina densitatea curenților superficiali σ_1 și σ_2, să găsim valoarea potențialelor și a componentelor lor normale pentru $z=0$.

Ținînd seamă de relațiile (13,33) și (13,34) este ușor de arătat că:

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{I}{4\pi\lambda} \int_0^\infty k J_0(kr)\, dk \int_0^1 r' J_0(kr')\, \sigma_1(r')\, dr' =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{4\pi\lambda} \sigma_1(r); & r < 1, \\ 0; & r > 1. \end{cases} \qquad (13,35)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\lambda} \sigma_2(r); & r < 1, \\ 0; & r > 1. \end{cases}$$

De aici se vede că condițiile la limită (13,27) vor fi satisfăcute automat.

Relațiile (13,28) ne vor duce la următoarele ecuații pentru determinarea valorilor căutate ale curenților superficiali σ_1 și σ_2:

$$\sigma_2 = -\sigma_1 = \sigma,$$

$$\int_0^\infty J_0(kr)\, dk \int_0^1 r' J_0(kr')\, \sigma(r')\, dr' = \frac{1}{\sqrt{r^2+z_0^2}}. \qquad (13,36)$$

Ultima ecuație se rezolvă exact pentru $z_0=0$ (adică atunci cînd sursa A se găsește în origina coordonatelor).

In acest caz:

$$\sigma(r) = \frac{\delta(r)}{r}, \qquad (13,37)$$

iar pentru potențialele φ_1 și φ_2 obținem expresiile:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}, \qquad (13,38)$$

valabile și în lipsa stratului dielectric.

In particular, în punctul B aşezat pe axa cilindrului ($r=0$) avem ($z_0=0$):

$$\varphi_1=\varphi_2=\frac{I}{4\pi\lambda}\frac{1}{|z|}. \tag{13,39}$$

Va fi util în cele ce urmează să ne folosim de teorema de reciprocitate, conform căreia valoarea potenţialului trebuie să rămînă neschimbată, dacă vom schimba între ele punctele A (sursa de curent) şi B (punctul de observaţie).

De aceea, de exemplu, putem afirma că în orice poziţie a sursei A pe axa puţului, potenţialul în origina coordonatelor se va determina din formula:

$$\varphi_1=\varphi_2=\frac{I}{4\pi\lambda}\frac{1}{|z_0|}. \tag{13,40}$$

Ecuaţia integrală (13.36) se rezolvă aproximativ dar cu mare precizie pentru $|z_0|\gg 1$, adică atunci cînd sursa de curent se află la o distanţă de orificiul puţului, care întrece cu mult raza puţului ($z_0\gg a=1$). Punînd în acest caz:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z_0^2}}=\frac{1}{z_0}\left[1+O\left(\frac{1}{z_0^2}\right)\right], \tag{13,41}$$

— unde simbolul $O\left(\frac{1}{z_0^2}\right)$ indică faptul că ordinul termenilor neglijaţi în comparaţie cu unitatea, este cel mult $\frac{1}{z_0^2}$, obţinem:

$$\sigma=\frac{2}{\pi z_0\sqrt{1-r^2}}\left[1+O\left(\frac{1}{z_0^2}\right)\right]. \tag{13,42}$$

Ultima egalitate este uşor de verificat, dacă ţinem seama de relaţiile cunoscute din teoria funcţiilor cilindrice:

$$\int_0^1\frac{r' J_0(kr')}{\sqrt{1-r'^2}}dr'=\frac{\sin k}{k},\quad \int_0^\infty\frac{\sin k}{k}J_0(kr)\,dk=\frac{\pi}{2}\ ;\ r<1. \tag{13,43}$$

Substituind (13,42) în egalităţile (13,33) şi (13,34), găsim următoarele expresii pentru potenţialul pe axa puţului ($r=0$);

$$\varphi_1=\frac{I}{4\pi\lambda}\left[\frac{1}{|z-z_0|}+\frac{1}{z+z_0}-f(|z|,\ z_0)\right] \tag{13,44}$$

şi

$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\lambda} f(|z|, z_0), \tag{13,45}$$

unde:

$$f(|z|, z_0) = \frac{2}{\pi z_0} \int_0^\infty e^{-k|z|} \frac{\sin k}{k} dk \left[1 + O\left(\frac{1}{z_0^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi z_0} \operatorname{arctg} \frac{1}{|z|} \left[1 + O\left(\frac{1}{z_0^2}\right)\right]. \tag{13,46}$$

Conform teoremei de reciprocitate, ultima expresie poate fi prezentată şi sub forma:

$$f(|z|, z_0) = f(z_0, |z|) = \frac{2}{\pi |z|} \operatorname{arctg} \frac{1}{z_0} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]. \tag{13,47}$$

Formula (13,46) o vom folosi pentru $z_0 \gg 1$, adică atunci cînd sursa A se găseşte la distanţă mare de frontiera de separaţie, iar formula (13,47) o vom folosi cînd $|z| \gg 1$, adică atunci cînd punctul de observaţie B este situat la mare distanţă de frontiera de separaţie[1]).

Dacă însă ambele puncte se găsesc la distanţă mare de frontiera de separaţie ($|z| \gg 1$, şi $z_0 \gg 1$), atunci, ţinînd seama că:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{z_0}\bigg|_{z_0 \gg 1} = \frac{1}{z_0},$$

găsim pentru f, în conformitate cu teorema de reciprocitate, o expresie simetrică în raport cu $|z|$ şi z_0:

$$f = \frac{2}{\pi |z| z_0}.$$

In sfîrşit, cînd un punct A sau B se află pe strat (de exemplu, $z_0 = 0$, iar $z \gg 1$), atunci:

$$f = \frac{1}{|z|},$$

de unde găsim o expresie a potenţialului, care coincide cu expresia exactă (13,39).

---

[1]) Cazul $|z| \ll 1$ şi $z_0 \ll 1$ nu prezintă interes în teoria carotajului, deoarece distanţa dintre sursă şi punctul de observaţie trebuie să fie cu mult mai mare decît raza puţului, adică $|z - z_0| \gg 1$.

§ 14. Ecuaţia generalizată a lui Poisson

Cea mai simplă generalizare liniară a ecuaţiei lui Poisson este ecuaţia:

$$\nabla^2 \varphi - k_0^2 \varphi = -4\pi\rho, \tag{14,1}$$

care are o foarte largă aplicaţie în diversele domenii ale fizicii moderne.

a) *Teoria forţelor nucleare şi a mezonilor*[1] *(mezodinamica clasică).*

In teoria forţelor nucleare mărimea k_0 este proporţională cu masa m a mezonului, adică a particulei care transportă forţele nucleare. Atunci ρ este densitatea statică a sarcinilor nucleare (a nucleonilor, adică protonilor şi neutronilor), care generează cîmpul mezonic. Cu toate că teoria forţelor nucleare mezonice a întîmpinat o serie de dificultăţi şi nu poate fi socotită încheiată, totuşi ecuaţia (14,1) exprimă legile fundamentale ale interacţiilor nucleare.

b) *Teoria gravitaţiei a lui Seeliger*

In teoria gravitaţiei a lui Newton, unde potenţialul satisface ecuaţia lui Poisson ($k_0^2 \to 0$) există dificultatea cunoscută din cosmologie: ecuaţia lui Poisson nu are o soluţie finită pentru o distribuţie uniformă a lui ρ în întregul spaţiu. Pentru a îndepărta această dificultate, Neumann şi Seeliger au propus completarea ecuaţiei lui Poisson cu termenul $-k_0^2\varphi$, aducînd-o la forma (14,1). Atunci pentru $\rho=$const, potenţialul va avea de asemenea o valoare finită, constantă, egală cu:

$$\varphi = \frac{4\pi\rho}{k_0^2}. \tag{14,2}$$

La construirea teoriei generale a relativităţii care reprezintă o generalizare a teoriei gravitaţiei lui Newton,—ne întîlnim cu o dificultate analoagă. Pentru a o înlătura, Einstein a presupus iniţial că ecuaţiile sale gravitaţionale trebuie completate cu un termen cosmologic, analog corecţiei lui Seeliger. De altfel, cum a

[1]) Mezodinamica clasică va fi expusă mai pe larg în cap. V.

arătat A. A. Friedmann, dificultatea indicată se poate înlătura chiar fără termenul cosmologic suplimentar dacă se trece la o structură geometrică a universului, depinzînd de timp, altfel zis, la componentele tensorului metric $g_{\mu\nu}(t)$. Datorită acestui fapt, de multe ori termenul cosmologic nu se examinează în teorie. Aici trebuie subliniat caracterul vădit preliminar al oricăror teorii cosmologice, care încearcă să descrie partea cunoscută a universului infinit, într-un interval de timp finit.

c) *Teoria electroliților tari*

Ecuatia de tipul (14,1) stă la baza teoriei electroliților tari, unde φ este potențialul norului de ioni. Pentru cazul mai simplu al electroliților binari, la care densitățile ionilor pozitivi și negativi sînt egale ($n_+ = n_- = n$), iar ionii înșiși au valențe egale, avem $Z_+ = Z_- = Z$. Pentru determinarea potențialului φ vom pleca de la ecuația lui Poisson:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho', \tag{14,3}$$

unde ε este constanta dielectrică a soluției.

Densitatea sarcinii ρ' este dată de Debye și Hückel, după formula lui Boltzmann, sub forma:

$$\rho' = \rho + eZ_+ n_+ e^{-\frac{\varphi e Z_+}{kT}} - eZ_- n_- e^{\frac{\varphi e Z_-}{kT}}, \tag{14,4}$$

unde ρ este densitatea sarcinilor exterioare.

Dezvoltînd în serie ultima expresie și mărginindu-ne la termenii liniari în raport cu e, obținem o ecuație de forma (14,1), unde:

$$k_0^2 = \frac{8\pi n}{\varepsilon kT}(eZ)^2. \tag{14,5}$$

d) *Teoria supraconductibilității*

In teoria supraconductibilității a lui London, care are un caracter fenomenologic macroscopic, potențialele electromagnetice satisfac de asemenea ecuația de forma (14,1), constanta k_0^2 fiind:

$$k_0^2 = \frac{4\pi n e^2}{mc^2}, \tag{14,6}$$

unde n este numărul electronilor în unitatea de volum, e este sarcina, iar m — masa electronului.

Mărimea $\lambda = \frac{1}{k_0}$ determină așa numita „adîncime de pătrundere" a cîmpurilor în supraconductor.

Substituind în (14,6) valorile sarcinei e și a masei m a electronului, ca și valoarea găsită experimental $\lambda \sim 10^{-5}$ cm, obținem pentru concentrația electronilor supraconductori valoarea $n=10^{22}$.

Să stabilim acum funcția lui Green G a ecuației generalizate a lui Poisson, care poate fi găsită din ecuația:

$$\nabla^2 G - k_0^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\delta(\vec{R}). \tag{14,7}$$

Repetînd calculele de la § 10 găsim:

$$G = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\vec{R}}}{k^2 + k_0^2} (d\vec{k}). \tag{14,8}$$

Integrînd (14,8) în raport cu unghiurile θ și φ [v. formula (10,6)] obținem

$$G = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty k \frac{\sin kR}{k^2 + k_0^2} dk = \frac{1}{4\pi^2 iR} \int k \frac{e^{ikR}}{k^2 + k_0^2} dk, \tag{14,9}$$

unde

$$\vec{R} = |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Efectuînd ultima integrală cu ajutorul metodei reziduurilor [v. de asemenea (11,10)], găsim pentru partea singulară:

$$G = \frac{e^{-k_0 R}}{4\pi R}. \tag{14,10}$$

Odată determinată funcția lui Green, putem scrie soluția ecuației (14,1) sub forma:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') \frac{e^{-k_0 R}}{R} (d\vec{r}'). \tag{14,11}$$

In particular, în cazul unei surse punctuale de intensitate egală cu unitatea, situată în originea coordonatelor:

$$\rho_0 = \delta(\vec{r}),$$

găsim pentru potențialul căutat:

$$\varphi = \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \tag{14,12}$$

După cum se vede, comportarea potenţialului generalizat se caracterizează prin lungimea eficace:

$$r_0 = \frac{1}{k_0}. \qquad (14,13)$$

Dacă $r \ll r_0$, atunci potenţialul φ coincide cu aproximaţie pînă la termenii de ordinul $\frac{r}{r_0}$, cu potenţialul ecuaţiei lui Poisson:

$$\varphi = \frac{1}{r}\left[1 + O\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]. \qquad (14,14)$$

Pe de altă parte, la distanţe mari de sursă ($r \ll r_0$), potenţialul φ va scădea exponenţial în funcţie de r.

In felul acesta, interacţiunea caracterizată prin ecuaţia (14,1), duce la aşa numitele „forţe cu raza de acţiune mică“, care în mod practic sînt diferite de zero numai la distanţe care nu întrec o anumită valoare r_0.

CAPITOLUL III

ECUAŢII CARE DEPIND DE TIMP

§ 15. Ecuaţia mişcării în mecanica clasică

După cum se ştie, ecuaţia mişcării rectilinii din mecanica clasică, are expresia:

$$\frac{dv}{dt}=f(t), \tag{15,1}$$

unde $f(t)$ reprezintă forţa exterioară, v—viteza mişcării, iar masa particulei este presupusă egală cu unitatea.

Soluţia acestei ecuaţii este în general bine cunoscută. Insă aici vrem să facem analiza acestei soluţii cu ajutorul funcţiei δ. Conform § 7 vom căuta o soluţie de forma:

$$v=-\int G(t, t')\,f(t')\,dt'. \tag{15,2}$$

Funcţia lui Green este:

$$G=-\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\delta(t-t')-C-\frac{1}{2},$$

unde $G_0=-C-\frac{1}{2}=\text{const}$, adică partea nesingulară a funcţiei lui Green este soluţia ecuaţiei omogene (15,1).

Punînd în locul lui $\delta(t-t')$ expresia (4,20) găsim:

$$G=-\frac{1}{2\pi}\int\frac{(e^{ik(t-t')}-1)\,dk}{ik}-C-\frac{1}{2}.$$

Considerînd valoarea principală pentru integrala din urmă, avem:

$$G=-\frac{1}{2}\frac{t-t'}{|t-t'|}-C-\frac{1}{2}=\begin{cases}-1-C; & t>t',\\ -C; & t<t'.\end{cases} \tag{15,3}$$

Soluţia generală pentru v poate fi pusă sub forma:

$$v = v^r + v^a,$$

unde

$$v^r = \int_{-\infty}^{t} (1+C) f(t')\, dt', \quad v^a = \int_{t}^{\infty} C f(t')\, dt'. \tag{15,4}$$

In prima soluţie (v^r) integrăm în raport cu toate valorile timpului t', mai mici decît valoarea t. Din contră, în cea de a doua soluţie (v^a) integrarea se face în raport cu toate valorile timpului t', mai mari decît t. Cu alte cuvinte, în primul caz luăm în consideraţie acţiunea „retardată" a forţei asupra punctului material, iar în cel de al doilea, acţiunea „avansată".

Pentru determinarea constantei C vom fixa valoarea vitezei la un moment oarecare t_0, valoare pe care o luăm egală cu zero ($v_0=0$).

Fie viteza dată la un moment oarecare, anterior acţiunii forţei, de exemplu: $v=0$ pentru $t=-\infty$. In acest caz $C=0$, adică soluţia corespunzătoare acţiunii retardate va dispare şi vom avea:

$$v = \int_{-\infty}^{t} f(t')\, dt'. \tag{15,5}$$

Exact la fel, dacă viteza este dată la un moment oarecare după acţiunea tuturor forţelor, de exemplu $v=0$ pentru $t=+\infty$, obţinem $C=-1$.

In acest caz, soluţia corespunzătoare acţiunii retardate dispare:

$$v = -\int_{t}^{\infty} f(t')\, dt'. \tag{15,6}$$

In felul acesta, după cum vom considera viteza egală cu zero înainte sau după intrarea în acţiune a forţei, luăm în considerare acţiunea retardată, respectiv avansată a forţei asupra punctului material.

Să găsim valoarea coordonatei în cazul cînd viteza iniţială şi coordonata x sînt date, ca de obicei, în momentul anterior apariţiei forţei, adică $x=0$, $v=0$ pentru $t_0=-\infty$.

După cum se vede din (15,5) în acest caz:

$$x=\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}v=\int_{-\infty}^{t}(t-t')f(t')\,dt'. \tag{15,7}$$

Valabilitatea ultimei relaţii este uşor de verificat pentru că:

$$\frac{dx}{dt}=v=\int_{-\infty}^{t}f(t')\,dt'$$

şi pentru $t=-\infty$, $x=0$.

Cu ajutorul funcţiei δ, putem de asemenea să găsim forţa care comunică instantaneu punctului o viteză finită v_0 sau chiar o deplasare finită x_0, de exemplu, la momentul $t=0$.

In acest scop trebuie să punem:

$$f(t)=v_0\delta(t)+x_0\delta'(t). \tag{15,8}$$

Atunci, conform (15,7), avem:

$$x=\begin{cases} v_0t+x_0; & t>0,\\ 0; & t<0.\end{cases} \tag{15,9}$$

In felul acesta, forţa infinită instantanee $v_0\delta(t)$ comunică punctului material o viteză finită.

Două forţe infinite $x_0\delta'(t)$, egale în valoare absolută şi de sens opus, şi care lucrează succesiv la un interval de timp infinit mic [v. definiţia (3,12) dată pentru derivata funcţiei δ], comunică punctului material o deplasare finită.

Soluţia celei mai simple probleme de mecanică, cînd afară de forţa care acţionează, $F(t)$, sînt date şi condiţiile iniţiale sub forma valorilor coordonatei şi vitezei (x_0 şi v_0 pentru $t=0$), o putem obţine cu ajutorul formulei (15,7).

Punînd:

$$f(t)=x_0\delta'(t)+v_0\delta(t)+F(t)\left(\frac{1}{2}+\gamma(t)\right), \tag{15,10}$$

vom găsi următoarea expresie pentru coordonata căutată:

$$x=\begin{cases} x_0+v_0t+\int_0^t(t-t')F(t')\,dt'; & t>0,\\ 0; & t<0.\end{cases} \tag{15,11}$$

In mod analog, cu ajutorul formalismului funcţiei δ se rezolvă un şir de alte probleme de mecanică, formulate ca ecuaţii diferenţiale liniare.

§ 16. Ecuaţia conductibilităţii termice (ecuaţie de tip parabolic)

Ecuaţiile de tip parabolic nu sînt mai puţin importante pentru fizică decît cele eliptice şi hiperbolice. Intr-adevăr, în categoria acestora intră ecuaţia conductibilităţii termice, a difuziei, ecuaţii statice de tipul lui Focker-Planck, ca şi ecuaţia fundamentală a lui Schrödinger din mecanica cuantică nerelativistă (conţinînd un coeficient imaginar în termenul cu derivata în raport cu timpul). Ne vom opri, pentru simplicitate asupra unui exemplu tipic: ecuaţia conductibilităţii termice.

Ecuaţia conductibilităţii termice, care descrie propagarea căldurii într-o bară, are forma;

$$Lu(x,t) = -\frac{1}{\varkappa} Q(x,t), \tag{16,1}$$

unde:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t},$$

u este temperatura căutată a barei, depinzînd de coordonata x şi timpul t, Q — sursa exterioară de căldură, care caracterizează cantitatea de căldură transmisă unităţii de lungime a barei în unitate de timp; $\varkappa$ şi a^2 sînt coeficienţii conductibilităţii interioare de căldură, respectiv de temperatură.

Conform (7,6) soluţia ecuaţiei (16,1) trebuie căutată sub forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{\varkappa}\int G x, x';\quad t,t')\, Q(x',t')\, dx'dt'. \tag{16,2}$$

Ca de obicei, funcţia lui Green G o găsim din condiţia:

$$G = L^{-1}\delta(x-x')\,\delta(t-t') + G_0,$$

unde G_0, este soluţia ecuaţiei omogene (16,1).

Considerînd bara extinsă nelimitat în ambele direcţii, putem înlocui $\delta(x-x')$ şi $\delta(t-t')$ prin expresia (4,20).

Atunci obţinem:

$$G=\frac{1}{4\pi^2}\int\frac{e^{ik(x-x')+ik_1(t-t')}}{k^2+i\frac{k_1}{a^2}}dk_1dk+G_0. \tag{16,3}$$

Integrînd ultima expresie în raport cu variabila k_1, obţinem [cf. cu calculul integralei (11,10)]:

$$G=\begin{cases}\frac{a^2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-k^2a^2(t-t')}\cos k(x-x')\,dk+G_0; & t>t',\\ G_0; & t<t'.\end{cases} \tag{16,4}$$

Partea nesingulară a funcţiei lui Green G_0 poate fi prezentată sub forma:

$$G_0=\frac{a^2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-k^2a^2(t-t')}\cos k(x-x')f(k)\,dk, \tag{16,5}$$

unde $f(k)$ este supusă numai condiţiei ca ultima integrală să aibă sens pentru orice valori $t-t'$ şi $x-x'$.

In cazul acţiunii retardate trebuie să punem $f(k)=0$. Atunci

$$G^r=\begin{cases}\frac{a^2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-k^2a^2(t-t')}\cos k(x-x')\,dk; & t>t',\\ 0; & t<t'.\end{cases} \tag{16,6}$$

Din contra, în cazul acţiunii avansate avem $f(k)=-1$. Atunci

$$G^a=\begin{cases}0; & t>t'.\\ -\frac{a^2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-k^2a^2(t-t')}\cos k(x-x')\,dk; & t<t'.\end{cases} \tag{16,7}$$

Integrala din urmă este divergentă. De aceea în problema conductibilităţii termice nu există funcţii Green numai cu acţiune avansată ceea ce rezultă din caracterul parabolic al ecuaţiei iniţiale[1]).

---

[1]) Observăm, din contra, că pentru operatorul $L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}$, nu există soluţii cu acţiune retardată.

Calculînd integrala (16,6) găsim expresia definitivă pentru funcţia lui Green:

$$G^r=\begin{cases}\dfrac{a}{2\sqrt{\pi(t-t')}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}; & t>t'.\\ 0; \quad t<t'.\end{cases} \tag{16,8}$$

Substituind (16,8) în egalitatea (16,2) găsim soluţia cunoscută, care se găseşte, de obicei, pe o cale mai complicată:

$$u(x,t)=\frac{a}{2\varkappa\sqrt{\pi}}\int dx'\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}}{\sqrt{t-t'}}Q(x',t')\,dt'. \tag{16,9}$$

Să aplicăm soluţia găsită la cîteva cazuri tipice, care se formulează într-un mod destul de simplu cu ajutorul funcţiei δ.

a) Să găsim distribuţia temperaturii în funcţie de timpul t şi de poziţia x, cînd o sursă instantanee încălzeşte bara la momentul $t=0$, pînă la temperatura iniţială reprezentată prin $f(x)$, care este funcţie de coordonata x.

In locul temperaturii iniţiale putem da sursa exterioară cu ajutorul formulei:

$$Q(x',t')=\frac{\varkappa}{a^2}f(x')\,\delta(t'). \tag{16,10}$$

Intr-adevăr, integrînd în raport cu timpul, obţinem relaţia cunoscută dintre cantitatea de căldură şi temperatură:

$$\int Q(x'\,t')\,dt'=\frac{\varkappa}{a^2}f(x'). \tag{16,11}$$

Formula (16,10) înlocuieşte metoda obişnuită de a pune condiţia iniţială.

Substituind (16,10) în egalitatea (16,9), găsim

$$u=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}}f(x')\,dx'; & t>0,\\ 0; & t<0.\end{cases} \tag{16,12}$$

In particular, dacă sursa exterioară comunică o cantitate oarecare de căldură q la momentul $t=0$ numai punctului $x=0$, atunci:

$$Q(x',t')=q\delta(x')\,\delta(t').$$

Soluţia obţinută mai sus pentru distribuţia temperaturii la $t > 0$ capătă forma:

$$u = \frac{aq}{2\varkappa\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \tag{16,13}$$

b) Tot ca exemplu să căutăm care este distribuţia de temperatură într-o bară, distribuţie care apare datorită mişcării cu o viteză oarecare constantă v, a unei surse punctuale, care cedează în unitatea de timp o cantitate de căldură q. In acest caz:

$$Q(x', t') = q\delta(x' - vt'). \tag{16,14}$$

O astfel de problemă apare, de exemplu, în cercetarea arderii unui strat de cărbune sau în cercetarea încălzirii unei bare la sudură electrică.

Substituind (16,14) în formula generală (16,9) obţinem după integrare în raport cu x':

$$u = \frac{aq}{2\varkappa\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi v}{2a^2}} I, \tag{16,15}$$

unde:

$$I = 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2y^2} - \frac{v^2y^2}{4a^2}} dy, \tag{16,16}$$

$$\xi = x - vt \quad \text{şi} \quad y = \sqrt{t - t'}.$$

Descompunînd ultima integrală în două integrale:

$$I = \frac{2a}{v}\left[e^{\frac{|\xi| v}{2a^2}} \int_0^{\sqrt{t}} \left(\frac{v}{2a} - \frac{|\xi|}{2ay^2}\right) e^{-\left(\frac{vy}{2a} - \frac{|\xi|}{2ay}\right)^2} dy + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{|\xi| v}{2a,}} \int_0^{\sqrt{t}} \left(\frac{v}{2a} + \frac{|\xi|}{2ay^2}\right) e^{-\left(\frac{vy}{2a} - \frac{|\xi|}{2ay}\right)} dy \right]$$

şi introducînd noi variabile:

$$\frac{vy}{2a} + \frac{|\xi|}{2ay} = z_1 \quad \text{şi} \quad \frac{vy}{2a} - \frac{|\xi|}{2ay} = z_2,$$

găsim:

$$I = \frac{a\sqrt{\pi}}{v}\left\{ e^{\frac{v|\xi|}{2a^2}} [g(\xi_1) - 1] + e^{-\frac{v|\xi|}{2a^2}} [1 + g(\xi_2)] \right\}, \tag{16,17}$$

Aici:

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{t}\cdot v}{2a}\left(1 + \frac{|\xi|}{vt}\right),$$

$$\xi_2 = \frac{\sqrt{t}\cdot v}{2a}\left(1 - \frac{|\xi|}{t}\right),$$

iar tuncţia lui Gauss $g(\tau)$ se defineşte prin cunoscuta relaţie:

$$g(\tau) = -g(-\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau} e^{-z^2}\,dz. \qquad (16,18)$$

Inainte de toate să determinăm temperatura sursei de căldură. Substituind valoarea lui I pentru $\xi=0$ în expresia (16,15), obţinem

$$u = \frac{qa^2}{\varkappa v}\, g\left(\frac{\sqrt{t}\cdot v}{2a}\right), \qquad (16,19)$$

adică odată cu creşterea timpului temperatura sursei creşte progresiv, apropiindu-se la $t \gg 4a^2/v^2$, de valoarea sa limită

$$u_\infty = \frac{qa^2}{\varkappa v}.$$

Să găsim distribuţia temperaturii în diferitele puncte ale barei, situate în apropierea sursei ($|\xi| < vt$), pentru valori mari ale timpului $t\left(t \gg \frac{4a^2}{v^2}\right)$.

Formulele (16,15) şi (16,17) ne dau în acest caz următoarea expresie pentru temperatură:

$$u = \begin{cases} \dfrac{qa^2}{\varkappa v} e^{-\frac{v\xi}{a^2}}; & \xi > 0 \quad (x > vt), \\[2ex] \dfrac{qa^2}{\varkappa v}; & \xi < 0 \quad (x < vt). \end{cases} \qquad (16,20)$$

In modul acesta, temperatura acelor puncte ale barei prin care a trecut sursa ($\xi < 0$, $x < vt$), este constantă şi egală cu temperatura sursei. In direcţia mişcării sursei ($x > vt$ sau $\xi > 0$) temperatura scade odată cu creşterea distanţei, după o lege exponenţială.

Ca ultim exemplu, vom indica cazul unei surse în repaus, care acţionează un timp infinit lung, începînd cu momentul $t=0$.

Acest exemplu este, evident, un caz particular al celui precedent, cînd viteza sursei tinde către zero.

Punînd în ecuaţiile (16,15) şi (16,17) viteza $v = 0$, vom găsi distribuţia temperaturii de-a lungul barei:

$$u = \frac{qa\sqrt{t}}{\varkappa\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - \frac{q|x|}{2\varkappa}\left[1 - g\left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{16,21}$$

Punînd $x=0$, găsim de aici temperatura sursei:

$$u = \frac{qa\sqrt{t}}{\varkappa\sqrt{\pi}} \tag{16,22}$$

care va creşte proporţional cu rădăcina pătrată a timpului.

Expresia (16,22) poate fi privită de asemenea ca valoare limită a relaţiei (16,19) în care viteza mişcării v trebuie anulată.

Cu ajutorul ultimelor formule putem găsi cantitatea totală de căldură, pe care o degajă sursa în intervalul de timp t.

Inmulţind (16,21) cu $\frac{\varkappa}{a^2}dx$ $\left(\frac{\varkappa}{a^2}\text{ este căldura specifică}\right)$ şi integrînd pe întreaga lungime a barei, găsim:

$$\overline{Q} = \frac{2q\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}dx - \frac{q}{a^2}\int_0^\infty x\left[1 - g\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]dx. \tag{16,23}$$

După cum se ştie:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}};$$

$$\int_0^\infty x\,[1 - g(\beta x)]\,dx = \frac{1}{4\beta^2},$$

de unde:

$$Q = qt.$$

Această expresie este egală cu cantitatea de căldură degajată de sursa exterioară în decursul timp lui t. Punînd în (16,14) $v=0$ şi integrînd apoi în raport cu timpul (de la 0 la t) şi pe lungimea barei, care conţine sursa, căpătăm din nou o valoare analogă pentru $\bar{Q}$.

Metoda dezvoltată de noi în acest paragraf, admite de asemenea o generalizare simplă pentru cazul propagării căldurii în plan sau în spaţiu.

§ 17. Ecuaţia undelor a lui D'Alembert (Ecuaţie de tip hiperbolic)

După cum se ştie, ecuaţia lui D'Alembert:

$$L\varphi = -4\pi\rho. \tag{17,1}$$

unde:

$$L = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

are explicaţii foarte numeroase în multe domenii ale fizicii matematice şi teoretice, deoarece ea descrie propagarea undelor electromagnetice, gravitaţionale, acustice etc. Din punct de vedere al teoriei relativiste cuantice a cîmpului, această ecuaţie este aplicabilă tuturor cîmpurilor nelegate de particule care posedă masă de repaus.

Urmînd regulei generale, vom căuta soluţia ecuaţiei lui D'Alembert sub forma:

$$\varphi(\vec{r}, t) = 4\pi \int G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t')\rho(\vec{r}', t')(d\vec{r}')\,dt', \tag{17,2}$$

unde $(d\vec{r}') = dx'\,dy'\,dz'$ este elementul de volum din spaţiul tridimensional, iar funcţia lui Green G poate fi găsită din relaţia:

$$G = -L^{-1}\delta(\vec{r} - \vec{r}')\,\delta(t - t'). \tag{17,3}$$

Să presupunem că funcţia căutată φ satisface unor anumite condiţii la limită date.

Să găsim un sistem de funcţii ortonormate satisfăcînd ecuaţia:

$$Lv_n = -\lambda^2 v_n,$$

avînd

$$\int v_{n'}^{*}(\vec{r})\,v_n(\vec{r})\,(d\vec{r}) = \delta_{nn'}, \tag{17,4}$$

unde mărimea λ^2 reprezintă valoarea proprie a operatorului L şi este o mărime reală; funcţiile proprii $v_{\vec{n}}$ care depind de trei parametri $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$, satisfac aceleaşi condiţii la limită ca şi funcţia căutată φ; în sfîrşit, simbolul tridimensional al lui Krönecker-Weierstrass este:

$$\delta_{nn'} = \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{n_3 n_3'} = \begin{cases} 1; & n_1 = n_1', \quad n_2 = n_2', \quad n_3 = n_3', \\ 0; & \text{în toate celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Expresia pentru funcţiile δ, care intră în egalitatea (17,3), o vom prezenta sub forma:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \sum_n v_n^*(\vec{r}')\, v_n(\vec{r}),$$

$$\delta(t - t') = \frac{c}{2\pi} \int e^{-ic\varkappa(t-t')} d\varkappa. \tag{17,5}$$

Aici suma în raport cu $\vec{n}$ este triplă şi se ia pentru toate valorile întregi ale numerelor n_1, n_2, n_3.

Substituind relaţiile găsite în (17,3) şi ţinînd seama de egalitatea (17.4), găsim:

$$G = G_1 + G_0, \tag{17,6}$$

unde partea singulară a funcţiei lui Green G_1 este [1]:

$$G_1 = \frac{c}{2\pi} \sum_n \int \frac{v_n^*(\vec{r}')\, v_n(\vec{r})\, e^{-ic\varkappa(t-t')}}{\lambda^2 - \varkappa^2} d\varkappa, \tag{17,7}$$

sau, integrînd în raport cu variabila $\varkappa$, găsim:

$$G_1 = \frac{c}{2} \frac{t-t'}{|t-t'|} \sum_n v_n^*(\vec{r}')\, v_n(\vec{r}) \frac{\sin c\lambda(t-t')}{\lambda}. \tag{17,8}$$

---

[1]) Aici şi în cele ce urmează vom calcula valoarea principală a integralei în cazul în care polii funcţiei de integrat sînt situaţi pe axa reală. In general însă, integrala care are polii situaţi pe axa reală, nu este uniformă. Această neuniformitate va fi compensată de noi pe calea adăugirii unei părţi nesingulare la valoarea principală. In cazul nostru această parte nesingulară este soluţia G_0.

Partea nesingulară G_0 poate fi reprezentată sub forma:

$$G_0 = \frac{c}{2} \sum_n v_n^* (\vec{r'}) \, v_n (\vec{r}) \left(A \frac{\sin c\lambda (t-t')}{\lambda} + B \frac{\cos c\lambda (t-t')}{\lambda} \right). \tag{17,8a}$$

care satisface ecuaţia omogenă:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2} \frac{\partial^2}{\partial t} \right) G_0 = 0.$$

Dacă problema cere să ne limităm numai la potenţialele retardate, atunci trebuie pus $A=1$ şi $B=0$. In acest caz, căpătăm:

$$G^r = \begin{cases} c \sum_n v_n^* (\vec{r'}) \, v_n (\vec{r}) \frac{\sin c\lambda (t-t')}{\lambda}; & t > t', \\ 0; & t < t', \end{cases} \tag{17,9}$$

adică, pentru a găsi potenţialul la un moment dat t, trebuie luată în considerare influenţa surselor numai în momentele anterioare.

Exact la fel, dacă se cere să rezolvăm problema cu potenţialele avansate, trebuie pus $A=-1$ şi $B=0$.

Atunci funcţia lui Green va avea următoarea formă:

$$G^a = \begin{cases} 0; & t > t', \\ c \sum_n v_n^* (\vec{r'}) \, v_n (\vec{r}) \frac{\sin c\lambda (t'-t)}{\lambda}; & t < t'. \end{cases} \tag{17,10}$$

Să observăm că partea nesingulară a funcţiei lui Green pentru $A=1$ şi $B=0$ poate fi exprimată şi sub forma:

$$G_0 = \frac{ci}{2} \sum_n \int v_n^* (\vec{r'}) \, v_n (\vec{r}) \, e^{-ic\varkappa (t-t')} \frac{\varkappa}{|\varkappa|} \delta (\varkappa^2 - \lambda^2) \, d\varkappa.$$

De aceea pentru funcţia lui Green vom găsi formula:

$$G = \frac{c}{2\pi} \sum_n \int v_n^* (\vec{r'}) \, v_n (\vec{r}) \, e^{-ic\varkappa (t-t')} \left[\frac{1}{\lambda^2 - \varkappa^2} \pm \right. \\ \left. \pm i\pi \frac{\varkappa}{|\varkappa|} \delta (\lambda^2 - \varkappa^2) \right] d\varkappa, \tag{17,11}$$

pentru G^r trebuind să luăm semnul superior al termenului al doilea din sumă, iar pentru G^a — semnul inferior. Apariţia termenilor suplimentari de tipul

$$\pm i\pi \frac{\varkappa}{|\varkappa|}\,\delta(\lambda^2-\varkappa^2)$$

duce la asimetria soluţiei faţă de potenţialele retardate şi avansate, altfel zis, după cum folosim un semn sau altul al termenului suplimentar, căpătăm unde divergente sau convergente[1]). Prin urmare, radiaţia de unde electromagnetice avem numai în cazul cînd acest termen suplimentar va fi diferit de zero (v. de asemenea § 27).

Să găsim acum funcţia lui Green într-un exemplu particular important, cînd la infinit sursele lipsesc şi pentru potenţial au loc condiţii la limită „naturale" (adică la infinit φ devine nul). In acest caz pentru $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ este indicat să luăm reprezentarea (5,7):

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\delta(\vec{R})=\frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}\vec{R}}(d\vec{k}).$$

Valorile proprii ale operatorului ∇^2 vor fi egale cu $-k^2$, adică $\lambda=k$.

De aici găsim:

$$G_1=\frac{c}{16\pi^3}\,\frac{T}{|T|}\int e^{i\vec{k}\vec{R}}\frac{\sin ckT}{k}\,(d\vec{k}),$$

unde

$$T=t-t', \quad \frac{T}{|T|}=2\gamma(T),$$

iar $\gamma(T)$ este egal cu $\pm\frac{1}{2}$, după cum $T\gtrless 0$. Pentru un vector temporal cvadridimensional arbitrar, cu $\gamma_0>0$

$$2\gamma(x_\nu)=\frac{\gamma_\mu x_\mu}{|\gamma_\mu x_\mu|}\,.$$

[1]) Despre principiul radiaţiei v. A. Соколов, Дельта-функция и её применение к решению некоторых математических задач геофизики, Свердловск, 1946; v. de asemenea A. Тихонов и A. Самарский, ЖЭТФ, 18, 243, 1948.

Exact la fel avem pentru partea nesingulară a funcţiei lui Green G_0:

$$G_0 = \pm \frac{c}{2}\Delta, \tag{17,12}$$

unde

$$\Delta = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}\vec{R}} \frac{\sin ckT}{k}(d\vec{k}) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^4} \frac{T}{|T|}\int e^{i\vec{k}\vec{R} - ic\varkappa T} \frac{1}{k^2 - \varkappa^2}(d\vec{k})\, d\varkappa \tag{17,13}$$

este prima funcţie Δ, funcţie care joacă un rol important în cuantificarea a doua a cîmpului electromagnetic. In formula (17,12) noi luăm semnul superior sau inferior, după cum vrem să luăm potenţialele retardate sau avansate.

Aici mai apare şi funcţia Δ_1 care are forma:

$$\Delta_1 = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}\vec{R}} \frac{\cos ckT}{k}(d\vec{k}) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}\vec{R} - ic\varkappa T}\,\delta(k^2 - \varkappa^2)\, d\vec{k}\, d\varkappa \tag{17,14}$$

şi care poate fi obţinută din egalitatea (17,8a) prin substituţia $A=0$ şi $B=1$. Funcţiile Δ şi Δ_1 pot fi considerate două soluţii independente relativist invariante, ale ecuaţiei omogene a lui D'Alembert[1]).

Integrînd această expresie după unghiuri, cu ajutorul următoarei ecuaţii [v. şi (10,6)]

$$\int e^{i\vec{k}\vec{R}} f(k)(d\vec{k}) = \frac{4\pi}{R}\int_0^\infty \sin kR \cdot f(k)\, k\, dk. \tag{17,15}$$

---

1) Să observăm că funcţiile Δ şi Δ_1 sînt invariante faţă de transformările Lorentz, deoarece ele sînt compuse din combinaţii invariante: faza $\vec{k}\vec{R} - c\varkappa T$, lungimea cvadridimensională $k^2 - \varkappa^2$ şi volumul cvadridimensional $(d\vec{k})\, d\varkappa$.

Apariţia factorului $\varkappa/|\varkappa|$ în funcţia Δ este legată de imparitatea lui Δ faţă de timpul T.

Observăm că funcţia de semn $\frac{T}{|T|}$ poate fi scrisă de asemenea sub forma $\frac{T}{|T|} = 2\gamma(T)$.

şi ţinînd seama de relaţia (6,7), obţinem

$$\Delta=\frac{1}{4\pi c}\,\frac{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)}{R}=\frac{T}{2\pi\,|T|}\,\delta(R^2-c^2T^2),$$

$$G_1=\frac{c}{2}\,\frac{T}{|T|}\,\Delta=\frac{1}{8\pi}\,\frac{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)+\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)}{R}=\frac{c}{4\pi}\,\delta\,(R^2-c^2T^2). \quad (17,16)$$

De aici se vede, că în conformitate cu proprietăţile fundamentale ale simetriei, pentru funcţia lui Green a ecuaţiei lui D'Alembert, la fel ca pentru orice expresie autoadjunctă, partea ei singulară G_1 este o funcţie pară de coordonate şi timp, în timp ce funcţia Δ este o funcţie pară de coordonate şi o funcţie impară de timp. Caracterul impar al dependenţei lui Δ de T este legat de faptul că partea nesingulară a funcţiei lui Green G_0, proporţională cu Δ, duce la posibilitatea ca cîmpul să fie radiant.

In sfîrşit funcţia:

$$\Delta_1=\frac{1}{2\pi^2\,(R^2-c^2T^2)} \quad (17,17)$$

este o funcţie pară de coordonate şi timp. Este necesar să mai remarcăm că singularităţile funcţiilor Δ şi Δ_1 sînt situate pe conul de lumină.

Pentru soluţiile cu potenţiale retardate găsim:

$$G^r=\frac{c}{2}\left(\frac{T}{|T|}+1\right)\Delta=\frac{1}{4\pi R}\,\delta\left(T-\frac{R}{c}\right). \quad (17,18)$$

In cazul potenţialelor avansate însă, avem:

$$G^a=\frac{c}{2}\left(\frac{T}{|T|}-1\right)\Delta=\frac{1}{4\pi R}\,\delta\left(T+\frac{R}{c}\right). \quad (17,19)$$

In felul acesta, funcţia lui Green a ecuaţiei lui d'Alembert poate fi prezentată sub forma:

$$G=\frac{c}{4\pi}\,\delta\,(R^2-c^2T^2)\left(1+\varepsilon\,\frac{T}{|T|}\right), \quad (17,20)$$

în care punem $\varepsilon=1$, în cazul potenţialelor retardate şi $\varepsilon=-1$ pentru potenţialele avansate; în sfîrşit, pentru semisuma potenţialelor retardate şi avansate, $\varepsilon=0$.

Limitîndu-ne la potențialele retardate, obținem expresia cunoscută pentru soluția ecuației lui D'Alembert:

$$\varphi=\int \frac{\delta\left(t'-t+\frac{R}{c}\right)}{R}\rho(\vec{r}',\ t')(d\vec{r}')\,dt'=\int \frac{\rho(\vec{r}',\ t')}{R}(d\vec{r}'), \qquad (17{,}21)$$

unde în ultima integrală $t'=t-\frac{R}{c}$.

§ 18. Rezolvarea ecuației lui D'Alembert în cazul oscilațiilor monocromatice

Un interes deosebit pentru multe probleme ale fizicii matematice îl prezintă studiul radiației unui oscilator armonic punctiform. In acest caz, variația cu timpul a sursei de unde este descrisă de legile:

$$\rho(\vec{r}',\ t)=a\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0)\,e^{-i\omega t'}, \qquad (18{,}1)$$

unde ω este pulsația oscilațiilor, iar $\vec{r}_0$ vectorul de poziție al sursei.

Limitîndu-ne la soluțiile cu potențialele retardate, vom găsi pentru funcția de undă căutată, conform egalităților (17,2) și (17,9):

$$\varphi=4\pi ca\sum_n v_n^*(\vec{r}_0)\,v_n(\vec{r})\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega t'}\sin c\lambda(t-t')\,dt'. \qquad (18{,}2)$$

Integrînd ultima expresie în raport cu t', obținem:

$$\varphi=4\pi a\sum_n v_n^*(\vec{r}_0)\,v_n(\vec{r})\,e^{-i\omega t}\left[\frac{1}{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c^2}}+i\pi\,\delta\left(\lambda^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\right] \qquad (18{,}3)$$

In cazul potențialelor avansate trebuie să luăm semnul minus[1]) în ultima paranteză în fața factorului (proporțional cu funcția δ), care determină radiația.

---

[1]) Să introducem două funcții:

$$\delta_+(x)=\frac{1}{2}\delta(x)+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ikx}\,dk,$$

Să examinăm cîteva exemple de propagare a undelor monocromatice, care se rezolvă deosebit de simplu cu ajutorul relației (18,3).

După cum se știe, dipolul punctiform este cea mai simplă sursă de unde electromagnetice, al cărui moment electric se poate da sub forma:

$$\vec{P}=\vec{p}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,e^{-i\omega t}. \tag{18,4}$$

Vectorul lui Hertz se exprimă prin momentul dipolului cu ajutorul ecuației:

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{Z}=-4\pi\vec{P}. \tag{18,5}$$

Cîmpurile electromagnetice $\vec{E}$ și $\vec{H}$ sînt legate de $\vec{Z}$ prin relațiile:

$$\vec{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}, \tag{18,6}$$

$$\vec{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}. \tag{18,7}$$

Să studiem propagarea undelor electromagnetice în cel mai simplu canal conductor de unde, de constantă dielectrică $\varepsilon=1$, format de două plane perfect conductoare $x=0$, $x=l$.

Îndreptînd dipolul, aflat în punctul A, pe axa x (sursa îndreptată vertical), avem în coordonate cilindrice (x, $r=\sqrt{y^2+z^2}$, φ) (fig. 10):

$$P_y=P_z=0,\quad P_x=P=p\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,e^{-i\omega t}\,\delta(x-x_0), \tag{18,8}$$

$$Z_y=Z_z=0;\ Z_x=Z,$$

$$\delta_-(x)=\frac{1}{2}\,\delta(x)-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-ikx}\,dk,$$

$$\delta(x)=\delta_+(x)+\delta_-(x).$$

Punînd în ecuații $x=\lambda^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}$, vedem că funcția $\delta_+(x)$ duce automat la unde divergente, iar $\delta_-(x)$ la unde convergente. Expresia (18.3) poate fi obținută de asemenea, din (17,11). V. de exemplu П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, изд. 2-е, ГТТИ, 1937, pag. 213.

iar

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) Z = -2pe^{-i\omega t}\frac{\partial (r)}{r}\delta(x-x_0). \qquad (18,9)$$

Mai departe, conform (18,6) și (18,7) găsim:

$$E_r = \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial x}, \quad E_\varphi = 0, \quad E_x = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2},$$

$$H_r = H_x = 0, \quad H_\varphi = -\frac{\partial^2 Z}{c\partial r \partial t}.$$

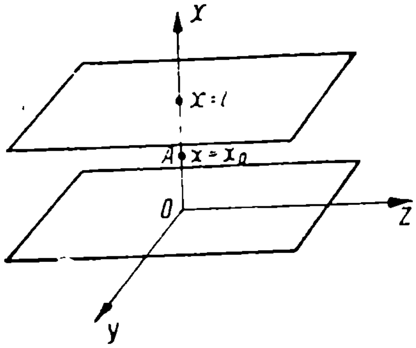

Fig. 10

La limitele de separație dintre canalul conductor de unde și conductorul perfect, adică pe planele $x=0$ și $x=l$, componenta tangențială a vectorului $\vec{E}$ trebuie să se anuleze ($E_r=0$).

In felul acesta avem două condiții la limită:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \qquad (18,10)$$

pentru $x=0$ și pentru $x=l$.

Pentru construirea funcției δ tridimensionale, să formăm din condiția $\nabla^2 v = -\lambda^2 v$, un sistem de funcții ortonormate cilindrice. Deoarece, în problema noastră, avem o simetrie axială, obținem:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\lambda^2 v.$$

Punînd mai departe $v = v_1(r)\,v_2(x)$, găsim:

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} + k_2^2 v_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 v_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_1}{dr} + k_1^2 v_1 = 0, \qquad (18,11)$$

cu condiția ca $\lambda^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Pentru funcțiile v_2, care satisfac condiția la limită (18,10) avem un spectru discret:

$$v_{2n}=\sqrt{\frac{2\alpha_n}{l}}\cos\frac{\pi nx}{l}$$

$$\left(\alpha_0=\frac{1}{2},\quad \alpha_n=1,\quad \text{pentru } n\neq 0\right) \tag{18,12}$$

iar pentru funcția v_1 avem un spectru continuu (v. § 4):

$$v_{1k}=\sqrt{\frac{kdk}{2\pi}}\,J_0(kr).$$

Condițiile de ortonormare vor avea forma:

$$\int_0^l v_{2n}(x)\,v_{2n'}(x)\,dx=\delta_{nn'}, \tag{18,13}$$

$$\int_0^\infty v_{1k}(r)\,v_{1k'}(r)\,2\pi r dr=dk\,\delta(k-k'). \tag{18,14}$$

Ultima egalitate reprezintă condiția de normare pentru un spectru continuu [v. de asemenea (4,22) și (4,23)] de unde, pentru funcția δ tridimensională căutată (la o simetrie azimutală), găsim:

$$\frac{\delta(r)}{r}\,\delta(x-x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{l}\,\alpha_n\int_0^\infty k\,dk\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi nx_0}{l}\,J_0(kr).$$

Substituind ultima relație în (18,3) și ținînd seama de asemenea de (18,8), obținem pentru sursa punctuală:

$$Z=\frac{4}{l}\,pe^{-i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi nx_0}{l}\,F_n, \tag{18,15}$$

unde

$$F_n=\int_0^\infty J_0(kr)\left[\frac{1}{k^2+\frac{\pi^2}{l^2}n^2-\frac{\omega^2}{c^2}}+i\pi\delta\left(k^2+\frac{\pi^2}{l^2}n^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\right]k\,dk. \tag{18,16}$$

Să folosim acum următoarele relaţii [v. de asemenea (11,24)]:

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kr)}{k^2+a^2}\,k\,dk=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(iar),$$

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kr)}{k^2-a^2}\,k\,dk=-\frac{\pi}{2}N_0(ar), \tag{18,17}$$

$$\int_0^\infty J_0(kr)\,\delta(k^2-a^2)\,k\,dk=\frac{1}{2}J_0(ar),$$

care pot fi verificate uşor, dacă ţinem seamă că:

$$N_0(-x)=N_0(x)+2iJ_0(x)$$

şi

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kr)}{k^2\pm a^2}\,k\,dk=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_0^{(1)}(kr)}{k^2\pm a^2}\,k\,dk. \tag{18,18}$$

De aici găsim, pentru vectorul lui Hertz căutat, formula (v. de exemplu, Krasnuşkin) [1]:

$$Z=\frac{i2\pi p}{l}e^{-i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi nx_0}{l}H_0^{(1)}\left(r\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right),$$

care se obţine automat, deoarece în formula noastră fundamentală (18,16) sînt luate în considerare numai potenţialele retardate care duc în cazul de faţă la unde divergente.

§ 19. Oscilaţii nestaţionare

Să găsim mai întîi formulele generale, cu ajutorul cărora putem cerceta propagarea undelor electromagnetice, a celor elastice sau de altă natură, provenind de la o sursă punctiformă (situată în punctul $\vec{r}_0$), care începe să oscileze la momentul $t=0$ cu pulsaţia ω.

[1]) П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, Изд. МГУ, 1947, pag. 17.

Sursa exterioară poate fi exprimată în acest caz simplu nestaționar, sub forma:

$$\rho=\begin{cases} a\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,e^{-i\omega t}; & t>0\,[1],\\ 0; & t<0. \end{cases} \tag{19,1}$$

Conform (18,2) avem expresia următoare pentru potențialul căutat:

$$\varphi=4\pi ca\sum_n v_n^*(\vec{r}_0)\,v_n(\vec{r})\frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-i\omega t'}\sin c\lambda(t-t')dt', \tag{19,2}$$

de unde, integrînd în raport cu t', găsim:

$$\varphi=2\pi a\sum_n v_n^*(\vec{r}_0)\,v_n(\vec{r})\frac{1}{\lambda}\left(\frac{e^{-i\omega t}-e^{-ic\lambda t}}{\lambda-\frac{\omega}{c}}+\frac{e^{-i\omega t}-e^{ic\lambda t}}{\lambda-\frac{\omega}{c}}\right). \tag{19,3}$$

a) Drept prim exemplu, să examinăm propagarea undelor într-un spațiu unidimensional nelimitat (de exemplu într-o coardă infinită) cu condiții la limită naturale.

Fie sursa punctuală situată în originea coordonatelor ($x_0=0$). Funcțiile ortonormate, pentru un spectru continuu au forma:

$$v_k=\sqrt{\frac{dk}{2\pi}}\,e^{ikx}, \tag{19,4}$$

iar valorile proprii, pentru parametrul λ, vor fi:

$$\lambda=|k|.$$

Cu ajutorul (19,3) găsim:

$$\varphi=a\int\frac{e^{ik|x|}+e^{-ik|x|}}{k}\cdot\frac{e^{-i\omega t}-e^{-ickt}}{k-\frac{\omega}{c}}dk. \tag{19,5}$$

---

[1]) Numai partea reală a densității ρ are o valoare esențială, adică:

$$\rho=\begin{cases} a\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\cos\omega t; & t>0;\\ 0; & t<0. \end{cases}$$

Calculînd ultima integrală cu ajutorul teoriei reziduurilor şi lăsînd la o parte partea imaginară, obţinem:

$$\varphi=\begin{cases} \dfrac{2\pi ac}{\omega}\sin\omega\left(t-\dfrac{|x|}{c}\right); & t>\dfrac{|x|}{c}, \\ 0; & t<\dfrac{|x|}{c}. \end{cases} \tag{19,6}$$

In felul acesta, formula (19,3) duce automat la unde divergente, iar alături de viteza de fază găsim, de asemenea, şi viteza frontului undei, viteză care caracterizează propagarea începutului procesului ondulator. In cazul nostru, ambele viteze sînt egale cu viteza luminii.

b) Să studiem oscilaţiile unei coarde de lungime $2l$, fixată la ambele capete, cînd în centrul ei este fixată o sursă punctuală.

Aşezînd sursa în originea coordonatelor ($x_0=0$) putem alege pentru rezolvarea problemei noastre următorul sistem de funcţii ortonormate:

$$v_n=\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi n}{2l}(x+l) \tag{19,7}$$

($n=1,2,3,\ldots.$), care satisfac condiţiile la limită:

$$v_n(-l)=v_n(l)=0. \tag{19,8}$$

Luînd în considerare că valorile proprii ale parametrului λ sînt:

$$\lambda=\frac{\pi n}{2l}, \tag{19,9}$$

găsim, cu ajutorul formulei (19,3):

$$\varphi=2\pi ac^2\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\omega_0 l}{c}\sin\frac{n\omega_0(x+l)}{c}\cdot\frac{1}{ln\omega_0}\times$$
$$\times\left(\frac{e^{-i\omega t}-e^{-in\omega_0 t}}{n\omega_0-\omega}+\frac{e^{-i\omega t}-e^{in\omega_0 t}}{n\omega_0+\omega}\right) \tag{19,10}$$

unde $\omega_0=\frac{\pi c}{2l}$ reprezintă pulsaţia proprie a coardei.

Din (19,10) se vede că potenţialul φ va satisface condiţiile de limită cerută, adică:

$$\varphi(l)=\varphi(-l)=0.$$

Ţinînd seamă în cele ce urmează de relaţia:

$$\sin\frac{n\omega_0 l}{c}\sin\frac{n\omega_0(x+l)}{c}=\frac{1}{2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\omega_0 x}{c}, \qquad (19,11)$$

şi, îndepărtînd partea imaginară, care n-are o importanţă esenţială găsim:

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_0, \qquad (19,12)$$

oscilaţiile forţate φ_1 şi proprii φ_0 ale coardei fiind determinate de relaţiile:

$$\varphi_1=\frac{4\pi ac^2}{l\omega_0^2}\cos\omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\omega_0 x}{c}}{(2n-1)^2-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \qquad (19,13)$$

$$\varphi_0=-\frac{4\pi ac^2}{l\omega_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\omega_0 t\cos\frac{(2n-1)\omega_0 x}{c}}{(2n-1)^2-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \qquad (19,14)$$

Cu ajutorul relaţiei [1])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)y}{(2n-1)^2-\alpha^2}=\frac{\pi}{4\alpha}\frac{\sin\alpha\left(\frac{\pi}{\alpha}-|y|\right)}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\quad(0\leqq|y|\leqq\pi) \qquad (19,15)$$

forma oscilaţiilor produse poate fi totdeauna adusă la forma:

$$\varphi_1=\frac{2\pi ca\cos\omega t\cdot\sin\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\left(1-\frac{|x|}{l}\right)}{\omega\cos\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}}, \qquad (19,16)$$

deoarece în cazul nostru

$$0\leqq\frac{\omega_0|x|}{c}\leqq\frac{\pi}{2}. \qquad (19,17)$$

Soluţia (19,16) este inaplicabilă în cazul rezonanţei:

$$\frac{\omega}{\omega_0}=1,3,5\ldots\text{[2]}),$$

adică atunci cînd numitorul egalităţii (19,16) devine nul. In acest

---

[1]) V. de exemplu, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1948, pag. 277.

[2]) După cum se vede din (19,14) şi (19,13) pentru $\frac{\omega}{\omega_0}=2,4,6\ldots$ nu vom avea condiţia de rezonanţă.

caz, după cum era de aşteptat, obţinem oscilaţii forţate cu o amplitudine crescînd nelimitat.

In cazul rezonanţei trebuie să se manifeste deosebit de intens termenii disipativi. Totuşi, noi nu vom examina aici mai detaliat cazul rezonanţei.

In ceea ce priveşte oscilaţiile proprii, în cazul existenţei termenilor disipativi, pentru $t \to \infty$, oscilaţiile trebuie, în general, să dispară şi vom avea numai oscilaţii forţate care duc la unde staţionare.

Afară de aceasta, prezintă interes să examinăm vibraţiile coardei în intervalul de timp cînd frontul undei nu a ajuns încă la margine, adică să examinăm cazul pentru care $t < \frac{l}{c}$.

Pentru calculul lui φ_0 să folosim identitatea;

$$\cos\frac{(2n-1)\omega_0 x}{c}\cos(2n-1)\omega_0 t = \frac{1}{2}\left[\cos(2n-1)\omega_0\left(t+\frac{|x|}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos(2n-1)\omega_0\left(t-\frac{|x|}{c}\right)\right]. \tag{19,18}$$

Deoarece în cazul nostru $t < \frac{l}{c}$ avem:

$$0 \leq \omega_0\left|t \pm \frac{|x|}{c}\right| \leq \pi, \tag{19,19}$$

putem efectua sumarea după n cu ajutorul relaţiei (19,15). Atunci:

$$\varphi_0 = \frac{-\pi ac}{\omega\cos\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}}\left\{\sin\left[\frac{\pi\omega}{2\omega_0}-\omega\left(t+\frac{|x|}{c}\right)\right]+\sin\left[\frac{\pi\omega}{2\omega_0}-\omega\left|t-\frac{|x|}{c}\right|\right]\right\}. \tag{19,20}$$

De aici este uşor de obţinut pentru funcţia de undă căutată expresia:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{2\pi ac}{\omega}\sin\omega\left(t-\frac{|x|}{c}\right); & t > \frac{|x|}{c}, \\ 0; & t < \frac{|x|}{c}, \end{cases} \tag{19,21}$$

găsită de noi pentru o coardă infinită. Faptul că ambele rezultate coincid, este uşor de explicat din punct de vedere fizic, deoarece pînă ce unda nu ajunge la limită, valoarea lui φ nu poate depinde de condiţiile la limită.

§ 20. Integrarea ecuației undelor a lui Klein

După cum se va arăta mai jos (v. cap. V) în mecanica cuantică relativistă modernă și mai ales în teoria mezonilor și a forțelor nucleare, joacă un rol deosebit de important cea mai simplă ecuație cuantică relativistă a undelor De Broglie care sînt asociate cu o masă de repaus [1]);

$$L\varphi = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = -4\pi\rho. \tag{20,1}$$

In ecuația (20,1) mărimea k_0^2 poate fi privită ca o constantă în cadrul teoriei clasice a cîmpului, indiferent de interpretarea ei cuantică, ca termen cu masă de repaus. Această ecuație descrie cîmpul particulelor cu o masă de repaus $\frac{hk_0}{2\pi c}$, creat de o sursă de densitate ρ. Pentru precizare și avînd în vedere justificarea de mai sus (v. § 44), vom vorbi despre aceste particule ca despre mezoni scalari.

---

[1]) In mecanica cuantică s-a stabilit întîi de O. Klein (1926) ecuația undelor pentru o particulă liberă cu masa de repaus m:

$$(E^2 - c^2p^2 - m^2c^4)\varphi = 0,$$

unde operatorii energiei E și a impulsului $\vec{p}$ sînt definiți de egalitățile:

$$E = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} = \frac{h}{2\pi i}\nabla;$$

h fiind constanta lui Planck și c viteza luminii.

Inlocuind masa m prin $\frac{hk_0}{2\pi c}$, obținem partea stînga a ecuației (20,1) după ce simplificăm ecuația undelor cu $\frac{h^2c^2}{4\pi^2}$. Klein a ajuns la ecuația sa, tratîndu-o ca pe o ecuație a undelor într-un spațiu ajutător pentadimensional. In adevăr, ultimul termen din ecuația (20,1) este echivalent cu derivata a doua în raport cu coordonata a cincea, cu condiția de ciclicitate: $\frac{\partial^2}{\partial x_5^2} = -k_0^2$, dacă $\psi = \psi(x, y, z, t)\, e^{ik_0x_5}$. Curînd după această lucrare, ecuația (20,1) a fost stabilită de mulți autori pe cale obișnuită, aplicînd relația relativistă dintre energie și impuls, considerată drept operator, asupra funcției de undă φ.

Mai departe, într-o discuție a unuia dintre noi (Ivanenko cu V. A. Ambartumian) s-a arătat posibilitatea de a scrie, prin analogie cu cazul cîmpului electromagnetic, în partea dreaptă a egalității (20,1) un termen caracterizînd o sursă pentru undele φ.

Dacă în punctele de la infinit nu sînt surse, atunci putem căuta soluția ecuației (20,1) sub forma:

$$\varphi(\vec{r}, t) = 4\pi \int G(\vec{r}, \vec{r}', t, t')\rho(\vec{r}', t')\,(d\vec{r}')\,dt'. \tag{20,2}$$

In deplină analogie cu soluția ecuației lui D'Alembert, funcția lui Green G se va constitui din două părți: partea singulară G_1, care conform definiției generale e dată de:

$$\begin{aligned} G_1 &= -L^{-1}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t') = \\ &= \frac{c}{16\pi^4}\int \frac{e^{i\vec{k}\vec{R}-i\varkappa cT}}{k^2-\varkappa^2+k_0^2}(d\vec{k})\,d\varkappa = \\ &= \frac{c}{16\pi^3}\frac{T}{|T|}\int e^{i\vec{k}\vec{R}}\cdot\frac{\sin\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right)}{\sqrt{k^2+k_0^2}}(d\vec{k}), \end{aligned} \tag{20,3}$$

$$\text{unde } \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}', \quad T = t-t',$$

și o parte nesingulară G_0, care este soluția ecuației omogene (20,1) ($G = G_1 + G_0$).

In cazul de față două soluții independente ale ecuației omogene sînt funcțiile D relativist invariante care sînt de fapt *funcții „comutator"*.[1])

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}\vec{R}}\frac{\sin cT\sqrt{k^2+k_0^2}}{\sqrt{k^2+k_0^2}}(d\vec{k}), \\ D_1 &= \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}\vec{R}}\frac{\cos cT\sqrt{k^2+k_0^2}}{\sqrt{k^2+k_0^2}}(d\vec{k}). \end{aligned} \tag{20,4}$$

Funcția G_1, după cum se vede din (20,3), este legată de D prin intermediul relației:

$$G_1 = \frac{c}{2}\frac{T}{|T|}D. \tag{20,5}$$

---

1) Funcțiile Δ și Δ_1 sînt cazuri particulare ale funcțiilor (20,4) cînd masa particulelor (mezonilor) este nulă, adică

$$\Delta = \lim_{k_0\to 0} D \quad \text{și} \quad \Delta_1 = \lim_{k_0\to 0} D_1.$$

Invarianța relativistă a funcțiilor D și D_1 se demonstrează pe aceeași cale ca și pentru Δ și Δ_1 (v. § 17).

Vom obţine o soluţie care va corespunde potenţialelor retardate sau avansate, dacă punem:

$$G_1 = \frac{c}{2} D \tag{20,6}$$

pentru potenţialele retardate şi

$$G_1 = -\frac{c}{2} D. \tag{20,7}$$

pentru potenţialele avansate.

Integrînd ecuaţia (20,4) în raport cu unghiurile θ, φ cu ajutorul relaţiei (17,15) obţinem:

$$D = -\frac{1}{2\pi^2 R}\frac{\partial f}{\partial R}, \quad D_1 = -\frac{1}{2\pi^2 R}\frac{\partial f_1}{\partial R}, \tag{20,8}$$

unde

$$\begin{aligned} f &= \int_0^\infty \frac{\cos kR}{\sqrt{k^2+k_0^2}} \sin\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right) dk, \\ f_1 &= \int_0^\infty \frac{\cos kR}{\sqrt{k^2+k_0^2}} \cos\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right) dk. \end{aligned} \tag{20,9}$$

Mărimile f_1 şi $i\frac{T}{|T|} f$ sînt respectiv partea reală şi imaginară a integralei:

$$S = f_1 + i\frac{T}{|T|} f = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{k^2+k_0^2}} e^{i\sqrt{k^2+k_0^2}\, c\,|T|} dk. \tag{20,10}$$

Să facem schimbarea de variabilă:

$$k = k_0 \operatorname{sh} \varphi. \tag{20,11}$$

In afară de aceasta, putem pune pentru $c\,|T| > R$

$$c\,|T| = \alpha \operatorname{ch} \varphi_0, \quad R = \alpha \operatorname{sh} \varphi_0,$$

unde φ_0 este o constantă, iar $\alpha = \sqrt{c^2T^2 - R^2}$.

La fel, avem pentru $c\,|T| < R$:

$$c\,|T| = \alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_0, \quad R = \alpha_1 \operatorname{ch} \varphi_0,$$

unde:

$$\alpha_1 = \sqrt{R^2 - c^2T^2}.$$

Atunci, integrala (20,10) ia forma:

$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0\alpha\,\mathrm{ch}\,\varphi}\,d\varphi, & c\,|\,T\,|>R,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0\alpha_1\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi; & c\,|\,T\,|<R,\end{cases} \tag{20,12}$$

de unde, ţinînd seama de paritatea funcţiei de sub integrală în raport cu variabila φ, găsim:

$$f=\frac{T}{|T|}\int_0^{\infty}\sin(k_0\alpha\,\mathrm{ch}\,\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{T}{|T|}\frac{\pi}{2}J_0\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right);\quad c\,|\,T\,|>R, \tag{20,13}$$[1]

$$f=0;\qquad c\,|\,T\,|<R.$$

Analog, avem, pentru funcţia a doua, f_1:

$$f_1=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(k_0\,\alpha_1\,\mathrm{ch}\,\varphi)\,d\varphi= \\ =-\dfrac{\pi}{2}N_0\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right); & c\,|\,T\,|>R,\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\cos(k_0\,\alpha_1\,\mathrm{sh}\,\varphi)\,d\varphi= \\ =\dfrac{\pi}{2}iH_0^{(1)}\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right); & c\,|\,T\,|<R.\end{cases} \tag{20,14}$$

Pentru calculul funcţiei D şi a funcţiei lui Green, trebuie să derivăm în raport cu R expresia (20,13). In acest caz, trebuie să ţinem seama că derivata unei funcţii discontinue este egală cu produsul dintre funcţia δ, care descrie singularitatea din punctul

[1]) Valoarea integralelor (20,13) şi (20,14) poate fi găsită în cartea lui Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, pag. 89—90.

de discontinuitate și amplitudinea discontinuității. Afară de aceasta pentru $c^2T^2-R^2>0$ obținem:

$$\frac{\partial J_0\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right)}{\partial R}=-\frac{k_0R}{\sqrt{c^2T^2-R^2}}\,\frac{\partial J_0\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right)}{\partial\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right)}=$$

$$=\frac{k_0R}{\sqrt{c^2T^2-R^2}}\,J_1\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right).$$

De aceea:

$$D=\frac{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)}{4\pi Rc}-$$

$$-\begin{cases}\dfrac{k_0}{4\pi\sqrt{c^2T^2-R^2}}\,J_1\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right); & T>\dfrac{R}{c},\\ 0; & \dfrac{R}{c}>T>-\dfrac{R}{c},\\ -\dfrac{k_0}{4\pi\sqrt{c^2T^2-R^2}}\,J_1\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right); & T<-\dfrac{R}{c}.\end{cases}\qquad(20,15)$$

După cum se vede din formula (20,4), funcțiile D și D_1 pot fi scrise de asemenea astfel:

$$D=\frac{1}{8\pi^4}\,\frac{T}{|T|}\int\frac{e^{i\vec{k}\vec{R}-i\varkappa T}}{k^2-\varkappa^2+k_0^2}\,(d\vec{k})\,d\varkappa,$$

$$D_1=\frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}\vec{R}-i\varkappa T}\,\delta\left(k^2-\varkappa^2+k_0^2\right)(d\vec{k})\,d\varkappa.$$

Cu ajutorul formulelor

$$\frac{1}{k^2-\varkappa^2+k_0^2}=-\frac{i}{2}\int\frac{\alpha}{|\alpha|}\,e^{i\alpha\left(k^2-\varkappa^2+k_0^2\right)}d\alpha,$$

$$\delta\left(k^2-\varkappa^2+k_0^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\alpha\left(k^2-\varkappa^2+k_0^2\right)}\,d\alpha$$

putem transforma uşor ultimile expresii

$$D=\frac{2}{c}\frac{T}{|T|}G_1=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \cos\left[\alpha(c^2T^2-R^2)+\frac{k_0^2}{\alpha}\right]d\alpha,$$
$$D_1=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \sin\left[\alpha(c^2T^2-R^2)+\frac{k_0^2}{\alpha}\right]d\alpha. \tag{20,15 a}$$

De aici ţinînd seama de relaţia

$$\int_0^\infty e^{i\left(\alpha a+\frac{k_0^2}{\alpha}\right)}\frac{d\alpha}{\alpha}=\pi i H_0^{(1)}(k_0\sqrt{a}),$$

obţinem din nou pentru funcţia D expresia (20,15), iar pentru funcţia D_1 găsim o relaţie care poate fi, de asemenea, obţinută din formulele (20,8) şi (20,14):

$$D_1=\begin{cases}\dfrac{k_0^2}{4\pi}\dfrac{N_1\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right)}{k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}}, & c^2T^2>R^2,\\[2ex] \dfrac{k_0}{2\pi^2}\dfrac{K_1\left(k_0\sqrt{R^2-c^2T^2}\right)}{k_0\sqrt{R^2-c^2T^2}}, & c^2T^2<R^2.\end{cases}$$

In particular, pentru $k_0^2=0$ putem obţine uşor din formulele (20,15 a) valoarea funcţiilor $\Delta=\lim\limits_{k_0^2\to 0} D$ şi $\Delta_1=\lim\limits_{k_0^2\to 0} D_1$ pentru ecuaţia lui d'Alembert [v. relaţiile (17,16) şi (17,17)].

Din (20,15) găsim funcţia lui Green a ecuaţiei lui Klein pentru soluţiile cu potenţialele retardate:

$$G^r=\frac{c}{2}\left(\frac{T}{|T|}+1\right)D=\frac{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}-$$
$$-\begin{cases}\dfrac{ck_0}{4\pi\sqrt{c^2T^2-R^2}}J_1\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right); & T>\dfrac{R}{c}\\[2ex] 0; & T<\dfrac{R}{c},\end{cases} \tag{20,16}$$

şi pentru cazul potenţialelor avansate:

$$G^a = \frac{c}{2}\left(\frac{T}{|T|} - 1\right) D = \frac{\delta\left(T + \frac{R}{c}\right)}{4\pi R} -$$

$$-\begin{cases} 0; & T > -\frac{R}{c}, \\ \frac{ck_0}{4\pi\sqrt{c^2T^2 - R^2}} J_1\left(k_0\sqrt{c^2T^2 - R^2}\right); & T < -\frac{R}{c}. \end{cases} \qquad (20,17)$$

Expresia finală pentru potenţialul φ cu soluţii retardate, ţinînd seama de (20,2) va avea, forma:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \left[\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} - \right.$$

$$\left. - k_0 \int_0^\infty \rho\left(\vec{r}', t - \frac{1}{c}\sqrt{\xi^2 + R^2}\right) \frac{J_1(k_0\xi)}{\sqrt{\xi^2 + R^2}} d\xi \right] (d\vec{r}'). \qquad (20,18)$$

Pentru $k_0 = 0$, adică atunci cînd masa de repaus a particulelor corespunzătoare cîmpului mezonic (adică mezonilor) este nulă, potenţialul φ trece în soluţia ecuaţiei lui d'Alembert (adică a ecuaţiilor pentru potenţialele cîmpului electromagnetic), din care se vede că, de la sursă, încep să se propage unde cu viteza c. In cazul nostru, cînd undele corespund particulelor ce posedă o masă de repaus, afară de undele ce se propagă cu viteza c (viteza frontului undelor), se vor propaga de la sursă şi alte unde cu tot felul de viteze $c' = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{R^2}}}$, mai mici decît c. Din punct de vedere fizic, rezultatul obţinut este evident. In adevăr, în teoria cîmpului electromagnetic, semnalele sînt transmise de fotoni, care se propagă cu viteza luminii deoarece masa lor de repaus este zero. In cazul nostru însă, semnalele sînt transmise de mezoni a căror masă de repaus nu este nulă şi de aceea viteza lor de propagare este cuprinsă între limitele 0 şi c.

Formula (20,18) capătă o formă mai simplă dacă membrul al doilea al ecuației (20,1) variază după o lege armonică, adică

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \tag{20,19}$$

avînd pulsația $\omega > ck_0$ [1]).

In acest caz, vom căuta o soluție a ecuației (20,1) de forma

$$\varphi = \varphi_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}.$$

Luînd în considerare identitatea:

$$k_0^2 \varphi = -\frac{k_0^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{20,20}$$

vom reduce ecuația (20,1) la ecuația lui D'Alembert descriind propagarea semnalelor cu viteza: $v = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - c^2 k_0^2}} > c$:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = -4\pi\rho. \tag{20,21}$$

Soluția ultimei ecuații, considerînd potențialele retardate are forma:

$$\varphi = \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} (d\vec{r}). \tag{20,22}$$

Viteza de fază v a undelor depinde de pulsația ω, totuşi, pentru undele monocromatice ea este constantă.

Soluția (20,22) poate fi obținută și din expresia mai generală (20,18).

---

[1]) Cazul $\omega < ck_0$ nu dă loc la un proces ondulatoriu și nu prezintă nici un interes special.

§ 21. Integrarea ecuației undelor într-un spațiu n-dimensional [1])

Intr-un spațiu n-dimensional, ecuația generalizată a undelor de tipul Klein are forma:

$$L\varphi = \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \varphi = -4\pi\rho\,(x_s, t), \qquad (21,1)$$

unde ρ este densitatea, iar φ — funcția de undă căutată.

Generalizînd raționamentele paragrafului precedent vom găsi următoarea expresie a funcției lui Green, corespunzătoare potențialelor retardate și condițiilor la limită naturale:

$$G_n = \begin{cases} \dfrac{c}{(2\pi)^n} \displaystyle\int e^{i \sum\limits_{s=1}^{n} k_s R_s} \cdot \dfrac{\sin cT \sqrt{k^2+k_0^2}}{\sqrt{k^2+k_0^2}} (dk)_n ; & T>0, \\ 0 ; & T<0, \end{cases} \qquad (21,2)$$

unde:

$$k^2 = \sum_{s=1}^{n} k_s^2, \quad (dk)_n = dk_1 dk_2 \ldots dk_n, \quad T = t - t', \quad R_s = x_s - x_s',$$

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + \ldots + R_n^2}.$$

Să găsim, înainte de toate, funcția lui Green în cazul cînd avem ($n=1$) sau două ($n=2$) dimensiuni.

$$G_1 = \begin{cases} \dfrac{c}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \cos kR \, \dfrac{\sin cT \sqrt{k^2+k_0^2}}{\sqrt{k^2+k_0^2}} dk ; & T>0, \\ 0 ; & T<0, \end{cases} \qquad (21,3)$$

sau, ținînd seamă de relațiile (20,9) și (20,13) obținem:

$$G_1 = \begin{cases} \dfrac{c}{2} J_0\left(k_0 \sqrt{c^2T^2 - R^2}\right) ; & T > \dfrac{R}{c}, \\ 0 ; & T < \dfrac{R}{c} . \end{cases} \qquad (21,4)$$

[1]) Vezi Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН, 36, 37, 1940.

La fel găsim pentru al doilea caz ($n=2$):

$$G_2=\begin{cases}\dfrac{c}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{kJ_0(kR)}{\sqrt{k^2+k_0^2}}\sin\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right)dk; & T<0,\\ 0; & T<0,\end{cases}\tag{21,5}$$

dacă luăm în considerare că:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikR\cos\varphi}\,d\varphi=2\pi J_0(kR).\tag{21,6}$$

Integrala (21,5) este cunoscuta integrală discontinuă a lui Sonin[1])

$$G_2=\begin{cases}\dfrac{c}{2\pi}\dfrac{\cos\left(k_0\sqrt{c^2T^2-R^2}\right)}{\sqrt{c^2T^2-R^2}}; & T>\dfrac{R}{c},\\ 0; & T<\dfrac{R}{c}.\end{cases}\tag{21,7}$$

Pentru calculul funcției lui Green, în cazul a trei sau a unui număr mai mare de dimensiuni[2]), este mai comod să introducem coordonate sferice, care în spațiul n-dimensional vor fi legate de cele carteziene cu ajutorul relațiilor:

---

[1]) După cum se știe integrala discontinuă a lui Sonin (v. P. O. Кузьмин, Бесселевы функции, pag. 150) are forma

$$\int_0^\infty J_m(bt)\frac{J_n(a\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{n/2}}t^{m+1}\,dt=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{b^m}{a^n}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{x}\right)^{n-m-1}J_{n-m-1}\left(x\sqrt{a^2-b^2}\right); & a>b>0,\\ 0; & 0<a<b,\end{cases}\tag{21,7, a}$$

unde $n>m>-1$, iar numărul x poate avea orice valoare complexă. Pentru a obține relația noastră (21,7) trebuie pus $n={}^1/_2$, $m=0$.

[2]) Mai precis, formulele obținute pot fi folosite începînd cu $n=2$.

$$\begin{aligned} k_1 &= k \cos\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2}, \\ k_2 &= k \sin\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2}, \\ k_3 &= k \cos\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2}, \\ k_4 &= k \cos\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_n &= k \cos\theta_{n-2}, \end{aligned} \tag{21,8}$$

de unde:

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2},$$

iar coordonatele sferice variază între limitele:

$$0 \leqslant k < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{21,9}$$

Formînd jacobianul, găsim expresia cunoscută a elementului de volum în coordonate sferice:

$$(dk)_n = k^{n-1}\, dk\, d\varphi \sin\theta_1\, d\theta_1 \sin^2\theta_2 d\theta_2 \dots \sin^{n-2}\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \tag{21,10}$$

Unghiul solid în spațiu n-dimensional va fi:

$$\omega_n = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin^2\theta_2\, d\theta_2 \dots \int_0^{\pi} \sin^{n-2}\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{21,11}$$

Pentru deducerea ultimei relații s-a ținut seamă că[1])

$$\int_0^{\pi} \sin^s\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \sqrt{\pi}. \tag{21,12}$$

Indreptînd axa n după vectorul R_s, avem:

$$R_n = R, \quad R_s = 0 \quad (\text{dacă } s \neq n). \tag{21,13}$$

De aceea:

$$\sum_{s=1}^{n} k_s R_s = k_n R = kR \cos\theta_{n-2}. \tag{21,14}$$

---

[1]) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, pag. 10.

Integrînd egalitatea (21,2) în raport cu unghiurile $\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}$ avem:

$$G_n = \frac{c}{(2\pi)^n} \omega_{n-1} \int_0^\infty k^{n-1} \frac{\sin\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right)}{\sqrt{k^2+k_0^2}} dk \times$$

$$\times \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta \, e^{ikR\cos\theta} d\theta; \quad T>0,$$

$$G_n = 0; \qquad T<0. \tag{21,15}$$

Ținînd seamă mai departe de relația[1]:

$$\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta \, e^{ikR\cos\theta} d\theta = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(kR)}{\left(\frac{kR}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \tag{21,16}$$

putem pune funcția G_n sub forma:

$$G_n = \begin{cases} \dfrac{cR}{(2\pi R)^{\frac{n}{2}}} \displaystyle\int_0^\infty k^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(kR) \frac{\sin\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right)}{\sqrt{k^2+k_0^2}} dk; & T>0, \\ 0; & T<0. \end{cases} \tag{21,17}$$

Să examinăm, înainte de toate, cazul electrostatic generalizat. In acest caz, în locul funcției lui Green G_n a ecuației undelor n-dimensionale este comod să introducem funcția lui Green a ecuației statice n — dimensionale a lui Laplace: $\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_s^2} = -4\pi\rho$, a cărei parte singulară este:

$$G_n^{st} = \int_0^\infty G_n dT = \frac{1}{2\pi(2\pi R)^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty k^{\frac{n}{2}} J_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(kR) \frac{dk}{k^2+k_0^2}. \tag{21,18}$$

[1] Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. II, ГТТИ, 1934, pag. 178.

Ultima integrală poate fi calculată cu ajutorul egalității[1])

$$\int_0^\infty k^{\frac{n}{2}} J_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(kR)\frac{dk}{k^2+k_0^2}=k_0^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} K_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(k_0R). \qquad (21,19)$$

In acest caz găsim funcția lui Green:

$$G_n^{st}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{k_0}{2\pi R}\right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(k_0R). \qquad (21,20)$$

In particular, punînd $n=3$ obținem funcția lui Green a ecuației lui Poisson generalizată în cazul termenului cu masa de repaus:

$$G_3^{st}=\frac{e^{-k_0R}}{4\pi R}. \qquad (21,21)$$

In aceste raționamente este vorba peste tot de partea singulară. La trecerea către cazul limită ($k_0=0$) trebuie luată în considerație relația[2]):

$$x^s K_s(x)_{x\to 0}=2^{s-1}\Gamma(s). \qquad (21,22$$

Atunci

$$G_{n0}^{st}=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}}R^{n-2}}. \qquad (21,23)$$

In cazul cînd $n=3$ găsim din nou funcția lui Green a ecuației tridimensionale a lui Poisson:

$$G_{30}^{st}=\frac{1}{4\pi R}. \qquad (21,24)$$

---

[1]) Egalitatea (21,19) poate fi obținută din formula (11,32), punînd $a=0$ $n=1$ și $m=\frac{n}{2}-1$.

[2]) Putem folosi formula (21,22) pentru $s>0$, de aceea funcția lui Green (21,23) privește cazul a trei, patru etc. dimensiuni. Pentru $s=0$ avem $K_0(k_0R)=-$ $-\ln R-\ln\frac{k_0}{2}$. Indepărtînd factorul infinit dar constant $\ln\frac{k_0}{2}$, $k_0\to 0$, obținem funcția lui Green a ecuației bidimensionale a lui Poisson [v. relația (9,7)]

$$G_{20}^{st}=-\frac{1}{2\pi}\ln R.$$

iar cînd $n=4$, funcţia lui Green a ecuaţiei cvadridimensionale a lui Laplace-Poisson:

$$G_{40}^{st}=\frac{1}{4\pi^2R^2} \tag{21,25}$$

La calculul funcţiei lui Green, trebuie să deosebim, în cazul general, cazul cînd numărul dimensiunilor spaţiale este impar ($n=2\nu+1$; $\nu=1,2,3,\ldots$) şi par ($n=2\nu$; $\nu=1,2,3,\ldots$).

In primul caz ($n=3,5,7$ etc.), din egalitatea (21,17) găsim:

$$G_{2\nu+1}=\frac{c}{2\pi(2\pi R)^{\nu-\frac{1}{2}}}\int_0^\infty k^{\nu+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times J_{\nu-\frac{1}{2}}(kR)\frac{\sin\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right)}{\sqrt{k^2+k_0^2}}\,dk;\quad T>0 \tag{21,26}$$

$$G_{2\nu+1}=0;\qquad T<0.$$

Luînd în considerare relaţia:

$$J_{\nu-\frac{1}{2}}(kR)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(-1)^{\nu-1}\left(\frac{R}{k}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{d^{\nu-1}}{(RdR)^{\nu-1}}\frac{\sin kR}{R}, \tag{21,27}$$

găsim:

$$G_{2\nu+1}=\frac{(-1)^{\nu-1}c}{2^\nu\pi^{\nu+1}}\frac{d^{\nu-1}}{(RdR)^{\nu-1}}\frac{1}{R}\times$$

$$\times\int_0^\infty k\sin kR\frac{\sin\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right)}{\sqrt{k^2+k_0}}\,dk;\quad T>0 \tag{21,28}$$

$$G_{2\nu+1}=0;\qquad T<0$$

In particular pentru $\nu=1$

$$G_3=\begin{cases}\dfrac{c}{2\pi^2R}\displaystyle\int_0^\infty k\sin kR\frac{\sin\left(cT\sqrt{k^2+k_0^2}\right)}{\sqrt{k^2+k_0^2}}\,dk, & T>0,\\ 0; & T<0.\end{cases} \tag{21,29}$$

Ultima integrală a fost calculată de noi mai înainte şi este dată de egalitatea (20,16).

După cum se vede din relațiile din urmă, funcția $G_{2\nu+1}$ poate fi exprimată prin funcția G_3:

$$G_{2\nu+1} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\pi)^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{(RdR)^{\nu-1}} G_3. \qquad (21,30)$$

La fel, în cazul unui număr par de dimensiuni, funcția lui Green $G_{2\nu}$ va fi:

$$G_{2\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\pi)^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{(RdR)^{\nu-1}} G_2, \qquad (21,31)$$

iar funcția lui Green, pentru spațiul bidimensional este dată de expresia (21,5).

In sfîrşit, să examinăm problema valabilității principiului lui Huygens în propagarea undelor într-un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni.

După cum se ştie, principiul lui Huygens se reduce la următoarea propoziție: dacă sursa emite unde în intervalul de timp Δt, atunci acest flux de unde trebuie să acționeze asupra receptorului în acelaşi interval de timp Δt, adică viteza de propagare a undelor nu trebuie să depindă de frecvența oscilațiilor sursei şi, în propagarea lor, undele nu trebuie să fie supuse deformației în sensul lățirii şi formării unei „cozi".

Din punctul de vedere al formalismului funcției δ, aceasta înseamnă că funcția lui Green corespunzătoare, trebuie să fie proporțională sau cu $\delta(T-R/c)$ sau cu derivata funcției δ. După cum se vede din formulele noastre, pentru valabilitatea principiului lui Huygens, afară de cerința fundamentală a dispariției masei de repaus la unde sau la particulele care corespund undelor ($k_0=0$), este necesar, de asemenea, ca numărul dimensiunilor să fie impar. Conform egalităților (20,16) şi (21,30) avem în acest caz

$$G_{2\nu+1} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{2(2\pi)^{\nu}} \frac{d^{\nu-1}}{(RdR)^{\nu-1}} \frac{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)}{R}. \qquad (21,32)$$

De aici se vede că potențialul φ va depinde numai de starea sursei luată în momentul anterior. In acest caz, diferența se determină prin timpul necesar pentru parcurgerea cu viteza c a distanței R dintre sursă şi punctul de observație, şi nu apar nici un fel de „cozi", adică unde, care să se mişte cu o viteză mai mică decît c şi care să ducă la lățirea formei trenului de unde.

Nu este dificil de arătat că principiul lui Huygens nu va fi satisfăcut în cazul unui număr par de dimensiuni, chiar la o masă de repaus nulă a particulelor corespunzătoare undei.

In adevăr, din (21,7) şi (21,31) rezultă:

$$G_{2\nu}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{(2\pi)^{\nu}}\dfrac{d^{\nu-1}}{(RdR)^{\nu-1}}\dfrac{1}{\sqrt{T^2-\dfrac{R^2}{c^2}}}; & T>\dfrac{R}{c},\\ 0; & T<\dfrac{R}{c},\end{cases} \tag{21,33}$$

adică potenţialul φ va depinde, în acest caz, de starea sursei nu numai în momentul $t'=t-\frac{R}{c}$, ci şi de starea ei în toate momentele anterioare $t'<t-\frac{R}{c}$: Cu alte cuvinte, afară de frontul undei, care se propagă cu viteza c, va urma după aceasta o întreagă „coadă" de unde, care se mişcă cu viteze diferite, începînd cu zero şi terminînd cu c. După cum se vede din formula (20,16), o „coadă" analogă trebuie să apară şi în cazul unui număr impar de dimensiuni, dacă masa de repaus k_0 este diferită de zero (v. şi § 20).

Problema analogă a valabilităţii principiului lui Huygens, pentru ecuaţiile undelor generalizate n-dimensionale a fost examinată de către Hadamard şi o serie de matematicieni [1]). Termenul suplimentar (însă introdus în ecuaţie cu semn schimbat $+k_0^2\varphi$) era tratat pur formal în acest caz, datorită necunoaşterii interpretării lui fizice ca termen cu masă de repaus. De aceea, datorită motivelor indicate, nu s-a putut obţine o interpretare fizică definitivă a problemei valabilităţii principiului lui Huygens, cu toată corectitudinea formală a rezultatelor lui Hadamard.

§ 22. Propagarea undelor electromagnetice într-un mediu conductor

Ecuaţia care descrie propagarea undelor electromagnetice într-un mediu conductor, are forma aşa numitei ecuaţii a telegrafiştilor:

$$L\varphi=\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2\sigma}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(\vec{r},t)=-4\pi\rho(\vec{r},t), \tag{22,1}$$

[1]) Vezi de exemplu, Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 2, pag. 531, Гостехиздат, 1945.

unde coeficientul constant σ, în cazul de față, este conductibilitatea mediului.

Pentru partea singulară a funcției lui Green, avem, cu condiții la limită naturale:

$$G_1 = -L^{-1}\delta(\vec{R})\delta(T) = \frac{c}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{i\vec{k}\vec{R}-ic\varkappa T}}{k^2-\varkappa^2-2\sigma i\varkappa}(d\vec{k})\,d\varkappa, \tag{22,2}$$

unde $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$, $T=t-t'$.

Aplicînd teoria reziduurilor, obținem [1]:

$$\int \frac{e^{-ic\varkappa T}}{k^2-\varkappa^2-2\sigma\varkappa i}\,d\varkappa = \begin{cases} 2\pi e^{-c\sigma T}\dfrac{\sin\left(cT\sqrt{k^2-\sigma^2}\right)}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}; & T>0, \\ 0; & T<0. \end{cases} \tag{22,3}$$

De aici, găsim pentru funcția lui Green:

$$G = \begin{cases} \dfrac{ce^{-\sigma cT}}{8\pi^3}\displaystyle\int e^{i\vec{k}\vec{R}}\,\frac{\sin\left(cT\sqrt{k^2-\sigma^2}\right)}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}(d\vec{k}); & T>0, \\ 0; & T<0. \end{cases} \tag{22,4}$$

In multe cercetări ne putem mărgini la această formă pentru funcția lui Green. Totuși, integrala (22,4) admite o expresie explicată prin funcțiile lui Bessel.

Integrînd mai departe cu ajutorul relației (17,15) în raport cu unghiurile, avem:

$$G = -\frac{c}{2\pi^2 R}e^{-\sigma cT}\frac{\partial F}{\partial R}, \tag{22,5}$$

unde F este integrala discontinuă a lui Sonin [v. și (21,7a)],

$$F = \int_0^\infty \cos kR\,\frac{\sin\left(cT\sqrt{k^2-\sigma^2}\right)}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}\,dk =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}I_0\left(\sigma\sqrt{c^2T^2-R^2}\right); & T>\dfrac{R}{c}, \\ 0; & T<\dfrac{R}{c}, \end{cases} \tag{22,6}$$

iar I_0 este funcția lui Bessel de argument imaginar.

---

[1] Vom nota că prezența în ecuația (22,1) a primei derivate în raport cu timpul, duce automat la potențialele retardate pentru partea singulară a funcției lui Green. De aceea, limitîndu-ne în general numai la o soluție cu potențiale retardate, partea nesingulară G_0 trebuie să o egalăm cu zero. La fel ca și în ecuația parabolică a conductibilității termice (v. § 16), aici nu poate avea loc soluția numai cu potențialele avansate.

Ţinînd seama că derivata unei funcţii discontinue ne dă funcţia δ, obţinem

$$G=\frac{\delta\left(T-\frac{R}{C}\right)}{4\pi R}e^{-\sigma cT}+$$

$$+\begin{cases}\frac{\sigma c e^{-\sigma cT}}{4\pi\sqrt{c^2T^2-R^2}}I_1\left(\sigma\sqrt{c^2T^2-R^2}\right); & T>\frac{R}{c},\\ 0; & T<\frac{R}{c}.\end{cases} \tag{22,7}$$

După cum se vede din (22,7) principiul lui Huygens nu se va aplica unui mediu conductor, datorită formării unei „cozi" amortizate. Aceasta se leagă fizic de faptul că, în conductori, numai viteza de propagare a frontului undelor electromagnetice este egală cu c, pe cînd semnalul însăşi se lăţeşte şi viteza de fază variază între limitele 0 şi c (v. mai departe).

In particular, pentru $\sigma=0$ (dielectric) vom găsi valoarea de mai înainte pentru funcţia lui Green a ecuaţiei lui D'Alembert:

$$G=\frac{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}. \tag{22,8}$$

în care au apărut automat numai soluţiile cu potenţialele retardate.

Intr-un alt caz limită:

$$c^2\to\infty,\quad \sqrt{\frac{c}{2\sigma}}=a=\text{const},$$

găsim funcţia lui Green pentru ecuaţia conductibilităţii termice în mediul cu trei dimensiuni:

$$G=\frac{1}{8\pi a\sqrt{\pi T^3}}e^{-\frac{R^2}{4a^2T}}. \tag{22,9}$$

Am folosit aici următoarea expresie asimptotică pentru funcţia I_1:

$$I_1(x)_{x\to\infty}=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

In sfîrşit, să găsim soluţia ecuaţiei (21,1) în cazul unei surse punctuale, care radiază unde monocromatice de pulsaţie ω:

$$\rho(\vec{r}',t')=p\,\delta(\vec{r}')\,e^{-i\omega t'}. \tag{22,10}$$

Folosind expresia (22,4) a funcţiei lui Green obţinem:

$$\varphi = \frac{cp}{2\pi^2}\int e^{i\vec{k}\vec{r}}(d\vec{k})\int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega t'-\sigma c(t-t')}\,\frac{\sin[c(t-t')\sqrt{k^2-\sigma^2}]}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}\,dt' \qquad (22,11)$$

sau după integrare cu t':

$$\varphi = \frac{pe^{-i\omega t}}{2\pi^2}\int e^{i\vec{k}\vec{r}}\,\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}-2\sigma\frac{\omega}{c}i}\,(d\vec{k}) \qquad (22,12)$$

Astfel, cînd există termenul amortizat legat de coductibilitate, o simplă împărţire cu operatorul ne dă potenţialele retardate pentru undele monocromatice, fără adăugarea vreunei funcţii auxiliare de tipul G_0, care a fost totuşi necesară în cazul ecuaţiilor lui D'Alembert care admit şi soluţiile cu potenţialele avansate [v. egalitatea (18,3)].

In sfîrşit, calculînd integralele (22,12) găsim

$$\varphi = \frac{p}{r}\,e^{-\beta r}\cdot e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}\,. \qquad (22,13)$$

De aici se vede că viteza de fază a propagării undelor electromagnetice într-un mediu conductor cu coeficientul de conductibilitate σ, este:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\sigma^2\frac{c^2}{\omega^2}}\right)}} \qquad (22,14)$$

şi depinde de frecvenţa oscilaţiilor.

Afară de aceasta, după cum era de aşteptat, undele care se propagă într-un mediu conductor sînt amortizate, iar coeficientul de amortizare β depinde şi el de frecvenţă:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4\sigma^2\frac{c^2}{\omega^2}}-1\right)}\,. \qquad (22,15)$$

In cazul limită al conductibilităţii nule $\sigma=0$, adică al unui dielectric ideal, viteza undelor devine egală cu mărimea constantă c, iar coeficientul de amortizare se anulează.

CAPITOLUL IV

ELECTRODINAMICA CLASICĂ

§ 23. Bazele electrodinamicii clasice

a) *Importanța electrodinamicii clasice în teoria modernă a particulelor și cîmpurilor*

Legile electrodinamicii clasice, adică a toeriei cîmpului electromagnetic şi a particulelor încărcate, sînt în general inaplicabile, în totalitatea lor, la particule elementare, nuclee, atomi, molecule. De exemplu, mişcarea electronilor în atomi şi molecule şi mişcarea protonilor în nuclee, la fel ca şi radiaţia luminii de către nuclee, atomi şi molecule etc., trebuie să fie descrise de către o teorie cuantică a cîmpului şi a particulelor. De asemenea şi mişcarea electronilor liberi în razele cosmice se supune mecanicii cuantice. In toate aceste cazuri, valorile „acţiunii" pe o perioadă a procesului sînt comparabile cu constanta lui Planck $h=6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg.s. Altfel zis, lungimea de undă a lui De Broglie $\Lambda=\frac{h}{p}$, sau pentru viteze mici $\Lambda=\frac{h}{m_0 v}$, este comparabilă cu dimensiunile domeniilor studiate. In particular, în cazul mişcării electronilor în atomi Λ va fi de ordinul de mărime al dimensiunilor orbitelor $\sim 10^{-8}$ cm. S-ar putea crea o impresie nejustă că fizica particulelor elementare trebuie să fie în întregime numai cuantică, în sensul că teoriile clasice reprezintă o aproximaţie complet neutilizabilă. Această exagerare nu corespunde însă realităţii.

Intr-o serie de cazuri, — de exemplu în cazul mişcărilor foarte rapide, — lungimea de undă a lui De Broglie a electronului este mult mai mică decît dimensiunile orbitei sau a intervalului de lungime caracteristic, sau, ceeace se reduce la acelaşi lucru acţiunea pentru o perioadă a procesului este sensibil mai mare decît h. Astfel, pentru $\Lambda \to 0$, sau $h \to 0$, putem trata pe o cale clasică multe procese în care intră particulele elementare, în timp ce o soluţie cuantică precisă ne va da, de regulă, doar corecţii neesenţiale. Acest lucru este valabil, în particular, pentru mişcarea particulelor încărcate în acceleratori, atît în cazul nerelativist al mişcării protonilor, deuteronilor, particulelor α şi a altor nuclee într-un ciclotron, cît şi în cazul mişcării relativiste a particulelor uşoare — a electronilor — în betatroane şi sincrotroane. Teoria mişcării electronilor în acceleratorii de tipul betatronului şi sincrotronului, este unul din domeniile cele mai importante de aplicaţie a teoriei relativiste necuantice a electronului şi a cîmpului electromagnetic. In particular, a fost posibil să se prezică şi să se elaboreze teoria radiaţiei de un tip nou, emisă de electroni în aceste condiţiuni. Această radiaţie este uneori în domeniul vizibil şi se bucură de o serie de particularităţi interesante; este vorba de efectul electronului „luminos" (v. § 43).

Afară de aceasta, teoria relativistă clasică a cîmpului şi a electronului a permis să se explice un fenomen nou: efectul electronului „supraluminos" (efectul Cerenkov), care constă în radiaţia luminoasă a unui electron, care se mişcă uniform într-un mediu, cu o viteză mai mare decît viteza de fază a luminii (v. § 27).

Alături de aceste aplicaţii concrete şi noi, electrodinamica relativistă necuantică modernă devine necesară şi pentru analiza unor probleme principiale, în primul rînd, problema masei proprii şi problema deducerii ecuaţiilor de mişcare ale eclect'onului.

Nici teoria clacică şi nici cea cuantică nu au putut încă să explice natura masei particulelor elementare şi, cu atît mai puţin, să deducă valorile numerice ale acestor mase. Pe baza teoriei clasice a apărut şi a fost utilizată şi în mecanica cuantică ipoteza unei mase „de cîmp", conform căreia energia sau masa proprie a particulelor este datorită energiei cîmpurilor.

Se iveşte aici dificultatea că fiecare cîmp produs de o particulă punctiformă trebuie să aibă o energie infinită, dificultate care nu a fost rezolvată satisfăcător şi definitiv nici prin introducerea unei raze finite a particulei şi nici pe calea vreunui alt mijloc clasic sau cuantic. Deoarece interacţiunea particulelor prin intermediul unui cîmp este în esenţā un efect clasic, interpretat numai în alt mod de către mecanica cuantică, rezultă, în acest caz, că şi „autoacţiunea“ sau acţiunea reciprocă a cîmpului asupra particulei care l-a generat şi efectul apariţiei unei mase proprii de cîmp, — efect legat de aceasta, — este în esenţă de asemenea clasic. Această ipoteză îşi găseşte o puternică justificare în faptul că din constanţa sarcinii electrice elementare e, a vitezei luminii c şi a lungimii r_0 („raza clasică“) se poate alcătui, fără a introduce constanta lui Planck h, o mărime de dimensiunile masei:

$$m = \frac{e^2}{c^2 r_0} \quad \left(\text{sau, invers } r_0 = \frac{e^2}{mc^2}\right).$$

Pe de altă parte nu trebuie, desigur, să uităm existenţa unei mărimi pur cuantice de dimensiunile unei lungimi, a aşa-numitei lungimi de undă Compton:

$$\Lambda_0 = \frac{h}{mc} = \frac{2\pi e^2}{mc^2} \cdot \frac{hc}{2\pi e^2},$$

care este de $2\pi \cdot \alpha^{-1} = 2 \cdot \pi \cdot 137{,}02$ ori mai mare decît raza clasică care caracterizează domeniul lungimii de undă sub care apar efecte cuantice relativiste.

In modul acesta, teoria clasică pare că este în stare să explice apriori, cel puţin în parte, natura masei. Desigur, toate concluziile ei trebuie supuse unei verificări şi precizări cu ajutorul mecanicii cuantice. Pe de altă parte, lăsînd la o parte problema naturii masei, putem să ne punem problema deducerii ecuaţiilor de mişcare relativiste clasice pe baza teoriei necuantice, considerînd m drept o simplă constantă oarecare. In ultimul timp, ambele aceste probleme: deducerea ecuaţiilor de mişcare şi problema masei proprii, au fost destul de mult discutate, atît din punct de vedere cuantic, cît şi clasic.

Oricum ar fi, tratarea clasică ne permite să analizăm mai profund esenţa fizică a problemei, să deosebim latura clasică şi cuantică a ei şi, prin aceasta, teoria clasică, — chiar dacă nu ne poate da o soluţie definitivă, — este capabilă în orice caz, să pregătească terenul pentru aceasta.

Avînd în vedere toate cele expuse mai sus, vom examina în această parte a cărţii atît un şir de probleme principale, cît şi o serie de aplicaţii concrete noi, ale electrodinamicii clasice. Natural, noi nu ne-am oprit asupra unor fenomene bine cunoscute de mult şi expuse în cursurile de teorie a electronilor şi de electrodinamică clasică, — fenomene diverse şi numeroase de radiaţie, propagare şi absorbţie a cîmpurilor electromagnetice şi fenomene de mişcare a electronilor, toate descrise de către electrodinamica necuantică [1]).

b) *Proprietăţile de invarianţă şi de transformare*

Ne vom opri întîi asupra proprietăţilor generale de transformare pe care trebuie să le satisfacă, — conform teoriei relativităţii, — oricare ecuaţii ale cîmpului şi ale particulelor elementare, între care şi ecuaţiile teoriei lui Maxwell-Lorentz, care descriu cîmpul electromagnetic al particulelor încărcate.

După cum se ştie, într-un univers cvadridimensional (spaţiul plus timpul) trebuie să distingem legi de transformare pentru vectori şi tensori contravarianţi şi covarianţi.

Trecerea dela un gen de tensori la celălalt se realizează cu ajutorul tensorilor metrici fundamentali ($g_{\mu\nu}$) şi ($g^{\mu\nu}$), care în cazul simplu cînd gravitaţia lipseşte, adică în cazul unui univers plan (aşa-zis pseudoeuclidian) sînt determinaţi de egalităţile:

$$(g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \qquad (23,1)$$

Valorile respective $g_{\mu\nu}=0, \pm 1$ se numesc valori galileene. Componentele spaţiale vor fi notate cu indici latini $n\,(n=1,2,3)$, iar componenta temporală prin indicele 0. Trecerea dela vectorii covarianţi A_μ la cei contravarianţi A_μ, şi invers, se realizează cu ajutorul formulelor:

$$A^\mu=g^{\mu\nu}A_\nu,$$
$$A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu,$$

unde $\mu, \nu=0, 1, 2, 3$, iar pentru indicii care intră de două ori trebuie să însumăm, adică:

$$g^{\mu\nu}A_\nu\equiv\sum_{\nu=0}^{3}g^{\mu\nu}A_\nu.$$

---

[1]) Я. И. Френкель, Электродинамика, ч 1 и 2, ОНТИ, 1935 Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948; И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1949; Г. А. Лорентц, Теория электронов, ГТТИ, 1934; Р. Беккер, Электронная теория, ОНТИ. 1936; Абрагам-Беккер, Теория электричества, ОНТИ, 1936.

De aici se vede că, componentele temporale pentru ambele genuri de vectori sînt egale între ele ($A^0=A_0$), iar cele spaţiale diferă prin semn ($A_n=-A^n$).

In particular, produsul scalar a doi vectori, — care reprezintă un invariant, este:

$$A^\mu A_\mu = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2.$$

Dacă în locul coordonatei temporale $x_0=ct$ vom introduce mărimea imaginară $x_4=ict$ şi vom pune $A_4=iA_0$, atunci putem să ne mărginim, de exemplu, numai la vectorii covarianţi, din care putem forma produsul scalar invariant:

$$(A,A)=A_\mu A_\mu = A_4^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2=-A_0^2+A_nA_n{}^{1)}.$$

Se vede uşor că, în acest caz, componentele vectorilor covarianţi şi contravarianţe vor fi egale între ele, adică componentele tensorului metric formează o matrice unitate:

$$(g^{\mu\nu})=(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (23,1,a)$$

Funcţiile de undă care descriu cîmpurile şi particulele elementare trebuie să posede anumite proprietăţi de transformare, adică să se schimbe într-un anumit fel faţă de transformarea coordonatelor sau faţă de mişcările corespunzătoare ale sistemelor de referinţă. In cazul teoriei relativiste este vorba de transformări în lumea cvadridimensională (spaţiu — timp); în cazul teoriei aproximative nerelativiste — valabilă numai pentru viteze mici, — este vorba de transformări într-un spaţiu tridimensional şi, separat, de transformări ale timpului, transformări care se reduc în cazul dat la o deplasare a originii de referinţă a timpului. Cea mai mare importanţă o au invarianţii (scalarii), adică mărimile care nu se schimbă la o transformare a sistemelor de coordonate. Ecuaţiile înseşi care ne descriu diferite feluri de cîmpuri şi particule nu trebuie să depindă, conform teoriei relativităţii, de alegerea sistemului de referinţă şi trebuie să-şi păstreze forma lor faţă de diferitele transformări admise.

---

1) Aici şi în cele ce urmează, literele greceşti parcurg valori de la 1 la 4 (x, y, z, ict), iar cele latine de la 1 la 3 (x, y, z).

Condiţia de invarianţă aparţine, în etapa actuală a dezvoltării teoriei cîmpului, unor legi fizice din cele mai generale şi mai profunde care exprimă proprietăţile fundamentale ale spaţiului şi timpului, ale mişcării particulelelor şi ale interacţiunilor lor.

Să enumerăm transformările care lasă invariante ecuaţiile cîmpului şi ale particulelor. Pentru celelalte detalii îl trimitem pe cititor la monografii asupra teoriei relativităţii şi teoriei grupurilor [1]).

1) Inexistenţa unui centru absolut în spaţiu şi a vreunei origini de referinţă a timpului, adică *omogeneitatea* spaţiul-timpului duce la o invarianţă faţă de translaţia originii coordonatelor („principiul relativităţii originii de referinţă"). Prin urmare, toate ecuaţiile trebuie să fie diferenţiale în raport cu cele patru coordonate. Transformările prin translaţia coordonatelor se scriu sub forma unei transformări liniare omogene:

$$x'_\alpha = x_\alpha + a_\alpha \ (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

sau pentru transformări infinitezimale:

$$\delta x'_\alpha = \delta x_\alpha.$$

2) Inexistenţa vreunor direcţii preferate sau izotropia spaţiului tridimensional („principiul relativităţii direcţiilor") duce la o invarianţă faţă de rotaţiile spaţiale tridimensionale.

Transformările ortogonale liniare corespunzătoare ale coordonatelor au forma:

$$x'_r = a_{rs} x_s,$$

sau pentru transformări infinitezimale:

$$\delta x'_r = \delta a_{rs} x_s,$$

unde tensorul δa_{rs} care caracterizează rotaţia infinitezimală este antisimetric $\delta a_{rs} = -\delta a_{sr}$.

După cum rezultă din consideraţii geometrice intuitive, distanţa (sau pătratul distanţei) dintre două puncte, de exemplu de coordonate $(0,0,0)$ şi (x_1, x_2, x_3) în sistemul vechi de coordonate, respectiv $(0,0,0)$ şi (x'_1, x'_2, x'_3) în noul sistem de coordonate, rămîne invariantă, adică:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,$$

sau

$$r^2 = r'^2.$$

[1]) V. B. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947, § 8; В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. I, Гостехиздат, 1949, § 52; В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947; Ф. Мурнаган, Теория представлений групп, ИЛ, 1950.

3) „Principiul relativității mișcărilor uniforme și rectilinii" sau „principiul relativității restrînse" (uneori, pentru prescurtare, se spune simplu „principiul relativității"), stabilit în 1905 de către Einstein și Poincaré pe baza lucrărilor lui Lorentz, afirmă echivalența tuturor — așa-numitelor — sisteme inerțiale de referință, care se mișcă rectiliniu și uniform unul față de altul. Principiul relativității cere includerea unei a patra coordonate, adică a timpului, tratat matematic la fel ca și cele trei coordonate spațiale (x, y, z) și duce la invarianța tuturor ecuațiilor față de așa-numitele transformări Lorentz, care din punct de vedere formal se reduc la rotații în planurile (x, t), (y, t), (z, t) și exprimă trecerea de la un sistem inerțial de referință la un altul. In acest caz, rămîne invariant intervalul sau pătratul distanței dintre două puncte în universul cvadridimensional, de exemplu de coordonate $\vec{r}$, $x_4 = ict$ (în sistemul vechi) și respectiv $\vec{r}'$, $x_4' = ict'$ (în noul sistem) și originea coordonatelor $(0, 0, 0, 0)$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2,$$

sau

$$c^2t^2 - r^2 = c^2t'^2 - r'^2.$$

Datorită semnelor diferite din fața pătratelor coordonatelor spațiale și temporale, acest spațiu cvadridimensional se numește uneori pseudoeuclidian.

Astfel ajungem, în mod evident, la izotropia întregului spațiu — timp cvadridimensional și la condiția de invarianță a ecuațiilor față de rotațiile cvadridimensionale, care conțin atît rotațiile obișnuite, cît și transformările Lorentz în sensul propriu al cuvîntului. Formula generală a transformărilor cvadridimensionale are aceiași formă a transformărilor ortogonale liniare, ca și în cazul tridimensional, dacă vom subînțelege că indicii coordonatelor parcurg patru valori în loc de trei: $\mu = 1, 2, 3, 4$:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu,$$

(sau pentru transformări infinit mici $\delta x'_\mu = \delta a_{\mu\nu} x_\nu$, unde $\delta a_{\mu\nu}$ este un tensor de ordinul doi antisimetric cvadridimensional, infinit mic, care determină rotația respectivă). In cazul particular al transformărilor lui Lorentz, care se reduc la o rotație a sistemului de coordonate în planul $x_1, x_4 = ict$, sau, cu alte cuvinte, în cazul trecerii de la un sistem inerțial la un altul care este în mișcare relativă cu viteza $v=\beta c$ de-a lungul axei x_1, avem următoarele formule:

$$x_1'=\frac{x_1+i\beta x_4}{k},$$
$$x_2'=x_2,$$
$$x_3'=x_3,$$
$$x_4'=\frac{x_4-i\beta x_1}{k},$$

unde $k=\sqrt{1-\beta^2}$.

Deci matricea transformărilor Lorentz are, în acest caz particular, forma:

$$a_{\mu\nu}=\begin{vmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\beta}{k} & 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{vmatrix}.$$

După cum se ştie, pentru viteze mici, transformările Lorentz trec în transformări galilieene, pentru care timpul rămîne neschimbat:

$$x_1'=x_1+i\beta x_4,\quad x_4'=x_4;\quad \text{sau}\quad x'=x-vt,\quad t'=t.$$

4) Libertatea în alegerera unui sistem de coordonate drept sau stîng, ca şi simetria în raport cu trecutul şi viitorul duc la invarianţa faţă de oglindiri ale axelor de coordonate (*inversiuni*) şi de asemenea la invarianţa faţă de inversiunea timpului. Aceste transformări se scriu sub forma:

$$x_1'=-x_1,\quad x_2'=-x_2,\quad x_3'=-x_3,\quad x_4'=-x_4\quad (t'=-t).$$

Este foarte important faptul că toate ecuaţiile diferenţiale fundamentale ale mecanicii cuantice relativiste, ca şi ecuaţiile mecanicii clasice şi nerelativiste, sînt reversibile în raport cu timpul. Ireversibilitatea însă, care intervine, în general, prin consideraţii statistice, poate fi de asemenea considerată, de exemplu în cazul emisiunii de radiaţii prin condiţii suplimentare (în care intervin potenţiale *retardate*). Desigur că, în cazul inversiunilor, nu poate fi vorba de transformări continue sau transformări infinitezimale.

5) Putem da cinematicii cîmpurilor şi particulelor elementare aşa numita formă general — covariantă — scriindu-le, după Einstein (1916) sub formă tensorială cu ajutorul componentelor ten-

sorului metric $g_{\mu\nu}$ [1]). Formulele de transformare ale coordonatelor vor avea, în acest caz, forma ($x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$, $ict=x_4$):

$$dx'^{\mu}=a^{\mu}_{\nu}dx^{\nu} \qquad (\mu, \nu=1, 2, 3, 4),$$

unde coeficienţii:

$$a^{\mu}_{\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

sînt acum funcţii de punct şi nu constante, ca în cazurile anterioare din § 2 şi 3. In acest caz rămîne invariant, ca şi înainte, „intervalul" sau pătratul distanţei infinit mici dintre două puncte, distanţă care are acum forma:

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}.$$

O astfel de formă a intervalului este caracteristică pentru geometria universului curb, în cazul de faţă a universului lui Lobacevski-Riemann şi nu pentru un spaţiu plan, pseudoeuclidian.

Observăm că în sistemul galileean de coordonate, cu $x_4=ict$, coeficientul $g_{\mu\nu}$ formează matricea unitate.

Coeficienţii $g_{\mu\nu}$ devin diferiţi de matricea unitate, în primul rînd cînd sistemul galileean de coordonate începe să se mişte cu acceleraţie, fapt datorită căruia apar aşa-numitele „forţe de inerţie" şi, în al doilea rînd, în prezenţa cîmpului gravitaţional. Aceste fapte au dus la apariţia orientării cinematice în dezvoltarea teoriei generale a relativităţii, care se reduce la încercări de a identifica forţele gravitaţionale cu „forţele de inerţie" (principiul echivalenţei). Această orientare însă s-a dovedit a fi sterilă.

In adevăr, în primul caz, tensorul lui Riemann-Christoffel, adică tensorul de ordinul 4 format într-un anumit fel din derivatele

---

[1]) Dacă nu avem de-a face cu scalari sau vectori şi, în general, cu tensori de un ordin întreg, ci avem de-a face cu spinori — prin care sînt descrişi, de exemplu, electronii, conform teoriei cuantice a lui Dirac, precum şi toate particulele de spin semiîntreg — atunci pentru scrierea ecuaţiei lui Dirac şi a altor ecuatii sub formă general-covariantă cerută de prezenţa gravitaţiei, trebuie să folosim matricile generalizate ale lui Dirac γ_{μ}, care apar în urma factorizării sau descompunerii lui $g_{\mu\nu}$, aşa cum a fost arătat de către Fock şi Ivanenko.

Aceste matrici satisfac relaţia:

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}=2g_{\mu\nu}.$$

Д. Иваненко, Изв. АН СССР, 73, 1929; V. Fock und D. Iwanenko Phys. Zs., **30**, 648, 1929, C. R., Paris, 1929; V. Fock, Zs. f. Phys., **54**, 798, 1929 de ordinul 1 şi 2 ale coeficienţilor $g_{\mu\nu}$ se anulează $R_{\mu\nu\varepsilon\lambda}=0$, datorită cărui fapt, printr-o simplă transformare de coordonate, putem anula în toate punctele spaţiului „forţele de inerţie" şi putem trece la metrica galileeană.

In al doilea caz (adică în prezenţa cîmpului gravitaţional), tensorul lui Riemann-Christoffel va fi diferit de zero. Şi în acest ultim caz însă, pentru punctul considerat se poate găsi un astfel de sistem de coordonate în care tensorul $g_{\mu\nu}$ să formeze matricea unitate şi primele lui derivate să se anuleze — e drept numai într-un domeniu mic din vecinătatea punctului. Derivatele de ordinul doi vor fi însă diferite de zero în cazul general şi ele se anulează numai în cazul particular al unui cîmp gravitaţional, omogen în domeniul considerat.

In modul acesta, prin alegerea oricărui alt sistem de coordonate, forţele gravitaţionale reale nu pot fi compensate şi în aceasta constă deosebirea lor principială faţă de fictivele „forţe de inerţie". Prin urmare, principiul echivalenţei gravitaţiei şi a cîmpului de acceleraţie, are loc numai pentru o regiune mică, în cazul cînd cîmpul gravitaţional este omogen. Incercările de a-l extinde, pentru cazul general, sînt evident greşite.

6) Ecuaţiile cîmpului nu sînt, în general, invariante faţă de transformări conforme, care păstrează neschimbată ecuaţia conului luminos: $c^2t^2-r^2=0$, dar pentru care mărimea intervalului nu se păstrează, ci se înmulţeşte cu o funcţie oarecare de coordonate. După cum a fost arătat însă de către Bateman şi Cunningham, ecuaţiile electrodinamicii lui Maxwell sînt invariante faţă de transformări conforme şi aceasta este strîns legat de faptul că undele electromagnetice nu au masă de repaus ($m=0$). Prin urmare, fotonilor, care conform teoriei cuantice corespund acestor unde, nu li se poate atribui o lungime caracteristică de tipul lungimii de undă Compton $\Lambda_0=\frac{h}{mc}$ [1]. După cum a arătat însă Pauli, ecuaţiile cuantice ale lui Dirac pentru electroni nu vor fi totuşi invariante faţă de transformări conforme, în cazul unei mase nule (ceea ce este valabil probabil pentru neutrino).

Transformările de mai sus se refereau direct la coordonate. Să examinăm acum două tipuri importante de transformări care se aplică chiar funcţiilor de undă reale sau complexe şi care caracterizează cîmpul.

---

[1] H. Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), **8**, 228, 1909; E. Bessel-Hagen, Math. Ann., **84**, 258, 1921.

7) Plecînd de la posibilitatea intuitivă de alegere arbitrară a originii de referință a potențialelor electromagnetice, cu alte cuvinte, de la posibilitatea de a adăuga la potențiale termeni care nu schimbă intensitățile cîmpului, ajungem la condiția de invarianță a ecuațiilor electromagnetice și a ecuațiilor tuturor celorlalte particule care interacționează cu acest cîmp, față de transformările „de etalonare" („de calibrare") ale potențialelor (transformările de etalon de speța a doua, după nomenclatura lui Pauli) și care au forma:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \text{ sau } \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f;$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},$$

unde f este o funcție scalară de cele patru coordonate. De aceea potențialele electromagnetice nu pot intra explicit în ecuațiile lui Maxwell, care, în conformitate cu cele de mai sus, conțin numai derivate ale acestor potențiale (mai amănunțit v. § 24).

8) Cu toate că potențialele electromagnetice intră explicit în ecuațiile lui Schrödinger, Dirac și în alte ecuații cuantice ale cîmpurilor și particulelor, variația etalonării (calibrării) acestora se compensează prin variația fazei la funcțiile de undă.

Posibilitatea intuitivă de a schimba faza funcțiilor de undă cuantice, ne sugerează condiția de invarianță a tuturor așa numitelor ecuații de undă cuantice (printre care și ecuația nerelativistă a lui Schrödinger) față de transformarea *de fază sau „de calibrare"* a funcțiilor de undă (transformarea de etalon de speța întîia, după nomenclatura lui Pauli):

$$\psi' = \psi e^{\frac{2\pi i e}{hc} f}.$$

In adevăr, mărimile direct observabile sînt combinații biliniare ale funcțiilor de undă cuantice, funcții în general complexe, de tipul densității de probabilitate: $\psi^*\psi$, care nu se schimbă la o astfel de transformare.

Pe de altă parte, funcțiile de undă reale în mecanica cuantică și intensitățile cîmpului, constituie în sine mărimi fizice măsurabile. In felul acesta, mărimi direct măsurabile sînt mărimile invariante față de transformările de etalonare (calibrare). In teoria clasică a cîmpului, toate mărimile sînt reale și toate sînt desigur măsurabile.

Teoria cuantică a particulelor încărcate diferă de teoria clasică numai prin invarianţa faţă de transformările de etalon de speţa întîia, adică faţă de transformările de fază ale funcţiilor de undă (pct 8); în teoria cuantică a particulelor neutre această transformare nu are desigur loc. In cazul neglijării influenţei gravitaţiei, adică în afara cadrului teoriei generale a relativităţii, transformările nu mai au loc (pct. 5). Poziţia specială a transformărilor conforme (pct. 6) a fost subliniată. Invarianţa, sau mai precis covarianţa ecuaţiilor faţă de toate celelalte transformări este obligatorie. In aproximaţia nerelativistă, valabilă în descrierea mişcărilor lente şi a proceselor cu un bilanţ mic de energie, este evident că grupul transformărilor Lorentz cade (pct. 3).

Vom observa acum că transformările Lorentz (pct. 3), la fel ca şi translaţia (pct. 1) şi rotaţiile tridimensionale (pct. 2), precum şi transformările de coordonate de tipul de la pct. 5 şi 6 şi transformările de etalonare (pct. 7 şi 8) formează grupuri de transformări continue, adică două transformări succesive pot fi înlocuite printr-o transformare de acelaşi tip. De exemplu, două transformări de rotaţie sînt echivalente unei singure rotaţii, etc. In fiecare grupă există o transformare unitate (identică) şi o transformare inversă.

Pe de altă parte, este evident că transformările de inversiune nu formează în sine, desigur, un grup de transformare, dar împreună cu transformările ortogonale propriu-zise (pct. 3) sau (pct. 2), formează un grup mai general de transformări ortogonale reale, pentru care determinantul format din coeficienţii a_{rs}, este egal cu ± 1, în timp ce, în cazul rotaţiilor pure, determinantul este egal cu $+1$.

Este foarte important de subliniat că invariaţiei ecuaţiilor care descriu un cîmp oarecare şi prin urmare, invariaţiei langrangeanului sau a integralei variaţionale a acţiunii respective, faţă de fiecare grup continuu de transformări în parte, îi corespunde o lege specială de conservare (teorema lui Noether)[1]. De exemplu, din invarianţa tuturor ecuaţiilor faţă de translaţia originii celor trei coordonate spaţiale şi a originii timpului (pct. 1) rezultă legile universale de conservare a celor trei componente ale cantităţii de-

[1]) E. Noether, Goettingen Nachrichten, 235, 1918; Bessel-Hagen, Math, Ann., **84**, 258, 1921 (aplicaţii la electrodinamica lui Maxwell); M. A. Markov, Phys. Zs. der Sowjetunion, **10**. 773, 1936 (Aplicaţii la teoria electronului lui Dirac).

mişcare şi a energiei (în total patru legi). Invarianţa tuturor ecuaţiilor faţă de rotaţii în spaţiu (pct. 2) duce la legea universală a conservării momentului cantităţii de mişcare (trei legi de conservare). Invarianţa tuturor ecuaţiilor faţă de transformările Lorentz, adică faţă de rotaţiile în planurile (xt), (yt), (zt), duce la legea generalizată de conservare a mişcării centrului de greutate (trei legi de conservare). Cele zece legi fundamentale de conservare arătate mai sus corespund unei invarianţe universale faţă de transformările continue, în particular — infinitezimale, ale grupului finit, notat prin G_{10}, şi care depinde în total de $(4+3+3=10)$, zece parametri.

Invarianţa specială a ecuaţiilor lui Maxwell faţă de transformările conforme duce la relaţii noi de tipul legilor de conservare, care însă nu au vreun sens fizic obişnuit direct, ceea ce subliniază încă odată poziţia exclusivă a acestui grup [1]).

Mai jos, în § 30, vom da demonstraţia teoremei lui Noether pentru cazurile particulare ale translaţiei şi rotaţiei coordonatelor, cazuri care ne interesează.

Să enumărăm acum pe scurt, diferitele tipuri de funcţiuni de undă, în general complexe, care pot descrie proprietăţile ondulatorii ale particulelor elementare şi pot constitui acel „material constructiv“, din care, cu ajutorul condiţiilor de invarianţă arătate mai sus, se poate construi teoria oricărui tip de cîmpuri.

1. Funcţia scalară (sau invariantul, adică tensorul de rang 0). Scalarul ψ nu se schimbă la nici o transformare.

2. Vectorul cvadridimensional cu patru componente $\psi_\mu = A_1$, A_2, A_3, A_4 (tensor de rangul I).

3. Tensorul de rang II, care poate fi obţinut, în particular luînd produsul a doi vectori.

---

[1]) Vom mentiona că grupul general de transformări de coordonate G_0 este finit și depinde de zece parametri ($\rho=10$). Pe de altă parte, de exemplu, în cazul transformării de etalon a potențialelor cîmpului electromagnetic (pct. 7) avem un grup infinit $G_{\infty\rho} = G_{\infty 1}$, care este definit de o funcție oarecare de etalonare ($\rho=1$). Exact la fel, transformările punctuale arbitrare ale teoriei generale a relativității (pct. 5) formează un grup infinit, determinat de patru funcții arbitrare: $G_{\infty 4}$ ($\rho=4$) (legate de transformările celor patru coordonate). In cazul invariantei fată de transformări infinitezimale ale unui grup infinit oarecare G_∞ are loc teorema lui Hilbert, care afirmă existența a ρ identități între derivatele variaționale lagrangeene ale functiei de acțiune corespunzătoare și derivatele ei. De exemplu, datorită existentei a patru identități în teoria generală a relativității, rămîn numai șase potențiale gravifice $g_{\mu\nu}$. (D. Hilbert, Math. Ann., **92**, 1, 1924; Gesamm. Werke, Bd. III).

In teorie pot fi importanţi atît tensorii antisimetrici de rangul doi, care au şase componente (hexavectori),

$$H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu},$$

ca, de exemplu, tensorul cîmpului electromagnetic format din derivatele potenţialului vector cuadridimensional, cît şi tensorii simetrici, de exemplu, tensorul metric:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

care are zece componente şi care joacă rolul potenţialelor gravifice.

Se pot folosi de asemenea şi tensori de ordin superior pentru descrierea unor cîmpuri oarecare, totuşi, pînă acum, nu s-a ivit încă vreo necesitate specială pentru a recurge la aceştia.

4. Se pot folosi, de asemenea, drept funcţii de undă pentru cîmpuri oricare, funcţii de undă „duale" unui scalar (pseudoscalar) sau unui vector (pseudovector). Mai amănunţit v. § 46.

5. Pentru descrierea proprietăţilor ondulatorii ale particulelor de spin semiîntreg (de exemplu electron, proton, neutron) este necesar să folosim spinorii sau tensorii de rang $^1/_2$ (se foloseşte de asemenea denumirea de semivectori). Tensorii obişnuiţi şi spinorii se pot trata împreună ca spin-tensori sau, după Belinfante, ca undori[1]). In momentul de faţă se încearcă elaborarea unei teorii a funcţiilor de undă, în care aceste funcţii sînt tensori (sau spinori, v. pag. 118), de rang superior şi sînt legate, după cum se arată, de particule de spin superior[2]).

c) *Ecuaţiile fundamentale ale electrodinamicii clasice*

După ce am obţinut datele de bază asupra invarianţei faţă de grupurile de transformări şi asupra caracterului mărimilor din care se construieşte teoria unui cîmp oarecare, putem trece la analiza electrodinamicii clasice, adică a teoriei relativiste necuantice a cîmpului electromagnetic şi a particulelor încărcate. Ecuaţiile cîmpului se pot obţine dintr-un principiu variaţional, dacă se cunoaşte funcţia corespunzătoare a lui Lagrange.

---

[1]) Э. Картан, Теория спиноров, ИЛ, 1947; F. Belinfante: Teory of heavy quanta, Hague, 1940.

[2]) V. de exemplu, И. Гельфанд и А. Яглом, ЖЭТФ, 18, 703, 1948.

In paragraful de faţă vom nota coordonatele electronului prin:

$$\xi_\mu = \vec{\xi},\ ic\tau.$$

Aceste coordonate depind de timpul propriu s (egal cu τ într-un sistem de coordonate de repaus); vom nota derivata în raport cu acest timp propriu printr-un punct, adică $\dot{\xi}_\mu = \frac{d\xi_\mu}{ds}$. Pentru coordonatele cîmpului electromagnetic vom scrie $x_\mu = \vec{r},\ ict$.

Conform formalismului multitemporal al teoriei relativităţii, vom caracteriza particulele şi cîmpul prin coordonatele lor temporale individuale.

Noi nu vom lua în considerare acum magnetismul propriu al particulelor care are, în fond, o natură cuantică, iar prin sarcini vom înţelege, pentru a ne fixa ideile, electronii [1]).

Tensorul cîmpului electromagnetic $H_{\mu\nu}$ este legat de cele patru componente ale vectorului cvadridimensional care reprezintă potenţialul $A_\mu = \vec{A},\ i\varphi$, prin relaţiile

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{23,2}$$

iar

$$\begin{pmatrix} H_{23} & H_{31} & H_{12} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & H_y & H_z \\ iE_x & iE_y & iE_z \end{pmatrix}, \tag{23,3}$$

unde $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sînt vectorii cîmpului electric şi magnetic. In felul acesta, mărimile fundamentale ale electrodinamicii clasice, pe baza cărora se construieşte întreaga teorie a cîmpului, sînt potenţialul scalar φ şi potenţialul vector $\vec{A}$.

La baza întregii electrodinamici clasice, ca şi în cazul altor cîmpuri, este indicat să punem principiul variaţional sau principiul minimei acţiuni pentru funcţia acţiunii respective (integrala acţiunii) S sau pentru funcţia lui Lagrange L, legată direct de cea dintîi. Anularea variaţiei secţiunii: $\delta S = 0$, ne va da ecuaţiile căutate sub forma ecuaţiilor lui Euler ale problemei variaţionale.

---

[1]) V. mai departe § 47, unde este tratată o problemă analogă asupra legăturii nucleonilor cu cîmpul mezonic vectorial, în cazul cînd particulele posedă sarcini cvasielectrice şi momente cvasimagnetice.

Funcţia S este constituită din trei părţi:

$$S = S_1 + S_2 + S_3. \tag{23,4}$$

Partea S_1 este o funcţie de coordonate şi determină ecuaţia mişcării libere a electronului; partea S_2 este o funcţie de potenţialele A_μ şi determină ecuaţia cîmpului electromagnetic liber în lipsa surselor, iar ultima parte mixtă, S_3, este o funcţiune de mărimi care caracterizează atît cîmpul cît şi particula, şi va descrie interacţiunea dintre electron şi cîmpul electromagnetic. Acţiunea S, ca şi fiecare din cele trei părţi ale ei, trebuie să fie un invariant faţă de toate transformările admise, enumerate mai sus, transformări ale celor patru coordonate şi ale funcţiilor de undă, adică ale potenţialelor cîmpului.

Este important de subliniat că, în cazul unor proprietăţi de transformare date ale mărimilor din care se construieşte S, şi cu condiţia ca gradul derivatelor să fie minim şi ecuaţiile cîmpului să fie liniare, funcţiunile S_1, S_2, S_3, şi prin aceasta ecuaţiile diferenţiale ale cîmpului se obţin în mod univoc, iar expresia definitivă pentru S depinde numai de constante arbitrare cu care pot fi înmulţite părţile componente ale acţiunii. In cazul acesta, constanta care intră în S_1 este de fapt masa de repaus m a particulei, a cărei valoare se ia din experienţă; constanta care intră în S_2 este un factor de normare, care determină alegerea unităţilor, în cazul nostru — a unităţilor Gauss. In sfîrşit, constanta din S_3 este coeficientul de cuplaj al particulei încărcate cu cîmpul sau sarcina electrică (într-un caz mai general, în S_3 intră şi momentul magnetic, care determină cuplajul particulei „magnetice" cu cîmpul).

Funcţia acţiunii pentru o particulă liberă, va avea forma unei integrale, luată de-a lungul unei linii de univers, dintre două puncte oarecare ale lumii cvadridimensionale:

$$S_1 = -mc^2 \int ds, \tag{23,5}$$

deoarece intervalul ds este unicul invariant care se poate forma din diferenţialele coordonatelor unei particule punctiforme. In loc de aceasta, putem scrie, pentru comoditate:

$$S_1 = -mc \int \sqrt{-(\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu)}ds,$$

dacă ținem seama că invariantul $(\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu)$, care reprezintă pătratul vitezei cvadridimensionale, este egal cu $-c^2$, după cum va fi arătat mai departe.

Luînd în considerare că:

$$-\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = -\dot{\xi}_4^2 - \dot{\xi}_n \dot{\xi}_n = \left(\frac{cd\tau}{ds}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

unde $\vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{d\tau}$ este viteza tridimensională a mişcării particulei, putem pune:

$$S_1 = \int L_1 d\tau.$$

Funcția lui Lagrange L_1, definită în felul acesta, este egală, în cazul unei particule libere, cu expresia cunoscută din teoria relativității:

$$L_1 = mc^2 - mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{23,6}$$

In expresia din urmă am adăugat un termen constant mc^2, care nu modifică ecuațiile de mişcare. In aproximația nerelativistă pentru viteze mici $v \ll c$, lagrangeanul capătă forma cunoscută din mecanica clasică a lui Newton,

$$L_1 = \frac{mv^2}{2}, \tag{23,7}$$

ceea ce justifică alegerea constantelor din lagrangean.

Să trecem la partea mixtă S_3. Singurul invariant admisibil, din care se poate construi funcția de acțiune S_3, are forma:

$$S_3 = \frac{e}{c} \int ds \int \rho\,(x - \xi)\, \dot{\xi}_\mu (A_\mu + A_\mu^i)\,(dx). \tag{23,8}$$

Aici volumul cvadridimensional este $(dx) = (d\vec{r})\,dt = dx\,dy\,dz\,dt$, iar A_μ şi A_μ^i sînt, respectiv, potențialele generate de electronul însuşi şi cele generate de cîmpul exterior. Nu este greu de văzut că acest invariant se construieşte după o regulă care va fi utilizată mereu în cele ce urmează: vectorul particulei (adică viteza $\dot{\xi}_\mu$) se înmulţeşte cu vectorul cîmpului $(A_\mu + A'_\mu)$ [1].

Mărimea invariantă ρ, avînd caracterul de densitate, poate fi prezentată sub forma [2]:

$$\rho(x-\xi) = \frac{c}{(2\pi)^4} \int D(\vec{k}, k_4)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{\xi}) - ick_4(t-\tau)} (d\vec{k})\, dk_4,$$

unde factorul de formă D trebuie să fie o funcţie invariantă de componentele vectorului $k_\nu = \vec{k}, k_4$, de exemplu o funcţie a invariantului cvadridimensional care reprezintă pătratul lungimii: $k^2 - k_4^2$; $(dk) = (d\vec{k})\, dk_4$.

In particular, pentru un electron punctiform trebuie să punem $D = 1$. In acest caz:

$$\rho = \delta(\vec{r} - \vec{\xi})\, \delta(t-\tau). \qquad (23{,}9)$$

Ţinînd seamă că $\dot{\xi}_4 = ic\dot{\tau}$, $\dot{\vec{\xi}} = \vec{v}\dot{\tau}$ ($\vec{v}$ este viteza tridimensională), expresia S_3 pentru un electron punctiform poate fi scrisă sub forma:

$$S_3 = e \int \left[\frac{\vec{v}}{c} (\vec{A} + \vec{A}^i) - \varphi - \varphi^i \right] d\tau, \qquad (23{,}8a)$$

din care putem găsi uşor forţa lui Lorentz.

In sfîrşit partea S_2 a funcţiei acţiunii, — care se referă la cîmpul însuşi, — va fi:

$$S_2 = \int L_0 (dx), \qquad (23{,}10)$$

unde L_0 este o funcţie invariantă de cîmpurile $H_{\mu\nu}$.

---

[1]) Dacă am lua în considerare magnetismul propriu al particulei, ar trebui să adăugăm aici încă un termen, egal cu produsul dintre tensorul momentului magnetic şi electric al particulei $\mu_{\alpha\beta}$ şi tensorul cîmpului $H_{\alpha\beta}$ (v. § 47) adică $\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$.

[2]) Noi am introdus a patra coordonată imaginară numai pentru a defini cîmpurile, pentru a evita necesitatea folosirii simultane a componentelor co- şi contravariante, a căror diferenţă este neesenţială în lipsa gravitaţiei, adică în afara cadrului teoriei relativităţii generale. Dacă însă, timpul intră în elementul de volum cvadridimensional sau ca argument pentru densitatea sarcinilor, este mai simplu să-l lăsăm real.

In particular, putem ajunge la ecuaţiile lui Maxwell-Lorentz ale cîmpului electromagnetic, care ne interesează (adică la ecuaţii de ordinul întîi şi liniare în raport cu $H_{\mu\nu}$) numai cu ajutorul invariantului lui Larmoor, care este [1]:

$$L_0 = I_1 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2). \qquad (23,11)$$

Alte combinaţii invariante fundamentale, alcătuite din funcţii de cîmp, duc fie la ecuaţii neliniare (al doilea invariant fundamental al cîmpului: $I_2 = (\vec{E} \cdot \vec{H})^2$ [2]), fie la ecuaţii care depind explicit de potenţiale, adică ecuaţii care nu satisfac condiţia de invarianţă la etalonare (al treilea invariant fundamental al cîmpului $I_3 = \varphi^2 - A^2 = -A_\mu A_\mu$). Asupra acestei chestiuni ne vom opri în celelalte paragrafe (v. § 32, 33 şi 47).

Cînd facem variaţia acţiunii în raport cu timpul propriu, — ceea ce va trebui să ne ducă la ecuaţia de mişcare a particulei în cîmpul electromagnetic, — putem lăsa la o parte S_2, al cărei integrant nu depinde de timpul propriu s.

---

[1] Deoarece nu ne interesează acum ecuaţiile diferenţiale care descriu numai cîmpurile exterioare libere $H^i_{\mu\nu}$, nu introducem în lagrangean cîmpuri exterioare. In cazul contrar, ar fi trebuit să scriem, de exemplu, în locul lui L_0:

$$L_0' = -\frac{1}{16\pi} (H_{\mu\nu} + H^i_{\mu\nu})(H_{\mu\nu} + H^i_{\mu\nu}).$$

Cîmpurile exterioare au fost introduse de noi numai în expresia mixtă a funcţiei acţiunii pentru a putea determina acţiunea cîmpului exterior asupra mişcării electronului.

[2] Invariantul I_2 se poate scrie sub forma:

$$I_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} \right)^2$$

unde $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ este pseudotensorul antisimetric unitate, de ordinul patru cu ajutorul căruia putem pune în corespondenţă tensorul antisimetric dat $H_{\alpha\beta}$, cu tensorul dual $\tilde{H}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\alpha\beta}$. Atunci produsul tensorului dual cu cel fundamental ne va da un pseudoscalar: $\tilde{H}_{\gamma\delta} H_{\gamma\delta}$ (produsul vectorului polar E cu vectorul axial H) al cărui pătrat va fi un scalar (invariant). Mai amănunţit v. § 46.

In modul acesta, pentru această problemă, funcţia acţiunii va căpăta forma:

$$S' = \int L' ds, \tag{23,12}$$

cu lagrangeanul:

$$L' = -mc\sqrt{-\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu} + \frac{e}{c}\int \rho(x-\xi)\left[\dot{\xi}_\mu (A_\mu + A^i_\mu)\right](dx), \tag{23,13}$$

Ecuaţia lui Euler a problemei variaţionale date $\delta S' = 0$, cu condiţia dispariţiei variaţiilor la ambele limite de integrare $(\delta\xi_\nu)_1 = (\delta\xi_\nu)_2 = 0$, dă:

$$\frac{\delta L'}{\delta \xi_\mu} = \frac{\partial L'}{\partial \xi_\mu} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_\mu} = 0. \tag{23,14}$$

Din (23,3) rezultă:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}} = \frac{mc\,\dot{\xi}_\mu}{\sqrt{-\dot{\xi}_\varrho \dot{\xi}_\varrho}} + \frac{e}{c}\int \rho(x-\xi)(A_\mu + A^i_\mu)(dx),$$

unde

$$\dot{\xi}_\varrho \dot{\xi}_\varrho = \dot{\xi}_n \dot{\xi}_n - c^2 \dot{\tau}^2,$$

de unde

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_\mu} = \frac{mc\,\ddot{\xi}_\mu}{\sqrt{-\dot{\xi}_\varrho \dot{\xi}_\varrho}} + \frac{mc\,\dot{\xi}_\mu (\ddot{\xi}_\sigma \dot{\xi}_\sigma)}{(-\dot{\xi}_\varrho \dot{\xi}_\varrho)^{\frac{3}{2}}} + \frac{e}{c}\int \frac{\partial \rho(x-\xi)}{\partial \xi_\nu}\dot{\xi}_\nu (A_\mu + A^i_\mu)(dx).$$

Luînd în considerare mai departe egalitatea:

$$\frac{\partial L'}{\partial \xi_\mu} = \frac{e}{c}\int \frac{\partial \rho(x-\xi)}{\partial \xi_\mu}\dot{\xi}_\mu (A_\nu + A^i_\nu)(dx),$$

şi de asemenea relaţia:

$$\int \frac{\partial \rho(x-\xi)}{\partial \xi_\mu} f(x)(dx) = \int \rho(x-\xi)\frac{\partial f}{\partial x_\mu}(dx), \tag{23,15}$$

găsim următoarea ecuaţie de mişcare a particulei cu masa de repaus m:

$$\frac{mc\,\ddot{\xi}_\mu}{\sqrt{-\dot{\xi}_\sigma\dot{\xi}_\sigma}}+\frac{mc\,\dot{\xi}_\mu(\ddot{\xi}_\sigma\dot{\xi}_\sigma}{(-\dot{\xi}_\varrho\dot{\xi}_\varrho)^{\frac{3}{2}}}=F_\mu+F^i_\mu. \tag{23,16}$$

Aici, aşa numita forţă de autoacţiune (adică forţa de reacţiune a cîmpului propriu asupra particulelei) sau forţa de interacţiune dintre „elementele" particulei este:

$$F_\mu=\frac{e}{c}\dot{\xi}_\nu\int\rho(\xi-x)H_{\mu\nu}(x)(dx). \tag{23,17}$$

In particular, pentru un electron punctiform avem expresia:

$$F_\mu=\frac{e}{c}\dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu}(\xi). \tag{23,18}$$

La fel găsim că forţa care acţionează asupra particulei din partea cîmpului exterior, este de aceiaşi formă şi ea coincide ca formă cu expresia cunoscută a forţei lui Lorentz:

$$F^i_\mu=\frac{e}{c}\dot{\xi}_\mu H^i_{\mu\nu}(\xi). \tag{23,19}$$

Cîmpurile $H_{\mu\nu}$ şi $H^i_{\mu\nu}$ sînt tensori antisimetrici. De aceea ele sînt ortogonale cu produsul simetric $\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu$.

Intr-adevăr:

$$\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu H_{\nu\mu}=\frac{1}{2}\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu(H_{\mu\nu}+H_{\nu\mu})=0.$$

De aici rezultă că forţele F_μ şi F^i_μ trebuie să fie ortogonale pe vectorul viteză $\dot{\xi}_\mu$:

$$\dot{\xi}_\mu F_\mu=\dot{\xi}_\mu F^i_\mu=0.$$

Luînd în considerare ultimele egalităţi, găsim din (23,16) că vitezele şi acceleraţiile cvadridimensionale sînt ortogonale:

$$\ddot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu=0. \tag{23,20}$$

Cu alte cuvinte, pătratul vitezei cvadridimensionale trebuie să rămînă o mărime constantă:

$$\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu=\dot{\xi}_n\dot{\xi}_n-c^2\dot{\tau}^2=\text{const.} \tag{23,21}$$

Mărimea constantă poate fi găsită din condiţia ca pentru un electron imobil să avem $\dot{\xi}_n=0$, $\dot{\tau}=1$, adică:

$$\text{const}=-c^2.$$

De aceea ecuaţia mişcării de translaţie a unei particule încărcate capătă forma definitivă:

$$m\ddot{\xi}_\mu=F^i_\mu+F_\mu \tag{23,22}$$[1]

Să trecem acum la deducerea ecuaţiilor cîmpului electromagnetic pe calea variaţiei acţiunii S în raport cu potenţialele electromagnetice. Acum putem lăsa la o parte partea S_1, care nu depinde de potenţiale.

Avem atunci evident:

$$S''=\int L\,(dx), \tag{23,23}$$

unde lagrangeanul este:

$$L=L_0+\frac{e}{c}\int\rho\,(x-\xi)\,[\dot{\xi}_\mu(A_\mu+A^i_\mu)]\,ds. \tag{23,24}$$

Din ecuaţiile lui Euler ale principiului variaţional $\partial S''=0$, şi, cu condiţia dispariţiei variaţiei (∂A^i_ν) la limitele de integrare, găsim:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu}=\frac{\partial L}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}}=0. \tag{23,25}$$

Aici:

$$A_{\mu,\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

Notînd tensorul momentelor cîmpului (deplasărilor) prin $D_{\mu\nu}$:

$$D_{\mu\nu}=4\pi\frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}}, \tag{23,26}$$

găsim ecuaţiile diferenţiale generale pentru determinarea cîmpurilor:

$$\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{4\pi e}{c}\int\rho\,(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds. \tag{23,27}$$

---

[1]) Problema forţei de autoacţiune F_μ va fi examinată mai amănunţit mai departe (v. §§ 31 şi 34).

In particular, conform ecuaţiei (23,11), pentru cîmpul maxwellian

$$D_{\mu\nu}=H_{\mu\nu}. \tag{23,28}$$

De aceea, ecuaţiile cîmpului electromagnetic Maxwell-Lorentz capătă următoarea formă definitivă:

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{4\pi e}{c}\int \rho(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds, \tag{23,29}$$

unde în partea dreaptă, stă expresia densităţii curentului cvadridimensional.

Pentru un electron punctiform avem:

$$\rho(x-\xi)=\delta(\vec{r}-\vec{\xi})\,\delta(t-\tau) \tag{23,30}$$

Substituind expresia (23,30) în (23,29) şi integrînd în raport cu $\delta(t-\tau)$, obţinem, cu ajutorul relaţiei (6,5):

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{4\pi e}{c}\frac{d\xi_\mu}{d\tau}\,\delta(\vec{r}-\vec{\xi})$$

(primul grup de ecuaţii ale lui Maxwell-Lorentz sub forma cvadridimensională) cu condiţia ca $\tau=t$.

Pentru determinarea tensorului $H_{\mu\nu}$ avem ecuaţia (23,2) care poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0 \tag{23,31}$$

(al doilea grup de ecuaţii ale lui Maxwell, care exprimă dispariţia „ciclului“ tensorului antisimetric al cîmpului)[1], de unde trecînd la forma vectorială, putem scrie primul grup al ecuaţiilor lui Maxwell, în cazul unei surse punctuale:

$$\operatorname{rot}\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi e}{c}\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{\xi}). \tag{23,32}$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=4\pi e\,\delta(\vec{r}-\vec{\xi}),$$

[1]) Cu ajutorul simbolului $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (v. § 46) ecuaţia (23,31) poate fi scrisă sub forma:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}=0,$$

unde $\vec{v}$ este viteza tridimensională a particulei, adică

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{d\tau}.$$

Trebuie să mai adăugăm la aceste ecuaţii şi ecuaţia (23,2) care leagă componentele cîmpului de potenţiale sau de ecuaţia echivalentă (23,31).

In notaţie tridimensională, ecuaţia (23,2) are forma:

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{23,33}$$

In locul ultimelor ecuaţii, care definesc intensităţile cîmpului, putem scrie grupul al doilea al ecuaţiilor lui Maxwell-Lorentz, care coincide cu cel de mai înainte [v. (23,31)]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \tag{23,34}$$
$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

§ 24. Integrarea ecuaţiilor lui Maxwell-Lorentz

La integrarea ecuaţiilor lui Maxwell-Lorentz, trebuie să luăm în considerare, în primul rînd, aşa numita invarianţă faţă de etalonare (calibrare), care apare în legătură cu alegerea neunivocă a potenţialelor pentru cîmpurile electromagnetice date (v. condiţia 7, § 23).

Intr-adevăr, introducînd potenţiale noi:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \tag{24,1}$$

unde f este o funcţie scalară de etalonare (de calibrare arbitrară) cîmpurile electromagnetice $H_{\mu\nu}$ vor fi legate prin aceleaşi relaţii, atît cu potenţialele A_μ, cît şi cu potenţialele A'_μ:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{24,2}$$

Ecuaţiile lui Maxwell-Lorentz (23,29), precum şi ecuaţia de mişcare a electronului (23,22) nu conţin sub formă explicită potenţialele şi de aceea, după cum s-a arătat mai sus, nu trebuie să depindă de alegerea funcţiei de etalonare (de calibrare) f[1]).

Nedeterminarea în alegerea valorilor potenţialelor duce la faptul că noi nu putem determina univoc pe A_μ, fără a impune o condiţie suplimentară funcţiei de etalonare (de calibrare) f. De egulă, funcţia de etalonare f se alege în aşa fel, încît potenţialele să satisfacă condiţia suplimentară a lui Lorentz:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{24,3}$$

$\left(\text{sau sub forma tridimensională: } \operatorname{div} \vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\right)$. Totuşi, etalonarea (calibrarea) lui Lorentz nu este unica posibilă şi în particular, pentru undele electromagnetice (de lumină) se aplică o altă etalonare (calibrare), corespunzătoare faptului că există numai unde transversale:

$$\operatorname{div}\vec{A}=0. \tag{24,4}$$

Să trecem acum la rezolvarea sistemului de ecuaţii Maxwell—Lorentz (23,29), cu condiţia suplimentară a lui Lorentz (24,3).

Substituind valoarea (23,2) în locul lui $H_{\mu\nu}$, obţinem ecuaţia:

$$\Box A_\mu=\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_\mu=-\frac{4\pi e}{c}\int\rho(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds. \tag{24,5}$$

Rezolvînd ecuaţia lui D'Alembert, găsim conform lui (17,20):

$$A_\mu=e\int\dot{\xi}_\mu\,ds\int\rho(x'-\xi)\,\delta(R^2-c^2T^2)\left(1+\varepsilon\frac{T}{|T|}\right)(dx'),$$

unde

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}', \quad T=t-t', \quad (dx')=(d\vec{r}')dt', \tag{24,6}$$

iar mărimea ε va fi egală respectiv cu $+1$, -1 sau 0, după cum

[1]) In cazul unei transformări de etalonare, se adaugă la funcţia mixtă a acţiunii S_3, mărimea:

$$S_3'=\int(dx)\int\rho(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\,ds,$$

care poate fi îndepărtată, deoarece ea se poate aduce, cu ajutorul egalităţii (23,15) la o diferenţială totală;

$$S_3'=\int(dx)\,f\int\frac{d\rho\,(x-\xi)}{ds}\,ds,$$

şi de aceea nu poate influienţa ecuaţia de mişcare.

luăm potenţiale retardate, avansate sau semisuma potenţialelor retardate şi avansate.

Pentru un electron punctiform [v. relaţia (23.9)], soluţia cu potenţialele retardate duce la expresia:

$$A_\mu = e\int \dot{\xi}_\mu \frac{\delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right)}{cR'}\, ds, \tag{24,7}$$

unde:

$$\vec{R}' = \vec{r}\,(t) - \vec{\xi}\,(\tau).$$

Introducînd viteza tridimensională $\vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{d\tau}$ obţinem pentru potenţialul scalar $\varphi = \frac{A_4}{ic}$ şi potenţialul vector $\vec{A}$ următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \varphi &= e\int \frac{\delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'}\, d\tau, \\ \vec{A} &= \frac{e}{c}\int \vec{v}(\tau)\, \frac{\delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'}\, d\tau, \end{aligned} \tag{24,8}$$

§ 25, Potenţialele lui Liénard-Wiechert şi formula lui Breit

Cu ajutorul relaţiilor (24,8) pentru potenţialele unui electron punctiform se obţin foarte uşor expresiile potenţialelor lui Liénard-Wiechert, precum şi forma clasică a formulei lui Breit.

Pentru a obţine potenţialele lui Liénard-Wiechert ale unei sarcini punctiforme, trebuie să efectuăm integrarea lui (24,8) în raport cu τ, ţinînd seamă că R' depinde de τ, fără alte ipoteze suplimentare asupra distribuţiei de sarcină a electronilor în spaţiu.

Atunci, conform egalităţii (6,5) avem:

$$\varphi = \frac{e}{R'\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau + \frac{R'}{c}\right)} = \frac{e}{R'\left(1 - \frac{v_{R'}}{c}\right)}. \tag{25,1}$$

In deducerea ultimei formule am luat în considerare că

$$\frac{\partial R'}{\partial \tau}=-\left(\frac{d\vec{\xi}}{d\tau}\cdot\vec{R}'^0\right)=-v_{R'}. \qquad (25,2)$$

Aici $\vec{R}'^0=\frac{\vec{R}'}{R'}$ este un vector unitar, iar pentru determinarea timpului τ ne serveşte ecuaţia $\tau-t+\frac{R'}{c}=0$.

Intr-un mod analog, găsim pentru potenţialul vector $\vec{A}$:

$$\vec{A}=\frac{e\vec{v}(\tau)}{cR'\left(1-\frac{v_{R'}}{c}\right)}. \qquad (25,3)$$

Expresiile (25,1) şi (25,3), cunoscute sub denumirea de potenţialele lui Liénard-Wiechert, se obţin de obicei cu ajutorul unei treceri la limită de la electronul, care posedă o densitate distribuită în spaţiu, la o particulă punctiformă, ceea ce se ia automat în considerare in deducerea noastră, cu ajutorul formalismului funcţiunii δ.

Să determinăm acum energia de intersecţiune între două sarcini punctiforme în mişcare, pe care le vom nota respectiv cu indicii 1 şi 2.

După cum se ştie, această energie de intersecţiune este determinată de expresia [v. (23,8a)].

$$V_{12}=e_1\,\varphi_2-\frac{e_1}{c}(\vec{v}_1\vec{A}_2), \qquad (25,4)$$

unde e_1 şi $\vec{v}_1$ sînt sarcina şi viteza primului electron, iar φ_2 şi $\vec{A}_2$ sînt potenţialele electromagnetice generate de al doilea electron, în punctul în care se găseşte primul electron.

Dacă substituim aici potenţialele lui Liénard-Wiechert în locul lui φ_2 şi $\vec{A}_2$, vom vedea că V_{12} va depinde de două timpuri diferite t şi $t-\frac{R'}{c}$ unde R' este distanţa dintre cei doi electroni. Vom determina valoarea aproximativă a energiei de interacţiune V_{12}, raportată la acelaşi moment t, pînă la aproximaţia termenilor de ordinul lui $\frac{v^2}{c^2}$.

Pentru aceasta, vom dezvolta funcțiunea δ după puterile mărimii $\frac{R'}{c}$:

$$\delta\left(\tau-t+\frac{R'}{c}\right)=\delta(\tau-t)+\frac{R'}{c}\frac{d}{d\tau}\delta(\tau-t)+\frac{R'^2}{2c^2}\frac{d^2}{d\tau^2}(\tau-t)+\ldots \quad (25,5)$$

Mărginindu-ne în calculul lui φ_2 la primii trei termeni ai dezvoltării, iar în calculul lui $\vec{A}_2$ numai la primul termen, vom obține, luînd în considerare regulile de integrare cu ajutorul funcției δ:

$$\varphi_2=\frac{e^2}{R}+\frac{e^2}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}+\ldots,$$

$$\vec{A}_2=\frac{e_2\vec{v}_2}{cR}, \quad (25,6)$$

unde R este distanța dintre cei doi electroni, raportată la același timp t, aceasta datorită integrării în raport cu funcția δ și cu derivatele ei.

Să facem o transformare de etalon (de calibrare) spre a obține potențiale noi. Alegînd mărimea f egală cu $\frac{e_2}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}$, obținem: [1])

$$\varphi'_2=\varphi_2-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{e_2}{R}, \quad (25,7)$$

$$\vec{A}'_2=\vec{A}_2+\nabla f=\frac{e_2\vec{v}_2}{cR}+\frac{e_2}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}. \quad (25,8)$$

Ținînd seama de relația (25,2) avem:

$$\nabla\frac{\partial R}{\partial t}=-\nabla\left(\vec{v}_2\frac{\vec{R}}{T}\right)=\frac{\vec{R}(\vec{v}_2\vec{R})-\vec{v}_2R^2}{R^3}, \quad (25,9)$$

de unde

$$\vec{A}'_2=\frac{e_2[\vec{v}_2+\vec{R}^0(\vec{v}_2\vec{R}^0)]}{2cR}. \quad (25,10)$$

Substituind (25,10) și (25,7) în egalitatea (25,4), căpătăm o formulă importantă, care determină interacțiunea dintre cei doi electroni în mișcare, pînă la aproximația mărimilor de ordinul doi în v/c:

$$V_{12}=\frac{e_1e_2}{R}\left\{1-\frac{1}{2c^2}[(\vec{v}_1\vec{v}_2)+(\vec{v}_1\vec{R}^0)(\vec{v}_2\vec{R}^0)]\right\}. \quad (25,11)$$

[1]) V. de exemplu, Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948, pag. 193.

Această expresie a fost găsită pentru prima dată de către Breit. Ea este simetrică în raport cu ambii electroni şi ţine seama de retardare cu toate că toate mărimile care intră în formulă se raportă la unul şi acelaşi timp t. Generalizarea corespunzătoare a formulei lui Breit a fost obţinută în mecanica cuantică. In cazul interacţiunii electronilor, descrişi de ecuaţiile spinoriale cuantice ale lui Dirac, pentru a trece la formula cuantică a lui Breit, trebuie să înlocuim vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ respectiv cu operatorii matriciali $c\vec{\alpha}_1$ şi $c\vec{\alpha}_2$ a lui Dirac şi să tratăm toată expresia ca un operator care operează asupra funcţiilor de undă ψ. Nu este greu să obţinem generalizarea cuantică a formulei lui Breit şi pentru cazul interacţiunii particulelor încărcate, descrise prin ecuaţii scalare, vectoriale sau de alt tip, ceea ce trebuie să aibe o aplicaţie în teoria cuantică a mezonilor, — care se pare că sînt caracterizaţi prin astfel de ecuaţii.

Formula lui Breit a fost utilizată cu succes în teoria cuantică a atomului, în particular la examinarea structurii fine a spectrului Heliului şi a Litiului ionizat, care posedă doi electroni, precum şi la examinarea difuziei electronilor. Vom observa că în mecanica cuantică, pentru o considerare aproximativă a interacţiunii a două sarcini se foloseşte alături de formula lui Breit, formula lui Möller, care ia de asemenea în considerare acţiunea retardată şi reprezintă o expresie invariantă în raport cu vitezele, expresie care rezultă din dezvoltarea după puterile constantei structurii fine [1]).

§ 26. Cîmpul unei sarcini punctiforme în mişcare uniformă şi rectilinie

Să presupunem că de-a lungul axei z se mişcă o sarcină punctiformă, cu viteză constantă v. Atunci, pentru densitatea sarcinii ρ şi pentru densitatea curentului j_z avem următoarele expresii

$$\begin{gathered} \rho = e\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt), \\ j_z = \beta\rho. \end{gathered} \tag{26,1}$$

[1]) Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, ОНТИ, 1935, pag. 145 şi 305; В. Гайтлер, Квантовая теория излучения. Гостехиздат, 1940, p. 115 (The Quantum Theory of Radiation, Oxford 1936—1944—1949, p. 101); M. A. Марков, ЖЭТФ, 18, 510, 1948.

In acest caz, ecuaţiile undelor pentru determinarea potenţialului scalar şi vectorial capătă forma:

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-4\pi e\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-vt),$$
$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_z=-4\pi e\beta\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-vt), \tag{26,2}$$

unde β este egal cu raportul dintre viteza sarcinii, v, şi viteza luminii, c, în vid, adică $\beta=\frac{v}{c}$, şi conform teoriei relativităţii trebuie să avem întotdeauna $\beta<1$.

In formulele din urmă se vede că:

$$A_z=\beta\varphi. \tag{26,3}$$

Afară de aceasta:

$$A_x=A_y=0.$$

Pentru componentele cîmpului electromagnetic avem:

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$
$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}=-(1-\beta^2)\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{26,4}$$
$$H_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}=-\beta E_y,\quad H_y=\beta E_x,\quad H_z=0.$$

Aici am luat în considerare egalitatea (26,3), precum şi faptul că toate componentele cîmpurilor depind numai de diferenţa $(z-vt)$, de aceea:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}=-\beta\frac{\partial A_z}{\partial z}\ \text{etc.} \tag{26,5}$$

Pentru a determina potenţialul scalar φ, să punem în partea dreaptă a ecuaţiei (26,2) dezvoltarea în integrală Fourier a funcţiei tridimensionale δ:

$$\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-vt)=\frac{1}{8\pi^3}\int dk_1\,dk_2\,d\varkappa\, e^{i[k_1x+k_2y+\varkappa(z-vt)]}, \tag{26,6}$$

de unde, făcînd împărţirea cu operatorul lui D'Alembert şi alegînd soluţiile cu potenţialele retardate, obţinem:

$$\varphi=\frac{e}{2\pi^2}\int e^{i[k_1x+k_2y+\varkappa(z-vt)]}\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\varkappa^2(1-\beta^2)}+$$
$$+\pi i\frac{\varkappa}{|\varkappa|}\delta\left[k_1^2+k_2^2+\varkappa^2(1-\beta^2)\right]dk_1\,dk_2\,d\varkappa. \tag{26,7}$$

Cînd alegem potenţialele avansate trebuie să luăm semnul minus în faţa funcţiei δ din ultimele paranteze pătrate.

In cazul cînd $\beta<1$, argumentul de care depinde funcţia nu va conţine un punct singular, adică nu se va anula şi deci putem lăsa la o parte funcţia δ din paranteze. In felul acesta, atît potenţialele retardate, cît şi potenţialele avansate duc la aceeaşi valoare pentru φ.

Pentru integrarea expresiei (26,7) să facem schimbarea de variabilă:

$$k_3=\varkappa\sqrt{1-\beta^2}. \tag{26,8}$$

Atunci, găsim pentru φ:

$$\varphi=\frac{e}{2\pi^2\sqrt{1-\beta^2}}\int(d\vec{k})\,\frac{e^{i\left(k_1x+k_2y+k_3\frac{z-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}}{k_1^2+k_2^2+k_3^2}.$$

Ultima expresie este proporţională cu funcţia lui Green a ecuaţiei lui Poisson, avînd soluţia găsită de noi în § 10 [v. formula (10,11)]:

$$\varphi=\frac{e}{r}, \tag{26,9}$$

unde

$$r=\sqrt{(1-\beta^2)(x^2+y^2)+(z-vt)^2}$$

Suprafeţele echipotenţiale $r^2=\text{const}$, vor fi aici elipsoizii de rotaţie turtiţi (de-a lungul axei z), studiaţi pentru prima dată de Heaviside. Cu ajutorul formulelor (26,4) putem determina şi cîmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$.

După cum se ştie, un electron care se mişcă în vid cu o viteză constantă nu radiază energie, ca şi în cazul banal al electronului în repaus. Ne putem imagina intuitiv că în acest caz cîmpul, legat de electron, se mişcă uniform împreună cu acesta, fără să se „desprindă". Aceasta se leagă formal de faptul că pentru $v<c$ ecuaţia lui D'Alembert pentru potenţiale, fiind o ecuaţie de tip hiperbolic, poate fi redusă la o ecuaţie de tip eliptic, corespunzătoare potenţialului unei sarcini în repaus. Cu alte cuvinte, cu ajutorul transformărilor lui Lorentz, putem în totdeauna alege un astfel de sistem de coordonate, încît faţă de acesta, un electron în mişcare uniformă şi rectilinie să se găsească în repaus şi, prin urmare, să nu radieze.

In general, radiaţia este un proces ireversibil şi de aceea ea trebuie să fie legată de existenţa unor termeni nesimetrici în raport cu soluţiile retardate şi avansate. Un astfel de termen nesimetric este expresia cu funcţia δ care stă sub integrală în ecuaţia (26,7). De aceea radiaţia trebuie să lipsească, cînd termenul acesta nesimetric devine nul.

§ 27. Electronul „supraluminos" al lui Cerenkov

Conform teoriei relativităţii, viteza de mişcare a electronului nu poate depăşi viteza luminii în vid $\left(\beta = \frac{v}{c} < 1\right)$. Totuşi, în mişcarea unui electron într-un mediu oarecare, viteza lui, v, rămînînd mai mică decît viteza luminii în vid, poate fi totuşi mai mare decît viteza de fază a luminii din mediul respectiv: $c' = \frac{c}{n} < c$ (n este indicele de refracţie în mediu), adică este posibil cazul cînd $\frac{c}{n} < v < c$. In acest caz, electronul depăşeşte cîmpul, care, vorbind intuitiv, „se desprinde" de acesta, adică este emisiv.

Să ne oprim asupra teoriei acestui fenomen, teorie dezvoltată prima dată de I. E. Tamm şi I. M. Franck pentru mişcarea unui electron într-un dielectric şi care au arătat că, în cazul acesta, electronul va radia [1]), ceea ce fusese într-adevăr observat încă din 1934, de către P. A. Cerenkov (în laboratorul lui S. I. Vavilov) [2]). Pentru prescurtare, fenomenul amintit al lui Cerenkov este logic să fie numit — pe baza sensului său fizic — „efectul electronului snpraluminos". In acest caz, s-a observat o radiaţie vizibilă foarte slabă, provocată de electroni rapizi care se mişcă în diverse lichide şi solide cu un indice de refracţie mare (de exemplu în ciclohexan, în care $n = 1{,}4367$). Electronii se obţin atît dintr-o sursă exterioară, cît şi datorită efectului Compton şi efectului fotoelectric provocat de radiaţia γ a substanţelor radioactive. A prezentat o mare dificultate separarea noii radiaţii de celelalte genuri diferite de luminiscenţă, precum şi posibilitatea de observare a acestei luminiscenţe, care are o intensitate extrem de mică.

---

[1]) И. М. Франк и И. Е. Тамм, ДАН, **14**, 107, 1937. O teorie amănunţită a efectului Cerenkov este dată în articolul lui I. E. Tamm (Ig. Tamm, Journ. of. Phys. U. S. S. R. **1**, 149, 1939).

[2]) С. И. Вавилов, ДАН, **2**, 457, 1934, П. А. Черенков, ДАН, **2**, 451, 1934. Date complete asupra rezultatelor experimentale ale lui Cerenkov se găsesc în teza lui de doctorat. Труды Физического института АН СССР им. Лебедева, **2** No. 4, 1944.

Să trecem la teoria efectului Cerenkov. Dacă un electron punctiform se mişcă într-un mediu cu indicele de refracţie $n=\sqrt{\varepsilon}$ (ε este constanta dielectrică), de-a lungul axei z şi cu o viteză constantă v, atunci ecuaţiile lui Maxwell capătă forma:

$$\operatorname{rot}\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=4\pi\vec{j}, \tag{27,1}$$

$$\operatorname{div}\vec{D}=4\pi\rho,$$

unde:

$$\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A},$$

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

$$\rho=e\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-vt), \tag{27,2}$$

$$j_z=\frac{v}{c}\rho=\beta\rho,\quad j_x=j_y=0.$$

Vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ sînt legaţi între ei prin relaţia:

$$\vec{D}=(\varepsilon\vec{E})=(n^2\vec{E}). \tag{27,3}$$

Relaţia din urmă are loc atunci cînd indicele de refracţie n este o mărime constantă. In cazul general însă n depinde de pulsaţia ω. Atunci, egalitatea (27,3) va avea un caracter operaţional [1]) şi va avea loc pentru diferitele componente ale integralei Fourier' luate aparte, adică pentru frecvenţe individuale. Descompunînd cîmpurile în integrale Fourier:

$$\vec{D}=\int\vec{D}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega,\quad \vec{E}=\int\vec{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega,\ \text{etc.} \tag{27,4}$$

explicităm sensul egalităţii (27,3) din formula:

$$(n^2\vec{E})=\int n^2\vec{E}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{27,5}$$

---

[1]) Pentru a sublinia caracterul operaţional al egalităţii (27,3), noi vom pune mărimea $n^2\vec{E}$ în paranteze mici, adică vom scrie $(n^2\vec{E})$.

De aici găsim pentru componentele integralei Fourier:

$$\vec{D}(\omega)=n^2\vec{E}(\omega). \tag{27,6}$$

Vom observa că împărţirea cu operatorul care conţine mărimea n^2, este o operaţie pe deplin justificată, la fel ca şi împărţirea cu operatori liniari alcătuiţi din derivate parţiale. Intr-adevăr, din egalitatea (27,3) avem:

$$\vec{E}=\left(\frac{1}{n^2}\vec{D}\right)=\int\frac{\vec{D}(\omega)}{n^2}e^{-i\omega t}\,d\omega, \tag{27,7}$$

ceea ce este în deplină concordanţă cu formula (27,6).

In cele ce urmează, noi nu vom specifica în mod expres caracterul operaţional al mărimilor care conţin indicele de refracţie n.

Luînd în considerare condiţia lui Lorentz:

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{n^2}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$$
$$A_x=A_y=0,$$

precum şi relaţia (27,1), găsim:

$$\left(\nabla^2-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-\frac{4\pi e}{n^2}\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-vt), \tag{27,8}$$
$$A_z=\beta n^2\varphi.$$

Cîmpurile electromagnetice $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ vor fi legate de potenţialul scalar φ prin relaţiile:

$$\begin{aligned}&E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z=\gamma^2\frac{\partial\varphi}{\partial z},\\ &H_x=\beta n^2\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad H_y=-\beta n^2\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad H_z=0,\end{aligned} \tag{27,9}$$

unde $\gamma^2=n^2\beta^2-1$.

Substituind în membrul doi al ecuaţiilor (27,8), în locul funcţiei δ expresia ei din formula (26,6), găsim:

$$\varphi=\frac{e}{2\pi^2}\int\frac{1}{n^2}e^{i[k_1x+k_2y+\varkappa(z-vt)]}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{k_1^2+k_2^2-\gamma^2\varkappa^2}+\pi i\frac{\varkappa}{|\varkappa|}\delta(k_1^2+k_2^2-\gamma^2\varkappa^2)\right)dk_1dk_2d\varkappa. \tag{27,10}$$

In cazul nostru cînd electronul se mişcă cu viteza $v > \frac{c}{n}$, mărimea $\gamma^2 = \beta^2 n^2 - 1$ va fi mai mare decît zero şi de aceea nu putem îndepărta din expresia de sub integrală, a formulei (27,10), termenul proporţional cu funcţia δ şi care condiţionează radiaţia.

Pentru integrarea expresiei de mai sus, vom face trecerea la coordonate cilindrice:

$$\left(k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1}, \ \varkappa\right).$$

Atunci, integrînd în raport cu unghiul polar ψ, găsim conform (21,6)

$$\varphi = \frac{e}{\pi} \int \frac{1}{n^2} e^{i\varkappa(z - vt)} d\varkappa \int_0^\infty k J_0(kr) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{k^2 - \varkappa^2\gamma^2} + \pi i \frac{\varkappa}{|\varkappa|} \delta(k^2 - \varkappa^2\gamma^2)\right] dk, \tag{27,11}$$

unde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

de unde, cu ajutorul relaţiilor (18,17), obţinem formula pentru potenţialul scalar al cîmpului electromagnetic generat de un electron în mişcare rectilinie şi uniformă, formulă fundamentală pentru întreaga teorie:

$$\varphi = \frac{ei}{2} \int \frac{1}{n^2} e^{i\varkappa(z - vt)} \left[\frac{\varkappa}{|\varkappa|} J_0(r\gamma|\varkappa|) + i N_0(r\gamma|\varkappa|)\right] d\varkappa. \tag{27,12}$$

Acum putem găsi energia pe care o radiază electronul în unitatea de timp.

Conform teoremei lui Umov-Poynting:

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{S}. \tag{27,13}$$

Vom efectua integrarea de-a lungul suprafeţei cilindrice de rază r, a cărei axă geometrică este axa z.

Elementul de suprafaţă $d\vec{S}$ va fi:

$$d\vec{S} = r d\varphi\, dz \frac{\vec{r}}{r}, \tag{27,14}$$

unde:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = 0.$$

Ţinînd seama de valorile componentelor cîmpului (27,9) avem:

$$(\vec{E}\times\vec{H})\,d\vec{S}=\beta r\,d\varphi\,dz\left(\gamma^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}n^2\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \qquad (27,15)$$

unde, conform egalităţii operaţionale (27,5), avem:

$$\left.\begin{aligned}\left(\gamma^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)&=-\frac{e}{2}\int\frac{\gamma^2}{n^2}e^{i\varkappa(z-vt)}\times\\ &\times[|\varkappa|J_0(r\gamma|\varkappa|)+i\varkappa N_0(r\gamma|\varkappa|)]\,d\varkappa,\\ \left(n^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)&=-\frac{ei}{2}\int\gamma e^{-i\varkappa'(z-vt)}\times\\ &\times[\varkappa'J_0'(r\gamma|\varkappa'|)-i|\varkappa'|N_0'(r\gamma|\varkappa'|)\,d\varkappa'.\end{aligned}\right\} \qquad (27,16)$$

Substituind ultima relaţie în (27,13), obţinem:

$$-\frac{dU}{dt}=\frac{1}{2}\pi\beta e^2cr\int_0^\infty\frac{\varkappa^2}{n^2}\gamma^3(N_0'J_0-J_0'N_0)\,d\varkappa, \qquad (27,17)$$

unde funcţiile cilindrice depind de produsul $r\gamma\varkappa$, iar accentul înseamnă derivata în raport cu acest argument.

Aici s-a ţinut seamă că expresia de sub integrală posedă o simetrie azimutală; mai departe, în integrarea în raport cu variabilele z şi $\varkappa'$ am luat în considerare că:

$$\int e^{i(\varkappa-\varkappa')z}\,dz=2\pi\delta(\varkappa-\varkappa').$$

In sfîrşit, la integrarea în raport cu $\varkappa$ de la $-\infty$ pînă la $+\infty$ am eliminat funcţiile impare de sub integrală şi am înlocuit funcţiile pare prin dublul integralei luate între limitele 0 şi ∞.

După cum se ştie, în teoria funcţiilor Bessel se demonstrează relaţia[1])

$$N_0'(x)\,J_0(x)-J_0'(x)\,N_0(x)=\frac{2}{\pi x}. \qquad (27,18)$$

De aceea, expresia (27,17) pentru energia radiată, capătă forma[2])

$$-\frac{dU}{dt}=\frac{e^2v}{c^2}\int_0^{\omega_m}\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2n^2}\right)d\omega, \qquad (27,19)$$

unde în locul variabilei $\varkappa$ s-a introdus pulsaţia $\omega=\varkappa v$. Vom observa

---

[1]) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, pag. 52.

[2]) V. de asemenea articolul de sinteză al lui I. M. Frank din „Успехи, физических наук", 30, nr. 3—4, p. 149, 1946, unde există o bibliografie detaliată.

că indicele de refracţie scade odată cu creşterea pulsaţiei ω şi pentru razele X devine mai mic decît 1. De aceea limita superioară a integralei în raport cu ω trebuie determinată din ecuaţia:

$$\beta n(\omega_m)=1. \tag{27,20}$$

In sfîrşit, să găsim ecuaţia pentru suprafeţele echipotenţiale în cazul simplu cînd $n=\text{const}$.

Să transformăm expresia (27,12)

$$\varphi=-\frac{e}{n^2}\int_0^\infty[\sin\varkappa(z-vt)\,J_0(r\gamma\varkappa)+$$
$$+\cos\varkappa(z-vt)\,N_0(r\gamma\varkappa)]\,d\varkappa. \tag{17,21}$$

Din teoria funcţiilor Bessel se cunoaşte relaţia:

$$\int_0^\infty \sin\varkappa\alpha\,J_0(\varkappa\beta)\,d\varkappa=-\int_0^\infty\cos\varkappa\alpha\,N_0(\varkappa\beta)\,d\varkappa=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}; & \alpha>\beta>0,\\ 0\quad ; & \beta>\alpha>0,\end{cases} \tag{27,22}$$

de unde găsim potenţialul căutat:

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{2e}{n^2\sqrt{(vt-z)^2-\gamma^2r^2}}; & vt-z>\gamma r=\gamma\sqrt{x^2+y^2},\\ 0\quad ; & vt-z<\gamma r.\end{cases} \tag{27,23}$$

Să calculăm mai departe, valoarea cîmpurilor şi direcţia vectorului Umov-Poynting la timpul $t=0$. Pentru alte valori ale timpului t va trebui să înlocuim în expresiile găsite valoarea lui z prin $z-vt$.

In acest caz:

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{2e}{n^2\sqrt{z^2-\gamma^2r^2}}; & -z>\gamma r,\\ 0\quad ; & -z<\gamma r.\end{cases} \tag{27,24}$$

Suprafeţele echipotenţiale pot fi găsite din ecuaţia:

$$z^2-\gamma^2r^2=\text{const}, \tag{27,25}$$

care sînt hiperboloizi de rotaţie (fig. 11), iar după cum se vede din (27,24), potenţialul şi deci cîmpurile sînt diferite de zero numai în regiunea valorilor negative ale lui $z\,(z<0)$. Cîmpurile vor exista numai înăuntrul conului (conul înfăşurător), ale cărui directoare se determină din ecuaţia:[1])

$$-z=\gamma r.$$

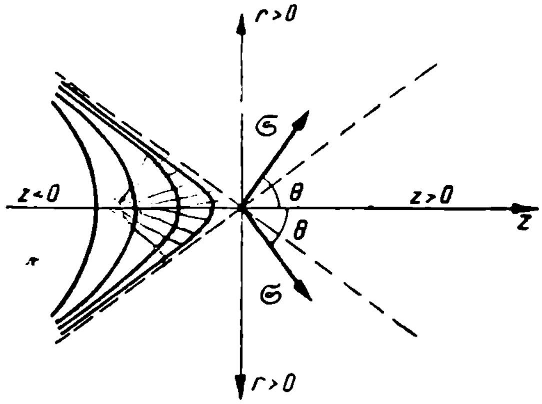

Fig. 11

Cu ajutorul formulelor (27,9) găsim valoarea cîmpurilor:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}&=-\frac{2\gamma^2 e\vec{R}}{n^2(R^2-\beta^2 n^2 r^2)^{3/2}},\\ \vec{H}&=\beta n^2[\vec{v}_0\times\vec{E}],\end{aligned}\right\} \tag{27,26}$$

unde raza vectoare R are componentele x, y, z iar vectorul unitar al vitezei, $\vec{v}^0$, este îndreptat în direcţia mişcării particulei, adică de-a lungul axei z.

Componentele vectorului Umov-Poynting:

$$\vec{\mathfrak{S}}=\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}] \tag{27,27}$$

pe axele de coordonate vor fi:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_r&=-\frac{c}{4\pi}\beta n^2 E_r E_z>0; \quad z<0,\\ \mathfrak{S}_z&=\frac{c}{4\pi}\beta n^2 E_r^2>0,\end{aligned} \tag{27,28}$$

unde:

$$E_r=\frac{r}{R}E=\sqrt{E_x^2+E_y^2},$$

de unde:

$$\mathfrak{S}=\sqrt{\mathfrak{S}_r^2+\mathfrak{S}_z^2}=\frac{c}{4\pi}\beta n^2 E E_r, \tag{27,29}$$

$$\cos\theta=\frac{\mathfrak{S}_z}{\mathfrak{S}}=\frac{r}{R}\cdot \tag{27,30}$$

[1]) Fig. 11 reprezintă o figură în spaţiu, avînd o simetrie axială în jurul axei z. De aceea mărimea r poate avea numai valori pozitive.

După cum se vede din formulele (27,26), valorile cîmpurilor şi ale vectorului Umov-Poynting, devin infinite pentru:

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n} \cdot \qquad (27,31)$$

De aceea, toată radiaţia se va produce în direcţiile perpendiculare pe generatoarele conului care înfăşoară cîmpul (v. fig. 11). Din punct de vedere fizic, aceasta se leagă de faptul că, în direcţiile definite de condiţia (27,31), undele electromagnetice radiate se vor amplifica, iar în oricare altă direcţie, ele se vor stinge reciproc.

Dacă vom calcula energia totală pe care o radiază un electron punctiform, pentru o valoare constantă a indicelui de refracţie, atunci vom căpăta o mărime infinită. Acelaşi lucru rezultă din formula (27,19), deoarece în cazul $n=\text{const}$, ω_m devine infinit. Totuşi, în realitate, conform unei teorii mai riguroase, energia radiată rămîne o mărime finită şi aceasta deoarece cazul $n=\text{const}$ este un caz nereal din punct de vedere fizic şi, după cum am mai arătat, spectrul se întrerupe la o frecvenţă pentru care n începe să scadă rapid [v. relaţia (27,20)].

Teoria mişcării particulelor în diverse medii, cu viteze care să depăşească vitezele de fază ale undelor pe care aceste particule le generează, se examinează şi în alte domenii ale fizicii.

In mecanică în deosebi au fost descoperite mai demult unde acustice speciale, care apar la mişcarea corpurilor cu viteze supersonice, de exemplu a proiectilelor în atmosferă. Efectul electronului supraluminos este în fond un analog electrodinamic al radiaţiei unor astfel de unde acustice. Experienţele lui Cerenkov se găsesc în deplină concordanţă cu teoria elaborată pe baza electrodinamicii clasice, atît în ceea ce priveşte spectrul polarizaţiei, cît şi dependenţa unghiulară a radiaţiei în efectul electronului supraluminos.

Apare problema unei tratări cuantice a efectului lui Cerenkov.

Fără să examinăm mai amănunţit deducerea formulelor cuantice ale acestui fenomen, vom nota că — în examinarea cuantică a emisiei de fotoni —, trebuie, în primul rînd, să fie satisfăcute simultan, pentru fiecare proces elementar, legile de conservare a energiei şi a impulsului.

După cum se ştie, energia $\mathcal{E}$ a electronului este legată de impulsul său $\vec{p}$ şi de masa m prin relaţia:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}.$$

Pe de altă parte, fotonul posedă o energie $h\nu$ şi un impuls $h\vec{k}$, unde ν este frecvenţa luminii, iar $k=\frac{1}{\lambda}$ este numărul de undă.

Notînd impulsul electronului, înainte şi după radiaţie, respectiv prin $\vec{p}$ şi $\vec{p}'$, vom avea următoarele relaţii, obţinute din legea de conservare a energiei:

$$c\sqrt{m^2c^2+p^2}-h\nu=c\sqrt{m^2c^2+p'^2}$$

şi din legea de conservare a impulsului:

$$\vec{p}-h\vec{k}=\vec{p}'.$$

Ridicînd la pătrat cele două egalităţi de mai sus şi scăzînd una din alta, găsim următoarea expresie pentru consinusul unghiului dintre direcţa iniţială de mişcare a electronului $\vec{p}$ şi direcţia $\vec{k}$, în care este radiat fotonul:

$$\cos\theta=\frac{\vec{p}\vec{k}}{pk}=\frac{\nu}{ck\beta}+\frac{hk}{2p}\left(1-\frac{\nu^2}{c^2k^2}\right). \qquad (27,32)$$

Aici am ţinut seama că raportul dintre viteza electronului şi viteza luminii este determinat, în funcţie de impusul $\vec{p}$, prin expresia:

$$\beta=\frac{v}{c}=\frac{cp}{\mathcal{E}}=\frac{p}{\sqrt{m^2c^2+p^2}}.$$

Vom reaminti că în vid frecvenţa ν a fotonilor este legată de numărul de undă k prin relaţia:

$$\nu=ck.$$

De aceea rezultatul (27,32) pentru cosinusul unghiului de radiaţie, capătă forma unei inegalităţi absurde:

$$\cos\theta=\frac{1}{\beta}>1.$$

Aceasta înseamnă că electronul, care se mişcă conform legii inerţiei, nu poate radia lumină, la fel ca şi într-o tratare clasică, deoarece în acest caz nu pot fi satisfăcute simultan legile de conservare ale energiei şi impulsului.

Mai departe să examinăm în locul unui mediu vid, un dielectic privit ca un mediu continuu, cu indice de refracţie n şi în care se propagă lumina cu viteza de fază $c' = \frac{c}{n}$. Atunci, în locul expresiei de mai înainte, vom obţine următoarea relaţie dintre ν şi k:

$$\nu = c'k = \frac{ck}{n}.$$

De aceea formula (27,32) capătă un nou aspect:

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\Lambda}{2\lambda}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tag{27,32 a}$$

unde $\Lambda = \frac{h}{p}$ este lungimea de undă a lui De Broglie a electronului în mişcare, iar $\lambda = \frac{1}{k}$ este lungimea de undă a luminii radiate.

De aici se vede că, atunci cînd viteza de mişcare a electronilor va fi mai mare decît viteza de fază a propagării luminii în mediu, adică $\frac{1}{\beta n} < 1$, atunci — conform teoriei cuantice — radiaţia luminii devine posibilă, dar va fi mărginită dinspre partea lungimilor de undă mici prin valoarea λ_{min}, pentru care $\cos\theta$ devine egal cu unitatea.

Descriind electronul prin ecuaţia relativistă cuantică a lui Dirac şi aplicînd metodele de calcul cuantice obişnuite, găsim următoarea expresie pentru energia radiată de electron în unitatea de timp [1])

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2}\int_0^{\omega_m} \omega\left[1 - \frac{1}{n^2\beta^2} - \frac{\Lambda}{n\beta\lambda}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{4\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right)\right] d\omega, \tag{27,33}$$

unde pulsaţia $\omega = \frac{2\pi c}{n\lambda}$.

Conform fomulei de mai sus, chiar pentru $n = \text{const}$, frecvenţa maximă a radiaţiei, deci şi energia radiaţiei, nu devin infinite.

---

[1]) А. Соколов, ДАН, 28, 415, 1940. Teoria cuantică a efectului Cerenkov pentru cele două cazuri limită (nerelativist şi ultrarelativist) a fost elaborată şi de V. Ghinsburg, ЖЭТФ, 10,589, 1940; v. de asemenea articolul J. M. Jauch şi K. M. Watson, Phys. Rev., 74, 1485 1948 în care este dezvoltată schema generală a electrodinamicii cuantice fenomenologice.

Relaţiile din urmă capătă o formă mai simplă în cazul cuantic nerelativist $\frac{v}{c} \ll 1$. Ţinînd seama că radiaţia electronului „supraluminos" este posibilă numai cu condiţia $\frac{vn}{c} > 1$, trebuie să punem pentru aproximaţia nerelativistă $n \gg 1$. In acest caz, în locul formulei (27,32a) şi (27,33) avem următoarele relaţii mai simple

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\Lambda}{2\lambda},$$

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_m} \omega \sin^2\theta d\omega.$$

In particular, pentru $\lambda \gg \Lambda$, care are loc, de exemplu, în experienţele lui Cerenkov, putem să neglijăm, în general, corecţiile cuantice $\left(\frac{\Lambda}{\lambda} = 0\right)$, ceea ce este echivalent cu neglijarea reculului, căpătat de electron cînd radiază şi formulele cuantice (27,32a) şi (27,33) trec respectiv în cele clasice (27,31) şi (27,19).

Cauza fizică a posibilităţii de înlăturare a corecţiilor cuantice în cazul radiaţiei electronului supraluminos observate în realitate, constă în faptul că lungimea de undă a lui De Broglie a electronilor este mai mică decît lungimile de undă pe care le radiază electronul în mişcarea sa în dielectric. Efectele cuantice se manifestă, după cum se ştie, în cazurile cînd lungimile de undă ale lui De Broglie vor fi de ordinul de mărime al dimensiunilor orbitelor, sau de ordinul lungimii de undă a undelor luminoase radiate de electron (adică $\Lambda \sim \lambda$). Aceste corecţii cuantice însă, încep să devină sensibile pentru lungimi de undă ale luminii radiate destul de mici, pentru ca condiţia $\frac{1}{n\beta} < 1$ să nu se respecte, datorită scăderii rapide a indicelui de refracţie odată cu creşterea frecvenţei. In general, teoria macroscopică — examinată mai sus — a efectului Cerenkov nu este riguroasă nici în cazul examinării cuantice, nici în cazul examinării clasice, şi aceasta, deoarece radiaţia electronilor supraluminoşi se produce datorită interacţiunii dintre atomii dielectricului şi electronii în mişcare, interacţiune care se ia în considerare în cazul nostru prin introducerea formală a unui indice de refracţie mediu $n = \sqrt{\varepsilon}$. Totuşi metoda de calcul a radiaţiei, examinată mai sus, s-a arătat a fi foarte eficace şi a fost ulterior utilizată de Fermi[1]) pentru calculul pierderii totale de energie a electronului care se mişcă în mediu, pierdere cauzată atît prin excitarea atomilor mediului, cît şi prin radiaţia electronului supraluminos. Fermi a înlăturat condiţia ca indicele de refracţie sau constanta dielectrică ε să fie reală, utilizînd expresia complexă obişnuită din electrodinamică pentru ε, a cărei parte imaginară ia în considerare absorbţia energiei undelor electromagnetice. S-a găsit, în acest caz, o aproximaţie bună pentru formulele care ne dau pierderile de energie ale sarcinii în mişcare, aproximaţie obţinută în teoria clasică a lui Thomas-Bohr şi dezvoltată ulterior în mecanica cuantică de către Bethe şi Bloch (v. cartea citată a lui Heitler).

Ulterior, radiaţia de tip supraluminos Cerenkov a fost cercetată teoretic în multe alte cazuri, în primul rînd la trecerea particulelor încărcate nu printr-un dielectric, ci printr-un mediu feromagnetic, cînd radiaţia considerată începe la viteze $v > \frac{c}{\sqrt{\mu_0}}$, unde μ_0 este permeabilitatea magnetică a mediului (cînd ε este pus egal cu 1)[2]). Radiaţia de tip supraluminos trebuie să aibă evident loc şi în cazul mişcării particulelor neîncărcate, dar magnetice, de pildă a neutronilor, şi în general în cazul particulelor încărcate şi magnetice, cum sînt protonii sau electronii; dacă ţinem seama de existenţa la aceştia a momentului magnetic propriu „de vid" descoperit recent, radiaţia va fi o combinaţie a radiaţiei datorite sarcinii şi a celei datorite magnetizării.

Alături de radiaţia într-un mediu, o radiaţie analoagă trebuie să se observe şi pentru toate particulele încărcate şi magnetice atunci cînd ele trec dintr-un mediu în altul, de exemplu din vid în dielectric sau metal, sau, atunci cînd particulele se mişcă în canale înguste cu dimensiuni mai mici decît lungimea de undă radiată, tăiate într-un dielectric sau un mediu feromagnetic. Intensităţile acestor radiaţii sînt foarte mici în cazurile care au fost studiate, (cu electroni de energii nu prea mari).

Observăm, în încheiere, că radiaţia de tip supraluminos trebuie să aibă loc, de asemenea, nu numai în electrodinamică, ci şi în mezodinamică (v. mai jos cap. V), în procesul de mişcare al nucleonilor, — protonilor sau neutronilor, — printr-un strat de

---

[1]) E. Fermi, Phys. Rev. 57, 485, 1940; v. de asemenea articolul lui P. E. Kunin în culegerea „Мезон", Гостехиздат, 1947.

[2]) Д. Иваненко и В. Гургенидзе, ДАН, 67, 997, 1949.

substantă de densitate suficient de mare. Atunci, de pildă în cazul trecerii nucleonului prin nucleul atomic, vor avea loc pierderi atît prin ciocniri, cît şi prin radiaţia de tip supraluminos. Este raţional atunci să se caracterizeze mediul dens, în analogie cu electrodinamica — prin dezvoltarea mezodinamicii fenomenologice, introducînd o constantă cvasidielectrică şi o permeabilitate cvasimagnetică şi dînd legea corespunzătoare a dispersiei, a cărei utilizare este întotdeauna necesară pentru tratarea efectului Cerenkov.

In felul acesta, efectul Cerenkov, descoperit relativ recent, se dovedeşte a fi un fenomen foarte important şi general, şi care are loc în multe cazuri de mişcare a electronului şi a altor particule[1]).

§ 28. Tensorul energie-impuls

Să trecem la examinarea unei noi mărimi importante care caracterizează cîmpul electromagnetic, — tensorul energie-impuls. Tensorul energie-impuls ne permite, în particular, să reducem impulsul cvadridimensional al forţei de autoacţiune la o creştere a cantităţii de mişcare electromagnetice.

Cu ajutorul egalităţilor (23,17) şi (23,27) găsim:

$$\int F_\mu ds = \int \frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} \frac{\partial D_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} (dx), \tag{28,1}$$

valorile lui $H_{\mu\nu}$ şi $D_{\nu\lambda}$ fiind determinate de egalităţile (23,2) şi (23,26).

In cazul cîmpului maxwellian avem:

$$D_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}. \tag{28,2}$$

Expresia de sub integrala din membrul doi al relaţii (28,1) se poate pune sub forma:

$$\frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} \frac{\partial D_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} D_{\nu\lambda} \right) - \frac{1}{4\pi} D_{\nu\lambda} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \,.$$

---

[1]) Diversele aspecte ale radiaţii supraluminoase sînt analizate în cartea Н. Бор и О. Бор „Прохождение атомных частиц через вещество", ИЛ, 1950.

Folosind ecuaţia (23,31), precum şi proprietatea de antisimetrie a tensorilor $D_{\nu\lambda}$ şi $H_{\mu\nu}$, avem:

$$\frac{1}{4\pi} D_{\nu\lambda} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = \frac{1}{8\pi} D_{\nu\lambda} \left(\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \right) = -\frac{1}{8\pi} D_{\nu\lambda} \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}.$$

In particular, pentru lagrangeanul L_0, care este funcţie numai de $H_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, obţinem:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L_0}{\partial H_{\nu\lambda}} \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial L_0}{\partial A_{\lambda,\nu}} \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{8\pi} D_{\nu\lambda} \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} \tag{28,3}$$

de unde rezultă:

$$\int F_\mu ds = \int \frac{\partial T_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} (dx), \tag{28,4}$$

iar componentele tensorului energie-impuls se găsesc din egalitatea:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\lambda} D_{\lambda\nu} - \delta_{\mu\nu} L. \tag{28,5}$$

Mai precis, această mărime ar trebui numită tensorul densităţii energie-impuls-tensiune.

După cum se vede din formula (28,4), tensorul energie-impuls $T_{\mu\nu}$ este determinat pînă la aproximaţia unei mărimi $T'_{\mu\nu}$, a cărei divergenţă este egală cu zero:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Introducînd tensorul energie-impuls putem aduce impulsul forţei proprii (28,4) la forma:

$$\int F_\mu ds = \int dt \oint T_{\mu n} dS_n + \frac{1}{ic} \int dt \frac{d}{dt} \int T_{\mu 4} (d\vec{r}), \tag{28,6}$$

unde $d\vec{S}$ este un element al suprafeţei care mărgineşte volumul examinat, volum al cărui element este egal cu $(d\vec{r})$.

Pe de altă parte, din egalitatea (23,22) găsim că:

$$\int \frac{dm\dot{\xi}_\mu}{ds} ds = \int F_\mu ds + \int F'_\mu ds. \tag{28,7}$$

Eliminînd din ultimele două ecuaţii impulsul forţei proprii, căpătăm:

$$\int d\left| m\dot{\xi}_\mu - \frac{1}{ic}\int T_{\mu 4}\,(d\vec{r}) \right| = F^i_\mu ds + \int dt \oint T_{\mu n} dS_n. \qquad (28,8)$$

Mărimea $m\dot{\xi}_\mu$ reprezintă cantitatea de mişcare mecanică. Prin analogie cu aceasta, integrala:

$$G_\mu = -\frac{1}{ic}\int T_{\mu 4}\,(d\vec{r}) \qquad (28,9)$$

a căpătat denumirea de cantitate de mişcare sau impulsul cîmpului electromagnetic. Componentele $-\frac{1}{ic}T_{\mu 4}$ sînt evident componentele densităţii cantităţii de mişcare a cîmpului electromagnetic.

In membrul doi trebuie să adăugăm la impulsul forţei exterioare $\int F^i_\mu ds$, impulsul forţelor superficiale:

$$J_\mu = \int dt \oint T_{\mu n} dS_n. \qquad (28,10)$$

Vom observa că mărimile G_μ şi J_μ luate aparte pot, în general, să nu formeze vectori cvadridimensionali; numai o combinaţie liniară a acestora [v. membrul doi al egalităţii (28,6,] formează un vector cvadridimensional.

§ 29. Impulsul cîmpului electromagnetic

Să comparăm acum proprietăţile de transformare ale cantităţii de mişcare mecanice şi electromagnetice.

Există două condiţii pe lîngă care cantitatea de mişcare a cîmpului electromagnetic G_μ formează un cvadridimensional şi prin aceasta, coincide — din punct de vedere al proprietăţilor de transformare — cu cantitatea de mişcare a particulelor.

1. Dacă avem un spaţiu fără sarcini, adică — după cum se vede din egalitatea (28,4) — divergenţa tensorului energie-impuls este nulă: $\frac{\partial T_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0$, atunci mărimea:

$$G_\mu = \frac{i}{c}\int T_{\mu 4}\,(d\vec{r}) \qquad (29,1)$$

va fi un vector cvadridimensional.

Intr-adevăr, în lipsa sarcinilor, cîmpul electromagnetic nu va avea singularităţi şi de aceea impulsul forţelor superficiale [v. egalitatea (28,10)] trebuie să dispară dacă îndepărtăm suprafaţa de integrare la infinit.

Luînd în considerare că suma cantităţii de mişcare a cîmpulu electromagnetic G_μ şi a impulsului forţelor superficiale formează întotdeauna un vector, şi că impulsul însuşi este nul, ajungem la concluzia că mărimea G_μ trebuie să se comporte ca un vector cvadridimensional.

La astfel de condiţii satisface, de exemplu, cîmpul electromagnetic care se găseşte într-un spaţiu fără sarcini. In particular, datorită acestui fapt, în teoria fotonilor (adică a cuantelor de lumină, care corespund — conform teoriei cuantice — undelor electromagnetice elementare) Einstein a putut caracteriza fotonul nu numai prin energia $\varepsilon = h\nu$, ci şi prin cantitatea de mişcare $p = \frac{\varepsilon}{c}$, iar împreună aceste mărimi formează un vector cvadridimensional.

2. Teorema lui Laue exprimă condiţia pentru ca energia şi impulsul cîmpului electromagnetic să formeze un vector cvadridimensional în cazul prezenţei sarcinilor. Pentru aceasta, să găsim legea de transformare a impulsului cvadridimensional G_μ în cazul unui cîmp electromagnetic generat de o particulă încărcată, de exemplu de un electron.

Inainte de toate, să alegem un sistem de referinţă, faţă de care electronul este în repaus şi să notăm în acest sistem de coordonate tensorul energiei — impuls prin $T^0_{\mu\nu}$, iar elementul de volum prin $(d\vec{r}_0)$.

In virtutea simetrii sferice putem afirma că pentru componentele nediagonale $(\mu \neq \nu)$ trebuie totdeauna să fie satisfăcută egalitatea:

$$\int T^0_{\mu\nu}(d\vec{r}_0) = 0, \tag{29,2}$$

în timp ce integralele componentelor diagonale

$$\int T^0_{\mu\mu}(d\vec{r}_0) \text{ (nu se însumează după } \mu) \tag{29,3}$$

pot fi diferite de zero.

De aceea, conform lui (29,2) şi (28,9), avem:

$$G_n^0=0, \quad G_4^0=\frac{iU_0}{c}, \tag{29,4}$$

unde:

$$U_0=\int T_{44}^0(d\vec{r}_0)$$

reprezintă energia cîmpului electrostatic.

Pentru a determina covarianţa relativistă a vectorului G_μ să facem trecerea la un alt sistem de coordonate, faţă de care electronul se mişcă cu o viteză constantă v.

Alegînd axa x de-a lungul vectorului vitezei, avem conform transformărilor lui Lorentz-Einstein:

$$x_1^0=\frac{x_1+i\beta x_4}{k}, \quad x_2^0=x_2, \quad x_3^0=x_3, \quad x_4^0=\frac{x_4-i\beta x_1}{k}, \tag{29,5}$$

unde:

$$\beta=\frac{v}{c}, \quad k=\sqrt{1-\beta^2}.$$

Prin trecerea la sistemul de coordonate în mişcare, valorile noi ale componentelor $T_{\mu\nu}$ şi valoarea elementului de volum $(d\vec{r})$ vor fi legate de valorile vechi prin relaţiile:

$$T_{\mu\nu}=\frac{\partial x_\alpha^0}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\beta^0}{\partial x_\nu}T_{\alpha\beta}^0, \quad (d\vec{r})=k(d\vec{r}_0). \tag{29,6}$$

Păstrînd pentru tensorul $T_{\alpha\beta}^0$ numai termenii diagonali ($\alpha=\beta$) şi ţinînd seama că în cazul mişcării de-a lungul axei x trebuie să lăsăm numai componentele pentru care $\mu,\nu=1,4$, avem:

$$T_{14}=\frac{\partial x_1^0}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^0}{\partial x_4}T_{11}^0+\frac{\partial x_4^0}{\partial x_1}\frac{\partial x_4^0}{\partial x_4}T_{44}^0=-\frac{i\beta}{k^2}(T_{44}^0-T_{11}^0), \tag{29,7}$$

$$T_{44}=\frac{\partial x_1^0}{\partial x_4}\frac{\partial x_1^0}{\partial x_4}T_{11}^0+\frac{\partial x_4^0}{\partial x_4}\frac{\partial x_4^0}{\partial x_4}T_{44}^0=\frac{1}{k^2}(T_{44}^0-\beta^2T_{11}^0), \tag{29,8}$$

de unde găsim:

$$G_1=\frac{\beta}{kc}\int(T_{44}^0-T_{11}^0)(d\vec{r}_0),$$

$$G_4=\frac{1}{ikc}\int(T_{44}^0-\beta^2T_{11}^0)(d\vec{r}_0). \tag{29,9}$$

Conform teoriei relativităţii cantitatea de mişcare electromagnetică şi energia trebuie să formeze, împreună, un vector cvadridimensional, a cărui lege de transformare are forma:

$$G_\mu = \frac{\partial x_\alpha^0}{\partial x_\mu} G_\alpha^0 = \frac{\partial x_4^0}{\partial x_\mu} G_4^0 \tag{29,10}$$

sau conform cu (28,9):

$$G_1 = -\frac{i\beta}{k} G_4^0 = \frac{\beta}{kc} \int T_{44}^0 (d\vec{r}_0),$$

$$G_4 = \frac{i}{kc} \int T_{44}^0 (d\vec{r}_0). \tag{29,11}$$

Comparînd (29,2) cu (29,11), vedem că cantitatea de mişcare a cîmpului electromagnetic formează un vector cvadridimensional în cazul cînd:

$$\int T_{11}^0 (d\vec{r}_0) = 0. \tag{29,12}$$

Ultima relaţie reprezintă teorema lui Laue, conform căreia cantitatea de mişcare electromagnetică G_μ formează un vector cvadridimensional numai în cazul cînd, pentru toate componentele tensorului energiei, într-un sistem de coordonate în repaus faţă de electron, se respectă relaţia:

$$\int T_{\mu\nu}^0 (d\vec{r}_0) = 0, \tag{29,13}$$

afară de componenta T_{44}^0, a cărei integrală este o mărime constantă, egală cu energia totală a cîmpului generat de particulă. Putem egala această energie a cîmpului cu energia proprie a particulei, exprimînd prin aceasta ideea fundamentală a ipotezei asupra naturii electromagnetice a masei electronului. Conform acesteia din urmă, energia proprie a particulei U_0, împărţită prin c^2, sau masa ei m^{el} este:

$$m^{el} = \frac{U_0}{c^2} = \frac{1}{c^2} \int T_{44}^0 (d\vec{r}_0). \tag{29,14}$$

Să arătăm că egalitatea (29,13) formulează nu numai condiţia pentru care cantitatea de mişcare G_μ formează un vector cvadridimensional, dar exprimă, de asemenea condiţia necesară pentru ca întreaga sarcină să se găsească în echilibru.

Intr-adevăr, în cazul static ($T_{n4}=0$) avem în locul relației (29,13):

$$\int T^0_{nm}\delta_{nm}(d\vec{r}_0)=0. \tag{29,15}$$

Ținînd seama de egalitatea:

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_m}=\delta_{nm},$$

obținem în locul relației (29,15), relația:

$$\int x_n \frac{T\partial^0_{nm}}{\partial x_m}(d\vec{r}_0)=0. \tag{29,16}$$

După cum se vede din (28,4), mărimea $\frac{\partial T^0_{nm}}{\partial x_m}$ reprezintă o densitate a forței, iar întreaga expresie (29,16) reprezintă virialul care — după cum se știe — este proporțional cu energia cinetică medie [v. mai amănunțit relația (44,1)]. Dacă virialul devine nul, atunci energia cinetică medie devine pe asemenea nulă, adică sarcina totală trebuie să se găsească în echilibru. Astfel, teoremele deduse aici și care ne arată condițiile în care putem egala vectorul energie-impuls al particulei cu vectorul energie-impuls al cîmpului, sînt foarte importante în construirea unei teorii de cîmp al electronului.

§ 30. Teoria masei electromagnetice în electrodinamica lui Maxwell-Lorentz

a) *Tensorul energie-impuls al cîmpului maxwellian*

In electrodinamica lui Maxwell-Lorentz funcția lui Lagrange pentru cîmp este [v. formula (23,11)]:

$$L_0=-\frac{1}{16\pi}H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}=\frac{1}{8\pi}(E^2-H^2), \tag{30,1}$$

iar pentru momentele cîmpului avem [v. relația (23,28)]:

$$D_{\mu\nu}=H_{\mu\nu}. \tag{30,2}$$

De aici obţinem pentru componentele tensorului energie-impuls, conform lui (28,5):

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}H_{\mu\lambda}H_{\lambda\nu}+\frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu}H_{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}. \tag{30,3}$$

Tensorul $T_{\mu\nu}$ conţine nouă componente spaţiale, care formează tensorul tridimensional al tensiunii superficiale:

$$T_{nk}=\frac{1}{4\pi}\left[E_nE_k+H_nH_k-\frac{1}{2}\delta_{nk}(H^2+E^2)\right]; \tag{30,4}$$

$$n,k=1,2,3,$$

şi şase componente spaţio-temporale:

$$T_{n4}=-icg_n,\quad T_{4n}=-\frac{i}{c}\mathfrak{S}_n, \tag{30,5}$$

densitatea cantităţii de mişcare electromagnetică g_n fiind legată de vectorul Umov-Poynting al densităţii curentului de energie a cîmpului:

$$\vec{\mathfrak{S}}=\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H} \tag{30,6}$$

prin relaţia:

$$\vec{g}=\frac{\vec{\mathfrak{S}}}{c^2}. \tag{30,7}$$

In sfîrşit, componenta temporală T_{44} este densitatea energiei cîmpului electromagnetic:

$$T_{44}=u=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2). \tag{30,8}$$

Astfel, tensorul energie-impuls are forma:

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_3 \\ -\frac{i}{c}\mathfrak{S}_1 & -\frac{i}{c}\mathfrak{S}_2 & -\frac{i}{c}\mathfrak{S}_3 & u \end{pmatrix} \tag{30,9}$$

Relaţia (30,7) dintre densitatea impulsului electromagnetic $\vec{g}$ şi fluxul $\vec{\sigma}$ este o consecinţă a simetriei tensorului energie-impuls în teoria maxwelliană:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}\ ^{1}).$$

---

1) In cazul general $D_{\mu\nu} \neq H_{\mu\lambda}$, avem doi tensori ai cîmpului:

$$H_{23} = B_x, \quad D_{23} = H_x,$$

$$H_{41} = iE_x, \quad D_{41} = iD_x.$$

Componentele electrice se numesc intensitatea cîmpului $(\vec{E})$ şi inducţia $(\vec{D})$; componentele magnetice se numesc intensitatea $(\vec{H})$ şi inducţia $(\vec{B})$.

Pentru vectori $(\vec{B}, \vec{E})$ şi $(\vec{D}, \vec{H})$ au loc ecuaţii care coincid cu ecuaţiile lui Maxwell pentru un mediu dielectric:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 4\pi \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho.$$

unde în cazul unei particule punctiforme [v. (23,30)]:

$$\vec{j} = \frac{e\vec{v}}{c}\,\delta\,(\vec{r} - \vec{\xi}), \quad \rho = e\delta\,(\vec{r} - \vec{\xi}).$$

In cazul unui mediu material, tensorul energie-impuls ar putea fi şi nesimetric. Intr-adevăr, conform (28,5) avem:

$$T_{n4} = -icg_n = -\frac{i}{4\pi}(\vec{D} \times \vec{B})_n,$$

$$T_{4n} = -\frac{i}{c}\sigma_n = -\frac{i}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{H})_n \neq T_{n4}.$$

Expresia tensorului energie-impuls (28,5) coincide cu definiţia dată de Minkovski şi Dällenbach.

Pe de altă parte, Abraham socotea în mod greşit că tensorul energie-impuls trebuie să fie întotdeauna simetric şi — lăsînd pentru componentele T^a_{4n} valoarea găsită de Minkovski $(T^a_{4a} = T_{4n})$ a pus:

$$T^a_{4n} = T_{4n} = -\frac{i}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H}.$$

Argumentaţia lui Abraham este evident neconvingătoare şi noi trebuie să rămînem la tensorul lui Minkovscki-Dällenbach, care reprezintă o consecinţă necesară a teoriei generale bazate pe principii variaţionale. O discuţie relativ mai amănunţită a consecinţelor fizice legate de cei doi tensori se poate găsi în cartea lui I. E. Tamm (v. I. E. Tamm, Bazele teoriei electricităţii, Ed. Tehnică 1953 § 116).

Să verificăm acum dacă teorema lui Laue (29,13) este îndeplinită în teoria lui Maxwell-Lorentz.

Intr-un sistem de coordonate în repaus față de electron, cîmpul magnetic devine nul, iar cîmpul electric trebuie să posede o simetrie sferică. De aceea, chiar în concordanță cu (29,2) ne pot interesa numai componentele diagonale ale tensorului energie-impuls determinate de relațiile:

$$T^0_{44} = \frac{1}{8\pi} E^2,$$

$$T^0_{11} = \frac{1}{4\pi}\left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2\right). \tag{30,10}$$

De aici găsim:

$$\int T^0_{44}\,(d\vec{r}_0) = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,(d\vec{r}_0) = U_0, \tag{30,11}$$

unde U_0 este energia cîmpului electrostatic.

Luînd în considerare mai departe simetria sferică a vectorului $\vec{E}$ avem:

$$\int T^0_{11}\,(d\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\int \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2\right)(d\vec{r}_0) = -\frac{1}{3} U_0, \tag{30,12}$$

adică teorema lui Laue nu este satisfăcută pentru cîmpul electromagnetic generat de o sarcină.

In conformitate cu (29,9), găsim următoarele valori pentru componentele cantității de mișcare a cîmpului electromagnetic generat de un electron care se mișcă cu viteza v:

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{U_0 v}{c^2 k}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\frac{U_0 v}{c^2 k}, \\ G_4 &= \frac{i U_0}{ck}\left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{30,13}$$

Astfel, componentele G_ν nu formează un vector cvadridimensional, spre deosebire de componentele impulsului electronului: $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$;

$$p_4 = \frac{i\mathcal{E}}{c} = \frac{m_0 c i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Să ne ocupăm acum de ipoteza masei de cîmp în cadrul electrodinamicii clasice. Conform acestei ipoteze, emisă la sfîrșitul secolului al XIX-lea de J. J. Thomson şi dezvoltată de Lorentz, Abraham şi Poincaré, energia proprie a electronului (deci şi masa lui) este în întregime condiţionată de energia cîmpului electromagnetic legat de electron, sau — ceea ce ce reduce la acelaşi lucru — inerţia particulei se datoreşte inerţiei cîmpului. Exact la fel şi impulsul electronului se presupune că este datorit impulsului cîmpului.

Cu toate că programul teoriei cîmpului n-a fost realizat nici pînă în zilele noastre, ideile ei fizice şi metodele de calcul au jucat întotdeauna un rol de stimulare. Pentru a avea succes, teoria masei de cîmp trebuie să satisfacă cel puţin următoarele condiţii. In primul rînd, trebuie să se obţină o valoare finită pentru energia cîmpului generat de particulă, care să poată fi egalată exact cu energia finită a particulei (adică cu masa înmulţită cu pătratul vitezei luminii: $\mathcal{E}=mc^2$). In al doilea rînd, valoarea impulsului cîmpului generat de particulă, trebuie să fie nu numai finită, dar să se găsească în acelaşi timp într-o relaţie corectă cu energia, formînd, împreună cu aceasta din urmă, un vector cvadridimensional. In al treilea rînd, teoria trebuie să fie în stare să deducă ecuaţiile de mişcare ale electronului.

Intr-o dezvoltare ulterioară a teoriei trebuie să se ceară pe deasupra şi deducerea spinului, adică a momentului cinetic propriu al electronului, ca spin al cîmpului. Aceasta însă priveşte generalizarea cuantică a teoriei masei de cîmp, deoarece spinul este un efect cuantic. Tot aşa, obţinerea unei valori nu numai finite, ci şi bine determinate pentru masa electronului şi a altor particule cade, de asemenea, evident, în sfera de acţiune a teoriei cuantice. De aceea, ne mărginim acum — în cadrul teoriei clasice a masei de cîmp — înainte de toate, cel puţin la problema obţinerii unei mase finite şi a unui impuls finit şi la o relaţie reciprocă corectă, a cărei posibilitate nu este evidentă.

Intorcîndu-ne la electrodinamica maxwelliană şi lăsînd deocamdată la o parte problema valorii finite a energiei cîmpului, vedem că masa particulei se poate determina din punct de vedere al ipotezei de cîmp pe două căi. In primul rînd, plecînd dela impulsul electromagnetic G_1 se poate determina masa ca un coeficient de proporţionalitate între impulsul cîmpului şi viteza tridimensională a particulei:

$$m^{el}=\frac{G_1}{v}=\frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2k}=\frac{4}{3}\frac{\frac{U_0}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\text{const}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (30,14)$$

O astfel de lege de variaţie a masei electronului cu viteza mişcării a fost într-adevăr confirmată experimental la începutul secolului XX (Kaufmann-Guy şi Lavanchy) şi aceasta într-un timp părea să fie un puternic argument în favoarea ipotezei masei electromagnetice de cîmp.

In al doilea rînd însă, dacă considerăm energia proprie a electronului ca fiind egală sau coincizînd cu energia cîmpului, iar masa drept un cît al energiei cîmpului $\frac{cG_4}{i}$ (adică a componentei a patra a impulsului) prin pătratul vitezei luminii c^2, atunci obţinem o relaţie care contrazice ecuaţia de mai sus şi datele experimentale:

$$m^{el} = \frac{U_0}{kc^2}\left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right). \tag{30,15}$$

Acest rezultat nu coincide nici cu formula corectă cerută de teoria relativităţii $m^{el} = \frac{U_0}{kc^2}$, nici cu relaţia greşită (30,14):

$$m^{el} = \frac{4}{3}\frac{U_0}{kc^2}. \tag{30,16}$$

In felul acesta masa şi impulsul electronului n-au putut fi puse în concordanţă între ele, în teoria de cîmp a electrodinamicii maxwelliene clasice. Afară de aceasta, trebuie să subliniem, că conform teoriei relativităţii restrînse, masa fiecărui corp variază cu viteza după legea:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

unde m_0 este masa de repaus, iar impulsul este egal cu

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Aceste relaţii au loc complet independent de vreo concepţie asupra naturii masei astfel încît confirmarea experimentală a variaţiei masei cu viteza după legea

$$m = \frac{\text{const}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

nu poate fi în nici un caz un argument în favoarea unei ipoteze de cîmp a originii electromagnetice a masei. Exact aceeaşi lege de variaţie a masei are loc şi pentru particule neîncărcate, de exemplu neutroni.

Mai mult încă, conform teoriei relativităţii, energia fiecărui corp este: $\mathcal{E}=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, unde $\mathcal{E}_0=m_0c^2$ este energia proprie de repaus. Toate aceste formule ale teoriei relativităţii sînt excelent confirmate de experienţă. Apariţia factorului suplimentar $^4/_3$ în expresia (30,14), a impulsului şi a factorului $\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)$ în expresia energiei (30,15), factori care nu concordă şi contrazic experienţa şi relaţiile teoriei relativităţii, arată că masa, energia, impulsul şi prin urmare, comportarea mecanică a electronului nu pot fi explicate în teoria lui Maxwell-Lorentz din examinarea cîmpului electromagnetic propriu al acestuia. In felul acesta, în particular masa electronului nu poate avea o origină pur electromagnetică.

După cum vedem, acest prim insucces al teoriei clasice de cîmp a masei electronului este legat de nerespectarea, examinată mai sus, a condiţiilor de valabilitate ale teoremei lui Laue. Se constată însă că componentele impulsului şi a energiei cîmpului electromagnetic nu formează un vector cvadridimensional şi prin urmare nu pot fi egalate cu impulsul şi energia electronului care formează un vector. Dacă rămînem totuşi în cadrul unei teorii de cîmp, atunci trebuie să introducem un cîmp auxiliar oarecare, diferit de cel maxwellian, pentru ca energia şi impulsul acestui cîmp să poată compensa fracţiunea suplimentară a cîmpului, legată de coeficienţii $^1/_3$ din expresia impulsului şi termenul $^1/_3\,\beta^2$ din expresia energiei. Acest cîmp suplimentar duce la aşa numita presiune a lui Poincaré, presiune care menţine electronul în „echilibru“ (v. mai jos). Luînd în considerare un astfel de insucces al teoriei clasice de cîmp a electronului, în sensul de punere în concordanţă a valorilor energiei şi impulsului particulei şi cîmpului, să ne oprim totuşi asupra analizei următorului punct fundamental, legat de problema valorii finite a energiei cîmpului generat de electron.

Pentru o particulă în repaus avem: $\beta=0$, $k=1$; de aceea masa electronului ar fi, conform uneia sau celeilalte din cele două definiţii date mai sus $m^{el}=\frac{4}{3}\frac{U^0}{c^2}$, conform (30,14) sau $m^{el}=\frac{U_0}{c^2}$ conform (30,15). Aici U_0 este energia electrostatică a sarcinii punctiforme. Deoarece energia cîmpului U_0 a unui electron punctiform este infinită, pentru eliminarea acestei dificultăţi se propune a se reprezenta sarcina ca fiind distribuită într-un volum oarecare, pe care pentru simplificare, să-l luăm sferic, de rază r_0. Trebuie să subliniem de la început, că introducerea — oricare ar fi ea — a unei raze, distruge inevitabil invarianţa relativistă a teoriei şi de aceea poate fi privită numai ca un procedeu cu totul provizoriu.

In cazul unei sfere încărcate superficial, de raza r_0, energia totală a cîmpului electric este:

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{r_0 \leq r < \infty} E^2 (d\vec{r}) = \frac{e^2}{2} \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2r_0}. \qquad (30,17)$$

Pentru cazul unei sarcini distribuite uniform în volum, avem: $U_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0}$. In general, pentru o distribuţie oarecare a sarcinilor, avem;

$$U_0 = \alpha \frac{e^2}{r_0},$$

unde coeficientul α depinde de caracterul distribuţiei sarcinii şi este de ordinul de mărime al unităţii.

Fără să dăm vreo importanţă formei precise de distribuţie a sarcinii în „interiorul" electronului în acest model necuantic cu totul provizoriu, care afară de aceasta, distruge în orice caz invarianţa relativistă oricare ar fi distribuţia, să încercăm totuşi să evaluăm ordinul de mărime al razei electronului, lăsînd la o parte toţi coeficienţii de ordinul unităţii. Să egalăm energia cîmpului electrostatic U_0 cu energia proprie a electronului $m^{el} c^2$:

$$m^{el} c^2 = \frac{e^2}{r_0}.$$

Substituind în locul lui e, m, c constantele numerice cunoscute pentru electron: masa $m = 9 \cdot 10^{-28} g$, sarcina $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ues CGS, viteza luminii $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, găsim

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \sim 10^{-13}\,\text{cm} \left(\text{mai precis} \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \right). \qquad (30,18)$$

Ultima expresie ne dă valoarea aşa numitei raze clasice a electronului. Mai precis, este vorba acum de „raza electrică" clasică deoarece s-ar fi putut, pe o cale cu totul analogă, aplicînd aceeaşi concepţie a teoriei masei de cîmp, să calculăm şi raza „magnetică", fără să ne preocupăm de faptul că momentul magnetic, la fel ca şi spinul electronului, este condiţionat de efectele cuantice.

Egalînd energia magnetică, condiţionată de momentul dipolar μ al electronului, $\mathcal{E}_\mu \sim \frac{\mu^2}{r_\mu^3}$, cu energia proprie a electronului mc^2, avem:

$$mc^2 = \frac{\mu^2}{r_\mu^3}$$

de unde rezultă pentru raza magnetică clasică a electronului:

$$r_\mu = \left(\frac{\mu^2}{mc^2}\right)^{1/3} \sim 10^{-11} \text{ cm},$$

deoarece conform datelor empirice, momentul magnetic al electronului este egal cu magnetonul lui Bohr:

$$\mu = \frac{eh}{4\pi mc}.$$

Exact la fel, pentru raza gravitaţională clasică a electronului avem $r_g = \frac{\varkappa \cdot m}{c^2} \sim 10^{-55}$ cm[1]), deoarece $mc^2 \cong \frac{\varkappa \cdot m^2}{r_g}$ ($\varkappa$ este constanta gravifică).

Cu toate defectele mari ale ipotezei masei de cîmp, nu se poate totuşi nega un anumit succes al acesteia, constînd în faptul că valoarea obţinută pentru raza electrică a electronului (30,18) corespunde într-adevăr unor „dimensiuni" eficace ale electronului, (care apar de exemplu în difuzia luminii pe electron), electron care se consideră punctiform în toate calculele de acest fel. După cum va fi arătat mai jos (§ 36), secţiunea eficace clasică a lui Thomson pentru difuzia luminii pe un electron punctiform este determinată în esenţă de mărimea $\sigma \cong r_0^2$, în concordanţă cu experienţa, pe cînd teoria cuantică a difuzii luminii pe un electron punctiform, teoria necesară pentru cazul lungimilor de undă mici, cînd electronul capătă un recul apreciabil (efectul Compton), duce la formula lui Klein-Nishina[2]) pentru secţiunea eficace, formulă care concordă cu experienţa şi care conţine de asemenea ca mărime fundamentală pe r_0^2. De aceea, se poate spune că din punct de vedere al teoriei de cîmp, masa sau energia electronului este într-adevăr datorită

---

[1]) V. Д. Иваненко и А. Соколов, Вестник МГУ, No. 8, 1947.

[2]) O. Klein und J. Nishina, Zs. f. Phys., **52**, 853, 1929. Această formulă a fost dedusă de asemenea de către I. E. Tamm (I. Tamm, Zs. f. Phys., **62**, 545, 1930).

în mare parte cîmpului electrostatic. Pe de altă parte, deoarece raza clasică magnetică sau gravifică nu are nimic comun cu dimensiunile eficace ale electronului, dimensiuni care apar în cazul interacţiunilor acestuia, a mişcării acestuia în atomi, etc., trebuie să tragem concluzia că cîmpul gravific sau magnetic nu joacă un rol esenţial în structura electronului, din punctul de vedere al ipotezei masei de cîmp.

Să ne amintim acum rezultatul menţionat mai sus asupra necesităţii de a realiza programul teoriei de cîmp a electronului, anume introducerea forţelor nemaxwelliene. Nu este dificil de văzut cauza fizică intuitivă pentru admiterea unor astfel de forţe.

Deoarece electronul-corpuscul se presupune încărcat cu electricitate de un singur fel, el trebuie inevitabil să explodeze sub acţiunea forţelor maxwelliene (în cazul de faţă al forţelor coulombiene). Prin urmare, pentru a menţine „părţile" electronului împreună, trebuie să introducem forţe nemaxwelliene.

Este evident că, din punctul de vedere al interpretării electronului ca o particulă elementară, nu se poate vorbi despre „părţile" lui în sensul riguros al cuvîntului, ceea ce subliniază încă o dată caracterul cu totul provizoriu al modelului electronului corpuscul.

b) *Tensorul momentului cinetic al cîmpului*

Putem ajunge direct la tensorul energiei cîmpului electromagnetic, precum şi al oricăror altor cîmpuri, plecînd de la considerarea funcţiei lui Lagrange L.

Mărginindu-ne, pentru simplificare, la cazul unui cîmp fără sarcini, avem — conform lui (23,11) — pentru cazul maxwellian:

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\lambda\nu} H_{\lambda\nu}. \tag{30,19}$$

Să derivăm pe L în raport cu coordonatele x_μ:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} \frac{\partial A_{\lambda,\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{4\pi} H_{\lambda\nu} \frac{\partial A_{\lambda,\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{30,20}$$

Aici am ţinut seamă că:

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\lambda\nu}.$$

Luînd în considerare că în spaţiul fără sarcini avem:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial H_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu}=0,$$

putem aduce egalitatea (30,20) la forma:

$$\frac{\partial T^{\text{can}}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0, \tag{30,21}$$

unde componentele aşa numitului tensor canonic al energiei (mai precis tensorul densitate de energie-impuls-tensiune) sînt determinate de relaţiile:

$$T^{\text{can}}_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}A_{\lambda,\mu}H_{\lambda\nu}-L\delta_{\mu\nu}=A_{\lambda,\mu}\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}}-L\delta_{\mu\nu}. \tag{30,22}$$

Ecuaţia (30,21) care exprimă anularea divergenţei cvadridimensionale, este echivalentă cu patru legi de conservare obişnuite, care se obţin pentru cele patru valori ale indicelui $\mu=1,2,3,4$.

Intr-adevăr, pentru $\mu=4$; obţinem ecuaţia:

$$\operatorname{div}\vec{T}_4-\frac{i}{c}\frac{\partial T_{44}}{\partial t}=0,$$

care exprimă legea de conservare a energiei, deoarece $\vec{T}_{44}$ este densitatea de energie. Să înmulţim ultima ecuaţie cu elementul de volum $(d\vec{r})$ şi să integrăm pe întregul spaţiu. Atunci, transformînd integrala de volum $\int\operatorname{div}\vec{T}_4(d\vec{r})$ într-o integrală de suprafaţă după teorema lui Ostrogradski şi ţinînd seama că la infinit componentele $T_{\mu\nu}$ dispar, obţinem

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}(d\vec{r})=0,\quad \text{adică}\quad \int T_{44}(d\vec{r})=\text{const}.$$

Exact la fel se demonstrează şi celelalte trei legi de conservare pentru componentele impulsului.

După cum s-a arătat în § 23a, conform teoremei lui Noether, invarianţei lagrangeanului faţă de fiecare grup dat de transformări continue îi corespunde o lege proprie de transformare penfru o mărime sau alta. Afară de aceasta, este valabilă şi reciproca acestei teoreme, care afirmă existenţa unei invarianţe în cazul îndeplinirii legilor de conservare. Este uşor de arătat că legea generală de conservare (30,21) a tensorului energie-impuls corespunde invarianței ecuațiilor lui Maxwell față de grupul translațiilor celor patru coordonate. Intr-adevăr, pentru o translație a originii coordonatelor, avem următoarea variație a funcției lui Lagrange

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \delta x_\mu,$$

care se reduce la calculul derivatei $\frac{\partial L}{\partial x_\mu}$ · In felul acesta, independența lui L față de translațiile coordonatelor, duce la anularea integralei $\int \delta L\,(dx)$ și, odată cu aceasta, duce la legile de conservare pentru energia și impulsul cîmpului (30,21). In acest sens, teoria cîmpului este complet analogă teoriei punctului material, în care invarianța acțiunii sau a lagrangeanului față de translațiile celor patru coordonate, duce de asemenea la patru legi de conservare pentru componentele vectorului impuls cvadridimensional, adică pentru cele trei componente ale cantității de mișcare și pentru energie.

In felul acesta se poate spune că grupul translațiilor sistemului de coordonate induce atît construirea unui tensor canonic al energiei, cit și legea lui de conservare, sub forma condiției de anulare a divergenței cvadridimensionale și aceasta cu ajutorul lagrangeanului invariant sau respectiv a principiului variațional invariant. Intr-un mod cu totul analog putem ajunge la tensorul energie-impuls și la legea de conservare a acestuia, nu numai în cazul ecuațiilor lui Maxwell, dar și pentru oricare tip de cîmpuri: de exemplu pentru cîmpul gravitațional, precum și pentru cîmpurile scalare, vectoriale, pseudoscalare și pseudovectoriale, care ar putea descrie mezonii, apoi pentru cîmpul spinorilor lui Dirac etc., deoarece ecuațiile tuturor acestor cîmpuri sînt invariante față de translații și aceasta, datorită omogeneității universului spațiu-timp.

Tensorul canonic al energiei reprezintă în fond o generalizare pentru cazul cîmpului a expresiei funcției lui Hamilton:

$$H = p_s \dot{q}_s - L \quad \left(p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right),$$

care se referă la un punct material, știind că, în cazul cîmpului, funcția lui Hamilton este una din componentele tensorului densitate de energie-impuls ($H = T_{44}$).

In sfîrşit, este totdeauna posibil să introducem şi un tensor metric al energiei care este simetric şi care — după Hilbert — se obţine prin variaţia funcţiei lui Lagrange în raport cu componentele tensorului metric[1]):

$$T^{\text{metr}}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{30,23}$$

ştiind că în rezultatul final, cînd trecem la universul pseudoeuclidian plan (în lipsa gravitaţiei) trebuie să egalăm componentele $g^{\mu\nu}$ $(x_4 = ict)$ cu simbolul delta unitate:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$$

[v. de exemplu, relaţia (23,1)]. Tot aşa, determinantul format din componentele $g^{\mu\nu}$, trebuie pus egal cu unitatea $(g = 1)$.

In cazul cîmpului lui Maxwell, tensorul metric al energiei coincide cu tensorul căpătat mai sus (30,3)[2]):

$$T^{\text{metr}}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (A_{\lambda,\mu} - A_{\mu,\lambda}) H_{\lambda\nu} - L\delta_{\mu\nu}, \tag{30,24}$$

care este simetric $(T^{\text{metr}}_{\mu\nu} = T^{\text{metr}}_{\nu\mu})$ şi satisface, în cazul unui spaţiu vid, legile de conservare:

$$\frac{\delta T^{\text{metr}}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Tensorul canonic al energiei însă, nu este simetric şi diferă de cel metric prin mărimea:

$$T'_{\mu\nu} = T^{\text{can}}_{\mu\nu} - T^{\text{metr}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} A_\mu H_{\nu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]},$$

a cărei divergenţă este nulă:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Nesimetria tensorului canonic al energiei se leagă direct de existenţa mai multor componente ale funcţiilor de undă la toate

[1]) V. de exemplu, А. С. Эддингтон, Теория относительности, ГТТИ, 1934, § 79.

[2]) Deducerea relaţiei (30.24) se dă în § 47.

cîmpurile afară de cel scalar (sau pseudoscalar). Altfel zis, această nesimetrie este legată de proprietăţile de polarizare ale cîmpului sau de existenţa spinului particulelor care corespund acestui cîmp.

Să ne oprim acum asupra momentului cinetic al cîmpului electro-magnetic, reamintind în primul rînd expresia momentului cantităţii de mişcare din mecanica punctului material. In notaţie cvadridimensională, momentul cinetic este egal cu tensorul antisimetric de ordinul doi:

$$M_{\mu\nu}=x_{\mu}p_{\nu}-x_{\nu}p_{\mu}.$$

Componentele pur spaţiale ($\mu,\nu=1,2,3$) ale acestui tensor al momentelor au forma cunoscută a vectorului axial obişnuit al momentului cinetic:

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}\,;\quad M_x=M_{23}=yp_z-zp_y,$$

iar celelalte componente spaţio-temporale ne dau vectorul cu componentele:

$$M_{4n}=ic\left(tp_n-\frac{x_n\mathcal{E}}{c^2}\right);\quad \left(x_4=ict,\quad p_4=\frac{i\mathcal{E}}{c}\right).$$

După cum s-a menţionat, izotropia universului spaţiu-timp duce la invarianţa integralei de acţiune sau a lagrangeanului faţă de rotaţii [v. § 23, *b*), p. 3], de unde, conform teoremei lui Noether, rezultă legile de conservare ale componentelor tensorului $M_{\mu\nu}\left(\frac{d}{dt}M_{\mu\nu}=0\right)$. Cele trei legi de conservare ale componentelor momentului cinetic M_{nk} sînt bine cunoscute din mecanica punctului material. Celelalte trei legi de conservare $M_{4n}=\text{const}$ reprezintă o generalizare relativistă a legii de mişcare uniformă a centrului de inerţie, de care ne putem uşor convinge trecînd, de exemplu, în suma $\sum M_{4n}$ — (sumarea se face în raport cu masele sistemului) la aproximaţia vitezelor mici, cînd $\mathcal{E}\approx mc^2$ [1]).

Trimiţînd pe cititor la literatura menţionată mai sus, în ceea ce priveşte analiza completă a momentului cinetic al cîmpului, noi vom obţine acum direct expresia tensorului momentelor, mai precis a densităţii momentului „orbital" al cîmpului, drept o generalizare a

---

[1]) V. Bessel-Hagen. Math. Ann. 1921; Л. Ландау и Е. Лифшиц Теория поля, Гостехиздат, 1948, §. 13.

tensorului momentelor din mecanica punctului material, sub forma următoare:

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i}{c}\left(x_\mu\, T^{\text{can}}_{\nu\lambda} - x_\nu\, T^{\text{can}}_{\mu\lambda}\right), \tag{30,25}$$

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = -M_{[\nu\mu]\lambda}.$$

Insă în locul impulsurilor p_ν trebuie să substituim acum în tensorul mecanic componentele tensorului canonic al energiei $T^{\text{can}}_{\nu\lambda}$, tot aşa ca şi la trecerea către teoria cîmpului, în locul aceluiaşi vector energie-impuls $(p_\nu = p\,;\; i\mathcal{E}/c)$ am obţinut componentele tensorului (densităţii) energie-impuls $T_{4\nu}$ şi — în particular — în locul energiei $\mathcal{E}$, componenta T_{44} pentru densitatea energiei. Atunci, componentele momentului „orbital" total, al cantităţii de mişcare în sensul obişnuit, se vor exprima ca integrale de volum efectuate asupra componentetor antisimetrice în coordonatele spaţiale ale tensorului densităţii de moment $M_{[rs]4}$; de exemplu:

$$\overline{M}_x = \int M_{[23]4}(d\vec{r}) \quad \text{etc.} \tag{30,26}$$

Divergenţa tensorului momentelor:

$$\frac{\partial M_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{i}{c}\left(T^{\text{can}}_{\nu\mu} - T^{\text{can}}_{\mu\nu}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\,\frac{i}{c}\left(f_{\mu[\nu\lambda]} - f_{\nu[\mu\lambda]}\right) \tag{30,27}$$

poate fi uşor găsită dacă ţinem seamă de legile de conservare (30,21) precum şi de relaţia:

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\mu\lambda}\,.$$

Această divergenţă se va anula, adică momentul cantităţii de mişcare (30,25) va satisface legea de conservare şi va rămîne o mărime constantă, numai în cazul cînd tensorul canonic al energiei $T^{\text{can}}_{\mu\nu}$ este simetric, adică numai în cazul unui cîmp scalar (sau pseudoscalar) $(f_{\mu[\nu\lambda]} = 0)$.

Pe de altă parte, lipsa simetriei tensorului canonic al energiei în cazul unui cîmp vectorial (maxwellian) şi al tuturor celorlalte cîmpuri, ne arată că pentru asigurarea conservării tensorului momentului cinetic, trebuie să adăugăm la momentul „orbital" al cantităţii de mişcare a cîmpului, obţinut mai sus, un nou tensor de rangul trei:

$$M'_{[\mu\nu]\lambda}=M_{[\mu\nu]\gamma}+S_{[\mu\nu]\lambda}, \tag{30,28}$$

astfel încît suma lor să satisfacă legea de conservare, adică

$$\frac{\partial M'_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda}=0. \tag{30,29}$$

Din egalitatea (30,27) se vede că în acest scop, trebuie să punem,

$$S_{[\mu\nu]\lambda}=-S_{[\nu\mu]\lambda}=$$

$$=\frac{i}{c}(f_{\mu[\nu\lambda]}-f_{\nu[\mu\lambda]})=-\frac{i}{4\pi c}(A_\mu H_{\nu\lambda}-A_\nu H_{\mu\lambda}). \tag{30,30}$$

Atunci divergenţa (30,30) sumată cu divergenţa (30,27) va da zero. Trebuie să remarcăm că „simetrizarea" tensorului energiei, care se face în toate cursurile obişnuite de teoria cîmpului, fără a elucida relaţiile indicate mai sus, nu lămureşte sensul fizic al lipsei de simetrie.

Mărimea $S_{[\mu\nu]\lambda}$ poate fi privită drept tensor al densităţii momentului propriu sau de spin al cantităţii de mişcare a cîmpului (ceea ce corespunde în cazul cîmpului electromagnetic, sub aspect corpuscular, cu spinul fotonului). Legea de conservare (30,29) a tensorului total al densităţii momentului cîmpulul corespunde, conform teoremei lui Noether, invarianţei ecuaţiilor lui Maxwell, în cazul nostru, şi — prin urmare — a lagrangeanului faţă de rotaţii cvadridimensionale, altfel zis, corespunde izotropiei universului spaţiu-timp. Relaţii analoge au loc şi în cazul altor cîmpuri.

Prin analogie cu egalitatea (30,26) putem găsi valoarea totală pentru spinul cîmpului:

$$\bar{S}_x=\int S_{[23]4}(d\vec{r}),$$

sau, substituind valoarea (30,30) în locul lui $S_{[23]4}$, avem:

$$\bar{S}=\frac{1}{4\pi c}\int(\vec{E}\times\vec{A})\,(d\vec{r}).$$

Analiza cuantică arată că spinul fotonilor este egal cu 1, dacă se ia ca unitate $h/2\pi$. Aceasta reiese în mod intuitiv din faptul că pentru fotonii de frecvenţă ν avem:

$$|E|=\frac{1}{c}\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|=\frac{2\pi\nu}{c}|A|,\quad E=H,$$

ştiind că în cazul unei polarizaţii circulare vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{A}$ sînt perpendiculari.

Ţinînd seama că energia totală a cîmpului se determină cu ajutorul formulei:

$$U=\frac{1}{8\pi}\int(E^2+H^2)\,(d\vec{r}),$$

găsim următoarea relaţie între vectorul $|S|$ şi U:

$$|S|=\frac{1}{2\pi\nu}|U|,$$

de unde, luînd în considerare că, conform teoriei cuantice, $U=h\nu$, obţinem

$$|S|=\frac{h}{2\pi}\cdot$$

In ceea ce priveşte detaliile în legătură cu tensorul canonic şi cel metric, precum şi cu momentul cinetic al cîmpului, îl trimitem pe cititor la literatura respectivă [1])

§ 31. Deducerea ecuaţiei clasice de mişcare a masei electromagnetice după metoda lui Lorentz

In afară de determinarea masei electromagnetice prin componentele tensorului energiei, se poate obţine aceasta direct din forţa de autoacţiune. Această cale de determinare a forţei de reacţiune a cîmpului asupra particulei — este vorba de cîmpul generat de aceiaşi particulă — a fost pentru prima dată indicată de Lorentz.

---

[1]) В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц. ИЛ, Москва, 1947, pag. 11; F. Belinfante, 6, Physica, 6, 887, 1939; А. Соколов и А. Мухтаров, Вестник МГУ No. 8, 1948.

Cu privire la determinarea experimentală a spinului, adică a momentului de rotaţie al unei unde electromagnetice, prevăzut în cadrul electrodinamicii clasice de către Sadovski, v. Г. Розенберг, УфН, **40**, 328, 1950.

Ne vom mărgini la cercetarea cazului mai simplu al mişcării electronului de-a lungul axei x cu o viteză nerelativistă $v \ll c$, ceea ce reprezintă o mărginire neesenţială pentru elucidarea ideii acestei metode.

In acest caz avem:

$$m\ddot{x} = eE^i + e\int \overline{E}\rho_0(\vec{r})(d\vec{r}); \tag{31,1}$$

unde E^i este cîmpul electric exterior, iar $\overline{E}$ este cîmpul mediu generat de electron însuşi:

$$\overline{E} = \int E\rho_0(\vec{r}')(d\vec{r}'). \tag{31,2}$$

Ambele cîmpuri sînt îndreptate de-a lungul axei x. Densitatea $\rho_0(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{e}$, care satisface relaţia:

$$\int \rho_0(\vec{r})(d\vec{r}) = 1, \tag{31,3}$$

caracterizează distribuţia sarcinii electronului în interiorul unui volum oarecare.

Pentru determinarea cîmpului propiu, ne vom folosi de ecuaţia:

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}. \tag{31,4}$$

Conform formulelor (24,8), pentru o sursă punctuală în mişcare cu viteza v de-a lungul axei x, avem următoarele soluţii cu potenţialele retardate:

$$\varphi = e\int \frac{\delta\left(t' - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'}\,dt',$$

$$A_x = \frac{e}{c}\int v(t')\frac{\delta\left(t' - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'}\,dt', \tag{31,5}$$

unde $\vec{R}' = \vec{r} - \vec{r}'(t')$ este distanţa dintre punctul de observaţie şi sursă.

Vom raporta forţa de autoacţiune la acelaşi timp t. Pentru aceasta, să dezvoltăm funcţia δ după puterile mărimii $\frac{R'}{c}$ (sensul fizic al acestei dezvoltări se va vedea în cele ce urmează):

$$\delta\left(t'-t+\frac{R'}{c}\right)=\delta(t'-t)+\frac{R'}{c}\dot{\delta}(t'-t)+$$
$$+\frac{R'^2}{2c^2}\ddot{\delta}(t'-t)+\frac{R'^3}{6c^3}\dddot{\delta}(t'-t)+\ldots, \qquad (31,6)$$

aici punctele puse deasupra funcții δ înseamnă derivata în raport cu timpul t'.

Substituind dezvoltările (31,6) în formula (31,5) și folosindu-ne de regulele de integrare cu funcția δ și derivatele ei, obținem:

$$\varphi=\frac{e}{R}+\frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}-\frac{e}{6c^3}\frac{\partial^3 R^2}{\partial t^3}+\ldots,$$
$$A_x=\frac{e}{c}\frac{v}{R}-\frac{ew}{c^2}+\ldots, \qquad (31,7)$$

unde w este accelerația electronului, iar $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'(t)$.

La derivarea după t ținem seama de formulele

$$\dot{\vec{r}}'(t)=\vec{v},\quad \ddot{\vec{r}}'(t)=\vec{w} \text{ etc.} \qquad (31,8)$$

iar $v_x=v$, $v_y=0$, $v_z=0$, etc. Atunci,

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{(\vec{R}\vec{v})}{R}=-\frac{R_x}{R}v;\quad \frac{\partial R^2}{\partial t}=-2(\vec{R}\vec{v})=-2R_xv,$$

unde

$$R_x=x-x'(t).$$

Mărginindu-ne acum numai la termenii liniari în raport cu viteza și accelerațiile, obținem

$$\varphi=\frac{e}{R}-\frac{eR_xw}{2c^2R}+\frac{eR_x\dot{w}}{3c^3}-\ldots$$
$$A_x=\frac{e}{c}\frac{v}{R}-\frac{e}{c^2}w+\ldots, \qquad (31,9)$$

de unde, conform (31,4), găsim:

$$E=\frac{eR_x}{R^3}-\frac{e}{2c^2R}\left(\frac{R_x^2}{R^2}w+w\right)+\frac{2e}{3c^3}\dot{w}+\ldots \qquad (31,10)$$

După cum se vede din (31,1) și (31,2), forța de autoacțiune va fi:

$$F_x=e\int\rho_0(\vec{r}')(d\vec{r}')\int\rho_0(\vec{r})E(d\vec{r}). \qquad (31,11)$$

Luînd în considerare relaţia (31,3), precum şi egalităţile care au loc în cazul unei simetrii sferice,

$$\int \rho_0(\vec{r}')(d\vec{r}')\int \rho_0(\vec{r})f(R)R_x(d\vec{r})=0,$$

$$\int \rho_0(\vec{r}')(d\vec{r}')\int \rho_0(\vec{r})f(R)\frac{R_x^2}{R^2}(d\vec{r})=$$

$$=\frac{1}{3}\int \rho_0(\vec{r}')(d\vec{r}')\int \rho_0(\vec{r})f(R)(d\vec{r}), \tag{31,12}$$

găsim în cele din urmă următoarea ecuaţie nerelativistă de mişcare pentru electron, cu considerarea forţei de autoacţiune:

$$m\ddot{x}=eE^i-m^{el}\ddot{x}+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}+\ldots \tag{31,13}$$

Coeficientul m^{el}, care reprezintă masa electromagnetică

$$m^{el}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}\int (d\vec{r}')\int \frac{\rho_0(\vec{r})\rho_0(\vec{r}')}{R}(d\vec{r}) \tag{31,14}$$

este de ordinul de mărime

$$m^{el}\sim\frac{e^2}{c^2r_0},$$

unde r_0 este raza clasică a electronului. Semnificaţia unei astfel de raze, menită să asigure o valoare finită pentru masa electronului şi dificultăţile pe care le ridică au fost examinate mai înainte (§ 30).

Pentru lămurirea sensului fizic al masei electromagnetice, obţinută pe această cale, să comparăm m^{el} cu energia electrostatică U_0 a electronului în repaus.

După cum se ştie, putem exprima energia electrostatică a particulei încărcate prin potenţialul φ şi densitatea de sarcină ρ:

$$U_0=\frac{e}{2}\int \rho_0(\vec{r})\varphi(\vec{r})(d\vec{r}). \tag{31,15}$$

Potenţialul φ, generat de densitatea de sarcină electrică $e\rho_0(\vec{r})$ este

$$\varphi(r)=e\int \frac{\rho_0(\vec{r}')}{R}(d\vec{r}'), \tag{31,16}$$

unde

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|,$$

de unde avem:

$$U_0 = \frac{e^2}{2} \int (d\vec{r}') \int \frac{\rho_0(\vec{r})\,\rho_0(\vec{r}')}{R} (d\vec{r}). \tag{31,17}$$

De aceea, pentru masa electromagnetică putem scrie în locul lui (31,14):

$$m^{el} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}. \tag{31,18}$$

Ultima mărime, pentru cazul nerelativist, coincide cu valoarea masei electromagnetice (30,14) obținută din examinarea componentelor impulsului tensorului general al energiei cîmpului.

Dacă efectuăm calculele indicate, în aproximația relativistă, atunci la numitorul membrului doi al expresiei (31,17) sau (31,18) va apare factorul caracteristic:

$$k = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

In felul acesta, metoda lui Lorentz a dus din nou la rezulatele de mai înainte.

Factorul $^4/_3$ din formula (31,18), analizat amănunțit în § 30, reprezintă o nouă mărturie a „instabilității" electronului clasic al lui Lorentz (în sensul teoremei lui Laue) și a necesității introducerii unor tensiuni nemaxwelliene pentru asigurarea echilibrului său, dacă dorim să rămînem în cadrul teoriei clasice a cîmpului.

In teoria lui Lorentz, masa electromagnetică apare alături de masa m nedatorită cîmpului, a cărei natură nu a fost precizată mai îndeaproape. Deoarece în ecuația (31,13) ambele mase (m și m^{el}) apar absolut la fel, masa m nedatorită cîmpului se poate egala cu zero. Prin aceasta ne situăm pe punctul de vedere că masa electronului este de natură pur electromagnetică, în spiritul programului teoriei cîmpului. Atunci ecuația de mișcare a electronului capătă forma:

$$m^{el}\ddot{x} = eE^i + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x} + \ldots \tag{31,19}$$

Această ecuație de mișcare diferă de forma simplă, mai obișnuită, printr-un termen suplimentar cu derivata de ordinul 3, termen care exprimă forța de frecare prin radiație. Este important de subliniat că acest termen poate fi obținut absolut independent de raționamentele de mai sus (adică absolut independent de orice fel de ipoteză şi de metode de calcul legate de teoria cîmpului), din examinarea bilanţului de energie în radiaţia electromagnetică a electronului. Intr-adevăr, egalînd energia medie radiată de electron într-o secundă:

$$\overline{U}=-\frac{1}{T}\int_0^T \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{x}^2 dt,$$

cu lucrul mediu al forţei de frecare prin radiaţie:

$$\frac{1}{T}\int_0^T F\,dx=\overline{U}$$

obţinem în cazul unei mişcări periodice a electronului (cu perioada de oscilaţie T) pentru forţa căutată F, valoarea găsită mai sus:

$$F=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}.$$

Metoda lui Lorentz, permite de asemenea găsirea domeniului de aplicaţie a ecuaţiei (31,19), mărginită către frecvenţele mari de oscilaţie ale electronului.

Să presupunem că electronul execută oscilaţii armonice de frecvenţă ν $\left(\text{lungimea de undă } \lambda \text{ corespunzătoare va fi } \frac{c}{\nu}\right)$. Comparînd între ei primul şi al doilea termem al forţei de autoacţiune, vedem că dezvoltarea la care duce egalitatea (31,13) se efectuează în raport cu puterile mărimii:

$$\alpha=\frac{r_0\dddot{x}}{c\ddot{x}}\,.$$

In cazul oscilaţiilor armonice avem:

$$\alpha\sim\frac{r_0}{\lambda}\,. \tag{31,20}$$

Prin urmare, valabilitatea ecuaţiei de mişcare (31,19) este limitată de condiţia ca lungimea de undă a oscilaţiei armonice a electronului, să fie mult mai mare decît raza lui. In felul acesta, ecuaţia obţinută este valabilă deocamdată pentru mişcări lente ($v\ll c$) şi la o interacţiune cu cîmpuri de frecvenţă nu prea înaltă ($\lambda\gg r_0$). In cazul unei interacţiuni cu cîmpuri avînd o lungime de undă mai mică decît raza electronului, dezvoltarea în raport cu puterile lui x nu se poate face şi caracterul oscilaţiei electronului trebuie să se modifice apreciabil. Această observaţie se referă şi la orice alte teorii ale masei de cîmp, în care se introduce o lungime jucînd rolul razei electronului (v. paragrafele următoare).

Ecuaţia (31,19) se poate preciza în două direcţii. In primul rînd, dacă generalizăm calculul care a dus la deducerea acestei ecuaţii, la viteze relativiste ale electronului $v \cong c$, căpătăm expresia relativistă a forţei de autoacţiune F, expresie care va fi dedusă în § 34 pe o altă cale, nelorentziană, dar cu acelaşi rezultat [v. (34, 35)]. In al doilea rînd, se pot păstra în ecuaţie termenii cu derivatele în raport cu x de ordin mai înalt decît trei. Toţi aceşti termeni cu $x^{(IV)}$, $x^{(V)}$, etc., spre deosebire de termenul de frecare, proporţional cu $\dddot{x}$, contează numai la frecvenţe înalte şi vor depinde explicit şi de raza sau forma electronului. Conform celor de mai sus nu se poate da acestor termeni o semnificaţie fizică directă, existenţa lor reprezentînd o deficienţă a ecuaţiei complete de mişcare a electronului a lui Lorentz.

Terminînd cu aceasta expunerea teoriei clasice vechi a masei de cîmp a electronului-corpuscul, vom sublinia că insuficienţa esenţială a acesteia este de asemeni şi imposibilitatea unei generalizări directe în teoria cuantică.

§ 32. Electrodinamica nelineară

Să trecem acum la examinarea altor teorii ale masei electromagnetice. In primul rînd, vom examina ecuaţiile neliniare ale electrodinamicii, a căror posibilitate a fost indicată prima dată de G. Mie (1912).

Schema lui Mie s-a dovedit a fi imperfectă, deoarece în ecuaţiile lui intrau explicit potenţialele electromagnetice şi de aceea toată teoria nu era invariantă la etalonare (la calibrare). Totuşi, trebuie să remarcăm că ideia construirii unei noi electrodinamici generalizate, prin utilizarea diverşilor invarianţi ai cîmpului, s-a constatat a fi foarte utilă şi a fost utilizată, în particular, la construirea teoriei generale a relativităţii. Afară de aceasta, la Mie găsim şi o formulare clară a ideii unei teorii „unitare" a cîmpului, în care caracteristicile particulei încărcate trebuiau să fie obţinute din descrierea cîmpului. Este de prisos să vorbim cît de prematură a fost încercarea lui Mie de a obţine soluţia problemei structurii electronului, înainte de descoperirea proprietăţilor lui magnetice şi de spin şi de crearea mecanicii cuantice.

In 1934, Born a reuşit să dezvolte o teorie nelineară care satisface toate condiţiile de invarianţă şi să obţină pe baza ei o valoare finită pentru masa electromagnetică a particulei încărcate. [1])

După cum s-a arătat mai sus (v. § 23), din componentele antisimetrice ale tensorului cîmpului, $H_{\mu\nu}$, se pot construi numai doi invarianţi fundamentali care nu conţin potenţialele şi derivatele superioare ale acestor potenţiale:

$$I_1 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2), \tag{32,1}$$

$$I_2 = (\vec{E}\vec{H})^2. \tag{32,2}$$

Deoarece orice funcţie de invarianţi este de asemeni un invariant, este clar că, pentru construirea teoriei o singură condiţie de invarianţă şi condiţia de a ne limita la derivatele de primul ordin este insuficientă, dacă înlăturăm condiţia de liniaritate.

Pentru a găsi ecuaţiile neliniare ale cîmpului, Born a ales la început lagrangeanul sub forma următoarei funcţii de un singur invariant I_1:

$$L_0 = \frac{E_0^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{E_0^2}(E^2 - H^2)}\right), \tag{32,3}$$

unde mărimea E_0 este aşa numitul cîmp maxim.

In teoria lui Born e respectat un anumit principiu de corespondenţă [2]), anume, cînd cîmpul maxim E_0 tinde către infinit, altfel zis, în cazul cîmpurilor mult mai mici decît cel maxim:

$$\left(\frac{E}{E_0}\right) \ll 1, \quad \left(\frac{H}{E_0}\right) \ll 1$$

expresia (32,3) — aşa cum se poate vedea uşor — trece în lagrangeanul electrodinamicii lui Maxwell:

$$L_0 = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2).$$

[1]) M. Born. Proc. Roy. Soc. A. **143**, 410, 1934; M. Born and L. Infeld ibidem, **144**, 425, 1934.

[2]) Despre însemnătatea principiului de corespondenţă v. И. В. Кузнецов, Принцип соответствия в современной физике и его философское значение, Гостехиздат, 1948.

Alegerea arătată a funcţiunii lui Lagrange, a fost făcută de Born după modelul trecerii de la funcţia lui Lagrange

$$L=mc^2\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right),$$

cunoscută din mecanica relativistă pentru electronul liber, la cazul clasic [v. relaţia (23,6)], $L=\frac{mv^2}{2}$ care se obţine cînd $c^2\rightarrow\infty$. Mai tîrziu, a fost posibil să se găsească alte combinaţii ale invarianţilor I_1 şi I_2, care duc la o valoare finită pentru energia proprie a electronului U_0. In particular, Born şi Infeld au dezvoltat o teorie generală a cîmpului plecînd de la un lagrangean care este o funcţiune de cei doi invarianţi I_1 şi I_2, de forma:

$$L_0=\frac{E_0^2}{4\pi}\left(1-\sqrt{1-\frac{E^2-H^2}{E_0^2}-\frac{(\vec{E}\vec{H})^2}{E_0^4}}\right).$$

O oarecare justificare formală pentru alegerea unei astfel de combinaţii de invarianţi, arbitrară şi ea, este faptul că acest lagrangean este aşa numitul volum al tensorului $H_{\mu\nu}$, egal cu valoarea determinantului construit din elementele:

$$g_{\mu\nu}+H_{\mu\nu},$$

unde $g_{\mu\nu}$ sînt componentele tensorului fundamental, luate în acest caz cu valorile sale galileene [v. relaţia (23,1)]. Schrödinger a utilizat o altă combinaţie arbitrară:

$$L_0=\frac{E_0^2}{8\pi}\ln\left(1+\frac{E^2-H^2}{E_0^2}\right).$$

Alegerea lagrangeanului trebuie să asigure, de asemenea, stabilitatea electronului punctiform, deoarece numai în acest caz vom obţine o relaţie corectă între impulsul cîmpului electromagnetic şi energia lui, adică conform ipotezei teoriei cîmpului, între impulsul şi energia particulei. Lagrangeanul (32,3) este una din cele mai simple funcţii neliniare ale invariantului I_1 în care se asigură atît valoarea finită pentru masa electromagnetică, cît şi stabilitatea sarcinii punctiforme.

Ne vom limita la examinarea celui mai important caz al cîmpului electrostatic creat de electronul punctiform, după teoria neliniară clasică.

Să construim funcţia generală a lui Lagrange L din cel mai simplu lagrangean neliniar L_0 (32,3) şi din energia potenţială de interacţiune între cîmp şi electron.

Punînd:

$$\vec{H}=0,\ \vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi,\ \rho(\vec{x}-\xi)=\delta(\vec{r})\,\delta(t-s),$$

găsim conform (23,24):

$$L=\frac{E_0^2}{4\pi}\left(1-\sqrt{1-\frac{E^2}{E_0^2}}\right)-e\varphi\delta(\vec{r}) \tag{32,4}$$

Cu ajutorul principiului variaţional găsim (v. relaţia (23,25)]:

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial D_n}{\partial x_n}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0,$$

unde vectorul D_n este, conform definiţiei, vectorul inducţiei electrice (vectorul de deplasare)

$$D_n=4\pi\frac{\partial L}{\partial E_n}=\frac{E_n}{\sqrt{1-\frac{E^2}{E_0^2}}}. \tag{32,5}$$

De aici, găsim următoarea ecuaţie pentru definirea cîmpului:

$$\operatorname{div}\vec{D}=4\pi e\,\delta(\vec{r}). \tag{32,6}$$

Punînd aici, în locul densităţii sarcinii punctiforme, dezvoltarea ei în integrală Fourier:

$$e\,\delta(\vec{r})=\frac{e}{8\pi^3}\int e^{i\vec{k}\vec{r}}\,(d\vec{k}), \tag{32,7}$$

găsim ca de obicei:

$$\vec{D}=-\frac{e}{2\pi^2}\operatorname{grad}\int\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2}\,(d\vec{k}). \tag{32,8}$$

Ţinînd seama de egalitatea (10,11), găsim soluţia cunoscută din teoria lui Maxwell:

$$\vec{D}=\frac{e\vec{r}}{r^3}, \tag{32,9}$$

adică din punct de vedere al cîmpului $\vec{D}$, electronul trebuie considerat punctiform.

Din relaţia (32,5) pentru intensitatea cîmpului creat de o sarcină punctiformă, găsim:

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\sqrt{1+\frac{D^2}{E_0^2}}}=\frac{e\vec{r}}{r\sqrt{r^4+r_0^4}},\tag{32,10}$$

unde:

$$r_0=\sqrt{\frac{e}{E_0}}.$$

De aici găsim:

$$\varphi=\int_r^\infty E_r\,dr=\frac{e}{r_0}\int_{\frac{r}{r_0}}^\infty\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.\tag{32,11}$$

In originea coordonatelor ($r=0$) cîmpul atinge valoarea sa maximă:

$$E=\frac{e}{r_0^2}=E_0,\tag{32,12}$$

iar potenţialul φ rămîne finit şi egal cu:

$$\varphi_0=\frac{e}{r_0}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Valoarea numerică a acestei integrale eliptice este:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=1{,}8541\ldots\tag{32,13}$$

De aceea:

$$\varphi_0=(1{,}8541\ldots)\frac{e}{r_0}.\tag{32,14}$$

Din punctul de vedere al analizei cîmpului $\vec{E}$, electronul nu este punctiform şi densitatea de distribuţie a sarcinii lui poate fi găsită din ecuaţia:

$$\rho'=\frac{\operatorname{div}\vec{E}}{4\pi}=\frac{er_0^4}{2\pi r\,(r^4+r_0^4)^{3/2}}.\tag{32,15}$$

Cu alte cuvinte, din punctul de vedere al cîmpului $\vec{E}$, sarcina poate fi privită ca fiind distribuită în cea mai mare parte în volumul de rază r_0, deoarece pentru $r \gg r_0$ densitatea va tinde foarte repede către 0. De aceea mărimea r_0 poate fi privită drept rază eficace a particulei încărcate (în cele ce urmează prin particulă încărcată vom înţelege, pentru concretizare, electronul) [1]). Se poate arăta uşor că sarcina totală a particulei este egală cu e.

Intr-adevăr, sarcina totală se determină din egalitatea:

$$\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div} \vec{E}\,(d\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint E\,dS = \lim_{r\to\infty} r^2 E(r) = e. \tag{32,16}$$

Existenţa a două feluri de cîmpuri şi cele două definiţii corespunzătoare pentru densitatea sarcinii, au loc, aşa cum se ştie, în teoria dielectricilor. In cazul nostru, conform terminologiei electrostaticii dielectricilor, ρ (sursa punctiformă) reprezintă densitatea sarcinilor „adevărate", iar ρ' — densitatea sarcinilor „libere" (sarcinile „adevărate" plus cele „legate"). Raportul dintre $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ poate fi privit ca o „constantă dielectrică" a vidului, care este o funcţie de punct:

$$\varepsilon = \frac{D}{E} = \sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}}. \tag{32,17}$$

La distanţe mari de sarcina punctiformă, cînd $\frac{r_0}{r} \to 0$, ε devine egal cu unitatea, la fel ca în electrodinamica obişnuită. Se poate spune că în locul expresiei pentru energie $\frac{e^2}{r}$, Born alege $\frac{e^2}{\varepsilon r}$, şi micşorarea lui r este compensată de creşterea lui ε, astfel încît energia totală rămîne finită.

Să găsim acum tensorul energie - impuls în teoria lui Born. Conform (28,5) avem:

$$\left.\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{4\pi} E_1 D_1 - L_0, \\ T_{44} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E}\vec{D}) - L_0, \end{aligned}\right\} \tag{32,18}$$

unde:

$$L_0 = \frac{E_0^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}\right). \tag{32,19}$$

---

[1]) Mai precis, vom înţelege prin raza electronului acea distanţă maximă de la centrul său de simetrie, de la care încep să apară în mod practic deviaţiile de la cîmpul coulombian obişnuit al sarcinii punctiforme.

Introducînd aci în loc de $\vec{E}$ şi $\vec{D}$ valorile lor din (32,10) şi (32,9), şi ţinînd seama de simetria sferică, vom avea:

$$\int T_{11}(d\vec{r}) = \frac{e^2}{r_0}\left(\frac{1}{3}B_1 - B_2\right),$$
$$\int T_{44}(d\vec{r}) = \frac{e^2}{r_0}(B_1 - B_2). \tag{32,20}$$

Aici

$$B_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad B_2 = \int_0^\infty x^2\left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\right)dx. \tag{32,21}$$

Integrala B_2 poate fi transformată cu ajutorul unei integrări prin părţi

$$B_2 = \frac{1}{3}\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\right)dx^3 = \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(1+x^4)^{3/2}}.$$

Integrînd a doua oară prin părţi, avem:

$$B_2 = -\frac{1}{3}\int_0^\infty x\,d\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right) = \frac{1}{3}B_1, \tag{32,22}$$

de unde găsim că:

$$\int T_{11}(d\vec{r}) = 0.$$

In felul acesta, în varianta examinată a teoriei lui Born este satisfăcută teorema stabilităţii. Prin urmare, electronul lui Born este stabil în sensul acesta.

Mărimea masei cîmpului electronului poate fi găsită din egalitatea:

$$m^{el} = \frac{\int T_{44}(d\vec{r})}{c^2} = \frac{2}{3}\frac{c^2}{c^2 r_0}B_1 = \frac{2}{3}\frac{e\varphi_0}{c^2}. \tag{32,23}$$

Inlocuind aci valoarea potenţialului φ_0, obţinem

$$m^{el} = (1{,}2361\ldots)\frac{e^2}{c^2 r_0}. \tag{32,24}$$

Cunoscînd valorile numerice m, e şi c găsim de aici raza eficace a electronului, practic egală cu raza clasică a electronului:

$$r_0 \cong 3{,}5 \cdot 10^{-13} \mathrm{cm}, \qquad (32{,}25)$$

precum şi valoarea pentru cîmpul maxim, adică cîmpul din centrul electronului $(r=0)$:

$$E_0 = \frac{e}{r_0^2} \cong 4 \cdot 10^{15} \text{ u. e. s. C. G. S.}$$

In felul acesta, plecînd de la o generalizare formală neliniară şi ipotetică a electrodinamicii, am reuşit să obţinem o energie (respectiv masă) proprie finită pentru particula electrizată, mărime determinată, în întregime, de energia cîmpului generat de această particulă.

In afară de aceasta, în această teorie este satisfăcută teorema stabilităţii şi se obţine o relaţie corectă între energia şi impulsul particulei. Toate acestea sînt, fără discuţie, un rezultat apreciabil al teoriei, care a realizat, într-un anumit sens, programul construirii unei teorii de cîmp, pure şi „unitare" a masei electromagnetice a electronului. Totuşi, succesele teoriei neliniare se limitează, în fond, la aceste rezultate. O confruntare cu experienţa a concluziilor teoriei nu prezintă un interes deosebit, deoarece teoria se bazează pe o alegere complect arbitrară a lagrangeanului, ceea ce este un defect fundamental al teoriei arătate.

Vom sublinia, de asemenea, că eliminînd într-un fel oarecare dificultăţile legate de energia proprie „longitudinală" infinită din teoria clasică a cîmpului, mai este necesar — pe de o parte — ca acest rezultat să fie confirmat pe cale cuantică şi — pe de altă parte — aşa cum s-a subliniat mai sus, să fie eliminată partea nouă „transversală", specific cuantică a energiei proprii infinite (v. mai departe § 34). Nici una din aceste probleme n-a fost rezolvată în teoria lui Born.

Generalizarea cuantică a teoriei lui Born, atît în cazul simplu expus mai sus cît şi în alte variante, n-a dus la rezultate fizice noi, esenţiale. Insăşi cuantificarea în cadrul oricărei teorii neliniare se limitează deocamdată doar la stabilirea cîtorva relaţii generale.

Totuşi teoria lui Born, care este cea mai simplă schemă neliniară cunoscută, s-a dovedit a fi de multe ori utilă în analiza efectelor neliniare caracteristice. După cum se ştie, în electrodinamica lui Maxwell — care este o teorie liniară — cîmpurile electromagnetice posedă proprietatea suprapunerii, adică a aditivităţii: suma soluţiilor ecuaţiilor este, de asemenea, o soluţie a lor (undele trec unele prin altele fără a interacţiona între ele). In teoria neliniară, proprietatea suprapunerii nu se menţine, ceea ce duce la faptul că această teorie conţine efecte neliniare caracteristice; în particular, difuzia luminii pe lumină, difuzia neliniară a luminii pe sarcini, reflexia luminii pe lumină, modificarea legii lui Planck pentru radiaţia de echilibru la corpul negru etc., au fost examinate într-un mod instructiv cu ajutorul acestei teorii. Toate aceste corecţii nelliniare sînt extrem de mici.

Problema eletrodinamicii neliniare a căpătat o însemnătate reală, iar nu numai formală, abia după descoperirea transformării reciproce a particulelor, prevăzută pentru prima dată în teoria cuantică relativistă a electro-pozitronului. Intr-adevăr, conform mecanicii cuantice relativiste, doi fotoni (sau două unde elactromagnetice) pot să dea naştere, prin ciocnire, la o pereche virtuală de particule (electron-pozitron sau doi mezoni încărcaţi cu sarcini de semn contrar), care, la rîndul ei poate să se anihileze şi să dea doi fotoni noi, adică, în definitiv, avem o ciocnire a doi fotoni care duc la doi fotoni noi cu alte cuvinte o difuzie a luminii pe lumină. In felul acesta, posibilitatea transformării reciproce a particulelor duce la efecte neliniare.

Putem să ne întrebăm: cu ce modificări ale teoriei lui Maxwell — în sens liniar — va fi echivalentă o asemenea introducere a efectelor legate de perechile de particule? Simbolic, se poate spune că teoria relativistă a vidului a lui Dirac, plus electrodinamica lui Maxwell, vor fi echivalente unei anumite electrodinamici neliniare caracterizată de un anumit lagrangean. Deoarece atunci cînd neglijăm derivatele superioare, adică ne limităm la cîmpuri care variază lent, lagrangeanul căutat este o funcţie de invarianţii I_1 şi I_2, rezultă că în cazul cîmpurilor de valoare suficient de mică, lagrangeanul poate fi dezvoltat în serie după puterile lui I_1 şi I_2:

$$L = I_1 + \alpha I_2 + 64\pi^2 \beta I_1^2 + \dots$$

Problema se reduce la determinarea coeficienţilor $\alpha, \beta, \dots$ Teoria perechilor lui Dirac duce la coeficienţii

$$\alpha = 7\beta, \quad \beta = \frac{1}{360\pi^2} \frac{1}{2\pi} \frac{e^4 h}{m^4 c^7}.$$

Este destul de interesant să observăm că diferitele variante, arbitrare din punct de vedere fizic, ale electrodinamicii neliniare duc la valori apropiate pentru coeficienţi, dacă ţinem seamă că raza electronului este:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = \frac{1}{137} \frac{h}{2\pi mc} \,.$$

Mărimea diferitelor efecte neliniare care apar conform teoriei perechilor în ipotezele arătate, rezultă a fi extem de mică, la fel ca şi în teoria lui Born. De exemplu, secţiunea eficace de difuzie a luminii pe lumină, care este dată de formula $\sigma = \frac{\text{const.}}{\lambda 6}$ atinge doar ordinul de mărime $\sim 10^{-50}$ cm², chiar pentru razele γ, ceea ce este sub posibilităţile detectoare experimentale actuale.

Alături de efectele enumerate mai sus şi de corecţiile în teoria interacţiunii, teoriile neliniare ale cîmpului se deosebesc esenţial de teoriile liniare, prin aceea că, în mod principial, permit deducerea ecuaţiilor de mişcare ale unei particule din ecuaţiile cîmpului generat de acea particulă. In adevăr, în electrodinamica liniară ecuaţiile de mişcare pentru particule încărcate (sau magnetice) se adaugă în mod independent la ecuaţiile cîmpului ale lui Maxwell-Lorentz şi nu decurg din ele. Aceasta reiese deosebit de clar din următorul exemplu. Dacă avem două sarcini e_1 şi e_2 în repaus, ele vor avea cîmpuri egale respectiv cu e_1/r_1^2 şi e_2/r_2^2. Ca urmare a liniarităţii ecuaţiilor obişnuite, suma acestor soluţii este de asemenea o soluţie, adică ea trebuie să corespundă unei stări posibile a sistemului de sarcini. In realitate două sarcini nu pot să se găsească în repaus, ele se vor mişca respingîndu-se sau atrăgîndu-se. Această mişcare a sarcinilor nu reiese nicidecum din ecuaţiile liniare ale cîmpului, ci este descrisă de ecuaţiile suplimentare de mişcare, în care se introduc forţele cu care sarcinile acţionează asupra sarcinilor.

In teoria gravitaţiei, conform teoriei generale a relativităţii, ecuaţiile cîmpului sînt neliniare. Acest fapt ne-a permis înr-adevăr să deducem ecuaţiile de mişcare pentru particulele sub influenţa forţelor gravifice, din însăşi ecuaţiile cîmpului generat de aceste particule[1]).

De aceea, în teoria neliniară examinată este de asemenea posibil să deducem ecuaţiile de mişcare a particulelor din ecuaţiile cîmpului generat de aceste particule, analog cu ceea ce s-a făcut în teoria gravitaţiei.

---

[1]) V. Fock, Journ. of. Phys. URSS 1, 1, 1939; v. de asemenea A. Einstein, B. Hoffmann, L. Infeld. Ann, of. Math,. 1938.

Vom observa totuşi că electrodinamica neliniară care rezultă din mecanica cuantică relativistă, şi care s-a putut construi doar în ipoteze simplificatoare — ca, de exemplu, cazul cîmpurilor variabile lent — este şi ea în imposibilitate de a elimina cel puţin dificultatea legată de energia proprie longitudinală infinită a cîmpului. După calculele lui Weisskopf, această divergenţă din teoria vidului lui Dirac, care este echivalentă în anumită măsură cu introducerea neliniarităţilor — capătă totuşi cînd $r \to 0$ un caracter logaritmic, mai slab, în locul divergenţei de tipul r^{-1}.[1])

Vom observa chiar aici, că avem o situaţie analogă şi în mezodinamică, unde, de exemplu, posibilitatea principală de creare virtuală a unei perechi de nucleoni de către doi mezoni şi dispariţia lor virtuală ulterioară cu eliminarea a doi mezoni noi, ne dă un efect neliniar tipic de difuzie a mezonilor pe mezoni, contrazicînd suprapunerea funcţiilor ψ pentru mezoni.

Mezodinamica neliniară, a cărei necesitate o semnalăm şi care pînă acum n-a depăşit stadiul de program, va trebui să ducă la o constantă cvasidielectrică şi o permeabilitate cvasimagnetică pentru vid şi la efecte ca: polarizarea vidului nucleonic, difuzia neliniară a mezonilor pe mezoni etc., şi va putea, probabil, să aibe ca urmare micşorarea interacţiunii nucleonilor la distanţe mici, contribuind probabil la eliminarea dificultăţilor dipolare în teoria forţelor nucleare (v. § 48). In teoria neliniară examinată, am avut deja o micşorare analoagă a potenţialului electrostatic, micşorare datorită polarizării vidului.

Deoarece toate particulele pot, într-un fel sau altul, să creeze virtual prin ciocnire perechi de alte particule, care — după o anihilare virtuală — pot să se transforme din nou într-o pereche de particule de tipul iniţial, trebuie să conchidem de aici că ecuaţiile pentru toate particulele, între care şi ecuaţiile cîmpului generat de electron, pozitron, nucleon etc., sînt neliniare. Ar fi prematur să examinăm aici aceste probleme noi şi dificile. Vom observa doar că pentru ecuaţiile neliniare ale cîmpului, nu mai are sens descompunerea în componente separate de tipul seriei Fourier şi prin aceasta, a doua cuantificare îşi pierde sensul direct concret (adică punerea în evidenţă a particulelor cu ajutorul amplitudinilor seriei Fourier). In felul acesta, probabil că însăşi noţiunea de particulă capătă în teoria neliniară un sens nou.

---

[1]) H. Euler, Ann. d. Phys., **26**, 398, 1936; H. Euler und W. Heisenberg Zs. f. Phys. **98**, 714, 1936; V. Weisskopf, Kgl. Danske Videnskab. Mat. Fys., 14, 6. 1936; Zs. f. Phys., **89**, 27, 1934; **90**, 817, 1934; Phys. Rev., **56**, 72, 1939.

In orice caz trebuie să subliniem că cea mai nouă dezvoltare a teoriei vidului (v. anexa), care ţine seama de transformarea particulelor, foloseşte pînă astăzi numai teoria cuantică liniară, fără a introduce neliniarităţi efective.

§ 33. Electrodinamica cîmpurilor cu derivate superioare

In ultimul timp, s-a discutat în repetate rînduri problema posibilităţii generalizării ecuaţiilor cîmpului electromagnetic pe calea introducerii derivatelor de ordin superior. Cea mai simplă variantă a unei asemenea teorii care, din punct de vedere formal satisface toate condiţiile de invarianţă, este schema lui Bopp şi Podolski[1]). Introducînd derivate de ordin superior lui doi în ecuaţiile lui Maxwell, aceşti autori au reuşit — într-un anumit sens — să realizeze ideile de bază ale teoriei masei electromagnetice a electronului, obţinînd o valoare finită pentru masa proprie electromagnetică.

Păstrînd valabilă relaţia lui Maxwell între cîmp şi potenţiale:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{33,1}$$

şi condiţia suplimentară a lui Lorentz pentru potenţiale:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \tag{33,2}$$

vom înlocui ecuaţia ondulatorie a lui D'Alembert (24,5) prin ecuaţia de ordinul patru:

$$\left(1 - \frac{1}{k_0^2}\Box\right)\Box A_\mu = -\frac{4\pi e}{c}\int \dot{\xi}_\mu \rho(x-\xi)\,ds. \tag{33,3}$$

Această ecuaţie este relativist invariantă şi pentru $k_0^2 \to \infty$ trece în ecuaţia lui D'Alembert.

Dacă funcţia lui Lagrange L depinde de potenţialele A_μ şi de derivatele acestor potenţiale

$$A_{\mu,\alpha} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}, \quad A_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

[1]) F. Bopp, Ann. d. Phys., **38**; 345, 1940; Podolsky, Phys., Rev., **62**, 68, 1941; B. Podolsky and Schwed, Rev. Mod. Phys., **20**, 40, 1948.

atunci principiul variaţional duce la următoarea ecuaţie pentru determinarea cîmpurilor

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu}=\frac{\partial L}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\,\alpha}}+\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\alpha\beta}}-\ldots=0$$

In particular, vom obţine ecuaţiile (33,3), dacă punem:

$$L_B=-\frac{1}{16\pi}H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}-\frac{1}{16\pi k_0^2}\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+$$

$$+\frac{e}{c}\int \dot{\xi}_\mu A_\mu \rho(x-\xi)\,ds.$$

De aici, se poate obţine — ca de obicei — tensorul energie-impuls şi alte mărimi fundamentale, care caracterizează cîmpul.

Vom folosi însă acum o altă metodă de cercetare a ecuaţiei de ordinul patru (33,3) şi anume vom reduce noul cîmp generalizat la două cîmpuri care vor satisface ecuaţii de ordinul al doilea.

Pentru aceasta vom introduce două potenţiale A'_μ şi A''_μ, egale respectiv cu:

$$A'_\mu=\left(1-\frac{1}{k_0^2}\Box\right)A_\mu, \tag{33,4}$$

$$A''_\mu=-\frac{1}{k_0^2}\Box A_\mu.$$

De aici se vede că potenţialul nou A_μ va fi egal cu diferenţa potenţialelor celor două cîmpuri:

$$A_\mu=A'_\mu-A''_\mu. \tag{33,5}$$

Mai departe, după cum se vede din (33,3), potenţialul A'_μ va satisface ecuaţia lui d'Alembert:

$$\Box A'_\mu=-\frac{4\pi e}{e}\int \dot{\xi}_\mu \rho(x-\xi)ds, \tag{33,6}$$

iar potenţialul A''_μ, — ecuaţia lui Klein cu membru drept (v. § 20):

$$(\Box-k_0^2)A''_\mu=-\frac{4\pi e}{c}\int \dot{\xi}_\mu \rho(x-\xi)\,ds. \tag{33,7}$$

In felul acesta cîmpul iniţial a fost redus la două cîmpuri (un bi-cîmp sui-generis) şi anume: la un cîmp electromagnetic (adică din punct de vedere cuantic, la fotoni cu masă de repaus egală cu zero) şi la un al doilea cîmp al cărui potenţial — vector satisface ecuaţia lui Klein $\Big($adică din punct de vedere cuantic, la un cîmp legat de particule cu masa de repaus diferită de zero $m=\frac{hk_0}{2\pi c}\Big)$.

Formînd cu ajutorul potenţialelor A'_μ şi A''_μ cîmpurile

$$H'_{\mu\nu}=\frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\nu},\quad H''_{\mu\nu}=\frac{\partial A''_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A''_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{33,8}$$

vom avea, conform (33,5):

$$H_{\mu\nu}=H'_{\mu\nu}-H''_{\mu\nu}. \tag{33,9}$$

Funcţia lui Lagrange L, care ne duce la ecuaţiile (33,6) şi (33,7) trebuie să fie formată din două părţi L' şi L'':

$$L=L'-L''. \tag{33,10}$$

L' este lagrangeanul cîmpului maxwellian. De aceea, conform (23,24) şi (23,11), avem :

$$L'=L'_0+\frac{e}{c}\int \dot{\xi}_\mu A'_\mu \rho\,(x-\xi)ds, \tag{33,11}$$

unde:

$$L'_0=-\frac{1}{16\pi}H'_{\mu\nu}H'_{\mu\nu}. \tag{33,12}$$

L'' — este lagrangeanul ecuaţiilor, care se utilizează de asemenea, în mod special, pentru descrierea mezonilor vectoriali (detalii v. mai departe § 47) şi avem:

$$L''=L''_0+\frac{e}{c}\int \dot{\xi}_\mu A''_\mu \rho(x-\xi)ds, \tag{33,13}$$

unde:

$$L''_0=-\frac{1}{16\pi}H''_{\mu\nu}H''_{\mu\nu}-\frac{k_0^2}{8\pi}A''_\mu A''_\mu. \tag{33,14}$$

Variind lagrangeanul L în raport cu potenţialele A'_μ şi A''_μ vom căpăta drept ecuaţii Euler (23,25) pentru cîmpurile $H'_{\mu\nu}$ ecuaţiile lui Maxwell:

$$\frac{\partial H'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{4\pi e}{c}\int \rho\,(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds, \tag{33,15}$$

iar pentru cîmpurile $H''_{\mu\nu}$ — ecuaţii, care sînt de asemenea utilizate pentru descrierea mezonilor vectoriali:

$$\frac{\partial H''_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}+k_0^2 A''_\mu=\frac{4\pi e}{c}\int \rho(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds \qquad (33{,}16)$$

De aici este uşor de arătat că potenţialele vor satisface ecuaţiile iniţiale (33,6) şi (33,7).

După cum se vede din (33,11) şi (33,13), energia de legătură a cîmpului nou, cu particule încărcate, are forma:

$$U=L-L'_0+L''_0=\frac{e}{c}\int \dot{\xi}_\mu A_\mu \rho(x-\xi)\,ds, \qquad (33{,}17)$$

care coincide cu expresia de mai înainte (23,13). De aceea, pentru forţa de autoacţiune obţinem expresia (23,17);

$$F_\mu=\frac{e}{c}\,\dot{\xi}_\nu\int \rho(x-\xi)\,H_{\mu\nu}(x)\,(dx), \qquad (33{,}18)$$

unde s-a luat în considerare că $H_{\mu\nu}=H'_{\mu\nu}-H''_{\mu\nu}$.

Pentru determinarea tensorului energiei vom scrie impulsu forţei de autoacţiune.

Luînd în considerare relaţiile (33,15) (33,16) şi (33,18) obţinem:

$$\int F_\mu\,ds=\int\left[\frac{1}{4\pi}H'_{\mu\nu}\frac{\partial H'_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda}-\frac{1}{4\pi}H''_{\mu\nu}\left(\frac{\partial H''_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda}+k_0^2 A''_\nu\right)\right](dx). \qquad (33{,}19)$$

De aici se vede că tensorul energie-impuls $T_{\mu\nu}$ este egal cu diferenţa a doi tensori:

$$T_{\mu\nu}=T'_{\mu\nu}-T''_{\mu\nu}. \qquad (33{,}20)$$

Tensorul cîmpului maxwellian $T'_{\mu\nu}$ se determină din egalitatea:

$$\frac{\partial T'_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda}=\frac{1}{4\pi}H'_{\mu\nu}\frac{\partial H'_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda}, \qquad (33{,}21)$$

sau [vezi de asemenea (28,5)]:

$$T'_{\mu\lambda}=\frac{1}{4\pi}H'_{\mu\nu}H'_{\nu\lambda}-\delta_{\mu\lambda}L'_0 \qquad (33{,}22)$$

În mod analog, pentru găsirea tensorului $T''_{\mu\lambda}$ avem ecuația:

$$\frac{\partial T''_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda}=\frac{1}{4\pi}H''_{\mu\nu}\frac{\partial H''_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda}+\frac{k_0^2}{4\pi}H''_{\mu\lambda}A''_\lambda, \tag{33,23}$$

de unde, ținînd seamă de identitatea:

$$H''_{\mu\lambda}A''_\lambda=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{1}{2}A''_\lambda A''_\lambda-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}A''_\mu A''_\lambda, \tag{33,24}$$

și ținînd seamă de trecerea de la egalitatea (33,21) la egalitatea (33,22) obținem:

$$T''_{\mu\lambda}=\frac{1}{4\pi}H''_{\mu\nu}H''_{\nu\lambda}-\frac{k_0^2}{4\pi}A''_\mu A''_\lambda-\delta_{\mu\lambda}L''_0. \tag{33,25}$$

Să examinăm acum cazul static. Punînd pentru electronul punctiform în repaus:

$$\rho(x-\xi)=\delta(\vec{r})\,\delta(t-s), \tag{33,26}$$

vom găsi pentru potențialul scalar următoarele ecuații:

$$\nabla^2\varphi'=-4\pi e\delta(\vec{r}),$$

$$(\nabla^2-k_0^2)\,\varphi''=-4\pi e\delta(\vec{r}). \tag{33,27}$$

Punînd în loc de densitatea sarcinii expresia (32,7), vom obține

$$\varphi'+\frac{e}{2\pi^2}\int\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2}(d\vec{k})=\frac{e}{r}, \tag{33,28}$$

$$\varphi''=\frac{e}{2\pi^2}\int\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2+k_0^2}(d\vec{k})=\frac{e}{r}e^{-k_0 r}. \tag{33,29}$$

Potențialul sarcinii punctiforme a noului cîmp este egal cu:

$$\varphi=\varphi'-\varphi''=\frac{e}{r}(1-e^{-k_0 r}). \tag{33,30}$$

Pentru $r\gg\frac{1}{k_0}$ formula (33,30) trece în potențialul electrostatic bine cunoscut:

$$\varphi=\frac{e}{r}, \tag{33,31}$$

iar pentru $r=0$ rămîne finită și egală cu:

$$\varphi=ek_0. \tag{33,32}$$

La fel ca şi în teoria neliniară, putem aborda problema densităţii sarcinii din două puncte de vedere.

Intr-adevăr, în cazul teoriei de faţă avem de asemenea două tipuri de cîmpuri: vectorul cîmpului electric

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi \tag{33,33}$$

şi vectorul inducţiei electrice:

$$\vec{D}=-\operatorname{grad}\left(1-\frac{1}{k_0^2}\nabla^2\right)\varphi. \tag{33,34}$$

De aceea, alături de densitatea „adevărată" a sarcinii:

$$\rho=\frac{\operatorname{div}\vec{D}}{4\pi}=e\delta(\vec{r}), \tag{33,35}$$

care este densitatea sarcinilor punctiforme, mai putem introduce noţiunea de densitate a sarcinilor „libere":

$$\rho'=\frac{\operatorname{div}\vec{E}}{4\pi}=\frac{ek_0^2}{4\pi}\frac{e^{-k_0r}}{r}, \tag{33,36}$$

care ne dă o sarcină „extinsă", distribuită în mare parte înăuntrul sferei de rază $r_0\approx\frac{1}{k_0}$. In felul acesta, mărimea r_0 reprezintă „raza" efectivă a electronului.

Din egalităţile din urmă se vede că în teoria examinată, — analog teoriei neliniare — vidul apare ca şi cum ar poseda o „constantă dielectrică", care, sub formă de operator, are expresia:

$$\varepsilon=\frac{D}{E}=1-\frac{\nabla^2}{k_0^2}. \tag{33,37}$$

Pentru examinarea stabilităţii electronului punctiform trebuie să găsim componentele tensorului energiei. Conform relaţiilor (33,20), (33,22) şi (33,25) avem:

$$T_{11}=\frac{1}{4\pi}\left(E_1'^2-\frac{1}{2}E'^2-E_1''^2+\frac{1}{2}E''^2+\frac{k_0^2}{2}\varphi''^2\right). \tag{33,38}$$

Introducînd aici în loc de φ' şi φ'' dezvoltările (32,28) şi (33,29) obţinem

$$\int T_{11}\,(d\vec{r})=\frac{e^2}{2\pi^2}\int\left(\frac{k_1^2-\frac{1}{2}k^2}{k^4}-\frac{k_1^2-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k_0^2}{(k^2+k_0^2)^2}\right)(d\vec{k}). \tag{33,39}$$

Datorită simetriei sferice putem pune în ultima integrală:

$$k_1^2 = \frac{1}{3} k^2 \tag{33,40}$$

sau, introducînd o variabilă nouă:

$$k = k_0 x,$$

găsim:

$$\int T_{11} (d\vec{r}) = \frac{e^2 k_0}{3\pi} \int_0^\infty \frac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2} dx. \tag{33,41}$$

Ultima integrală este egală cu zero, deoarece, făcînd schimbarea de variabile $y = \frac{1}{x}$, avem:

$$\int_0^\infty \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^\infty \frac{1-y^2}{(y^2+1)^2} dy = 0. \tag{33,42}$$

Datorită egalității $\int T_{11} (d\vec{r}) = 0$ electronul punctiform va fi stabil.

De aici se vede că în această teorie, rolul tensiunilor mecanice — necesare pentru compensarea respingerii „părților" sarcinii, — îl joacă al doilea cîmp liniar, a cărui energie în cazul examinat este o mărime negativă (v. § 47).

Energia electrostatică totală a cîmpului pentru electronul în repaus se determină din egalitatea:

$$U_0 = \int T_{44} (d\vec{r}) = \frac{e^2 k_0^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 + k_0^2} = \frac{e^2 k_0}{2}, \tag{33,43}$$

de unde găsim pentru energia proprie a electronului, datorită energiei totale a cîmpului şi deci pentru masa lui:

$$m^{el} = \frac{U_0}{c^2} = \frac{e^2 k_0}{2c^2} = \frac{e^2}{2c^2 r_0}. \tag{33,44}$$

Punînd aici, în loc de masă şi sarcină, valorile numerice cunoscute, vom găsi pentru valoarea „razei" electronului un ordin de mărime acceptabil:

$$r_0 \cong 1{,}4 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}.$$

In felul acesta, teoria cîmpurilor cu derivate superioare, la fel ca şi teoria neliniară, permite să construim modele consecvente, relativist invariante, pentru masa de cîmp, şi ele aparţin — în acest sens — celor mai bune teorii clasice.

Totuşi teoria cu derivate superioare examinată aici este o teorie liniară şi de aceea nu vom putea obţine cu ajutorul ei, spre deosebire de teoria lui Born, efecte nelineare caracteristice, de exemplu, difuzia luminii pe lumină. Generalizarea cuantică a teoriei lui Bopp — Podolski nu constituie nici o greutate şi nu este greu să ne convingem că această generalizare duce, ca şi mai înainte, la o masă (longitudinală) finită pentru particule care creează cîmpul. Trebuie să subliniem din nou că şi în cazul cînd partea longitudinală a masei proprii a particulei este finită, partea transversală a masei condiţionată de energia părţii transversale a cîmpului creat de particulă şi care are un caracter pur cuantic, este totuşi infinită conform mecanicii cuantice. De asemenea, nu este dificil să generalizăm teoria cu derivate superioare în cazul cînd ambele cîmpuri sînt legate de anumite mase de repaus m_1, m_2. Este interesant că interacţiunea între două particule (de exemplu nucleoni), transmisă de un cîmp mezonic analog, nu va mai prezenta dificultăţile dipolare (v. § 48).

Ecuaţiile cu derivate superioare pot fi introduse alături de cîmpurile Bose şi în teoria particulelor spinoriale. Datorită arbitrariului în alegerea funcţiei lui Lagrange precum şi datorită unei serii de dificultăţi suplimentare, care apar la cuantificarea cîmpului şi sînt legate de energia negativă a celui de al doilea cîmp[1]), teoria cîmpurilor cu derivate superioare este şi ea departe de a fi convingătoare.

Trebuie remarcat, că pentru dezvoltarea teoriei cu derivate superioare, în momentul de faţă punctul cel mai important este însăşi justificarea fizică a necesităţii introducerii derivatelor superioare şi nu examinarea unor variante particulare concrete care sînt pe deasupra şi neunivoce.

Această justificare trebuie susţinută cu aceiaşi putere de convingere, ca, de exemplu, demonstrarea necesităţii generalizării neliniare pe baza teoriei transformărilor perechilor de particule. In ultimul timp, primii paşi în această direcţie au fost făcuţi de Kramers şi, de aseamenea de grupul lui Bhabha care au arătat, pe baza unor considerente formale generale, că ecuaţiile cu derivate

---

[1]) Д. Иваненко и А. Соколов, ЖЭТФ, **14**, 379, 1944.

superioare se obţin în mod natural în cadrul ecuaţiilor undoriale (spin — tensoriale) generale. Trebuie observată o renaştere a interesului faţă de teoria cu derivate superioare, în legătură cu noua teorie a vidului (vezi anexa), datorită faptului că cu ajutorul acestor ecuaţii — aşa cum se vede de exemplu din (33,30) (v. de asemenea (48,16)], putem scrie funcţii Green „regularizate" generalizate şi prin urmare funcţii care determină relaţii de comutare. Acestea nu vor avea singularităţi şi putem pune aceste funcţii la baza teoriei. La o asemenea metodă se reduc de fapt metodele de regularizare ale lui Pauli-Villars şi Feynman, cu toate că ele au fost introduse de autori ca mijloace artificiale, fără legătură cu teoria derivatelor superioare. In afară de aceasta, trebuie subliniat că ideile şi metodele teoriei cu derivate superioare, capabilă să descrie diverse „extinderi" ale sarcinii, vor fi probabil aplicate la extinderea sarcinei, în noua teorie a vidului.

In felul acesta, datorită caracterului arbitrar al teoriei, care se mărgineşte la derivatele de ordinul patru, şi datorită unei serii de dificultăţi legate de energia negativă, această încercare avînd anumite succese, nu este de asemenea definitiv convingătoare şi trebuie privită mai degrabă ca o indicaţie prealabilă asupra unor noi şi interesante posibilităţi.

§ 34. Teoria masei de altă natură decît cea de cîmp (ne-eletromagnetică)

Problema naturii masei electromului este în fizica actuală una din problemele centrale ale teoriei particulelor elementare. In paragrafele precedente au fost examinate diferite variante ale teoriei clasice a electronului, bazate pe ipoteza masei de cîmp.

Cercetarea experimentală a dependenţei masei de viteză nu ne dă nici o posibilitate de a rezolva problema naturii ei, deoarece legea de variaţie a masei cu viteza are — conform teoriei relativităţii — unul şi acelaşi caracter atît pentru masa de cîmp cît şi pentru masa de altă origină:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{34,1}$$

Totuşi, se constată că comportarea electronului în cîmpuri alternative de înaltă frecvenţă depinde în mod esenţial de felul tratării masei lui.

Aşa cum am arătat mai sus (v. § 31), teoriile masei de cîmp existente duc — în cazul oscilaţiilor electronului cu lungime de undă mai mică decît raza lui — la ecuaţii integro-diferenţiale foarte complicate şi cu termeni care depind de „dimensiunile" particulei. Dirac[1]), plecînd de la o serie de ipoteze, a construit o nouă variantă a teoriei clasice a electronului punctiform, care are numai masă nedatorită cîmpului, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării acestuia avînd una şi aceiaşi formă, independent de frecvenţa oscilaţiilor electronului.

In momentul de faţă nu există însă argumente definitive în favoarea unuia sau altuia din cele două puncte de vedere, totuşi teoria propusă mai sus posedă următoarele calităţi:

— In primul rînd, teoria relativistă clasică a lui Dirac duce la cea mai simplă ecuaţie de mişcare a electronului în cîmpurile de înaltă frecvenţă, ecuaţie care coincide cu forma relativistă a ecuaţiilor lui Lorentz, dacă eliminăm termenii cu derivatele superioare ordinului trei.

— In al doilea rînd, teoria clasică (şi, prin aceasta, prealabilă) a masei particulei nedatorite cîmpului corespunde într-un anumit sens cel mai bine teoriei cuantice, deoarece aceasta din urmă, în stadiul ei actual, se foloseşte în mod esenţial de premiza masei neelectromagnetice a electronului. Vom remarca totuşi, că la examinarea interacţiunii electronului punctiform cu cîmpul electromagnetic apar, conform teoriei cuantice, mase de cîmp infinite, de două tipuri:

1) masa longitudinală, care apare datorită interacţiunii sarcinii cu partea longitudinală a cîmpului electric şi care are drept analog clasic, masa electromagnetică a lui Lorentz, examinată detaliat mai sus, şi

2) masa transversală, care apare la interacţiunea sarcinii cu partea transversală a cîmpului, adică cu fotoni propriu-zişi şi care nu are nici un analog clasic (mai precis, care în aproximaţia clasică este egală cu zero). Aşa cum se arată în teoria cuantică[2]), fluctuaţiile cîmpului electromagnetic reprezintă cauza fizică, care condiţionează această parte transversală a energiei; aceasta din urmă apare, conform mecanicii cuantice, chiar pentru un electron în repaus (de care în teoria clasică nu este legat de nici un fel

[1]) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A), **167**, 148, 1938.

[2]) В. Гейтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат, 1940, pag. 201.

de cîmp transversal). Intensitatea cîmpului nu dispare chiar în cazul cînd numărul fotonilor este egal cu zero (v. anexa). Apariţia maselor infinite arătate reprezintă deocamdată o dificultate de neînvins în construirea teoriei cuantice a particulelor elementare. Conform ipotezei electromagnetice, valorile ambelor mase trebuie să fie finite şi suma lor egală cu masa particulei respective. Totuşi, pînă în momentul de faţă nu avem o teorie cuantică relativist invariantă a masei electromagnetice finite care să fie analogă, de exemplu, teoriilor clasice a lui Born sau Bopp-Podolski. Intr-adevăr, aşa cum s-a subliniat de atîtea ori, chiar şi în cazul unei generalizări cuantice reuşite a teoriei clasice a masei longitudinale finite, am fi rămas cu toate acestea faţă în faţă cu dificultatea, specific cuantică, a masei transversale infinite.

Pe de altă parte, conform punctului de vedere al teoriei masei neelectromagnetice, trebuie renunţat la ambele mase — atît la cea longitudinală, cît şi la cea transversală — (mai precis vorbind, trebuie să construim o teorie în care ambele mase să devină automat egale cu zero)[1]. Desigur, prin aceasta problema naturii masei de repaus iese din sfera cercetărilor actuale urmînd să fie tratată într-o teorie viitoare. In felul acesta, dificultatea fundamentală a construirii unei teorii a particulei punctiforme, este legată — atît în examinarea clasică, cît şi în cea cuantică, — de apariţia maselor proprii infinite.

Pentru a anula masa de cîmp s-au propus in teoria clasică cîteva căi:

a) reducerea la zero a masei de cîmp infinită cu ajutorul procesului la limită λ (Wentzel, Dirac)[2], această idee, în ciuda caracterului neunivoc al introducerii parametrului λ, a reuşit să-şi atragă o anumită atenţie, deoarece teoria proceselor λ poate fi relativ uşor generalizată la cazul cuantic;

b) excluderea masei de cîmp infinite a electronului cu ajutorul introducerii unui anumit cîmp auxiliar (teoria bi-cîmpului). Ultima cale[3]) permite să ajungem la ecuaţia de mişcare pentru sarcina punctiformă pe drumul cel mai direct.

---

[1]) A. A. Socolov, Journ. of. Phys. U. R. S. S., 5, 231, 1941.

[2]) V. de ex. Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей (дополнения), Гостехиздат, 1947; P. A. M. Dirac, The principles of quantum Mechanics, 3-rd. printing Oxford, 1947, § 78; M. A. Марков, УФН, 29, 269, 1946; Д. И. Блохинцев, Вестник МГУ, No. 1, 1948.

[3]) А. А. Соколов, Вестник МГУ, No. 2, 1947; v. de asemenea ЖЭТФ, 18, 280, 1948.

In încheiere, observăm că ultimele succese ale noii teorii cuantice a vidului confirmate de o serie de experienţe (mai amănunţit v. anexa) au ajutat totuşi să se clarifice unele probleme din teoria masei proprii.

S-a putut arăta efectiv că o mică parte a masei electronului poartă un caracter vădit electromagnetic. Această fracţiune de cîmp este aproximativ egală cu $\Delta m \sim \frac{1}{137} m$. Cealaltă parte a masei nu poate fi condiţionată, după cît se pare, de energia cîmpului electromagnetic şi cu atît mai puţin de energia altor cîmpuri. Prin urmare la electroni, ca şi la alte particule elementare, trebuie să existe o anumită masă fundamentală „reziduală", la care se adaugă masa de cîmp. Este posibil ca teoria clasică a mesei nedatorite cîmpului să ajute la rîndul ei şi într-o măsură sau alta să se elucideze problema naturii mesei „reziduale", a particulelor elementare. Apariţia unor teorii noi, mai perfecţionate, cu privire la natura masei proprii a particulelor elementare, cît şi teoria structurii materiei, va depinde în mare măsură de noile experienţe în domeniul fizicii nucleare şi cosmice.

In orice caz, teoriile existente, atît cele clasice cît şi cele cuantice, legate de structura particulelor elementare au încă un caracter provizoriu. Despre inepuizabilitatea problemei structurii materiei Lenin scria încă în anul 1908; în particular el menţionează: „Dispare materia, — dispare adică limita pînă la care cunoscusem pînă acum materia; cunoaşterea noastră pătrunde mai adînc, dispar unele însuşiri ale materiei, care păreau pînă acum absolute, imuabile, primordiale (impenetrabilitatea, inerţia, masa etc.) şi care apar acum ca fiind relative, inerente numai unor anumite stări ale materiei. Căci *unica* — însuşire — a materiei a cărei recunoaştere implică materilismul filozofic, este aceea *că ea există ca realitate obiectivă*, că ea există în afara conştiinţei noastre" [1].

a) — *Teoria procesului λ*

Să prezentăm densitatea tridimensională a sarcinii imobile e dezvoltată în integrală Fourier:

$$\rho(\vec{r}) = e\rho_0(\vec{r}) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int \rho_0(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}} (d\vec{k}),$$

[1]) V. I. Lenin: Materialism şi Empiriocriticism, Ed. PMR, 1948, pag. 293.

unde amplitudinea Fourier $\rho_0(\vec{k})$ caracterizează distribuţia densităţii electronului în spaţiul impulsurilor, adică ne dă aşa-zisul factor de formă. Pentru un electron sferic uniform încărcat, de rază r_0, densitatea $\rho(\vec{r})=\text{const.}$ pentru $r \leq r_0$ şi $\rho(\vec{r})=0$ pentru $r > r_0$.

Pentru un electron punctiform $\rho_0(\vec{k})=1$, de aceea:

$$\rho(\vec{r}) = e\,\delta(\vec{r}).$$

Expresia potenţialului poate fi găsită din ecuaţia lui Poisson:

$$\varphi = -\frac{4\pi\rho(\vec{r})}{\nabla^2} = \frac{e}{2\pi^2}\int \rho_0(\vec{k}')\frac{e^{-i\vec{k}'\vec{r}}}{k'^2}(d\vec{k}'),$$

unde, în ultima expresie, am înlocuit variabila $\vec{k}$ prin $\vec{k}'$.

Energia totală U_0 a cîmpului legat de sarcină este egală cu

$$U_0 = \frac{1}{8\pi}\int E^2(d\vec{r}) = \frac{1}{2}\int \varphi(\vec{r})\,\rho(\vec{r})(d\vec{r}).$$

Introducînd aici valorile pentru $\varphi(\vec{r})$ şi $\rho(\vec{r})$ şi luînd în considerare relaţia:

$$\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}(d\vec{r}) = 8\pi^3\,\delta(\vec{k}-\vec{k}'),$$

vom găsi:

$$U_0 = \frac{e^2}{4\pi^2}\int \frac{\rho_0^2(\vec{k})}{k^2}(d\vec{k}).$$

Integrînd ultima expresie în cazul simetriei sferice în raport cu unghiurile vectorului $\vec{k}$, găsim:

$$U_0 = \frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty \rho_0^2(k)\,dk.$$

Să căutăm acum să alegem factorul de formă $\rho(k)$ legat de electron astfel, încît energia cîmpului U_0, să devină egală cu zero. Această problemă nu are, evident, o soluţie univocă.

Să ne oprim asupra unuia din variantele posibile pentru care:

$$\rho_0^2(k) = \cos k\lambda.$$

Aici parametrul λ este, deocamdată, o mărime constantă oarecare.

Energia electrostatică U_0 a cîmpului unei particule încărcate va fi egală, în acest caz, cu:

$$U_0 = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty \cos k\lambda \, dk.$$

Ultima integrală este proporţională cu funcţia δ:

$$U_0 = e^2 \delta(\lambda),$$

care se anulează pentru toate valorile finite ale lui λ[1]), afară de cazul $\lambda = 0$. De aceea, lăsînd paramentrul λ finit, dar la limită oricît de mic, vom găsi că energia electrostatică a cîmpului, legată de electronul punctiform şi deci şi de masa electromagnetică de cîmp longitudinală, nu numai că nu sînt infinite, ci se şi anulează în cazul necuantic (clasic). Nu este greu de văzut că teorema de stabilitate va fi în acest caz satisfăcută identic, deoarece într-un sistem de coordonate în repaus, toate componentele: $\int T^0_{\mu\nu}(d\vec{r}_0)$ sînt egale cu zero. In felul acesta, densitatea de tipul funcţiei δ în spaţiul impulsurilor asigură „stabilitatea" sarcinii în sensul examinat mai sus. Un neajuns evident al procesului λ este condiţia suplimentară ca λ să tindă către zero doar în ultima etapă a calculelor, deoarece în caz contrar, se obţin rezultatele divergente de mai înainte.

---

[1]) In mod riguros

$$\delta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos k\lambda \, dk$$

este o mărime nedeterminată chiar pentru $\lambda \neq 0$. De aceea, această integrală trebuie interpretată, — conform observaţiilor făcute mai sus pentru funcţia δ, — drept o valoare limită a unei anumite expresii, de exemplu de tipul:

$$\delta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty e^{-\alpha k} \cos k\lambda \, dk = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

factorul $e^{-\alpha k}$ transformă în zero funcţia $\cos k\lambda$, care oscilează la infinit). (Trecînd la limită $\alpha \to 0$, vom obţine pentru $\lambda \neq 0$

$$\delta(\lambda) = 0.$$

Vedem că introducerea factorului de formă este o metodă foarte generală, care permite dintr-un singur punct de vedere să formăm modele ale electronului atît de eterogene ca particula-sferică şi electronul punctiform la limită.

Avantajul important al factorului de forma λ este posibilitatea prezentării lui sub o formă relativist invariantă. Pînă acum ne-am mărginit la cazul tridimensional, valabil pentru un electron în repaus. Să introducem acum un vector cvadridimensional λ_μ cu componentele $\vec{\lambda}$, λ_0, unde $\lambda_0 > |\vec{\lambda}|$, adică vectorul cvadridimensional λ_μ trebuie să fie similitemporal. Atunci în locul produsului $k\lambda$, care intră în factorul de formă, vom avea un invariant $\lambda_0 k - \vec{\lambda}\vec{k}$. Pentru o valoare finită a lui λ teoria nu este invariantă, deoarece vectorul auxiliar λ_μ determină o anumită direcţie preferenţială în universul cvadridimensional, dar la limită $\lambda \to 0$ teoria devine invariantă.

In sistemul de coordonate legate de electron putem pune $\lambda_0 = \lambda$, $\vec{\lambda} = 0$ şi pentru $\rho_0^2(k)$ vom obţine expresia de mai înainte: $\cos k\lambda$.

Evident, se pot introduce şi alţi factori de formă invarianţi care să ducă la o masă de cîmp finită sau nulă, totuşi, printre aceştia factorul de formă λ pare a fi cel mai simplu. Noi nu examinăm aici alţi factori care să ducă la o masă de cîmp finită deoarece astfel de teorii nu au dus la vreun rezultat convingător sau interesant din punct de vedere fizic.

In teoria λ, electronul rămîne punctiform în sensul distribuţiei spaţiale, dar i se atribuie iniţial o anumită extindere în timp, adică o durată care la limită tinde către zero. Se poate spune că vectorul auxiliar λ înlocuieşte pe o cale sui-generis raza electronului.

Nu este dificil de arătat că introducerea factorului de formă, λ, de tipul $\cos(k\lambda_0 - \vec{k}\vec{\lambda})$ este echivalentă cu următoarea modificare a funcţiei Δ [v. relaţia (17,13)] şi a funcţiei D [relaţia (20,4)], care determină parantezele lui Poisson pentru mărimile cîmpului din teoria clasică (precum şi regulile de comutare cvadridimensionale corespunzătoare, ale teoriei cuantice a cîmpurilor):

$$\Delta_\lambda = \frac{1}{2}\left[\Delta(x+\lambda) + \Delta(x-\lambda)\right]$$

şi respectiv:

$$D_\lambda = \frac{1}{2}\left[D(x+\lambda) + D(x-\lambda)\right].$$

Intr-adevăr, introducînd factorul de formă al densităţii din teoria λ, adică $\cos(\vec{k}\lambda_0 - \vec{k}\vec{\lambda})$, în dezvoltările Fourier ale funcţiei Δ şi funcţiei D şi efectuînd integrările, vom obţine expresiile date mai sus.

Unul din avantajele teoriei λ, la fel ca şi al oricărui formalism relativist invariant, este posibilitatea transpunerii lui în mecanica cuantică relativistă. In acest caz, regulile cvadridimensionale de comutare ale funcţiilor de undă şi a altor diferite mărimi care determină cîmpul, ca de exemplu potenţialele electromagnetice, potenţialele gravifice şi mezonice, vor fi determinate nu de funcţia Δ sau de funcţia D, ci de funcţiile modificate Δ_λ şi D_λ [1]).

La fel ca şi în teoria clasică, factorul de formă, λ, asigură în teoria cuantică dispariţia masei de cîmp longitudinale sau a energiei proprii a particulei, reducînd la zero energia electrostatică a cîmpului unei sarcini punctiforme.

Vom observa, de altfel, că nu s-a indicat pînă acum nici un mijloc raţional pentru îndepărtarea energiei transversale infinite. Intr-un timp, Dirac a fost de părere că este necesară, în acest scop, introducerea unor fotoni cu energii negative şi a probalităţilor negative, dar această schemă complicată şi infructuoasă a fost părăsită chiar de dînsul (v. ediţia a treia a cărţii lui).

Pînă acum am examinat teoria λ din punctul de vedere al introducerii în teoria clasică şi cuantică a noului factor de formă, care urma, în primul rînd, să înlăture divergenţa în energia longitudinală a cîmpului. Totuşi, exact la fel ca şi în teoria masei de cîmp clasice, se poate pleca nu numai de la expresia energiei sau a impulsului, ci se poate lua drept punct de plecare deducerea ecuaţiei de mişcare a lui Lorentz. In acest caz, teoria procesului λ duce la o altă tratare a acestor ecuaţii de mişcare. Ideia iniţială a lui Wentzel constă în utilizarea formalismului multitemporal care descrie electronii şi cîmpul prin coordonate deosebite $\vec{\xi}$ şi $\vec{r}$ şi prin tipurile τ şi t. Atunci, în determinarea acţiunii cîmpului asupra elec-

[1]) Se ştie din mecanica cuantică relativistă, că regulile cvadridimensionale de comutare pentru cel mai simplu cîmp scalar au forma (v. § 45):

$$\varphi(\vec{r}, t)\,\varphi(\vec{r}', t) - \varphi(\vec{r}', t')\varphi(\vec{r}, t) = \frac{2ch}{i} D(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{2ch}{i} D(x - x').$$

In teoria proceselor λ trebuie să punem în partea dreaptă a ultimei egalităţi, în loc de funcţia D, funcţia D_λ.

tronului punctiform, la un moment dat, trebuie să efectuăm în mod corect trecerea la limită $\tau \to t$. Pentru precizarea acestei treceri la limită se introduce un vector auxiliar λ_μ, care apoi se egalează cu zero:

$$\vec{r}=\vec{\xi}+\vec{\lambda},$$
$$t=\tau+\lambda_0.$$

Vom schiţa foarte pe scurt dezvoltarea acestor idei. Introducînd potenţiale noi. care coincid cu cele maxwelliene în domeniile din afara conului de lumină şi care sînt egale cu diferenţa potenţialelor maxwelliene retarda e şi a celor avansate, Wentzel şi Dirac efectuînd trecerea $\tau \to t$ cu ajutorul vectorului λ_μ, au obţinut ecuaţiile relativiste ale mişcării pentru electronul punctiform fără termenii de cîmp inerţiali şi fără termenii cu derivate superioare ordinului trei, dar cu termenul de amortizare just. Această ecuaţie va fi dedusă de noi pe altă cale [v. (34,36)]. Pauli şi Jauch au aplicat procesul λ în teoria cîmpului mezonic, în care caz s-a descoperit că masa mezonică longitudinală de cîmp a nucleonului nu va mai fi egală cu zero, ci va fi egală cu ordin de mărime cu masa mezonului [1]). Aceste aplicări ale teoriei λ nu au dat alte rezultate substanţiale.

---

[1]) M. Pauli, Phys, Rev. **64**, 332, 1943; J. M. Jauch, Phys. Rev., 63, 335, 1943.

In cazul cel mai simplu, potentialul cîmpului mezonic scalar (creat de un nucleon, proton, neutron) se determină cu functia lui Green a ecuației Poisson generalizate (v. § 44). Luînd în considerare factorul de formă λ vom avea, în loc de (14,9):

$$G_\lambda=\frac{1}{2\pi^2 R}\int_0^\infty \cos k\lambda \cdot k\frac{\sin kR}{k^2+k_0^2}\,dk;$$

în particular, pentru potențialul autoacțiunii ($R \to 0$);

$$G_\lambda=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^2\cos k\lambda}{k^2+k_0^2}\,dk=\frac{1}{2\pi}\delta(\lambda)-\frac{k_0}{4\pi}e^{-k_0\lambda},$$

sau pentru valorile mici ale lui λ;

$$G_\lambda=-\frac{k_0}{4\pi}\neq 0.$$

Calculul cu ajutorul teoriei λ, a momentelor magnetice ale nucleonilor duce la valori finite, dar la semne opuse, în comparație cu cele cerute empiric. In felul acesta, chiar generalizările cele mai simple ale teoriei λ, pentru cîmpul mezonic, au arătat neconsistența ei.

Concluzia definitivă a scurtei analize făcute teoriei λ nu poate, evident, să fie în favoarea acesteia. Insuşi vectorul auxiliar λ_μ nu are niciun sens fizic şi nu apare nemijlocit în vreunul din fenomenele fizicii. In calitate de factor de formă, introducerea acestuia este comodă, dar complet arbitrară şi neunivocă [1]). Afară de aceasta, nu s-a reuşit eliminarea dificultăţilor divergenţei datorite energiei transversale, care apare la o tratare cuantică, chiar folosind procesele λ.

b) *Teória bi-cîmpului.*

Trecem acum la deducerea ecuaţiei relativiste clasice a electronului cu ajutorul unei metode noi, bazate pe introducerea unui al doilea cîmp ajutător.

Potenţialul vector al cîmpului al doilea (nemaxwellian) îl vom nota cu litere mici a_μ.

Componentele tensorului cîmpului maxwellian $h_{\mu\nu}$ vor fi egale cu:

$$h_{\mu\nu}=\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{34,2}$$

Pentru componentele cîmpului maxwelian $H_{\mu\nu}$ rămîne expresia veche (23,2), adică:

$$H_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{34,3}$$

Vom alege tensorul $h_{\mu\nu}$ astfel încît noul cîmp auxiliar să acţioneze numai asupra electronului care tocmai creează acest cîmp şi să nu poată fi radiat sub forma de unde libere.

Pentru funcţia S (c. § 23) avem:

$$S=S_1+S_2+S_3. \tag{34,4}$$

Pentru prima parte S_1 a funcţiei, care determină mişcarea liberă a particulei, vom păstra expresia (23,5)

$$S_1=-mc\int\sqrt{-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu}\,ds. \tag{34,5}$$

Pentru a doua parte a funcţiei, S_2, care priveşte cîmpul, vom scrie în loc de (23,10) şi (23,11) expresia:

$$S_2=\int L_0\,(dx), \tag{34,6}$$

$$L_0=-\frac{1}{16\pi}\left(H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}-h_{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right),$$

[1]) V. de exemplu, И. Померанчук, ЖЭТФ, **17**, 567, 1947

unde în funcţia lui Lagrange am introdus pe lîngă cîmpul maxwellian $H_{\mu\nu}$ şi cîmpul nemaxwellian $h_{\mu\nu}$.

Insfîrşit, ultima parte a funcţiei S determină interacţiunea cîmpului cu electronul:

$$S_3 = \frac{e}{c}\int ds \int \rho(x-\xi)\,[\dot{\xi}_\mu(A^i_\mu + A_\mu - a_\mu)]\,(dx). \tag{34,7}$$

Aici adăugăm la potenţialul obişnuit A_μ, potenţialul A^i_μ, creat de sursele exterioare şi scădem, conform ipotezei expuse, potenţialul (nemaxwellian) a_μ, care acţionează numai asupra electronului care îl crează.

La variaţia funcţiei S în raport cu coordonatele electronului ne vor interesa numai părţile S_1 şi S_3:

$$S' = S - S_2 = \int L'\,ds, \tag{34,8}$$

unde:

$$L' = -mc\sqrt{-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu} +$$

$$+ \frac{e}{c}\int \rho(x-\xi)\,[\dot{\xi}_\mu(A^i_\mu + A_\mu - a_\mu)]\,(dx). \tag{34,9}$$

Cu ajutorul ecuaţiilor (23,14) şi (23,20) găsim ecuaţia de mişcare a particulei:

$$m\ddot{\xi}_\mu = F^i_\mu + F_\mu. \tag{34,10}$$

Aici:

$$F^i_\mu = \frac{e}{c}\,\dot{\xi}_\nu H^i_{\mu\nu}(\xi)$$

este forţa care acţionează asupra electronului din partea cîmpului exterior [v. (23,19)]; pe de altă parte,

$$F_\mu = \frac{e}{c}\,\dot{\xi}_\nu \int \rho(x-\xi)\,[H_{\mu\nu}(x) - h_{\mu\nu}(x)]\,(dx) \tag{34,11}$$

reprezintă forţa rezultantă de autoacţiune a cîmpurilor maxwellian şi nemaxwellian.

Egalitatea (34,10) conţine în ea patru ecuaţii. Totuşi, ecuaţia a patra poate fi înlocuită întotdeauna prin ecuaţia (23,20), care exprimă ortogonalitatea vectorului cvadridimensional al vitezei faţă de acceleraţie:

$$\ddot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu = 0. \tag{34,12}$$

De aici rezultă de asemenea o egalitate de care ne vom servi în cele ce urmează:

$$\dddot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = -\ddot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\mu. \tag{34,13}$$

La variaţia funcţiei în raport cu potenţialele electromagnetice, putem lăsa la o parte partea S_1, care nu conţine potenţialele A_μ.

Atunci

$$S'' = S - S_1 = \int L\,(dx),$$

unde

$$L = L_0 + \frac{e}{c}\int \rho\,(x-\xi)\,[\dot{\xi}_\mu (A^i_\mu + A_\mu - a_\mu)]\,ds. \tag{34,14}$$

Principiul variaţional aplicat lagrangeanului L ne dă [v. de asemeni (23,25)]:

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0. \tag{34,15}$$

Vom căpăta o ecuaţie analogă pentru al doilea potenţial a_μ.

De aici găsim ecuaţiile diferenţiale pentru cîmpul maxwellian şi nemaxwellian.

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi e}{c}\int \rho\,(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds,$$

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi e}{c}\int \rho\,(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds. \tag{34,16}$$

Spunînd potenţialele condiţiilor Lorentz:

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} = 0,$$

găsim:

$$\Box A_\mu = -\frac{4\pi e}{c}\int \rho\,(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds,$$

$$\Box a_\mu = -\frac{4\pi e}{c}\int \rho\,(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu\,ds. \tag{34,17}$$

In felul acesta ajungem la un caz particular al teoriei cîmpurilor de tipul lui Bopp-Podolski, cînd masa de repaus a cîmpului al doilea (nemaxwellian) este egală cu zero ($k_0 = 0$). Prin urmare putem utiliza aici rezultatele obţinute pentru teoria arătată, — conform cărora electronul nostru apare stabil, iar masa lui electromagnetică, proporţională cu k_0 [v. relaţia (33,44)], trebuie să se anuleze.

Mai departe, se vede din formulele din urmă că potenţialele A_μ şi a_μ satisfac una şi aceeaşi ecuaţie diferenţială. Folosind arbitrariul în alegerea soluţiilor acestor ecuaţii liniare, vom lua în soluţia ecuaţiei cu potenţialele obişnuite A_μ, numai potenţialele retardate care duc la radiaţia energiei electromagnetice, iar în soluţia ecuaţiilor care conţin potenţialele nemaxwelliene a_μ ale cîmpului al doilea, auxiliar, vom lua semisuma potenţialelor retardate şi avansate (prezenţa combinaţiei sub forma semisumei potenţialelor retardate şi avansate va face, evident, imposibilă radiaţia undelor nemaxwelliene; v. mai sus § 17).

Densitatea $\rho(x-\xi)$ relativist invariantă pentru electronul punctiform este egală cu:

$$\rho(x-\xi)=\delta(\vec{r}-\vec{\xi})\,\delta(t-\tau). \qquad (34,18)$$

Atunci, vom obţine pentru forţa de autoacţiune:

$$F_\mu=\frac{e}{c}\,\dot{\xi}_\mu[H_{\mu\nu}(\xi)-h_{\mu\nu}(\xi)]. \qquad (34,19)$$

Luînd în considerare observaţia făcută asupra alegerii soluţiilor potenţialelor cîmpurilor maxvellian şi nemaxwellian avem:

$$A_\mu=A_\mu^r$$

(potenţialele retardate),

$$a_\mu=\frac{1}{2}(A_\mu^r+A_\mu^a) \qquad (34,20)$$

(semisuma potenţialelor retardate şi avansate), de unde

$$H_{\mu\nu}-h_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(A_\nu^r-A_\nu^a)}{\partial\xi_\mu}-\frac{\partial(A_\mu^r-A_\mu^a)}{\partial\xi_\nu}\right]. \qquad (34,21)$$

Astfel, din partea propriului cîmp se exercită asupra electronului o forţă determinată de semidiferenţa potenţialelor retardate şi avansate. Introducerea unei asemenea combinaţii ipotetice, utilizată de asemenea în teoria electronului clasic a lui Dirac (1938), poate fi redusă pe o cale simplă, aşa cum am arătat acum, la ipoteza existenţei unui al doilea cîmp, nemaxwellian.

Aşa cum se vede din (17,20), funcţia lui Green a ecuaţiei d'Alembert cu soluţii care sînt o semidiferenţă a potenţialelor retardate şi avansate va fi egală cu:

$$G=\frac{c}{4\pi}f(x,x'), \tag{34,22}$$

unde

$$f(x,x')=\delta\left[(\vec{r}-\vec{r}')^2-c^2(t-t')^2\right]\frac{t-t'}{|t-t'|}\,. \tag{34,23}$$

De aceea, cînd în membrul drept al ecuaţiei lui d'Alembert intervine curentul cvadridimensional al sarcinei punctiforme egal cu:

$$j_\mu(x')=\frac{4\pi e}{c}\int\dot{\xi}'_\mu\delta(\vec{r}'-\vec{\xi}')\delta(t'-\tau')\,ds', \tag{34,24}$$

găsim pentru potenţialul-vector:

$$\frac{1}{2}(A^r_\mu-A^a_\mu)=\frac{c}{4\pi}\int j_\mu(x')f(\xi,x')\,(dx')=e\int\dot{\xi}'_\mu f(\xi,\xi')\,ds'. \tag{34,25}$$

Aici s-a introdus pentru prescurtare notaţia:

$$\xi'_\mu=\xi_\mu(s'),$$

de unde, cu ajutorul relaţiilor (34,19) şi (34,21), găsim următoarea valoare pentru forţa de autoacţiune:

$$F_\mu=\frac{e^2}{c}\int\left(\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}'_\nu\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}-\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}'_\mu\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\right)f(\xi,\xi')\,ds'. \tag{34,26}$$

Introducem mai departe notaţia:

$$\sigma=(\xi_\mu-\xi'_\mu)\,(\xi_\mu-\xi'_\mu). \tag{34,27}$$

Atunci:

$$F_\mu=\frac{2e^2}{c}\int\left[\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}'_\nu(\xi_\mu-\xi'_\mu)-\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}'_\mu(\xi_\nu-\xi'_\nu)\right]\frac{\partial f}{\partial\sigma}\,ds', \tag{34,28}$$

unde s-a ţinut seama că:

$$\frac{\partial f}{\partial\xi_\mu}=2(\xi_\mu-\xi'_\mu)\frac{\partial f}{\partial\sigma}\,.$$

Luînd în considerare prezenţa funcţiei δ de sub semnul integralei din egalitatea (34,28), se poate conchide că domeniul de integrare în raport cu mărimea s' va fi situat în vecinătatea punctului s.

Introducînd o nouă variabilă:

$$u = s' - s \tag{34,29}$$

şi dezvoltînd expresiile de sub integrală în raport cu parametrul mic u, găsim:

$$\begin{gathered}\dot{\xi}'_\mu = \dot{\xi}_\mu(s+u) = \dot{\xi}_\mu + u\ddot{\xi}_\mu + \frac{u^2}{2}\dddot{\xi}_\mu + \ldots, \\ (\xi_\mu - \xi'_\mu) = -u\dot{\xi}_\mu - \frac{u^2}{2}\ddot{\xi}_\mu - \frac{u^3}{6}\dddot{\xi}_\mu + \ldots\end{gathered} \tag{34,30}$$

Cu ajutorul egalităţilor (34,12) şi (34,13) găsim:

$$\dot{\xi}_\nu[\dot{\xi}'_\nu(\xi_\mu - \xi'_\mu) - \dot{\xi}'_\mu(\xi_\nu - \xi'_\nu)] = -\frac{c^2u^2}{2}\ddot{\xi}_\mu - \frac{u^3}{3}(c^2\dddot{\xi}_\mu - \dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu). \tag{34,31}$$

Mai departe avem:

$$\begin{gathered}\sigma = (\xi_\mu - \xi'_\mu)(\xi_\mu - \xi'_\mu) = u^2\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\nu = -c^2u^2, \\ \frac{\tau - \tau'}{|\tau - \tau'|} = -\frac{u}{|u|}\end{gathered} \tag{34,32}$$

Introducînd relaţiile din urmă în formula (34,28) găsim:

$$F_\mu = -\frac{e^2}{c}\int\left[\frac{1}{2}\ddot{\xi}_\mu u + \frac{1}{3}\left(\dddot{\xi}_\mu - \frac{1}{c^2}\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\right)u^2\right] \times \\ \times \frac{d}{du}\left(\frac{u}{|u|}\delta(c^2u^2)\right)du.$$

Integrînd ultima relaţie prin părţi şi ţinînd seama că:

$$\delta(\infty) = 0,$$

avem;

$$F_\mu = \frac{e^2}{c}\int\left[\frac{1}{2}\ddot{\xi}_\mu\frac{u}{|u|} + \frac{2}{3}\left(\dddot{\xi}_\mu - \frac{1}{c^2}\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\right)|u|\right]\delta(c^2u^2)\,du.$$

După cum se vede din egalităţile (34,27) şi (34,25), $\sigma = -c^2u^2$ reprezintă pătratul distanţei cvadridimensionale între două poziţii ale electronului.

In particular, în aproximaţia nerelativistă ($t = s$) putem privi σ drept valoare limită a următoarei expresii:

$$\sigma = -c^2(s' - s)^2 + r^2 = -c^2u^2 + r^2,$$

pentru $r \to 0$, unde r este acum o distanţă tridimensională.

Considerînd $\delta(c^2u^2)$ drept limita expresiei $\delta(c^2u^2-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, a cărei formă nu poate să se modifice la trecerea către cazul relativist, găsim conform (6,8):

$$\int |u|\,\delta(c^2u^2)\,du = \frac{1}{c^2}\int |v|\,\delta(v^2)\,dv = \frac{1}{c^2}\,. \tag{34,33}$$

In afară de aceasta, avem relaţia:

$$\int \frac{u}{|u|}\,\delta(c^2u^2)\,du = 0, \tag{34,34}$$

care rezultă din faptul că expresia de sub integrală este o funcţie impară.

De aici obţinem următoarea expresie pentru forţa de autoacţiune:

$$F_\mu = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\dddot{\xi}_\mu - \frac{1}{c^2}\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\right). \tag{34,35}$$

Expresia pentru energia proprie, proporţională cu integrala (34,34) devine nulă ($m^{el}=0$). Vom sublinia încă odată că eliminarea masei proprii infinite este legată în mod esenţial de faptul că pentru forţa de autoacţiune am ales semidiferenţa potenţialelor retardate şi avansate. La oricare altă combinaţie de cîmpuri (numai potenţialele retardate sau numai potenţialele avansate, sau semisuma potenţialelor retardate şi avansate), masa proprie de cîmp a unei particule punctiforme devine infinită.

Inlocuind ultima expresie în egalitatea (34,10) vom găsi în cele din urmă, următoarea ecuaţie clasică relativistă (necuantică) pentru mişcarea electronului punctiform:

$$m\ddot{\xi}_\mu = \frac{e}{c}\dot{\xi}_\nu H^i_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\dddot{\xi}_\mu - \frac{1}{c^2}\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\right). \tag{34,36}$$

Pentru mai multă claritate vom sublinia din nou că această ecuaţie se deosebeşte de ecuaţia lui Lorentz (31,13), în primul rînd, prin lipsa termenului cu masa de cîmp; în al doilea rînd, prin lipsa termenilor cu derivate de ordin superior lui trei; în al treilea rînd, ecuaţia (34,36) este formulată sub o formă relativist invariantă. Mărimea:

$$dG'_\mu = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\,ds \tag{34,37}$$

reprezintă impulsul cvadridimensional de radiaţie. Proiecţia impulsului pe axa timpului $G_t = \frac{1}{ic} G_4$, adică energia undelor luată cu semnul minus, este o mărime negativă ($\tau > 0$). Aceasta se leagă de faptul că electronul pierde totdeauna energia prin radiţie, atunci cînd se mişcă accelerat.

Alt-termen al impulsului cvadridimensional de autoacţiune

$$dG''_\mu = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \dddot{\xi}_\mu ds \tag{34,38}$$

este legat de cîmpul electromagnetic al electronului în mişcare. Această parte a impulsului nu este radiată, deoarece ea este egală cu diferenţiala totală a impulsului electromagnetic

$$C''_\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\xi}_\mu \tag{34,39}$$

şi este de aceea o mărime reversibilă. In aproximaţie relativistă, termenii de amortizare adăugaţi forţei lui Lorentz se reduc la o expresie cunoscută pentru forţa de frecare de radiaţie (v. de exemplu, § 31).

Observăm că, prin analogie cu teoria regularizării[1]) sau cu reducerea la formula finită a diverselor divergenţe în noua teorie a vidului, metoda de eliminare a divergenţelor cu ajutorul procesului λ, se poate numi „formală" întrucît tinzînd către zero, vectorul λ din rezultatul final dispare. Pe de altă parte, metoda de eliminare a integralelor divergente cu ajutorul bi-cîmpului compensator trebuie numită „realistă", întrucît acest cîmp ipotetic se presupune că există în mod real şi rămîne în rezultatul final. Este evident, de asemenea, că lucrările recente ale lui Pais[2]) nu reprezintă de fapt nimic altceva decît o dezvoltare a ideii bi-cîmpului compensator, dar cu ajutorul cîmpului scalar şi a altor cîmpuri, în locul cîmpului vectorial.

§ 35. Integrarea ecuaţiei de mişcare a electronului

Integrarea ecuaţiei de mişcare de forma (34,36) a electronului punctiform, a întîmpinat în drumul său o serie de dificultăţi. Datorită faptului că această ecuaţie conţine derivata a treia în raport

---

[1]) W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434, 1949. V. de asemenea culegerea „Сдвиг уровней атомных электронов", ИЛ, 1950.

[2]) Despre lucrările lui Pais vezi culegerea „Сдвиг уровней атомных электронов", ИЛ, 1950.

cu timpul propriu, este necesar ca în afară de condiţiile iniţiale obişnuite, adică cunoaşterea coordonatei iniţiale şi a vitezei iniţiale, să introducem încă o a treia condiţie suplimentară.

Pentru exemplificare ne vom opri la examinarea mişcării rectilinii.

După cum se ştie, electronul se va mişca pe o linie dreaptă, în cazul în care asupra lui acţionează din partea cîmpului exterior numai o forţă electrică, îndreptată în direcţia axei x, care coincide cu direcţia vitezei iniţiale. Ţinînd seama că în acest caz numai o componentă va fi diferită de zero şi introducînd notaţiile $(H_{41}^{i}=iE)$, $x=\xi_1$ şi $t=\frac{1}{ic}\xi_4$, găsim:

$$m\ddot{x}=e\dot{t}E+\frac{2e^2}{3c^3}\left[\dddot{x}-\frac{1}{c^2}\dot{x}(\ddot{x}^2-c^2\ddot{t}^2)\right], \tag{35,1}$$

$$mc^2\ddot{t}=e\dot{x}E+\frac{2e^2}{3c^3}[c^2\dddot{t}-\dot{t}(\ddot{x}^2-c^2\ddot{t}^2)]. \tag{35,2}$$

In locul egalităţii (35,2) putem folosi relaţia (23,21) care capătă, în cazul nostru, forma:

$$c^2\dot{t}^2-\dot{x}^2=c^2. \tag{35,3}$$

Pentru a satisface ecuaţia (35,3), vom pune:

$$c\dot{t}=c\,\mathrm{ch}\,q, \tag{35,4}$$

$$\dot{x}=c\,\mathrm{sh}\,q.$$

Mărimea q este legată de viteza unidimensională a mişcării prin relaţia:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{\dot{x}}{\dot{t}}=c\,\mathrm{th}\,q. \tag{35,5}$$

In particular, pentru valori mici ale vitezei v (cazul nerelativist), găsim:

$$q=\frac{v}{c}=\beta.$$

Introducînd (35,4) în egalitatea (35,1) vom găsi o ecuaţie pentru determinarea mărimii q:

$$\dot{q}-s_0\ddot{q}=\frac{e}{mc}E, \tag{35,6}$$

unde $s_0=\frac{2}{3}\cdot\frac{r_0}{c}$, iar mărimea $r_0=\frac{e^2}{mc^2}$ este „raza“ clasică a electronului în sensul de dimensiune efectivă.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (35,6) vom admite că, cîmpul exterior este funcţie numai de timpul propriu. In general însă, el poate depinde atît de t, cît şi de x. In acest caz mai general, soluţia problemei noastre va căpăta de astă dată forma unei ecuaţii integrale; ca deobicei, această ecuaţie integrală va fi echivalentă nu numai cu ecuaţia diferenţială iniţială a mişcării, dar va ţine seamă automat şi de condiţiile iniţiale.

Soluţia ecuaţiei (35,6) o vom căuta sub forma:

$$q=\frac{e}{mc}\int E(s')\,G(s-s')\,ds', \tag{35,7}$$

unde funcţia lui Green G se determină din egalitatea:

$$\dot{G}-s_0\ddot{G}=\delta(s-s')=\frac{1}{2\pi}\int e^{ik(s-s')}\,dk, \tag{35,8}$$

de unde:

$$G=G_1+G_0. \tag{35,9}$$

Aici G_1 este partea singulară a funcţiei lui Green:

$$G_1=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{ik(s-s')}}{ik-s_0(ik)^2}\,dk. \tag{35,10}$$

Partea ei nesingulară se determină din rezolvarea ecuaţiei omogene:

$$\dot{G}_0-s_0\ddot{G}_0=0. \tag{35,11}$$

Pentru calculul funcţiei G_1 vom descompune expresia de sub integrală într-o sumă de doi termeni:

$$\frac{1}{ik-s_0(ik)^2}=\frac{1}{ik}+\frac{s_0}{1-s_0ik}\,. \tag{35,12}$$

Cu ajutorul metodei reziduurilor (v. § 11) găsim:

$$G_1=\begin{cases}\frac{1}{2}\,; & s>s',\\ -\frac{1}{2}+e^{\frac{s-s'}{s_0}}\,; & s<s'.\end{cases} \tag{35,13}$$

Din ecuaţia (35,11) găsim valoarea funcţiei G_0:

$$G_0=\frac{1}{2}+C_1+C_2e^{\frac{s-s'}{s_0}}. \tag{35,14}$$

De aceea funcția lui Green a ecuației noastre este:

$$G=\begin{cases} 1+C_1+C_2 e^{\frac{s-s'}{s_0}}\,; & s>s',\\ C_1+(1+C_2)\, e^{\frac{s-s'}{s_0}}\,; & s<s'. \end{cases} \tag{35,15}$$

De aici rezultă că mărimea căutată q va conține două părți:

$$q=q^r+q^a \tag{35,16}$$

unde:

$$q^r=\frac{e}{mc}\int\limits_{-\infty}^{s}\left(1+C_1+C_2 e^{\frac{s-s'}{s_0}}\right)E(s')\,ds', \tag{35,17}$$

$$q^a=\frac{e}{mc}\int\limits_{s}^{\infty}\left[C_1+(1+C_2)\, e^{\frac{s-s'}{s_0}}\right]E(s')\,ds'. \tag{35,18}$$

In soluția (35,17) integrăm în raport cu toate valorile s' mai mici decît s. Invers, în soluția (35,18) integrăm în raport cu toți s' mai mari decît s. Cu alte cuvinte, în primul caz (q^r) luăm în considerare acțiunea retardată a cîmpului extrerior $E(s)$ asupra electronului punctiform, iar în al doilea caz (q^a) — acțiunea avansată a cîmpului exterior.

Inainte de toate, continuînd analogia cu mecanica clasică, vom păstra soluția determinată de acțiunea retardată (v. § 15).

In acest caz, trebuie să punem $C_1=0$, $C_2=-1$. Atunci egalitatea (35,16) va căpăta forma

$$q=q^r=\frac{e}{mc}\int\limits_{-\infty}^{s}\left(1-e^{\frac{s-s'}{s_0}}\right)E(s')\,ds'. \tag{35,19}$$

Soluția (35,19) este însă absurdă din punct de vedere fizic. Intr-adevăr, punînd, de exemplu, $E=E_0\,\delta(s')$ găsim

$$q=\begin{cases} \dfrac{eE_0}{mc}\left(1-e^{\frac{s}{s_0}}\right); & s>0,\\ 0; & s<0, \end{cases} \tag{35,20}$$

adică, după terminarea acțiunii forței $(s>0)$ electronul va continua să se mişte accelerat (electronul se autoaccelerează [1]). Să încercăm să scăpăm de această soluţie cu ajutorul introducerii acţiunii avansate.

Pentru aceasta trebuie să ne dăm condiţii suplimentare nu numai pentru momentul anterior acţiunii forţei ($s = -\infty$), dar de asemenea şi pentru momentul de după terminarea acţiunii ei (v. de asemenea § 15).

O asemenea condiţie suplimentară va consta în faptul că vom cere ca atît pentru $s = -\infty$, cît şi pentru $s = \infty$, acceleraţia electronului (adică mărimea proporţională cu $\dot{q}$) să fie egală cu zero (se înţelege de la sine că această condiţie este satisfăcută în mod automat în cazul dispariţiei forţei exterioare pentru $s = \pm\infty$) [2]).

Vom observa, mai departe, că se poate întotdeauna alege un sistem de coordonate faţă de care electronul, pentru $s = -\infty$, să fie în repaus în originea coordonatelor.

De aceea condiţiile suplimentare vor căpăta forma definitivă

$$q = 0, \quad x = 0, \quad t = s \quad \text{pentru} \quad s = -\infty \tag{35,21}$$

(condiţiile iniţiale):

$$\dot{q} = 0 \quad \text{pentru} \quad s = \infty, \tag{35,22}$$

condiţia finală).

De aici găsim $C_1 = C_2 = 0$. De aceea, conform (35,16) avem:

$$q = \frac{e}{mc}\left[\int_{-\infty}^{s} E(s')\,ds' + \int_{s}^{\infty} e^{\frac{s-s'}{s_0}} E(s')\,ds'\right]. \tag{35,23}$$

Mai departe, cu ajutorul (35,4) căutăm expresia finală pentru mărimile căutate, sub forma:

$$\begin{aligned} x &= c\int_{-\infty}^{s} \operatorname{sh} q(s')\,ds', \\ t &= s + \int_{-\infty}^{s} [\operatorname{ch} q(s') - 1]\,ds'. \end{aligned} \tag{35,24}$$

---

[1]) Soluţia ecuaţiei de mişcare cu potenţiale retardate a fost de asemenea examinată de А. П. Белоусов (ЖЭТФ, **9**, 658, 1939) и М. А. Марков (ЖЭТФ, **16**, 800, 1946).

[2]) Aceste condiţii au fost formulate de unul dintre noi (А. Соколов, Вестник МГУ, nr. 2, pag. 33, 1947; (ЖЭТФ, **18**, 280, 1948).

In soluția (35,23) am luat în considerare atît acțiunea retardată $(s' < s)$, cît şi cea avansată $(s' > s)$. Apariția soluțiilor cu acțiune retardată [1]) este motivată de introducerea potențialelor avansate în rezolvarea ecuațiilor cu cîmp propriu. Trecem acum la elucidarea sensului fizic al soluției legate de acțiunea avansată. Electronul apare ca extins pe axa timpului şi de aceea, în mod practic, el începe să simtă apariția cîmpului exterior cu s_0 secunde mai devreme. In acest timp unda electromagnetică parcurge spațiul:

$$s_0 c = \frac{2}{3} r_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2}, \tag{35,25}$$

care poate fi luat drept „rază" a electronului [2]).

In felul acesta, în teoriile clasice ale masei de cîmp, trebuie într-un mod oarecare să introducem mărimea r_0 care joacă rolul razei electronului şi de care depinde apoi masa electromagnetică; invers, în teoria clasică a masei electromagnetice a particulei punctiforme se introduce masa electronului m în ecuațiile fundamentale de mişcare, iar raza r_0 apare în mod automat la integrarea ecuațiilor mişcării.

In particular, în cazul nerelativist cînd putem pune $q = \frac{v'}{c}$ şi putem neglija mărimile de ordinul II în raport cu $q\,(q^2 \sim 0)$, soluțiile (35,24) capătă forma:

$$t = s,$$

$$x = \int_{-\infty}^{t} v(t')\, dt'. \tag{35,26}$$

---

[1]) Introducerea acțiunii retardată în alte probleme a fost examinată de asemenea de A. Власов (Учёные записки Московского Университета раздел Физика, вып. 75, 1945 г.).

[2]) Este interesant de observat că neglijînd forța de frecare de radiație (adică, punînd $s_0 = 0$), vom căpăta un loc de (35,6) ecuația:

$$\dot{q} = \frac{e}{mc} E,$$

care coincide cu ecuația (15,1) ce are aplicație în mecanica clasică.

In acest caz, în soluția ecuației (35,6) [v. relația (35,23)] după cum era de aşteptat, vor lipsi soluțiile cu acțiunea avansată, adică:

$$q = \frac{e}{mc} \int_{-\infty}^{s} E(s')\, ds'.$$

O expresie analogă a fost găsită de noi în § 15 la rezolvarea ecuației (15,1)

Substituind aici în loc de $v=cq$ — expresia (35,23), vom găsi după o serie de transformări:

$$x=\frac{e}{mc}\left[\int\limits_{-\infty}^{t}(t-t'+s_0)E(t')\,dt'+s_0\int\limits_{t}^{\infty}e^{\frac{t-t'}{s_0}}E(t')\,dt'\right]. \qquad (35,27)$$

Valabilitatea ultimei expresii poate fi uşor verificată, deoarece soluţia (35,27) satisface atît noua condiţie iniţială (35,26), adică $x=0$ pentru $t=-\infty$, cît şi ecuaţia diferenţială (35,23).

După cum se ştie, în mecanica clasică există două căi de tratare a problemelor variaţionale.

Metoda lui Lagrange, în care funcţia acţiunii se dă pe tot intervalul de timp al mişcării punctului material:

$$S=\int\limits_{s_1}^{s_2}L\,ds, \qquad (35,28)$$

unde s este timpul propriu.

In acest caz, trebuie să cerem ca la limite (adică pentru $s=s_1$ şi $s=s_2$) variaţiile δx ale coordonatelor să se anuleze, adică de fapt trebuie să ne dăm atît condiţiile iniţiale, cît şi cele finale.

Pentru a doua metodă, cunoscută sub numele de metoda lui Hamilton-Jacobi, funcţia acţiunii are forma:

$$S=\int\limits_{s_1}^{s}L\,ds, \qquad (35,29)$$

sau, cu alte cuvinte, funcţia S se întrerupe la un moment s.

Metoda lui Hamilton-Jacobi admite soluţii numai cu condiţii iniţiale.

In mecanica clasică se examinează lagrangeeni pentru care ambele metode sînt complet identice, adică întreaga problemă se poate reduce la cazul cînd sînt date numai condiţiile iniţiale.

In rezolvarea problemei noastre (mişcarea electronului punctiform, luînd în considerare şi forţa de frecare) am utilizat metoda lui Lagrange, extinzînd limitele de integrare de la $s_1=-\infty$, pînă la $s_2=+\infty$.

Deoarece soluţia acestei probleme poate fi dată numai în cazul cînd pe lîngă condiţiile iniţiale se dau şi condiţiile finale, o asemenea problemă nu poate fi tratată cu metoda lui Hamilton-Iacobi, care admite doar condiţiile iniţiale, aşa cum s-a arătat mai sus.

§ 36. Difuzia luminii de către electroni liberi

După cum s-a arătat mai sus (v. § 34), cunoaşterea relaţiei dintre masa şi viteza electronului în mişcare uniformă şi rectilinie nu permite să se precizeze natura masei (masa, fie ea de cîmp sau de altă natură, variază după una şi aceeaşi lege în funcţie de viteză).

Totuşi, în cîmpurile de înaltă frecvenţă ecuaţiile de mişcare sînt diferite pentru masa de cîmp şi cea de altă natură, datorită prezenţei termenilor cu derivatele de ordinul 4,5 etc., în teoria lui Lorentz a masei electromagnetice şi de aceea studiul oscilaţiilor de înaltă frecvenţă ale electronului poate fi folosit drept criteriu în favoarea unuia sau a altuia din modelele clasice preliminare (dacă ne aflăm în afara domeniului efectelor cuantice).

Să presupunem că o particulă punctiformă execută o oscilaţie armonică rectilinie cu o viteză nerelativistă. In acest caz:

$$t=s, \quad x=\xi_1, \quad \xi_2=\xi_3=0. \tag{36,1}$$

Ecuaţiile de mişcare (35,1) şi (35,2) vor căpăta forma

$$mw=eE+\frac{2e^2}{3c^3}\dot{w}, \tag{36,2}$$

$$evE=\frac{2e^2}{3c^3}w^2, \tag{36,3}$$

unde $v=\dot{x}$ şi $w=\ddot{x}$ sînt respectiv viteza şi acceleraţia particulei.

In deducerea ecuaţiei (36,2) am neglijat mărimea $\frac{vw^2}{c^2}$ faţă de $\dot{w}$. Justificarea reiese din faptul că la o oscilaţie armonică a electronului de amplitudine a şi de pulsaţie ω avem:

$$\dot{w} \sim a\omega^3,$$

$$\frac{vw^2}{c^2} \sim \frac{w^5}{c^2}a^3 \sim \frac{v^2}{c^2}\dot{w},$$

adică în cazul nerelativist, ultima mărime poate fi într-adevăr neglijată.

Ecuaţia (36,3) exprimă legea de conservare a energiei. Membrul întîi al egalităţii conţine lucrul efectuat de către forţa exterioară în unitatea de timp, iar membrul doi, cantitatea de energie W, radiată de electron într-o secundă, adică

$$W=\frac{2}{3}\frac{e^2w^2}{c^3}. \tag{36,4}$$

Ecuaţia (36,2) a fost obţinuţă de Lorentz pentru mişcarea electronului care posedă o masă electromagnetică [v. formula (31,19)]. Ecuaţia iniţială (36,2) este însă considerată valabilă în aproximaţia necuantică pentru oscilaţii de orice lungime de undă, în timp ce ecuaţia lui Lorentz este limitată şi este valabilă numai în cazul cînd lungimea de undă este mai mare decît raza electronului ($\lambda > r_0$), adică atunci cînd putem neglija termenii cu derivatele superioare ordinului 3. Deosebirea dintre cele două metode apare la examinarea problemei difuziei luminii de către electronii liberi.

Să presupunem că asupra unui electron cade o undă electromagnetică de pulsaţie ω.

Cîmpul electric exterior se dă sub forma:

$$E = E_0 \cos \omega t, \quad \text{sau} \quad E = E_0 e^{-i\omega t}. \tag{36,5}$$

Pentru acceleraţia w vom căuta o soluţie de forma:

$$w = w_0 e^{-i\omega t}. \tag{36,6}$$

Introducînd (36,6) şi (36,5) în egalitatea (36,2), găsim:

$$w_0 = \frac{eE_0}{m(1 + i\omega s_0)}, \tag{36,7}$$

unde

$$s_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}.$$

După cum se ştie, secţiunea eficace σ a difuziei luminii de către electronii liberi este egală cu raportul dintre cantitatea de energie W pe care o radiază electronul în unitatea de timp şi cantitatea de energie J care cade într-o secundă pe unitatea de suprafaţă.

Pentru mărimea W avem, conform (36,4):

$$W = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{w^2} = \frac{e^4 E_0^2}{3c^3 m^2 (1 + \omega^2 s_0^2)}, \tag{36,8}$$

unde bara indică valoarea medie a mărimii respective în raport cu timpul.

Valoarea lui J se determină din relaţia:

$$J = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2} = \frac{c}{8\pi} E_0^2. \tag{36,9}$$

Pentru a găsi valorile medii în raport cu timpul, $\overline{w^2}$ şi $\overline{E^2}$, după ce am îndepărtat părţile imaginare, am luat în considerare că:

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2},$$

De aici găsim:

$$\sigma' = \frac{W}{J} = \frac{\sigma}{1 + \frac{2\pi}{3} \frac{\sigma}{\lambda^2}}, \tag{36,10}$$

unde $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$, iar lungimea de undă a luminii incidente $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

In particular, pentru valori λ mari ($\lambda \gg r_0$) obţinem formula lui Thomson

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \tag{36,11}$$

adică, în acest caz, secţiunea eficace are ordinul de mărime al secţiunii transversale a electronului, dimensiunile liniare ale acesteia fiind r_0, cu toate că mai înainte nu i se atribuiau electronului punctiform nici un fel de dimensiuni.

Astfel, electronul punctiform se comportă la difuzia luminii ca un corpuscul de rază r_0.

In teoria electronului punctiform, expresia (36,10) trebuie să se verifice, de asemenea şi pentru lungimi de undă λ oricît de mici ($\lambda \ll r_0$).

In acest caz limită, secţiunea eficace capătă forma

$$\sigma' = \frac{3}{2\pi} \lambda^2, \tag{36,12}$$

în timp ce, din punct de vedere al teoriei electronului extins (de exemplu, electronul lui Lorentz), expresia (36,10) este valabilă numai pentru $\lambda \gg r_0$ (v. § 31), cînd forţa de frecare intervine ca termen de corecţie. In cazul λ mic, teoria lui Lorentz duce la expresii net diferite.

De aceea, verificarea experimentală a formulei (36,12) pentru λ mic, poate decide în favoarea sau împotriva masei de cîmp.

Trebuie de altfel remarcat că pentru $\lambda \ll \lambda_c \left(\lambda_c = \frac{h}{mc}\right)$ sau cu atît mai mult pentru:

$$\lambda \ll r_0,$$

adică atunci cînd energia luminii incidente (a cuantei de lumină) atinge ordinul de 137 mc^2 [1]), trebuie să examinăm toată problema din punctul de vedere al mecanicii cuantice a cărei folosire se impune deja pentru $\lambda \sim \lambda_c$, $\left(\lambda_c = \frac{h}{mc}\right)$ şi în particular, trebuie să observăm o modificare a lungimii de undă la difuzie (efect Compton).

Totuşi, la rezultate analoge duc calculele efectuate conform mecanicii cuantice pentru difuzia luminii de către un electron punctiform, cînd se ţine seamă de amortizare şi în ipoteza că electronul nu posedă o masă de cîmp, cu alte cuvinte, cînd se neglijează energia longitudinală şi transversală a cîmpului.

Intr-adevăr, pentru lungimi de undă mari $\left(\lambda \gg \frac{h}{mc}\right)$ obţinem din nou formula (36,10), în concordanţă cu mecanica cuantică nerelativistă sau formula (36,11), obţinută cînd se neglijează amortizarea, care este mică în acest domeniu. In domeniul lungimilor de undă mai mici $\left(\sqrt{\sigma} < \lambda < \frac{h}{mc}\right)$ teoria cuantică relativistă a lui Dirac duce la formula lui Klein-Nishina pentru secţiunea eficace de difuzie a luminii de către electron, formulă care într-un sistem de coordonate în care centrul de inerţie al sistemului electron plus foton rămîne în repaus, are forma

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{4\pi}\lambda^2\left(\ln\frac{2\lambda_c}{\lambda} + \frac{1}{4}\right).$$

Aici amortizarea încă nu joacă un rol apreciabil. In sfîrşit, în domeniul lungimilor de undă extrem de mici $\lambda < \sqrt{\sigma}$ secţiunea eficace

---

[1]) După cum se ştie din teoria cuantică, energia unei cuante de lumină este dată de expresia

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

unde $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg·s este constanta lui Planck. Pentru cazul cînd

$$\frac{16\pi^2}{9}\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2 \gg 1 \quad \text{sau} \quad \lambda \ll \frac{4\pi}{3} r_0,$$

avem

$$\varepsilon \gg \frac{3hc}{4\pi e^2} mc^2 \sim 137\ mc^2.$$

Aici s-a ţinut seamă de faptul că aşa numita constantă a structurii fine, $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$ este egală cu $\frac{1}{137{,}02}$.

păstrează la limită, cu considerarea amortizării, forma (36,12) în acelaşi sistem de coordonate ales [1]). La aceste energii însă, un rol esenţial începe să-l joace generarea perechilor (electron-pozitron). Datorită acestui fapt, această concluzie este greu de verificat experimental.

Nu se poate trece cu vederea faptul că coincidenţa rezultatelor clasice şi cuantice este un argument puternic în favoarea valabilităţii, în anumite limite, a teoriei particulei punctiforme şi că ea arată încă o dată cît de raţională este o examinare din punctul de vedere al teoriei clasice a problemelor legate de structura particulelor elementare. O variantă mai bună într-un anumit sens este ipoteza expusă mai sus a unui cîmp compensator ajutător.

§ 37. Oscilaţia cohorentă a doi electroni legaţi

Să examinăm, mişcarea coherentă a doi electroni legaţi, prin urmare cazul cînd ambii electroni oscilează cu lungimea de undă

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

care întrece de multe ori distanţa R dintre ei ($\lambda \gg R$).

Pentru simplitate ne vom mărgini la cercetarea oscilaţiilor unidimesionale nerelativiste de-a lungul axei x.

Notînd coordonatele ambilor electroni, respectiv prin x_1 şi x_2, găsim conform (36,2) următoarele ecuaţii de mişcare:

$$m\ddot{x}_1 = F_1 e^{-i\omega t} + F_{12} + \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{x}_1 \tag{37,1}$$

(pentru primul electron),

$$m\ddot{x}_2 = F_2 e^{-i\omega t} + F_{21} + \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{x}_2 \tag{37,2}$$

(pentru al doilea electron).

Aici $F_1 e^{-i\omega t}$ şi $F_2 e^{-i\omega t}$ sînt forţele exterioare care pun în mişcare oscilatorie ambii electroni; F_{12} şi F_{21} sînt forţele de interac-

[1]) A. Sokolov, Journ. of. Phys. USSR, 5. 231, 1941.

ţiune dintre electroni, datorite cîmpurilor E_2 şi E_1 (create de al doilea şi de primul electron) şi au expresiile

$$F_{12}=eE_2\left(t-\frac{R}{c}\right), \tag{37,3}$$

$$F_{21}=eE_1\left(t-\frac{R}{c}\right). \tag{37,4}$$

Ambele cîmpuri pot fi raportate la un singur timp prin dezvoltare în raport cu mărimea $\frac{R}{c}$.

Punînd în cazul nostru:

$$R^2=R_x^2=[x_1(t)-x_2(t)]^2,$$

găsim conform (31,10):

$$E_2\left(t-\frac{R}{c}\right)=\frac{e[x_1(t)-x_2(t)]}{R^3}-\frac{e}{c^2R}\ddot{x}_2(t)+\frac{2e}{3c^3}\dddot{x}_2(t)+\ldots,$$

$$E_1\left(t-\frac{R}{c}\right)=\frac{e[x_2(t)-x_1(t)]}{R^3}-\frac{e}{c^2R}\ddot{x}_1(t)+\frac{2e}{3c^3}\dddot{x}_1(t)+\ldots, \tag{37,5}$$

Din ultimele relaţii găsim ecuaţia oscilaţiilor centrului de greutate al sistemului $x=\frac{x_1+x_2}{2}$:

$$2m\ddot{x}=Fe^{-i\omega t}-\frac{(2e)^2}{2c^2R}\ddot{x}+\frac{2}{3}\frac{(2e)^2}{c^3}\dddot{x}+\ldots, \tag{37,6}$$

unde forţa comună exterioară este

$$Fe^{-i\omega t}=(F_1+F_2)\,e^{-i\omega t}.$$

De aici se vede că în cazul mişcării coherente a electronilor, la masa comună se adaugă următoarea masă electromagnetică

$$m^{el}=\frac{(2e)^2}{2c^2R},$$

care în cazul mişcării unui singur electron a fost redusă de noi la zero prin introducerea cîmpului nemaxwellian.

Pentru forţa de frecare (proporţională cu $\dddot{x}$) şi deci şi pentru energia comună de radiaţie, nu se respectă aditivitatea, deoarece forţa de frecare este proporţională cu patratul sarcinii. De aceea, la o creştere de două ori a sarcinii, forţa de frecare creşte de patru ori.

§ 38. Teoria elementară a betatronului

După cum se ştie, într-un cîmp magnetic constant, H, electronii se mişcă pe o circumferinţă de rază

$$a = \frac{cmv}{eH} \qquad (38,1)$$

cu o viteză constanta v (dacă viteza lor iniţială este îndreptată perpendicular pe vectorul H).

Principiul de funcţionare al betatronului se reduce la accelerarea electronilor de către un cîmp electric rotaţional, care apare datorită variaţiei în timp a unui cîmp magnetic. In acest caz, variaţia cîmpului magnetic în spaţiu se face astfel încît acesta întoarce înapoi electronii acceleraţi şi-i obligă, la urma urmei să se mişte pe o anumită circumferinţă (orbită stabilă). In modul acesta, betatronul este un transformator sui-generis, în care curentul din înfăşurarea lui primară se transformă în curentul secundar al electronilor acceleraţi, care se mişcă însă nu într-o înfăşurare secundară, ci într-un tor vidat (fig. 12).

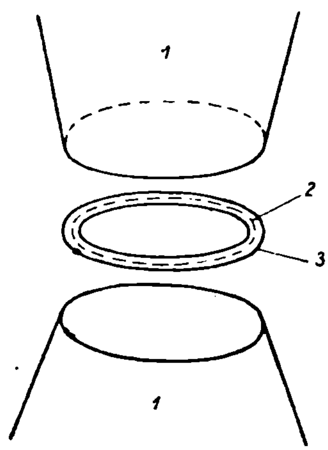

Fig. 12.
1 — Electromagnet ;
2 —Traiectoria electronilor;
3 — Tor vidat.

Betatronul construit de Kerst în 1941, după lucrările teoretice ale lui Wideröe şi I. P. Terleţki, este un aparat relativist, în opoziţie cu ciclotronul, care lucrează în mod normal doar la energii mai mici decît energia de repaus a particulelor, mc^2, şi cînd variaţia masei cu viteza nu se manifestă încă.

Date fiind condiţiile de funcţionare ale betatronului, energiile accesibile nu sînt limitate din motive de variaţie a masei cu viteza. Trebuie să indicăm totuşi prezenţa altui fapt, care limitează energiile ce pot fi atinse într-un betatron.

Intr-adevăr, într-un betatron particulele se mişcă accelerat (chiar în cazul v=const particulele posedă o acceleraţie centripetă), din care cauză, conform legilor electrodinamicii clasice, electronii vor radia o energie electromagnetică.

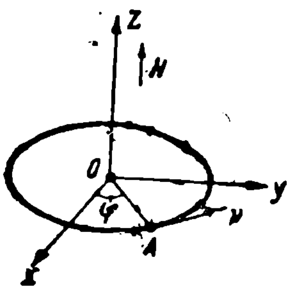

Fig. 13

Neglijînd efectele cuantice (v. § 43), vom pune la baza teoriei betatronului ecuaţia relativistă clasică a mişcării electronului, ţinînd seamă de forţa de frînare prin radiaţie (34,36), ecuaţia care a fost obţinută pentru o particulă punctiformă.

In acest paragraf vom găsi condiţiile care determină poziţia orbitei stabile şi de asemenea valoarea limită pentru energia mişcării, valoare condiţionată de influenţa forţei de frînare prin radiaţie.

Să notăm coordonatele electronului aflat în punctul A (fig. 13) respectiv prin x, y, z, ict.

Să îndreptăm cîmpul magnetic H de-a lungul axei z şi să presupunem că acesta are o simetrie axială şi variază cu timpul după o lege sinusoidală cu o pulsaţie ω':

$$H_x = H_y = 0,$$
$$H_z = -H = -H(r)\sin\omega' t. \qquad (38,2)$$

unde

$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Atunci cîmpul electric care accelerează electronul va fi îndreptat după tangenta la cerc. Relaţia dintre E şi H poate fi găsită din a doua ecuaţie a lui Maxwell, scrisă sub formă integrală:

$$\oint E_l\, dl = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int H_z\, dS. \qquad (38,3)$$

Integrarea de-a lungul conturului l trebuie efectuată pe toată circumferinţa care mărgineşte suprafaţa S.

Luînd în considerare simetria axială a cîmpului magnetic [v. relaţia (38.2)], vom obţine:

$$2\pi r E = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int H\, dS, \qquad (38,4)$$

de unde:

$$E = \frac{r}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\overline{H}. \qquad (38,5)$$

Aici $\bar{H}$ este cîmpul magnetic mediu pe suprafaţa S.

Proiecţiile vectorului E pe axele de coordonate vor fi egale cu:

$$E_x = -\frac{y}{r} E, \quad E_y = \frac{x}{r} E, \quad E_z = 0. \tag{38,6}$$

Ţinînd seama de relaţiile (23,3), vom găsi componentele ecuaţiei (34,36) pe axele x şi y:

$$m\ddot{x} = e\dot{t}\, E_x + \frac{e}{c}\dot{y} H_z - \frac{2e^2}{3c^5}(\dot{x} w_0^2 - \dddot{x} c^2). \tag{38,7}$$

Vom avea o ecuaţie analogă pentru componentele pe axele y şi z. In cazul mişcării plane putem pune $z=0$.

In sfîrşit, pentru componenta pe axa t obţinem ecuaţia:

$$mc^2\ddot{t} = e(\dot{x}E_x + \dot{y}E_y) - \frac{2e^2}{3c^3}(\dot{t} w_0^2 - \dddot{t} c^2). \tag{38,8}$$

Aici acceleraţia cvadridimensională este egală cu

$$w_0^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - c^2\ddot{t}^2.$$

Să trecem acum de la mărimile cvadridimensionale la mărimile tridimensionale, ţinînd seama că

$$\dot{t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}, \tag{38,9}$$

$$\dot{x} = v_x \dot{t}, \quad w_0^2 = \dot{t}^4 w^2 - c^2\ddot{t}^2(1-\beta^2),$$

unde $\mathcal{E}$ este energia particulei, $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ — viteza şi acceleraţia ei spaţială, obişnuită.

Atunci neglijînd în ecuaţia (38.7) forţa de frecare prin radiaţie o putem reduce uşor la ecuaţia de mişcare relativistă cunoscută, a unui electron în cîmp electromagnetic:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]. \tag{38,10}$$

Ecuaţia (38.8), în care în membrul 2 am neglijat mărimile mici proporţionale cu $\ddot{t}$ şi $\dddot{t}$, va caracteriza variaţia energiei în unitatea de timp:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\vec{v}\vec{E} - \frac{2}{3}\frac{e^2 w^2}{c^3}\dot{t}^4. \tag{38,11}$$

Din ultima ecuaţie se vede că creşterea energiei se datoreşte lucrului mecanic al forţelor electrice:

$$A = e\vec{v}\vec{E}, \tag{38,12}$$

care accelerează electronii. Datorită radiaţiei emise are loc o micşorare a energiei cu cantitatea:

$$W = \frac{2}{3}\frac{e^2 w^2}{c^3}\dot{t}^4, \tag{38,13}$$

care diferă de expresia nerelativistă corespunzătoare prin factorul $\dot{t}^4$.

Să examinăm mai întîi mişcarea pe orbita circulară, stabilă, pentru care $r = a = \text{const.}$

Proiecţiile ecuaţiei (38,10) pe rază şi pe tangenta la circumferinţă sînt

$$\frac{mv^2}{a\sqrt{1-\beta^3}} = \frac{e}{c}vH, \tag{38,14}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = eE. \tag{38,15}$$

Simplificînd ecuaţia (38,14) cu mărimea v şi derivînd-o apoi în raport cu timpul t găsim:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{c}a\frac{dH}{dt}. \tag{38,16}$$

Comparînd între ele ecuaţiile (38,15) şi (38,16) şi ţinînd seamă şi de relaţia (38,5), găsim condiţia fundamentală care determină existenţa unei orbite stabile pentru electron:

$$H = \frac{1}{2}\bar{H}. \tag{38,17}$$

Această condiţie stabilită de Wideroë a fost studiată detaliat de Terleţki [1]) şi constituie baza teoriei moderne a betatronului. De

[1]) Я. П. Терлецкий, ЖЭТФ, **11**, 96, 1941. Problema stabilităţii mişcării electronilor pe orbita de echilibru şi alte detalii ale teoriei betatronului, noi nu le vom examina, referind pe cititor la lucrările lui Terleţki (Journ. of. Phys. U. S. S. R., **9**, 159, 1945), Kerst şi Serber (D. Kerst and A. Serber, Phys. Rev. **60**, 53, 1941); v. de asemenea А. П. Гринберг, Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, 1949. Kayser şi alţii, Nucleonics, februarie 1948; v. de asemenea Culegerile de referate ştiinţific , nr. 1, Резонансные ускорители, ИЛ, 1948 şi nr. 2, Бетатрон, ИЛ, 1948.

aici se vede că în punctele situate pe o orbită stabilă, cîmpul magnetic H trebuie să fie de două ori mai mic decît valoarea medie a cîmpului magnetic pe aria delimitată de această orbită.

Electronul se va găsi pe orbita de echilibru atîta timp cît energia de radiaţie W va fi mult mai mică decît lucrul mecanic A al cîmpului electric care accelerează electronii:

$$W \ll A. \tag{38,18}$$

Examinînd cazul ultrarelativist ($v \sim c$) cînd

$$w = \frac{c^2}{a}, \quad \dot{t} = \frac{eaH}{mc^2}, \tag{38,19}$$

şi ţinînd seamă de relaţia (38,2), precum şi de (38,15) şi (38,16) avem în locul egalităţii (38,18):

$$\frac{2}{3}\frac{e^3 H \dot{t}^3}{mac} \ll ea\omega' H.$$

De aici obţinem condiţia fundamentală, pentru care electronul nu va părăsi orbita stabilă:

$$\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr}, \tag{38,20}$$

unde

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathcal{E}_{cr} = mc^2 \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{a^2\omega'}{r_0 c}},$$

iar $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ este raza electronului [1]).

Cînd energia electronului atinge ordinul de mărime al valorii critice $\mathcal{E}_{cr}$, electronii încep să piardă o fracţiune apreciabilă din energia lor şi părăsesc orbitele stabile [2]), devenind surse de unde electromagnetice.

Să examinăm înainte de toate problema contracţiei orbitelor. Această problemă poate fi examinată cel mai simplu cu ajutorul ecuaţiei (38,11).

[1]) Д. Иваненко и И. Померанчук, ДАН, **44**, 343, 1944.

[2]) Contracţia orbitelor a fost descoperită de către Blewett, (T. Blewett Phys. Rev., 69, 87, 1946).

In cazul ultrarelativist, ecuaţia (38,11) devine:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}=ecE-W, \tag{38,21}$$

unde energia electronului $\mathcal{E}$ este legată de cîmpul magnetic H [conform formulei (38,19)] prin relaţia

$$\mathcal{E}=mc^2\dot{t}=erH;$$

Cîmpul electric E este dat de egalitatea (38,5), iar pentru energia radiată în unitatea de timp avem, conform formulelor (38,13) şi (38,19), următoarea expresie:

$$W=\frac{2}{3}\frac{r_0^3r^2H^4}{mc}. \tag{38,22}$$

Vom scrie egalitatea (38,21) astfel:

$$W=\frac{er}{2}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}-e\frac{d(rH)}{dt}. \tag{38,21 a}$$

Transformările ulterioare le vom face cu ajutorul relaţiilor:

$$\frac{d}{dt}(r^2\overline{H})=r^2\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}+\dot{r}\frac{\partial r^2\overline{H}}{\partial r},$$

$$\frac{d}{dt}(r^2H)=\dot{r}rH+r\frac{d(rH)}{dt}.$$

Mai departe, cîmpurile $\overline{H}$ (cîmpul magnetic mediu) şi H (cîmpul magnetic pe orbita circulară) sînt, după cum se ştie, legate între ele prin formula

$$\overline{H}=\frac{2}{r^2}\int_0^r rH\,dr,$$

adică

$$\frac{\partial(r^2\overline{H})}{\partial r}=2rH. \tag{38,23}$$

De aici găsim

$$W=\frac{e}{2r}\frac{dr^2(\overline{H}-2H)}{dt},$$

sau

$$\frac{\overline{H}}{2}'-H=\frac{1}{er^2}\int_0^t rW\,dt. \tag{38,24}$$

Pentru orbita stabilă $(r=a)$ avem

$$H(a,t)=\frac{\overline{H}(a,t)}{2}. \tag{38,25}$$

In afară de aceasta, derivînd expresia (38,23) în raport cu r, găsim că pentru orbita stabilă derivata valorii medii a cîmpului magnetic va fi

$$\frac{\partial\overline{H}(a,t)}{\partial a}=-\frac{2H(a,t)}{a}. \tag{38,26}$$

Mai departe, punînd în membrul drept al expresiei (38,24):

$$r=a-\Delta r,$$

vom găsi, ţinînd seama de relaţiile (38,25) şi (38,26),

$$\frac{\overline{H}(r,t)}{2}-H(r,t)=\frac{\Delta r}{a}\,\frac{\partial(aH(a,t))}{\partial a}.$$

De aici obţinem că în decursul timpului t electronul va devia de la orbita de echilibru cu:

$$\Delta r\cong\frac{\int\limits_0^t W(a,t)\,dt}{e\dfrac{\partial(aH(a,t))}{\partial a}}. \tag{38,27}$$

In particular, presupunînd că în vecinătatea orbitei de echilibru cîmpul magnetic variază după legea

$$H=Ar^q\sin\omega' t,$$

unde A este un coeficient constant, iar ω', — pulsaţia cîmpului magnetic, avem pentru mărimea Δr următoarea expresie:

$$\Delta r=\frac{2r_0^3a^2(Aa^q)^3}{3mce\omega'(1+q)}F(\omega' T),$$

unde

$$F(y)=\frac{1}{\sin y}\int\limits_0^y \sin^4 y\,dy.$$

Calculînd ultima integrală găsim:

$$F(y)=\frac{3}{8}\left(\frac{y}{\sin y}-\cos y-\frac{2}{3}\sin^2 y\cos y\right).$$

In particular, pentru $y=\frac{\pi}{2}$, adică pentru momentul cînd electronul capătă accelerația maximă, mărimea F devine

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}.$$

Substituind aici după Blewett (lucr. cit.)[1]) $a=83$ cm, $\omega'=$ $=377\,\text{sec}^{-1}$, $q=-\frac{3}{4}$, $Aa^q=4\,000$ gauss, vom găsi următoarea valoare pentru variația razei în intervalul de timp de un sfert de perioadă $\left(t\omega'=\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Delta r=3{,}2 \text{ cm}.$$

Radiația electronilor care se mişcă cu viteze relativiste are o serie de particularități în comparație cu radiația electronilor care se mişcă încet.

Problema intensității radiației în funcție de armonica n va fi analizată în paragrafele următoare.

§ 39. Emisia de unde electromagnetice de către electronii care se mişcă pe un cerc

După cum s-a arătat în paragraful precedent, electronul în mişcare pe o circumferință (de exemplu în dispozitive de accelerare de tipul betatronului sau sincrotronului) trebuie să devină o sursă de radiație electromagnetică.

Deoarece în timpul mişcării electronului pe circumferință, radiația se produce în primul rînd datorită accelerației normale w (v. paragraful precedent), ne putem mărgini la examinarea cazului mişcării uniforme.

Lungimea de undă λ pentru radiația unui dipol este legată de pulsația ω prin următoarea relație:

$$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}=\frac{2\pi ca}{v}, \tag{39,1}$$

unde a este raza orbitei, iar v — viteza electronului.

In loc de (39,1), putem scrie:

$$\frac{2\pi a}{\lambda}=\frac{v}{c}=\beta. \tag{39,2}$$

[1]) Despre lucrarea lui Blewett v. de asemenea Culegerea de referate ştiinţifice, nr. II, Бетатрон, ИЛ. 1948.

Intensitatea armonicelor superioare (de indice n) cu lungimea de undă $\frac{\lambda}{n}$ este de ordinul intensităţii radiaţiei dipolare ($n=1$) înmulţite cu mărimea:

$$\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^{2(n-1)}=\beta^{2(n-1)}. \tag{39,3}$$

De aceea, la viteze nerelativiste, cînd $\beta\ll 1$ putem să ne mărginim doar la radiaţia dipolară.

In cazul ultrarelativist însă, cînd v atinge ordinul de mărime al vitezei luminii $c\,(\beta\sim 1)$, dezvoltarea (39,3) îşi pierde sensul şi problema distribuţiei intensităţii de radiaţie în funcţie de indicele armonicei n cere o examinare suplimentară [1]).

Mişcarea uniformă a electronului pe circumferinţă (în planul x, y) apare, de exemplu, sub acţiunea unui cîmp magnetic constant îndreptat după axa z [v. formula (39,2)]. In acest caz, tensorul cîmpului electromagnetic $H_{\mu\nu}$ va avea o singură componentă diferită de zero, $H_{12}=H_z=-H=\text{const}$. Cantitatea totală de energie $\frac{dU}{ds}$, radiată de etectron într-o unitate de timp propriu, poate fi găsită cu ajutorul formulei (34,36). Punînd $\xi_4=ic\tau$, avem pentru componenta a patra ($\mu=4$) a formulei amintite:

$$-\frac{dU}{ds}=-\frac{dmc^2\dot{\tau}}{ds}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{\tau}w_0^2-c^2\dddot{\tau}), \tag{39,4}$$

unde w_0^2 este pătratul acceleraţiei cvadridimensionale care, pentru o mişcare uniformă a electronului pe circumferinţă, este, conform (38,9)

$$w_0^2=a^2\omega^4\dot{\tau}^4, \tag{39,5}$$

[1]) Aşa cum s-a menţionat în paragraful precedent, D. Ivanenko şi I. Pomeranciuk au arătat că la acceleratorii cu traiectorii circulare, pe care se mişcă particula cu viteză relativistă, este necesară luarea în considerare a prezenţei unei radiaţii apreciabile. Spectrul unei asemenea radiaţii a fost examinat de o serie de autori: L. Artimovici şi I. Pomeranciuk (Journ. of Phys., U. S. S. R., **9**, 267 1945) şi L. Schiff (Rev. Sci. Instr., **17**, 6, 1946) şi alţii. Formule condensate, aplicabile în întregul domeniu care ne interesează au fost obţinute în lucrarea noastră (Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН **59**, 1551, 1948), v. de asemenea G. Schott, Electromagnetic Radiation, pag. 109, Cambridge, 1912.

unde $\omega = \frac{d\varphi}{d\tau}$ este viteza unghiulară a electronului, iar mărimea

$$\dot{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \tag{39,6}$$

este egală cu raportul dintre energia totală a electronului $\mathcal{E}$ şi energia lui de repaus mc^2.

Din (39,6) rezultă că la o rotaţie uniformă, mărimea β rămîne constantă, din care cauză $\dddot{\tau} = 0$. De aceea, conform (39,4) avem pentru cantitatea totală de energie radiată de electron în unitatea de timp

$$-\frac{dU}{d\tau} = -\frac{1}{\dot{\tau}}\frac{dU}{ds} = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2\omega^4}{c^3(1-\beta^2)^2}. \tag{39,7}$$

De aici, ţinînd seamă că:

$$\omega = \frac{v}{a} = \frac{\beta c}{a},$$

găsim

$$W = -\frac{dU}{d\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2\beta^4 c}{a^2(1-\beta^2)^2}. \tag{39,8}$$

Aceasta se mai poate transcrie fără introducerea explicită a razei a, ţinînd seamă de acceleraţia condiţionată de cîmpul magnetic, conform (38,19):

$$W = \frac{2}{3}\frac{e^4H^2\beta^2}{m^2c^3(1-\beta^2)}. \tag{39,9}$$

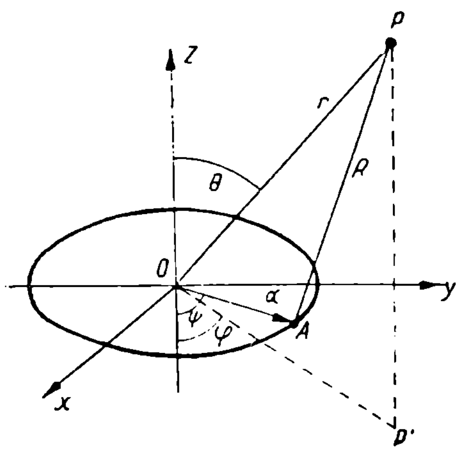

Fig. 14

Formula obţinută determină energia totală (globală) pe care o radiază electronul în rotaţie, dar nu ne dă distribuţia spectrală sau unghiulară a radiaţiei.

Inainte de a determina variaţia spectrală şi unghiulară a intensităţii radiaţiei, trebuie să găsim cîmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, create de electron în zona undelor.

Să presupunem că orbita electronului (circumferinţa de rază a) se află în planul (xy) (fig. 14). Să determinăm cîmpul în punctul P cu ajutorul coordonatelor sferice r, θ, φ, la momentul t. Notînd cu ψ unghiul polar care determină poziţia electronului în planul mişcării, avem:

$$\psi = \omega\tau.$$

Conform egalității (24,8), avem următoarea expresie pentru potențialul — vector:

$$\vec{A}=\frac{e}{c}\int\frac{\vec{v}(\tau)}{R}\delta\left(\tau-t+\frac{R}{c}\right)d\tau, \tag{39,10}$$

unde

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{a}(\tau).$$

Pentru determinarea cîmpului în zona de radiație, unde intensitățile $\vec{E}$ și $\vec{H}$ vor fi de ordinul $1/r$, trebuie, evident, să neglijăm mărimile de ordinul $1/r^2$ și cele de ordin superior din expresia potențialului vector $\vec{A}$.

De aceea căpătăm următoarele egalități aproximative:

$$R=r\left(1-2\frac{\vec{r}\,\vec{a}}{r^2}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}\cong r-a\sin\theta\cos\chi \tag{39,11}$$

$$\vec{A}=\frac{e}{cr}\int\vec{v}(\tau)\,\delta\left(\tau-t+\frac{r}{c}-\frac{a\sin\theta\cos\chi}{c}\right)d\tau, \tag{39,12}$$

unde χ este unghiul dintre vectorul $\vec{a}$ și proiecția lui $\vec{r}$ pe planul (x, y), adică:

$$\chi=\omega\tau-\varphi. \tag{39,13}$$

In cazul nostru mișcarea este periodică.

Perioada mișcării, T, este legată de pulsația ω prin relația:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}. \tag{39,14}$$

Reprezentînd funcția δ care intră în expresia (39,12), sub forma:

$$\delta(\tau')=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\omega\tau'} \tag{39,15}$$

și luînd în considerare că integrarea trebuie efectuată pe perioada T, putem găsi ușor componentele Fourier ale potențialului vector:

$$\vec{A}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\vec{A}(n)\,e^{-in\gamma}, \tag{39,16}$$

unde

$$\vec{A}(n) = \frac{e}{cr} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{v} e^{i(n\alpha - n\beta \sin\theta \sin\alpha)} d\alpha, \qquad (39,17)$$

$$\gamma = \omega t - \frac{\omega r}{c} - \varphi + \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha = \chi + \frac{\pi}{2}.$$

Proiecţiile vitezei în coordonate sferice sînt egale cu:

$$v_\varphi = v \cos\chi = v \sin\alpha,$$

$$v_\theta = v \cos\theta \sin\chi = -v \cos\theta \cos\alpha, \qquad (39,18)$$

de unde găsim pentru proiecţiile potenţialului vector:

$$A_\varphi(n) = \frac{ev}{cr} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\alpha \cdot e^{i(n\alpha - n\beta \sin\theta \sin\alpha)} d\alpha, \qquad (39,19)$$

$$A_\theta(n) = -\frac{ev}{cr} \cos\theta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha \cdot e^{i(n\alpha - n\beta \sin\theta \sin\alpha)} d\alpha. \qquad (39,20)$$

Proiecţia vectorului $\vec{A}$ pe axa r nu ne interesează, deoarece în zona undelor ea devine zero, datorită faptului că undele electromagnetice sînt transversale.

După cum se ştie, în teoria funcţiilor cilindrice sînt valabile relaţiile:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\alpha - x \sin\alpha)} d\alpha = J_n(x), \qquad (39,21)$$

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \qquad (39,22)$$

cu ajutorul cărora găsim

$$A_\varphi(n) = i \frac{ev}{cr} J'_n(n\beta \sin\theta),$$

$$A_\theta(n) = -\frac{e}{r} \operatorname{ctg}\theta\, J_n(n\beta \sin\theta). \qquad (39,23)$$

Mărginindu-ne, ca de obicei, în zona undelor, doar la termenii de ordinul. $1/r$, avem

$$\vec{E}=\vec{H}\times\vec{r}^{0}, \tag{39,24}$$

de unde

$$-E_{\varphi}=H_{0}=-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_{\varphi})}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}rA_{\varphi}(n)e^{-in\gamma}=$$

$$=\frac{2e\beta^{2}}{ar}\sum_{n=1}^{\infty}nJ_{n}'(n\beta\sin\theta)\cos n\gamma,$$

$$E_{\theta}=H_{\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r}=-\frac{2e\beta}{ar}\operatorname{ctg}\theta\sum_{n=1}^{\infty}nJ_{n}(n\beta\sin\theta)\sin n\gamma. \tag{39,25}$$

Să găsim acum componentele radiale ale vectorului Umov-Poynting $\mathfrak{S}_{r}$:

$$\mathfrak{S}_{r}=\frac{c}{4\pi}(E_{0}H_{\varphi}-E_{\varphi}H_{\theta})=\frac{c}{4\pi}(H_{\varphi}^{2}+H_{\theta}^{2}). \tag{39,26}$$

Cantitatea de energie pe care o radiază electronul în unitatea de timp, într-un unghi solid $d\Omega$, este egală cu

$$dW=\mathfrak{S}_{r}d\Omega. \tag{39,27}$$

Introducînd aici expresia (39,26) şi luînd media pe o perioadă de rotaţie a electronului T, pentru care este necesară utilizarea egalităţilor:

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\cos n\gamma\cos n'\gamma\,dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\sin n\gamma\sin n'\gamma\,dt=\frac{1}{2}\delta_{nn'},$$

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\cos n\gamma\sin n'\gamma\,dt=0, \tag{39,28}$$

obţinem

$$dW=\sum_{n=1}^{\infty}dW_{n}, \tag{39,29}$$

unde

$$dW_{n}=\frac{e^{2}n^{2}\beta^{2}c}{2\pi a^{2}}[\operatorname{ctg}^{2}\theta\,J_{n}^{2}(n\beta\sin\theta)+\beta^{2}J_{n}'^{2}(n\beta\sin\theta)]\,d\Omega. \tag{39,30}$$

Ultima relaţie determină variaţia intensităţii radiaţiei în funcţie de unghiul θ şi de numărul armonicei n.

Pentru N electroni vom avea în locul relaţiei (39,25)

$$H_\theta = \frac{2e\beta^2}{ar}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} nJ_n'(n\beta\sin\theta)\cos n(\gamma+\psi_j), \tag{39,31}$$

unde

$$\gamma = \omega t - \frac{\omega r}{c} - \varphi + \frac{\pi}{2},$$

iar ψ_j este faza iniţială a electronului j. O relaţie analogă se obţine pentru componenta H_φ.

Folosind formula

$$\cos n(\gamma+\psi_j) = \cos n\gamma \cos n\psi_j - \sin n\gamma \sin n\psi_j,$$

şi relaţia (39,28), găsim expresia pentru energia armonicii n, radiată de toţi cei N electroni

$$dW_{n,N} = S_N dW_n, \tag{39,32}$$

unde „factorul de coherenţă“,

$$S_N = N + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{j'=1\\(j'\neq j)}}^{N} \cos n(\psi_j - \psi_{j'}) \tag{39,33}$$

arată de cîte ori energia radiată de N electroni este mai mare decît energia dW_n, radiată de un singur electron.

Dacă electronii sînt distribuiţi pe orbită la întîmplare, atunci valoarea medie luată în raport cu suma diferenţelor de fază trebuie să fie egală cu zero. Atunci

$$S_N = N, \tag{39,34}$$

şi energia totală radiată de N electroni va fi egală cu suma energiilor radiate de fiecare electron (mişcarea necoherentă).

Dacă însă electronii sînt distribuiţi pe orbită în mod uniform, adică astfel încît unghiul dintre două particule vecine să fie egal cu $\frac{2\pi}{N}$ atunci pentru factorul S_N, care caracterizează uniformitatea concentraţiei circulare a electronilor, vom avea expresia

$$S_N = N\left(1 + \sum_{j=1}^{N-1}\cos 2\pi j\frac{n}{N}\right). \tag{39,35}$$

Calculînd ultima sumă, obţinem

$$S_N = N(-1)^n \frac{\sin \pi n}{\operatorname{tg} \frac{\pi n}{N}}. \tag{39,36}$$

De aici se vede că dacă numărul armonicii nu este multiplu al numărului de electroni N, adică raportul $\frac{n}{N} = \nu$ nu este egal cu un număr întreg, atunci S_N este egal cu zero.

In sfîrşit, dacă $\nu = \frac{n}{N}$ este un număr întreg, factorul de coherenţă S_N devine

$$S_N = N^2 \tag{39,37}$$

In felul acesta, în cazul rotaţiei mai multor electroni, uniform distribuiţi pe circumferinţă (mişcarea coherentă), intensitatea radiaţiei pentru unele armonici $\left(\frac{n}{N} \neq \text{număr întreg}\right)$, devine egală cu zero, iar pentru altele $\left(\frac{n}{N} = \text{număr întreg}\right)$ va creşte proporţional cu pătratul numărului total de electroni.

In cele ce urmează, ne vom mărgini să cercetăm radiaţia produsă de un singur electron în rotaţie, deoarece trecerea la cazul a N electroni în rotaţie se poate realiza cu ajutorul factorului S_N.

§ 40. **Distribuţia unghiulară a radiaţiei**

Pentru a determina variaţia intensităţii radiaţiei în funcţie de unghiul polar θ, trebuie să însumăm expresia (39,30) în raport cu numerele tuturor armonicelor n.

Ne vom folosi de următoarele relaţii cunoscute din teoria funcţiilor cilindrice [1]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(nx) = \frac{x^2(4+x^2)}{16(1-x^2)^{7/2}}, \tag{40,1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n'^2(nx) = \frac{4+3x^2}{16(1-x^2)^{5/2}}. \tag{40,2}$$

---

[1] Vezi de exemplu, cartea lui G. Schott, Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912, pag. 125. Vom observa că formula (40,1) este dată în cartea lui Watson: „Theory of Bessel functions", pag. 573, cu greşala $^1/_2$ în loc de $^7/_2$.

Aceste relaţii pot fi verificate cu ajutorul dezvoltării membrului stîng şi drept al ultimelor relaţii în raport cu mărimea x, iar pentru pătratul funcţiei Bessel şi derivata ei este comod să ne folosim de următoarele relaţii:

$$J_n^2(y)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(2n+2s)!\,y^{2(n+s)}}{s!\,2^{2(n+s)}(2n+s)![(n+s)!]^2}, \qquad (40,3)$$

$$J_n'^2(y)=\left[\frac{1}{2y}\frac{d}{dy}+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}+\left(1-\frac{n^2}{y^2}\right)\right]J_n^2(y). \qquad (40,4)$$

Expresia (40,4) poate fi obţinută derivînd de două ori relaţia (40,3) şi eliminînd pe $J_n''(y)$ cu ajutorul ecuaţiei lui Bessel

$$J_n''(y)=-\frac{1}{y}J_n'(y)-\left(1-\frac{n^2}{y^2}\right)J_n(y). \qquad (40,5)$$

De aici, avem pentru energia totală radiată de toate armonicele în unitatea de timp şi în interiorul unghiului solid $d\Omega$,

$$dW=\frac{e^2\beta^2c}{2\pi a^2}\left(\operatorname{ctg}^2\theta\sum_{n=1}^{\infty}n^2J_n^2(n\beta\sin\theta)\right)+$$

$$+\beta^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2J_n'^2(n\beta\sin\theta)\,d\Omega=$$

$$=\frac{e^2\beta^4c}{8\pi a^2}\left(1+\cos^2\theta-\frac{\beta^2}{4}\sin^4\theta(1+3\beta^2)\right)\frac{d\Omega}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{7/2}}\ ^{1)} \qquad (40,6)$$

Pentru viteze mici, cînd $\beta\ll 1$, neglijînd termenii de ordinul β^2, găsim formula nerelativistă a distribuţiei unghiulare

$$dW=\frac{e^2v^4}{8\pi a^2c^3}(1+\cos^2\theta)\,d\Omega, \qquad (40,7)$$

adică maximul intensităţii se va situa în direcţia perpendiculară pe planul de rotaţie al electronului (pentru $\theta=0$). Integrînd expresia (40,7) în raport cu unghiul solid, găsim pentru radiaţia globală:

$$W=\frac{2e^2v^4}{3a^2c^3}. \qquad (40,8)$$

---

[1]) In lucrarea lui L. Arţimovici şi I. Pomaranciuk (lucr. cit.) este obtinută o formulă analogă sub o formă aproximativă. Formula exactă fără deducere se dă în articolul lui Schiff (lucr. cit.).

Această valoare pentru W coincide, după cum era şi de aşteptat, cu aproximaţia nerelativistă a formulei integrale (39,8).

Mai departe, după cum se vede din formula (40,6), în cazul ultrarelativist cînd $\beta \sim 1$, maximul intensităţii se va situa în apropiere de planul de rotaţie al electronului, iar toată radiaţia va fi concentrată practic în cuprinsul unui unghi avînd ordinul de mărime $\Delta\varphi \simeq \sqrt{1-\beta^2}$.

Pentru a obţine energia totală W pe care o radiază electronul în unitatea de timp, trebuie să integrăm egalitatea (40,6) în raport cu unghiurile φ şi θ.

Cu ajutorul unor transformări simple găsim

$$W=\frac{e^2\beta^4 c}{4a^2}\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{\sin^5\theta\left[1-\frac{\beta^2}{4}(1+3\beta^2)\right]}{[(1-\beta^2)\sin^2\theta+\cos^2\theta]^{7/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\sin\theta\cos^4\theta+3\sin^3\theta\cos^2\theta}{[(1-\beta^2)\sin^2\theta+\cos^2\theta]^{7/2}}\right\}d\theta. \tag{40,9}$$

Folosindu-ne de valoarea pentru integrala definită[1])

$$F(n,s)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n-1}\theta\cos^{2s-1}\theta\, d\theta}{[(1-\beta^2)\sin^2\theta+\cos^2\theta]^{n+s}}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(s)}{\Gamma(n+s)}\frac{1}{(1-\beta^2)^n}, \tag{40,10}$$

obţinem

$$W=\frac{e^2\beta^4 c}{4a^2}\left\{\left[1-\frac{\beta^2}{4}(1+3\beta^2)\right]2F\left(3,\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+6F\left(2,\frac{3}{2}\right)+4F\left(1,\frac{5}{2}\right)\right\}.$$

Punînd aici în locul funcţiilor Γ ale lui Euler valorile cunoscute, obţinem pentru W expresia globală anterioară

$$W=\frac{2}{3}\frac{e^2\beta^4 c}{a^2(1-\beta^2)^2}, \tag{40,11}$$

care coincide, după cum era de aşteptat, cu formula integrală exactă (39,8).

---

[1]) De exemplu И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1948, стр. 165.

Pentru viteze ultrarelativiste putem pune

$$\beta \sim 1, \quad \frac{1}{1-\beta^2} = \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2,$$

de unde avem o expresie comodă pentru aplicaţii

$$W = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{a^2}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4. \tag{40,12}$$

§ 41. Distribuţia spectrală a intensităţii radiaţiei

Pentru a determina variaţia intensităţii radiaţiei în funcţie de frecvenţă (adică de ordinul n al armonicii), trebuie să integrăm formula (39,30) care exprimă intensitatea parţială a armonicii n în unghiul solid $d\Omega$.

Atunci găsim cantitatea de energie, cu frecvenţa $n\frac{\omega}{2\pi}$, pe care o radiază electronul în unitatea de timp

$$W_n = \frac{e^2\beta^2cn^2}{a^2}\int\limits_0^\pi [\mathrm{ctg}^2\,\theta\, J_n^2(\beta n \sin\theta) +$$

$$+\beta^2 J_n'^2(\beta n \sin\theta)] \sin\theta\, d\theta). \tag{41,1}$$

Cu ajutorul egalităţii (40,4) ultima relaţie se poate aduce uşor la forma

$$W_n = \frac{e^2\beta^2cn^2}{a^2}[2\beta^2 A_1 - (1-\beta^2)A_2]. \tag{41,2}$$

Aici

$$A_1 = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy} + \frac{d^2}{dy^2}\right) J_n^2(y) \sin\theta\, d\theta,$$

$$A_2 = \int\limits_0^\pi J_n^2(y)\sin\theta\, d\theta, \tag{41,3}$$

iar mărimea y este legată de unghiul θ prin relaţia

$$y = \beta n \sin\theta. \tag{41,4}$$

Punînd aici în loc de $J_n^2(y)$ dezvoltarea (40,3) şi ţinînd seamă că valoarea integralei definite[1]) este

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n+2s-1}\theta d\theta = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma\left(n+s+\frac{1}{2}\right)}, \tag{41,5}$$

obţinem

$$A_1 = \frac{1}{n\beta} J'_{2n}(2n\beta),$$

$$A_2 = \frac{1}{n\beta}\int_0^{2n\beta} J_{2n}(x)\,dx, \tag{41,6}$$

de unde găsim în cele din urmă

$$W_n = \frac{e^2\beta cn}{a^2}\left[2\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - (1-\beta^2)\int_0^{2n\beta} J_{2n}(x)\,dx\right]. \tag{41,7}$$

Ultima expresie, obţinută pentru prima dată de Schott, ne dă distribuţia intensităţii radiaţiei în funcţie de numărul armonicii. Deoarece ordinul armonicii apare nu numai în argument, dar determină şi ordinul funcţiei Bessel, folosirea acestei formule este foarte dificilă. De aceea, în paragraful următor vom deduce o altă aproximaţie asimptotică destul de exactă pentru formula (41,7), valabilă în cazul ultrarelativist ($\beta \sim 1$) care ne interesează.

§ 42. Aproximaţia asimptotică pentru funcţiile Bessel de ordin superior

Formulele aproximative găsite de Watson[2]) pentru funcţiile Bessel de ordin superior ($\nu \gg 1$) de forma $J_\nu(\nu x)$ unde $0 < x \leqq 1$, determină doar limita superioară pentru funcţia $J_\nu(\nu x)$ şi numai pentru $x \sim 1$ ne dau o aproximaţie bună. De aceea noi ne vom folosi de un alt mijloc pentru găsirea expresiei asimptotice pentru funcţiile Bessel de forma arătată [3]).

[1]) V. P. O. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.

[2]) G. Watson, Theory of Bessel functions, pag. 225—260 (Cambridge University Press 1945) sau Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949.

[3]) V. de exemplu, В. А. Фок, ДАН, 1, 97, 1934; R. Langer, Trans. Amer. Math. Soc., 33, 23, 1931.

După cum se ştie, funcţiile Bessel satisfac ecuaţia:

$$\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{x}J_\nu(x)+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)\sqrt{x}J_\nu(x)=0. \qquad (42,1)$$

Problema noastră constă în determinarea soluţiei asimptotice a ecuaţiei de mai sus, cînd x variază între limitele 0 şi .

Metoda lui Wentzel-Brillouin, utilizată în mecanica cuantică, ne dă următoarea soluţie aproximativă a acestei ecuaţii:

$$\sqrt{x}J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{-z'}}\left(Ae^{z}+Be^{-z}\right), \qquad (42,2)$$

unde

$$z=\int_x^{x_0}\sqrt{\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}-1}\,dx,$$

iar x_0 este singura rădăcină a funcţiei

$$f(x)=\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}-1,$$

adică $f(x_0)=0$. Pentru valori mari ale lui ν putem lua $x_0=\nu$.

Totuşi soluţia (42,2) ne dă o aproximaţie satisfăcătoare numai pentru valori mari ale lui $z\,(x\ll\nu)$ şi nu este aplicabilă în vecinătatea punctului $x=x_0$.

Aşa cum s-a arătat[1]), o soluţie a ecuaţiei (42,1) egal aplicabilă în tot domeniul de variaţie a lui x, exclusiv punctul singular x_0 $(0\leqq x\leqq\nu)$, trebuie căutată sub forma

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{z}{-z'}}\,I_s(z), \qquad (42,3)$$

unde I_s este funcţia lui Bessel de argument imaginar.

---

[1]) А. Соколов, Вестник МГУ, nr. 4, pag. 77, 1947. Într-o formă ceva mai generală prezentarea asimptotică a soluţiilor ecuaţiei undelor, cu ajutorul dezvoltării în raport cu un parametru mic, a fost găsită de asemenea de P. Krasnuşkin (Вестник МГУ, nr. 6. 1948), v. de asemenea H. A. Kramers, Zs. f. Phys, 39, 828, 1926.

Punînd (42,3) în ecuaţia iniţială (42,1), obţinem o ecuaţie pentru determinarea funcţiei necunoscute z şi a mărimii s care caracterizează ordinul funcţiei cilindrice căutate

$$\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}-1=z'^2(1-\varepsilon), \qquad (42,4)$$

unde

$$\varepsilon=\frac{\frac{1}{4}-s^2}{z^2}-\frac{3}{4}\frac{z''^2}{z'^4}+\frac{1}{2}\frac{z'''}{z'^3}. \qquad (42,5)$$

Cînd am calculat ultimele formule ne-am folosit de asemenea de ecuaţia diferenţială pe care o satisface funcţia $I_s(z)$:

$$I''_s(z)+\frac{1}{z}I'_s(z)-\left(1+\frac{s^2}{z^2}\right)I_s(z)=0,$$

unde accentul înseamnă derivare în raport cu argumentul de care depinde funcţia.

Să căutăm să alegem parametrul s astfel încît pe întregul domeniu de variaţie a lui x $(0\leq x\leq\nu)$ mărimea ε să rămînă mult mai mică decît unitatea.

Din ecuaţia (42,4) găsim pentru funcţia căutată următoarea aproximaţie bună:

$$z=\int\limits_x^\nu\frac{\sqrt{\nu^2-x^2}}{x}dx=-\nu\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{\nu^2}}+\ln\frac{x}{\nu\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{\nu^2}}+1\right)}\right]. \qquad (42,6)$$

Să introducem, pentru valorile mari ale lui x o nouă variabilă ξ

$$x=\nu(1-\xi). \qquad (42,7)$$

Pentru $x\sim\nu$, adică pentru $\xi\ll 1$, vom găsi:

$$z=\frac{\nu}{3}(2\xi)^{\frac{3}{2}};\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\nu}\frac{dz}{d\xi}=-\sqrt{2\xi}\ \text{etc.} \qquad (42,8)$$

Introducînd (42,8) în egalitatea (42,5), vom obţine

$$\varepsilon\cong\frac{1}{\nu^2(2\xi)^3}(1-9s^2), \qquad (42,9)$$

de unde, punînd $s=\pm\frac{1}{3}$ găsim condiţia pentru care mărimea ε devine infinit de mică atunci cînd $\xi\to 0$.

De aceea putem scrie pentru funcţia căutată

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{z}{-z'}}\,[AK_{\frac{1}{3}}(z) + BI_{\frac{1}{3}}(z)], \tag{42,10}$$

unde funcţia Bessel de speţa a doua de argument imaginar, este

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\pi n\,[I_{-n}(z) - I_n(z)]. \tag{42,11}$$

Pentru valorile mici ale lui $x\left(0 \ll x \ll \frac{2\nu}{e}\right)$ găsim

$$z = -\ln\left(\frac{xe}{2\nu}\right)^\nu \gg 0,\quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\nu}{x}\ \text{etc.} \tag{42,12}$$

Mărimea ε, avînd ordinul $\frac{1}{\nu^2}$ pentru $x \to 0$, poate fi de asemenea neglijată, adică soluţia (42,10) este valabilă pentru întregul interval de variaţie al lui x, care ne interesează [1]).

In sfîrşit, ne mai rămîne să determinăm valorile mărimilor constante A şi B.

Luînd în considerare, pentru aceasta, valorile asimptotice pentru K şi I la z mari [2])

$$K_n(z) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z};\quad I_n(z) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\,e^z, \tag{42,13}$$

şi de asemenea formula lui Stirling

$$\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \cong \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi\nu}}, \tag{42,14}$$

obţinem

$$K_{\frac{1}{3}}(z) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{\Gamma(\nu+1)};\quad I_{\frac{1}{3}}(z) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi\nu}}.$$

---

1) În problema noastră trebuie să cunoaştem comportarea asimptotică a funcţiilor Bessel numai pentru valori mari ale lui x ($x \sim \nu \cdot \xi \ll 1$). Însă pentru determinarea constantelor A şi B şi pentru determinarea intensităţii radiaţiei la viteze v mici ($v \ll c$) trebuie să ne folosim de o altă valoare aproximativă a funcţiei căutate pentru $x \to 0$.

2) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, pag. 78.

Pe de altă parte, ținînd seamă că pentru x mic avem

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \tag{42,15}$$

obținem o ecuație pentru determinarea constantelor A și B

$$\frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} = \pi A \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + B\frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{2\pi\nu x^\nu}, \tag{42,16}$$

de unde găsim că $A = \frac{1}{\pi}$, $B = 0$. In cele din urmă expresia asimptotică căutată pentru funcția Bessel capătă forma

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}\sqrt{\frac{z}{-z'}} K_{\frac{1}{3}}(z)\ ^{1)}. \tag{42,16a}$$

Vom observa că pentru valorile mari ale argumentului z, funcția $K_{\frac{1}{3}}(z)$ nu depinde de ordinul ei, adică în cazul nostru, de indicile $\frac{1}{3}$, și este determinată de egalitatea (42,13). De aceea:

$$\sqrt{x} J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi z'}} e^{-z}. \tag{42,17}$$

Ultima soluție coincide cu soluția aproximativă (42,2) găsită prin metoda Wentzel-Brillouin variabilă doar pentru valori mari ale lui z. In schimb, metoda de aproximație expusă în acest paragraf, conținînd drept caz particular metoda lui Wentzel-Brillouin, permite obținerea soluțiilor atît pentru valori mari ale lui z, cît și pentru valori mici ale lui z.

In particular, pentru domeniul valorilor mari ale lui z, care ne interesează cel mai mult, obținem

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\xi}{3}}\, K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\nu}{3}(2\xi)^{\frac{3}{2}}\right), \tag{42,18}$$

unde

$$\xi = 1 - \frac{x}{\nu}.$$

[1]) După cum se știe, funcțiile cilindrice de ordinul $^1/_3$ sînt direct legate de integrala lui Airy, F, prin relația ($x>0$):

$$F = \int_0^\infty \cos(t^3 + xt)\, dt = \frac{\sqrt{x}}{3} K_{1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right);$$

v. Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, pag. 98.

Din (42,18) găsim

$$J_\nu(x) = \frac{2\xi}{\pi\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}}\left(\frac{\nu}{3}(2\xi)^{\frac{3}{2}}\right), \qquad (42{,}19)$$

şi de asemenea

$$\int_0^x J_\nu(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^x \sqrt{-\frac{z}{z\,x}}\,K_{\frac{1}{3}}(z)\,dx. \qquad (42{,}20)$$

In locul ultimei expresii se poate lua

$$\int_0^x J_\nu(x)\,dx = \frac{\nu}{\pi\sqrt{3}}\int_\xi^1 \sqrt{2\xi}\,K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\nu}{3}(2\xi)^{\frac{3}{2}}\right)d\xi. \qquad (42{,}21)$$

Formula (42,21) este mai puţin exactă decît (42,20) deoarece în locul lui z am pus valoarea (42,8) valabilă numai pentru $\xi \to 0$. Totuşi, ţinînd seamă că pentru $\xi \to 1$ $(z \to \infty)$ funcţiile $K_{\frac{1}{3}}(z)$ şi $K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\nu}{3}(2\xi)^{\frac{3}{3}}\right)$ tind repede către zero, noua noastră aproximaţie este perfect valabilă. In sfîrşit, introducînd o nouă variabilă $y = \frac{\nu}{3}(2\xi)^{\frac{3}{2}}$ şi extinzînd limita de integrare pentru ν mari, în mod practic pînă la ∞, obţinem

$$\int_0^x J(x)\,dx = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{\frac{\nu}{3}(2\xi)^{\frac{3}{2}}}^{\infty} K_{\frac{1}{3}}(y)\,dy. \qquad (42{,}22)$$

Formulele (42,18), (42,19) şi (42,22) sînt expresiile asimptotice căutate pentru funcţiile Bessel.

§ 43. Electronul „luminos"

Aşa cum s-a găsit mai sus, variaţia energiei radiaţiei în funcţie de ordinul armonicii este determinată de egalitatea (41,7)

$$W_n = \frac{e^2 c\,\beta n}{a^2}\left[2\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - (1-\beta^2)\int_0^{2\beta n} J_{2n}(x)\,dx\right]\cdot \qquad (43{,}1)$$

Vom examina acum două cazuri: cazul nerelativist ($\beta \ll 1$) şi cazul ultrarelativist ($1-\beta \ll 1$).

In cazul nerelativist putem pune conform cu (42,15):

$$J_{2n}(2n\beta)=\frac{(n\beta)^{2n}}{(2n)!}\,;\quad J'_{2n}(2n\beta)=\frac{(n\beta)^{2n-1}}{2\,(2n-1)!}\,;$$

$$\int_0^{2n\beta} J_{2n}(x)\,dx=\frac{2\,(n\beta)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \tag{43,2}$$

Atunci, pentru energia armonicii n găsim

$$W_n=\frac{4e^2c\beta^{2n+2}}{a^2}\,\frac{n^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\frac{n+1}{2}\,. \tag{43,3}$$

Fundamentala va radia o energie maximă ($n=1$)

$$W_1=\frac{2}{3}\,\frac{e^2v^4}{a^2c^3}\,. \tag{43,4}$$

Energia radiată de armonica de pulsaţie $n\omega$ ($n=2, 3, 4,\ldots$) va fi de ordinul $\beta^{2(n-1)}\,W_1$, şi de aceea, în aproximaţia nerelativistă, ea poate fi neglijată.

După cum era de aşteptat, formula (43,4) coincide cu aproximaţia nerelativistă a expresiei (39,8), care dă energia totală a radiaţiei.

Lungimea de undă a fundamentalei (v. de asemenea egalităţile (39,1) şi (39,2) este

$$\lambda=2\pi a\,\frac{c}{v}\,,$$

adică electronul în rotaţie va radia unde electromagnetice de lungime de undă λ, care întrec de cîteva ori dimensiunile orbitei.

Cu totul altfel se prezintă situaţia în cazul ultrarelativist.

Introducînd notaţia

$$x=2n\beta=2n(1-\xi)$$

şi ţinînd seamă de relaţiile (42,18) şi (42,22), obţinem următoarea expresie pentru energia armonicii n[1]) cînd $\xi \ll 1$ şi n este mare

$$W_n=\frac{e^2c}{a^2}\left\{2nJ'_{2n}[2n(1-\xi)]-2\xi n\int_0^{2n(1-\xi)} J_{2n}(x)\,dx\right\}=$$

$$=\frac{e^2c}{a^2}\,\frac{2\xi n}{\pi\sqrt{3}}\left[2K_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2n}{3}(2\xi)^{\frac{3}{2}}\right)-\int_{\frac{2n}{3}(2\xi)^{\frac{3}{2}}}^{\infty} K_{\frac{1}{3}}(y)\,dy\right]. \tag{43,5}$$

---

[1]) Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН, **59**, 1551, 1948.

Aici mărimea

$$\sqrt{2\xi}=\sqrt{2(1-\beta)}\cong\frac{mc^2}{\mathcal{E}}$$

reprezintă raportul dintre energia de repaus mc^2 a electronului şi energia lui totală $\mathcal{E}$. In cazul ultrarelativist, pe care-l examinăm aici, acest raport este mic $(2\xi\ll 1)$.

Pulsaţia armonicii emise este

$$\omega=n\omega_0,$$

unde

$$\omega_0=\frac{c}{a}$$

este pulsaţia fundamentalei.

Introducînd mai departe pulsaţia critică

$$\omega_c=\frac{3\omega_0}{2(2\xi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3\omega_0}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3=\frac{3\omega_0}{2}(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}} \tag{43,6}$$

şi luînd în considerare faptul că pentru armonicile de ordin înalt $n\gg 1$, variaţia pulsaţiilor ω poate fi considerată continuă

$$d\omega=\omega_0\,dn,$$

şi deoarece creşterea ordinului armonicii $dn=1$, este unică faţă de n, obţinem

$$dW=W_n dn=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\frac{e^2c}{a^2}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 y\,dy\left[2K_{\frac{2}{3}}(y)-\int\limits_y^\infty K_{\frac{1}{3}}(x)dx\right], \tag{43,7}$$

unde mărimea y este egală cu raportul dintre pulsaţia ω şi pulsaţia critică ω_c, adică

$$y=\frac{\omega}{\omega_c}=n\frac{\omega_0}{\omega_c}.$$

Ţinînd seamă de relaţia de recurenţă

$$2K'_{\frac{2}{3}}(x)+K_{\frac{1}{3}}(x)=-K_{\frac{5}{3}}(x),$$

putem scrie expresia lui dW şi sub o altă formă

$$dW=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\frac{e^2c}{a^2}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 y\,dy\int\limits_y^\infty K_{\frac{5}{3}}(x)\,dx. \tag{43,7a}$$

Să găsim acum energia dW în următoarele cazuri extreme.

1) In cazul $\omega \ll \omega_c$, y va fi mult mai mic decît unitatea ($y \ll 1$).

Valoarea extremă pentru dW, pentru $y \ll 1$, poate fi găsită mult mai simplu din egalitatea (43,7), decît din egalitatea (43,7a).

Folosind formulele

$$K_n(y) = \frac{2^{n-1}\Gamma(n)}{y^n}, \quad y \to 0, \quad n > 0,$$

$$\int_0^\infty K_n(x)\, x^{2m+1-n} dx = 2^{2m-n}\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+1-n), \qquad (43,8)$$

$$m+1 > n > 0,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

obţinem :

$$dW = \frac{3\sqrt{3}}{2^{\frac{4}{3}}\pi}\frac{e^2 c}{a^2}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) y^{\frac{1}{3}} dy \quad \left(y = n\frac{\omega_0}{\omega_c}\right), \qquad (43,9)$$

adică energia radiată va creşte proporţional cu rădăcina cubică a pulsaţiei $\omega = y\omega_c$ sau cu rădăcina cubică a ordinului n a armonicii, atingînd maximul pentru $\omega \sim \omega_c$.

După cum se vede din formula (43,6), pentru energii de rotaţie foarte mari, frecvenţa critică a radiaţiei (frecvenţa, pentru care intensitatea de radiaţie atinge valoarea sa maximă) poate cădea în partea vizibilă a spectrului, cu toate că fundamentala are o lungime de undă de ordinul razei electronului.

De aceea electronul în rotaţie poate deveni „luminos" în înţelesul propriu al cuvîntului.

Intr-adevăr, o asemenea luminiscenţă prezisă în lucrările amintite mai sus, a fost observată cu ochiul liber pentru prima oară în 1947 [1]), iar cercetarea experimentală a confirmat caracterul distribuţii spectrale stabilite de teorie (formulele (43,9) şi (43,12).

In sfîrşit, să stabilim relaţia dintre direcţia radiaţiei şi numărul armonicii. In § 40 am găsit că maximul intensităţii se situează

[1]) N. C. Pollock şi alţii, Phys. Rev., **71**, 829, 1947 şi de asemenea în vol. **74**, 52, 1948; v. de asemenea В. Лопухин и В. Угаров, УФН, **34**, 398, 1948. Pentru fotografiile noii radiaţii v. de exemplu în Electronics (septembrie 1947).

în apropiere de planul orbitei electronului $\left(\theta = \frac{\pi}{2} + \Delta\varphi\right)$, iar toată radiaţia va fi de fapt concentrată înăuntrul unui unghi de ordinul $2\Delta\varphi \sim 2\sqrt{1-\beta^2}$. Vom face apel la formula (39,30) care stabileşte distribuţia unghiulară şi specială a energiei radiate.

In particular, pentru unghiurile θ situate în apropierea planului de radiaţie maximă $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, găsim următorul argument de care trebuie să depindă funcţia Bessel care intră în egalitatea (39,30):

$$n\beta \sin\theta = n\left(1 - \xi - \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

unde

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Luînd în considerare egalitatea (43,6) intensitatea va fi diferită de zero, atunci cînd

$$n\left(\xi + \frac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < 1.$$

In particular, pentru armonicile care dau o intensitate totală diferită de zero, adică satisfac inegalitatea

$$n\xi^{\frac{3}{2}} < 1,$$

găsim că intensitatea diferită de zero a radiaţiei spectrale va fi concentrată înăuntrul unghiului

$$n\alpha^3 < 1,$$

de unde găsim valoarea limită pentru unghiul de radiaţie

$$\alpha_n = n^{-\frac{1}{3}}. \tag{43,10}$$

Odată cu mărirea ordinului armonicii unghiul solid al radiaţiei se va micşora neîncetat, aproiindu-se de planul de mişcare al electronului.

2) Intr-un alt caz extrem $\omega \gg \omega_c$ avem $y \gg 1$. Pentru calculul lui dW ne vom folosi de expresia (43,7a).

Ţinînd seamă că pentru y mare ($y \gg 1$) avem

$$K_{\frac{5}{3}}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, e^{-y},$$

vom găsi

$$dW = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 y\, [1 - g(\sqrt{y})]\, dy, \tag{43,11}$$

în care

$$g(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

este funcţia lui Gauss.

In particular, pentru z mare avem

$$g(z) = 1 - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z} + \ldots,$$

de unde

$$dW = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 \sqrt{y} e^{-y} dy \tag{43,12}$$

$$\left(y = n \frac{\omega_0}{\omega_c}\right).$$

In felul acesta, pentru frecvenţe mai mari decît cele critice, $\omega > \omega_c$, energia radiată va scădea repede — practic exponenţial cu frecvenţa sau ordinul armonicii. Prin urmare, partea principală a radiaţiei se datoreşte frecvenţelor situate în vecinătatea frecvenţei critice ω_c.

O reprezentare grafică aproximativă a variaţiei energiei radiate W_n în funcţie de numărul armonicii $n = \frac{\omega}{\omega_0}$ este dată în fig. 15.

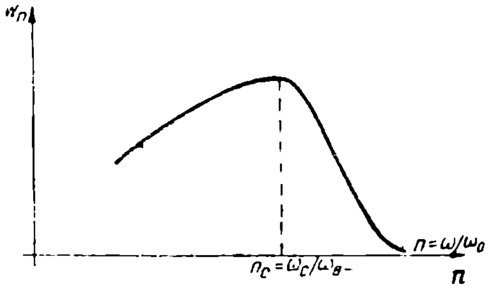

Fig 15

In sfîrşit, să găsim energia globală radiată, care conform (43,7a) va fi egală cu

$$W = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 \int_0^\infty y dy \int_y^\infty K_{\frac{5}{3}}(x)\, dx. \tag{43,13}$$

Ultima integrală poate fi calculată uşor cu ajutorul relaţiei (43,8).

Intr-adevăr

$$\int_0^\infty y\,dy\int_y^\infty K_{\frac{5}{3}}(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^2K_{\frac{5}{3}}(y)\,dy=\frac{8\pi}{9\sqrt{3}},$$

de unde găsim expresia lui W:

$$W=\frac{2}{3}\frac{e^2c}{a^2}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4, \tag{43,14}$$

care coincid exact cu aproximaţia ultrarelativistă (40,12) a energiei totale radiate.

In felul acesta, expresia asimptotică (43,7) găsită mai sus, este o bună aproximaţie pentru descrierea radiaţiei electronului „luminos".

In cazul rotaţiei pe cerc nu a unuia, ci a N electroni, trebuie să luăm în considerare factorul de coherenţă S_N dat de formula (39,33).

Să notăm cu N_1 numărul electronilor distribuiţi pe orbită la întîmplare din punct de vedere al distanţelor reciproce, cu N_2 să notăm numărul electronilor care formează k grupuri, iar în fiecare grup să presupunem că se găsesc în mediu N' electroni ($N_2=kN'$).

Prin „grup" vom înţelege o aglomerare de electroni distribuiţi la întîmplare de-a lungul unui arc de deschidere unghiulară φ, astfel încît densitatea lor să scadă rapid cînd ne depărtăm de centrul grupului, după o lege oarecare, de exemplu, după formula lui Gauss.

Electronii unui grup trebuie să radieze în mod coherent armonici cu o intensitate proporţională cu N'^2, în domeniul lungimilor de undă λ care întrec dimensiunile grupului $a\varphi$ ($\lambda>a\varphi$) [1]). In sfîrşit să noăm cu N_3 numărul electronilor distribuiţi uniform pe orbită (adică la distanţe egale unul faţă de celălalt).

[1]) In general, prin radiaţie coherentă vom înţelege o radiaţie pentru care intensitatea emisă de doi sau mai mulţi electroni nu este egală cu suma intensităţilor emise de fiecare electron în parte.

In cazul nostru avem de a face cu două feluri de coherenţă: în primul rînd o coherentă datorită distribuţiei uniforme a electronilor de-a lungul circumferinţei [factorul de coherentă este dat de egalitatea (39,36)] şi în al doilea rînd coherenţa datorită aşezării unora din electroni la distanţe reciproce mai mici decît lungimea de undă a radiaţiei emise (v. § 37).

Energia totală a armonicii n va fi

$$W_n^N = W_{1n} + W_{2n} + W_{3n}. \tag{43,15}$$

Energia W_{1n} radiată de electronii distribuiţi la întîmplare pe orbită va fi egală cu suma energiilor W_n radiate de fiecare electron în parte (v. § 39), adică

$$W_{1n} = N_1 W_n. \tag{43,16}$$

Energia W_{2n}, radiată de către grupuri, trebuie să fie proporţională cu pătratul numărului de particule (sau cu pătratul sarcinii), adică

$$W_{2n} = kN'^2 W_n = N_2 N' W_n. \tag{43,17}$$

In sfîrşit, energia W_{3n}, radiată de electronii distribuiţi uniform va fi:

$$W_{3n} = S_{N_3} W_n, \tag{43,18}$$

iar factorul de coherenţă va fi egal, conform (39,36) şi (39,37), cu

$$S_{N_3} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } \frac{n}{N_3} \text{ neîntreg,} \\ N_3^2, & \text{pentru } \frac{n}{N_3} \text{ întreg.} \end{cases} \tag{43,19}$$

In particular, cînd

$$N_3 > n_c \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$$

ultimul grup de electroni practic nu radiază. De exemplu, un curent circular constant, ideal, poate fi privit ca o mişcare a unor electroni distribuiţi regulat pe orbită, pentru $N_3 \to \infty$. Această concluzie concordă cu faptul cunoscut că un curent constant nu radiază energie electromagnetică. In felul acesta regularitatea distribuţiei electronilor trebuie să ducă, în cazul general, la o micşorare a energiei radiate.

Să examinăm limitele de valabilitate ale teoriei clasice a electronului „luminos" [1]).

---

1) А. Соколов, ДАН, **67**, 1013, 1949.

Rezolvînd problema relativistă în coordonate polare plane cînd se pot neglija efectele de spin, găsim pentru energia electronului $\mathcal{E}_{ls}$ şi funcţia de undă $\psi_{l,s}$ următoarele expresii:

$$\mathcal{E}_{ls}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\sqrt{m^2c^4+eHc\,\frac{h}{2\pi}(2l+2s+1)}, \qquad (43,20)$$

$$\psi_{ls}=C_{ls}e^{il\varphi}R_{ls},$$

unde numerele cuantice $l, s=0, 1, 2, 3, \ldots, C_{l,s}$ este un coeficient de normare, funcţia radială R este legată de polinoamele generalizate Laguerre L prin relaţia

$$R_{ls}=e^{-\rho}\rho^{\frac{l}{2}}\frac{d^l}{d\rho^l}L_{s+l}(2\rho),$$

iar mărimea fără dimensiuni ρ este

$$\rho=\frac{\pi eH}{2ch}r^2.$$

In cazul orbitei circulare ($s=0$) numărul cuantic l este legat de raza a prin relaţia

$$a=\sqrt{\frac{ch\,l}{\pi eH}}.$$

Dacă numărul cuantic s nu este egal cu zero, atunci este posibilă o abatere de la orbita circulară de rază a

$$\Delta r=\pm a\sqrt{\frac{s}{l}}.$$

Să determinăm radiaţia electronului atunci cînd acesta trece din starea $(l, 0)$ în starea (l', s'), ordinul armonicii radiaţiei fiind $n=l-(l'+s')$.

Din formula (43,20) putem găsi pulsaţia radiaţiei

$$\omega_n=\frac{2\pi}{h}(\mathcal{E}_{l0}-\mathcal{E}_{l's'})=n\omega_0\left(1+\frac{1}{4}\beta^2\frac{n}{l}\right),$$

unde $\omega_0=\frac{v}{a}$.

Intensitatea armonicii de ordinul n, în interiorul unghiului solid $d\Omega$ este

$$dW_n^{\text{cuant}}=\frac{e^2\omega_n^2}{2\pi m^2c^3}\sum_{s'}(\overline{P_x^2}+\cos^2\theta\,\overline{P_y^2})\,d\Omega,$$

unde

$$\overline{P}_x = \int \psi^*_{l's'} e^{-i\frac{(\omega r)}{c}} \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right) \psi_{l0}\, d\tau;$$

o expresie analogă avem şi pentru $\overline{P}_y$.

Pentru intensitatea radiaţiei găsim:

$$dW_n^{\text{cuant}} = dW_n \sum_{s'} B^2_{s'},$$

unde dW_n este intensitatea clasică, dată de formula (39,30), iar coeficienţii B^2_s sînt

$$B^2_0 = 1 - \frac{1}{4}\frac{n^2}{l}, \quad B^2_1 = \frac{n^2}{4l} \text{ etc.}$$

La calculul sumei $\sum_{s'} B^2_s$ termenii de ordinul lui $\frac{n^2}{l}$ se reduc şi raportul dintre corecţiile cuantice pentru radiaţia totală şi rezultatele clasice va fi $\alpha = \frac{n}{l}$.

In cazul ultrarelativist, lungimea de unde De Broglie a electronului mobil poate fi egală cu

$$\Lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}} \cong \frac{a\pi}{l}.$$

De aici rezultă pentru α expresia

$$\alpha = \frac{n\Lambda}{\pi a}.$$

Astfel în cazul radiaţiei armonicilor de ordinul n, corecţiile cuantice pentru frecvenţa şi intensitatea totală a radiaţiei începe să se manifeste atunci cînd lungimea de unde De Broglie devine comparabilă cu $\frac{a}{n}$. Reamintim că pentru radiaţia dipolară ($n=1$) obţinem condiţia obişnuită $\Lambda \sim a$.

Substituind aici în locul lui n ordinul armonicii care ne dă maximum-ul de radiaţie, $n \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$, găsim condiţia pentru care încep să se manifeste corecţiile cuantice la intensitatea totală a radiaţiei

$$\mathcal{E} \sim mc^2 \left(\frac{amc}{h}\right)^{1/2}.$$

Aceasta depăşeşte cu mult energiile accesibile astăzi.

După cum se ştie, în cazul tratării clasice a mişcării plane a electronului într-un cîmp magnetic constant, traiectoria electronului trebuie să fie întotdeauna circulară. In limbajul mecanicii cuantice aceasta înseamnă că din starea $s=0$ sînt posibile numai tranziţiile pentru care s' este de asemenea egal cu zero. După cum se vede din ultimele formule, acest lucru este posibil numai în cazul cînd mărimea $\gamma=\frac{n^2}{l}=\frac{n^2\Lambda}{\pi a}$, va fi mult mai mică decît unitatea ($\gamma\ll 1$), în caz contrar, trebuie să ţinem seamă de efectul de recul, care poate influenţa traiectoria electronului, fapt legat de posibilitatea tranziţiei în stările $s'\neq 0$.

Din condiţia $\gamma\sim 1$ găsim energiile $\mathcal{E}$ la care trebuie să ţinem seama de efectul de recul

$$\mathcal{E}\sim mc^2\left(\frac{amc}{h}\right)^{1/5}$$

ceea ce probabil se află la limita posibilităţilor de observaţie.

In cazul ultimei condiţii trebuie probabil revizuită şi problema coherenţei radiaţiei mai multor electroni, întrucît fiecare electron capătă noi grade de libertate (schimbarea funcţiilor radiale) prin tranziţiile cuantice.

In încheiere este interesant să ne oprim asupra istoricului descoperirii efectului nou al electronului „luminos".

Prezicerea noii radiaţii emise de electronii din betatron, poate părea la prima vedere într-o mare măsură banală deoarece mişcarea pe o orbită circulară stabilă este accelerată. De aceea este important de subliniat că primul punct esenţial al teoriei electronului luminos constă în demonstrarea mărimii apreciabile a pierderilor prin radiaţie, care cresc proporţional cu puterea a patra a energiei. Pentru o energie de ordinul a 100 MeV pierderea energiei prin radiaţie atinge $2^0/_0$ după Blewett (v. § 38) iar raza orbitei de 83 cm se micşorează aproximativ cu 3 cm.

Pentru o anumită energiei critică, pierderea de energie devine egală cu energia înmagazinată de electron. Existenţa unui plafon de funcţionare a betatronului constituie o a doua concluzie esenţială a teoriei [1]).

---

[1]) Acest fapt a fost clarificat chiar în prima lucrare (lucru cit.) asupra electronului luminos, lucrare care a fost rezultatul discuţiilor la unul din seminarele de la Universitatea din Moscova.

De aceea nu este de mirare că primele lucrări cu noul betatron de 100 MeV au fost consacrate elucidării rolului radiaţiei prezise. După o confirmare definitivă a existenţei noii radiaţii, proiectarea betatronului pentru energii ultraînalte fără instalaţii auxiliare devine, evident, neraţională. Pe de altă, parte betatronul va rămîne un aparat foarte eficace pentru obţinerea electronilor acceleraţi pînă la 100 — 200 MeV şi pentru obţinerea razelor Roentgen de frînare de aproximativ aceeaşi energie, produse prin ciocnirea electronilor cu ţinta din betatron.

In al treilea rînd, trecerea de la radiaţia unui electron izolat la radiaţia unui fascicul a ridicat obiecţiuni în legătură cu lipsa radiaţiei la curenţii circulari; a fost exprimată părerea că datorită interferenţei, un fascicul real de electroni într-un accelerator de tipul betatronului nu va radia în general. Totuşi radiaţia apare ca urmare a existenţei fluctuaţiilor în fasciculul de electroni, fluctuaţii care distrug distribuţia uniformă de tipul unui curent circular [1]. Ca urmare a fluctuaţiilor, radiaţia fasciculului de electroni din betatron constă, în partea ei principală, din suma radiaţiilor electronilor individuali.

Mai departe, după cum s-a arătat în § 40, această radiaţie are o distribuţie unghiulară foarte accentuată, îndreptată, în cazul ultrarelativist, înainte, în direcţia mişcării.

In sfîrşit, una din cele mai caracteristice şi substanţiale proprietăţi ale noii radiaţii este distribuţia ei spectrală. Pentru cazul ultrarelativist este radiată acum nu numai o undă fundamentală corespunzătoare radiaţiei dipolare, ci are loc o emisie considerabilă de armonici de ordin extrem de înalt, iar maximul energiei se situează la armonicele de ordinul $n \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$. In acest caz, spectrul apare practic continuu, deoarece diferenţa dintre frecvenţe este neglijabilă în comparaţie cu frecvenţa critică în domeniul căreia se emite majoritatea radiaţiei. De aici este clar că presupunerile iniţiale asupra radiaţiei microradioundelor şi căutarea acestora, de exemplu, de către Blewett, în condiţiile date au fost greşite, deoarece maximul radiaţiei pentru energia electronilor de zeci de milioane de electroni volţi trebuie să cadă în domeniul vizibilului. In completă concordanţă cu aceste concluzii destul de paradoxale asupra radiaţiei luminii vizibile, în laboratoarele lui Pollock (lucru. cit.) s-a reuşit, în sfrîşit, în 1947 să se înregistreze vizual într-un sincro-

[1]) Problema fluctuaţiilor a fost pentru prima dată examinată în discuţii de către I. P. Terleţki.

tron, — o modificare modernă a betatronului, — o luminiscenţă emisă de electronii în mişcare, de forma unei pete roşiatice la 30 MeV, — şi albăstrui-albe la 70 MeV, — atît de luminoase, încît acestea au fost vizibile la lumina zilei.

In legătură cu aceasta, trebuie remarcat că în opoziţie cu toate metodele indirecte de observaţie de pînă atunci a electronului, noua luminiscenţă descoperită este cea mai directă. Intr-adevăr, observarea scintilaţiilor sau a urmelor de particule în camera Wilson sau pe plăci fotografice, ca şi înregistrările cu ajutorul unui contor, permit constatarea sigură a existenţei sau trecerii particulelor, pe o cale indirectă, prin acţiunea lor asupra altor particule. In cazul efectului Cerenkov, electronul este observat mai direct, după radiaţia sa care este însă condiţionată de existenţa mediului. Numai la noul efect — pe care este raţional să-l numim fenomenul electronului „luminos", — se observă o luminescenţă care provine nemijlocit de la electron şi nu este condiţionată de mediul înconjurător. Termenul de „luminos" subliniază una din cele mai interesante proprietăţi ale noului tip de radiaţie pentru acceleraţii utilizabile în mod practic, corespunzînd la energii de zeci de milioane de electronvolţi.

Rezumînd aceste observaţii, se poate spune că cercetările teoretice şi experimentale au arătat o serie de proprietăţi specifice, în parte neaşteptate, ale radiaţiei prezise şi au demonstrat importanţa ei pentru funcţionarea acceleratorilor.

Este foarte interesant că noua radiaţie a electronului „luminos", privită la început ca o perturbare în funcţionarea acceleratorilor, s-a dovedit a fi la rîndul ei un fenomen interesant, care poate fi folosit în diferite feluri. Mai mult, fenomenul electronului „luminos" nu intervine numai în condiţiile de laborator. In cazul mişcării electronilor rapizi şi a altor particule care intră în compoziţia radiaţiei cosmice în cîmpul magnetic al soarelui şi stelelor, vom avea evident condiţii analoge cu cele din acceleratorii de tipul sincrotronului şi betatronului. Datorită acestui fapt, particulele cosmice încărcate trebuie să emită o radiaţie de unde electromagnetice. Nu este exclus faptul că o asemenea radiaţie cosmică să fie răspunzătoare, măcar în parte, de emisia radioelectrică a stelelor, descoperită recent [1]. In afară de aceasta trebuie observat că radiaţia intensă în cîmpul magnetic al Pămîntului de pildă, fixează o anu-

[1] V. de asemenea H. Alfven and N. Herlofson, Phys. Rev., 78, 616, 1950; H. O. Kiepenheuer, Phys. Rev. 79, 738, 1950.

mită limită energiei pe care o pot avea particulele care cad pe Pămînt, venind din spaţiul cosmic (pentru electroni — circa 10^{17}eV) [1].

Precizarea şi descoperirea fenomenului electronului „luminos" a arătat încă o dată, cu evidenţă, importanţa profundă a afirmaţiei lui Lenin că „electronul este tot atît de inepuizabil ca şi atomul" [2]. Intr-adevăr, electronul ca şi celelalte particule elementare, se caracterizează acum nu numai prin masa şi sarcina electrică, dar şi prin momentul magnetic, prin spin, prin tipul statisticii, proprietăţi ondulatorii, cvasisarcinile nucleare ce apar la interactiunea cu nucleonii etc., descoperite mai tîrziu. Toate aceste calităţi ale electronului (ca şi ale tuturor celorlalte particule), descoperite mereu se manifestă într-o mulţime inepuizabilă de proprietăţi de comportare mereu noi, ca de exemplu în fenomenele de difracţie a undelor electronice, în proprietatea transformării în alte particule, în absorbţia de către nucleele atomice (captura K), în posibilitatea de a emite lumină vizibilă cu proprietăţi speciale la mişcări cu viteze apropiate de viteza luminii etc.

Fără a intra în amănunte în problemele legate de acceleratori, vom indica pe scurt că în zilele noastre se construiesc instalaţii de accelerare foarte eficace bazate pe ideea lui Veksler [3] a variaţiei lente, auxiliare, a frecvenţei cîmpului electric într-un ciclotron (sincrociclotron sau fazotron) sau a introducerii într-un ciclotron a unui cîmp magnetic care variază lent. In mod analog se utilizează betatroane cu o accelerare suplimentară a electronilor cu ajutorul introducerii unui interval de radiofrecvenţe — aşa numitele sincrotroane. Aceste instalaţii s-au dovedit a fi mult mai puţin incomode şi mult mai economice în construcţie. Radiaţia electronului luminos a fost descoperită pentru prima dată tocmai într-un sincrotron (condiţiile de observare într-un betatron de 100 MeV au fost nefavorabile, datorită faptului că tubul vidat era acoperit cu un strat de argint netransparent).

---

1) И. Я. Померанчук, ЖЭТФ, **9**, 915, 1939.

2) V. I. Lenin, Materialism şi empiriocriticism, p. 295, Ed. P. M. R., 1948.

3) V. Veksler, Journ. of Phys. (U. S. S. R.), **9**, 153, 1945. V. de asemenea А. П. Гринберг, Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, 1949. Culegerile de referate ştiintifice: nr. I, Резонансные ускорители, ИЛ, 1948; nr. II, Бетатрон, ИЛ, 1948; Culegerea „Резонансные циклические ускорители элементарных частиц", ИЛ, 1950; Д. К. Слетер, Конструкция линейных ускорителей, УФН, **37**, 459, 1949.

In ultimul timp, fizica acceleratorilor s-a îndreptat iarăşi către diferiţi acceleratori liniari de tipul cu rezonanţă sau ghid de undă. Un avantaj al unor asemenea aparate este lipsa de pierderi apreciabile prin radiaţie, avantaj care se datoreşte mişcării rectilinii a particulelor şi mărimii neglijabile a acceleraţiei, în cazul dat, în comparaţie cu acceleraţia mişcării circulare.

CAPITOLUL V

MEZODINAMICA CLASICĂ

§ 44. Problema forţelor nucleare

a) *Modelul nucleului atomic*

Deoarece teoria interacţiunii particulelor s-a dezvoltat mai ales în legătură cu problema forţelor nucleare, ne vom opri ceva mai mult asupra acestei probleme.

După cum se ştie, pînă în 1932 se considera că nucleele sînt constituite din două tipuri de particule elementare cunoscute pe atunci: din protoni şi electroni. Acest model n-a putut însă să explice o serie de proprietăţi importante ale nucleului. Mai ales apăreau contradicţii nete în analiza spinului, statisticii şi a momentelor magnetice ale nucleelor. Momentele magnetice ale tuturor nucleelor sînt aproximativ de o mie de ori mai mici decît cele electronice şi ca ordin de mărime sînt egale cu magnetonul nuclear: $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi Mc}$, unde M este masa protonului. Protonul are momentul magnetic $\mu_p = +2{,}792\ \mu_0$ (Stern, Rabi, Hippel). Momentul magnetic al electronului este aproximativ egal cu magnetonul lui Bohr $\mu_B = -\frac{eh}{4\pi mc}$, mai precis: $\mu_e = \mu_B\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$, $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \approx \frac{1}{137}$. Este de neînţeles în ce mod momentele magnetice ale electronilor ar putea să apară complet compensate în toate nucleele.

De asemenea valorile spinilor nucleari şi caracterul statisticii nu se obţineau din modelul vechi. De exemplu, pentru nucleul azotului $^{14}_{7}N$ care a fost analizat amănunţit (presupus compus din 14 protoni şi 7 electroni) se obţinea un spin semi-întreg [1]) şi statistica lui Fermi, în timp ce în realitate aceste nuclee au un spin întreg $s=1$ şi se supun statisticii lui Bose. Această „catastrofă a azotului" şi alte exemple au obligat pe unii fizicieni să examineze chiar şi problema „pierderii" de către electoni a spinului lor sau inaplicabilitatea mecanicii cuantice la nucleu. O astfel de situaţie a impus efectuarea unei analize mai îngrijite a posibilităţii existenţei diferitelor particule în sistemele cu dimensiuni aşa de mici, cum sunt nucleele. Totodată s-a găsit că particulele uşoare, ca electronii (şi pozitronii) nu pot, în genere, să existe în nuclee, păstrîndu-şi individualitatea, deoarece energia lor proprie $\mathcal{E}=mc^2\sim 0{,}5\cdot 10^6$ eV este apreciabil mai mică decît energia de interacţiune din nuclee, care atinge cîteva milioane de electron-volţi pe particulă. In modul acesta emisia electronilor sau a pozitronilor la desintegrarea β, este o generare a acestor particule în mod cu totul analog cu emisia fotonilor de către atomi sau nuclee.

După descoperirea neutronului de către Chadwick în 1932 şi identificarea neutronilor în urma dezintegrării multor nuclee, o serie de autori au propus un model de compromis al nucleului, compus din protoni, electroni şi neutroni (Perrin şi Auger), care lasă, evident, nelichidate dificultăţile principiale indicate mai sus. In opoziţie cu aceasta a fost propus un model nucleonic al nucleului, compus numai din particule grele: protoni şi neutroni [2]). Numărul protonilor este determinat de numărul de ordine Z din sistemul periodic, iar numărul neutronilor N de diferenţa dintre numărul atomic A (Greutatea atomică în numere rotunjite) şi numărul de ordine Z, adică $N=A-Z$. Modelul nucleonic al nucleului arată că neutronul este o particulă elementară, care posedă un spin $^1/_2$ şi, în concordanţă cu valoarea semi-întreagă a spinului, se supune statisticii lui Fermi. Aceste proprietăţi ale neutronului au fost pe deplin confirmate de experienţă. Mai tîrziu s-a descoperit la neutron un moment magnetic, egal după Bloch cu [3]).

$$\mu_n=-1{,}913\,\mu_0.$$

[1]) După cum se ştie, spinul electronului şi al protonului, sau mai precis componenta spinului lor după o direcţie dată, este $s=\pm{}^1/_2$ în unităţi $h/2\pi$ şi aceste particule se supun statisticii lui Fermi. Pentru valori mai precise ale momentelor v. anexa.

[2]) Д. Иваненко, Culegerea „Атомное ядро", ГТТИ, 1934, pag. 51; de asemenea Nature, **129**, 798, 1932; C. R. Paris, **195**, 439, 1932.

[3]) V. tabela de momente nucleare a lui J. E. Mack, Rev. Mod. Phys., **22**, 64, 1950.

In acest fel dificultăţile modelului vechi se elimină imediat, deoarece, de exemplu magnetismul nucleelor este condiţionat de momentele proprii şi de momentele orbitale ale nucleonilor, care vor fi toate de ordinul magnetonului nuclear. Mişcarea nucleonilor este descrisă de mecanica cuantică şi s-a constatat că în mare parte este suficientă aproximaţia nerelativistă, adică, în particular, utilizarea ecuaţiei lui Schrödinger. Mai departe, s-a reuşit să se calculeze momentele magnetice ale nucleelor nu numai ca ordin de mărime ci, pentru nucleele uşoare, — chiar cu o precizie apreciabilă.

Nucleul de azot $^{14}_{7}N$ este în realitate compus din 7 protoni şi 7 neutroni, în total 14 nucleoni, ceea ce explică spinul întreg şi caracterul de statistică Bose. Deoarece numărul total al nucleonilor este egal cu greutatea atomică, modelul nucleonic, în conformitate cu experienţa, explică dintr-o dată valorile întregi (sau semiîntregi), ale spinului şi caracterul de statistică Bose (sau Fermi) la nuclee de greutate atomică pară (sau impară). Intr-adevăr, un număr par de valori ale spinului, de valoare $s_z = \pm {}^1/_2$ fiecare, dă un spin întreg. De asemenea nu este greu de arătat că un sistem cu un număr par (impar) de particule Fermi se supune statisticii lui Bose (Fermi). Trebuie subliniat că, conform teoremei fundementale ale lui Pauli (1939), statistica lui Fermi (Bose) rezultă cu necesitate pentru particule cu spin semiîntreg (întreg) [1]).

Să ne oprim asupra energiei de legătură. Fiecărui nucleon îi revine — în nucleu — în medie, o energie de 7—8 MeV, afară de nucleele mai uşoare decît particula α. Pentru deuteron, această energie de legătură este ceva mai mare de 1 MeV. Această valoare a energiei, de fapt negativă, reprezintă diferenţa raportată la numărul de nucleoni dintre energia potenţială negativă şi energia cinetică pozitivă şi coincide cu aşa numita fracţiune de îngrămădire sau defectul de masă care revine la o particulă şi este exprimat în unităţi energetice. Vom observa că această energie este cu mult mai mică decît energia proprie a nucleonilor $\mathcal{E} = Mc^2 \cong 918\,\mathrm{MeV}$. Totodată este important de subliniat, drept argument suplimentar în favoarea modelului nucleonic al nucleelor, că lungimea de undă asociată unui nucleon de o astfel de energie, care se poate calcula în mecanica nerelativistă, este

$$\Lambda = \frac{h}{p} \sim 2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm},$$

[1]) В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947, pag. 72.

ceea ce coincide tocmai, ca ordin de mărime, cu dimensiunile nucleelor şi a orbitelor nucleare (după cum în atom, lungimea de undă De Broglie a electronilor coincide, ca ordin de mărime, cu dimensiunile orbitelor $\Lambda \sim a \sim 10^{-8}$ cm). Pe de altă parte, lungimea de undă asociată electronilor, presupuşi intra-nucleari, care trebuie calculată cu formula relativistă, ar fi fost egală, pentru aceleaşi energii, cu

$$\Lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\mathcal{E}} \sim 2 \cdot 10^{-12}\,\text{cm},$$

ceea ce depăşeşte dimensiunile nucleelor, după cum lungimile de undă ale fotonilor radiaţi de atomi — dar care nu preexistă în atomi, — depăşesc dimensiunile lui.

In felul acesta, mărimile energiilor şi ale lungimilor de undă De Broglie, pledează iarăşi în favoarea modelului nucleonic. Trebuie în sfîrşit, să mai remarcăm, în seria de argumente în contra modelului vechi al nucleului, că prezenţa electronilor şi pozitronilor în nuclee, ar duce la o anihilare a lor şi la o radiaţie gama corespunzătoare, care nu s-a observat niciodată. Cele mai fundamentale fapte ale desintegrării β pledează de asemenea în contra prezenţei particulelor uşoare în nuclee, deoarece electronii şi pozitronii sînt eliminaţi întotdeauna nu în momentul dezintegării nucleelor, ci după un timp oarecare, în medie foarte lung faţă de perioadele nucleare (de la $T \sim 0{,}01$ s pînă la 10^8 s). Afară de aceasta, presupunerea existenţei electronilor şi pozitronilor în nuclee ne-ar obliga să acceptăm prezenţa unei bariere de potenţial, care i-ar reţine şi ale cărei dimensiuni ar trebui să fie totuşi absurd de mari.

Diversele încercări care au apărut din timp în timp şi au încercat să interpreteze neutronul ca o particulă compusă, alcătuită dintr-un proton şi un mezon negativ şi de a reduce prin aceasta forţele nucleare la forţe de schimb prin analogie cu forţele din molecula de hidrogen (Tamm-Landau), întocmai ca şi interpretarea neutronului ca o combinaţie de un proton plus un electron (Temple), nu au dat nici un rezultat pozitiv.

Inlăturarea contradicţiilor vechiului model, descoperirea multor legi empirice la care conducea noua reprezentare (Gapon, Heisenberg) [1]),

[1]) W. Heisenberg, Zeitschrift für Physik, 77, 1, 1932; Rapports du Congres Solvay, Paris (1934). E. Gapon, Zs. f. Phys., 84, 509, 1932; Г. А. Бете и Р. Ф. Бечер, Физика ядра, ч. I, Харьков, 1938; E. V. Spolski, Fizica atomică, Ed. Tehnică, 1953; Э. Разетти, Атомное ядро, Гостехиздат 1940; В. Гейзенберг, Физика атомного ядра, Гостехиздат, 1948; Н. А

precum şi descoperirea ulterioară (1932-1933) a fenomenului producerii de perechi de electroni şi pozitroni şi de transformare a lor în doi fotoni — toate acestea au dus relativ repede la recunoaşterea unanimă [1]) a noului model nucleonic al nucleului. Nici una din încercările ulterioare de întoarcere către un proton compus sau un neutron compus n-a avut succes.

Una din cele mai importante aplicaţii ale modelului nucleonic a fost teoria desintegrării β, dezvoltată, de F. Perrin şi mai ales de Fermi, pe baza ipotezei generării unei perechi de particule: electron (sau pozitron) şi neutrino, de către nuclee sau, corespunzător, absorţia electronului şi eliminarea unui neutrino de către nuclee prin captura K. Expunerea acestei teorii depăşeşte cadrul acestei cărţi şi ne vom mărgini aici la observaţia că teoria desintegrării β cere participarea particulelor încărcate în cîmpul nuclear, la examinarea căruia vom trece acum.

b) *Proprietăţile forţelor nucleare*

O problemă importantă, ridicată de modelul nucleonic al nucleului, este problema fundamentală a forţelor, care acţionează între proton şi neutron. Precizăm de la început, că pînă în prezent această problemă nu este definitiv rezolvată, cu toate că în analiza ei s-au obţinut succese foarte mari, atît în sensul elucidării naturii forţelor nucleare, cît şi în direcţia construirii unei teorii generale a interacţiunii tuturor particulelor şi a cîmpurilor. Cel mai substanţial progres este reprezentat, în primul rînd, de descoperirea posibilităţii interacţiunii prin particule cu masă de repaus finită, corespunzînd anumitor cîmpuri, şi în al doilea rînd, de prevederea şi descoperirea unei particule noi, mezonul, care transportă forţele nucleare, avînd o masă cuprinsă între masa nucleonilor şi cea a electronilor.

Inainte de toate se poate ajunge uşor la convingerea că nici un fel de cîmpuri de forţe, cunoscute pînă acum, nu sînt capabile să explice interacţiunile nucleare, independent de orice descriere detaliată a acestora. Intr-adevăr, cîmpul gravific (sau conform teoriei cuantice, particulele corespunzătoare — gravitonii) este foarte slab pentru particulele atomice şi nucleare, datorită maselor extrem de mici ale acestora şi a valorii neînsemnate a constantei gravi-

---

B e t h e, Elementary nuclear theory, New-York, 1947; E. F e r m i, Nuclear Physics, Chicago, 1950.

[1]) V. M. Laue, Geschichte der Physik, Bonn, 1949.

taţionale. Vom reaminti că forţa de atracţie newtoniană, de exemplu, pentru doi protoni este de aproximativ 10^{36} ori mai mică decît respingerea lor corcombiană:

$$\frac{e^2}{r^2} : \frac{\varkappa M^2}{r^2} = \frac{e^2}{\varkappa M^2} \sim 10^{36},$$

unde $\varkappa$ este constanta gravitaţională.

Forţele electrice dintre nucleoni nu intră în discuţie datorită neutralităţii neutronilor. Forţele magnetice (care apar datorită prezenţei momentelor magnetice) sînt de asemenea extrem de mici. Ca ordin de mărime, energia magnetică de intersecţiune a nucleonilor este egală cu $V \sim \mu_0^2/r^3$ unde μ_0 este magnetonul nuclear, $r \sim 10^{-13}$ cm, adică $V \sim 10^5$eV în loc de 10^7eV necesari. Afară de aceasta, interacţiunea magnetică nu este capabilă să dea stări stabile. Deoarece ultima împrejurare este esenţială pentru cele ce urmează, o vom elucida ceva mai detaliat.

După cum se ştie, în mecanica clasică şi cuantică este respectată teorema virialului, care spune că în cazul mişcărilor periodice ale particulelor, valoarea medie în timp a energiei cinetice T este legată de valoarea medie a energiei potenţiale V prin relaţia:

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_s x_s \frac{\partial V}{\partial x_s}}, \tag{44,1}$$

unde x_0 sînt coordonatele particulelor.

Dacă energia potenţială este o funcţie omogenă de coordonate de gradul n, atunci, pe baza teoremei lui Euler asupra funcţiunii omogene, avem în locul lui (44,1):

$$\overline{T} = \frac{1}{2} n \overline{V}.$$

De aici găsim pentru valoarea medie a energiei totale:

$$\overline{E} = \overline{T} + \overline{V} = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \overline{V}.$$

Pentru ca să fie posibilă o mişcare periodică stabilă, pentru legea $V \sim r^n$ cu $n<0$, trebuie ca $\overline{V}<0$ (deoarece $\overline{T}>0$) şi $\overline{E}<0$ (deoarece $|\overline{V}| > \overline{T}$) adică indicele de omogenitate n trebuie să fie mai mare decît -2. După cum se ştie, atracţia newtoniană sau coulombiană ($V \sim -r^{-1}$) ne dă orbite stabile, iar, de exemplu la interacțiunea a doi dipoli magnetici ($V \sim -r^{-3}$) stările stabile sînt imposibile. Cazul critic are, evident, loc pentru $n=-2$.

Din punct de vedere al mecanicii cuantice, imposibilitatea stărilor stabile la interacțiune (dipolară) se poate arăta de asemenea din următoarele considerații. Dacă particula s-ar mişca într-un domeniu de dimensiuni liniare r, atunci impulsul ei, conform relației de impreciziune ar avea ordinul de mărime

$$p \sim \frac{h}{r},$$

iar energia cinetică

$$T = \frac{p^2}{2m} \sim \frac{h^2}{mr^2}.$$

Prin urmare, în cazul cîmpului coulombian, — de exemplu, — atracția dintre particule $V = -\frac{e^2}{r}$ se compensează la distanțe mici prin creşterea rapidă a energiei cinetice, ceea ce duce la posibilitatea stărilor stabile. Din condiția $V \sim T$ se obține imediat ordinul de mărime corect al razei orbitei lui Bohr

$$r_0 \sim \frac{h^2}{me^2}.$$

In cazul energiei dipolare de interacțiune: $V = -\frac{\text{const}}{r^3}$, energia cinetică nu este în stare să compenseze creşterea celei potențiale şi stările stabile sînt imposibile.

Toate interacțiunile din atomi, molecule corpuri solide şi lichide, gaze, se reduc în ultimă instanță la forțe electrice şi, în parte, magnetice. Vom reaminti, că forțele electrice coulombiene, datorită cinematicii cuantice şi a complexității sistemelor de particule ce se supun — în cazul electronilor — statisticii Fermi, duc la apariția forțelor de dispersie, Van der Waals, a forțelor de schimb şi a altor forțe chimice. Pentru îngrămădiri mari de atomi începe să joace un rol apreciabil gravitatea, care prevalează la corpurile cereşti.

In felul acesta ne aflăm în fața problemei fundamentale, de a înțelege natura forțelor nucleare sau de a construi modelul lor atribuindu-le unui anumit cîmp, unor particule, sau unor combinații de particule noi. In secolul al 18-lea, o astfel de problemă n-ar fi părut probabil deosebit de dificilă şi s-ar fi introdus în ştiință, pur fenomenologic, forțe „nucleare" noi (sau fluidul corespunzător), alături de fluidul electric, magnetic, termic şi luminos (eter). Problema ar fi constant în alegerea unei expresii matematice fericită pentru noile forţe (analog legii gravitaţionale newtoniene). Fără să renunţăm la alegerea expresiilor reuşite pentru forţe, în împrejurările actuale trebuie totuşi, să legăm neapărat cîmpul nuclear considerat de o nouă combinare a unora din particulele deja cunoscute sau să admitem existenţa unor particule noi, corespunzătoare cîmpului nuclear.

Vom reaminti modelul actual al forţelor electrice. Două sarcini e şi e' apar legate una de cealaltă datorită faptului că una din ele crează în jurul ei un cîmp electric, iar cealaltă absoarbe acest cîmp şi invers, prima sarcină absoarbe cîmpul electric creat de sarcina a doua. Teoria cuantică a interacţiunii formulează aceeaşi stare de lucruri puţin diferit: ea vorbeşte despre o emisie virtuală a fotonilor, mai precis a pseudofotonilor — corpuscule ale cîmpului electrostatic longitudinal, — de către o particulă şi despre absorbţia lor de cealaltă particulă. In mod analog se explică forţele gravitaţionale newtoniene, datorite, conform tratării cuantice, emisiei şi absorbţiei gravitonilor.

Cu toate că concluziile teoriei cuantice, în cazul particular al sarcinilor sau al maselor în repaus, nu ne aduc nimic nou, reproducînd legea obişnuită a lui Coulomb

$$V = \frac{ee'}{r}\,[1],$$

sau a lui Newton:

$$V' = -\varkappa\frac{mm'}{r},$$

ele au totuşi o forţă heuristică enormă. Intr-adevăr, trebuie trasă concluzia că orice interacţiune poate fi transportată nu numai de cuantele cîmpului electromagnetic (sau gravific) cu masa de repaus nulă ci de asemenea şi de diferite particule cu masă finită. Această idee stă la baza întregii teorii actuale a interacţiunii, în particular la baza teoriei forţelor nucleare.

Vom formula proprietăţile empirice fundamentale ale noilor forţe, trimiţînd pentru amănunte la literatura specială asupra nucleului [2]).

---

[1]) Schimbul dintre sarcini cu cuante de lumină (fotoni), adică corpuscule ale cîmpului transversal, duce la partea lui Breit a interacţiunii (v. § 25).

[2]) În afară de bibliografia de la pag. 268[2]), 270 şi 271 v. de asemenea Г. Бете, Лекции по теории ядра, ИЛ, 1949; C. Weizsäcker, Die Atomkerne, Leipzig, 1937; А. Ахиезер и И. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950; L. Rosenfeld, Nuclear forces, Amsterdam — New-York, 1948.

1. **Forțele cu rază mică de acțiune.** Forțele nucleare, în conformitate cu datele privind dimensiunile nucleelor, reacțiile nucleare și defectele de masă, trebuie să fie forțe cu rază mică de acțiune, de ordinul $r \sim 10^{-13}$ cm; la distanțe mari ele scad rapid și devin neînsemnate în comparație cu forțele electrice. Totuși o oarecare influență a forțelor nucleare se manifestă în atomi asupra celor mai apropiate orbite electronice.

Dimensiunile nucleelor atomice au fost determinate, în primul rînd din teoria dezintegrării radioactive alfa (raza barierei de potențial pentru nuclee radioactive), apoi din examinarea reacțiilor inverse de bombardare a nucleelor cu particule încărcate și de asemenea, din analiza energiei de legătură în nucleele care se deosebesc prin înlocuirea protonului prin neutron. Afară de aceasta, pentru reacții cu neutroni rapizi, a căror lungime de undă De Broglie este mică în comparație cu dimensiunile nuclare, secțiunea eficace este, la limita energiilor mari, egală cu valoarea secțiunii geometrice a nucleului $\sigma = \pi R^2$. Toate aceste date permit stabilirea unei formule empirice pentru creșterea razei nucleelor în funcție de numărul nucleonilor, adică în funcție de greutatea atomică A:

$$R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} \text{ cm}.$$

Această formulă redă numai legea universală, fără a ține seama de abaterile de la nucleele cu A și Z par sau impar, sau de influența păturilor nucleonice.

Dearece

$$\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{const},$$

rezultă că densitatea substanței nucleare (sau intuitiv vorbind, a „lichidului nucleonic“) rămîne constantă și egală cu

$$\rho = \frac{AM}{\frac{4}{3}\pi R^3} \sim 10^{14} \text{ g/cm}^3$$

unde $M = 1{,}6 \cdot 10^{-24}$ g este masa protonului.

Vom reaminti acum că, conform mecanicii cuantice, fiecărei particule cu masă de repaus m i se asociază o lungime caracteristică, așa numita lungime de undă Compton

$$\Lambda = \frac{h}{mc}.$$

In modul acesta, razele nucleelor, R, sînt cuprinse între lungimea de unde Compton $\Lambda_n \cong 10^{-14}$ cm a particulelor grele (nucleoni) şi lungimea de undă Compton $\Lambda_c = 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ cm a particulelor uşoare (electroni-pozitroni)

$$\Lambda_n < R < \Lambda_c.$$

Caracterul de acţiune la mică distanţă a forţelor nucleare reiese din comparaţia defectelor de masă, adică a energiilor de legătură la deuteron ${}^2_1\mathrm{H}$ ($V = -2{,}19$ MeV, adică aproape 1 MeV pe particulă) la tritiu ${}^3_1\mathrm{H}$ ($V = -8{,}5$ MeV, adică aproximativ 3 MeV pe particulă) şi la particula α, ${}^4_2\mathrm{He}$ ($V = -28$ MeV, adică aproximativ 7 MeV pe particulă). La nuclee mai grele. energia de legătură variază între 7 şi 8 MeV pe particulă, atingînd valoarea maximă aproximativ la mijlocul sistemului periodic, scăzînd din nou pentru nucleele cele mai grele. Totodată facem abstracţie aici şi mai jos, ca şi în cazul razelor nucleare, de oscilaţiile valorilor individuale în defectele de masă ale nucleelor cu A par şi impar, precum şi periodicităţile atît în defectele de masă cît şi în alte proprietăţi nucleare (secţiunile eficace de captură a neutronilor, răspîndirea în natură, numărul izotopilor, momentele cvadrupolare, spinii, momentele magnetice etc.) care sînt probabil legate de umplerea unora dintre pături cu protoni şi neutroni şi poate de formarea unor structuri de tipul particulelor α. Faptul că începînd de la Heliu energia de legătură nu mai creşte indică înainte de toate, atingerea unei „saturaţii“ la acest nucleu (${}^4_2\mathrm{He}$), iar creşterea rapidă a energiei de legătură, de şapte ori, de la deuteron la heliu, la o mărire a numărului de particule numai de două ori, ar fi fost imposibilă la forţe cu acţiune la distanţă mare.

Rezumînd, se poate spune că forţele nucleare sînt cu *acţiune la mică distanţă*, cu o rază eficace de acţiune $r \sim 10^{-13}$ cm.

De aceea, limitîndu-ne la acest caracter — cel mai esenţial al forţelor nucleare — s-ar fi putut reprezenta potenţialul nuclear, din punct de vedere fenomenologic (descriptiv), printr-o funcţie arbitrară, depinzînd numai de r, adică ducînd la forţe centrale care scad suficient de repede cu distanţa. Calculele s-au efectuat, de exemplu, la o groapă de potenţial dreptunghiulară, avînd parametrii $V = -21$ MeV la $r < a$, $V = 0$ la $r > a$, $a \approx 2 \cdot 10^{-13}$ cm (în starea fundamentală a deuteronului). S-au utilizat de asemenea funcţiile potenţiale de forma: $V = -Ae^{-\alpha r}$; $V = -Ae^{-\beta r^2}$; $V = -A + Br^2$ (potenţial de oscilator) şi alte forme analoage, provizorii, cu parametrii aleşi pe baza datelor experimentale. Cu această ocazie s-a precizat că multe efecte nucleare, ca problema deuteronului, difuzia neutronilor de către protoni, desintegrarea α şi altele, nu depind prea mult, în domeniul energiilor relativ mici, de forma potenţialului forţelor cu acţiune la mică distanţă.

In particular, limitîndu-ne la forţe centrale cu acţiune la mică distanţă, obţinem pentru starea fundamentală a deuteronului o stare S de simetrie sferică; în realitate însă, starea fundamentală este un amestec de stare S şi o mică parte de stare D. Mai departe, difuzia neutronilor de protoni la energii mici, pînă la 10 MeV, are o simetrie sferică, ceea ce demonstrează atît caracterul de acţiune la mică distanţă al forţelor, cît şi caracterul lor esenţialmente central.

Desigur, folosirea unor astfel de forme arbitrare de interacţiune este complet nesatisfăcătoare din punct de vedere principial şi trebuie înlocuită printr-o formă univoc determinată pe baza teoriei cîmpului de forţe nucleare. Este important să subliniem de la început că teoria cîmpului de forţe nucleare duce la forţe cu acţiune la mică distanţă, ceea ce constituie succesul ei principal.

Aici şi în cele ce urmează vom folosi termenul teoria „de cîmp" a forţelor, pentru teoria cîmpului nuclear legat de anumite particule (care „transportă" interacţiunea), adică perechi de particule uşoare sau de mezoni individuali şi aşa mai departe, şi o vom compara cu teoria formal — fenomenologică a forţelor nucleare, care se mărgineşte doar la o alegere a unor potenţiale arbitrare, pe care le precizează ulterior cu ajutorul datelor empirice pe baza unei serii de proprietăţi ale forţelor nucleare.

2. **Forţele de spin.** Pînă acum ne-am limitat la o examinare a caracterului de acţiune la mică distanţă al forţelor nucleare, care este una din cele mai specifice caracteristici ale acestora. A doua clasă de proprietăţi ale forţelor nucleare este legată de dependenţa lor esenţială de spin. Aceasta reiese înainte de toate, din diferenţa apreciabilă între energia (egală cu $-2{,}19$ MeV) a nivelului stabil fundamental (^3S) a deuteronului, cu spinii protonului şi neutronului paraleli şi energia (egală cu $+0{,}064$ MeV) a nivelului virtual (^1S), corespunzător spinilor antiparaleli. Interacţiunea magnetică a nucleonilor este în sine prea slabă pentru a explica această distanţă mare dintre nivele, care are deci o altă cauză fizică decît o dedublare asemănătoare cu cea care apare la nivelele atomice ale electronilor. Dependenţa de spin a forţelor nucleare care se exercită între proton şi neutron rezultă nemijlocit şi din diferenţa care există

între secţiunea eficace de ciocnire a neutronilor cu moleculele ortohidrogenului şi cea de ciocnire cu parahidrogenul. Ortohidrogenul difuzează mai puternic neutronii decît parahidrogenul şi raportul secţiunilor eficace (σ_0 — pentru ortohidrogen, σ_p pentru parahidrogen) este, conform ultimelor experienţe,

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_p} \sim 30.$$

De prezenţa forţelor de spin se poate ţine seama fenomenologic, adăugînd la energia potenţială de bază $V_1(r)$, termenul $V_2(r)\,(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B)$, care caracterizează într-o oarecare măsură interacţiunea a doi dipoli cu spinii $\vec{\sigma}_A$ şi $\vec{\sigma}_B$ ($\vec{\sigma}$ coincide cu matricile lui Pauli) unde A şi B sînt indicii a doi nucleoni. Valoarea lui $V_2(r)$ poate fi aleasă din experienţă. Evident, $V_2(r)$ trebuie de asemenea să fie un potenţial al forţelor cu acţiune la mică distanţă. Din punct de vedere principial, acest procedeu este, de asemenea, nesatisfăcător. De aceea este important să subliniem chiar aici că teoria de cîmp a forţelor nucleare, aşa cum o vom arăta mai jos, duce nu numai la forţe cu acţiune la mică distanţă dar şi la forţe de spin.

3. **Forţele necentrale.** O altă proprietate importantă şi caracteristică a forţelor nucleare este caracterul lor necentral. Forţele nucleare, analog celor magnetice, depind nu numai de distanţa dintre nucleoni, dar şi de orientarea reciprocă a spinilor şi de raza vectoare care uneşte un nucleon cu altul, adică sînt forţe cvasimagnetice. Caracterul necentral al forţelor rezultă din existenţa unui moment electric cvadrupolar la deuteron, ${}^2_1H\,({}^2_1D)$, descoperit in laboratorul lui Rabi. Intr-adevăr, conform definiţiei cunoscute din teoria electricităţii, tensorul momentului cvadrupolar este dat de expresia

$$eQ_{nm} = e\,(3x_nx_m - r^2\delta_{nm}) \tag{44,2}$$

(v. de exemplu § 10), unde r este raza vectoare a protonului.

Elementul diagonal al acestui tensor determină un element de suprafaţă eficace, care caracterizează momentul cvadrupolar:

$$Q_{33} = (3z^2 - r^2).$$

In cazul cînd densitatea distribuţiei sarcinilor protonului este ρ, valoarea medie a „momentului cvadrupolar“ este egală cu

$$Q = \int \rho\,(3z^2 - r^2)\,d\tau = (3\overline{z^2} - \overline{r^2}). \tag{44,3}$$

Pentru forţele centrale, starea fundamentală este o stare S, pentru care

$$\overline{z^2}=\overline{y^2}=\overline{x^2}=\frac{1}{3}\overline{r^2}.$$

şi prin urmare, $Q=0$. De aceea, dacă starea fundamentală a deuteronului ar fi o stare pură S, momentul lui cvadrupolar ar fi nul, şi invers, descoperirea experimentală la deuteron a unui moment cvadrupolar, determinat de suprafaţa

$$\overline{Q}=+2{,}73\cdot 10^{-27}\ \mathrm{cm}^2,$$

demonstrează definitiv că starea fundamentală a deuteronului nu este o stare pură S. Semnul pozitiv al lui $\overline{Q}$ indică o distribuţie în „ţigară" alungită de-a lungul axei spinului a densităţii de sarcină. O analiză pe baza mecanicii cuantice mai arată că la starea ^3S se adaugă, aşa cum am mai văzut, o mică parte a stării ^3D, probabilitatea stării D fiind de $4^0/_0$.

Trebuie subliniat că influenţa forţelor necentrale se dovedeşte în general a fi neînsemnată nu numai pentru calculul stării fundamentale a deuteronului, ci şi, de exemplu, la difuzia neutronilor de către protoni, la captarea neutronilor de către protoni, la efectul fotonuclear pe deuteron şi la alte procese, dacă acestea au loc la energii mici.

De asemenea s-ar fi putut ţine seamă din punct de vedere formal, — fenomenologic, — de forţele necentrale, adăugînd la energia de interacţiune a forţelor centrale fără spin $V_1(r)$ şi a forţelor centrale de spin $V_2(r)\ (\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B)$ un termen de tip cvasimagnetic $V_3(r)\ S_{AB}$, unde

$$S_{AB}=3\,(\vec{\sigma}_A\vec{r}^0)\,(\vec{\sigma}_B\vec{r}^0)-(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B) \tag{44,4}$$

şi alegînd din nou din datele experimentale forma potenţialului V_3 cu rază mică de acţiune. Termenul $S_{AB}\frac{f^2}{r^3}$, concide ca formă cu expresia energiei de interacţiune a doi dipoli magnetici $f\vec{\sigma}_A$ şi $f\vec{\sigma}_B$. Desigur că din punct de vedere principial, acest procedeu este foarte puţin satisfăcător. Este de aceea important de subliniat că teoria de cîmp a forţelor nucleare duce, în mod natural, fără alte presupuneri suplimentare, la forţe necentrale. Mai mult decît atît, forţele necentrale au fost pentru prima dată introduse în teoria nucleară, încă înainte de experienţele lui Rabi, pe baza primului model al forţelor nucleare care se transmit prin perechi de particule beta. Ele se obţin, aşa cum vom arăta mai jos, şi în teoria mezonică a forţelor nucleare.

Mai tîrziu, folosind rezultatele teoriei de cîmp a forţelor nucleare, a fost posibil să se demonstreze că expresia energiei de interacţiune de forma

$$V = V_1(r) + V_2(r)(\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B) + V_3(r) S_{AB} \tag{44,5}$$

este cea mai generală, dacă se respectă toate cerinţele de invarianţă faţă de translaţii, inversiuni şi rotaţii atît a coordonatelor obişnuite cît şi a celor de spin precum şi independenţa de vitezele particulelor.

Aşa cum vom arăta mai jos, teoria de cîmp a forţelor nucleare duce la o formă determinată a potenţialelor cu raza de acţiune mică V_1, V_2 şi V_3, în locul alegerii lor din datele empirice, în aceasta constînd unul din avantajele ei esenţiale.

4. **Independenţa de sarcină.** O proprietate importantă a forţelor nucleare constă în egalitatea forţelor de interacţiune dintre nucleoni: proton-neutron, proton-proton, neutron-neutron; altfel zis, independenţa lor de sarcina electrică. Dovada experimentală o reprezintă experienţele de difuzie a protonilor pe protoni efectuate pentru prima dată de Tuve, la energii de aproximativ 1 MeV şi extinse apoi la energii mai mari. După cum se ştie, difuzia reciprocă a particulelor încărcate este reprezentată de formula lui Rutherford, care este confirmată de mecanica cuantică. Aşa cum a arătat Mott, considerarea identităţii particulelor duce la un termen suplimentar, al cărui semn este determinat de tipul statisticii.

Experienţele au arătat, în particular, că numărul protonilor de energie ridicată, difuzaţi sub unghiuri de 45°, este apreciabil mai mare decît cel prezis de teoria bazată pe interacţiunea pur electrică coulombiană. De exemplu, la energii de ~ 10 MeV difuzia a fost de 40 de ori mai mare; pe de altă parte, la o energie mică de 0,4 MeV, difuzia sub unghiuri de 45° este sensibil mai mică decît cea pur coulombiană.

Analiza unor astfel de experienţe, efectuată de Breit şi colaboratorii săi, a dus la concluzia că în afara forţei coulombiene de respingere, între doi protoni mai acţionează şi o forţă de atracţie cu caracter de acţiune la mică distanţă, care la energii mari, cînd protonii pot să se apropie şi mai mult unul de celălalt, întrece pe cea coulombiană. Pentru energii moderate este vorba numai de stările ^1S ale unui astfel de sistem. Datorită simetriei funcțiunii ψ față de coordonatele protonului, funcția de spin trebuie să fie antisimetrică, ceea ce exclude starea ^3S. Cu aceste noi forțe, situația poate fi caracterizată, din punct de vedere fenomenologic, de exemplu, printr-o groapă de potențial dreptunghiulară de rază $a=2{,}8\cdot10^{-13}$ cm și de adîncime $V_{pp}\cong11$ MeV.

Comparînd această valoare cu datele difuziei neutronilor pe neutroni, în aceeași stare ^1S, cînd — conform datelor experimentale $V_{pn}\cong11{,}9$ MeV, obținem o coincidență remarcabilă a energiilor de interacțiune V_{pp} și V_{pn} cel puțin în starea ^1S. Vom menționa că pentru starea ^3S adîncimea eficace a groapei de potențial dreptunghiular, la o interacțiune a neutronului cu protonul, este de 21,3 MeV, rezultat obținut pe baza analizei deuteronului. Din analiza defectelor de masă se poate conchide, de asemenea, că forțele dintre doi neutroni sînt aproximativ egale cu forțele nucleare dintre protoni. In modul acesta, generalizînd oarecum datele experienței (din starea ^1S la toate stările), ajungem la constatarea independenței de sarcină a forțelor nucleare la energii nu prea mari (v. mai amănunțit § 48b)[1]. Vom mai menționa că respingerea coulombiană, cu toată prezența forțelor nucleare de atracție, nu permite formarea unui sistem stabil de doi protoni.

Condiția de independență de sarcină a forțelor nucleare poate fi satisfăcută de cea mai simplă variantă a teoriei de cîmp a forțelor, neținînd seama de loc de sarcinile electrice și admițînd că toate interacțiunile dintre nucleoni care au aceleași cvasisarcini nucleare specifice g și aceleași cvasimomente f, sînt datorite legăturii lor cu cîmpul unor particule neutre. Dacă cîmpul nuclear ar fi legat numai de particule încărcate, satisfacerea condiției de independență de sarcină ar fi practic imposibilă.

5. **Forțele de schimb.** Ultima proprietate importantă a forțelor nucleare este caracterul lor de forțe de schimb, ceea ce rezultă din cunoscuta „saturație" a forțelor nucleare, care este exprimată, așa cum s-a arătat mai sus, prin creșterea în mare măsură proporțională cu numărul de nucleoni, a energiei de legătură (precum și a volumului nucleelor):

$$E=-\alpha A.$$

Toate datele arată ca nucleonii interacționează numai cu vecinii apropiați, în timp ce, de exemplu, în cazul forțelor coulombiene,

[1]) În legătură cu cele mai recente lucrări în acest domeniu v. Culegerea „Проблемы современной физики" No. 7, 1954. — N. Red. E. T.

fiecare poton interacţionează cu toţi ceilalţi, astfel încît energia totală de respingere creşte neliniar şi pentru un nucleu greu — aproximativ proporţional cu patratul numărului de particule.

$$\div Z(Z-1) \sim Z^2.$$

După ce prin formarea celor mai uşoare nuclee ${}^2_1H$, ${}^3_1H$, ${}^3_2He$ se atinge saturaţia la particula afla ${}^4_2He$, energia medie de legătură rămîne aproximativ constantă pe o regiune destul de mare din sistemul periodic $\alpha \sim 7$—8 MeV. După toate aparenţele, o energie potenţială de un anumit tip nu poate explica complet proprietăţile cîmpului nuclear, care împiedică „particulele" să interacţioneze cu un număr de vecini mai mare decît un număr dat.

Heisenberg a propus să se explice saturaţia prin caracterul de forţe de schimb al forţelor nucleare în analogie cu forţele chimice de schimb, care de asemenea duc la o anumită saturaţie, constînd în formarea moleculei biatomice de hidrogen H_2 şi în imposibilitatea formării moleculei triatomice H_3. Nu este greu de numit toate tipurile de forţe de schimb:

1) nucleonii la interacţiune pot să-şi schimbe între ei sarcinile sau, ceea ce se reduce la acelaşi lucru, spinii şi coordonatele (forţele lui Heisenberg);

2) la interacţiune, nucleonii pot să-şi schimbe între ei coordonatele (forţele lui Majorana);

3) în fizica nucleară forţele obişnuite fără caracter de forţe de schimb se obişnuieşte să fie denumite cîteodată forţele lui Wigner;

4) în sfîrşit, este posibil un tip de interacţiune, cînd nucleonii îşi schimbă numai spinii între ei (forţele lui Bartlett).

Deoarece descrierea cîmpului nuclear produs de particule încărcate şi care duce la schimbul de sarcini a nucleonilor nu se încadrează în teoria clasică, ne vom mărgini aici doar la cîteva observaţii.

Luînd în considerare succesul teoriei forţelor obişnuite (fără caracter de forţe de schimb) pentru procese de energie mică, cînd se consideră numai starea $S(l=0)$ trebuie trasă concluzia, că forţele de bază trebuie să fie de tipul lui Wigner sau Majorana; totuşi forţele obişnuite nu sînt în stare să asigure saturaţia. Afară de aceasta, forţele lui Bartlett, aşa cum s-a observat, duc la semne diferite ale energiei potenţiale în stările singlet şi triplet ale deuteronului, analog forţelor lui Heisenberg şi nu pot, din această cauză, împreună cu acestea din urmă, să joace rolul forţelor nucleare de bază. De aceea, pentru explicarea saturaţiei, la o tratare fenomenologică, este cel mai adecvat să luăm forţele nucleare în cea mai mare măsură de tipul Majorana, cu un adaos de forţe Heisenberg. Intr-adevăr, forţele Majorana singure nu sînt în stare să explice caracterul de forţe de spin al forţelor, în particular, diferenţa mare în energiile de legătură al stărilor ^1S şi ^3S ale deuteronului. Mai departe, forţele Majorana, duc, în concordanţă cu experienţa, la o configuraţie saturată, a nucleului de heliu ($_2^4$He) în timp ce forţele Heisenberg ar fi dat în mod eronat saturaţie chiar pentru deuteron, în care energia de legătură este egală numai cu 1 MeV pe particulă. In această variantă, o proporţie raţională se dovedeşte a fi amestecul de aproximativ 75% forţe Majorana şi 25% forţe Heisenberg. Totodată, desigur, nu se exclude prezenţa forţelor fără caracter de forţe schimb.

Toate aceste consideraţii fenomenologice asupra proprietăţilor empirice fundamentale al forţelor nucleare, nu au fost legate de o precizare a dependenţei radiale a potenţialelor V.

Tratarea fenomenologică a lui Heisenberg a forţelor nucleare, consta într-o analiză preliminară a caracterului de forţe de schimb al forţelor şi lăsa deschisă problema formei lui $V(r)$ la fel ca şi problema deducerii stricte a proporţiei amestecului de forţe. In acest caz, pentru calcule concrete, aşa cum s-a arătat mai sus, potenţialul se lua de o formă arbitrară, care să asigure caracterul de acţiune la distanţă mică al forţelor (groapă dreptunghiulară, potenţialul de oscilator, forma exponenţială şi aşa mai departe), iar proporţia forţelor se alegea pe baza datelor empirice. Desigur, procedeul acesta este foarte nesatisfăcător din punct de vedere principial. Vom mai remarca încă o lipsă a acestui ciclu de lucrări, datorită neglijării importantelor forţe necentrale în expresiile utililizate. De aceea trebuie subliniat că succesul principal al teoriei de cîmp a forţelor nucleare este introducerea firească a forţelor de schimb, de toate tipurile, într-o proporţie determinată, răspunzînd în acelaşi timp cerinţelor experienţei. Aşa cum vom vedea mai jos, aceasta este legată de faptul că în compoziţia cîmpului nuclear sau a particulelor care transportă interacţiunea, apar particule încărcate. In felul acesta, noi intrăm însă, aşa cum s-a notat mai sus, într-un anumit conflict cu condiţia independenţei de sarcină a forţelor, satisfăcută în modul cel mai simplu pe calea interacţiunii prin particule neutre. Se constată că ieşirea din acest impas se face prin utilizarea unui amestec din primele şi din cele din urmă.

Afară de faptul esenţial al explicării saturaţiei forţelor nucleare, influenţa forţelor de schimb se manifestă în diferite efecte la energii mari, cînd intră în joc stările cu $l \neq 0$ (stările $P-$, $D-$, ...), în care diferitele tipuri de forţe de schimb vor avea semne diferite. In particular, difuzia neutronilor foarte rapizi pe protoni, va fi — conform prevederilor teoriei — esenţial diferită în cazul forţelor de schimb şi ale celor obişnuite. Experienţe recente de difuzie a neutronilor de energie foarte mare (de aproape 100 MeV), pe nuclee, au arătat că protonii nucleari sînt emişi, în acest caz, cu aproximativ aceeaşi energie cu a neutronilor şi zboară înainte, adică schimbă locul cu neutronii. Aceasta demonstrează prezenţa unei fracţiuni foarte importante de forţe de schimb în cîmpul nuclear. La aceeaşi concluzie ne duce şi analiza difuziei protonilor pe protoni în intervalul 40—200 MeV (v. § 48b)[1].

La această introducere în problema forţelor nucleare vom adăuga că, aşa cum s-a văzut în ultimul timp, deoarece cîmpul nuclear este datorit — cel puţin în parte — mezonilor teoria trebuie să explice de asemenea problemele interacţiunii mezonilor cu nucleoni şi particulele uşoare (crearea şi absorbţia mezonilor de către nucleoni, desintegrarea mezonilor în particule uşoare şi transformările lor reciproce pentru o serie de tipuri de mezoni etc.). Afară de aceasta, teoria nucleului trebuie să dea explicarea legilor fundamentale ale dezintegrării radioactive β. Deoarece la dezintegrarea β, nucleele emit particule încărcate (electroni sau pozitroni împreună cu neutrino), teoria cîmpului nuclear neutru apare ca nesatisfăcătoare. Independenţa de sarcină a cîmpului nuclear n-ar permite — de exemplu — să deducem tendinţa observată la izotopii nestabili mai grei decît cei normali, cu radioactivitate artificială (de exemplu: ${}^{16}_{7}N$, ${}^{19}_{8}O$, ${}^{239}_{92}U$ şi aşa mai departe) de a radia electroni, iar pentru izotopii mai uşori decît cei normali (${}^{13}_{7}N$, ${}^{15}_{8}O$, etc.) tendinţa de a emite pozitroni. In cazul cîmpului nuclear încărcat „ruperea" din acesta a unor fragmente oarecari, sub formă de particule, apare posibilă. Caracterul cîmpului nuclear, de cîmp încărcat electric, permite de asemenea să se explice calitativ existenţa momentului magnetic negativ la neutron şi a unei fracţiuni determinate de moment necinematic, propriu, la proton, deoarece magnetismul acestor nucleoni se datoreşte în parte magnetismului cîmpului produs de ei, dacă acesta din urmă este

[1]) V. „Проблемы современной физики", Nr. 7, 1954. S-au studiat actualmente ciocnirile pînă la energia de 430 MeV. (N. Red. E. T.)

legat de sarcina electrică, care la rîndul ei, duce sigur la existența unui moment magnetic. Aceste considerații calitative subliniază imposibilitatea de a opera numai cu un cîmp neutru sau numai cu un cîmp încărcat.

c) *Teoria forțelor nucleare transmise prin perechi de particule*

Trecem la analiza teoriei de cîmp a forțelor nucleare. Deoarece, conform celor expuse mai sus, toate posibilitățile de descriere a forțelor nucleare prin cîmpuri cunoscute (sau prin particulele corespunzătoare acestora), adică prin cîmpul gravific sau electromagnetic, s-au dovedit a fi fără succes, s-au propus — înainte de toate — să se explice interacțiunea dintre nucleoni prin transportul forțelor nu de către corpuscule individuale cunoscute, ci de combinațiile lor anume de perechile de particule: electron-neutrino și pozitron-neutrino, care pot să fie emise și absorbite de nucleoni, nu numai virtual ci și efectiv la dezintegrarea β [1]). Interacțiunea nucleonilor se realizează atunci conform schemei:

0) starea inițială: proton-neutron (p,n);
1) starea intermediară: protonul elimină o pereche pozitron-neutrino și se transformă în neutron; avem deci doi neutroni și o pereche de particule ușoare (pozitron și neutrino) $(n,\ e^{*},\ \nu,\ n)$;
2) starea finală: neutronul absoarbe perechea emisă de proton și se transformă în proton; rămîne: un neutron și un proton (n,p).

Interacțiunea poate să se realizeze de asemenea prin emisia perechii electron-neutrino de către neutron și absorbția de către proton. Simbolic aceasta se reprezintă astfel:

0) $(p,\ n)$,
1) $(p,\ e^{-},\ \nu,\ p)$,
2) $(n,\ p)$.

Totodată protonul și neutronul își schimbă între ei sarcinile, sau, așa cum se vede direct, coordonatele precum și spinii.

Deoarece cîmpul perechilor de particule Fermi legate de sarcină, nu are un analog clasic, teoria forțelor transmise prin perechi electron-neutrino sau, altfel spus, prin forțele β poate fi numai

[1]) I. E. Tamm, D. I. Ivanenko. Nature **133**, 981, 1934; Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН, **3**, 361, 1936.

cuantică. Luînd drept punct de plecare energia de legătură cea mai simplă a nucleonilor cu cîmpul perechilor, anume cea dată de legea lui Fermi utilizată în teoria dezintegrării β, obținem energia de interacțiune dintre proton și neutron de forma

$$V = -\frac{g_F^2}{8\pi^2 chr^5}. \tag{44,6}$$

Aici g_F este cvasisarcina nucleară „de perechi" a nucleonilor. Această formă de interacțiune se aplică la domenii $r < \frac{h}{mc}$ $\left(\frac{h}{mc}\right.$ este lungimea de undă Compton a electronului$\left.\right)$; la distanțe mari interacțiunea scade și mai repede [anume: exponențial $\approx e^{-r(mc/h)}$].

Din punct de vedere principial, antineutrino (ν') și neutrino (ν), descriși ca și toate particulele de spin semiîntreg de ecuația lui Dirac, diferă între ei în interpretarea obișnuită; de exemplu ambele particule (ne puse încă în evidență cu siguranță, dar luînd incontestabil parte la procesele de dezintegrare β, captură K și desintegrare a mezonilor) pot avea momente magnetice de semn diferit. Majorana a propus o variantă a teoriei în care neutrino și antineutrino sînt identici. Observarea dezintegrării β duble ne permite să facem alegerea în mod principial între cele două variante ale teoriei. Pentru dezvoltarea ulterioară, neunivocitatea menționată este în general neesențială, cu excepția punctelor care vor fi specificate.

Expresia Fermi a energiei de legătură a nucleonilor cu cîmpul perechilor este de forma $U = g_F \psi_\nu^* \psi_e Q +$ conjugata complexă, în care Q este un operator care acționează asupra funcțiilor de undă ale nucleonilor și transformă protonul în neutron și invers.

Valoarea inițială a constantei de cuplaj cu cîmpul perechilor $g_F = 4{,}5 \cdot 10^{-50}$ erg$\cdot$cm^3, este astăzi mărită în concordanță cu ultimele date experimentale la $\sim 10^{-48}$ erg$\cdot$cm^3; ψ_e, ψ_ν sînt funcțiile de undă ale electronilor (pozitronilor) și particulelor neutrino (antineutrino). Chiar cele mai simple considerații dimensionale duc la o structură corectă a formulei (44,6) pentru interacțiunea nucleonilor, dacă ținem seama de faptul că această expresie trebuie să fie de gradul doi în raport cu svasisarcinile g_F, analog formulei lui Coulomb.

Construirea teoriei forțelor nucleare transmise prin perechi, în care a fost demonstrată pentru prima dată posibilitatea transportului interacțiunii prin particule cu masa finită, a constituit desigur un succes mare. Totodată au fost obținute nemijlocit forțele de schimb Heisenberg cu acțiunea la mică distanță; ulterior forțele de spin și necentrale, ca și forțele de schimb de diverse tipuri (Heisenberg, Majorana, Bartlett), au fost și ele incluse în mod natural în teorie. In afară de aceasta, pe baza primului model al forțelor nucleare, s-a reușit explicarea calitativă a prezenței momentului magnetic la neutron și necoincidența momentului protonului cu momentul nuclear (Wick)[1]. Esența acestei explicații, ca și metodele generale de calcul al forțelor nucleare, au fost transpuse apoi în teoria mezonică modernă a forțelor nucleare. Totuși, mărimea interacțiunii nucleonilor, datorită transportului prin perechi de particule ușoare, apare infimă ($V \approx -10^{-6}$ eV la $r \sim 10^{-13}$ cm, în loc de $V \approx -10^{+6}$ eV cerut de experiență) și forțele transportate de ele sînt doar o „copie“ a forțelor nucleare principale. Baza fizică a unei astfel de micimi a forțelor β este, evident, legătura lor cu dezintegrarea β, fenomen extrem de puțin probabil, se poate spune de frecvența „geologică“ în viața nucleelor, caracterizat printr-o constantă g_F neînsemnată. Vorbind intuitiv, în locul „schimbului“, extrem de rar de perechi de particule, trebuie evident, să avem schimbul foarte des al nucleonilor cu alte particule, a căror legătură cu cîmpul este mult mai puternică.

Vom observa că, în afară de aceasta, legea (44,6) nu poate duce — conform teoremei virialului — datorită creșterii foarte puternice a potențialului la distanțe mici $\left(V \sim -\frac{1}{r^5};\ r \to 0\right)$, — la o stare stabilă a deuteronului (proton plus neutron); ultima dificultate nu este însă, specifică pentru forțele transmise prin perechi și a putut fi eliminată provizoriu prin tăierea potențialului la o distanță

$$r_0 \sim 10^{-13} \text{ cm}.$$

Incercările de a explica forțele nucleare prin cîmpuri corespunzătoare transportului, prin perechi și alte combinații de alte particule cunoscute, de exemplu, perechea pozitron-electron sau doi neutrino (Tamm), n-au avut nici ele succes. Aceste ipoteze indicau totuși, posibilitatea necondiționării forțelor nucleare de cauzele dezintegrării β și prin aceasta pregăteau terenul pentru introducerea unei noi constane speciale de cuplaj a nucleonilor cu cîmpul nuclear, de mărime cerută.

[1]) В. Гейзенберг, УФН, **16**, 1, 1936.

Cu tot insuccesul esenţial menţionat, după apariţia teoriei forţelor β a început o perioadă nouă în teoria nucleului şi în dezvoltarea studiului general al interacţiunii, deoarece însăşi posibilitatea interacţiunii prin cîmpuri sau particule avînd masă de repaus şi nu numai prin cîmpuri gravifice sau electromagnetice, a fost demonstrată pentru prima dată în această teorie. Vom sublinia încă o dată, că această idee este foarte caracteristică pentru interpretarea recentă a interacţiunilor, care pot să se realizeze prin orice particulă avînd masă de repaus, cîmpuri fără masă de repaus şi diverse combinaţii de particule.

d) *Mezonul*

1) **Prevederea teoretică a mezonului.** A doua etapă a teoriei forţelor nucleare este legată de lucrările lui Yukawa (1935—1938) [1], care — păstrînd ideea de bază a transportului forţelor nucleare prin particule cu masa finită a propus unificarea într-un anumit sens a electronului şi neutrino-ului într-o particulă: mezon negativ, iar a pozitronului şi neutrino-ului într-un mezon pozitiv, şi prin aceasta explicarea interacţiunilor nucleare prin cîmpul mezonic, ipotetic în acea vreme, altfel zis prin particule noi — mezoni. Cu tot caracterul încă nedefinitiv al teoriei forţelor nucleare, acum nu există îndoieli că interacţiunile dintre nucleoni sînt condiţionate într-adevăr de anumiţi mezoni, fie încărcaţi, fie neutri. Schimbul nucleonilor cu mezoni încărcaţi se poate explica în modul următor: protonul, transformîndu-se în neutron, elimină un mezon pozitiv π^+ absorbit de neutron:

0) starea iniţială p, n,

1) starea intermediară n, π^+, n,

2) starea finală n, p,

sau invers, neutronul elimină un mezon negativ, absorbit apoi de proton. Dacă interacţiunea este transportată de mezoni neutri, la fel ca şi în cazul forţelor electromagnetice, nucleonii îşi păstrează evident sarcina lor.

Se mai presupune apoi că mezonii au un spin întreg şi că se supun deci statisticii lui Bose şi prin urmare, pot transporta interacţiunea „individual" ca şi alţi „bosoni" şi nu prin perechi, ca particulele cu spin semiîntreg din teoria forţelor β sau alţi „fer-

[1]) H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc., Japan, **17**, 48, 1935. Alte lucrări ale lui Yukawa şi ale colaboratorilor săi v. tot acolo anii **1937—1938.**

mioni". Intr-adevăr prin eliminarea unei particule de spin semiîntreg, nucleonii ar trebui să treacă într-o stare cu spin întreg, ceea ce este imposibil.

In varianta inițială a teoriei, Yukawa a examinat cei mai simpli mezoni încărcați fără spin, descriși de funcțiile de undă scalare.

Ulterior, au fost examinați atît mezonii încărcați cît și mezonii neutri (neutretto) de diverse mase, și în afară de aceasta, au fost examinați alături de mezonii scalari fără spin și mezonii pseudoscalari fără spin, precum și mezonii cu spin semiîntreg și spin egal cu 1. Legătura nucleonilor cu cîmpul mezonic se datorește faptului că ei posedă o constantă specifică de cuplaj cu acest cîmp sau o anumită cvasisarcină g. O serie de considerații simple duc la valoarea $g \sim 5e$, adică 5 sarcini electrice elementare (v. mai departe). Problema masei mezonilor va fi examinată mai jos; acum ne vom limita să indicăm că valoarea masei mezonice trebuie să fie intermediară între masa nucleonilor și a particulelor ușoare. Intr-adevăr, pentru ca mezonii — în calitate de particule ale cîmpului nuclear, neexistente efectiv în nucleu — să poată realiza interacțiunea dintre nucleoni, masa lor trebuie să fie de un număr suficient de ori mai mică decît cea nucleonică; pe de altă parte, așa cum a devenit deja clar din teoria forțelor transmise prin perechi de particule, caracterul de acțiune la mică distanță al forțelor este direct condiționat de existența masei de repaus la particulele care transportă interacțiunea. Pentru a asigura caracterul de acțiune la mică distanță al forțelor, vom introduce un factor de tipul $e^{-\frac{r}{\Lambda}}$ unde lungimea de undă Compton a particulelor, $\Lambda = \frac{h}{\mu c}$, trebuie să coincidă aproximativ cu mărimea razelor nucleelor, adică: $\Lambda \sim 10^{-13}$ cm, de unde rezultă că masa mezonului trebuie să fie egală aproximativ cu

$$\mu \sim 200\ \mathrm{m},$$

unde m este masa electronului.

Vom indica acum ipoteza suplimentară a lui Yukawa, nelegată direct de teoria forțelor nucleare, că mezonii pot fi cuplați cu particulele ușoare și nu numai cu cele grele, astfel zis, că electronul ($e-$), pozitronul ($e+$) și neutrino-ul ν (la fel ca și antineutrino ν') posedă niște cvasisarcini g', care asigură legătura lor cu cîmpul mezonic. Aceasta ar da posibilitatea mezonilor (mezoni μ, după cum se credea; v. mai departe) să se dezintegreze în perechi de particule după schema:

$$\mu^- \to e^- + \nu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu.$$

Desintegrarea mezonilor încărcaţi, care transportă interacţiunea nucleară, va fi privită ca o dezintegrare β. In însăşi teoria dezintegrării β nu se modifică nimic datorită unui asemenea model, care include mezonul în calitate de verigă intermediară.

$$n \to p + \mu^- \to p + e^- + \nu \quad \text{(dezintegrare electronică)},$$

$$p \to n + \mu^+ \to n + e^+ + \nu \quad \text{(dezintegrare pozitronică)}.$$

Schema de mai sus a dezintegrării β ar fi putut avea loc numai în cazul cînd spinul mezonului ar fi fost egal cu un număr întreg. Ultimele date (dezintegrarea mezonului μ în 3 particule, v. pag. 294) ne spun că schema lui Yukawa pentru dezintegrarea β necesită precizări, cu atît mai mult cu cît în transportul forţelor nucleare rolul fundamental îl jocă după cît se pare mezonii π care nu se dezintegrează direct într-un electron şi un neutrino.

Mai departe, din punct de vedere al taoriei mezonice moderne — independent de toate precizările ei — explicarea calitativă a magnetismului „propriu" al nucleonilor constă în următoarele: protonul fiind legat de cîmpul mezonic, radiază cuantele acestui cîmp (transformîndu-se într-un neutron plus un mezon pozitiv) şi le absoarbe din nou. Exact la fel, neutronul se „disociază" într-un potron plus un mezon negativ. Nucleonul se află în stare disociată aproximativ 20% din viaţa lui. Momentul magnetic al neutronului prin urmare, va fi egal aproximativ cu 20% din momentul magnetic al mezonilor negativi, deoarece putem neglija în această stare disociată momentul magnetic, apreciabil mai mic al protonului, care este mai greu. Exact la fel, la proton apare un moment magnetic pozitiv suplimentar, datorit momentului magnetic al cîmpului mezonic încărcat pozitiv.

In modul acesta, plecînd de la teoria forţelor nucleare, se prezice o particulă nouă de masă mijlocie, de spin întreg şi prin urmare, de tip Bose, creată de nucleoni şi de asemenea legată de particulele uşoare şi în acelaşi timp radioactivă în stare liberă.

Această remarcabilă prevedere a fost confirmată într-o anumită măsură în 1937, după descoperirea de către Anderson şi Neddermayer a mezonilor încărcaţi cu masă de cca 200 mase electronice, [mai exact $(212 \pm 4)\,m$] în razele cosmice, numiţi mai tîrziu mezoni μ şi în special după descoperirea mezonilor π, mai grei.

Observații minuțioase asupra componentei dure a razelor cosmice au arătat că majoritatea zdrobitoare a particulelor penetrante, posedă într-adevăr o masă mai mică decît cea a protonului, dar mult mai mare decît cea a electronului și, prin urmare, nu pierd atît de multă energie radiind prin frînare fotoni ca particulele ușoare. De aici denumirea lor: mezon (sau mezotron) de la grecescul „mezos“ — mediu (mijlociu). Alături de mezonii μ, în compoziția componentei penetrante intră, de asemenea, un mic număr de nucleoni care se mișcă cu energii relativiste.

2. Proprietățile fundamentale ale mezonilor[1])

Deoarece descoperirea și în mare măsură studiul mezonilor precum și studiul multor procese nucleare sînt legate de razele cosmice, să ne oprim mai îndelung asupra acestei probleme. Studiul mezonilor în razele cosmice și a mezonilor generați în condiții de laborator cu ajutorul acceleratorilor, efectuat în ultimii 3 ani, au lărgit considerabil și au precizat cunoștințele noastre anterioare asupra acestor particule. In ceea ce privește razele cosmice, interpretarea lor modernă poate fi rezumată sub forma cea mai succintă în modul următor. Cu toate că locul, timpul și mecanismul generării razelor cosmise primare nu sînt încă lămurite pe deplin, această problemă a ieșit totuși astăzi din impasul în care se găsea înainte, cînd se părea că cea mai sigură concluzie era concluzia negativă că nici stelele, nici soarele și nici alte corpuri sau procese fizice cunoscute nu pot fi surse de raze cosmice.

Astăzi, în particular prin lucrările lui I. P. Terlețki, s-a arătat că, cîmpurile electrice ale soarelui și stelelor, create de cîmpurile magnetice variabile, datorite existenței unor momente magnetice ce nu sînt paralele cu axa de rotație (accelerator cosmic de inducție, asemănător cu betatronul), pot într-adevăr să accelereze particule pînă la energii enorme. Accelerarea poate avea loc de asemenea, după Dawes, și în cazul cînd momentul magnetic este paralel cu axa de rotație a stelei, moment care acționează în acest

---

1) V. culegerea „Мезон“ под редакцией И. Е. Тамма, Гостехиздат 1947, precum și L. Janossy. Cosmic Rays, ed. 2., Oxford, 1950 (o traducere prescurtată în limba rusă a primei editii a apărut în anul 1949); E. Fermi, Nuclear Physics, Chicago, 1950; Д. В. Скобельцын, УФН, **41**, 331, 1950; culegerea de referate științifice seria 2, nr. II, Космические лучи., ИЛ, 1950; (Notă la corectură: v. de asemenea C. F. Powell, Reports Progress Phys., **13**, 350, 1950). V. de asemenea și cartea „Fizica radiației cosmice“, (rezultate recente), Wilson, — Moscova 1953, N. Red. E. T.

caz ca o maşină unipolară. Aceste ipoteze au căpătat o importanţă considerabilă după descoperirea de către Babcock a magnetismului la o serie de stele (Fecioara L 78 şi altele) la care intensitatea cîmpului atinge mii de gauss. Mai departe Fermi a observat că prin ciocnirea protonilor suficient de rapizi cu nori de materie interstelară, magnetizaţi după cît se pare, — particulele pot să fie accelerate suplimentar. După cum au subliniat Teller şi Richtmyer este foarte probabil ca particulele cosmice primare, înainte de a ajunge pe pămînt, să difuzeze destul de mult timp în spaţiu în special în interiorul galaxiei, fapt care asigură izotropia razelor cosmice. In modul acesta, chiar fără a apela la alte mecanisme, mai puţin verosimile sau posibile dar jucînd un rol auxiliar, ca de pildă modelul de „ciclotron ceresc" format după Alfven de stelele duble magnetizate, sau la existenţa radiaţiei de înaltă frecvenţă, datorită anihilării nucleonilor cu antinucleoni, nedescoperiţi şi încă ipotetici, sau la accelerarea particulelor în procesul de „explozie" a stelelor supranove, sau la accelerarea particulelor de cîmpuri cosmice ipotetice, sau în sfîrşit, la o accelerare şi mai puţin clară pe calea unor procese secundare care au loc la formarea elementelor chimice în stările primare ale evoluţiei stelelor — putem începe astăzi să construim într-un fel sau altul, tabloul originii razelor cosmice primare în trăsăturile lui generale [1]). Partea principală a razelor cosmice are o energie de cca 10^{10}eV; numărul particulelor cu energie mai mare scade după legea

$$dN = \frac{\text{const}\, d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^{1,9}}.$$

Spre deosebire de concepţiile mai vechi din deceniul al patrulea, observaţiile moderne nemijlocite, la înălţimi mari, cu ajutorul aparatelor cu înregistrare automată, fixate pe baloane şi ridicate pînă la 30 km, sau cu ajutorul rachetelor pînă la aproximativ 150 km, precum şi analiza efectelor geomagnetice, au dus la concluzia că particulele uşoare (electronii-pozitronii) nu există în razele primare, şi că razele primare sînt constituite în cea mai mare parte din protoni (Schein, Johnson, Vernov). Nici unul din mezonii cunoscuţi, ca şi neutronii, nu pot intra în compoziţia radiaţiei primare datorită instabilităţii lor.

Este important încă de subliniat că în razele cosmice primare, la altitudini mari, alături de protonii care constituie partea princi-

[1]) V. amănunte în articolele lui Я. П. Терлецки, ЖЭТФ, **19**, 1059, 1949 şi ter Haar, Rev. Mod. Phys., **22**, nr. 2, 119, 1950.

pală a radiației primare, au fost descoperite direct, în anul 1947 (Bradt, Peters și alții) nuclee de heliu (cîteva procente din numărul protonilor), de carbon, oxigen și alte nuclee ușoare (în total zecimi de procent din numărul protonilor), în concordanță, în general, cu prezicerea lui Terlețki.

Intrînd în atmosferă și reacționînd cu nucleele atomice (nuclee de oxigen și de azot), protonii de energie mare (10^9-10^{10}eV) expulzează din nuclee în primul rînd alți protoni și neutroni individuali, care avînd energie mare, se pot asocia la rîndul lor la radiația primară și să expulzeze nucleoni de a treia generație etc.; în al doilea rînd protonii și nucleonii din a doua generație pot „încălzi" nucleul și provoca evaporarea mai multor nucleoni, precum și a particulelor α și a altor fragmente de nuclee, cu alte cuvinte ei pot produce explozii de tipul „stelelor ", descoperite pentru prima dată de către A. P. Jdanov, cu ajutorul plăcilor fotografice cu emulsie groasă ale lui L. V. Mîsovski; în al treilea rînd, în procesul de ciocnire a unor nucleoni foarte rapizi se pot forma în același timp și mezoni. Cu alte cuvinte în timpul frînării se va produce o emisie de mezoni sau o „desprindere" a cìmpului mezonic de nucleoni foarte analoagă cu emisia de fotoni (adică cu desprinderea cîmpului electromagnetic) în cazul ciocnirii particulelor încărcate. Deosebirea esențială între aceste fenomene constă în faptul că în timp ce cîmpul electromagnetic desprins nu are masă de repaus și reprezintă un „cîmp" în sensul restrîns al cuvîntului, cîmpul mezonic radiat este legat de o masă de repaus, datorită căreia proprietățile lui corpusculare sînt mult mai accentuate; cu alte cuvinte mezonii sînt „particule" în sensul restrîns, obișnuit, al cuvîntului. După cum a arătat grupul lui Powell în 1948 prin analiza „stelelor" cosmice, nucleonii, ciocnindu-se cu nuclee, generează direct mezoni grei încărcați, de ambele semne, cu masă de 276 ± 4 mase electronice, numiți mezoni π (π=primary=primari)[1]. In afară de aceasta, s-a lămurit recent un fapt important: nu numai posibilitatea unei generări de mezoni π individuali, ci și posibilitatea unei generări multiple de mezoni π, la ciocnirea a doi nucleoni de energie foarte mare.

Ceva mai tîrziu, aceiași mezoni π au fost descoperiți de către Lattes și Gardener în condiții de laborator, bombardînd diverse ținte cu nucleoni și nuclee de heliu, cu energii de sute de milioane volți (pînă la 380 MeV pentru particule α) obținuți în fazotron[2])

[1]) Fermi propune pentru această particulă denumirea „pion".

[2]) V.: УФН, **34**, 450, 1948.

iar Mc. Millan a observat generarea mezonilor π^- şi π^+ la bombardarea nucleelor cu raze γ cu o energie de circa 335 MeV obţinute în sincrotron. La rîndul lor mezonii π reacţionează intens cu nucleele; mezonii π negativi, odată absorbiţi de nuclee (cel mai verosimil — pe calea unui proces de tipul capturii K de pe o orbită de tip atomic, pe care aceştia ajung mai întîi prin frînare, în mediul condensat în decurs de $\approx 10^{-12}$ s), formează şi ei stele (de aici provine denumirea lor veche de mezon σ, de la σ=star, adică generatori de stele. Dacă captarea s-a făcut pe o orbită de tipul hidrogenului, atunci se formează un atom sui generis de „mezo-hidrogen".

Un fapt foarte important a fost descoperirea dezintegrării mezonilor π în mezonii mai uşori μ, obişnuiţi, şi într-o particulă neutră, probabil neutrino sau posibil mezonul neutru uşor ν', conform schemei $\pi_{\pm} \rightarrow \mu_{\pm} + \nu$. Conform observaţiilor asupra razelor cosmice şt măsurătorilor directe de laborator, viaţa medie faţă de o asemenea dezintegrare este pentru mezonii π în repaus, de ordinul $T_\pi \sim 10^{-8}$ s[1]). Pe de altă parte, un studiu mai detaliat al mezonilor μ a arătat că ei nu se dezintegrează în două particule, aşa cum s-a presupus înainte [electron (pozitron) şi neutrino], ci în 3 particule[2]) dintre care două sînt neutre, adică neutrino sau posibil nişte mezoni neutri uşori. In modul acesta dezintegrarea mezonilor μ are loc după schema

$$\mu_{\pm} \rightarrow e_{\pm} + 2\nu \quad \text{sau} \quad \mu_{\pm} \rightarrow e_{\pm} + \nu + \nu'.$$

Dezintegrarea spontană a mezonilor μ a fost studiată în razele cosmice pe mai multe căi, a căror idee generală constă în compararea numărului de particule care se dezintegrează în timpul traversării unui strat de substanţă, aşezat odată pe un spaţiu mare (de exemplu în atmosferă), şi a doua oară concentrat într-un interval îngust (de pildă în apă). Pentru un mezon în repaus sau în mişcare lentă viaţa medie $T_\mu = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ s. Pentru particule rapide, în conformitate cu teoria relativităţii, viaţa medie creşte, în funcţie de viteză după legea

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

[1]) V. articolul de sinteză al lui А. Б. Мигдал şi Я. А. Смородинский, УФН, 41, 133, 1950.

[2]) Unul dintre primii care a ajuns la această concluzie a fost G. B. Jdanov şi A. A. Gaidarov (ДАН, 66, 257, 1949); mai amănuntit v. Culegerea de referate ştiinţifice seria 2, nr. II, Космические лучи, ИЛ, 1950.

Rasetti, apoi Auger și Rossi au putut determina T_μ în condiții de laborator la studiul dezintegrării mezonilor cosmici frînați într-un bloc de plumb.

Descoperirea noilor mezoni π, mai grei, care interacționează mult mai intens cu nucleele decît mezonii μ, a explicat faptul, aparent paradoxal, descoperit recent de grupul Piccioni și constînd în absorbția slabă de către nuclee ușoare a mezonilor μ obișnuiți, care constituie partea principală a componentei dure a razelor cosmice. Aici are loc reacția interesantă: $p+\mu \longrightarrow n+\nu$.

Menționăm că diverși autori anunță din cînd în cînd descoperirea unor mezoni de alte mase în razele cosmice, printre care și mezoni deosebit de grei τ, cu masă de circa 900 — 1 000 m (Leprince-Ringuet)[1], precum și mezoni τ neutri care se dezintegrează cu $T \sim 10^{-10}$ s, în două particule încărcate (grupul lui Anderson de la Rochester) sau mezoni ușori cu mase <200 m. Toate aceste observații sînt departe de a fi sigure[2], în afară poate de mezonii τ confirmați recent.[3]

---

[1]) V. articolul lui Leprince-Ringuet în culegerea „Le meson", Paris, 1945.

[2]) Ultima concluzie se referă și la așa numiții „varitroni" adică mezoni de diverse mase și sarcini (pînă la 20 000 m). Despre descoperirea experimentală a acestora s-a scris de nenumărate ori de către A. I. Alihanov și A. I. Alihanian cu colaboratorii (v. ЖЭТФ, **18**, 301, 1948; **19**, 1021, 1949). In orice caz imaginea generală a razelor cosmice se poate construi astăzi fără varitroni (v. de exemplu lucrarea de sinteză a lui D. V. Skobelțîn, УФН, **41**, 331, 1950) dat fiind spectrul lor de masă și răspîndirea lor (cîteva procente) în compozitia totală a componentei dure, fără a mai vorbi de faptul că teoria modernă nu prezice „varitroni" etc., cum de altfel nici nu îi exclude. Pe de altă parte este foarte probabil ca fizica modernă să fie departe de a epuiza toate particulele elementare, atît pe cele de mase medii cît și pe cele de mase apropiate de cea a nucleonilor.

„Supraparticulele" cu mase de cîteva ori mai mari decît masa nucleonului, pot fi prezise cu oarecare temei plecînd de la ipoteza posibilității existentei unor particule a căror interacțiune se face prin forte transportate de nucleoni, în analogie cu modul în care mezonii realizează cîmpul de forțe între nucleoni (v. Д. Иваненко, УфН, **3**[illegible], 306, 1947). Stările excitate ale nucleonilor, conform teoriei cuplajului puternic al nucleonilor cu cîmpul mezonic (Wentzel, Heitler, Ma), trebuie se aibă mase numai cu puțin mai mari decît masele nucleonice (v. de asemenea articolele lui I. E. Tamm, V. Ghinsburg și alții, în culegerea „Мезон", Гостехиздат, 1947).

[3]) N. R. In ultimul timp au fost descoperite atîtea particule cărora li se dădeau nume diferite încît a apărut necesitatea unei clasificări și unei „standardizări" a nomenclaturii. Aceasta s-a introdus în 1954 și a început să fie recunoscută peste tot (V. E. Amaldi, C. D. Anderson, ... Nature, **173**, 123 (1954) sau U. F. N., **53**, 289 (1954).

Astfel, particulele se împart în trei grupuri, după masa lor:

In sfîrşit, un fapt important a fost descoperirea recentă 1950 în razele cosmice şi în condiţii de laborator a mezonilor π_0 neutri (neutretto) relativ grei, cu masă de circa 270 m, de asemenea nestabili, cu tipul de viaţă $T_0 \approx 10^{-14}$ s care se dezintegrează în doi fotoni conform schemei.

$$\pi_0 \rightarrow 2\gamma.$$

Procesul se presupune că are loc datorită generării virtuale a perechii nucleon-antinucleon, şi anihilării ei cu transformarea în fotoni γ.

$$\pi_0 \rightarrow p + p' \rightarrow 2\gamma.$$

In legătură cu aceasta, reamintim propunerea provizorie, recentă, a lui Fermi, de a construi modelul mezonului ca particulă compusă, formată dintr-o pereche de particule strîns cuplate — nucleon şi antinucleon. Mezonii π_0 se formează la fel ca şi mezonii $\pi_\pm$ în procesul de ciocnire a nucleonilor sau a fotonilor γ cu nucleoni

---

α) Mezoni uşori sau mezoni — L (grupurile sînt notate cu litere latine mari). Acestui grup îi aparţin mezonii cu masă cel mult egală cu masa mezonilor π, adică $\pi^\pm$, π^0 şi $\mu^\pm$.

β) Mezonii grei sau mezonii —K cu masele cuprinse între masa mezonului π şi masa protonului.

γ) Particule cu masa mai mare decît masa neutronului, însă mai mică decît masa deuteronului, numite particule — Y sau hiperoni.

De asemenea, fiecare particulă în parte se notează cu litere greceşti (cu excepţia neutronului „n" şi protonului p), astfel încît mezonii L şi K se notează cu litere mici, pe cînd particulelele Y cu litere greceşti mari.

Printre mezoni K s-a stabilit cu siguranţă existenţa cel puţin a următoarelor tipuri:

Mezonii τ cu masa 977 ± 5 m şi care se dezintegrează după schema $\tau \rightarrow \pi^\pm + \pi^+ + \pi^-$ şi viaţa mijlocie de ordinul $\sim 10^{-9}$ s;

Mezonii $\varkappa$ care se dezintegrează într-un meson μ şi două particule neutre de natură necunoscută; mezonii χ care se dezintegrează după schema $\chi \rightarrow \pi^\pm + N^0$ (N^0 este o particulă neutră de origine necunoscută, cu masa $1\,450 \pm 100$ m) şi mezonii $\vartheta^0 \rightarrow \pi^\pm + \pi^\mp$ (sau μF) cu masa $\sim 800 - 1\,000$ m. Printre particulele Y a fost stabilită mai sigur existenţa particulelor Λ^0 — care se dezintegrează după schema $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, (ele posedă masa $\sim (2\,200 \pm 12)$ m şi se notau mai înainte cu V_1^0) — şi particulele $\Lambda^\pm$ care au masa apropiată de masa particulelor Λ^0 şi schema de dezintegrare posibilă:

$$\Lambda^+ \rightarrow n + \pi^+ \quad \text{sau} \quad \Lambda^+ \rightarrow p + \pi^0.$$

De altfel a mai fost anunţată şi descoperirea altor mezoni, dar existenţa lor nu este atît de certă ca existenţa particulelor de mai sus. — N. Red. E. T.

(Brückner, Steinberger, Panofski). Este interesant că viața medie mică a mezonilor π_0 neutri face ca în special aceste particule noi să fie răspunzătoare de generarea componentei moi electrono-pozitrono-fotonice din razele cosmice, componentă care este mai ușor absorbită. Alături de razele γ, datorite mezonilor π_0, componenta moale provine, de asemenea, de la electronii și pozitronii datoriți dezintegrării mezonilor $\mu_{\pm}$, de la electronii δ, — adică electronii smulși din atomi de particule cosmice, — de la tot felul de fotoni care se formează în procesul de emisie de frînare relativ neglijabilă a protonilor, a mezonilor $\pi_{\pm}$, a mezonilor $\mu_{\pm}$ și probabil și de la fotonii care apar la radiația de reîncărcare a protonului în neutron[1]) etc. Mai departe, razele de energie mare, ciocnindu-se cu nuclee generează după cum se știe, perechi de particule ușoare $\gamma+M_z \rightarrow M_z+e_{+}+e_{-}$, iar electronii și pozitronii la rîndul lor emit fotoni γ de frînare în cîmpul nucleelor, ducînd la jerbele moi, în cascadă, — bine studiate, — descoperite în anul 1933 de către Blackett[2]).

Trebuie observat că ipoteza generării de către nucleoni a mezonilor π_0 — care reprezintă particule inobservabile direct, spre deosebire de mezonii $\pi_{\pm}$ care pot fi detectați prin urmele lor în camera Wilson sau în plăci fotografice — precum și ipoteza dezintegrării lor în doi fotoni, a apărut mai întîi din imposibilitatea de a explica prin vreun mecanism cunoscut (radiația de frînare etc.) existența, alături de nucleonii din „stelele“ nucleare, a unui număr neașteptat de mare de electroni, pozitroni și probabil fotoni care i-au generat. Studiul acestor explozii mixte „electrono-nucleare“ care produc apoi jerbe electrono-nucleare corespunzătoare, a fost realizat cu succes, în special de către expediția în Pamir de sub conducerea lui D. V. Skobelțîn, V. I. Weksler, S. N. Vernov și N. A. Dobrotin. In afară de razele γ și de perechile electron-pozitron, în compoziția componentei moi intră, de asemenea, un număr de nucleoni și mezoni care se mișcă cu energii nerelativiste mici. La

---

[1]) Necesitatea acesteia din urmă a fost indicată recent de către Pomeranciuk și Smușkevici, precum și Hayakawa.

[2]) Teoria completă a jerbelor în cascadă, — care sînt procese electromagnetice, — a fost dezvoltată și perfecționată, după lucrările lui Heitler și Bhabha, Oppenheimer și Carlson, în special de fizicienii sovietici Landau și Rummer, Ivanenko și Sokolov, Tamm și Belenki. V. monografiile: С. З. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, Гостехиздат, 1948; Росси и Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом. ИЛ, 1949, și cartea citată a lui Janossy asupra razelor cosmice.

nivelul mării, razele cosmice, a căror intensitate scade aproximativ pînă la 0,1 din intensitatea primară, sînt formate din componenta dură, adică în special de mezoni μ (80%) şi în parte din componenta moale (20%).

Pentru fizica nucleară sînt evident foarte importante toate datele cu privire la fizica razelor cosmice; deosebit de importantă din punct de vedere al problemei forţelor nucleare este descoperirea după care cîmpul nuclear care înconjoară nucleonii este constituit în special din particule de greutate medie: mezonii π atît încărcaţi cît şi neutri. Intr-adevăr, vom sublinia încă o dată că mezonii π sînt generaţi şi absorbiţi de nuclee, direct, cu probabilitate maximă. Este evident că mezonii $\pi_{\pm}$ şi π_0 sînt în primul rînd transmiţători ai interacţiunilor intranucleare dintre nucleoni. Prin aceasta determinarea tuturor proprietăţilor fundamentale ale mezonilor π capătă o importanţă primordială: în primul rînd, — în afară de masa lor, — valoarea spinului.

După cum rezultă din însuşi faptul dezintegrării mezonilor π_0 în doi fotoni avînd fiecare un spin egal cu 1, spinul mezonului π_0 trebuie, după cît se pare, să fie egal cu zero. O stare de lucruri analoagă a fost lămurită şi în teoria „pozitroniului„ [1]), adică a unui sistem de tipul unui atom, încă nedesoperit direct, format dintr-un pozitron şi un electron, care se rotesc în jurul centrului lor de greutate comun, pînă la anihilarea lor reciprocă cu transformare în fotoni. In acest caz, sistemul parapozitroniu cu spin total egal cu zero, se transformă în doi fotoni ($T \sim 10^{-9}$ s), în timp ce ortopozitronlui, avînd spin egal cu 1, trebuie să se transforme în orice caz în trei fotoni — în aproximaţia nerelativistă ($T \sim 10^{-7}$ s)[2]).

Cel mai probabil este faptul că mezonul π_0 este pseudoscalar şi nu scalar (v. § 46), ceea ce este demonstrat în primul rînd de o coincidenţă mai bună a datelor experimentale cu prezicerile teo-

---

[1]) De cînd a apărut ediția rusească pozitroniul a fost descoperit experimental cu certitudine (v. Deutsch și alții: Phys. Rev., **82**, 455, **84**, 601, (1951), **85**, 1047, **87**, 217 (1952).

În legătură cu teoria pozitroniului v. Sokolov, Ivanenko „Teoria cuantică a cîmpului" cap. IV: cartea lui A. Ahiezer și V. Berestetki „Electrodinamica cuantică", cap. VI și A. Salpeter Phys. Rev. **87**, 328 (1952) — N. Red. E. T.

[2]) Vezi o serie de lucrări ale lui Ivanenko, Sokolov, Muhtarov, în ДАН și în Вестник МГУ anii 1947—1948; precum și Landau, Pomeranciuk în ДАН din 1948. Observăm că în timpul difuzării lor în substanță, mezonii π_+ și μ_+ lenți, pot, de asemenea, să se recombine cu electroni formînd un nou sistem de tipul atomului cu viața medie scurtă: „Mezotroniu". Pe de altă parte, particulele π_- și μ_- pot fi captate pe orbite atomice, analog electronilor.

riei pseudoscalare. In afară de aceasta, cele mai generale baze ale teoriei forţelor nucleare ne subliniază rolul esenţial al proprietăţilor de spin ale nucleonilor şi al cîmpului nuclear, adică în special a cîmpului π-mezonic, ceea ce nu ar fi putut avea loc în cazul cînd mezonii π ar fi scalari. Judecînd după concordanţa mai bună a prezicerilor teoriei pseudoscalare cu experienţa, mezonii $\pi_{\pm}$ încărcaţi, sînt de asemenea pseudoscalari şi prin urmare au spin 0.

Descoperirea mezonilor π_0 sau a cîmpului mezonic neutru, dă nu numai o bază mai reală teoriei moderne a forţelor nucleare, dar justifică de asemenea construirea teoriei pur clasice, a „mezodinamicii clasice", a cîmpului mezonic şi a interacţiunilor nucleare. Pentru mezonii $\pi_{\pm}$ încărcaţi, trebuie, riguros vorbind, o tratare cuantică, cu toate că multe rezultate fundamentale pot fi obţinute din teoria particulelor neutre. Subliniind rolul fundamental al mezonilor π ca particule a cîmpului nuclear, nu trebuie însă să excludem încă categoric — dat fiind caracterul nedefinitiv al teoriei forţelor nucleare cît şi al experienţelor din domeniul respectiv — posibilitatea participării altor mezoni, probabil mai uşori, în cîmpul nuclear, cu toate că eliminarea dificultăţilor teoriei forţelor nucleare nu este legată după cît se pare de introducerea altor mezoni. Datorită spinului întreg, statistica mezonilor π trebuie să fie de tip Bose. Deoarece nu este exclusă încă posibilitatea atît ca aceşti mezoni să fie scalari precum şi ca valoarea spinului lor să fie unu, este raţional să analizăm toate variantele de descriere, aplicabile unui spin întreg: 1) ecuaţie scalară sau pseudoscalară (spin 0); 2) ecuaţie vectorială sau pseudovectorială (spin 1).

Pentru descrierea mezonilor μ ca particule de spin probabil semiîntreg, trebuie, ca şi pentru electroni, să întrebuinţăm ecuaţia spinorială a lui Dirac. Nu avem nici un fel de motive să presupunem că mezonii au un spin mai mare decît 1. Totodată nu există nici un fel de motiv pentru a apela la funcţii de undă mai complicate pentru descrierea cîmpului mezonic, funcţii avînd un număr mai mare de componente decît vectorii cvadridimensionali.

Ipoteza suplimentară a lui Yukawa asupra legăturii dintre mezonii cîmpului intranuclear şi dezintegrarea β, a dus la prezicerea dezintegrării spontane a mezonilor liberi, confirmată într-adevăr de experienţă. Acum însă, înţelegem insuccesul construirii unei teorii cantitative riguroase care să permită să stabilească o corelaţie între dezintegrarea β şi dezintegrarea mezonilor μ, singurii cunoscuţi în anii 1937-1947. Timpul de dezintegrare a mezonilor $\mu_{\pm}$ în repaus, $T_{\mu}=2{,}15\cdot10^{-6}$ s, era prea mare în comparaţie că necesităţile teoriei dezintegrării β, ale cărei date duceau la valori $T \sim 10^{-8}$ s. Această valoare coincide ca ordin de mărime cu viaţa medie a mezonilor π descoperiţi recent. Aceştia din urmă însă, cel puţin în stare liberă, nu se dezintegrează într-un electron (pozitron) şi un neutrino, de aceea dezintegrarea cunoscută a mezonului π, atunci cînd ea are loc şi pentru acei mezoni π care transportă forţele nucleare, nu poate nicidecum servi ca explicaţie pentru dezintegrarea β [1]). Deoarece s-a dovedit că dezintegrarea mezonilor $\mu_{\pm}$ are loc în trei particule, mezonii $\mu_{\pm}$ nu pot fi nici ei consideraţi ca verigi intermediare în dezintegrarea β, chiar dacă aceşti mezoni iau parte la transportul forţelor nucleare prin perechi (de exemplu perechi de μ_{+} şi μ_{-} sau împreună cu neutrino μ_{+} şi ν etc). In felul acesta, deocamdată, — cu tot caracterul atrăgător al ipotezei asupra reducerii dezintegrării β la dezintegrarea mezonilor intermediari, care transportă interacţiunea nucleară, — trebuie să tratăm dezintegrarea β în mod fenomenologic, în spiritul teoriei lui Fermi, cu ajutorul unei constante independente g_F care leagă nucleonii cu cîmpul electrono-(pozitrono)-neutrinic.

Să ne întoarcem la teoria generală a mezonului. Pentru înţelegerea dezvoltării ulterioare a teoriei mezonilor şi a teoriei forţelor nucleare este necesar să subliniem, în primul rînd, că descrierea forţelor nucleare cu ajutorul mezonilor scalari, încărcaţi sau neutri, a devenit prea simplificată. Pentru a explica forţele nucleare necentrale şi pe cele datorită spinului, este necesar să legăm nucleonii de cîmpul mezonic care posedă anumite proprietăţi de spin, de exemplu, dipolare. Cea mai bună metodă este descrierea mezonilor cu ajutorul ecuaţiei pseudoscalare (spin 0) (prin mezonii π nou descoperiţi şi probabil pseudoscalari, aceste condiţii teoretice şi-au găsit o justificare reală), sau al ecuaţiilor vectoriale (spin 1). Pe această cale reuşim să ajungem la forţe de spin şi necentrale, în particular, să calculăm momentul cvadrupolar al deuteronului. Acelaşi ordin de mărime al forţelor, care acţionează între proton şi neutron, proton-proton şi neutron-neutron, cere insistent introducerea alături de mezoni încarcaţi şi a unor mezoni neutri (neutretto) care să poată transporta interacţiunea. Descoperirea mezonilor π_0 dă la rîndul ei un fond real acestei teorii. In mod obişnuit,

[1]) Recent au fost făcute încercări în acest sens de către Finkelstein şi alţii, care au introdus în consideraţii generarea virtuală intermediară a unei perechi de nucleoni împreună cu antinucleoni, conform schemei

$$\pi_{\pm} \rightarrow p_{\pm} + n \rightarrow e_{\pm} + \nu.$$

teoria se dezvoltă pe baza utilizării unui amestec de mezoni încărcați și mezoni neutri, cel mai frecvent în proporție egală, „simetrică". In sfîrșit, de multe ori s-au discutat diverse alte amestecuri, de exemplu, mezoni vectoriali și pseudoscalari, care realizează simultan un cîmp nuclear conform ipotezei lui Moller și Rosenfeld. Alți autori au folosit numai particule încărcate sau numai neutre și așa mai departe.

Totuși, pînă acum nu s-a reușit să satisfacă toate cerințele teoriei forțelor nucleare. In teoria forțelor nucleare există o dificultate esențială, legată de caracterul dipolar al cîmpului mezonic (atît cel vectorial, cît și cel pseudoscalar), care duce la apariția, — în energia de interacțiune, calculată pe cale clasică în cazul mezonilor neutri și pe cale cuantică în cazul mezonilor încărcați sau neutri, — a unor termeni avînd o formă cvasimagnetică, la distanțe relativ mici

$$V \sim r^{-3}.$$

După cum s-a mai arătat (v. teorema virialului), la o astfel de creștere rapidă a energiei de interacțiune la distanțe mici, nucleonii cad unul peste altul și nu există orbite stabile. Asemenea termeni dipolari apar în cazul calculului nerelativist; nu s-a reușit încă să se facă un calcul relativist riguros, cu toate că în cazul pseudovectorial și cel pseudoscalar (v. mai departe), termenii dipolari, în aproximația relativistă, au putut fi eliminați.

După cum va fi arătat detaliat mai jos, caracterul dipolar al mezonilor apare, de asemenea, la diverse efecte de difuzie: mezoni pe nucleoni, pe diverse alte particule (între care și fotoni) și pe mezoni. In acest caz, secțiunile eficace ale acestor procese cresc nelimitat odată cu creșterea energiei, ceea ce este desigur absurd. In cazul vectorial, dificultăți de genul acesta apar atît la interacțiuni electromagnetice, cît și la cele specifice nucleare, în timp ce în cazul pseudoscalar ajungem la dificultăți numai datorită efectelor nucleare. Din toate mijloacele propuse pentru îndepărtarea dificultăților dipolare la difuzie, s-a arătat a fi cel mai eficace și incontestabil cel care ia în considerare acțiunea reciprocă a cîmpului mezonic sau amortizarea particulelor de către cîmpul pe care-l emit, dezvoltat atît în teoria clasică a mezonilor neutri (Ivanenko și Sokolov, Bhabha), cît și în teoria cuantică a particulelor încărcate (Sokolov, Heitler, Willson, Gora). In toate cazurile, considerarea amortizării duce la micșorarea secțiunilor eficace la energii mari. Totuși, considerarea amortizării nu permite înlăturarea dificultăților dipolare.

Dealtfel în ultimul timp situaţia cu dificultatea dipolară s-a îmbunătăţit întrucîtva, deoarece pentru mezonii pseudoscalari s-a putut elimina această dificultate, cel puţin în a doua aproximaţie a calculului relativist, care ţine seama de viteza nucleonilor (v. § 46 şi § 48 b). Deoarece mezonii pseudoscalari în multe alte privinţe ne dau cea mai bună descriere a cîmpului nuclear, este raţional să-i punem pe aceştia la baza forţelor nucleare. Deoarece însă pînă astăzi nu există o siguranţă deplină în posibilitatea de a ne limita numai la acest cîmp, bazele teoriei forţelor nucleare trebuie analizate folosind toate cele patru cîmpuri de spin 0 şi 1.

In modul acesta cu tot succesul general în interpretarea mezonului, constînd în prevederea unei particule noi de masă mijlocie, a rolului ei în forţele nucleare şi a dezintegrării ei spontane, precum şi cu toată descrierea reuşită a unei serii de efecte, cu toată descoperirea nouă a mezonilor π încărcaţi şi neutri şi clasificarea dezintegrării mezonilor π şi μ, situaţia generală a teoriei forţelor nucleare şi a teoriei mezonilor rămîne deocamdată nesatisfăcătoare. Datorită acestei situaţii, diferitele efecte nucleare trebuie momentan calculate, cu o energie de interacţiune de o formă aleasă în mod artificial, care redă caracteristicile fundamentale arătate mai sus ale forţelor nucleare, în special plecînd atît de la datele asupra deuteronului, cît şi de la informaţiile asupra difuziei nucleonilor la energii mari de ordinul 100—400 MeV, sau trebuie să folosim forma mezonică de interacţiune, tăiată la distanţe mici. Din fericire, aşa cum s-a arătat mai sus, interpretarea multor fenomene importante nu depinde de forma mai precisă a interacţiunii. Prin aceasta, într-o anumită măsură, noi trebuie să folosim rezultatele orientării fenomenologice a teoriei forţelor nucleare, luînd totuşi drept bază—ceea ce este foarte esenţial,—toate rezultatele teoriei mezonice de cîmp.

Problema elaborării teoriei forţelor nucleare este, evident, una din cele mai importante în toată fizica modernă. Cunoaşterea legii precise de interacţiune dintre nucleoni, analoage legii lui Newton sau Coulomb, ar fi permis să calculăm orice efecte nucleare. Acum este încă neclar, dacă dificultăţile teoriei forţelor nucleare constînd în imposibilitatea de a da legii de interacţiune a nucleonilor o formă definitivă, rezidă mai ales, în cunoaşterea insuficientă a proprietăţilor mezonilor π, — care transportă în mare parte forţele nucleare sau a altor mezoni care posibil iau parte la transportarea cîmpului nuclear,—sau, în sfîrşit, dacă aceste dificultăţi sînt legate de problemele generale ale mecanicii cuantice relativiste a particulelor elementare, în particular, de dezvoltarea încă insuficientă a teoriei vidului mezonic şi nucleonic.

Pentru uşurarea analizei problemei forţelor nucleare vom începe expunerea teoriei cu varianta ei cea mai simplă şi anume: cîmpul nuclear mezonic scalar şi neutru. Avînd în vedere aplicaţiile probabile, dar totuşi neobligatorii, la orice mezoni neutri, în particular la mezoni π_0 (neutretto) pentru simplitate, vom denumi teoria expusă a cîmpului real — „mezodinamica clasică" [1]).

§ 45. Cîmpul mezonic scalar

a) *Forţele nucleare scalare*

Să examinăm cea mai simplă variantă a teoriei forţelor nucleare, variantă care asigură de la început independenţa lor de sarcină (în sensul § 44 a, pct. 4), şi care se reduce la a admite că forţele de atracţie dintre doi nucleoni oarecari rezultă dintr-un cîmp mezonic neutru, descris de o funcţie φ scalară şi reală (o singură componentă). Vom elabora teoria forţelor nucleare scalare în cadrul mezodinamicii clasice.

In această privinţă avem analogia cunoscută cu cîmpul gravific newtonian care duce la o atracţie care se exercită între două mase oarecari.

După cum se ştie, pentru determinarea potenţialului cîmpului newtonian (pe care-l vom nota de asemenea prin φ), generat de o masă punctiformă m, situată în originea coordonatelor, avem următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi\varkappa m\,\delta(\vec{r}), \tag{45,1}$$

unde $\varkappa$ este constanta atracţiei universale.

De aici, cu ajutorul ecuaţiei (10,11), cu condiţii la limită obişnuite, găsim valoarea potenţialului la distanţa r de sursă

$$\varphi = -\frac{\varkappa m}{r}, \tag{45,2}$$

iar pentru energia potenţială de interacţiune dintre două mase egale, situate la distanţa r una de cealaltă găsim

$$V = m\varphi. \tag{45,3}$$

[1]) Д. Иваненко и А. Соколов, ЖЭТФ, 10, 709, 1940.

Trecînd acum la forţele nucleare, nu putem să ne mărginim să substituim sarcina $m\sqrt{\varkappa}$ cu o sarcină mezonică specifică nouă g, a nucleonilor, sarcină care să asigure legătura acestor nucleoni cu cîmpul nuclear. Intr-adevăr, în acest caz am ajunge din nou la forţele cu acţiune la distanţă mare $V \sim \frac{1}{r}$, în locul forţelor cu acţiune la distanţă mică, cerute. De aceea înainte de toate, să înlocuim expresia (45,2) şi deci (45,3) prin formule care asigură cel puţin caracterul de acţiune la distanţă mică a forţelor căutate. In vederea acestui scop este suficient să schimbăm însăşi ecuaţia cîmpului (45,1), de exemplu în acelaşi sens în care au făcut-o Seeliger şi Neumann în teoria gravitaţiei (v. § 14). Prin urmare, este indicat să luăm ca bază în locul ecuaţiei de tipul lui Poisson, ecuaţia lui Seeliger, sau altfel zis, aproximaţia statică a ecuaţiei (20,1):

$$(\nabla^2 - k_0^2)\,\varphi = 4\,\pi g \delta(\vec{r}), \tag{45,4}$$

care duce la potenţialul forţelor cu acţiune la mică distanţă.

In acest caz, după cum s-a arătat în § 20, constanta k_0 trebuie să fie legată prin relaţia $k_0 = \frac{2\pi\mu c}{h}$, de masa μ a particulelor, care corespund cîmpului. In general, luînd în considerare dualismul corpuscul — undă a cărui expresie exactă se stabileşte în teoria cuantică, avem tot timpul în vedere atît cîmpurile, cît şi particulele care le corespund, de exemplu cîmpul electromagnetic şi fotonii, cîmpul mezonic şi mezonii, etc.

Pe de altă parte, pentru energia de legătură a nucleonului cu cîmpul mezonic, se poate păstra în întregime expresia de tipul (45,3), valabilă în aproximaţia nerelativistă statică pentru legătura unor particule oarecari cu cîmpul, legătură realizată prin intermediul unor „sarcini" oarecari. Substituind aici sarcina mezonică, obţinem

$$V = g\varphi. \tag{45,5}$$

In felul acesta, ecuaţia de mişcare nerelativistă clasică a nucleonului de masă M trebuie să fie de forma:

$$M\ddot{x}'_n = -\frac{\partial V}{\partial x'_n} = -g\frac{\partial \varphi}{\partial x'_n}. \tag{45,6}$$

Aceleaşi relaţii se obţin în mod riguros din acţiunea S, compusă din trei părţi (v. § 23):

$$S = S_1 + S_2 + S_3. \tag{45,7}$$

Aici S_1 este acţiunea pentru particula liberă (nucleon), care în aproximaţia nerelativistă are forma

$$S_1 = \frac{M}{2}\int v^2 dt', \tag{45,8}$$

unde $v^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2$, iar coordonatele nucleonului depind de timpul t'.

S_2 reprezintă acţiunea numai pentru cîmpul mezonic scalar real, şi este o funcţie care se exprimă prin integrala lagrangeanului L, — singurul invariant satisfăcînd condiţia de liniaritate a ecuaţiei şi condiţia ca ecuaţia cîmpului să conţină numai derivatele de ordinul doi ale scalarului φ:

$$S_2 = \int L\,(d\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi}\int (\varphi_\nu \varphi_\nu + k_0^2 \varphi^2)\,(dx), \tag{45,9}$$

unde $(dx) = dx\,dy\,dz\,dt$, iar x, y, z, t, sînt coordonatele cîmpului şi

$$\varphi_\nu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}.$$

Intr-adevăr, φ, şi deci şi φ^2, precum şi pătratul gradientului cvadridimensional $\varphi_\nu \varphi_\nu$ sînt invarianţi.

In sfîrşit, S_3 reprezintă termenul mixt al acţiunii, care determină interacţiunea cîmpului mezonic cu nucleonii, şi anume:

$$S_3 = -\int ds \int \rho\,(x - x')\,U(x)\,(dx). \tag{45,10}$$

Aici, mărimea U care în teoria relativistă joacă rolul energiei de legătură, este un scalar care se obţine după regula de formare a invarianţilor micşti, adică este egală cu suma produselor dintre scalarul cîmpului şi scalarul particulei, dintre vectorul cîmpului şi vectorul particulei, ş. a. m. d.

Pentru un cîmp scalar avem

$$U = g\varphi + f\,\frac{v_\mu}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu},$$

unde v_μ este viteza nucleonului, iar g şi f sînt „sarcinile" nucleare.

Folosind transformarea de etalonare specială (v. §§ 46, 48) sau limitîndu-ne pur şi simplu la aproximaţia nerelativistă, putem neglija, în general, ultimul invariant, proporţional cu viteza. Atunci

$$U = g\,\varphi. \tag{45,10a}$$

In aproximaţia nerelativistă pentru un nucleon punctiform, cînd putem pune timpul propriu s egal cu t' $(s=t')$ şi

$$\rho(x-x')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t'),$$

avem

$$S_3=-g\int dt'\int\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')\,\varphi(x)\,(d\vec{r})\,dt. \tag{45,11}$$

Pentru determinarea ecuaţiilor cîmpului, cînd există surse nucleonice, vom folosi numai funcţia S_2 (a cîmpului) şi S_3 (termenul de interacţiune):

$$S_2+S_3=\int L\,(dx), \tag{45,12}$$

iar funcţia lui Lagrange este acum:

$$L=-\frac{1}{8\pi}(\varphi_\nu\varphi_\nu+k_0^2\varphi^2)-g\varphi\int dt'\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t'). \tag{45,13}$$

Variind L în raport cu potenţialul φ obţinem, — folosind ecuaţiile lui Euler

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial\varphi_\nu}=0 \tag{45,14}$$

ecuaţia cîmpului mezonic scalar, generat de nucleoni punctiformi:

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k_0^2\right)\varphi=4\pi g\,\delta[\vec{r}-\vec{r}'(t)]. \tag{45,15}$$

In particular, în cazul static al nucleonului situat în originea coordonatelor, $\vec{r}'=0$, obţinem ecuaţia iniţială (45,4).

Tot aşa, ecuaţia de mişcare a nucleonului poate fi găsită din funcţiile S_1 (a particulei) şi S_3 (a interacţiunii):

$$S_1+S_3=\int L'\,dt'. \tag{45,16}$$

Funcţia lui Lagrange, nerelativistă, este:

$$L'=\frac{M}{2}\dot{x}_n'\dot{x}_n-g\varphi(\vec{r}',t'), \tag{45,17}$$

de unde, variind pe L' în raport cu coordonatele nucleonilor şi folosind ecuaţiile lui Euler:

$$\frac{\delta L'}{\delta x_n'}=\frac{\partial L'}{\partial x_n'}-\frac{d}{dt'}\frac{\partial L'}{\partial\dot{x}_n'}=0, \tag{45,18}$$

obţinem ecuaţia (45,6), care descrie mişcarea de translaţie a nucleonului în cîmpul mezonic.

Energia potenţială V de interacţiune a nucleonului cu cîmpul mezonic poate fi găsită din egalitatea

$$S_3 = -\int V dt', \tag{45,19}$$

din care obţinem iarăşi formula (45,5) pentru un nucleon punctiform în repaus.

In felul acesta, funcţia mixtă S_3 duce, în deplină analogie cu teoria maxwelliană, atît la expresia densităţii nucleonilor care generează cîmpul mezonic [v. membrul doi al egalităţii (45,4)], cît şi la forţa care acţionează din partea cîmpului mezonic asupra nucleonului [v. membrul doi al egalităţii (45,6)]. In cazul nostru, am introdus în S_3 numai termenul care descrie nucleonul punctiform însuşi. De aceea, membrul doi al ecuaţiei (45,6) reprezintă în fond forţa de autoacţiune; introducînd însă în funcţia acţiunii şi cîmpul exterior φ^i (v. de asemenea § 23), este uşor de arătat că forţa care acţionează asupra nucleonului din partea cîmpului exterior va fi

$$\vec{F}^i = -\operatorname{grad} g \varphi^i.$$

Cu ajutorul formulei (14,10) găsim din ecuaţiile (45,4) şi (45,5) următoarea expresie — importantă pentru întreaga teorie a forţelor nucleare, — a potenţialului cîmpului mezonic la distanţa r de sursă

$$\varphi = -g \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \tag{45,20}$$

De aici avem pentru energia potenţială la interacţiunea a doi nucleoni punctiformi, situaţi respectiv în originea coordonatelor şi în punctul $\vec{r}$, care interacţionează prin intermediul cîmpului scalar real

$$V = g\varphi = -g^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \tag{45,21}$$

La distanţe mari $r > \frac{1}{k_0} = \frac{h}{2\pi\mu c}$, care depăşesc lungimea de undă Compton $\Lambda_0 = \frac{1}{k_0}$, a mezonilor de masă μ, energia de interacţiune obţinută scade rapid şi devine practic nulă.

La distanţe mici însă, pentru $r < \frac{1}{k_0}$ se poate înlocui exponenţiala prin 1:

$$V = -\frac{g^2}{r}, \tag{45,22}$$

adică energia scalară de legătură a particulelor are forma energiei newtoniene de interacţiune gravifică dintre două mase.

Pentru ca în interiorul nucleonului ($r \approx 10^{-13}$ cm) să obţinem pentru energia de legătură o valoare acceptabilă, $V \sim 10$ MeV, trebuie să dăm sarcinii nucleare valoarea $g \sim 5\,e$.

Este important de subliniat că teoria cuantică a transportului interacţiunii printr-un cîmp real şi scalar (la fel ca şi în cazul cîmpurilor electrostatice şi gravitaţionale, precum şi pentru toate celelalte cîmpuri Bose reale, descrise de funcţii tensoriale şi nu spinoriale) şi prin particulele de spin întreg care corespund acestui cîmp, duce din nou la aceeaşi expresie care s-a obţinut şi pe cale clasică.

Insă în cazul interacţiunii protonilor şi a neutronilor prin cîmpuri încărcate Bose, descrise de funcţii complexe şi neavînd o analogie clasică directă, cum o au cîmpurile reale, mecanica cuantică duce la aceleaşi expresii pentru energia V' de interacţiune a nucleonilor, ca şi pentru cîmpuri neutre, însă înmulţită cu un factor suplimentar, aşa-numitul operator de schimb P [mai amănunţit vezi (45,47)]. Astfel, expresia obţinută pentru forţele scalare trebuie privită ca fiind definitivă pentru cîmpuri reale şi reprezentînd pînă la semn, în aproximaţia nerelativistă, mărimea interacţiunii pentru un cîmp încărcat.

Acest rezultat simplu şi intuitiv are o importanţă fundamentală în teoria modernă a forţelor nucleare. Intr-adevăr, considerînd transportul interacţiunii printr-un cîmp cu masa de repaus μ, căpătăm forţe avînd caracter de acţiune la distanţă mică, ceea ce reprezintă una din cele mai importante proprietăţi ale cîmpului nuclear.

Revenind la formula fundamentală (45,21) a teoriei forţelor cu acţiune la distanţă mică, vedem că alegînd în mod convenabil constanta k_0, — care reprezintă de fapt masa de repaus a particulelor cîmpului scalar ($k_0 = 2\pi\mu c/h$), — putem obţine anularea forţelor la distanţa cerută $r \sim 10^{-13}$ cm, (distanţă care coincide aproximativ cu valoarea razei clasice a electronului). De aici găsim că masa particulelor care transportă interacţiunea, este egală, ca ordin de mărime cu $\mu \approx 200$—300 mase electronice. In felul acesta, făcînd ipoteza că cîmpul nuclear este scalar şi legat de particule cu masă de repaus diferită de zero putem determina imediat ordinul de mărime al masei particulelor care transportă interacţiunea. Astfel se prezice existenţa unor particule elementare noi (în cazul nostru neutre) de masă mijlocie, intermediară între masa electronului şi a nucleonului. In acest caz, după cum s-a mai spus, teoria cîmpului scalar încărcat duce la aceleaşi rezultate în ceea ce priveşte ordinul de mărime al masei şi al sarcinei nucleare.

A devenit acum clar, că atît în teoria clasică, cît şi în teoria cuantică a forţetor, interacţiunea prin intermediul unui cîmp legat cu o masă de repaus, altfet zis, transportul interacţiunii prin intermediul unor particule cu masă finită, duce totdeauna la forţe cu acţiune la distanţă mică, de rază r_0, rază determinată de masa de repaus, şi anume:

$$r_0 \sim \frac{1}{k_0} = \frac{h}{2\pi\mu c}.$$

Aici, k_0 poate fi privit ca o constantă oarecare în ecuaţiile clasice ale cîmpului.

Astfel, cu ajutorul unui cîmp scalar, cu masă de repaus nenulă, reuşim să explicăm caracterul de acţiune la distanţă mică al forţelor nucleare de atracţie, caracterul de independenţă faţă de sarcină pentru un cîmp neutru şi de independenţă faţă de spin, în cazul unui cîmp încărcat.

b) *Teoria generală a cîmpului scalar*

Să dezvoltăm acum pe scurt relaţiile fundamentale ale teorie generale a cîmpului scalar [1]).

Mărginindu-se la început, pentru simplitate, la cazul cînd lipsesc sursele nucleonice, avem — conform (45,9) — următoarea expresie pentru acţiunea unui cîmp real liber:

$$S = \int L\,(dx), \tag{45,23}$$

unde lagrangeanul este

$$L = -\frac{1}{8\pi}(\varphi_\alpha \varphi_\alpha + k_0^2\varphi^2) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\left[(\nabla\varphi)^2 - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + k_0^2\varphi^2\right]. \tag{45,24}$$

De aici, variind pe L în raport cu funcţia de undă φ, obţinem pentru mezonii scalari în vid, ecuaţia

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\varphi_\alpha} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = 0, \tag{45,25}$$

care reprezintă un caz particular al ecuaţiei (45,15) în lipsa nucleonilor ($g=0$).

---

[1]) W. Pauli und V. Weisskopf, Helvetica Phisica Acta, 7, 809, 1934; Д. Иваненко и А. Соколов, Труды СибФТИ, 5, 32, 1937.

Să presupunem că pentru a rezolva ecuaţia undelor pentru particulele libere, funcţia de undă φ este supusă la condiţia de periodicitate în raport cu coordonatele spaţiale.

Notînd cu L lungimea laturii cubului de periodicitate, avem:

$$\varphi(x_n)=\varphi(x_n+L),$$

unde $n=1, 2, 3$.

Această condiţie de periodicitate o au, de exemplu, următoarele funcţii ortonormate:

$$f(\vec{n})=\frac{1}{L^{3/2}}e^{i\frac{2\pi}{L}\vec{n}\vec{r}}$$

unde

$$\vec{n}\vec{r}=n_1x+n_2y+n_3z.$$

iar n_1, n_2, n_3 sînt numere întregi, putînd lua orice valori pozitive şi negative, inclusiv valoarea 0.

Să introducem vectorul de undă

$$\vec{k}=\frac{2\pi}{L}\vec{n}.$$

Atunci condiţia de ortonormare capătă forma:

$$\frac{1}{L^3}\int\limits_V e^{i\vec{k}\vec{r}}\cdot e^{-i\vec{k}'\vec{r}}(d\vec{r})=\delta_{\vec{k}\vec{k}'}=\delta_{n_1n_1'}\delta_{n_2n_2'}\delta_{n_3n_3'},$$

unde integrarea se efectuează în raport cu volumul $V=L^3$. Funcţia de undă o scriem sub forma unei serii Fourier tridimensionale:

$$\varphi=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\vec{k}}A(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

unde suma triplă se ia în raport cu toate valorile posibile ale vectorului $\vec{k}$.

Substituind ultima expresie în (45.25), căpătăm următoarea ecuaţie diferenţială pentru determinarea coeficienţilor $A(\vec{k},t)$

$$\ddot{A}(\vec{k},t)+c^2K^2A(\vec{k},t)=0,$$

unde

$$K=\sqrt{k^2+k_0^2},$$

de unde găsim:

$$A(\vec{k},t)=A(\vec{k})e^{-icKt}+B(\vec{k})e^{icKt}.$$

Aici A şi B sînt constante arbitrare care pot depinde numai de vectorul $\vec{k}$.

Ţinînd seamă de faptul că funcţiunea φ este reală, trebuie să punem

$$B(\vec{k})=A^*(-\vec{k}).$$

De aceea soluţia generală a ecuaţiei scalare fără surse, are forma:

$$\varphi=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_k[A(\vec{k})\,e^{-icKt+i\vec{k}\vec{r}}+A^*(\vec{k})\,e^{icKt-i\vec{k}\vec{r}}],$$

iar în ultima sumă am înlocuit vectorul $\vec{k}$ prin $-\vec{k}$.

Soluţia ecuaţiei undelor poate fi găsită de asemenea pentru φ oarecare fără condiţia suplimentară de periodicitate a funcţiei φ.

In acest caz, soluţia poate fi scrisă sub forma unei integrale tridimensionale Fourier:

$$\varphi=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[A(\vec{k})\,e^{-icKt+i\vec{k}\vec{r}}+A^*(\vec{k})\,e^{icKt-i\vec{k}\vec{r}}]\,(d\vec{k}).$$

Substituind ultima expresie în (45,25), ne convingem uşor că ea reprezintă soluţia căutată.

Să găsim tensorul canonic al energiei (mai precis, tensorul densitate de energie — impuls — tensiuni).

Pentru aceasta ne folosim de următoarea identitate:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial\varphi_\beta}\varphi_{\beta\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\varphi}\varphi_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_\beta}\varphi_\alpha\right)-\varphi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial L}{\partial\varphi_\beta}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right),$$

de unde, luînd în considerare (45,25), găsim legea de conservare

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}T_{\alpha\beta}=0$$

pentru un anumit tensor de ordinul doi, care este tocmai tensorul energie căutat (vezi de asemenea § 30):

$$T_{\alpha\beta}=-\frac{1}{4\pi}\varphi_\alpha\varphi_\beta-L\delta_{\alpha\beta}.$$

Legea de conservare obţinută se găseşte în concordanţă cu teorema lui Noether, deoarece formarea tensorului canonic al energiei se datoreşte invarianţei lagrangeanului în raport cu translaţiile coordonatelor. Acest tensor canonic este simetric ($T_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha}$) şi de aceea trebuie să coincidă cu tensorul metric al energiei.

Pentru densitatea energiei avem expresia:

$$T_{44}=-\frac{1}{4\pi}\varphi_4^2-L=\frac{1}{8\pi}\left[(\nabla\varphi)^2+\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+k_0^2\varphi^2\right], \qquad (45,26)$$

care este pozitiv definită, în concordanţă cu teorema lui Pauli potrivit căreia densitatea de energie a cîmpurilor descrise de funcţii tensoriale (în cazul de faţă funcţii scalare) şi nu spinoriale, este pozitiv definită, cîmpurile fiind puse prin aceasta în corespondenţă cu particulele Bose de spin întreg [1]).

Pentru vectorul densitate a impulsului cîmpului scalar avem:

$$G_n=-\frac{T_{n4}}{ic}=-\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,. \qquad (45,27)$$

Celelalte componente T_{nk} dau „tensiunile“. Densitatea momentului cinetic al cîmpului scalar (v. de asemenea § 30 b) se găseşte — conform definiţiei generale — din egalitatea:

$$M_{[\alpha\beta]\gamma}=\frac{i}{c}(x_\alpha T_{\beta\gamma}-x_\beta T_{\alpha\gamma}). \qquad (45,28)$$

Simetria tensorului energiei $T_{\alpha\beta}$ asigură îndeplinirea legii de conservare pentru tensorul momentelor:

$$\frac{\partial M_{[\alpha\beta]\gamma}}{\partial x_\gamma}=\frac{i}{c}(T_{\beta\alpha}-T_{\alpha\beta})=0.$$

De aceea nu este necesar să adăugăm la tensorul momentelor $M_{[\alpha\beta]\gamma}$, momentul de spin al cîmpului, pentru ca momentul total (cel orbital plus momentul de spin), să satisfacă legea de conservare. Altfel zis, momentul de spin al cîmpului scalar este nul. Acest fapt poate fi interpretat fizic intuitiv, în sensul că dacă există o singură componentă, proprietăţile de polarizare lipsesc şi, prin urmare, conform dualismului cuantic corpuscul — undă, particulele care corespund cîmpului scalar nu trebuie să posede spin.

---

[1]) В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 947, pag. 72.

Să arătăm acum că condiţia de anulare a divergenţei tensorului $T_{\alpha\beta}$

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0$$

duce la legile de conservare ale energiei şi impulsului cîmpului.

Intr-adevăr, ultima egalitate poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\partial T_{\beta n}}{\partial x_n}+\frac{\partial T_{\beta 4}}{ic\,\partial t}=0.$$

Inmulţind ultima egalitate cu elementul de volum tridimensional $(d\vec{r})$ şi ţinînd seamă că prin integrarea extinsă asupra intregului spaţiu de volum V:

$$\int\frac{\partial T_{\beta n}}{\partial x_n}(d\vec{r})=0,$$

avem:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T_{\beta 4}(d\vec{r})=0,$$

adică pentru $\beta=4$ obţinem legea de conservare a energiei:

$$U=\int T_{44}(d\vec{r})=\text{const},$$

iar pentru $\beta=1,\ 2,\ 3,$ obţinem legea de conservare a impulsului.

Substituind aici în locul lui φ dezvoltarea în serie Fourier şi luînd în considerare că

$$\frac{1}{L^3}\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\int M(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\vec{r}}N(\vec{k}')\,e^{-i\vec{k}'\vec{r}}(d\vec{r})=\sum_{\vec{k}}M(\vec{k})N(\vec{k}),$$

vom găsi

$$U=\sum_{\vec{k}}\frac{K^2}{2\pi}A^{\star}(\vec{k})\,A(\vec{k}).$$

După cum era de aşteptat, termenii temporali nu intră în expresia energiei U.

In teoria cuantică energia particulei de impuls $\frac{h\vec{k}}{2\pi}$ este $\frac{ch}{2\pi}K$, de aceea punînd:

$$A(\vec{k}) = \sqrt{\frac{ch}{K}}\, a(\vec{k}), \quad A^{\star}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{ch}{K}}\, a^{\star}(\vec{k}),$$

avem

$$U = \sum_{\vec{k}} \frac{chK}{2\pi} a^{\star}(\vec{k})\, a(\vec{k}).$$

De aici se vede că mărimea $a^{\star}(\vec{k})\, a(\vec{k})$ trebuie privită drept numărul mezonilor scalari care au energia egală cu $\frac{ch}{2\pi}K$.

Să generalizăm acum parantezele lui Poisson, utilizate în mecanică în studiul mişcării unui sistem de puncte materiale, la cazul funcţiilor de undă ale cîmpului.

După cum se ştie, în mecanica clasică acţiunea are forma:

$$S = \int \bar{L}\, dt, \tag{45,29}$$

unde lagrangeanul $\bar{L}$ depinde de coordonatele generalizate q_i şi de vitezele

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{at}.$$

Introducînd noţiunea de impuls generalizat:

$$\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{45,30}$$

putem forma parantezele lui Poisson:

$$[A, B] = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{p}_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial \bar{p}_i} \right), \tag{45,31}$$

unde trebuie însumat în raport cu toate gradele de libertate ale sistemului de puncte materiale.

In particular, punînd în locul mărimilor A şi B coordonatele generalizate şi impulsurile generalizate, găsim:

$$\begin{aligned} [q_n, q_{n'}] = [\bar{p}_n, \bar{p}_{n'}] &= 0, \\ [\bar{p}_n, q_{n'}] &= \delta_{nn'}. \end{aligned} \tag{45,32}$$

De aici se vede clar că paranteza lui Poisson pentru două mărimi este egală cu unu, numai dacă aceste mărimi sînt conjugate canonic, adică dacă alegînd una din ele drept coordonată $q_i = B$, unitatea capătă ca mărime conjugată impulsul: $\overline{p}_i = A$.

Pentru a găsi parantezele Poisson ale funcţiilor de undă ale cîmpului, să transformăm expresia principiului variaţional (45,25) la forma (45,29):

$$S = \int \overline{L}\, dt, \tag{45,33}$$

unde

$$\overline{L} = \int L\, (d\vec{r}). \tag{45,34}$$

De aceea, după cum s-a arătat mai înainte, funcţia lui Lagrange L a cîmpului, reprezintă de fapt densitatea funcţiei lui Lagrange în sensul definiţiei mecanicii punctului material.

Drept coordonate generalizate trebuie să alegem funcţiile de undă φ.

In felul acesta, noi avem un continuu de valori ale funcţiilor de undă φ, corespunzătoare fiecărui punct al spaţiului.

Pentru simplitatea raţionamentelor, să împărţim întregul spaţiu în celule separate, fiecare dintre acestea fiind caracterizată prin trei numere $\vec{n}\,(n_1, n_2, n_3)$ sau prin raza vectoare $\vec{r}_n$.

Notînd volumul fiecărei celule prin:

$$\Delta V = \Delta x_{n_1} \Delta y_{n_2} \Delta z_{n_3}\ ^{1)},$$

putem pune lagrangeanul (45,34) sub forma:

$$\overline{L} = \sum_n L\, \Delta V,$$

unde densitatea funcţiei lui Lagrange L depinde de coordonatele generalizate

$$\varphi\,(\vec{r}_n) = \varphi\,(\vec{n})$$

şi de vitezele lor

$$\dot{\varphi}\,(\vec{n}) = \frac{\partial \varphi\,(\vec{n})}{\partial t}.$$

---

[1]) Pentru simplificare vom presupune că volumele tuturor celulelor sînt egale între ele.

Conform definiţiei (45,30), impulsul generalizat este:

$$\overline{p}\,(\vec{n}) = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{\varphi}\,(\vec{n})} = p\,(\vec{n})\,\Delta V, \tag{45,35}$$

unde mărimea:

$$p\,(\vec{n}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

poate fi privită ca impulsul cîmpului, sau mai precis, ca densitatea impulsului.

In cazul particular al lagrangeanului cîmpului scalar (45,24) densitatea impulsului este:

$$p = \frac{1}{4\pi c^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{45,36}$$

Parantezele lui Poisson (45,31) capătă, în cazul nostru, forma:

$$[A, B] = \sum_{n''} \frac{1}{\Delta V}\left(\frac{\partial A}{\partial p\,(\vec{n}'')}\,\frac{\partial B}{\partial \varphi\,(\vec{n}'')} - \frac{\partial B}{\partial p\,(\vec{n}'')}\,\frac{\partial A}{\partial \varphi\,(\vec{n}'')}\right). \tag{45,37}$$

Substituind în locul mărimilor A şi B coordonatele generalizate φ şi densitatea impulsului p, obţinem:

$$[\varphi\,(\vec{n}),\ \varphi\,(\vec{n}')] = [p\,(\vec{n}),\ p\,(\vec{n}')] = 0, \tag{45,38}$$

$$[p\,(\vec{n}),\ \varphi\,(\vec{n}')] = \frac{\delta_{nn'}}{\Delta V}; \tag{45,39}$$

cu alte cuvinte, parantezele lui Poisson se anulează dacă coordonata şi densitatea impulsului conjugat sînt luate în puncte diferite, şi tind către infinit, adică sînt egale cu funcţia δ, dacă sînt luate în acelaşi punct. Intr-adevăr

$$\lim_{\Delta V \to 0} \sum_{n'} \frac{\delta_{nn'}}{\Delta V}\,\Delta V = 1,$$

şi în afară de aceasta:

$$\int \delta\,(\vec{r} - \vec{r}')\,(d\vec{r}') = 1.$$

De aceea, cînd trecem la limită $\Delta V \to 0$, obţinem următoarea expresie pentru parantezele lui Poisson pentru cîmpul scalar:

$$\begin{gathered}[\varphi(\vec{r}, t), \varphi(\vec{r}', t)] = [p(\vec{r}, t), p(\vec{r}', t)] = 0, \\ [p(\vec{r}, t), \varphi(\vec{r}', t)] = \delta(\vec{r}' - \vec{r}).\end{gathered} \tag{45,40}$$

Ultimele paranteze Poisson (tridimensionale) sînt compuse din două funcţii de undă, care se referă la coordonate spaţiale diferite, dar la acelaşi timp.

Să facem o generalizare a parantezelor tridimensionale ale lui Poisson pentru cazul cvadridimensional, pentru care fiecare din funcţiile de undă trebuie să depindă de coordonata sa proprie şi de timpul său propriu (parantezele lui Poisson relativist-invariante).

Nu este greu de arătat că parantezele lui Poisson cvadridimensionale sînt legate de funcţia D (20,4):

$$D(\vec{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\vec{k}\vec{R}} \frac{\sin cT\sqrt{k^2 + k_0^2}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} (d\vec{k}), \tag{45,41}$$

$$[\varphi(\vec{r}, t), \varphi(\vec{r}', t')] = 4\pi c D(\vec{r} - \vec{r}', t - t'). \tag{45,42}$$

Intr-adevăr, ţinînd seamă de relaţia:

$$D(\vec{R}, 0) = \left[\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} D(\vec{R}, t - t')\right]_{t' \to t} = 0,$$

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} D(\vec{R}, t - t')\right]_{t' \to t} = \delta(\vec{R}),$$

putem obţine din (45,42) toate cele trei egalităţi (45,40).

De aici rezultă o concluzie importantă asupra invarianţei parantezelor lui Poisson cvadridimensionale, legată de invarianţa relativistă a funcţiunii D. După cum se ştie, cu ajutorul parantezelor lui Poisson se poate face trecerea de la mecanica clasică la cea cuantică.

In teoria cuantică, parantezele clasice ale lui Poisson trebuie să fie înlocuite prin parantezele cuantice definite de egalitatea:

$$[A, B]_{\text{cuant}} = \frac{2\pi i}{h}(AB - BA), \tag{45,43}$$

adică, în cazul cuantic, mărimile A şi B se consideră operatori, în general, necomutativi.

De exemplu, în locul parantezelor lui Poisson clasice din mecanica punctului (45,32) în mecanica cuantică avem:

$$\frac{2\pi i}{h}(p_x x - x p_x) = 1, \tag{45,44}$$

pentru cazul simplu $q=x$.

Pentru a satisface ultima relaţie, trebuie să alegem operatorul impulsului de forma:

$$p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},$$

funcţia asupra căreia acţionează operatorul fiind ψ.

In felul acesta, egalitatea operaţională (45,43) este echivalentă cu următoarea:

$$\frac{2\pi i}{h}[p_x(\psi x) - x(p_x\psi)] = \psi. \tag{45,45}$$

Exact la fel, pentru a trece de la teoria clasică a cîmpului la cea cuantică, trebuie să înlocuim parantezele clasice ale lui Poisson (45,40) prin cele cuantice, care se reduc pentru un cîmp scalar, conform (45,43) şi (45,36), la următoarele egalităţi operaţionale:

$$\begin{gathered}\varphi(\vec{r}, t)\,(\varphi(\vec{r}', t) - \varphi(\vec{r}', t)\,\varphi(\vec{r}, t) = \\ = p(\vec{r}, t)\,p(\vec{r}', t) - p(\vec{r}', t)\,p(\vec{r}, t) = 0, \\ p(\vec{r}, t)\,\varphi(\vec{r}', t) - \varphi(\vec{r}', t)\,p(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\frac{h}{2\pi i},\end{gathered} \tag{45,46}$$

unde, conform cu (45,36)

$$p(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

în cazul cvadridimensional relativist invariant trebuie să punem în locul ultimelor relaţii:

$$\varphi(\vec{r}, t)\,\varphi(\vec{r}', t') - \varphi(\vec{r}', t')\,\varphi(\vec{r}, t) = \frac{2ch}{i}D(\vec{r} - \vec{r}', t - t'), \tag{45,47}$$

ceea ce îndreptăţeşte considerarea funcţiei D ca funcţie de comutare.

In teoria cuantică funcţiile de undă φ şi derivatele lor, trebuie privite ca operatori acţionînd asupra unei funcţii care depinde de numărul particulelor asociate cîmpului respectiv.

c) *Cîmpul scalar complex*

Fără să intrăm în detalii, vom scrie acum cîteva relaţii fundamentale pentru cazul cîmpului scalar complex, care nu are un analog clasic atît de intuitiv, cum îl are cîmpul real şi care descrie sub aspect corpuscular particule încărcate (mezoni încărcaţi scalari, de spin 0) şi nu particule neutre. Teoria cîmpului complex este echivalentă cu teoria a două cîmpuri reale, egale respectiv cu partea reală şi imaginară a cîmpului complex. Lagrangeanul cîmpului complex are forma:

$$L = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} + k_0^2\varphi^*\varphi\right) \tag{45,48}$$

De aici, variind pe L în raport cu coordonatele φ^*:

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^*} = \frac{\partial L}{\partial\varphi^*} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\varphi^*_\alpha} = 0,$$

obţinem ecuaţia pentru funcţia de undă φ;

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = 0. \tag{45,49}$$

In acelaşi mod, variaţia în raport cu φ ne dă o ecuaţie de undă analoagă pentru φ^*.

Pentru tensorul energie-impuls, vom avea expresia:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}(\varphi^*_\alpha\varphi_\beta + \varphi^*_\beta\varphi_\alpha) - L\delta_{\alpha\beta}.$$

In particular, pentru densitatea de energie găsim iarăşi expresia pozitiv definită:

$$T_{44} = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla\varphi^*\nabla\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + k_0^2\varphi^*\varphi\right). \tag{45,50}$$

Cîmpul scalar complex (adică sub acest aspect corpuscular, menzonii încărcaţi fără spini) poate interacţiona cu cîmpul electromagnetic. Această interacţiune se poate descrie cel mai bine prin adăugarea la lagrangeanul cîmpului scalar liber şi al cîmpului electromagnetic liber a unei părţi mixte, construite după regula generală. Ca şi în celelalte cazuri de interacţiune a cîmpurilor încărcate cu cîmpul electromagnetic, acest adaos se reduce la termeni care se obţin prin înlocuirea componentei p_ν a impulsului, prin impulsul generalizat

$$P_\nu = p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu,$$

sau prin înlocuirea gradientului $\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, acţionînd asupra funcţiei mezonice, prin operatorul:

$$\nabla_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi ie}{hc} A_\nu \tag{45,51}$$

(A_ν sînt potenţialele cîmpului electromagnetic).

De aceea, funcţia lui Lagrange a cîmpului scalar, împreună cu partea mixtă care descrie legătura cu cîmpul electromagnetic, va avea forma

$$L = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{2\pi ie}{hc} A_\nu\right)\varphi^*\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi ie}{hc} A_\nu\right)\varphi + k_0^2\varphi^*\varphi\right\}.$$

De aici, cu ajutorul metodelor obişnuite, obţinem atît ecuaţiile pentru funcţiile scalare de undă însăşi (adică pentru mezoni încărcaţi) într-un cîmp electromagnetic, cît şi tensorul energie-impuls şi toate celelalte mărimi fundamentale care caracterizează cîmpul.

De exemplu, ecuaţia scalară pentru φ va avea forma

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi ieA_\nu}{hc}\right)^2 - k_0^2\right]\varphi = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Prin aceasta, acţiunea cîmpului electromagnetic asupra mezonilor scalari este complet descrisă. Pe de altă parte cîmpul scalar încărcat (adică mezonii încărcaţi de spin 0, care îi corespund) este el însuşi o sursă a cîmpului electromagnetic, astfel încît densitatea de sarcină — curent a cîmpului scalar trebuie să fie inclusă în membrul drept al ecuaţiilor Maxwell-Lorentz. Deoarece ecuaţiile Maxwell-Lorentz se obţin variind funcţia lui Lagrange în raport cu potenţialele electromagnetice, variaţia părţii mixte a lagrangeanului (care descrie legătura cîmpurilor scalar şi electromagnetic) în raport cu potenţialele ne dă vectorul cvadridimensional al densităţii de curent. Să scriem valoarea densităţii de curent, datorită cîmpului scalar încărcat (mezoni de spin 0):

$$j_\nu = \frac{\delta L}{\delta A_\nu} = \frac{ie}{2hc}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\nu}\varphi - \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right) - \frac{2\pi e^2}{h^2c^2}\varphi^*\varphi A_\nu,$$

sau, în lipsa cîmpului electromagnetic

$$j_\nu = \frac{ie}{2hc}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\nu}\varphi - \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right). \tag{45,52}$$

De aici se vede că pentru un cîmp real ($\varphi^* = \varphi$) curentul devine nul şi prin urmare — aşa cum s-a subliniat de atîtea ori — un astfel de cîmp descrie comportarea particulelor neutre.

Este uşor să ne convingem de faptul că vectorul densitate de curent satisface ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \tag{45,52a}$$

Vom observa că ecuaţiile cîmpului — după cum şi trebuie — sînt invariante faţă de transformările de etalonare (de calibrare), cu toată includerea potenţialelor electromagnetice în lagrangean.

Intr-adevăr, prin transformări de etalonare (de calibrare)

$$A'_\nu = A_\nu + \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

funcţiile noi vor avea forma:

$$\varphi' = \varphi e^{\frac{2\pi ie}{hc}f}\;;\quad \varphi'^* = \varphi^* e^{-\frac{2\pi ie}{hc}f},$$

unde f este o funcţie scalară arbitrară de cele patru coordonate.

Ne convingem uşor de justeţea acestor transformări folosind indentitatea:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi ie}{hc}A_\nu\right)\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi ie}{hc}A'_\nu\right)\varphi'.$$

Din punctul de vedere al teoremei lui Noether legea de conservare a curentului (adică ecuaţia de continuitate) corespunde invarianţei ecuaţiilor cîmpului scalar complex faţă de transformările de etalonare (de calibrare).

Atragem atenţia asupra expresiei densităţii sarcinii (45,52) $\rho = \frac{1}{i} j_4$ a particulelor scalare, pentru un cîmp electromagnetic nul ($A_\nu = 0$):

$$\rho = \frac{ei}{2hc^2}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\varphi\right). \tag{45,53}$$

Această expresie este nedefinită (adică poate avea atît valori pozitive, cît şi valori negative, spre deosebire de expresia cunoscută din teoria lui Schrödinger:

$$\rho = e\varphi^{*}\varphi,$$

care reprezintă o aproximaţie nerelativistă pentru expresia (45,53).

De aceea, în timp ce prin împărţirea cu sarcina se obţine, în cazul nerelativist, o expresie pozitiv definită, $\varphi^{*}\varphi$, care se interpretează ca o densitate de probabilitate, în cazul relativist o interpretare directă pentru ecuaţia scalară a mărimii $\frac{\rho}{e}$ — ca o densitate de probabilitate — este evident imposibilă. Această situaţie, împreună cu faptul că ecuaţia scalară duce într-un cîmp coulombian la nivele de energie ale particulei corespunzătoare de spin 0, care nu concordă cu formula lui Sommerfeld pentru structura fină a nivelelor de energie a electronului — formulă confirmată de experienţă, i-a servit lui Dirac ca bază pentru a considera de la început însăşi ecuaţia scalară ca fiind greşită. Dirac a început să caute o nouă ecuaţie relativistă punînd la baza teoriei o expresie pozitivă definită a densităţii de probabilitate $\psi_{\nu}^{*}\psi_{\nu}$, în care funcţia de undă a fost luată acum cu mai multe componente, necesare pentru descrierea proprietăţilor de spin. S-a lămurit ulterior însă că ecuaţia scalară nu este aplicabilă, desigur, pentru descrierea electronului şi a altor particule cu spin, dar ea este în stare să descrie pe deplin particulele de spin 0 care au, în mod natural, alte nivele de energie în cîmpul coulombian, de exemplu, al nucleului.

După cum a arătat Pauli (în 1939), faptul că densitatea sarcinii este nedefinită, reprezintă de asemenea o lege generală pentru densitatea de sarcină a oricăror particule Bose de spin întreg, descrise de funcţii tensoriale obişnuite (scalari, pseudoscalari, vectori, etc.) şi nu de funcţii spinoriale. Pe de altă parte, densitatea de energie pentru particule Bose va fi totdeauna pozitiv definită (de exemplu pentru mezoni scalari şi vectoriali).

Mai departe, s-a lămurit că cîmpurile complexe descriu particule încărcate cu sarcini de ambele semne, astfel încît faptul că densitatea sarcinii este nedefinită, exprimă la urma urmelor faptul banal că sarcina totală este egală cu diferenţa sarcinilor; aceasta reiese clar după o interpretare corespunzătoare a părţilor funcţiilor de undă ψ_{ν} şi ψ_{ν}^{*}, legate de particulele încărcate cu sarcini de semn contrar.

§ 46. Cîmpul mezonic pseudoscalar

a) *Pseudotensori*

In teoria modernă a cîmpurilor ondulatorii şi a particulelor elementare, un rol destul de important îl joacă folosirea funcţiilor de undă duale scalarului, vectorului, etc.

Pentru a construi mărimile duale, să examinăm tensorul de ordinul IV $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, antisimetric faţă de orice pereche de indici, adică: $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varphi_{\beta\alpha\gamma\delta}$, etc. Toate componentele acestui tensor cu doi indici egali trebuie să fie nule, întrucît conform definiţiei, avem de exemplu: $\varphi_{11\gamma\delta} = -\varphi_{11\gamma\delta}$. Vor fi diferite de zero numai componentele la cari toţi indicii α, β, γ şi δ vor fi diferiţi între ei şi, prin urmare, vor forma o permutare arbitrară a numerelor 1, 2, 3 şi 4. In fiecare caz dat, putem trece cu ajutorul unui şir de transpoziţii la componenta φ_{1234}. Notînd pentru prescurtare componenta fundamentală φ_{1234} prin $\tilde{\varphi}$, vedem că fiecare din cele 256 componente ale tensorului antisimetric de ordinul IV trebuie să aibă una din valorile

$$+\tilde{\varphi}, \quad 0, \quad -\tilde{\varphi}.$$

Utilitatea notării a mărimii indicate printr-un semn special, tilda $\sim$, se explică în cele ce urmează.

Vom pune prin urmare

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\tilde{\varphi}, \tag{46,1}$$

unde:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 0, & \text{dacă printre indicii } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ exisă indici egali;} \\ 1, & \text{dacă indicii } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ pot fi aşezaţi în ordinea 1, 2, 3, 4, cu ajutorul unui număr par de transpoziţii;} \\ -1, & \text{dacă este necesar un număr impar de transpoziţii pentru a transpune indicii } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ în ordinea 1, 2, 3, 4.} \end{cases}$$

Componentele $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se comportă faţă de orice rotaţie cvadridimensională a sistemului de coordonate ca nişte componente ale unui tensor antisimetric de ordinul IV, totuşi, faţă de o schimbare a direcţiei uneia sau a trei coordonate, simbolul $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nu numai coincide cu un tensor propriu zis, ci diferă de acesta prin semn. De aceea, îl vom numi în cele ce urmează, pseudotensor antisimetric de ordinul IV, punînd deasupra pseudomărimilor semnul tilda $\sim$.

In particular, comportarea simbolului $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ faţă de oglindirea axelor spaţiale:

$$x'_n = -x_n, \quad x'_4 = x_4 \tag{46,2}$$

diferă de comportarea tensorilor.

Intr-adevăr, prin trecerea de la un sistem de coordonate la altul, componentele tensorului de ordinul IV se transformă după legea:

$$\varphi'_{1234} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_2}{\partial x_\beta}\frac{\partial x'_3}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x'_4}{\partial x_\delta}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

In cazul oglindirilor axelor de coordonate (46,2) avem

$$\frac{\partial x'_{\mu'}}{\partial x_\mu} = \varepsilon_\mu \delta_{\mu\mu'},$$

unde simbolurile lui Eisenhardt ε_μ (utilizate cu folos în operaţiile din spaţiul pseudoeuclidian), al căror indice μ nu se ia în considerare în regulile obişnuite de sumare, au valorile:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \quad \varepsilon_4 = 1,$$

adică în cazul nostru, avem

$$\varphi'_{1234} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varphi_{1234} = -\varphi_{1234}.$$

De aici vedem că componenta fundamentală a tensorului trebuie să-şi schimbe semnul, în timp ce simbolul $\tilde{\varepsilon}_{1234}$ fiind la fel definit pentru toate sistemele de coordonate, nu-şi schimbă semnul.

In felul acesta, la oglindiri componentele pseudotensorilor nu satisfac regulile cunoscute pentru tensori.

Produsele scalare a doi pseudotensori vor satisface, evident, regulile de comportare a tensorilor faţă de oglindiri şi de aceea reprezintă tensori.

In particular, produsul

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}=4!=24$$

este un scalar[1]).

Alături de tensorul antisimetric de ordinul IV $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ obţinut cu ajutorul simbolului $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ din mărimea $\tilde{\varphi}$ care este, după cum se vede uşor, un pseudoscalar, putem să obţinem în mod analog şi un tensor antisimetric de ordinul III plecînd de la un pseudovector. Intr-adevăr, avem

$$\varphi_{\beta\gamma\delta}=\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\varphi}_{\alpha}.$$

Exact la fel, formăm tensorul antisimetric de ordinul doi:

$$\varphi_{\gamma\delta}=\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\varphi}_{\alpha\beta},$$

unde $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ se numeşte pseudotensor antisimetric de ordinul II.

Toate mărimile formate cu ajutorul simbolului $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se numesc duale faţă de cele iniţiale; în felul acesta pseudotensorii sînt duali faţă de cei obişnuiţi şi invers.

Intr-adevăr, din ultimele egalităţi putem exprima invers, pseudotensorii prin intermediul tensorilor obişnuiţi;

$$\tilde{\varphi}=\frac{1}{24}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha}=\frac{1}{6}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\varphi_{\beta\gamma\delta},$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\varphi_{\gamma\delta}, \text{ etc.}$$

Dacă legile de transformare pentru tensori, la oglindiri au forma

$$\varphi'=\varphi,$$

$$\varphi'_{\alpha}=\varepsilon_{\alpha}\varphi_{\alpha},$$

$$\varphi'_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\varphi_{\alpha\beta},$$

$$\varphi'_{\alpha\beta\gamma}=\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\gamma}\varphi_{\alpha\beta\gamma},$$

$$\varphi'_{\alpha\beta\gamma\delta}=\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\gamma}\varepsilon_{\delta}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

---

[1]) In cazul transformării coordonatelor curbilinii, transformare esenţială în teoria generală a relativităţii, valorile operatorului în noul sistem de coordonate şi în cel vechi, sînt legate prin relaţia:

$$\tilde{\varepsilon}'_{\alpha\beta\gamma\delta}=\sqrt{g}\,\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

atunci pentru pseudotensori aceste reguli vor fi:

$$\tilde{\varphi}' = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \tilde{\varphi},$$

$$\tilde{\varphi}'_\alpha = \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \tilde{\varphi}_\alpha,$$

$$\tilde{\varphi}'_{\alpha\beta} = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \tilde{\varphi}_{\alpha\beta},$$

$$\tilde{\varphi}'_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_\delta \tilde{\varphi}_{\alpha\beta\gamma},$$

$$\tilde{\varphi}'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{\varphi}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

indicii α, β, γ, δ fiind toţi diferiţi.

Să dăm cîteva exemple de construire a pseudotensorilor sau a mărimilor duale faţă de cele iniţiale.

După cum se ştie, tensorul antisimetric de ordinul II al cîmpului electromagnetic se defineşte prin egalitatea:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

unde

$$H_{12} = H_z, \quad H_{14} = -iE_x \quad \text{etc.}$$

Pseudotensorul antisimetric de ordinul II, dual faţă de aceasta, este

$$\tilde{H}_{\varepsilon\varrho} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\varepsilon\varrho\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad \text{adică} \quad \tilde{H}_{12} = -iE_z, \quad \tilde{H}_{14} = H_x, \text{ etc.}$$

In felul acesta, componentele $\tilde{H}_{\mu\nu}$ se obţin din componentele $H_{\mu\nu}$ permutînd între ei vectorul cîmp magnetic $\vec{H}$ şi cîmp electric $\vec{E}$, vectori care posedă o invarianţă diferită faţă de oglindiri.

Intr-adevăr, vectorul $\vec{E}$ îşi schimbă semnul la oglindirea tuturor celor trei coordonate, iar vectorul $\vec{H}$ rămîne neschimbat.

Să dăm o serie de alte exemple de pseudomărimi. In spaţiul tridimensional volumul paralelipipedului construit pe trei vectori $\vec{A}$, $\vec{B}$, şi $\vec{C}$ se determină prin formula:

$$\tilde{V} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}),$$

şi este caracterizat printr-un pseudoscalar. Din punctul de vedere al analizei tensoriale, volumul formează un tensor antisimetric de ordinul III cu componentele:

$$V_{klm}=\begin{vmatrix} A_k A_l A_m \\ B_k B_l B_m \\ C_k C_l C_m \end{vmatrix},$$

unde

$$\tilde{V}=V_{123}.$$

Produsul vectorial a doi vectori, adică suprafaţa paralelogramului construit de vectorii $\vec{A}$ şi $\vec{B}$:

$$\tilde{\vec{C}}=\vec{A}\times\vec{B},$$

este un pseudovector care a căpătat numele de vector axial, spre deosebire de cel real, adică de vectorul polar. Din punctul de vedere al analizei tensoriale, suprafaţa este un tensor antisimetric de ordinul II:

$$C_{nk}=A_n B_k-B_n A_k,$$

unde $\tilde{C}_1=C_{23}$, etc.

In sfîrşit, vom menţiona că ne vom întîlni cu noţiunea de pseudotensor în studiul interacţiunii nucleonilor cu cîmpul mezonilor care satisfac diverse ecuaţii (scalară, vectorială sau pseudovectorială). Să formăm acţiunea mixtă după regula generală [vezi, de exemplu (45,10)]:

$$S_3=-\int ds\int\rho(x-x')\,U(x)\,(dx),$$

unde U trebuie să fie un invariant care să caracterizeze energia de interacţiune.

Punînd energiei U condiţia ca ea să fie liniară faţă de funcţiile cîmpului mezonic şi să nu conţină derivate superioare, obţinem un răspuns univoc pentru forma energiei $U(x)$.

Se poate forma, în mod deosebit de simplu în teoria cuantică, expresia lui S_3, cînd nucleonii satisfac ecuaţia lui Dirac:

$$(E-c\vec{\alpha}\vec{p}-\rho_3 Mc^2)\chi=0,$$

unde χ este funcţia de undă a nucleonului, şi $E=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}$ şi $\vec{p}=\frac{h}{2\pi i}\nabla$ sînt respectiv operatorul energie şi operatorul impuls, iar $\vec{\alpha}$, ρ_3 sînt matricile lui Dirac, formate din matricile ρ_n şi σ_n $(n=1, 2, 3)$ cu patru linii şi patru coloane, şi care satisfac relaţiile:

$$\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3, \quad \rho_1\rho_2=-\rho_2\rho_1=i\rho_3,$$

$$\sigma_n^2=1, \quad \rho_n^2=1, \quad \rho_n\sigma_{n'}=\sigma_{n'}\rho_n \quad \text{etc.}$$

După cum se ştie, din cele 16 matrici ale lui Dirac care formează un grup[1]), putem forma următoarele mărimi:

1) Vectorul cvadridimensional

$$\alpha_\mu=\rho_1\sigma_n, \quad iI.$$

Aici I este matricea unitate. Mai precis, componentele vectorului cvadridimensional sînt elemente de matrice:

$$\frac{v_\mu}{c}=\int\chi^\star\alpha_\mu\chi(d\vec{r}),$$

care sînt egale cu raportul dintre componenta vitezei cvadridimensionale a electronului şi viteza luminii.

Dacă introducem matricile σ_1, σ_2, σ_3 şi $\sigma_4=\rho_1 i$, atunci matricea vitezei va fi

$$\alpha_\mu=\rho_1\sigma_\mu.$$

2) Tensorul antisimetric de ordinul II se formează pentru $\mu\neq\nu$ din următoarele matrici:

$$\alpha_{\mu\nu}=-i\sigma_\mu\rho_3\sigma_\nu.$$

Componentele sale vor fi:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12}\\ \alpha_{14}\alpha_{24}\alpha_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_3\sigma_1, & \rho_3\sigma_2, & \rho_3\sigma_3\\ i\rho_2\sigma_1, & i\rho_2\sigma_2, & i\rho_2\sigma_3\end{pmatrix}. \tag{46,3}$$

[1]) Orice produse posibile şi puteri ale matricilor sînt egale cu alte matrici, pînă la coeficienţii $\pm i$ sau ± 1.

Inmulţind (46,3) cu mărimea $\frac{eh}{4\pi mc}$, căpătăm valorile momentului magnetic (linia superioară) şi electric, pentru electroni şi alte particule de spin $\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$, descrise de ecuaţia lui Dirac.

In locul componentelor tensorului antisimetric $\alpha_{\mu\nu}$ se pot introduce componentele tensorului dual:

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\varepsilon\varrho}\,\tilde{\alpha}_{\varepsilon\varrho},$$

în care

$$\tilde{\alpha}_{23} = \alpha_{14} = i\rho_2\sigma_1,$$

$$\tilde{\alpha}_{14} = \alpha_{23} = \rho_3\sigma_1.$$

3) Tensorul antisimetric de ordinul III ale cărui componente pentru valori diferite ale indicilor μ, ν şi ε sînt

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon} = -\rho_1\sigma_\mu\,\rho_3\sigma_\nu\,\rho_3\sigma_\varepsilon.$$

In locul tensorului antisimetric de ordinul III se poate introduce pseudovectorul

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{\varrho\mu\nu\varepsilon}\,\tilde{\alpha}_\varrho,$$

componentele pseudovectorului fiind:

$$\tilde{\alpha}_\mu \equiv \sigma_\mu,$$

adică matricile σ_μ formează un pseudovector şi le vom scrie în cele ce urmează fără semnul ($\sim$). Matricele σ caracterizează spinul electronului şi al altor particule de spin semiîntreg. Spinul este

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\vec{\sigma}.$$

4) Insfîrşit, mai aveam un tensor antisimetric de ordinul IV, ale cărui componente, pentru valori diferite ale indicilor μ, ν, ε, ρ, sînt

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon\varrho} = i\sigma_\mu\,\rho_3\sigma_\nu\,\rho_3\sigma_\varepsilon\,\rho_3\sigma_\varrho = \vec{\varepsilon}_{\mu\nu\varepsilon\varrho}\,\vec{\rho},$$

unde matricea pseudoscalară este

$$\tilde{\rho} = \rho_2.$$

Funcţia mixtă a acţiunii S_3 este în cazul cuantic:

$$S_3 = -\int \chi^* U \chi (dx).$$

Trecînd la cazul clasic, trebuie ca densitatea tridimensională $\chi^* \chi$ să fie:

$$\chi^* \chi = \int \rho (x - x') \, ds,$$

iar în locul matricilor lui Dirac să punem aproximaţia clasică a elementului de matrice, de pildă

$$\alpha_\mu \to \int \chi^* \alpha_\mu \chi (d\vec{r}), \tag{46,4}$$

lucru de care ne vom folosi în cele ce urmează.

Energia de interacţiune U reprezintă un invariant format dintr-o sumă de invarianţi după regula: produsul dintre scalarul mezonului şi scalarul nucleonului plus produsul dintre vectorul mezonului şi vectorul nucleonului etc.

Prin trecerea la cazul nerelativist, matricile proporţionale cu ρ_1 şi ρ_2, avînd ordinul de mărime $\frac{v}{c}$ $\left(\text{de exemplu } \vec{\alpha} = \rho_1 \vec{\sigma} = \frac{v}{c}\right)$, pot fi neglijate, iar matricile ρ_3 şi I trebuie puse egale cu unitatea. Vectorul tridimensional $\vec{\sigma}$ trece într-un vector unitar, care caracterizează direcţia spinului nucleonului. De aici, în cazul mezonilor scalari, avem pentru energia de interacţiune a nucleonilor în cîmpul scalar, expresia nerelativistă

$$U = g\rho_3 \varphi + f \alpha_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

care coincide, în aproximaţia nerelativistă, cu expresia (45,10a).

b) *Cîmpul pseudoscalar*

După cum s-a arătat în paragraful precedent, putem reuşi cu ajutorul cîmpului mezonic scalar să explicăm caracterul de acţiune la distanţă mică al forţelor nucleare. Totuşi, cîmpul scalar nu poate explica apariţia forţelor de spin (centrale şi necentrale), care joacă un rol fundamental în interacţiunea nucleară.

Putem ajunge la forţele de spin dacă introducem un cîmp pseudoscalar, vectorial sau pseudovectorial (sau cîmpul perechilor de particule Fermi spinoriale).

De aceea, etapa următoare a teoriei forţelor nucleare trebuie să fie legată în mod natural de cercetarea acestor cîmpuri.

Inainte de toate, să ne oprim la analiza cîmpului pseudoscalar, la baza căruia se ia funcţia pseudoscalară $\tilde{\varphi}$.

Acest cîmp stă astăzi în centrul atenţiei din două motive: în primul rînd, deoarece mezonii π neutri şi încărcaţi care participă după cît se pare cel mai mult la transportul forţelor nucleare, sînt — după toate probabilităţile — pseudoscalari; în al doilea rînd, deoarece cu ajutorul cîmpului pseudoscalar, la care dificultatea dipolară a fost eliminată cel puţin aproximativ, putem da cea mai bună descriere, posibilă astăzi, a forţelor nucleare.

Să introducem tensorul antisimetric de ordinul IV $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, legat de pseudoscalarul $\tilde{\varphi}$ prin relaţia

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}=\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\tilde{\varphi}. \tag{46,5}$$

Putem forma de asemenea din tensorul de ordinul IV un tensor antisimetric de ordinul III

$$\varphi_{\beta\gamma\delta}=\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\partial x_\alpha},$$

legat de cele patru componente ale pseudovectorului

$$\tilde{\varphi}_\alpha=\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_\alpha} \tag{46,5a}$$

prin relaţia

$$\varphi_{\beta\gamma\delta}=\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\tilde{\varphi}_\alpha.$$

Se poate dezvolta teoria completă a cîmpului pseudoscalar avînd masă de repaus (mezoni), plecînd de la funcţia lui Lagrange construită din tensorii obişnuiţi şi care duce la ecuaţii liniare cu derivate de ordin minim

$$L=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{6}\varphi_{\beta\gamma\delta}\varphi_{\beta\gamma\delta}+\frac{1}{24}k_0^2\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}\right).$$

In acest caz, ca de obicei în această expunere, ne mărginim la cîmpul real corespunzător particulelor neutre, cîmp care poate fi tratat în întregime pe cale clasică.

Luînd în considerare relaţia (46,5) şi (46,5 a) putem scrie acest lagrangean într-o formă mai simplă cu ajutorul pseudoscalarului iniţial $\tilde{\varphi}$ şi pseudovectorului $\tilde{\varphi}_\alpha$:

$$L = -\frac{1}{8\pi}(\tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha + k_0^2 \tilde{\varphi}^2). \qquad (46,6)$$

Astfel, lagrangeanul cîmpului pseudoscalar (mezonic) coincide, în cazul lipsei surselor (nucleonilor), cu lagrageanul cîmpului scalar.

De aceea, rezultatele obţinute mai sus pentru particulele scalare sînt aplicabile direct, atît pentru ecuaţia de undă, cît şi pentru tensorul energie-impuls, pentru spin etc., al particulelor pseudoscalare libere, înlocuind scalarul φ cu pseudoscalarul $\tilde{\varphi}$. In particular, spinul mezonilor pseudoscalari, la fel ca şi spinul mezonilor scalari, este nul.

Deosebirea dintre cîmpul scalar şi pseudoscalar apare la determinarea energiei de interacţiune a cîmpului mezonic cu nucleoni sau cu particule uşoare, care toate au un spin semiîntreg şi sînt descrise de funcţii spinoriale.

Funcţia mixtă a acţiunii, S_3, care determină interacţiunea cîmpului mezonic cu cîmpul nucleonic are, în cazul pseudoscalar, forma [vezi şi (45,10)]:

$$S_3 = -\int ds \int \rho\,(x-x')\, U\,(x)\,(dx). \qquad (46,7)$$

Aici expresia invariantă a interacţiunii U trebuie să fie egală cu suma produselor: pseudoscalarul cîmpului $\tilde{\varphi}$ ori pseudoscalarul nucleonilor $\tilde{\rho}_2$ şi pseudovectorul cîmpului $\tilde{\varphi}_\alpha$ ori pseudovectorul nucleonilor σ_α, adică

$$U = g\rho_2 \tilde{\varphi} + f\sigma_\mu \tilde{\varphi}_\mu, \qquad (46,8)$$

unde ρ_2 şi σ_μ sînt aproximaţiile clasice ale matricilor lui Dirac (vezi 46,4). In teoria veche a cîmpului pseudoscalar se făcea imediat trecerea în această expresie la cazul nerelativist. In această trecere, mărimea pseudoscalară ρ_2 şi componenta a IV-a a pseudovectorului spinului $\sigma_4 = i\rho_1$ au ordinul de mărime $\frac{v}{c}$ şi de aceea—în aproximaţia nerelativistă—pot fi în general neglijate. In cazul clasic vectorii unitari ai celor trei componente spaţiale ale pseudovectorului spinului, vor fi notate prin σ_n. Semnele $\sim$ la pseudovectorul tridimensional al spinului nu se vor mai scrie. Prin urmare, în aproximaţia nerelativistă clasică obţinem

$$U = f\sigma_n \tilde{\varphi}_n.$$

De aceea, avem—în definitiv—pentru un nucleon punctiform [vezi de asemenea deducerea formulei (45,11)]:

$$S_3 = -f\int dt' \int \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')\,\sigma_n \tilde{\varphi}_n (d\vec{r})\, dt. \tag{46,9}$$

De aici, găsim în loc de (45,4) şi (45,5) următoarele ecuaţii statice pentru cîmpul pseudoscalar generat de un nucleon punctiform situat în originea axelor de coordonate:

$$\left.\begin{aligned} (\nabla^2 - k_0^2)\tilde{\varphi} &= -4\pi f(\vec{\sigma}\nabla)\,\delta(\vec{r}), \\ V &= f(\vec{\sigma}\nabla)\tilde{\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{46,10}$$

Soluţia ecuaţiei (46,10) poate fi găsită uşor cu ajutorul formulei (14,10). Ea are forma

$$\tilde{\varphi} = f(\vec{\sigma}\nabla)\frac{e^{-k_0 r}}{r}.$$

De aici găsim în teoria pseudoscalară în cazul static, pentru energia potenţială de interacţiune a doi nucleoni punctiformi, notaţi, respectiv cu indicii A şi B,

$$V = f^2(\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla)\frac{e^{-k_0 r}}{r}. \tag{46,11}$$

Dezvoltînd ultima expresie, găsim

$$\begin{aligned} V = f^2 S_{AB}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{k_0}{r} + \frac{k_0^2}{3}\right)\frac{e^{-k_0 r}}{r} &+ \\ + \frac{1}{3} f^2 (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B) k_0^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r}&, \end{aligned} \tag{46,12}$$

unde

$$S_{AB} = 3(\vec{\sigma}_A \vec{r}^0)(\vec{\sigma}_B \vec{r}^0) - (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B) \tag{46,13}$$

$$\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}.$$

In felul acesta, interacţiunea prin cîmpul mezonic pseudoscalar, care asigură la fel ca şi în cazul scalar, caracterul de acţiune la distanţă mică al forţelor, caracter asigurat de prezenţa factorului exponenţial $e^{-k_0 r}$ (adică a factorului condiţionat de masa de repaus a mezonilor) duce în plus la forţele cerute, necentrale şi de spin, dintre nucleoni.

Aceste forţe se determină prin factorul caracteristic S_{AB}, factor care apare de asemenea şi în expresia energiei de interacţiune a doi dipoli magnetici sau electrici. Pentru o masă de repaus $k_0=0$ sau la distanţe mici, toată expresia (46,12) trece în expresia energiei de interacţiune a doi dipoli. In felul acesta, forţele pseudoscalare sînt „cvasimagnetice".

Alături de acest succes, aproximaţia nerelativistă a teoriei pseudoscalare duce — în comparaţie cu cea scalară — la aşa numita dificultate dipolară. Intr-adevăr, la distanţe relativ mici $r \to 0$, mai mari totuşi decît distanţa $\frac{h}{Mc} \sim 10^{-14}$ cm pentru care aproximaţia nerelativistă în nucleoni are sens, energia potenţială diverge, după cum se vede din (46,12) proporţional cu r^{-3}, şi de aceea — conform teoremei virialului — (v. § 44), forţele mezonice pseudoscalare nerelativiste nu pot asigura nucleonilor stări stabile, de exemplu chiar la deuteron.

In teoria forţelor vectoriale apare o dificultate dipolară cu totul analoagă. O analiză mai amănunţită a arătat însă că în realitate dificultatea dipolară în cazul pseudoscalar se elimină într-o anumită aproximaţie[1]).

Să examinăm mai întîi cîmpul scalar şi să arătăm de la început, pentru cazul cuantic, cum cu ajutorul unei transformări de contact (de etalonare) cu funcţia S, unde $S = -\frac{2\pi i}{hc} f\varphi$, putem elimina din expresia energiei de interacţiune (v. p. 330):

$$U = g\rho_3\varphi + f\alpha_\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

toţi termenii relativişti cu constanta f.

---

[1]) E. C. Nelson, Phys. Rev., **60**, 830, 1941; F. J. Dyson, Phys. Rev., **73**, 929, 1948; C. Araki, Phys. Rev., **75**, 1101, 1262, 1949; K. M. Case Phys. Rev. **75**, 1306, 1949.

Este vorba de fapt de aplicarea cunoscutei metode de transportare a termenilor de interacţiune din hamiltonian în funcţia de undă. Intr-adevăr, efectuînd cu operatorul L transformarea

$$e^{-S} L e^{+S} \chi', \tag{46,14}$$

unde χ' este noua funcţie de undă a particulei (nucleonului) care interacţionează cu cîmpul mezonic scalar, φ, ţinînd seama că după (45,46) φ comută cu φ, cu $\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ şi cu $\nabla\varphi$ in puncte diferite, şi neglijînd termenii infiniţi de autoacţiune conditionaţi de punctele spaţiale coincidente, obţinem ecuaţia transformată a lui Dirac numai termenul nerelativist cu constanta g:

$$\left[D_0 - g\rho_3\varphi - f\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha_n \nabla_n \varphi\right)\right]\chi = (D_0 - g\rho_3\varphi)\chi' = 0, \tag{46,15}$$

unde

$$D_0 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ch}{2\pi i}\alpha_n \nabla_n - \rho_3 Mc^2.$$

In felul acesta, partea vectorială a cuplajului cu cîmpul scalar dispare complet, şi nu duce la nici un proces, în orice aproximaţie.

Să trecem la cazul pseudoscalar, cînd energia de interacţiune a nucleonului cu cîmpul mezonic este dată de expresia (46,8) şi ecuaţia lui Dirac are forma

$$\left[D_0 - g\rho_2\tilde{\varphi} - f\left(\rho_1\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} + \sigma_n \nabla_n \tilde{\varphi}\right)\right]\chi = 0. \tag{46,16}$$

Punînd în acest caz

$$S = -\frac{2\pi i}{ch} f \rho_1 \tilde{\varphi} \tag{46,17}$$

şi ţinînd seama de regulile de comutare a matricilor ($\nu = 2,3$) cu funcţia e^S:

$$\rho_\nu e^S = e^{-S}\rho_\nu = e^S\rho_\nu - e^S(1 - e^{-2S})\rho_\nu, \tag{46,18}$$

care pot fi verificate cel mai simplu dezvoltînd e^S în serie, obţinem

$$\left[D_0 - g\rho_2\tilde{\varphi} + \left(1 - e^{\frac{4\pi i}{hc}\rho_1 f\tilde{\varphi}}\right)(Mc^2\rho_3 + g\tilde{\varphi}\rho_2)\right]\chi' = 0. \tag{46,19}$$

Limitîndu-ne ultima ecuaţie la termenii liniari faţă de funcţia pseudoscalară $\tilde{\varphi}$, obţinem expresia finală a energiei de interacţiune fără partea dipolară. Prin urmare, ecuaţia lui Dirac pentu nucleoni care interacţionează cu cîmpul pseudoscalar $\vec{\varphi}$ va fi în aproximaţia dată

$$(D_0 - G\rho_2 \tilde{\varphi})\chi' = 0, \tag{46,20}$$

unde $G = g + \frac{4\pi Mcf}{h}$.

Observînd că, după cum rezultă din datele experimentale avem ca ordin de mărime $f = \frac{g'}{k_0}$, unde masa mezonului este egală cu $\frac{k_0 h}{2\pi c}$ şi că $g \approx g'$, putem scrie constanta renormată de cuplaj astfel

$$G = g + \frac{4\pi Mc}{h} f = g + \frac{2K_0}{k_0} g', \quad \text{unde} \quad M = \frac{K_0 h}{2\pi c}. \tag{46,21}$$

Deoarece energia de interacţiune a nucleonului cu cîmpul pseudoscalar

$$U = G\rho_2 \tilde{\varphi} \tag{46,22}$$

are în esenţă aceeaşi formă ca şi energia de legătură cu cîmpul scalar

$$U = g\rho_3 \varphi \cong g\varphi,$$

rezultă că pentru energia de interacţiune a particulelor A şi B, — substituind în locul lui g mărimea $G\rho_2$, — obţinem o expresie de tipul (45,21) care nu conţine explicit termeni dipolari

$$V = -G^2 (\rho_2^A \rho_2^B) \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \tag{46,23}$$

După cum se vede, energia de interacţiune conţine matricile relativiste ρ_2. Astfel, am obţinut o expresie mai precisă decît formulele nerelativiste obţinute deja, întrucît într-o anumită aproximaţie este luat aici în considerare efectul vitezelor nucleonului. Totodată noua formulă (46,23) nu poate fi însă considerată ca o expresie finală precisă, după cum rezultă chiar din analiza transformării efectuate mai sus, care nu este univocă. Eliminarea din teoria pseudoscalară a părţii pseudovectoriale care duce la interacţiunea dipolară, este succesul cel mai esenţial al teoriei generale a forţelor nucleare din ultimul timp. Din păcate însă, prin această metodă de studiu forţele necentrale, care joacă un rol considerabil în interacţiunile nucleare, sînt eliminate.

§ 37. Cîmpul mezonic vectorial

a) *Ecuaţiile fundamentale*

După cum s-a arătat mai sus, ecuaţiile lui Maxwell au fost generalizate din cînd în cînd în diverse direcţii. Vom aminti de exemplu, generalizarea neliniară propusă de Born, sau generalizările cu derivate superioare ale lui Bopp şi Podolski. In timpul elaborării mecanicii cuantice relativiste, I. I. Frenkel a emis ideea generalizării ecuaţiilor maxwelliene cu ajutorul unor termeni suplimentari, corespunzători existenţei unei mase de repaus a particulelor asociate cîmpului. Ultima problemă a fost rezolvată definitiv de Proca, care a stabilit un anumit sistem de ecuaţii pentru cîmp în vid, sistem care a fost deja folosit de noi mai sus drept cîmp auxiliar, în studiul teoriei cu derivate superioare[1]). Apare în mod natural problema posibilităţii folosirii ecuaţiilor vectoriale pentru descrierea cîmpului mezonic.

Vom alege pentru componentele cîmpului mezonic vectorial real, notaţiile electomagnetice.

Cîmpurile mezonice $H_{\mu\nu}$, reale în cazul mezonilor neutri, sînt legate de potenţialul cvadridimensional $A_\mu = \vec{A},\ i\varphi$ prin relaţia:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = A_{\nu,\,\mu} - A_{\mu,\,\nu}. \tag{47,1}$$

Componentele $H_{12} = H_z$ şi $H_{41} = iE_x$ le vom numi respectiv componentele intensităţii cvasimagnetice şi cvasielectrice ale cîmpului.

In absenţa surselor, ecuaţiile lui Maxwell se generalizează în modul următor pentru cazul cîmpului (mezonic) legat de masa de repaus

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + k_0^2 A_\mu = 0, \tag{47,2}$$

unde k_0 este legat prin relaţia

$$k_0 = \frac{2\pi\mu c}{h},$$

de masa μ a mezonilor care corespund cîmpului.

---

[1]) A. Proca, Journ de Phys., 7, 348, 1936.

Pentru $k_0 \to 0$ ecuaţiile vectoriale stabilite în acest mod pentru „fotonii grei" (mezoni neutri), trec în ecuaţiile obişnuite maxwelliene.

Dacă trecem la notaţii tridimensionale, ecuaţiile (47,2) se vor numi ecuaţiile primului grup. Ele capătă forma:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + k_0^2 \vec{A} = 0, \\ &\operatorname{div} \vec{E} + k_0^2 \varphi = 0. \end{aligned} \tag{47,3}$$

Tot aşa în locul lui (47,1) vom avea un al doilea grup de ecuaţii vectoriale:

$$\begin{aligned} &\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ &\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \end{aligned} \tag{47,4}$$

E uşor de arătat că condiţia lui Lorentz

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \tag{47,5}$$

se obţine pentru mezonii vectoriali în mod automat. Pentru aceasta trebuie să derivăm ecuaţia (47,2) în raport cu $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ şi să luăm în considerare faptul că produsul tensorului simetric $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ cu tensorul antisimetric $H_{\mu\nu}$ dă zero.

Reamintim că în electrodinamică condiţia lui Lorentz reprezintă o ecuaţie suplimentară, pe care trebuie să o satisfacă potenţialele pentru a evita nedeterminarea în alegerea etalonului (calibrării). Pentru „fotonii grei" potenţialele intră în mod explicit în primul grup de ecuaţii şi de aceea ecuaţiile pentru mezoni vectoriali, nu se bucură de invarianţă faţă de transformările de etalonare (de calibrare) ale potenţialelor mezonice.

Vom observa că la început însuşi Proca şi-a destinat ecuaţiile în mod greşit descrierii cuantice relativiste a electronului, în locul ecuaţiilor spinoriale ale lui Dirac, care duc la stări cu energie negativă. Acestea din urmă păreau, într-un timp, drept dificultăţi de nerezolvat cu ajutorul ipotezei lui Dirac a pozitronilor, considerați ca nişte găuri printre nivelele de energie negativă ocupate. Totuşi, descoperirea pozitronilor, în conformitate cu prezicerile teoriei, precum şi descoperirea transformării electronului şi pozitronului în doi fotoni şi invers, a întărit tot mai mult convingerea în justeţea ecuaţiei lui Dirac pentru electron.

In acelaş timp, noi, în colaborare cu Durandin şi Erşov[1]) am arătat că ecuaţiile vectoriale descriu particule Bose şi nu particule de tip Fermi, şi de aceea sînt inaplicabile pentru electroni. Mai tîrziu s-a demonstrat faptul că cuantele cîmpului vectorial, ca şi fotonii, au spin unu. Descoperirea în razele cosmice şi apoi şi în laborator a unei noi particule elementare semigrele: mezonul, avînd după toate probabilităţile un spin întreg şi supunîndu-se statisticii Bose, ne obligă să considerăm ecuaţiile vectoriale drept un mijloc comod şi posibil pentru descrierea mezonilor de spin unu. Acum se ştie că particulele de spin unu pot fi descrise şi cu ajutorul unei funcţii de undă, pseudovectoriale, însă o astfel de tratare a mezonilor s-a dovedit a fi puţin rodnică pentru explicarea forţelor nucleare. Ecuaţiile vectoriale se situează desigur, tot timpul în centrul discuţiei teoretice şi reprezintă punctul de plecare al diverselor variante de descriere a mezonului.

Teoria mezonului, ţinînd seamă de posibilitatea unui spin nul, aplică de asemenea ecuaţia pentru funcţia de undă pseudoscalară (vezi paragraful precedent), alături de descrierea mezonului cu ajutorul ecuaţiei scalare, folosită la început de Yukawa. După cum s-a menţionat mai sus, ecuaţia scalară luată ca atare pentru particule de spin zero nu este aplicabilă, întrucît nu permite să se ţină seamă de importantele proprietăţi de spin ale cîmpului mezonic şi ale cîmpului forţelor nucleare — acesta din urmă fiind după toate probabilităţile un cîmp mezonic. Desigur, nu este exclusă existenţa unor mezoni de diverşi spini.

Ne vom opri asupra expunerii teoriei clasice a cîmpului vectorial care, — independent de aplicaţia directă la particulele vectoriale ipotetice neutretto (mezoni neutri) de spin 1, — are o forţă heuristică apreciabilă, permiţîndu-ne să analizăm pe o cale simplă şi intuitivă multe succese şi dificultăţi ale teoriei forţelor nucleare şi să obţinem rezultate importante, care după cum se constată, îşi păstrează valabilitatea, integral sau ca ordin de mărime, şi în teoria cuantică a particulelor vectoriale neutre şi încărcate, de spin *1*.

---

[1]) Е. Дурандин и А. Ершов, ЖЭТФ, 8, 5, 1938.

b) *Teoria generală a cîmpului mezonic vectorial*

Din punctul de vedere al teoriei invarianţilor şi al grupurilor de transformări, ecuaţiile pentru cîmpul vectorial real diferă de ecuaţiile maxwelliene ale electrodinamicii clasice numai într-un singur punct: în teoria mezonilor se îndepărtează condiţia de invarianţă la etalonare (calibrarea de speţa II) a potenţialelor cîmpului mezonic, de aceea pot intra în ecuaţii, în mod explicit, însăşi potenţialele. Altfel zis, teoria mezonilor vectoriali se construieşte cu ajutorul celor doi invarianţi fundamentali ai teoriei vectoriale:

$$I_1 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} \quad \text{şi} \quad I_3 = -A_\mu A_\mu, \tag{47,6}$$

şi nu numai cu ajutorul primului invariant I_1, folosit în teoria lui Maxwell. Pe de altă parte, ambele teorii păstrează condiţia de liniaritate a ecuaţiilor, de aceea invariantul de forma $I_2 = (\vec{E}\vec{H})^2$, cu ajutorul căruia se pot forma numai ecuaţii neliniare, nu va fi folosite la fel ca şi pînă acum. Tot aşa, în ambele teorii se ţine seamă de condiţia de a ne mărgini la derivatele de ordin minim, anume II.

La baza întregii teorii se pune, după cum se ştie, lagrangeanul, care reprezintă o combinaţie liniară a tuturor invarianţilor admisibili. In cazul de faţă [vezi de asemenea relaţia (33,14)]:

$$L = aI_1 + bI_3 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{8\pi} A_\mu A_\mu, \tag{47,7}$$

unde, pentru comoditatea normării, s-a luat $a=1$, $b=\frac{k_0^2}{8\pi}$.

Lagrangeanul permite construirea tuturor mărimilor fundamentale care caracterizează cîmpul. Inainte de toate, este uşor să ne convingem că principiul variaţional:

$$\delta \int L(d\vec{r})\, dt = 0 \tag{47,8}$$

duce, într-adevăr, la ecuaţiile (47,2), adică sistemul de ecuaţii vectoriale reprezintă „ecuaţiile de mişcare“ euleriene, obţinute prin variaţia funcţiei L în raport cu potenţialele sau funcţiile de undă A_μ, care joacă rolul coordonatelor generalizate:

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0. \tag{47,9}$$

Odată stabilită funcţia lui Lagrange, să găsim tensorul canonic al energiei.

Pentru aceasta, la fel ca şi în teoria lui Maxwell (vezi § 30), ne folosim de identitatea

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu}=\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}}A_{\lambda,\nu\mu}+\frac{\partial L}{\partial A_\lambda}A_{\lambda,\mu}.$$

Luînd în considerare mai departe că

$$A_{\lambda,\nu\mu}=A_{\lambda,\mu\nu},$$

avem

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}}A_{\lambda,\mu}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}}-\frac{\partial L}{\partial A_\lambda}A_{\lambda,\mu}.\right) \tag{47,10}$$

Ţinînd seamă de egalitatea (47,9) precum şi de faptul că în cazul nostru

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}}=\frac{1}{4\pi}H_{\lambda\nu}, \tag{47,11}$$

să transformăm (47,10) într-o formă care să determine legea de conservare a tensorului densitate de energie — impuls — tensiune

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}T^{\text{can}}_{\mu\nu}=0,$$

componentele tensorului canonic al energiei fiind

$$T^{\text{can}}_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}A_{\lambda,\mu}H_{\lambda\nu}-\delta_{\mu\nu}L. \tag{47,12}$$

De aici se vede că tonsorul canonic este nesimetric.

$$T^{\text{can}}_{\mu\nu}\neq T^{\text{can}}_{\nu\mu}.$$

La o concluzie analoagă s-a ajuns în studiul cîmpului maxwellian (vezi § 30).

Aceasta duce la faptul că densitatea tensorului momentului cinetic al cîmpului

$$M_{[\mu\nu]\lambda}=\frac{i}{c}(x_\mu T_{\nu\lambda}-x_\nu T_{\mu\lambda}),$$

nu satisface legea de conservare

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}M_{[\mu\nu]\lambda}\neq 0.$$

In schimb, tensorul momentelor, la fel ca şi în cazul cîmpului maxwellian satisface legea de conservare. Acest moment este:

$$M'_{[\mu\nu]\lambda}=M_{[\mu\nu]\lambda}+S_{[\mu\nu]\lambda},$$

în care mărimea

$$S_{[\mu\nu]\lambda}=-\frac{i}{4\pi c}(A_\mu H_{\nu\lambda}-A_\nu H_{\mu\lambda}), \tag{47,13}$$

trebuie considerată ca fiind un tensor care descrie spinul cîmpului mezonic (adică spinul mezonului, conform teoriei cuantice).

De aceea, în completă analogie cu cîmpul electromagnetic (fotonic), obţinem pentru cîmpul mezonic următoarea valoare a spinului total:

$$\vec{\bar{S}}=\frac{1}{4\pi c}\int(\vec{E}\times\vec{A})\,(d\vec{r}), \tag{47,14}$$

de unde se vede că spinul mezonilor vectoriali, la fel ca şi pentru fotoni, este egal cu 1.

Afară de tensorul canonic putem forma şi tensorul metric al energiei:

$$T_{\mu\nu}^{\text{met}}=\frac{2}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{47,15}$$

Pentru a calcula tensorul metric, trebuie să efectuăm mai întîi calculele într-un sistem arbitrar de coordonate, şi numai în rezultatul final (în cazul $x_4=ict$) trebuie să punem:

$$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$$

[vezi relaţia (23,1a)], iar determinantul format cu ajutorul tensorului fundamental

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34}\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}\end{pmatrix},$$

să-l punem egal cu unu.

In cazul unui tensor metric $g_{\mu\nu}$ oarecare, vom avea pentru funcţia lui Lagrange L a ecuaţiilor vectoriale

$$L=-\frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}H_{\nu\alpha}H_{\mu\beta}-\frac{k_0^2}{8\pi}g^{\mu\nu}A_\nu A_\mu.$$

De aici găsim:

$$T^{\text{met}}_{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}L-\frac{1}{4\pi}g^{\alpha\beta}H_{\nu\alpha}H_{\mu\beta}-\frac{k_0^2}{4\pi}A_\mu A_\nu. \qquad (47,16)$$

Luînd în considerare relaţia cunoscută pentru tensorul metric

$$\frac{\partial g}{g\partial g^{\mu\nu}}=-g_{\mu\nu},$$

precum şi egalitatea (47,15), găsim

$$T^{\text{met}}_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}H_{\mu\lambda}H_{\lambda\nu}-\frac{k_0^2}{4\pi}A_\mu A_\nu-\delta_{\mu\nu}L. \qquad (47,17)$$

O expresie analoagă pentru tensorul energiei am obţinut-o în studiul cîmpului al doilea al ecuaţiilor cu derivate superioare [vezi relaţia (33,25)]. Observăm că pentru $k_0^2=0$, obţinem tensorul metric (30,24), găsit pentru cîmpul electromagnetic. In cele ce urmează tensorul metric se va nota fără indicele met sus, adică

$$T_{\mu\nu}\equiv T^{\text{met}}_{\mu\nu}.$$

Tensorul metric este simetric:

$$T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}.$$

Atît diferenţa dintre tensorul canonic şi cel metric cît şi tensorii înşăşi:

$$T'_{\mu\nu}=T^{\text{can}}_{\mu\nu}-T_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}A_{\mu,\lambda}H_{\lambda\nu}+\frac{k_0^2}{4\pi}A_\mu A_\nu=-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\frac{1}{4\pi}A_\mu H_{\nu\lambda},$$

satisfac legea de conservare:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0,$$

şi de aceea, în deplină conformitate cu principiile variaţionale, ambii tensori diferă printr-o mărime a cărei divergenţă cvadridimensională este nulă [vezi de asemeni § 28].

Din (47,17) găsim densitatea energiei sau hamiltonianul cîmpului neutru vectorial

$$T_{44}=\frac{1}{8\pi}[E^2+H^2+k_0^2(\varphi^2+A^2)], \qquad (47,18)$$

care este definit pozitiv.

Densitatea curentului de energie sau vectorul lui Umov-Poynting are forma:

$$\mathfrak{S}_n = icT_{4n},$$

sau

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}+k_0^2\varphi\vec{A}\right]. \qquad (47,19)$$

In sfîrşit, în deplină analogie cu cîmpul scalar, putem scrie expresia parantezelor lui Poisson sub forma relativist — invariantă.

Dat fiind, că avem patru coordonate generalizate (pentru componentele cîmpului), în locul relaţiei (45,42) obţinem, în cazul nostru — cu ajutorul aceleiaşi funcţii fundamentale de comutare D:

$$[A_\mu(\vec{r},t);\ A_\nu(\vec{r}',t')] = a_{\mu\nu}4\pi cD(\vec{r}-\vec{r}',\ t-t'). \qquad (47,19a)$$

Dacă toate coordonatele cîmpului A_μ ar fi mărimi independente, ar urma să punem, în mod natural

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

Ori, potenţialele A_μ sînt supuse condiţiei lui Lorentz

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

şi de aceea coeficienţii $a_{\mu\nu}$ trebuie aleşi astfel, încît membrul doi al relaţiei (47,19a) să satisfacă de asemenea condiţia lui Lorentz:

$$\frac{\partial a_{\mu\nu}D}{\partial x_\mu} = \frac{\partial a_{\mu\nu}D}{\partial x'_\nu} = 0. \qquad (47,20)$$

Pentru aceasta, coeficienţii $a_{\mu\nu}$ trebuie luaţi egali cu

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{k_0^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\nu},$$

întrucît, luînd în considerare faptul că

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial x'_\mu}\right)D = 0,$$

vom satisface în mod automat egalitatea (47,20).

Cunoscînd parantezele cvadridimensionale ale lui Poisson pentru vectorul potenţialului, putem găsi parantezele lui Poisson pentru cîmpurile $H_{\mu\nu}$, precum şi parantezele tridimensionale ale lui Poisson $(t=t')$. Trecerea la ecuaţiile cuantice ale cîmpului se realizează înlocuind parantezele lui Poisson clasice prin cele cuantice, conform regulii generale (45,43).

In sfîrşit, se poate construi de asemenea teoria cîmpului mezonic vectorial încărcat.

In acest caz, funcţia lui Lagrange va fi legată de cîmpurile complexe prin relaţia

$$L=-\frac{1}{8\pi}H^{*}_{\mu\nu}H_{\mu\nu}-\frac{k_0^2}{4\pi}A^{*}_{\mu}A_{\mu}.$$

Cîmpul vectorial complex (adică menzonii încărcaţi) pot interacţiona cu cîmpul electromagnetic, ceea ce se poate descrie cel mai bine adăugînd la lagrangean un termen depinzînd de potenţialele cîmpului electromagnetic A^{el}_{μ}. Acest termen suplimentar se reduce, ca şi în cazul cîmpului scalar complex, la termeni care se obţin în urma înlocuirii gradientului cvadridimensional $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$, care operează asupra funcţiilor mezonice A_{μ}, prin operatorul

$$\nabla_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}-\frac{2\pi ie}{hc}A^{el}_{\mu}.$$

Derivînd, ca de obicei, lagrangeanul în raport cu potenţialele cîmpului electromagnetic, obţinem expresia densităţii curentului electric, condiţionat de mişcarea mezonilor încărcaţi:

$$j_{\nu}=\frac{\partial L}{\partial A^{el}_{\nu}}=\frac{ie}{2hc}(H^{*}_{\nu\mu}A_{\mu}-A^{*}_{\mu}H_{\nu\mu}). \qquad (47,21)$$

Funcţia lui Lagrange, şi prin urmare întreaga teorie, vor fi invariante faţă de transformările de etalonare (calibrare) ale potenţialelor electromagnetice, cu toată includerea explicită a potenţialelor (vezi şi teoria ecuaţiei scalare).

c) *Cîmpul mezonic vectorial în cazul existenţei surselor nucleonice*

Să trecem la stabilirea sistemului complet de ecuaţii vectoriale, cuprinzînd şi sursele care generează cîmpul. Pentru concretizare, vom considera numai surse nucleonice, cu toate că şi particulele uşoare pot juca de asemenea acest rol.

Pentru aceasta, în afară de acţiunea cîmpului mezonilor

$$S_2 = \int L_0 \, (dx),$$

în care lagrangeanul este

$$L_0 = -\frac{1}{16\pi} D_{\mu\nu} D_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{8\pi} A_\mu A_\mu, \tag{47,22}$$

iar tensorul

$$D_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu},$$

ştiind că

$$\begin{pmatrix} D_{23} & D_{31} & D_{12} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x & B_y & B_z \\ -iD_x, & -iD_y, & -iD_z \end{pmatrix},$$

trebuie să mai introducem funcţia acţiunii mixte S_3, care determină interacţiunea cîmpului mezonic cu nucleonii.

Ca şi în cazurile precedente, expresia lui S_3 sa va scrie

$$S_3 = -\int ds \int \rho \, (x - x') \, U(x) \, (dx), \tag{47,23}$$

unde expresia invariantă a interacţiunii $U(x)$ va fi egală — pentru cîmpul vectorial — cu suma produselor dintre potenţialul vectorial A_μ al cîmpului mezonic şi vectorul vitezei nucleonilor $\alpha_\mu = \frac{v_\mu}{c}$ şi dintre tensorul cîmpului $D_{\mu\nu}$ al mezonilor şi tensorul $\alpha_{\mu\nu}$ care caracterizează momentele cvasimagnetice şi cvasielectrice ale nucleonilor, adică [1])

$$U = -g\alpha_\mu A_\mu - \frac{1}{2} f \alpha_{\mu\nu} D_{\mu\nu}. \tag{47,24}$$

Nu există alte combinaţii de invarianţi (faţă de funcţiile cîmpului mezonic), pentru energia de interacţiune a cîmpului vectorial au nucleonii care să satisfacă de asemenea condiţia derivatelor de ordin minim (doi).

Pentru a face o analiză mai profundă a ultimei expresii, să ne oprim iarăşi asupra expresiei interacţiunii mixte din punctul de

---

[1]) Legătura dintre aproximaţia clasică a mărimilor α_μ, $\alpha_{\mu\nu}$ şi matricile corespunzătoare ale lui Dirac este dată de formula (46,4).

vedere al teoriei cuantice. Expresia (47,24) poate fi scrisă în funcţie de matricile lui Dirac, cu ajutorul egalităţii

$$U=-g\alpha_\mu A_\mu-\frac{1}{2}f\alpha_{\mu\nu}D_{\mu\nu}=$$
$$=g(\varphi-\vec{\alpha}\vec{A})-f(\rho_3\vec{\sigma}\vec{B}+\rho_2\vec{\sigma}\vec{D}).$$

Aici α_μ este matricea vitezei, iar $\alpha_{\mu\nu}$ este matricea momentelor magnetic şi electric, matrice legată de matricele ρ_2 şi ρ_3 şi de matricea spinului $\vec{\sigma}$ prin relaţia (46,3).

Ţinînd seamă că, pentru viteze mici, $\rho_3 \to 1$, iar $\vec{\alpha}$, $\rho_2 \sim \frac{v}{c}$, avem următoarea expresie pentru U, valabilă în aproximaţia nerelativistă:

$$U(x)=g\varphi-f\vec{\sigma}\vec{B},$$

în care trebuie să înţelegem prin $\vec{\sigma}$, la limita clasică — un vector unitar care caracterizează direcţia spinului.

De aceea, în aproximaţia nerelativistă avem pentru un nucleon punctiform

$$S_3=-\int dt'\int\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')\,U(\vec{r},t)\,(d\vec{r})\,dt.$$

De aici, găsim pentru energia potenţială de interacţiune a nucleonului cu cîmpul mezonic:

$$V=\int\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')\,U(\vec{r},t)\,(d\vec{r})\,dt=$$
$$=U(\vec{r}',t')=g\varphi-f(\vec{\sigma}\vec{B}), \qquad (47,25)$$

în care funcţiile de undă φ şi $\vec{B}$ depind de coordonatele nucleonului $\vec{r}', t'$.

Funcţia acţiunii pentru cîmpul mezonic, care ţine seamă şi de expresia de interacţiune cu nucleonii, va fi

$$S=S_2+S_3=\int L\,(dx),$$

unde

$$L=-\frac{1}{16\pi}D_{\mu\nu}D_{\mu\nu}-\frac{k_0^2}{8\pi}A_\mu A_\mu+$$
$$+\int ds\,\rho(x-x')\left(g\alpha_\mu A_\mu+\frac{1}{2}f\alpha_{\mu\nu}D_{\mu\nu}\right). \qquad (47,26)$$

Cu ajutorul ecuaţiilor lui Euler $\frac{\partial}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} - \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0$, găsim sistemul fundamental de ecuaţii vectoriale ale cîmpului mezonic în cazul existenţei surselor

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + k_0^2 A_\mu = 4\pi j_\mu, \tag{47,27}$$

$$H_{\mu\nu} = 4\pi \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = D_{\mu\nu} - 4\pi S_{\mu\nu}, \tag{47,28}$$

tensorul momentului cvasimagnetic şi vectorul curentului nucleonilor fiind respectiv

$$S_{\mu\nu} = f \int \rho (x - x') \alpha_{\mu\nu} ds,$$

$$j_\nu = g \int \rho (x - x') \alpha_\nu ds.$$

Trecînd la notaţii tridimensionale, să introducem următorii vectori:

1) vectorul intensităţii cvasimagnetice şi cvasielectrice

$$H_x = H_{23}; \quad E_x = -iH_{41},$$

2) vectorul inducţiei cvasimagnetice şi cvasielectrice

$$B_x = D_{23} = \mathrm{rot}_x \vec{A}; \quad D_x = -iD_{41} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

3) vectorul polarizaţiei cvasimagnetice şi cvasielectrice

$$S_x = S_{23}, \ldots; \quad T_x = iS_{41}, \ldots$$

Atunci, ecuaţiile (47,27) care formează aşa-numitul prim grup al ecuaţiilor lui Proca, vor căpăta forma

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\, \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + k_0^2 \vec{A} &= 4\pi \vec{j}, \\ \mathrm{div}\, \vec{E} + k_0^2 \varphi &= 4\pi \rho, \end{aligned}\right\} \tag{47,29}$$

în care $\vec{j}$, $i\rho$ formează împreună curentul cvadridimensional.

Exact la fel, avem pentru al doilea grup de ecuaţii vectoriale (47,28)

$$\vec{H}=\vec{B}-4\pi\vec{S},\qquad\qquad \vec{E}=\vec{D}+4\pi\vec{T}. \tag{47,30}$$

Dacă masa de repaus este nulă, $k_0^2\to 0$, obţinem ecuaţiile cîmpului electromagnetic într-o formă mai generală decît în electrodinamică, deoarece momentele magnetice ale electronilor, în conformitate cu mecanica cuantică relativistă, apar datorită unei mişcări caracteristice a sarcinii şi sînt egale cu magnetoul lui Bohr $\mu_e=\frac{eh}{4\pi mc}$. In teoria iniţială a lui Dirac, momentele suplimentare ($\vec{S}$ şi $\vec{T}$) nu erau introduse (mai amănunţit vezi anexa). Totuşi, teoria noastră este în întregime aplicabilă pentru electrodinamică, dacă punem $k_0^2=0$ şi dacă pentru surse alături de momentul cinematic introducem şi un moment propriu, aşa ca de exemplu la protoni, al căror moment magnetic este mai mare decît magnetonul nuclear al lui Bohr μ_0, adică este egal cu suma momentelor cinematic şi propriu,—sau aşa cum este cazul la neutroni, care posedă numai un moment magnetic propriu (vezi § 44).

Vom observa că momentele magnetice proprii ale nucleonilor au ordinul de mărime al magnetonului nuclear al lui Bohr

$$\mu_0\sim\frac{eh}{4\pi Mc},$$

întrucît la numitor este masa nucleonilor M. De aceea, la particulele care posedă o sarcină şi un moment magnetic, (proton), proprietăţile magnetice se manifestă deosebit de puternic numai într-un domeniu relativist faţă de nucleoni.

In mezodinamică, pentru ca forţele cvasimagnetice (adică necentrale) şi cele cvasielectrice să aibă acelaşi ordin de mărime în domeniul nerelativist faţă de nucleon, trebuie să punem

$$f\sim\frac{gh}{4\pi\mu c}\sim\frac{g}{k_0},$$

adică trebuie să punem la numitor masa μ a mezonului în locul mesei nucleonului M.

In cazul în care cîmpul mezonic vectorial este generat de particulele uşoare (electroni, pozitroni, neutrino), în membrul drept al ecuaţiilor trebuie să includem în locul termenilor care descriu nucleoni, termeni complet analogi, care să caracterizeze particulele uşoare, înlocuind sarcinile g şi momentele f, respectiv prin noile constante de cuplaj g' şi f'.

Dacă admitem totuşi ipoteza iniţială a lui Yukawa ca descriere fenomenologică caracteristică a dezintegrării β, atunci, conform datelor teoriei dezintegrării β, trebuie să punem constantele de cuplaj dintre mezonii încărcaţi şi cîmpul electro-neutrinic, egale cu:

$$g'=10^{-8}g; \quad f'\sim\frac{g'}{k_0}.$$

Nu este exclusă posibilitatea ca mezonii nucleari neutri să se dezintegreze într-o pereche de particule (electron-pozitron) sau două cuante γ (de pildă mezonii π_0). De aceea ar fi trebuit să ne aşteptăm la o emisie directă a unei perechi de particule sau fotoni γ de către anumite nuclee nestabile.

d) *Forţele nucleare vectoriale*

Pentru a găsi energia de interacţiune dintre doi nucleoni punctiformi în repaus trebuie să găsim mărimea cîmpului mezonic generat de un nucleon în repaus şi să o substituim în expresia energiei de legătură cu cîmpul mezonic a celuilalt nucleon.

In cazul unui nucleon punctiform, în repaus în originea coordonatelor, avem conform (47,28)

$$\rho=g\delta(\vec{r}), \quad \vec{S}=f\vec{\sigma}_A\,\delta(\vec{r}),$$

în care $\vec{\sigma}_A$ este un vector unitar care determină direcţia spinului şi prin aceasta, direcţia momentului magnetic al primului nucleon. In conformitate cu datele experimentale, să presupunem că cvasisarcinile celor doi nucleoni sînt egale între ele.

Pentru un nucleon în repaus, curentul $\vec{j}$, precum şi componentele tensorului momentului cvasielectric sînt nule ($\vec{j}=\vec{T}=0$.

Dacă nucleonul se mişcă, atunci componentele curentului cvadridimensional j_μ, precum şi tensorii momentelor cvasimagnetic şi cvasielectric pot fi uşor exprimate în funcţie de componentele de repaus, cu ajutorul regulelor analizei tensoriale

$$j\sim\frac{v}{c}\rho \quad \text{şi} \quad T\sim\frac{v}{c}S.$$

In cazul static, ecuaţiile pentru cîmpul mezonic generat de un nucleon punctiform capătă forma

$$\operatorname{rot}\vec{H}+k_0^2\vec{A}=0,$$

$$\operatorname{div}\vec{E}+k_0^2\varphi=4\pi g\delta(\vec{r}),$$

$$\vec{E}+\operatorname{grad}\varphi=0,$$

$$\vec{H}-\operatorname{rot}\vec{A}=-4\pi f\vec{\sigma}_A\delta(\vec{r}).$$

Condiţia lui Lorentz capătă forma

$$\operatorname{div}\vec{A}=0.$$

Eliminînd din ultimele ecuaţii cîmpurile mezonice $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, căpătăm următoarele ecuaţii diferenţiale pentru determinarea potenţialelor care generalizează—datorită termenilor cu k_0—, relaţiile obişnuite ale electro—şi magnetostaticii:

$$(\nabla^2-k_0^2)\varphi=-4\pi g\delta(\vec{r}),$$

$$(\nabla^2-k_0^2)\vec{A}=-4\pi f\operatorname{rot}\vec{\sigma}_A\delta(\vec{r}).$$

Soluţia ultimelor ecuaţii are, conform § 14, forma

$$\varphi=g\frac{e^{-k_0r}}{r},$$

$$\vec{A}=f\operatorname{rot}\left(\vec{\sigma}_A\frac{e^{-k_0r}}{r}\right).$$

De aici, găsim conform (47,25), energia de interacţiune a doi nucleoni prin intermediul unui cîmp vectorial real legat de o masă de repaus (adică prin intermediul mezonilor vectoriali neutri)

$$V=g^2\frac{e^{-k_0r}}{r}-f^2\left(\vec{\sigma}_B\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\sigma}_A\frac{e^{-k_0r}}{r}\right).$$

Ţinînd seama de identităţile vectoriale:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{\sigma}_A\frac{e^{-k_0r}}{r}\right)=-\left[\vec{\sigma}_A\operatorname{grad}\frac{e^{-k_0r}}{r}\right],$$

$$-\operatorname{rot}\left[\vec{\sigma}_A\operatorname{grad}\frac{e^{-k_0r}}{r}\right]=-\vec{\sigma}_A\nabla^2\frac{e^{-k_0r}}{r}+\nabla(\vec{\sigma}_A\nabla)\frac{e^{-k_0r}}{r},$$

$$\nabla^2\frac{e^{-k_0r}}{r}=k_0^2\frac{e^{-k_0r}}{r}\quad(r\neq0),\tag{47,31}$$

obţinem

$$V=g^2\frac{e^{-k_0r}}{r}+f^2[k_0^2(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B)-(\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla)]\frac{e^{-k_0r}}{r}. \quad (47,32)$$

Dezvoltînd ultima expresie obţinem

$$V=g^2\frac{e^{-k_0r}}{r}+f^2\left[\frac{2}{3}k_0^2(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B)-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{k_0}{r}+\frac{k_0^2}{3}\right)S_{AB}\right]\frac{e^{-k_0r}}{r}, \quad (47,33)$$

unde factorul S_{AB} este dat de formula (46,13).

Primul termen cvasielectric al interacţiunii, proporţional cu g^2, coincide cu energia de interacţiune din cazul scalar.

Al doilea termen, proporţional cu f^2, ne dă energia cvasimagnetică dipolară de interacţiune. La distanţe mari, $r>\frac{1}{k_0}$, datorită factorului e^{-k_0r}, întreaga interacţiune se anulează rapid, astfel încît, după cum trebuia să ne aşteptăm, forţele au un caracter de acţiune la distanţă mică.

La distanţe mici $\left(r<\frac{1}{k_0}\right)$, ceea ce corespunde lui k_0 tinzînd către zero, primul termen, ca şi în cazul scalar, capătă o formă coulombiană

$$V_1=\frac{g^2}{r},$$

iar termenul al doilea (ca şi în cazul pseudoscalar) capătă pentru $k_0\to 0$ forma energiei de interacţiune a doi dipoli magnetici, asigurînd astfel existenţa forţelor necentrale şi de spin ($\vec{m}_A=f\vec{\sigma}_A$ şi $\vec{m}_B=f\vec{\sigma}_B$):

$$V_2=-(\vec{m}_A\nabla)(\vec{m}_B\nabla)\frac{1}{r}.$$

Datorită neutralităţii cîmpului, interacţiunea de forma (47,33) are loc între doi nucleoni oarecari (proton-neutron, proton-proton, neutron-neutron), ceea ce asigură direct independenţa de sarcină a forţelor nucleare.

Von sublinia acum că mecanica cuantică, în cazul transportului interacţiunii prin cîmpul mezonic vectorial neutru, reproduce — cu ajutorul calculului în aproximaţia de ordinul doi — exact aceeaşi expresie a energiei de interacţiune între oricare nucleoni.

In cazul transportului interacţiunii prin mezoni vectoriali încărcaţi (cîmpul complex), la fel ca şi pentru cazul cîmpului scalar sau pseudoscalar încărcat, se adaugă numai factorul specific P—operatorul de schimb al sarcinilor nucleonilor al lui Heisenberg care devine egal în valoarea absolută cu 1 în cazul interacţiunii protonului cu neutronul şi egal cu 0 în cazul interacţiunii între doi protoni sau doi neutroni. Atunci energia de interacţiune a diverşilor nucleoni, condiţionată de cîmpul vectorial încărcat, este egală cu $V' = VP$, unde V este dat de (47,33).

Pentru a obţine o interacţiune între nucleoni de acelaşi tip prin intermediul mezonilor încărcaţi, trebuie ca şi în cazul cîmpului scalar, pseudoscalar şi altor cîmpuri, să efectuăm calculul în aproximaţia de ordinul patru a teoriei cuantice a perturbaţiilor, lucru care duce la expresii ce diferă esenţial de energia de interacţiune între protoni şi neutroni, energie care se obţine calculînd în aproximaţia de ordinul doi.

Deoarece faptele experimentale sînt în favoarea unei independenţe aproximative de sarcină, cel puţin de ordinul forţelor nucleare, trebuie să tragem concluzia că cel puţin o anumită fracţiune a interacţiunii dintre nucleoni trebuie să se realizeze prin cîmpul mezonic neutru. Pe de altă parte, mezonii încărcaţi participă de asemenea incontestabil la transportul interacţiunii, întrucît după cît se pare, numai ei pot asigura caracterul de forţe de schimb al forţelor între proton şi neutron, — caracter care este impus de experienţele asupra difuziei la energii mari — şi asigură saturaţia.

De obicei se ia un amestec de mezoni încărcaţi şi neutri într-o proporţie impusă de experienţă şi care încă nu este stabilită în mod definitiv (mai amănunţit v. § 48).

Avantajul esenţial al forţelor mezonice vectoriale, la fel ca şi al forţelor pseudoscalare nerelativiste, faţă de cele scalare, este existenţa în energia de interacţiune a nucleonilor, a unui termen cvasimagnetic cu factorul S_{AB}, care duce la forţele de spin, într-o concordanţă calitativă cu practica forţelor nucleare [1]).

De aceea nu este de mirare că în teoria modernă a forţelor nucleare, amîndouă aceste cîmpuri se utilizează cel mai frecvent. Totodată însă aceşti termeni cvasimagnetici duc la serioasa dificultate „dipolară" pentru forţele vectoriale.

---

[1]) După cum s-a arătat recent (L. van Hove, Phys. Rev., **75**, 1519, **1949**), termenii dipolari se conservă în cazul cîmpului vectorial chiar după transformările de etalonare (v. § 46), spre deosebire de cazul cîmpului pseudoscalar cînd aceştia se anulează.

Intr-adevăr, datorită unei creşteri inacceptabil de rapide a energiei potenţiale la distanţe mici,

$$r \to 0 \left(V \sim \frac{1}{r^3} \right),$$

stările stabile sînt imposibile, conform teoremei virialului (v. § 44). In calculul concret al efectelor nucleare, trebuie de aceea să tăiem potenţialul forţelor mezonice vectoriale sau pseudovectoriale la un anumit r_0 de ordinul lui 10^{-13} cm, determinînd mai precis limita de tăiere din datele empirice şi alegînd potenţialul pentru $r < r_0$ (de pildă $V = \mathrm{const}$ sau $V = 0$). Desigur o asemenea stare de lucruri nu este deloc satisfăcătoare şi constituie pînă în ultimul timp dificultatea cea mai serioasă a întregii teorii a forţelor nucleare.

Observăm că în cazul difuziei mezonilor pe nucleoni, difuzie condiţionată de forţele nucleare specifice, aceiaşi termeni dipolari duc şi la dificultatea creşterii nelimitate a secţiunii eficace.

Nu există pînă astăzi o metodă universală de rezolvare a dificultăţii dipolare, valabilă în acelaşi timp şi în teoria interacţiunii şi în teoria difuziei mezonilor vectoriali: transformarea de etalonare care a permis să se elimine termenii dipolari în cazul pseudoscalar, duce în cazul vectorial şi pseudovectorial — în cel mai bun caz — numai la o eliminare a părţii longitudinale a cîmpului. Aceasta corespunde faptului că în calculul relativist cuantic, ţinînd seamă de viteza nucleonilor pînă la termenii de ordinul doi, se păstrează, în cazul vectorial, termenii de tipul r^{-3}.

In paragrafele care urmează ne vom opri asupra unora dintre încercările de a înlătura aceste dificultăţi, atît în problema interacţiunii cît şi în problema difuziei.

§ 48. Cîmpul pseudovectorial. Dificultăţile dipolare

a) *Cîmpul mezonic pseudovectorial*

Să examinăm, în încheiere, cîmpul mezonic pseudovectorial real, la baza căruia se pune pseudovectorul real $\tilde{A}_\alpha$.

Pentru a descrie cîmpul pseudovectorial, să introducem înainte de toate tensorul antisimetric de ordinul trei $A_{\alpha\beta\gamma}$ din care putem forma tensorul antisimetric de ordinul 2,

$$D_{\beta\gamma} = -\frac{\partial A_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}. \tag{48,1}$$

Tensorul antisimetric $A_{\alpha\beta\gamma}$ este legat de pseudovectorial $\tilde{A}_\delta$ prin relaţia

$$A_{\beta\gamma\delta}=\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{A}_\alpha.$$

Tot aşa, în locul tensorului $D_{\alpha\beta}$ se poate introduce pseudotensorul sau vectorul dual $\tilde{D}_{\gamma\delta}$:

$$D_{\gamma\delta}=\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{D}_{\alpha\beta}.$$

Substituim ultima relaţie în egalitatea (48,1), obţinem ecuaţia

$$\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{D}_{\alpha\beta}=-\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial\tilde{A}_\alpha}{\partial x_\beta}$$

cu soluţia

$$\tilde{D}_{\alpha\beta}=\frac{\partial\tilde{A}_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\tilde{A}_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Funcţia lui Lagrange care duce la ecuaţii liniare cu derivate de ordin cel mai mic, trebuie să aibă forma

$$L=-\frac{1}{16\pi}D_{\mu\nu}D_{\mu\nu}-\frac{k_0^2}{48\pi}A_{\mu\nu\varepsilon}A_{\mu\nu\varepsilon}.$$

Substituind aici, în locul tensorilor, mărimile pseudotensoriale, căpătăm

$$L=-\frac{1}{16\pi}\tilde{D}_{\mu\nu}\tilde{D}_{\mu\nu}-\frac{k_0^2}{8\pi}\tilde{A}_\mu\tilde{A}_\mu. \tag{48,2}$$

De aici se vede că funcţia lui Lagrange, în lipsa surselor cîmpului pseudovectorial, coincide cu funcţia lui Lagrange pentru cîmpul vectorial.

De aceea, atît pentru ecuaţia undelor, cît şi pentru tensorul energiei, al spinului etc. sînt aplicabile în întregime rezultatele teoriei cîmpului vectorial, cu condiţia ca să înlocuim mărimile vectoriale prin cele pseudovectoriale. In particular, spinul cîmpului pseudovectorial trebuie să fie egal cu unu.

Deosebirea dintre cele două cîmpuri apare la determinarea energiei de interacţiune dintre nucleoni şi cîmpul mezonic.

Partea mixtă S_3 a funcţiei acţiunii va avea forma:

$$S_3=-\int ds\int \rho(x-x')\,U(x)\,(dx), \tag{48,3}$$

unde termenul invariant al interacţiunii $U(x)$ trebuie să fie — în general — egal cu suma produselor: pseudovectorul nucleonilor înmulţiţi cu pseudovectorul cîmpului şi pseudotensorul nucleonilor înmulţit cu pseudotensorul cîmpului, adică, conform § 46 a:

$$U(x)=-g\sigma_\mu\tilde{A}_\mu-\frac{i}{2}f\alpha_{\mu\nu}\tilde{D}_{\mu\nu}=g(\rho_1\tilde{\varphi}-\vec{\sigma}\vec{\tilde{A}})-f(\rho_3\vec{\sigma}\vec{\tilde{D}}-\rho_2\vec{\sigma}\vec{\tilde{B}}),$$

unde $\tilde{D}_{23}=\tilde{B}_x$; $\tilde{D}_{14}=-i\tilde{D}_x$ ş. a. m. d.

De aici căpătăm pentru mezonii pseudovectoriali, în locul ecuaţiilor (47,27) şi (47,28), următoarele ecuaţii:

primul grup de ecuaţii:

$$\frac{\partial\tilde{H}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}+k_0^2\tilde{A}_\mu=4\pi\tilde{j}_\mu,$$

al doilea grup:

$$\tilde{H}_{\mu\nu}=4\pi\frac{\partial L}{\partial\tilde{A}_{\mu,\nu}}=\tilde{D}_{\mu\nu}-4\pi\tilde{S}_{\mu\nu},$$

unde

$$\tilde{j}_\mu=g\int\rho(x-x')\,\sigma_\mu ds,$$

$$\tilde{S}_{\mu\nu}=if\int\rho(x-x')\,\tilde{\alpha}_{\mu\nu}ds.$$

In cazul statistic, pentru cîmpul generat de un necleon punctiform în repaus, situat în originea sistemului de coordonate, avem:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{\tilde{H}}+k_0^2\vec{\tilde{A}}=4\pi g\vec{\sigma}_A\delta(\vec{r}),\\ \operatorname{div}\vec{\tilde{E}}+k_0^2\tilde{\varphi}=0,\\ \vec{\tilde{E}}+\operatorname{grad}\tilde{\varphi}=4\pi f\vec{\sigma}_A\delta(\vec{r}),\\ \vec{\tilde{H}}-\operatorname{rot}\vec{\tilde{A}}=0.\end{gathered} \tag{48,4}$$

Luînd în considerare faptul că $\operatorname{div} \operatorname{rot} \tilde{\vec{H}} \equiv 0$ găsim în locul condiției Lorentz:

$$\operatorname{div} \tilde{\vec{A}} = \frac{4\pi g}{k_0^2} \operatorname{div} \vec{\sigma}_A \delta(\vec{r}) = \frac{4\pi g}{k_0^2} \vec{\sigma}_A \nabla \delta(\vec{r}).$$

Eliminînd din ultimele ecuații vectorii $\tilde{\vec{H}}$ și $\tilde{\vec{E}}$ și luînd în considerare condiția modificată a lui Lorentz, găsim ecuațiile diferențiale pentru determinarea componentelor cîmpurilor $\tilde{\vec{A}}$ și $\tilde{\vec{D}}$:

$$(\nabla^2 - k_0^2) \tilde{\vec{A}} = \frac{4\pi g}{k_0^2} [\nabla (\nabla \vec{\sigma}_A) \delta(\vec{r}) - k_0^2 \vec{\sigma}_A \delta(\vec{r})],$$

$$(\nabla^2 - k_0^2) \tilde{\vec{D}} = -4\pi f \nabla (\nabla \vec{\sigma}_A) \delta(\vec{r}),$$

în care $\tilde{\vec{D}} = -\operatorname{grad} \varphi$. Soluția lor o putem reprezenta sub forma:

$$\tilde{\vec{A}} = -\frac{g}{k_0^2} [\nabla (\nabla \vec{\sigma}_A) - \vec{\sigma}_A k_0^2] \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \tag{48,5}$$

$$\tilde{\vec{D}} = f \nabla (\nabla \vec{\sigma}_A) \frac{e^{-k_0 r}}{r}.$$

In sfîrșit, pentru a găsi energia de interacțiune a doi nucleoni punctiformi trebuie să substituim valorile cîmpurilor generate de nucleonul A, în energia V de interacțiune a nucleonului B cu acest cîmp mezonic.

După cum se vede din (48,3) energia de interacțiune este

$$V = \int \rho (x - x') U(x) (dx) = U(x'),$$

adică în cazul nerelativist:

$$V = -g (\vec{\sigma}_B \tilde{\vec{A}}) - f (\vec{\sigma}_B \tilde{\vec{D}}), \tag{48,6}$$

în care $\vec{\sigma}_B$ este un vector unitar, care caracterizează direcția spinului nucleonului B.

Substituind (48,5) în (48,6), găsim expresia căutată a energiei de interacţiune dintre doi nucleoni, realizată prin intermediul cîmpului pseudovectorial neutru, în aproximaţia nerelativistă pentru nucleoni, adică la distanţe $r \gg \frac{h}{Mc}$:

$$V = \frac{g^2}{k_0^2}[(\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla) - k_0^2(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B)]\frac{e^{-k_0 r}}{r} - f^2(\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla)\frac{e^{-k_0 r}}{r} \cdot \quad (48,7)$$

In cazul transportului forţelor prin intermediul unui cîmp încărcat, energia de interacţiune a nucleonilor va fi $V' = VP$, unde P este operatorul de schimb al sarcinilor.

Termenii care conţin forţele necentrale $\sim(\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla)$, duc la aceleaşi dificultăţi dipolare ($V \sim r^{-3}$, pentru $r \to 0$), de care am amintit încă de cînd am studiat cîmpul pseudoscalar şi cel vectorial

b) *Forma generală a interacţiunii nucleonilor*

Rezumînd paragrafele precedente, vedem că legea statică a nteracţiunii dintre doi nucleoni (A şi B), lege datorită cîmpului mezonic neutru, trebuie — conform teoriei clasice şi cuantice — să aibă forma:

1) pentru mezoni scalari:

$$V_1 = -g_1^2\frac{e^{-k_1 r}}{r}, \quad (48,8)$$

2) pentru mezoni pseudoscalari:

$$V_2 = f_2^2(\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla)\frac{e^{-k_2 r}}{r}, \quad (48,9)$$

2a) pentru mezoni pseudoscalari, cu o anumită precizare relativistă:

$$V_2' = -C^2\rho_2^A\rho_2^B\frac{e^{-k_2 r}}{r},$$

3) pentru mezoni vectoriali:

$$V_3 = g^2\frac{e^{-k_3 r}}{3} + f_3^2[k_3^2(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B) - (\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla)]\frac{e^{-k_3 r}}{r}, \quad (48,10)$$

4) pentru mezoni pseudovectoriali:

$$V_4 = \frac{g_4^2}{k_4^2}[(\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla) - k_4^2(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B)]\frac{e^{-k_4 r}}{r} - f_4^2(\vec{\sigma}_A\nabla)(\vec{\sigma}_B\nabla)\frac{e^{-k_4 r}}{r}. \quad (48,11)$$

In cazul interacţiunii prin intermediul unor mezoni încărcaţi teoria cuantică duce la aceleaşi expresii, însă înmulţite cu operatorul de schimb al sarcinilor nucleonilor, altfel zis, cu operatorul de schimb al coordonatelor şi al spinilor.

Pentru generalizare am ţinut seama aici de faptul că fiecare tip de mezoni poate avea, în cazul general, diverse mase.

Pentru claritate să scriem din nou expresia energiei de interacţiune a doi nucleoni în repaus, interacţiune realizată prin intermediul cîmpului mezonic de toate cele patru tipuri simultan ($k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_0$), separînd forţele de spin şi fără spin, centrale şi necentrale:

$$V = [C_1 + C_2 (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B) + C_3 (\vec{\sigma}_A \nabla)(\vec{\sigma}_B \nabla)] \frac{e^{-k_0 r}}{r}.$$

Din punctul de vedere al caracterului de forţe de schimb, forţele scalare neutre sînt de tipul lui Wigner, forţele scalare încărcate de tipul lui Heisenberg. Teormenii de spin de tipul $(\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B)$ în cazurile vectorial, pseudovectorial şi pseudoscalar, duc pentru cîmpuri neutre la forţele lui Bartlett, întrucît operatorul de schimb al spinilor este după Dirac: $P_\sigma = \frac{1 + (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B)}{2}$. Forţele lui Majorana apar numai în cazul unui schimb de particule încărcate între nucleoni şi aceasta pentru toate cîmpurile, afară de cel scalar, întrucît schimbul coordonatelor este echivalent cu schimbul de tip Heisenberg al coordonatelor şi spinilor, combinat numai cu schimbul lui Bartlett al spinilor.

Cea mai simplă lege de interacţiune, lege datorită mezonilor scalari şi care explică caracterul de acţiune la distanţă mică al forţelor duce la independenţă faţă de spin şi de aceea trebuie să fie înlăturată.

Celelalte trei tipuri de mezoni duc la forţele de spin şi cele necentrale în aproximaţia nerelativistă. In cazul relativist, ţinînd seamă de viteza nucleonilor pînă la ordinul doi, termenii dipolari dispar, aşa cum s-a arătat în cazul pseudoscalar.

Din nefericire, o dată cu apariţia forţelor necentrale de acest tip, apar dificultăţile dipolare, deoarece expresia caracteristică:

$$(\vec{\sigma}_A \nabla)(\vec{\sigma}_B \nabla) \frac{e^{-k_0 r}}{r} = S_{AB} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{k_0}{r} + \frac{k_0^2}{3}\right) \frac{e^{-k_0 r}}{r} + \\ + \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B) k_0^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \tag{48,12}$$

[v. de asemenea (46,12)] conţine termeni proporţionali cu r^{-3}, iar conform teoremei virialului nu pot apărea deci stări stabile.

S-a propus de asemenea[1]) să se ia o combinaţie nerelativistă de mezoni pseudoscalari şi vectoriali, punînd:

$$k_2 = k_3,\ f_2 = f_3.$$

In acest caz legea de interacţiune capătă forma

$$V = V_2 + V_3 = g_3^2 \frac{e^{-k_3 r}}{r} + f_3^2 k_3^2 (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B) \frac{e^{-k_3 r}}{r},$$

în care de asemenea sînt eliminate forţele necentrale.

Acest procedeu poate fi utilizat deopotrivă, atît în teoria cîmpurilor neutre, cît şi în teoria cîmpurilor încărcate. Ori prin aceasta se elimină posibilitatea de a explica momentul cvadrupolar al deuteronului cu ajutorul forţelor necentrale. Möller şi Rosenfeld au sperat să obţină forţele necentrale sub forma unui mic adaos, în cazul cînd se ţine seamă de corecţiile relativiste. Totuşi, după cum au arătat calculele ulterioare, corecţiile relativiste ne dau o valoare prea mică pentru momentul cvadrupolar.

Schwinger[2]) a propus o arecare modificare a unui astfel de amestec, luînd mezoni vectoriali şi pseudoscalari de mase diferite, dar punînd ca mai înainte $f_2 = f_3$.

Atunci, termenii dipolari $\sim r^{-3}$ care provoacă dificultăţi, dispar, iar semnul interacţiunii dipolare tensoriale va fi determinat de diferenţa maselor.

Intr-adevăr, avem în acest caz

$$V = V_2 + V_3 = [g_3^2 + f_3^2 k_3^2 (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B)] \frac{e^{-k_3 r}}{r} - \\ - f_3^2 (\vec{\sigma}_A \nabla)(\vec{\sigma}_B \nabla) \frac{e^{-k_3 r} - e^{-k_2 r}}{r} \qquad (48,13)$$

sau, ţinînd seama de relaţia (48,12), găsim că pentru $r \to 0$,

$$V = [g_3^2 + f_3^2 k_3^2 (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B)] \frac{1}{r} + \\ + \frac{f_3^2}{6} (k_3^2 - k_2^2) \frac{1}{r} [S_{AB} - 2 (\vec{\sigma}_A \vec{\sigma}_B)], \qquad (48,14)$$

[1]) C. Möller and. L. Rosenfeld, Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd., **17**, Nr. 8, 1940.

[2]) J. Schwinger, Phys. Rev., **61**, 387, 1942.

în care, conform (46,13)

$$S_{AB}=3(\vec{\sigma}_A\vec{r}^0)(\vec{\sigma}_B\vec{r}^0)-(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B).$$

La rezolvarea problemei deuteronului cu un astfel de potenţial, este indicat să punem: $g_3=0$, în cazul unui cîmp încărcat, iar raportul maselor: $\frac{\mu_3}{\mu_2}=\frac{k_3}{k_2}$ să-l luăm egal aproximativ cu 1,6. Atunci, pentru momentul cvadrupolar căpătăm un semn corect, dar o valoare destul de mică, aproape de 3 ori mai mică decît cea experimentală.

Un alt mijloc, cu totul provizoriu pentru înlăturarea termenilor dipolari care duc la dificultăţi, constă în tăierea potenţialului la o distanţă mică r_0, energia potenţială în intervalul $(0-r_0)$ fiind considerată fie constantă $V=V(r_0)=\text{const}$, fie egală cu zero.

Este absolut evident că acest procedeu este nesatisfăcător din punct de vedere principial: de exemplu nu păstrează invarianţa relativistă. Totuşi tăierea potenţialului se pare că corespunde — în oarecare măsură — cu considerarea unei „raze“ eficace oarecare a particulelor şi nu este cu totul absurdă din punct de vedere fizic. Raza critică r_0 de acţiune a forţelor se alege comparînd concluziile teoriei cu datele experimentale la aplicarea ei de exemplu la deutroni.

In cazul forţelor neutre vectoriale, Bethe a obţinut valoarea

$$r_0\sim 0{,}32-0{,}4\,\frac{h}{\mu c},$$

care, în mod practic, nu depinde de alegerea potenţialului: $V=0$ sau $V=V(r_0)$ pentru $r<r_0$.

Vom observa că termenii dipolari pot fi eliminaţi în mod automat în teoria forţelor nucleare prin introducerea unor ecuaţii cu derivate superioare [1]), de tipul celor propuse în teoria cîmpului electromagnetic.

In acest caz, ecuaţia statică fundamentală pentru determinarea potenţialului generat de o sarcină punctiformă unitate:

$$(\nabla^2-k_0^2)f=4\pi\delta(\vec{r}), \tag{48,15}$$

cu soluţia

$$f=-\frac{e^{-k_0 r}}{r}, \tag{48,15 a}$$

---

[1]) Д. Иваненко и А. Соколов, ЖЭТФ, 14, 379, 1944.

rebuie să fie înlocuită prin ecuaţia de ordinul patru:

$$(\nabla^2-k_1^2)(\nabla^2-k_2^2)f_2=-4\pi(k_1^2+k_2^2)\delta(\vec{r}).$$

Soluţia ultimei ecuaţii poate fi pusă sub forma:

$$f_2=-\frac{k_1^2+k_2^2}{k_2^2-k_1^2}\,\frac{e^{-k_1r}-e^{-k_2r}}{r}. \tag{48,16}$$

Această expresie, pentru $k_2\to\infty$, trece în potenţialul lui Yukawa

$$f_\infty=-\frac{e^{-k_1r}}{r},$$

iar pentru $k_1=0$, ne dă potenţialul:

$$f_0=-\frac{1-e^{-k_2r}}{r},$$

găsit de către Bopp şi Podolsky în electrodinamica lor generalizată (v. § 33).

Dezvoltînd teoria derivatelor superioare pentru particule scalare, pseudoscalare, etc. putem obţine uşor pentru energia de interacţiune dintre nucleoni, legile de tipul (48,8), (48,9), (48,10) şi (48,11), în care trebuie să punem potenţialul (48,16) în locul potenţialului (48,15 a).

După cum se vede din analiza formulei (48,13) termenii dipolari trebuie să dispară atunci, atît pentru interacţiunea pseudoscalară, cît şi pentru cea vectorială.

Din păcate, teoria derivatelor superioare întîmpină dificultăţi la generalizarea ei pentru cazul cuantic, deoarece particulele cu o masă mai mare ($k_2>k_1$) trebuie să posede o energie negativă (v. de asemenea § 33).

Nu este greu de înţeles, că introducînd în ecuaţiile diferenţiale derivatele de ordin şi mai înalt:

$$(\nabla^2-k_1^2)(\nabla^2-k_2^2)\dots(\nabla^2-k_n^2)f=$$
$$=-4\pi(-1)^n k_1^2k_2^2\dots k_n^2\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+\dots+\frac{1}{k_n^2}\right)\delta(\vec{r}),$$

putem descrie comportarea particulelor cu diverse mase ($k_1<k_2<\dots$ $\dots<k_n$). La fel ca şi în cazul a două mase, funcţia lui Green a ecuaţiilor cu derivate superioare va fi o combinaţie liniară a funcţiilor lui Green pentru ecuaţiile de ordinul doi de tipul (48,15) [1]).

[1]) Ne vom opri mai amănunţit asupra acestei probleme în anexă.

In afară de aceasta în teoria forțelor nucleare este esențial să ținem seamă de faptul că constantele de cuplaj ale nucleonilor cu cîmpul mezonic, sau cvasisarcinile mezonice ale nucleonilor, g, sînt mari în comparație cu sarcina e, cu alte cuvinte constantele mezonice corespunzătoare de structură fină $\beta=\frac{2\pi g^2}{hc}\approx\frac{1}{5}$ sînt mai mari decît constanta lui Sommerfeld a structurii fine $\alpha=\frac{2\pi e^2}{hc}\sim\frac{1}{137}$. Datorită acestui fapt, cuplajul nucleonilor cu cîmpul mezonic este puternic şi calculul cuantic care utilizează metoda perturbaţiilor, duce la o convergență insuficientă, probabilitățile efectelor de ordin superior fiind cu puțin mai mici decît ale efectelor de ordin inferior. Incercarea de a construi teoria cuplajului puternic a dus la interesanta prevedere a existenţei unor stări excitate superioare ale nucleonilor, în care ei posedă mase puţin diferite de izobarul fundamental şi au atît spini superiori (3/2, 5/2...), cît şi sarcini oarecari ($+2e$, $+3e$,... precum şi $-e$, $-2e$, $-3e$,...). Nu s-a putut încă elabora o teorie relativistă consecventă a cuplajului puternic care să folosească modelul nucleonului extins, şi toate calculele sînt astăzi efectuate după metoda obişnuită a perturbaţiilor, valabilă numai la un cuplaj slab între particule şi cîmp.

In sfîrşit, să ne oprim asupra formulelor empirice ale interacțiunii nucleare, care au fost alese în mod special pentru explicarea unor fenomene legate de interacţiunea dintre nucleoni.

Analiza datelor experimentale ne arată că la energii de interacțiune mai mici decît aproximativ 7 MeV, nu se poate stabili o dependență radială exactă a interacțiunii nucleare, în acelaşi timp însă s-a reuşit să se stabilească domeniul eficace al acţiunii forţelor şi existența termenilor necentrali şi de spin.

Multe rezultate cantitative legate de interacţiunea protonului cu neutronul în fenomene ca problema deuteronului, momentul cvadrupolar al deuteronului, difuzia neutronilor pe protoni (cu energie mai mică decît 7 — 10 MeV), pot fi obţinute dacă presupunem că partea radială a energiei potențiale, incluziv termenii de spin, are forma unei gropi dreptunghiulare[1])

$$V=-\left[1-\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}g(\vec{\sigma}_A\vec{\sigma}_B)+\gamma S_{AB}\right]J(r), \qquad (48,17)$$

---

[1]) Mai amănunțit v. Г. Бете, Лекции по теории ядра, ИЛ, 1949, p. 109.

unde

$$J(r)=\begin{cases} -13{,}80\ \text{MeV} & \text{pentru } r<2{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{cm},\\ 0 & \text{pentru } r>2{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{cm},\end{cases}$$

$g=0{,}0715$, $\gamma=0{,}775$ şi S_{AB} este termenul tensorial care descrie interacţiunea necentrală dată de formula (46,13). Formula (48,17) este valabilă numai pentru descrierea stărilor pare (de pildă stările S) şi este generalizată pentru alte cazuri, în funcţie de caracterul forţelor de schimb alese.

Pentru precizarea ulterioară a caracterului forţelor nucleare, sînt foarte importante experienţele asupra difuziei nucleonilor rapizi (de ordinul a 50—300 MeV) pe nucleoni. Analiza acestor experienţe trebuie să ajute la stabilirea unei legi mai riguroase a interacţiunii dintre nucleoni, inclusiv forma funcţiei cu acţiune la mică distanţă, $J(r)$, tipul operatorului de schimb şi rolul termenului necentral, la fel cum, la timpul lor, experienţele lui Rutherford cu difuzia particulelor α de către atomi, au demonstrat valabilitatea legii lui Coulomb în fenomenele interatomice şi au ajutat la stabilirea modelului nuclear al atomului.

Datele experimentale existente astăzi, cu privire la difuzia pe protoni[1]), a neutronilor cu energie de la 40 la 90 MeV ne permit în primul rînd să tragem concluzia că forţele nucleare, — cel puţin parţial — au un caracter de forţe de schimb, deoarece în sistemul de coordonate legat de centrul de inerţie al particulelor, secţiunea eficace creşte atunci cînd unghiul de difuzie se apropie de 180°. Aceasta înseamnă că neutronul este asvîrlit înapoi sau că protonul iniţial este transformat în neutron, întrucît neutronul primar, transformat în proton, tinde să se mişte înainte.

Pe baza acestei analize, putem ajunge la următoarea formulă semiempirică pentru energia de interacţiune neutron-proton:

$$V=(V_1+V_2)\frac{1+P_x}{2}, \tag{48,18}$$

---

[1]) E. Segré şi alţii, Phys. Rev., **75**, 351, 1949; un referat amănunţit asupra acestei lucrări se găseşte în culegerea de referate ştiinţifice, seria 2, Fascicola I, Teoria particulelor elementare, experienţe cu particule şi cuante γ de mare energie, ИЛ, 1950, pag. 50.

Astăzi se cunosc secţiunile de difuzie pentru ciocniri n-p pînă la energii 2 GeV (2000 MeV) Vezi УФН **52**, 320, (1954) şi „Проблемы Современной физики" nr. 7, 1954. — N. Red. E. T.

unde

$$V_1=g^2\frac{e^{-k_0r}}{r}, \quad V_2=\gamma g^2 S_{AB}\frac{e^{-0,3\,k_0r}}{r}. \qquad (48,19)$$

Aici constanta nucleară a structurii fine are două valori; $\frac{2\pi g^2}{ch}=0,405$ în cazul difuziei particulelor cu spini paraleli şi $\frac{2\pi g^2}{ch}=0,280$ în cazul difuziei particulelor cu spini antiparaleli; $\gamma=0,16$; P_x — operatorul de schimb al coordonatelor.

De aici se vede că energia de interacţiune V constă din două părţi. Partea V_1, avînd caracterul potenţialului lui Yukawa, are o simetrie centrală şi se întinde pînă la o anumită distanţă eficace $R=\frac{1}{k_0}$, care, conform acestor experienţe, este $R=1,2\cdot10^{-13}$ cm, ceea ce corespunde unei mase egale cu 326 mase electronice pentru mezonii corespunzători cîmpului, adică o masă foarte apropiată atît de masa mezonilor π neutri, cît şi de cea a mezonilor π încărcaţi. O altă parte, tensorială, V_2, care duce în particular la momentul cvadrupolar al deuteronului, are o distanţă eficace de trei ori mai mare decît prima parte şi este legată, de aceea, de mezoni cu masa de aproximativ 100 mase electronice.

Este interesant de observat că noi am ajuns ceva mai înainte la concluzia că pot să existe mezoni cu o asemenea masă[1]), utilizînd metoda cîmpului „Selfconsistent" al lui Fock-Hartree pentru construirea teoriei statistice a nucleelor grele.

Experienţele ulterioare asupra difuziei neutronilor de către protoni (pînă la energii de 280 MeV) şi asupra difuziei protonilor pe protoni (pînă la energii de 350 MeV) au confirmat în fond atît existenţa celor două părţi ale energiei de interacţiune[2]) cît şi valoarea ceva mai mare a distanţei eficace a părţii tensoriale. Partea tensorială a interacţiunii trebuie probabil să aibă un caracter mezonic $\left(\frac{e^{-k_0r}}{r}\right)$; din punct de vedere empiric nu este încă exclus caracterul exponenţial (e^{-k_0r}). In ceea ce priveşte prima parte, distanţa eficace a acesteia este prea mică şi de aceea o formă mai exactă a funcţii radiale $J(r)$ poate fi găsită studiind difuzia unor nucleoni şi mai rapizi. Analiza difuziei nucleonilor duce, în domeniul energiilor mari la legi diferite pentru interacţiunea proton-proton

---

1) А. Соколов и Б. Керимов, ДАН, 46, 199, 1949.

2) R. Christian şi alţii, Phys. Rev., **77**, 441, 1950; **79**, 85, 1950.

de o parte şi proton-neutron de altă parte. Această concluzie nu exclude însă posibilitatea unei variaţii radiale identice pentru ambele tipuri de forţe, dar subliniază probabil cu destulă claritate deosebirea caracterelor lor de schimb.

Astfel, stabilirea recentă a formulelor empirice pentru interacţiunea dintre nucleoni urmează calea indicată de teoria de cîmp. In aceste formule empirice, nu numai forma variaţiei tensoriale şi de spin se ia din teoria de cîmp, dar pe măsură ce determinăm forma funcţiei care descrie partea de interacţiune la distanţă mică, — trecem treptat de la forma arbitrară a funcţiei radiale $J(r)$ la forma obţinută în teoria mezonilor.

Deosebirea dintre forţele proton-neutron şi proton-proton, îşi găseşte de asemenea o explicaţie, măcar calitativă. Intr-adevăr în aproximaţia de ordinul doi, interacţiunea proton-proton poate fi transportată numai de mezoni neutri, în timp ce interacţiunea proton-neutron este transportată nu numai de mezoni neutri, ci şi de mezoni încărcaţi.

In orice caz, dezvoltarea teoriei de cîmp a forţelor nucleare şi ultimele experienţe cu privire la difuzia nucleonilor rapizi, ne permit să sperăm că într-un viitor apropiat se va stabili legea interacţiunii între doi nucleoni oarecari şi — ca rezultat — se va obţine un fundament unic pentru multe legi semiempirice ale fizicii nucleare[1]).

§ 49. Propagarea undelor mezonice vectoriale plane în vid

Putem pune problema propagării undelor mezonice emise de nucleoni în felul următor: în problema difuziei, unda mezonică incidentă care soseşte de la distanţă mare, poate fi considerată ca fiind plană.

Alegînd axa x in direcţia propagării undei, obţinem că în afară de unde vectoriale transversale, se pot propaga de asemenea şi unde longitudinale. Componenta longitudinală satisface ecuaţiile

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}=k_0^2 A_x,\quad E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t},$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=-k_0^2\varphi,\quad \frac{\partial A_x}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{49,1}$$

[1]) În ultimul timp s-a lucrat foarte mult experimental şi teoretic în această problemă fără să se fi ajuns la rezultate definitive. Invarianta de sarcină a rămas încă în picioare. V. culegerea de articole „Проблемы Современной физики“, nr. 7, 1954. — N. Red. E. T.

Componentele transversale satisfac ecuaţiile:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}+\frac{\partial H_z}{\partial x}-k_0^2 A_y=0,\quad H_z=\frac{\partial A_y}{\partial x},\quad E_y=-\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{49,2}$$

şi

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}-\frac{\partial H_y}{\partial x}-k_0^2 A_z=0,$$
$$H_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x},\qquad E_z=-\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\ . \tag{49,3}$$

Nu este nevoie să examinăm separat ecuaţia (49,3) deoarece ea se obţine din (49,2) prin înlocuirea axelor de coordonate y, z prin axele z, $-y$.

Din ultimele ecuaţii se vede că fiecare componentă F (adică $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{A}$, φ), a cîmpului mezonic satisface ecuaţia lui Klein:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k_0^2\right)F=0. \tag{49,4}$$

Luînd pentru unda mezonică incidentă o undă monocromatică de frecvenţă $\nu=\frac{cK}{2\pi}$, fiecare componentă a cîmpului se poate pune sub forma:

$$F=F_0 e^{-icKt+ikx}, \tag{49,5}$$

în care $K_2=k^2+k_0^2$, $v=c\frac{K}{k}$ — este viteza de fază, iar $v_g=c\frac{dK}{dk}=$ $=c\frac{k}{K}$ este viteza de grup a undei mezonice.

Cîmpul F a fost scris sub formă complexă (49,5) exclusiv pentru comoditate. Deoarece un sens fizic are, în cazul cîmpului neutru, numai partea reală a ecuaţiei (49,5), putem pune:

$$Re^{i\alpha}=\cos\alpha,\quad Rie^{i\alpha}=-\sin\alpha. \tag{49,6}$$

In cele ce urmează, simbolul R, care indică partea reală, a mărimii complexe, nu îl vom mai scrie.

Substituind (49,5) în ecuaţiile (49,1), (49,2) şi (49,3), găsim următoarele relaţii între componente:

pentru unda logitudinală:

$$\varphi=\frac{k}{K}A_x;\quad E_x=i\frac{k_0^2}{K}A_x;\quad H_x=0, \tag{49,7}$$

pentru unda transversală:

$$A_y = -\frac{i}{K} E_y = -\frac{i}{k} H_z. \tag{49,8}$$

In cele ce urmează vom folosi în calculul secțiunii eficace de difuzie, expresia care leagă intensitatea radiației primare J (valoarea medie a energiei care cade în unitatea de timp pe unitatea de suprafață) cu densitatea medie a energiei $\overline{u}$ [semnul — (bară) indică media în raport cu timpul adică: $\overline{u} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau u\,dt$, unde τ este perioada]:

$$J = v_g \overline{u} = \frac{ck}{K} \overline{u}. \tag{49,9}$$

Pe baza ultimelor formule, este ușor de arătat că intensitatea radiației primare J este legată de cîmpurile $\vec{E}$ și $\vec{H}$ prin următoarele relații:

pentru undele longitudinale:

$$J'' = \frac{ckK}{4\pi k_0^2} E_x^2, \tag{49,10}$$

pentru undele transversale:

$$J' = \frac{ck}{4\pi K} E_y^2 = \frac{cK}{4\pi K} H_z^2. \tag{49,11}$$

§ 50. Integrarea ecuațiilor cîmpului mezonic cu ajutorul vectorilor lui Hertz

Dacă în problema difuziei, unda primară este plană și se propagă liber în spațiu, atunci cîmpul al doilea (adică cel difuzat) este de fapt o undă generată direct de nucleonii puși în mișcare de unda primară. De aceea, pentru determinarea undei mezonice secundare, trebuie — mai înainte de toate — să integrăm ecuațiile vectoriale sub forma generală, adică să putem exprima componentele cîmpului (φ, $\vec{A}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$) în funcție de densitățile curenților $\left(\rho,\ \rho\frac{v}{c}\right)$ și momentele ($\vec{S}$ și $\vec{T}$) ale nucleonilor, date arbitrar.

In analogie cu integrarea ecuaţiilor lui Maxwell, putem să integrăm în modul cel mai simplu ecuaţiile amintite — dacă punem:

$$\rho = -\operatorname{div}\vec{P}; \quad \frac{\rho v}{c} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{M}, \tag{50,1}$$

unde $\vec{P}$ şi $\vec{M}$ sînt respectiv, polarizaţia cvasielectrică şi cvasimagnetică.

In analogie cu electrodinamica, să introducem acum în locul potenţialelor φ şi $\vec{A}$, doi vectori de tipul vectorului lui Hertz: $\vec{Z}_1$ (cvasieletric) şi $\vec{Z}_2$ (cvasimagnetic), care formează împreună tensorul antisimetric al lui Hertz de ordinul doi: $Z_{\mu\nu} = \vec{Z}_2,\ i\vec{Z}_1$ [1]).

Pentru a satisface condiţia lui Lorentz (47,5) trebuie să punem în acest caz:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\operatorname{div}\vec{Z}_1, \\ \vec{A} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{Z}_1}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{Z}_2. \end{aligned} \tag{50,2}$$

Substituind (50,2) în egalitatea (47,30), găsim expresia cîmpurilor în funcţie de vectorii lui Hertz:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}_1}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{Z}_2}{\partial t} + 4\pi\vec{T}, \\ \vec{H} &= \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{Z}_1}{\partial t} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}_2 - 4\pi\vec{S}. \end{aligned} \tag{50,3}$$

Substituind apoi (50,1), (50,2) şi (50,3) în ecuaţiile (47,29), obţinem:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[(\Box - k_0^2)\vec{Z}_1 + 4\pi\vec{T} + 4\pi\vec{P}] = \\ &= -\operatorname{rot}[(\Box - k_0^2)\vec{Z}_2 + 4\pi\vec{S} + 4\pi\vec{M}], \\ &\operatorname{div}[(\Box - k_0^2)\vec{Z}_1 + 4\pi\vec{T} + 4\pi\vec{P}] = 0, \end{aligned} \tag{50,4}$$

---

[1]) Vom observa că problema analogă a integrării ecuaţiilor lui Maxwell în cazul existentei dipolilor magnetici a fost rezolvată de Ia. I. Frenkel în cartea sa „Электродинамика", ч. I, ГТТИ, 1934.

unde operatorul lui D'Alembert, este:

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (50,5)$$

Putem satisface relațiile (50,4) dacă admitem că vectorii lui Hertz satisfac următoarele ecuații [1]):

$$\begin{aligned}(\Box - k_0^2)\vec{Z}_1 &= -4\pi(\vec{P}+\vec{T}),\\ (\Box - k_0^2)\vec{Z}_2 &= -4\pi(\vec{M}+\vec{S}).\end{aligned} \qquad (50,6)$$

In cele ce urmează ne vom mărgini la viteze nerelativiste ale nucleonilor. Atunci, neglijînd mărimile $\vec{M}$ și $\vec{T}$, care sînt de ordinul $\frac{v}{c}$ față de $\vec{P}$ și $\vec{S}$ (v. § 47), obținem:

$$\begin{aligned}(\Box - k_0^2)\vec{Z}_1 &= -4\pi\vec{P},\\ (\Box - k_0^2)\vec{Z}_2 &= -4\pi\vec{S}.\end{aligned} \qquad (50,7)$$

Determinînd de aici vectorii lui Hertz $\vec{Z}_1$ și $\vec{Z}_2$ în funcție de $\vec{P}$ și $\vec{S}$, și substituind valorile găsite în expresiile (50,3) putem găsi definitiv valorile cîmpurilor mezonice în funcție de polarizația $\vec{P}$ dată în mod arbitrar și de momentul cvasimagnetic $\vec{S}$ al nucleonilor.

Soluția generală a ecuației de tipul (50,7), adică a ecuației relativiste neomogene, conținînd în membrul doi un termen care să caracterizeze sursele, a fost dată în § 20.

In cazul particular cînd polarizația $\vec{P}$ oscilează monocromatic:

$$\vec{P} = \vec{P}_0 e^{-icKt}, \qquad (50,8)$$

Ecuațiile (50,6) sînt scrise în ipoteza că în lipsa nucleonilor, vectorii lui Hertz $\vec{Z}_1$ și $\vec{Z}_2$ pentru vid satisfac ecuația:

$$(\Box - k_0^2)\vec{Z} = 0.$$

soluţia ecuaţiei pentru $\vec{Z}_1$ poate fi căutată sub forma

$$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_0 e^{-icKt} \tag{50,9}$$

în acest caz, avem:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}_1}{\partial t^2} + k_0^2 \vec{Z}_1 = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}_1}{\partial t^2}, \tag{50,9a}$$

unde

$$v = c\frac{K}{k}, \quad k = \sqrt{K^2 - k_0^2}.$$

De aceea, în cazul $K > k_0$ vectorul $\vec{Z}_1$ va satisface ecuaţia undelor a lui D'Alembert:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{Z}_1 = -4\pi\vec{P}, \tag{50,10}$$

care duce la soluţia cunoscută:

$$\vec{Z}_1 = \int \frac{\vec{P}\left(\vec{r}', t \mp \frac{R}{v}\right)}{R}(d\vec{r}') = \int \frac{\vec{P}(\vec{r}', t')\,\delta\left(t' - t \pm \frac{R}{v}\right)}{R}(d\vec{r})\,dt'. \tag{50,11}$$

In cazul soluţiilor cu potenţiale retardate, trebuie să luăm în argumentele funcţiei semnele de sus, iar în cazul celor cu potenţiale avansate — pe cele de jos. Soluţia generală este o suprapunere a soluţiilor cu potenţiale retardate şi avansate. O expresie cu totul analogă se poate obţine şi pentru vectorul $\vec{Z}_2$, în cazul cînd polarizaţia cvasimagnetică oscilează monocromatic.

§ 51. Radiaţia undelor mezonice vectoriale de către un dipol cvasielectric şi cvasimagnetic

In cele ce urmează ne vom mărgini la cazul cînd vectorii $\vec{P}$ şi $\vec{S}$, care caracterizează polarizaţia şi momentul nucleonilor, execută oscilaţii armonice de frecvenţă $\nu = \frac{cK}{2\pi}$. Atunci, expresiile integrale pentru vectorii lui Hertz $\vec{Z}_1$ şi $\vec{Z}_2$ vor fi, conform rezultatelor paragrafului precedent:

$$\vec{Z}_1 = \int \frac{\vec{P}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} (d\vec{r}')$$
$$\vec{Z}_2 = \int \frac{\vec{S}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} (d\vec{r}'). \tag{51,1}$$

Vom separa mai jos cîmpurile mezonice în părţi care să depindă numai de vectorul mezonic cvasielectric $\vec{Z}_1$ (indicele 1) şi numai de vectorul mezonic cvasimagetic $\vec{Z}_2$ (indicele 2).

Pe baza formulelor (50,2), (50,3) şi (50,6) avem pentru componentele cvasielectrice:

$$\varphi_1 = -\operatorname{div} \vec{Z}_1, \quad \vec{A}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}_1}{\partial t},$$
$$\vec{E}_1 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}_1}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z}_1, \tag{51,2}$$
$$\vec{H}_1 = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{Z}_1}{\partial t}.$$

Pentru momentele cvasimagnetice obţinem:

$$\varphi_2 = 0, \quad \vec{A}_2 = \operatorname{rot} \vec{Z}_2,$$
$$\vec{E}_2 = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial Z_2}{\partial t},$$
$$\vec{H}_2 = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z}_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}_2}{\partial t^2} - k_0^2 \vec{Z}_2 =$$
$$= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z}_2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}_2}{\partial t^2}. \tag{51,3}$$

Pentru calculul energiei radiate, să găsim valoarea cîmpurilor mezonice generate în zona undelor de un nucleon punctiform. Atunci, punînd pentru polarizaţia $\vec{P}$ şi pentru momentul $\vec{S}$:

$$\vec{P}=\vec{p}(t)\,\delta(\vec{r})=\vec{p}_0 e^{-icKt}\,\delta(\vec{r}),$$
$$\vec{S}=\vec{m}(t)\,\delta(\vec{r})=\vec{m}_0 e^{-icKt}\,\delta(\vec{r}) \qquad (51,4)$$

şi substituind expresiile (51,4) în soluţia (51,1) obţinem:

$$\vec{Z}_1=\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}, \quad \vec{Z}_2=\frac{\vec{m}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}. \qquad (51,5)$$

Cu ajutorul ultimelor formule obţinem pentru zona undelor — în care se pot neglija mărimile de ordinul $\frac{1}{r^2}$ — următoarele expresii pentru cîmpurile mezonice:

a) *pentru componentele longitudinale depinzînd de* $\vec{Z}_1$ [1])

$$\vec{A}_1''=\frac{\vec{r}^0}{c}(\dot{\vec{p}}\,\vec{r}^0); \quad \vec{E}_1''=-\frac{k_0^2\vec{r}^0}{k^2v^2r}(\ddot{\vec{p}}\,\vec{r}^0);$$
$$\varphi_1''=\frac{1}{vr}(\dot{\vec{p}}\,\vec{r}^0); \quad \vec{H}_1''=0, \qquad (51,6)$$

unde

$$\vec{r}^0=\frac{\vec{r}}{r}, \quad v=c\frac{K}{k},$$

iar vectorul $\vec{p}$ este o funcţie de $t-\frac{r}{v}$, adică:

$$\vec{p}=\vec{p}_0\,e^{-icKt+ikr}.$$

b) *Pentru componentele transversale depinzînd de* $\vec{Z}_1$:

$$\vec{A}_1'=-\frac{1}{cr}(\dot{\vec{p}}\times\vec{p}^0)\times\vec{r}^0, \quad \varphi_1'=0,$$
$$\vec{E}_1'=\frac{1}{c^2r}(\ddot{\vec{p}}\times\vec{r}^0)\times\vec{r}^0, \quad \vec{H}_1'=\frac{1}{cvr}\ddot{\vec{p}}\times\vec{r}^0. \qquad (51,7)$$

---

[1]) Pentru a descompune vectorul $\vec{p}$ într-o componentă longitudinală (faţă de $\vec{r}^0$) şi una transversală, să ne folosim ca deobicei, de identitatea $\vec{p}=\vec{r}^0(\vec{p}\,\vec{r}^0)-(\vec{p}\times\vec{r}^0)\times\vec{r}^0$, din care se vede că primul termen al membrului doi al egalităţii este longitudinal, iar cel de-al doilea — transversal.

c) *Pentru componentele transversale depinzînd* $\vec{Z}_2$:

$$\vec{A}_2' = \frac{1}{vr}\dot{\vec{m}} \times \vec{r}^0 \qquad \varphi_2' = 0$$

$$\vec{E}_2' = -\frac{1}{cvr}\ddot{\vec{m}} \times \vec{r}_0, \quad \vec{H}_2' = \frac{1}{v^2 r}(\ddot{\vec{m}} \times \vec{r}^0) \times \vec{r}^0, \tag{51,8}$$

unde

$$\vec{m} = \vec{m}\left(t - \frac{r}{v}\right) = \vec{m}_0 e^{-icKt + ikr}.$$

In sfîrşit, în aproximaţia nerelativistă putem neglija componentele cvasimagnetice longitudinale.

Substituind expresiile găsite ale cîmpurilor în (47,19), obţinem părţile vectorului mezonic Umov-Poynting, care depind respectiv de componentele longitudinale şi transversale ale vectorilor $\vec{Z}_1$ şi $\vec{Z}_2$:

$$\mathfrak{S}_1'' = \frac{k_0^2}{K^2}\frac{\ddot{p}^2 \cos^2\vartheta}{4\pi c^2 v r^2}\vec{r}^0,$$

$$\mathfrak{S}_1' = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2\vartheta}{4\pi c^2 v r^2}\vec{r}^0, \tag{51,8 a}$$

$$\mathfrak{S}_2' = \frac{\ddot{m}^2 \sin^2\vartheta}{4\pi v^3 r^2}\vec{r}_0,$$

unde ϑ este unghiul dintre vectorul $\vec{r}^0$ şi direcţia dipolului $\left(\ddot{\vec{p}}\text{ respectiv } \ddot{\vec{m}}\right)$.

Valoarea medie a fluxului de energie care trece în unitatea de timp prin suprafaţa $r^2 d\Omega$ ($d\Omega$ este unghiul solid) este legată de vectorul lui Umov-Poynting prin relaţia cunoscută:

$$dW = (\vec{\mathfrak{S}}\vec{r}^0)\, r^2 d\Omega. \tag{51,9}$$

Substituind în locul vectorului Umov-Poynting, valoarea găsită acum, avem:

$$dW_1'' = \frac{k_0^2}{K^2}\frac{\overline{\ddot{p}^2} \cos^2\vartheta}{4\pi c^2 v}\, d\Omega, \tag{51,10}$$

$$dW_1' = \frac{\overline{\ddot{p}^2} \sin^2\vartheta}{4\pi c^2 v}\, d\Omega, \quad dW_2' = \frac{\overline{\ddot{m}^2} \sin^2\vartheta}{4\pi v^3}\, d\Omega.$$

Integrînd apoi în raport cu unghiurile sferice, obţinem în definitiv expresia generală pentru energia radiată în unitatea de timp.

Pentru o radiaţie cvasielectrică avem:

$$W_1 = W_1'' + W_1' = \frac{2}{3}\,\frac{\overline{\ddot{p}^2}}{c^2 v}\left(1 + \frac{k_0^2}{2K^2}\right), \tag{51,11}$$

pentru o radiaţie cvasimagnetică avem:

$$W_2 = \frac{2}{3}\,\frac{\overline{\ddot{m}^2}}{v^3}. \tag{51,12}$$

§ 52. Difuzia cvasielectrică a mezonilor vectoriali

Pentru aflarea secţiunii eficace diferenţiale $d\sigma$ a difuziei cîmpului mezonic (adică a mezonilor) de către nucleoni, în cadrul teoriei clasice, trebuie să evaluăm, — în deplină analogie cu difuzia luminii (adică a fotonilor), — raportul dintre cantitatea de energie dW pe care o radiază în unitatea de timp nucleonul pus în mişcare de către unda primară [v. formula (51,10)], şi densitatea curentului de energie a undei mezonice primare [v. formulele (49,10) şi (49,11)], adică:

$$d\sigma = \frac{dW}{J}. \tag{52,1}$$

Pentru calculul lui $d\sigma$ în cazul unui difuzii cvasielectrice condiţionate de dipolul cvasielectric nucleonic $\vec{p}$, ne vom folosi de ecuaţia mişcării de translaţie a nucleonului — de masă M — într-un cîmp $\vec{E}$ cvasielectric:

$$M\ddot{\vec{p}} = g^2\vec{E}, \tag{52,2}$$

mărginindu-ne aici la aproximaţia nerelativistă şi neglijînd deocamdată forţa de reacţiune a cîmpului mezonic (influenţa forţei de reacţiune asupra radiaţiei vă fi luată în considerare în § 55).

Să înlocuim în formulele pentru $d\sigma$ unghiul ϑ dintre $\ddot{\vec{p}}$ şi direcţia mezonului difuzat, prin unghiul θ dintre unda mezonică incidentă şi cea difuzată. Dacă mezonul incident este longitudinal, atunci $\vartheta = \theta$, iar dacă mezonul este transversal:

$$\cos\vartheta = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi, \tag{52,3}$$

în care θ_0 este unghiul dintre $\vec{p}$ și direcția undei mezonice incidente și care în cazul mezonilor transversali este un unghi drept $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Integrînd ecuația (52,3) și luînd media în raport cu azimutul, obținem:

$$\overline{\cos^2\vartheta} = \frac{\sin^2\theta}{2}; \quad \overline{\sin^2\vartheta} = \frac{1+\cos^2\theta}{2}. \tag{52,4}$$

In calculul secțiunilor eficace diferențiale și totale trebuie să distingem următoarele cazuri:

1) Undele mezonice incidente și difuzate sînt amîndouă longitudinale:

$$d\sigma = r_N^2 \left(\frac{k_0}{K}\right)^4 \cos^2\theta \, d\Omega;$$

atunci (52,5)

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_N^2 \left(\frac{k_0}{K}\right)^4,$$

unde $r_N = \frac{g^2}{Mc^2}$ este raza cvasielectrică a nucleonului.

2) Unda mezonică incidentă este longitudinală, iar cea difuzată, transversală:

$$d\sigma = r_N^2 \left(\frac{k_0}{K}\right)^2 \sin^2\theta \, d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_N^2 \left(\frac{k_0}{K}\right)^2. \tag{52,6}$$

3) Unda mezonică incidentă este transversală, iar cea difuzată, longitudinală:

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_N^2 \left(\frac{k_0}{K}\right)^2 \sin^2\theta \, d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_N^2 \left(\frac{k_0}{K}\right)^2. \tag{52,7}$$

4) Undele mezonice — incidentă și difuzată — sînt amîndouă transversale:

$$d\sigma = r_N^2 \frac{1+\cos^2\theta}{2} \, d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_N. \tag{52,8}$$

După cum se vede din formulele obţinute, probabilitatea de formare în decursul difuziei a unui mezon longitudinal este de $\left(\frac{k_0}{K}\right)^2$ ori mai mică decît probabilitatea de formare a unui mezon transversal.

In particular, cînd energia mezonului incident este mult mai mare decît masa lui proprie, adică: $\frac{k_0}{K} \to 0$, putem neglija efectele longitudinale. Undele mezonice transversale însă, vor fi difuzate în deplină analogie cu undele electromagnetice, (adică cu fotonii) după cunoscuta formulă a lui Thomson, în care numai raza electrică a electronului $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ este înlocuită prin raza cvasielectrică a nucleonului $r_N = \frac{g^2}{Mc^2}$.

§ 53. Difuzia cvasimagnetică a mezonilor vectoriali

Să trecem acum la difuzia undelor mezonice datorită interacţiunilor lor cu momentele cvasimagnetice ale nucleonilor.

Dacă ar exista în natură sarcini magnetice (sau cvasimagnetice) izolate, atunci difuzia fotonilor (sau mezonilor) pe aceste sarcini s-ar produce după aceleaşi legi care au loc şi în cazul difuziei pe sarcini electrice (sau cvasielectrice).

Totuşi, nu s-a reuşit încă să se pună în evidenţă sarcini magnetice sau cvasimagnetice[1]). In ceea ce priveşte cîmpul mezonic, trebuie să admitem existenţa în natură numai a dipolilor cvasimagnetici „rigizi" („proprii") $\vec{m}$ la nucleoni, care sub acţiunea cîmpului mezonic cvasimagnetic $\vec{H}$ sînt supuşi la un moment mecanic:

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{H}, \tag{53,1}$$

care duce la o mişcare de rotaţie.

Găsim iarăşi că — neglijînd deocamdată reacţiunea radiaţiei, precum şi efectele relativiste — ecuaţia fundamentală a mişcării de rotaţie pentru un dipol cvasimagnetic are expresia:

$$\dot{\vec{m}} = \varkappa\,(\vec{m} \times \vec{H}) \;, \tag{53,2}$$

[1]) In legătură cu aceasta vezi teoria nouă a lui Dirac, care tratează despre posibilitatea existenţei polilor magnetici: Proc. Roy. Soc. **A, 133**, 60, 1931; Phys. Rev., **74**, 817, 1948.

în care mărimea $\varkappa$ este egală cu raportul dintre momentul cvasimagnetic $|m|=f$ al particulei, — adică în cazul de față al nucleonului, — și momentul mecanic l.

După cum arată datele experimentale, momentul cvasimagnetic al nucleonului f este legat de sarcina lui cvasimagnetică g prin relația:

$$f\sim\frac{g}{k_0}\sim\frac{hg}{2\pi\mu c}, \tag{53,3}$$

în care μ este masa mezonului.

Vom observa că, în concordanță cu experiența și conform teoriei cuantice, momentul magnetic propriu cinematic μ_e al electronului este de asemenea legat de sarcina e printr-o relație de tipul (53,3) $\left(\text{anume: } \mu_e=\frac{e}{mc}S, \text{ unde } S=\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\right)$, însă la numitor este masa mezonului și nu masa de repaus a cîmpului electromagnetic, care este nulă. De aceea, dacă în teoria electromagnetică efectele magnetice devin apreciabile numai într-un domeniu relativist față de electron, în schimb în teoria mezonică a nucleonilor, efectele cvasimagnetice devin apreciabile în comparație cu cele cvasielectrice, într-un domeniu relativist față de mezon, dar încă nerelativist față de nucleon. De exemplu pentru $\varepsilon > mc^2$, viteza electronului nu va fi prea mică în comparație cu viteza lumini, de aceea secțiunea eficace a lui Thomson pentru difuzia luminii pe electron va fi înlocuită după cum se știe, prin formula cuantică a lui Klein-Nishina, calculată cu ajutorul ecuației lui Dirac, ecuația care ține seamă automat de magnetismul electronului.

Noi nu ne vom angaja în discutarea diverselor încercări de a interpreta pe baza teoriei clasice relația (53,3), relație de fapt cuantică. Observăm că raportul dintre momentul cvasimagnetic și momentul mecanic al nucleonului pentru particule cu spin $\frac{1}{2}$ $\left(\text{în unități } \frac{h}{2\pi}\right)$ este

$$\varkappa=\frac{f}{l}=\frac{4\pi f}{h}. \tag{53,4}$$

In cazul unei unde incidente monocromatice

$$\vec{H}=\vec{H}_0e^{-icKt}$$

ecuaţia de mişcare (53,2) duce la următoarea relaţie dintre $\ddot{\vec{m}}$ şi $\vec{H}$:

$$|\ddot{\vec{m}}| \cong f\,|\varkappa\, cKH \sin\alpha|, \tag{53,5}$$

în care α este unghiul dintre direcţiile vectorilor $\vec{m}$ şi $\vec{H}$.

De aici găsim cu ajutorul formulelor (49,11), (51,10) şi (52,1) secţiunea eficace diferenţială pentru difuzia cvasimagnetică:

$$d\sigma = \frac{16\pi^2 f^4 k^4 \sin^2\alpha}{c^2 h^2 K^2} \sin^2\vartheta\, d\Omega. \tag{53,6}$$

Dacă vectorul momentului cvasimagnetic al nucleonului $\vec{m}$ este paralel cu $\vec{H}$, atunci $\alpha=0$ şi secţiunea eficace $d\sigma$ devine nulă. Invers, dacă vectorul $\vec{m}$ este perpendicular pe $\vec{H}$, $d\sigma$ va fi maxim şi va trebui să distingem două cazuri:

a) Vectorul $\vec{m}$ este orientat în direcţia mişcării mezonului iniţial (adică în direcţia lui $\vec{k}$). Atunci unghiul ϑ (dintre $\vec{m}$ şi direcţia mezonului difuzat) este egal cu unghiul θ (dintre direcţia mezonului incident şi a mezonului difuzat), de aceea:

$$d\sigma_1 = \frac{16\pi^2 f^4 k^4}{c^2 h^2 K^2} (1 - \cos^2\theta)\, d\Omega. \tag{53,7}$$

b) Vectorul $\vec{m}$ este paralel cu $\vec{E}$ (adică e perpendicular pe direcţia iniţială de mişcare a mezonului). In acest caz avem, conform egalităţii (52,4):

$$\overline{\sin^2\vartheta} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta),$$

şi deci

$$d\sigma_2 = \frac{16\pi^2 f^4 k^4}{c^2 h^2 K^2} \, \frac{1+\cos^2\theta}{2}\, d\Omega. \tag{53,8}$$

Intrucît pentru $\vec{m} \perp \vec{H}$ energia potenţială cvasimagnetică a nucleonului într-un cîmp mezonic, $U = -\ddot{\vec{m}}\vec{H}$, este în ambele cazuri egală cu 0, rezultă că ambele orientări sînt deopotrivă de probabile, datorită cărui fapt secţiunea eficace diferenţială medie este:

$$d\sigma = \frac{d\sigma_1 + d\sigma_2}{2} = \frac{4\pi^2 f^4 k^4}{c^2 h^2 K^2} (3 - \cos^2\theta)\, d\Omega. \tag{53,9}$$

De aici găsim, prin integrare în raport cu unghiurile, expresia secţiunii eficace totală de difuzie a undelor mezonice reale vectoriale pe momentul cvasimagnetic al nucleonului

$$\sigma = \frac{128\pi^3 f^4 k^4}{3c^2 h^2 K^2} \tag{53,10}$$

(în aproximaţia nerelativistă pentru mişcarea nucleonilor şi dacă neglijăm amortizarea sau reacţiunea cîmpului). Teoria cuantică a difuziei confirmă pe deplin acest rezultat pentru mezonii neutri, iar pentru mezonii încărcaţi duce la o expresie care diferă numai printr-un factor numeric de ordinul lui 1.

Rezumînd rezultatele obţinute, vom sublinia că secţiunea eficace pentru difuzia cvasielectrică rămîne o mărime constantă sau începe să scadă rapid (vezi paragraful precedent) dacă energia mezonilor incidenţi creşte. Insă în cazul difuziei cvasimagnetice a undelor mezonice, secţiunea eficace, în domeniul relativist faţă de viteza mezonilor, creşte de $\left(\frac{k}{k_0}\right)^2$ ori faţă de valoarea secţiunii eficace pentru difuzia undelor mezonice transversale pe cvasisarcini. Apariţia acestui factor „dipolar" caracteristic este condiţionată de ecuaţia dipolară a mişcării (53,2) care leagă $\dot{\vec{m}}$ cu $\vec{H}$ ($\ddot{m} \sim cKH$), spre deosebire de ecuaţia (52,2) a mişcării de translaţie cvasielectrică, care leagă $\ddot{\vec{p}}$ cu $\vec{E}$ ($\ddot{\vec{p}} \sim \vec{E}$).

Prin aceasta, secţiunea eficace pentru difuzia cvasimagnetică creşte nelimitat cu frecvenţa undelor mezonice vectoriale incidente (adică cu energia mezonilor). O astfel de creştere este inadmisibilă, deoarece datorită ei, numărul — şi prin urmare, energia totală a mezonilor difuzaţi — tinde să devină mai mare decît numărul şi deci energia mezonilor incidenţi.

De aceea, pe lîngă dificultăţile legate de valorile infinite ale energiei cîmpului mezonic generat de particule punctiforme, sau — din punct de vedere al ipotezei de cîmp — legate de divergenţa masei proprii a nucleonilor, dificultăţi care sînt proprii şi electrodinamicii clasice şi cuantice, apar în plus în teoria mezonică vectorială dificultăţi suplimentare specifice, legate de caracterul dipolar al interacţiunii nucleonilor cu cîmpul mezonic şi de caracterul dipolar efectiv al cîmpului vectorial.

§ 54. Forţele de reacţie ale cîmpului mezonic

Problema găsirii forţei pe care o exercită cîmpul mezonic generat de un nucleon asupra nucleonului însuşi (forţa de autoacţiune), este strîns legată de stabilirea ecuaţiei mişcării. Raţionamentele care urmează sînt valabile pentru cazul vectorial.

Dacă ne folosim pentru aceasta de metoda lui Lorentz, examinată în § 31, atunci — în deplină analogie cu teoria cîmpului electromagnetic — apare aici dificultatea legată de masa proprie infinită. Pentru îndepărtarea ei, se poate presupune înainte de toate că masa nucleonică este datorită în întregime energiei cîmpului mezonic generat de o particulă avînd o rază finită a (ipoteza „de cîmp" a teoriei clasice a unei particule nepunctiforme).

Atunci, masa mezonică de cîmp a nucleonului, compusă din două părţi: cvasielectrică M_e şi cvasimagnetică M_m, va fi finită, avînd ordinul de mărime: $M_e \sim \frac{1}{c^2}\frac{g^2}{a}$, $M_m \sim \frac{1}{c^2}\frac{f^2}{a^3}$ (expresiile mai exacte, destul de complicate, conţin parametrul k_0 şi depind — la fel ca şi în electrodinamică — de ipoteza asupra distribuţiei cîmpului „înnăuntrul" nucleonului: de exemplu, cazul sarcinii mezonice superficiale sau de volum).

Alături de masa de cîmp vor intra în ecuaţia mişcărilor de rotaţie şi valorile momentelor de inerţie ale cîmpului mezonic. La fel ca şi în cazul electrodinamicii, introducerea unei raze finite este nesatisfăcătoare, din cauza nerespectării invarianţei relativiste. Afară de aceasta, chiar dacă se capătă o valoare finită pentru masă de cîmp cu ajutorul razei particulei, nu va fi posibil totuşi, la fel ca şi în electrodinamică, să punem această valoare în concordanţă cu valoarea impulsului, întrucît condiţiile lui Laue nu sînt satisfăcute.

In cele ce urmează ne mărginim la teoria clasică. In ceea ce priveşte generalizarea cuantică, vom observa numai că, la fel ca şi pentru electrodinamică, teoria cuantică a cîmpului mezonic de orice tip, la fel ca şi teoria clasică, duce — în general — din nou la o energie infinită pentru cîmpul generat de un nucleon punctiform, aşa cum se vede din expresiile energiei de interacţiune (v. § 48). Afară de aceasta, mezodinamica cuantică, analog cu electrodinamica cuantică, duce la divergenţe suplimentare specific cuantice pentru energia cîmpului generat de un nucleon, divergenţe legate de fluctuaţiile cîmpului (energie transversală, vezi anexa).

Elementul pozitiv al metodei clasice a lui Lorentz este introducerea forţei de autoacţiune în ecuaţia de mişcare pe o cale foarte simplă.

Totuşi, ecuaţiile de mişcare Lorentz ale nucleonului într-un cîmp mezonic, vor conţine — în afară de termeni care nu depind de raza a a nucleonului — un număr infinit de termeni de tipul

$\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n (n=1, 2, \ldots)$, proporţionali cu raza, neavînd — evident — un sens fizic direct şi care deobicei sînt neglijaţi. Prin aceasta, ecuaţiile de mişcare ale nucleonului într-un cîmp mezonic trebuie să se mărginească la frecvenţe mici (λ este lungimea de undă a cîmpului mezonic). Vom obţine în mezodinamică ecuaţii clasice de mişcare ale nucleonilor, astfel încît în ele să intre chiar de la început numai termenii legaţi de cîmpul exterior şi de forţa de autoacţiune, dar nelegaţi de raza particulelor, aşa cum s-a făcut în electrodinamica lui Dirac pentru cazul translaţiei (teoria masei nedatorite cîmpului). Metoda cea mai simplă de a obţine astfel de ecuaţii pentru particule punctiforme este metoda cîmpului compensator, în care se introduc de asemenea, în mod natural, forţe de autoacţiune, iar termenii inerţiali cu masa de cîmp sînt automat îndepărtaţi (v. § 34). Prin aceasta putem obţine ecuaţii care să ne permită să descriem oscilaţiile nucleonilor cu orice frecvenţă, iar în cazul oscilaţiilor de frecvenţă mare, rolul fundamental îl vor juca iarăşi termenii cu forţa de frînare a nucleonului prin radiaţia mezonică.

In particular, metoda lui Lorentz duce la următoarea ecuaţie a mişcării de rotaţie, în aproximaţia nerelativistă:

$$\dot{\vec{m}} = \varkappa\,(\vec{m}\times\vec{H}^i) - \frac{\varkappa}{3v^2a}(\vec{m}\times\ddot{\vec{m}}) + \frac{2\varkappa}{3v^3}(\vec{m}\times\dddot{\vec{m}}) + \ldots,$$

unde a este raza nucleonului, iar v este viteza de propagare a undelor mezonice. Afară de aceasta, noi presupunem că sarcina cvasimagnetică este distribuită pe suprafaţa nucleonului.

Al treilea termen din dreapta, cu reacţia radiaţiei, a fost stabilit de noi; ecuaţia relativistă completă a fost găsită apoi de Bhabha. In această ecuaţie vom elimina de la început termenul inerţial proporţional cu $\vec{m}\times\ddot{\vec{m}}$, care a fost obţinut de către Heisenberg, dar acesta din urmă a omis totuşi termenul principal cu derivată a treia [1]).

Luînd în considerare forţa de autoacţiune, în aproximaţia nerelativistă, avem în locul ecuaţiilor (52,2) şi (53,2) următoarele ecuaţii cu ajutorul cărora se determină mişcarea dipolului cvasielectric şi cvasimagnetic:

---

[1]) Д. Иваненко и А. Соколов, ЖЭТФ, **10**, 709, 1940; А. Мухтаров, Вестник МГУ, No. 7, 61, 1948; R. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc., **A. 178**, 314, 1941; ibid. **172**, 384, 1929; W. Heisenberg, Z. f. Phys., **113**, 61, 1931, v. de asemenea В. Гинзбург, ДАН, **31**, 319, 1941.

$$M\ddot{\vec{p}} = g^2\vec{E}^i + g\vec{F},$$
$$\dot{\vec{m}} = \varkappa \vec{m} \times \vec{H}^i + \varkappa\vec{L}. \tag{54,1}$$

Aici $\vec{E}^i$ şi $\vec{H}^i$ sînt cîmpurile cvasielectrice şi cvasimagnetice exterioare. Mai departe, presupunînd nucleonul distribuit cu o densitate spațială ρ oarecare, normată la unitatea de sarcină, găsim pentru forța de autoacțiune $\vec{F}$ şi pentru momentul de autoacțiune $\vec{L}$ expresiile (v. § 31):

$$\vec{F} = g\overline{\vec{E}}; \quad \vec{L} = [\vec{m} \times \overline{\vec{H}}], \tag{54,2}$$

cîmpurile medii fiind determinate de egalitățile:

$$\overline{\vec{E}} = \int \vec{E}(\vec{r}, \vec{r}')\, \rho_0(\vec{r})\, \rho_0(\vec{r}')\, (d\vec{r})\, (d\vec{r}'),$$
$$\overline{\vec{H}} = \int \vec{H}(\vec{r}, \vec{r}')\, \rho_0(\vec{r}')\, \rho_0(\vec{r}')\, (d\vec{r})\, (d\vec{r}'), \tag{54,3}$$

în care $\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}')$ şi $\vec{H}(\vec{r}, \vec{r}')$ sînt cîmpurile proprii în punctul $\vec{r}'$, generate de nucleonul punctiform situat în punctul $\vec{r}$. In cazul nerelativist, putem considera că cîmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ apar datorită existenței momentelor $\vec{p}$ şi $\vec{m}$, iar densitatea nucleonică ρ_0 este normată la unitate.

In general, la determinarea cîmpurilor se folosesc numai potențialele retardate. Dar urmînd teoria dezvoltată în § 34, pentru eliminarea masei de cîmp, să introducem încă un al doilea cîmp, care să acționeze asupra nucleonului care îl generează. Pentru ca cîmpul compensator să nu poată fi radiat sub forma de unde mezonice, vom lua la calcularea lui semisuma potențialelor retardate şi avansate, iar la determinarea cîmpului total, în perfectă analogie cu expresia (34,21), vom lua semidiferența potențialelor retardate şi avansate.

De aceea în cazul nucleonului punctiform, adică atunci cînd $\rho_0(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ [v. de asemenea relaţia (51,4) şi (51,3)], găsim:

$$\begin{aligned} \bar{\vec{E}} &= \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div}\right)\vec{Z}_1, \\ \bar{\vec{H}} &= \left(-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div}\right)\vec{Z}_2, \end{aligned} \tag{54,4}$$

unde, conform (51,5):

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 &= \int \vec{p}(t') \frac{\delta\left(t'-t+\frac{R'}{v}\right) - \delta\left(t'-t-\frac{R'}{v}\right)}{2R'} dt' \\ \vec{Z}_2 &= \int \vec{m}(t') \frac{\delta\left(t'-t+\frac{R'}{v}\right) - \delta\left(t'-t-\frac{R'}{v}\right)}{2R'} dt'. \end{aligned} \tag{54,5}$$

Aici $\vec{R}' = \vec{r} - \vec{r}'(t)$.

Dezvoltînd funcţia δ în serie după puterile mărimii $\frac{R'}{v}$, obţinem:

$$\frac{\delta\left(t'-t+\frac{R'}{v}\right) - \delta\left(t'-t-\frac{R'}{v}\right)}{2R'} =$$

$$= \frac{1}{v}\dot{\delta}(t'-t) + \frac{R'^2}{6v^3}\dddot{\delta}(t'-t) + \ldots, \tag{54,6}$$

de unde, cu ajutorul formulei (3,11), găsim:

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 &= -\frac{\dot{\vec{p}}}{v} - \frac{1}{6v^3}\frac{\partial^3(\vec{p}R^2)}{\partial t^3} + \ldots, \\ \vec{Z}_2 &= -\frac{\dot{\vec{m}}}{v} - \frac{1}{6v^3}\frac{\partial^3(\vec{m}R^2)}{\partial t^3} + \ldots, \end{aligned} \tag{54,7}$$

unde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'(t)$.

Ţinînd seama de egalitatea:

$$\text{grad div}\,(\vec{p}R^2) = 2\vec{p},$$

precum şi de faptul că pentru un nucleon punctiform trebuie să punem în rezultatul final $R = 0$, obţinem:

$$\vec{\overline{E}} = -\frac{2}{3}\frac{\dddot{\vec{p}}}{vc^2}\left(1+\frac{k_0^2}{2K^2}\right),$$
$$\vec{\overline{H}} = -\frac{2}{3}\frac{\dddot{\vec{m}}}{v^3}. \tag{54,8}$$

Ecuațiile de mișcare ale nucleonului (54,1), cu considerarea forței de frecare mezonice prin radiație, vor căpăta forma definitivă:

$$\vec{M}\ddot{\vec{p}} = g^2\vec{E}^i + \frac{2g^2}{3c^2v}\dddot{\vec{p}}\left(1+\frac{k_0^2}{2K^2}\right), \tag{54,9}$$

$$\dot{\vec{m}} = \varkappa[\vec{m}\times\vec{H}^i] + \frac{2\varkappa}{3v^3}[\vec{m}\times\dddot{\vec{m}}]. \tag{54,10}$$

Este important de menționat că, în deplină analogie cu electrodinamica, putem obține expresii analoage pentru cîmpurile proprii și pe o altă cale, bazată pe bilanțul energetic.

Intr-adevăr, să adăugăm la cîmpurile exterioare $\vec{E}^i$ și $\vec{H}^i$ în ecuațiile de mișcare ale nucleonului (54,1), valorile cîmpurilor proprii $\vec{\overline{E}}$ și $\vec{\overline{H}}$, astfel alese încît nucleonul să radieze în unitatea de timp, în cazul interacțiunii cvasielectrice, cantitatea de energie W_1 [v. formula (51,11)], iar în cazul interacțiunii cvasimagnetice, cantitatea de energie W_2 [v. formula (51,12)]. Atunci notînd perioada de oscilație a nucleonului prin τ și luînd în considerare că

$$\dot{\vec{p}}(\tau) = \dot{\vec{p}}(0) = 0$$

etc., obținem pentru determinarea cîmpurilor proprii următoarele ecuații:

$$\int_0^\tau (\dot{\vec{p}}\vec{\overline{E}})\,dt = -\frac{2}{3c^2v}\left(1+\frac{k_0^2}{2K^2}\right)\int_0^\tau \ddot{\vec{p}}^2\,dt = \frac{2}{3c^2v}\left(1+\frac{k_0^2}{2K^2}\right)\int_0^\tau (\dot{\vec{p}}\dddot{\vec{p}})\,dt,$$
$$\int_0^\tau (\dot{\vec{m}}\vec{\overline{H}})\,dt = -\frac{2}{3v^3}\int_0^\tau \ddot{\vec{m}}^2 dt = \frac{2}{3v^3}\int_0^\tau (\dot{\vec{m}}\dddot{\vec{m}})\,dt. \tag{54,11}$$

De aici se vede cum cîmpurile proprii pe care trebuie să le adăugăm la ecuaţiile de mişcare sînt determinate întocmai de formulele (54,8).

După cum era de aşteptat, plecînd de la bilanţul energiei radiate efectiv, nu am putut obţine pentru cîmpurile proprii termeni suplimentari proporţionali cu derivatele de ordin par, în cazul de faţă $\ddot{\vec{p}}$ sau $\ddot{\vec{m}}$ (vezi metoda Lorentz), deoarece aceştia din urmă sînt legaţi numai de masa proprie sau de momentul de inerţie al nucleonului. In felul acesta, metoda bilanţului energiei (în care se ţine seama numai de energia radiată efectiv) şi metoda lui Lorentz duc la valori diferite pentru energia de interacţiune. Anume, vom menţiona încă o dată pentru claritate, că în metoda lui Lorentz apar termeni inerţiali suplimentari proporţionali cu $\ddot{\vec{p}}$ şi $\ddot{\vec{m}}$. In metoda noastră, luînd pentru forţa de autoacţiune semidiferenţă potenţialelor retardate şi avansate, am putut elimina termenii inerţiali. De aceea ambele metode, adică metoda de determinare a forţei de autoacţiune cu ajutorul cîmpului compresor şi metoda bilanţului energiei, duc la rezultate identice şi aplicabilitatea lor nu este mărginită la frecvenţele înalte de oscilaţie ale nucleonului. Conform teoriei vidului electromagnetic (v. anexa), masa de cîmp a electronului este egală cu aproximativ $\frac{1}{137}$ din întreaga masă. Este posibil ca o parte din masa nucleonului $\left(\text{formînd probabil o fracţiune de } \frac{2\pi g^2}{ch}\right)$ să aibă de asemenea un caracter de cîmp. In acest caz, termenii de cîmp vor da o mică corecţie la ecuaţiile noastre (54,9) şi (54,10). Mai amănunţit această problemă va putea fi analizată numai după construirea teoriei vidului mezonic.

§ 55. Difuzia undelor mezonice vectoriale, cu considerarea amortizării

Să examinăm, înainte de toate, difuzia cvasielectrică a mezonilor neutri cu considerarea amortizării. Ne vom mărgini aici la cazul cel mai important, al energiilor mari ($k \sim K$), cînd difuzia mezonilor logitudinali poate fi neglijată.

Dacă intensitatea cîmpului cvasielectric al undei mezonice incidente se dă sub forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-icKt}, \tag{55,1}$$

atunci găsim, folosind formula (54,9), următoarea expresie pentru derivata a doua a momentului dipolar cvasielectric al nucleonului, moment datorit acestei unde:

$$\ddot{\vec{p}}=\frac{g^2\vec{E}}{M+i\frac{2}{3}\frac{g^2k}{c^2}}, \tag{55,2}$$

de unde

$$\overline{\ddot{\vec{p}}^2}=\frac{g^4\overline{E}^2}{M^2\left(1+\frac{4}{9}\frac{g^4k^2}{M^2c^4}\right)}\cdot \tag{55,3}$$

Secţiunea eficace totală de difuzie se găseşte — ca deobicei — cu ajutorul formulei (52,1)

$$\sigma'=\frac{W}{J}\cdot \tag{55,4}$$

Aici, în conformitate cu egalităţile (49,11) şi (51,11), intensitatea undelor incidente s-a pus egală cu

$$J=\frac{c}{4\pi}\overline{E}^2 \tag{55,5}$$

şi energia undelor secundare radiate pe secundă cu

$$W=\frac{2}{3}\frac{\overline{\ddot{p}^2}}{c^3}\cdot \tag{55,6}$$

Din ultimele formule găsim pentru secţiunea eficace cvasielectrică de difuzie a mezonilor pe nucleoni, cu considerarea amortizării, următoarea expresie:

$$\sigma'=\frac{8\pi}{3}\frac{r_N^2}{1+\frac{4}{9}r_N^2k^2}, \tag{55,7}$$

în care $r_N=\frac{g^2}{Mc^2}$, este raza cvasielectrică a nucleonului.

Reamintind că secţiunea eficace fără considerarea amortizării este dată de relaţia (52,8), adică

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}r_N^2,$$

expresia (55,7) se poate pune sub forma

$$\sigma'=\frac{\sigma}{1+\frac{k^2\sigma}{6\pi}}\cdot \tag{55,8}$$

Din punctul de vedere al teoriei clasice, care consideră masa particulelor (în cazul nostru a nucleonului) ca fiind de altă natură decît cea de cîmp, teorie dezvoltată în spiritul celei clasice a lui Dirac, ecuaţia de mişcare (54.9) — deci totodată formula pentru secţiunea eficace de difuzie (55,8) — nu este, în cazul nerelativist, limitată de vreo condiţie.

Vom reaminti că în § 36 s-a obţinut o formulă analogă pentru difuzia luminii pe electron.

Pe de altă parte, din punctul de vedere al teoriei clasice a lui Lorentz, care admite o masă de cîmp a particulelor nepunctiforme, atît ecuaţia de mişcare (54.9), cît şi mărimea secţiunii eficace (55,8) sînt valabile numai pentru lungimile de undă care depăşesc raza clasică respectivă, în cazul nostru — cvasielectrică — r_N, a particulelor (din cauza necesităţii de a elimina din ecuaţiile de mişcare termenii de tipul $\left(\frac{r_N}{\Lambda}\right)^n$).

După cum se vede din (55,8), forţa de frecare prin radiaţie începe să se manifeste la fracvenţele la care avem satisfăcută relaţia

$$\sigma k^2 \sim 1, \tag{55,9}$$

sau

$$\frac{chk}{2\pi} \sim \frac{hc}{2\pi g^2} Mc^2 \sim 6\, Mc^2. \tag{55,10}$$

Pentru energii mai mari secţiunea eficace devine

$$\sigma' = \frac{6\pi}{k^2} = \frac{3}{2\pi} \Lambda^2, \tag{55,11}$$

în care lungimea undelor mezonice incidente este $\Lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Pentru energiile mezonului incident care întrec de cîteva ori energia proprie a nucleului Mc^2, intrăm în domeniul energiei relativiste faţă de nucleon. Aici vor avea loc — cu mare probabilitate — efectele cuantice de difuzie, în particular, efectul Compton, adică difuzia necoherentă a mezonilor, cu schimbarea frecvenţei, spre deosebire de cazul examinat acum al difuziei coherente fără schimbare de frecvenţă [1]).

[1]) Aşa cum s-a arătat în § 36, într-un sistem de coordonate în care centrul de greutate al sistemului mezon-nucleon este în repaus, teoria cuantică a difuziei duce la o formulă care coincide în fond cu (55,8) pînă la energii ultrarelativiste $\left(\frac{chk}{2\pi} > Mc^2\right)$.

Să trecem acum la difuzia cvasimagnetică a undelor mezonice (a mezonilor) pe nucleoni.

Să presupunem că vectorul cîmpului mezonic exterior $\vec{H}$ variază armonic, cu frecvenţa $\frac{cK}{2\pi}$ şi este îndreptat după axa z. Vectorul moment al nucleonului $\vec{m}$ este situat în planul xz. Atunci, neglijînd acceleraţia centripetă, avem $\dddot{\vec{m}} = -c^2K^2\dot{\vec{m}}$.

Proiectînd ecuaţia de mişcare (54,10) pe axele de coordonate, obţinem

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= bm_z\dot{m}_y, \\ \dot{m}_y &= -\varkappa m_x H - bm_z\dot{m}_x + bm_x\dot{m}_z, \\ \dot{m}_z &= -bm_x\dot{m}_y, \end{aligned} \tag{55,12}$$

unde

$$b = \frac{2c^2K^2}{3v^3}\varkappa.$$

De aici găsim

$$\dot{m}_y = -\varkappa\frac{m_x H}{1+b^2m^2}, \quad \dot{m}_x = bm_z\dot{m}_y, \quad \dot{m}_z = -bm_x\dot{m}_y, \tag{55,13}$$

unde

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_z^2},$$

sau

$$\dot{m} = \frac{\varkappa m_x H}{(1+b^2m^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\ddot{m}^2 = \frac{\varkappa^2c^2K^2m_x^2H^2}{1+b^2m^2}.$$

Punînd în formula secţiunii eficace

$$\sigma' = \frac{W}{J}$$

conform cu egalităţile (49,11) şi (51,12)

$$J = \frac{v}{4\pi}H^2,$$

$$W = \frac{2}{3}\frac{\ddot{m}^2}{v^3},$$

găsim următoarea expresie pentru secţiunea eficace de difuzie cvasimagnetică a mezonilor transversali cu considerarea amortizării, în ipoteza că unghiul dintre vectorii $\vec{m}$ şi $\vec{H}$ este $\frac{\pi}{2}$:

$$\sigma' = \frac{\sigma}{1+\sigma k^2 (6\pi)^{-1}} \cdot \tag{55,14}$$

Aici σ este secţiunea eficace totală pentru difuzia cvasimagnetică fără considerarea amortizării [v. relaţia (53,10)]:

$$\sigma = \frac{128\pi^3 f^4 k^4}{3c^2h^2K^2} \cdot \tag{55,15}$$

Pentru energii mici ale undelor mezonice incidente, cînd

$$\frac{chk}{2\pi} < \sqrt{\frac{ch}{2\pi f^2 k_0^2}}\,\mu c^2 \sim 2\mu c^2 \tag{55,16}$$

$\left(\text{unde } \mu\text{, este masa mezonului; mărimea } \beta_2 = \frac{2\pi f^2 k_0^2}{ch} \sim 6 \text{ este constanta mezonică de structură fină}\right)$, adică pentru

$$\sigma k^2 < 1,$$

găsim, pentru secţiunea eficace, rezultatul cunoscut (55,15) obţinut fără considerarea amortizării.

Pentru unde mezonice incidente de energie

$$\frac{chk}{2\pi} > \sqrt{\frac{ch}{2\pi f^2 k_0^2}}\,\mu c^2 \sim 2\mu c^2, \tag{55,17}$$

care depăşesc numai de cîteva ori energia proprie a mezonului (adică un domeniu de energii practic încă nerelativiste, faţă de nucleoni) mărimea σk^2 devine mai mare decît 1. De aceea, începînd cu aceste energii trebuie să ţinem seamă de forţa de frecare mezonică prin radiaţie. Pentru energii mari, secţiunea eficace devine

$$\sigma' = \frac{6\pi}{k^2} = \frac{3}{2\pi}\Lambda^2 \tag{55,18}$$

şi rămîne constantă începînd de la o anumită energie înainte. Rezultă de aici că dacă se ia în considerare forţa de frecare prin radiaţie, dispare dificultatea dipolară la difuzia cvasimagnetică a mezonilor vectoriali.

Cu totul analog se tratează efectele legate de cîmpul vectorial clasic, ale cărui proprietăţi dipolare vor fi asemănătoare cu cele din cîmpul vectorial şi care, după cum se vede direct din expresia energiei de legătură, vor apărea neapărat la interacţiunea acestui cîmp cu nucleonii.

Astfel, mezodinamica clasică permite nu numai să se lămurească originea dificultăţii dipolare, dificultate legată de creşterea inadmisibilă a secţiunii eficace la difuzia cvasimagnetică, ci dă şi posibilitatea înlăturării ei prin considerarea amortizării, adică a autoacţiunii cîmpului.

Teoria cuantică a difuziei pe nucleoni a mezonilor neutri şi încărcaţi, vectoriali şi nevectoriali, etc., confirmă pe deplin aceste rezultate, permiţînd la rîndul ei, datorită luării în considerare a amortizării[1]), să se evite creşterea nelimitată a probabilităţii sau a secţiunii eficace de difuzie cvasimagnetică.

După cum a apărut clar la o analiză ulterioară, aceste rezultate au o importanţă primordială pentru toată teoria actuală a cîmpului, care depăşeşte cadrul teoriei difuziei.

Un alt efect g foarte interesant este emisia de cîmp mezonic (mezoni) de frînare la ciocnirea nucleonilor rapizi între ei, analoagă cu emisia undelor electromagnetice (fotoni) de frînare cu atît mai intense cu cît energiile particulelor care se ciocnesc sînt mai mari.

După cum se ştie probabilitatea emisiei de fotoni de frînare creşte repede cu energia şi, de exemplu, pentru energiile de ordinul a zeci şi sute de milioane de electronvolţi pierderile de energie ale electronilor din componenta moale a radiaţiei cosmice sînt determinate în cea mai mare parte de radiaţie. Probabilitatea de ciocnire cu electronii atomici şi de pierdere a energiei prin ionizări este, în acest domeniu de energii, neînsemnată.

In mod analog, nucleonii rapizi cînd trec printr-un strat de materie îşi pierd energia lor cel mai probabil prin radiaţia de frînare a mezonilor. Conform ipotezelor moderne — datorită ciocnirilor protonilor primari cu nucleele, se poate produce o generare a diverşilor mezoni neutri şi încărcaţi în straturile superioare ale atmosferei, precum şi generarea mezonilor, în condiţiile de laborator (recent observată).

---

[1]) A. Sokolov, Journ. of Phys., U. S. S. R., 5, 231, 1941; В. Паули, Мезонная теория ядерных сил, cap. IV, ИЛ, 1947; Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1948. Aici se găseşte literatură complementară în legătură cu teoria cuantică a amortizării.

Analog cu radiaţia electromagnetică (sau mezonică) a particulelor puse în mişcare de undele incidente, radiaţia de frînare este de asemenea, în fond, un efect clasic; corecţiile cuantice sînt însă aici esenţiale. Teoria completă, corespunzătoare realităţii, trebuie să fie cuantică şi expresiile definitive pentru probabilitatea radiaţiilor de frînare, în cazul forţelor e şi g, depind de constanta lui Planck h, altfel zis, de constanta structurii fine

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}\left(\text{sau de constanta mezonică respectivă } \beta = \frac{2\pi g^2}{hc}\right).$$

Cu toate acestea, după cum s-a arătat pentru cazul cîmpului electromagnetic[1]) şi după cum se poate arăta şi pentru cîmpul mezonic[2]), se poate da o tratare aproximativă semicuantică a problemei radiaţiei de frînare, care să redea esenţa fenomenului.

Problema se rezolvă în felul următor: cîmpul particulei incidente care se ciocneşte cu o particulă oarecare în repaus, se descompune în unde plane şi radiaţia de frînare la ciocnire se tratează ca rezultatul difuziei undelor individuale.

In mare, esenţa unei deduceri de acest fel a radiaţiei de frînare a fotonilor constă în următoarele: electronul străbătînd la distanţa r, cîmpul nucleului de sarcină Ze, capătă o acceleraţie $w \sim \frac{eE}{m} \sim \frac{Ze^2}{mr^2}$ şi datorită acestui fapt va radia în intervalul de timp $\tau \sim \frac{r}{c}$ energia

$$\Delta W \sim \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|w|^2\tau \sim \frac{e^2}{c^4}\frac{Z^2e^4}{m^2r^3}.$$

Pentru a obţine secţiunea eficace σ_{rad} a radiaţiei de frînare, trebuie să înmulţim această expresie cu probabilitatea ca electronul să nimerească pe suprafaţa $2\pi r\,dr$, apoi să împărţim prin energia iniţială $\sim mc^2$ şi, în sfîrşit, să integrăm în raport cu r, adică

$$\sigma_{\text{rad}} \sim \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{Z^2e^2}{mc^2}\int_0^\infty \frac{dr}{r^2}.$$

---

1) Williams, Phys. Rev., **45**, 729, 1934; Rev. Mod. Phys., **17**, 1945; Weizsäcker, Zs. f. Phys., 88, 612, 1934; В. Гейтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат, 1940, § 17.

2) Heitler and Peng, Proc. Irish. Academy Sci. (A), 1942—1943. (O serie de articole).

Aici intervine în mod esenţial mecanică cuantică: aceasta afirmă că limita de valabilitate a teoriei clasice este dată de $r_{min} \sim \frac{h}{mc}$; atunci

$$\sigma_{rad} \sim \alpha Z^2 r_0^2 \sim \frac{Z^2 r_0^2}{137} \left(\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{1}{137{,}02}, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \right).$$

Teoria cuantică riguroasă duce de asemenea la o expresie care conţine ca factor fundamental valoarea obţinută mai sus.

Pentru radierea mezonilor de către nucleoni, condiţionată de sarcinile lor cvasielectrice, vom obţine o expresie analogă înlocuid e prin g şi m prin M:

$$\sigma_{rad}^{M} = R_0^2 \beta^2 \sim \left(\frac{g^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{g^2}{hc} \sim \frac{R_0^2}{6}$$

$\left(R_0 = \frac{g^2}{Mc^2}, \text{ este raza cvasielectrică a nucleonului} \right)$.

Ori, după cum am văzut din exemplul problemei difuziei la energii mari, rolul esenţial îl joacă termenii cvasimagnetici. Efectuînd cu aceştia aceleaşi operaţii, obţinem valoarea secţiunii eficace pentru radiaţia de frînare cvasimagnetică a mezonilor vectoriali neutri (sau pseudoscalari), de către nucleoni, valoare care creşte iarăşi în mod absurd cu energia nucleonilor E:

$$\sigma_{rad}^{M'} \approx \text{const}\, \nu^2 \approx \text{const}\, E^2 \quad (\text{unde s-a pus } E = h\nu).$$

Teoria cuantică a radiaţiei de frînare confirmă în esenţă acest rezultat, ceea ce ne pune din nou în faţa problemei de a elimina dificultatea dipolară. O metodă firească de înlăturare a acestei dificultăţi şi de preîntîmpinare a creşterii inadmisibile a secţiunii eficace pentru radiaţia de frînare mezonică a nucleonilor, cînd energia acestora din urmă creşte, este de asemenea tratarea mai riguroasă a problemei, luînd în considerare amortizarea, atît în teoria clasică, cît şi în teoria consecventă cuantică. Intr-adevăr, numai după ce luăm în considerare amortizarea este posibil să dezvoltăm teoria generării mezonilor prin frînarea nucleonilor, teorie care stă acum la baza înţelegerii proceselor din razele cosmice, în straturile superioare ale atmosferei şi care explică formarea mezonilor în condiţiile de laborator.

Dificultatea dipolară apare la mezonii vectoriali, nu numai în cazul efectelor legate de forţele g, ci şi la procesele electromagnetice (forţele e). De exemplu, secţiunea eficace pentru difuzia luminii pe astfel de mezoni (efect Compton) creşte cu frecvenţa luminii[1]). Aici trebuie să ţinem seamă de asemenea de amortizare, al cărei efect constă tocmai în înlăturarea creşterii inadmisibile a secţiunilor. Afară de aceasta, dificultatea dipolară apare de asemenea şi în problemele de interacţiune în cazul forţelor e şi se manifestă, de exemplu, prin faptul că nu pot să existe stări staţionare ale mezonilor încărcaţi, vectoriali, în cîmpul coulombian al unei sarcini punctiforme[2]), adică e imposibilă formarea mezohidrogenului şi a altor mezo-atomi sui generis, din nuclee avînd mezoni vectoriali ce se rotesc în jurul lor. Rezumînd aceste fapte, se poate spune că, caracterul efectiv dipolar al cîmpului mezonic vectorial face ca la energii mari sau la distanţe mici, mezonul să se comporte mai degrabă ca un magnet, decît ca o sarcină, iar forţele magnetice, după cum am menţionat mai sus, (§ 45), nu ne dau nivele stabile. Acest exemplu cu dificultatea dipolară în cazul interacţiunii electromagnetice a mezonilor, este foarte analog cu apariţia dificultăţii dipolare în cazul interacţiunii nucleonilor prin intermediul unui cîmp mezonic, ei fiind legaţi prin aceasta din urmă datorită momentelor cvasimagnetice. In ambele cazuri nu s-au indicat pînă acum mijloace sigure pentru îndepărtarea dificultăţii dipolare în problema interacţiunii. Metoda nerelativistă provizorie de tăiere a energiei potenţiale la un $r_{\min}$, extrem de mic, este desigur nesatisfăcătoare.

După cum s-a menţionat, dificultatea dipolară nu apare pentru efectele electromagnetice la cîmpul pseudoscalar, ceea ce se poate vedea uşor din formula generală a ecuaţiilor, sau din lagrangeanul mixt al particulelor pseudoscalare într-un cîmp electromagnetic, în care lipsesc termeni dipolari. Prin aceasta, secţiunile eficace ale diferitelor procese electromagnetice (de exemplu efectul Compton, radiaţia de frînare a luminii de către mezoni pseudoscalari etc.) nu cresc o dată cu creşterea energiilor, în cazul particulelor pseudoscalare.

Aceste fapte ne determină într-o anumită măsură să considerăm teoria vectorială ca fiind mai puţin aplicabilă pentru descrierea mezonilor şi să înclinăm în favoarea ecuaţiei pseudoscalare[3]). Acest argument, însă[4]), se referă numai la forţele e, adică la interacţiunea mezonilor pseudoscalari cu cîmpul electromagnetic.

---

[1]) Я. А. Смородинский, ЖЭТФ, **10**, 840, 1940.

[2]) И. Е. Тамм, ДАН, **29**, 551, 1940.

[3]) J. R. Oppenheimer, Phys. Rev., **59**, 462, 1941 R. F. Christy and S. Kusaka, Phys. Rev., **59**, 405, 1941.

[4]) Vezi articolul lui S. Z. Belenki în culegerea „Мезон" под ред. И. Е. Тамма, Гостехиздат, 1947, стр. 146.

In ceea ce priveşte teoria mezonică a forţelor g, noi nu putem să ne dispensăm de partea tensorială sau necentrală $\sim S_{AB}$, care asigură momentul cvadrupolar al deuteronului; în acelaşi timp, însă în oricare variantă a teoriei, această interacţiune tensorială conţine termeni dipolari.

Nu ne vom ocupa însă mai de aproape de aceste probleme.

Elucidarea rolului mare pe care îl joacă amortizarea în cîmpurile care au o dipolaritate eficace, obţinută în mezodinamica clasică şi cuantică, a trezit interesul pentru dezvoltarea teoriei generale a amortizării în diverse direcţii.

Trebuie subliniat că tendinţa spre o considerare din ce în ce mai precisă a reacţiunii cîmpului este foarte caracteristică pentru dezvoltarea fizicii teoretice din ultimii ani. Este vorba în primul rînd de construirea teoriei generale a legăturii particulelor cu cîmpurile mezonic, electromagnetic sau gravitaţional şi a separării efectelor care duc la rezultate finite, de divergenţele, — de tipul autoacţiunii, — care apar în calculele clasice şi cuatice şi sînt datorite energiei cîmpului particulelor punctiforme. Noii dezvoltării a acestor probleme îi este consacrată anexa de la sfirşitul cărţii.

§ 56. Gravitaţia şi particulele elementare

Deoarece această carte este consacrată, în primul rînd, problemelor legate de particulele elementare, noi nu ne vom opri de loc asupra teoriei cîmpului gravitaţional, întrucît gravitaţia nu joacă în mod practic nici un rol în problemele diverselor interacţiuni dintre particule. Intr-adevăr, după cum s-a menţionat mai sus, energia potenţială gravitaţională V_m, de exemplu între doi protoni, este complet neglijabilă în comparaţie cu energia lor electrostatică V_e:

$$V_m : V_e = \varkappa \frac{M^2}{r} : \frac{e^2}{r} \sim 10^{-36}. \qquad (56,1)$$

Tot aşa energia gravitaţională este mică în comparaţie cu energia potenţială mezonică dintre aceleaşi particule elementare la distanţe $r < \frac{1}{\varkappa_0}$:

$$V_m : V_g \sim \frac{\varkappa M^2}{r} : \frac{g^2}{r} \sim 10^{-38}. \qquad (56,2)$$

Introducînd noţiunea de sarcină gravitaţională, care coincide de fapt cu masa corpului:

$$m' = \sqrt{\varkappa} \cdot m,$$

se poate spune că sarcinile gravitaţionale ale particulelor elementare sînt mici în comparaţie cu sarcinile lor electrice sau mezonice [1]).

Gravitaţia începe să joace un rol important numai pentru corpuri macroscopice şi prevalează asupra celorlalte forme de interacţiune pentru corpuri astronomice, care au o masă enormă.

Afară de aceasta, expunerea teoriei moderne a gravitaţiei este strîns legată de folosirea analizei tensoriale şi formează deobicei, obiectul unor monografii speciale [2]).

Trebuie totuşi să dăm aici cel puţin o expunere foarte scurtă a bazelor teoriei cîmpului gravitaţional, pentru a arăta pe de o parte existenţa la acest cîmp a multor proprietăţi — care nu au fost menţionate mai inainte, — comune cu cîmpurile electromagnetice şi mezonice, fapt care ne permite să tratăm gravitaţia cu aceleaşi metode care au fost utilizate pentru cîmpul electromagnetic şi cel mezonic, şi pe de altă parte pentru a sublinia o serie de particularităţi specifice, inerente acestui cîmp.

Ne vom opri mai întîi asupra istoricului teoriei gravitaţiei. In înţelegerea cîmpului gravitaţional trebuie distinse trei etape: prima dintre acestea este legată de teoria lui Newton, de fizica clasică şi în parte de teoria relativităţii restrînse. Conform acestor teorii, cîmpul gravitaţional a rămas în afara unificării cunoscute a diferitelor domenii ale fizicii, din secolul XIX şi începutul secolului XX, în urma cărui fapt s-a stabilit legătura dintre fenomenele optice, electrice şi magnetice etc.

---

[1]) Desigur, nu trebuie să pierdem din vedere în acest caz influenta posibilă a gravitaţiei în probleme ca energia proprie a particulelor. Asupra importanţei acestora, s-a atras iarăşi atenţia recent de M. F. Sirokov (Вестник МГУ, № 1, 1947).

[2]) V. П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947 А. С. Эддингтон, Теория относительности, ГТТИ, 1934; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948; В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947; R. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934. Despre legătura dintre teoria gravitaţiei şi teoria modernă a cîmpului, vezi de asemenea: W. Pauli şi M. Fierz, Proc. Roy. Soc. A, **173**, 211, 1939; L. de Broglie. Théorie generale des particules a spin, Paris, 1943.

A doua etapă este reprezentată de teoria relativităţii generale a lui Einstein (1916), conform căreia cîmpul gravitaţional este un cîmp metric, ce apare datorită prezenţei cîmpurilor care determină curbura universului spaţiu-timp, a cărei posibilitate a fost demonstrată pentru prima dată în geometria neeuclidiană a lui Lobacevski. Se poate spune că teoria generală a relativităţii a rupt oarecum definitiv cîmpul gravific de materia obişnuită care, după cum se ştie, este constituită din particule elementare şi cîmpuri.

In legătură cu aceasta, după cum s-a subliniat recent, obiectele fizice sînt împărţite în „cîmp metric" $g_{\mu\nu}$ (gravitaţia), pe de o parte, şi cîmp electromagnetic $H_{\mu\nu}$ (adică, mai riguros vorbind, particule elementare şi cîmpuri) pe de altă parte [1]).

Etapa a treia a teoriei gravitaţiei este legată de mecanica cuantică relativistă a particulelor elementare şi a cîmpurilor, care permite nu numai să se construiască o teorie completă a cîmpului gravific slab dar, după cum se poate arăta, duce cu necesitate la concluzia posibilităţii transformărilor reciproce ale particulelor elementare şi cuantelor gravitaţionale (gravitoni). Prin aceasta, gravitaţia se unifică într-o anumită măsură cu sistemul celorlalte particule elementare, ceea ce permite în principiu construirea unei teori unificate a tuturor cîmpurilor şi particulelor [2]).

Să trecem acum la o formulare matematică foarte succintă a teoriei gravitaţiei.

Conform teoriei clasice a lui Newton, cîmpul gravitaţional este static şi este descris de o funcţie cu o singură componentă, potenţialul φ, care se supune ecuaţiei lui Laplace-Poisson:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi\varkappa m\rho, \tag{56,3}$$

unde m este masa corpului care generează cîmpul, iar ρ este densitatea distribuţiei acestei mase. In cazul unei particule punctiformei situată în punctul $\vec{r}=0$, trebuie să punem în locul lui ρ, $\delta(\vec{r})$. Aici se poate folosi normarea din electromagnetism, introducînd: $\varphi' = \frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}$ şi sarcina gravitaţională $m' = \sqrt{\varkappa}\cdot m$;

atunci

$$\nabla^2\varphi' = 4\pi m'\rho.$$

[1]) A. Einstein, The meaning of relativity, Princeton, 1946.

[2]) Д. Иваненко, УФН, **32**, вып. 2, 3, 1947, Д. Иваненко и А. Соколов, Вестник МГУ, No. 8, 1947; ДАН, **58**, 1633, 1947.

Energia de interacţiune a corpului de masă m cu cîmpul gravitaţional este, în aproximaţia lui Newton, $U=-m\varphi$.

Să trecem acum la formularea matematică a etapei a doua a teoriei gravitaţiei, etapă legată de teoria relativităţii restrînse şi generale. Teoria gravitaţiei newtoniene este generalizată prin aceasta în diferite direcţii. După cum a remarcat încă Poincaré, în construirea teoriei relativităţii restrînse, ecuaţia statică Poisson trebuie înlocuită — în orice caz — cu ecuaţia undelor pentru potenţialul gravitaţional. Prin urmare, legea lui Newton este şi ea doar o aproximaţie statică a formulei corespunzătoare, şi depinde de vitezele maselor gravitaţionale, întocmai ca formula lui Breit din electrodinamică. Generalizările ulterioare sînt legate de teoria relativităţii generale a lui Einstein. Conform acesteia, cîmpul gravitaţional trebuie să fie descris nu de un potenţial cu o singură componentă, ci de o funcţie de undă cu 10 componente, care formează un tensor simetric $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$ $(\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Tensorul cîmpului gravitaţional coincide în acest caz cu tensorul metric $g_{\mu\nu}=g^{\text{metr}}_{\mu\nu}$, care caracterizează curbura spaţiu-timpului cvadridimensional, prevăzută de Lobacevski (1826). In acest punct stă evident cea mai mare particularitate, tot caracterul specific al teoriei einsteiniene a gravitaţiei, care nu are analog în cazul celorlalte cîmpuri şi care identifică gravitaţia cu cîmpul metric, adică îl geometrizează în întregime. In general, toate cîmpurile gravitaţionale obişnuite sînt slabe, corespunzător unei curburi mici a spaţiu-timpului, de aceea se poate pune pentru componentele covariante: $g_{\mu\nu}=g^{0}_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ şi pentru cele contravariante: $g^{\mu\nu}=g_{0}^{\mu\nu}-h^{\mu\nu}$, unde $g_{\mu\nu}$ cu indicele 0 sînt valorile pseudoeuclidiene constante:

$$g^{0}_{\mu\nu}=g_{0}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1\end{pmatrix},$$

iar pătratele lui $h_{\mu\nu}$ de obicei se neglijează. Potenţialul newtonian este doar o corecţie (statică) la una din componentele cîmpului slab $\varphi=\frac{c^2 h_{44}}{2}$. Componentele cîmpului slab $h_{\mu\nu}$ formează un tensor simetric faţă de transformările liniare.

Folosind simbolurile lui Einsenhart ai căror indici nu trebuie luaţi în considerare la sumare

$$e_1=e_2=e_3=-1,\quad e_4=+1,$$

avem

$$g^{0}_{\mu\nu}=e_{\mu}\delta_{\mu\nu},\quad \delta_{\mu\nu}=\left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\mu=\nu\\ \mu\neq\nu\end{matrix}\quad \sqrt{-g}=1+h;$$

$$h=e_{\mu}h_{\mu\mu},\quad h^{\mu\nu}=e_{\mu}e_{\nu}h_{\mu\nu}.$$

Ca și în cazul celorlalte cîmpuri, avem de a face și în teoria gravitației cu două probleme fundamentale: descrierea acțiunii cîmpului gravitațional asupra materiei și descrierea generării sau a radiației cîmpului de către materie. Trimițînd pe cititor pentru lămuriri suplimentare la monografii asupra teoriei relativității generale, vom indica aici pe scurt că soluția primei probleme este pînă la urmă extrem de simplă, deoarece pentru aceasta este suficient numai să se scrie lagrangeenii respectivi sau ecuațiile particulelor libere (sau a cîmpurilor) sub forma covariantă, adică în coordonate curbilinii cvadridimensionale generale, cu ajutorul componentelor $g_{\mu\nu}$. Termenii care apar în acest caz în plus față de cazul pseudoeuclidian vor corespunde interacțiunii cu cîmpul gravitațional. Substituind apoi în expresiile indicate valorile aproximative: $g_{\mu\nu}=g^{0}_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$, vom obține descrierea interacțiunii cu un cîmp slab. De altfel, întrucît cîmpul gravitațional slab $h_{\mu\nu}$ poate fi examinat în perfectă analogie cu celelalte cîmpuri: electromagnetic, mezonic și altele, păstrînd în primă aproximație caracterul pseudoeuclidian al metricii, energia de interacțiune cu cîmpul slab al oricărui cîmp (sau particule) dat, se poate obține construind, după regula generală, lagrangeanul care să țină seama de legătura cîmpului (sau particulelor) dat cu cîmpul gravitațional slab.

Cîmpul gravitațional slab conține după cum s-a arătat, 10 componente; într-o undă plană are sens să numim (h_{44}) parte longitudinal-longitudinală, (h_{4n}) — parte longitudinal-transversală și (h_{nk}) — parte transversal-transversală. Printr-o transformare infinit mică de coordonate, putem întotdeauna face ca într-o undă plană să fie diferite de zero numai două componente transversal-transversale. La fel ca și în cazul cîmpului electromagnetic se poate radia efectiv numai partea transversal-transversală. Componentele h_{nk} satisfac ecuația lui D'Alembert $\Box h_{nk}=0$, unde între cele șase componente ale cîmpului există următoarele relații:

$$\frac{\partial h_{nk}}{\partial x_n}=0,\quad h=h_{11}+h_{22}+h_{33}=0.$$

In felul acesta, partea transversal-transversală are numai două componente independente.

Mai departe, ecuaţia fundamentală a mecanicii cuantice relativiste $(\nabla_\mu \nabla_\mu - k_0^2)\psi = 0$ capătă într-un cîmp gravitaţional forma:

$$(-g^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu + g^{\mu\nu}\{\mu\nu, \alpha\}\nabla_\alpha - k_0^2)\psi = 0,$$

unde $\{\mu\nu, \alpha\}$ sînt simbolurile lui Christoffel, care depind de derivatele de ordinul întîi ale componentelor $g_{\mu\nu}$:

$$\{\mu\nu, \alpha\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right).$$

Mărginindu-ne la cîmpul slab şi anume la partea lui transversală efectiv radiată, avem:

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu = e_\mu \nabla_\mu \nabla_\mu - h_{ns}\nabla_n \nabla_s;$$

$$g^{\mu\nu}\{\mu\nu, \alpha\}\nabla_\alpha = (\nabla_s h_{ns} h_{nk})\nabla_k + \frac{1}{4} e_\alpha (\nabla_\alpha h_{ns} h_{ns})\nabla_\alpha.$$

De aici, ecuaţia fundamentală a lui Klein capătă forma:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\psi = U\psi,$$

în care

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = -h_{ns}\nabla_n \nabla_s,$$

$$U_2 = -(\nabla_s h_{ns} h_{nk})\nabla_k - \frac{1}{4} e_\alpha (\nabla_\alpha h_{ns} h_{ns})\nabla_\alpha.$$

Prin introducerea coordonatelor curbilinii cvadridimensionale şi a derivatelor covariante formate cu ajutorul componentelor $g_{\mu\nu}$, se obţin obişnuitele ecuaţii ale particulelor şi cîmpurilor de tipul Bose, adică de spin întreg, care necesită pentru descrierea lor, tensori obişnuiţi de un ordin întreg, adică scalari, vectori, tensori de ordinul doi antisimetrici etc. Dimpotrivă, particulele şi cîmpurile de spin semiîntreg, descrise cu ajutorul spinorilor şi neavînd un analog clasic direct, necesită un studiu suplimentar. După cum s-a menţionat mai înainte (vezi § 23, pct. 5) ecuaţia spinorului sau a semivectorului (tensorul de ordinul $^1/_2$) poate fi scrisă într-un cîmp gravitaţional cu ajutorul matricilor γ_μ care sînt rădăcini patrate sui generis ale componentelor $g_{\mu\nu}$, sub forma

$$[\gamma^\mu(\nabla_\mu - \Gamma_\mu) - ik_0]\psi = 0,$$

unde Γ_μ sînt coeficienţii care caracterizează transportul paralel al spinorului.

Vom reaminti că însuşi operatorul ecuaţiei lui Dirac apare în urma „liniarizării" ecuaţiei lui Klein.

In cazul existenţei gravitaţiei, matricile γ_μ nu mai sînt constante, ci reprezintă funcţii de coordonate şi timp satisfăcînd relaţia:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

In cazul unui cîmp slab, avem

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} = 2e_\mu \delta_{\mu\nu} - 2e_\mu e_\nu h_{\mu\nu}.$$

Se poate introduce de asemenea vectorul cîmpului gravitaţional slab, punînd

$$\gamma^\mu = \gamma_0^\mu - h^\mu,$$

unde γ_0^μ satisfac relaţia obişnuită

$$\gamma_0^\mu \gamma_0^\nu + \gamma_0^\nu \gamma_0^\mu = 2e_\mu \delta_{\mu\nu};$$

atunci căpătăm

$$h^\mu = \frac{1}{2} \gamma_0^\lambda e_\mu h_{\mu\lambda}.$$

Vom observa că prin aceasta se rezolvă nu numai problema principială de a ţine seamă de acţiunea cîmpului gravitaţional asupra electronului, cîmp reprezentat în acest caz de componentele γ_μ, dar şi problema destul de importantă a scrierii ecuaţiei lui Dirac în coordonate curbilinii oarecare.

In studiul cîmpului gravitaţional slab vom pleca înainte de toate de la expresia generală a funcţiei lui Lagrange

$$L = \frac{c^4}{16\pi\varkappa} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\} \{\alpha\beta, \beta\}),$$

unde

$$\{\alpha\beta, \beta\} = \nabla_\alpha \sqrt{-g}, \quad \nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Pentru un cîmp slab obţinem

$$\{\mu\alpha, \beta\} = e_\beta [\mu\alpha, \beta] = \frac{1}{2} e_\beta (\nabla_\alpha h_{\mu\beta} + \nabla_\mu h_{\alpha\beta} - \nabla_\beta h_{\mu\alpha}).$$

Alegînd etalonarea (calibrarea) astfel încît

$$h = e_\mu h_{\mu\mu} = 0,$$

şi îndepărtînd componentele longitudinale ale cîmpului, căpătăm pentru partea transversal-transversală a lagrangeanului

$$L = \frac{c^4}{16\pi\varkappa} e_\mu e_\alpha e_\beta [\mu\alpha, \beta] [\mu\beta, \alpha].$$

In particular, pentru undele gravitaţionale care se propagă de-a lungul axei $x_1 = x$, observăm că

$$h_{22} + h_{33} = 0\,;$$

astfel vor fi diferite de zero numai două componente h_{23} şi $h_{22} - h_{33}$. Atunci lagrangeanul va fi:

$$L = \frac{c^4}{64\pi\varkappa} \sum_{\mu,\,\nu=3,2} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Expresia lagrangeanului ne permite, ca deobicei, să construim întreaga teorie a cîmpului, — în cazul de faţă, a cîmpului gravitaţional transversal slab.

In particular, pentru densitatea energiei — ca componentă temporală a tensorului energie-impuls, obţinem:

$$T_{44} = L - g^{\alpha\beta}_{(4)} \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{(4)}},$$

unde

$$g^{\alpha\beta}_{(4)} = \nabla_4 (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) = -e_\alpha e_\beta \frac{1}{c} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t}.$$

Prin urmare

$$T_{44} = \frac{c^4}{64\pi\varkappa} \sum_{\mu,\,\nu=3,2} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right].$$

In concordanţă cu teoria generală, densitatea energiei cîmpului gravitaţional descris de tensori şi nu de funcţii spinoriale, apare ca pozitiv definită. Datorită faptului că funcţia de undă are mai multe componente, spinul cîmpului gravitaţional este evident diferit de zero. Expresia lui se poate găsi după regula generală (v. § 30).

In teoria cuantică se demonstrează că spinul gravitonului, adică al particulei corespunzătoare undei gravitaţionale este egal cu $2\frac{h}{2\pi}$.

Vom reaminti că spinul fotonului, descris de cîmpul maxwellian vectorial, la fel ca şi spinul mezonului vectorial al lui Proca este egal cu $1\frac{h}{2\pi}$. La acelaşi rezultat, în ceea ce priveşte spinul cîmpului gravitaţional, putem ajunge prin calculul numărului componentelor independente ale cîmpului (transversale şi longitudinale), observînd că valoarea spinului s este legată de numărul componentelor n prin relaţia $n=2s+1$.

In cazul dat al cîmpului gravitaţional slab, cele 10 componente $h_{\mu\nu}$ sînt legate, în primul rînd, prin patru condiţii de etalonare (calibrare) şi în al doilea rînd, prin condiţia de anulare a „urmei" (Spur) h. Prin urmare, rămîn 5 componente independente, ceea ce duce la spinul $s=2$.

Este important de remarcat că cîmpul gravitaţional are un caracter cvadrupolar, spre deosebire de cîmpurile electromagnetic sau al lui Proca (mezonic), care au un caracter dipolar direct. Caracterul cvadrupolar al cîmpului gravitaţional este legat direct de următoarea circumstanţă. In electrodinamică, cel mai simplu sistem radiant este — după cum se ştie — dipolul. Valoarea energiei radiate este determinată de patratul acceleraţiei momentului dipolar. Acelaşi rezultat este confirmat şi de mecanica cuantică, care pune în locul lungimii dipolului, elementul de matrice corespunzător tranziţiei dintre cele două stări date.

Pentru mişcarea periodică de pulsaţie ω avem, conform teoriei clasice

$$-\frac{dU}{dt}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{r}}^2=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega^4\vec{r}^2.$$

După cum se ştie foarte bine, ne putem mărgini în expresia generală a potenţialului vector al cîmpului generat de sistem pentru un sistem arbitrar de sarcini, la termenul dipolar, în cazul cînd dimensiunile R sînt mici în comparaţie cu lungimea de undă, $R\ll\lambda$ şi cînd vitezele particulelor sînt mici: $v\ll c$.

Pentru un sistem de particule care au aceeaşi sarcină specifică $\frac{e}{m}=\text{const}$, acceleraţia momentului dipolar este nulă şi, prin urmare, radiaţia dipolară lipseşte. Intr-adevăr, în acest caz

$$\vec{p}=\sum e_i\vec{r}_i=\frac{e}{m}\sum m_i\vec{r}_i=\frac{e}{m}\vec{r}_0 M,$$

unde $\vec{r}_0$ este raza vectoare a centrului de inerţie, iar M este masa totală a sistemului. Ori, totdeauna este posibil să alegem origina sistemului de coordonate în centrul de inerţie, adică să punem $\vec{r}_0=0$, prin urmare să luăm $\vec{p}=0$, Altfel zis, radiaţia nu va exista, dacă centrul de inerţie este în repaus sau se mişcă uniform, adică $\ddot{\vec{r}}_0=0$.

Să presupunem acum că ne interesează termenii următori din dezvoltarea în serie a potenţialului vector al cîmpului, prin faptul că radiaţia dipolară se anulează sau datorită necesităţii de a lua în considerare dimensiunile sistemului, în cazul unor lungimi de undă mici, cînd $r\approx\lambda$, sau în sfîrşit, din cauza necesităţii de a lua în considerare corecţiile relativiste de ordinul $\frac{v}{c}$. Atunci, după cum se demonstrează în electrodinamică, trebuie să ţinem seamă de radiaţia condiţionată de momentul electric cvadrupolar şi momentul magnetic dipolar al sistemului de particule încărcate. Acest rezultat este confirmat şi de mecanica cuantică, care înlocuieşte expresiile clasice corespunzătoare prin elemente de matrice. Intuitiv se poate explica situaţia foarte simplu, observînd că în radiaţia dipolară, noi neglijăm termenii de ordinul $\frac{x}{\lambda}$ în expresia potenţialului vector sau a razei vectoare:

$$e^{i\omega(t-x/c)}=e^{i\omega t}\left(1-\frac{i\omega x}{c}\right).$$

Astfel, al doilea termen al dezvoltării ne va da în expresia radiaţiei un factor de corecţie de ordinul

$$\frac{\omega^2}{c^2}x^2.$$

Intr-adevăr, expresia radiaţiei cvadrupolare este:

$$-\frac{dU}{dt}\sim\frac{e^2}{c^5}\dddot{Q}^2\sim\frac{e^2x^4\omega^6}{c^5},$$

unde tensorul momentului cvadrupolar al distribuţiei particulelor este:

$$Q_{nk}=\sum(3x_nx_k-\delta_{nk}r^2).$$

Prin urmare, raportul dintre intensitatea radiaţiei cvadrupolare şi cea dipolară este, ca ordin de mărime:

$$\frac{\frac{e^2}{c^5}\dddot{Q}^2}{\frac{e^2}{c^3}\ddot{r}^2} \sim \frac{1}{c^2}\,\omega^2 x^2.$$

Să ne ocupăm iarăşi de cazul care ne interesează, cel al gravitaţiei. Analog cu potenţialul din electrostatică, potenţialul cîmpului gravitaţional generat de o distribuţie de mase, se poate pune sub forma unei sume de termeni $\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots$, unde φ_0 este potenţialul newtonian obişnuit, condiţionat de masa totală a sistemului: $\varphi_0=-\frac{\varkappa m}{r}$. Potenţialul φ_1 al dipolului este nul în cazul gravitaţiei. Intr-adevăr, raportul dintre sarcina gravitaţională şi masă va fi în toate cazurile acelaşi, şi anume:

$$\frac{\sqrt{\varkappa}\cdot m}{m}=\sqrt{\varkappa}.$$

Potenţialul φ_2 datorit momentului cvadrupolar al distribuţiei maselor, va avea forma obişnuită:

$$\varphi_2 \sim \varkappa m Q_{nk}\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_k}\frac{1}{r}.$$

De aceea, în timp ce radiaţia undelor electromagnetice are în general un caracter dipolar şi capătă un caracter cvadrupolar numai în cazuri speciale, radiaţia cîmpului gravitaţional slab este de fapt cvadrupolară. Fără să dăm aici o deducere riguroasă a intensităţii radiaţiei gravitaţionale, ne vom mărgini doar cu explicarea formulei dedusă în teoria clasică, pentru mărimea energiei gravitaţionale radiată în unitatea de timp

$$-\frac{dU}{dt} \sim \frac{\varkappa m}{c^5}\dddot{Q}^2.$$

Această formulă este cu totul analoagă cu rezultatul din electrodinamică, ceea ce se poate vedea uşor înlocuind sarcina electrică e prin sarcina gravitaţională $\sqrt{\varkappa}\cdot m$. Teoria cuantică confirmă acest rezultat, înlocuind mărimea momentului cvadrupolar prin elementul de matrice respectiv.

Avînd intensitatea radiaţiei gravitaţionale, putem — aplicînd comparaţia obişnuită dintre bilanţul de energie şi forţă — să obţinem mărimea forţei de frecare de radiaţie gravitaţională, adică a amortizării.

La fel cum forţa de frecare electromagnetică prin radiaţie este introdusă în ecuaţia de mişcare a unei particule individuale, tot aşa şi forţa de frecare gravitaţională de radiaţie trebuie introdusă în ecuaţia de mişcare a unei particule individuale [1]. Această forţă este de fapt egală cu derivata a cincea în raport cu timpul a momentului cvadrupolar, faţă de derivata a treia în cazul radiaţiei dipolare. Intr-adevăr, în loc de

$$F_e \sim \frac{e^2}{c^3}\,\omega^3 x \sim \frac{e^2}{c^3}\,\dddot{x}$$

vom avea acum

$$F_m \sim \varkappa\,\frac{m^2}{c^3}\,\omega^5 x^3 \sim \frac{\varkappa m^2 (x^3)^{(V)}}{c^5}\,.$$

După cum este uşor de verificat, radiaţia energiei gravitaţionale este infimă în cazul unui cîmp slab, deoarece masele particulelor elementare sînt extrem de mici, cu toate că frecvenţele de oscilaţie sînt mari; la corpurile astronomice însă, cum sînt de exemplu stelele duble, cu toată valoarea mare a maselor, frecvenţele sînt foarte mici.

Substituind pentru o orientare în mare, în cazul stelelor

$$\omega \sim 10^{-3},\quad m \sim 10^{32},\quad r \sim 10^{11}$$

obţinem $-\frac{dU}{dt} \sim 10^{32}$, ceea ce constituie aproximativ 10^{-20} din energia proprie.

Să menţionăm, în încheiere, că rezultatul cel mai interesant şi la prima vedere paradoxal al teoriei relativiste cuantice a cîmpului gravitaţional, constă în prevederea posibilităţii principiale de transformare a cîmpului gravitaţional în particule elementare obişnuite, şi reciproc (de exemplu, transformarea perechii electron-pozitron în doi gravitoni). Probalitatea sau secţiunea eficace a unei astfel de transformări este extrem de mică în cazul unui cîmp slab. Ea este determinată de pătratul razei gravitaţionale $r_m = \frac{\varkappa m}{c^2}$ şi nu de pătratul

---

[1] V. de asemenea Д. Д. Иваненко и А. М. Бродский, ДАН, 75, 519, 1950.

razei electrice: $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$, ca în cazul conversiunilor electromagnetice devenite obişnuite.

Fără să dăm deducerea formulelor cuantice respective, care, depăşesc cadrul acestei cărţi, vom explica numai sensul lor, comparîndu-le cu expresia pentru transformarea perechilor în fotoni. După cum se ştie, la viteze mici, teoria cuantică ne dă următoarea expresie pentru secţiunea eficace de transformare a electronului şi pozitronului în doi fotoni:

$$\sigma_e \sim r_e^2 \frac{c}{v} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2.$$

Calculele noastre pentru conversiuni gravitaţionale corespunzătoare, adică pentru transformarea aceleiaşi perechi de particule în doi gravitoni, duc în cazul vitezelor mici, la expresia

$$\sigma_m \sim r_m^2 \frac{c}{v} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2.$$

Afară de înlocuirea razei electrice prin cea gravitaţională, mai avem încă apariţia unui factor cvadrupolar caracteristic $\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4$ (perfect analog cu apariţia factorului dipolar $\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2$ din formulele mezodinamicii vectoriale). Evident, în condiţiile obişnuite ($\mathcal{E} \sim mc^2$) ale cîmpului slab, probabilitatea unei astfel de transmutaţii gravitaţionale este infimă:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_e} \sim \frac{r_g}{r_e^2} \sim 10^{-82}.$$

Totuşi, probabilitatea transformărilor gravitaţionale creşte foarte rapid cu creşterea energiei şi pentru valori $\mathcal{E} \sim 10^{21} mc^2$ va atinge ordinul de mărime al efectelor electromagnetice.

Rezultatul obţinut are în mod evident o importanţă principială, deoarece datorită posibilităţii transformărilor amintite se şterge deosebirea categorică dintre cîmpul gravitaţional şi alte cîmpuri şi particule, deosebire care a existat în toate concepţiile precedente asupra gravitaţiei. Această concluzie poate fi privită ca un prim pas în construirea unui tablou mai general al structurii întregii materii, corespunzător informaţiilor pe care le avem asupra particulelor elementare şi cîmpurilor corespunzătoare acestora şi asupra transformărilor lor.

ANEXA

DEZVOLTAREA TEORIEI VIDULUI

a) *Istoricul problemei*

Noua teorie a cîmpurilor şi a particulelor elementare se dezvoltă în direcţia construirii unei teorii generale a interacţiunii particulelor cu cîmpurile electromagnetic, mezonic, gravitaţional, cu cîmpul perechilor electron-pozitron şi al altor particule, teorie care să ţină seama de fluctuaţiile de zero ale acestor cîmpuri. Cu alte cuvinte, ultima dezvoltare a teoriei cuantice a cîmpului face un nou pas în precizarea proprietăţilor fizice ale vidului, a cărui influenţă se manifestă într-o serie de efecte. Noua teorie cuantică a cîmpului se dezvoltă în general în cadrul mecanicii cuantice relativiste existente, pe baza funcţiei lui Lagrange, a formalismului lui Hamilton şi a regulilor de comutare. S-a constatat în acest caz că este posibil să se dea întregii teorii o formă relativistă mai perfectă, pe baza noului formalism supramultitemporal sui-generis al lui Schwinger-Tomonaga, care de altfel duce la rezultate care coincid cu cele obţinute pe cale obişnuită. Mai esenţiale sînt rezultatele teoriei, nu în direcţia îmbunătăţirii formalismului, ci în explicarea a două fenomene fizice foarte importante, descoperite experimental: în primul rînd, deplasarea nivelelor de energie ale electronilor din atom faţă de poziţia lor calculată pe baza teoriei cuantice relativiste a electronului, a lui Dirac — teorie care nu ţine seama de fluctuaţiile de zero, şi, în al doilea rînd, prevederea existenţei unui moment magnetic propriu — necinematic — al electronului, suplimentar faţă de momentul obişnuit, de spin. Totodată noua teorie a vidului aruncă o anumită lumină asupra problemei mesei proprii a particulelor elementare.

După cum am subliniat, noua teorie a vidului este esenţial cuantică, astfel încît o expunere amănunţită a acesteia depăşeşte cadrul cărţii de faţă [1]. Totuşi, datorită importanţei acestei teori pentru înţelegerea unei serii de proprietăţi ale particulelor elementare, în special a naturii masei lor, cu alte cuvinte, pentru problemele care sînt analizate în această carte, vom da o scurtă expunere a istoricului ideilor principale şi a rezultatelor celei mai noi teorii a vidului. Aceasta este cu atît mai necesar cu cît teoria cuantică a vidului dezvoltă în multe puncte, ca şi în alte cazuri — ideile şi metodele care au apărut pe baza teoriei clasice. Expunerea acestor probleme foarte noi la sfîrşitul cărţii de faţă poate de asemenea servi drept introducere în teoria cuantică a cîmpului.

Deoarece noua teorie a vidului s-a dezvoltat în măsură apreciabilă datorită interpretării celor două efecte amintite mai sus, ne vom opri mai întîi asupra descoperirii lor. Descoperirea deplasării nivelelor are o istorie lungă. După cum se ştie, mecanica cuantică determină cu mare succes valorile energiei electronilor în atomi. Pentru atomul de hidrogen teoria cuantică relativistă a lui Dirac dă pentru energia electronului care se mişcă în cîmpul coulombian electrostatic al protonului punctiform, o formulă, stabilită mai înainte de către Sommerfeld, în care intră valori mai precise ale numerelor cuantice. Această formulă este în general excelent confirmată de experienţă, fiind una din confirmările fundamentale ale ipotezelor teoriei. In particular, conform teoriei lui Dirac, are loc o degenerescenţă, termenii $2S_{\frac{1}{2}}$ şi $2P_{\frac{1}{2}}$ trebuind să coincidă. Acest din urmă rezultat a fost obiectul unor cercetări experimentale speciale, iar Houston şi Williams încă acum mai mult de zece ani au descoperit pe cale optică obişnuită, cu ajutorul unor aparate cu mare putere de rezoluţie, o abatere neglijabilă de la formula lui Sommerfeld-Dirac, abatere interpretată corect de către Pasternac, cu o consecinţă a deplasării în sus, în spre domeniul energiilor mai mici în valoare absolută a nivelului $S_{\frac{1}{2}}$ faţă de $P_{\frac{1}{2}}$. Aceste rezultate au trezit un oarecare interes, dar nu păreau a fi convingătoare. Deplasarea nivelului indică micşorarea atracţiei. Părea natural să se caute cauza acestui fapt în primul rînd, în modificarea legii lui Coulomb, de exemplu datorită caracterului nepunctiform al protonului, atribuindu-i o anumită rază eficace, sau să se explice acest fapt prin extinderea

[1] V. Реферативний сборник, серия, вторая, вып. I, ИЛ, 1950 şi culegerea de articole şi referate de sub redactia lui D. Ivanenko, „Сдвиг уровней атомных электронов", ИЛ, 1950 (şi de asemenea culegerea „Dezvoltarea cea mai recentă a electrodinamicii cuantice" si cartea lui A. Ahiezer şi V. Berestetki, „Electrodinamica cuantică" M. 1953. — N. Red. E. T.)

(răspîndirea) sarcinii protonului, care stă aproximativ 0,2 din timp în stare disociată $p \rightarrow n + \pi_+$(Heitler şi alţii). Este incontestabil că amîndouă aceste cauze de slăbire a atracţiei coulombiene sînt reale; totuşi, se poate arăta, efectuînd calculul cu funcţii de undă mai precise ale electronului, funcţii care să ţină seamă de la început de volumul nucleului, că ele determină deplasări neînsemnate ale nivelelor [1]). Indicaţia lui Bohr şi Oppenheimer după care cauza deplasării trebuie căutată în faptul că trebuie să se ţină seama mai riguros de reacţia cîmpului propriu la fel ca şi observaţia analoagă a lui Blohinţev într-unul din referatele sale, nu au fost dezvoltate mai amplu [2]). Lipsa de claritate în această problemă este cel mai bine caracterizată de observaţia lui Sommerfeld dintr-o lucrare a lui din anul 1941, după care, datorită epuizării — aşa cum părea atunci — a tuturor posibilităţilor teoretice în această direcţie, trebuie să sperăm că în realitate nu s-a observat experimental nici un fel de deplasare! Deplasarea nivelului a fost definitiv descoperită, cu mare siguranţă, ca o confirmare a primei descoperiri, prin metoda frecvenţelor radioelectrice şi nu prin metode optice, în anul 1947 de către Lamb şi Rutheford, care au obţinut pentru intervalul $(2S_{\frac{1}{2}} - 2P_{\frac{1}{2}})$ al termenilor valoarea $(1\,062 \pm 5)$ MHz, situată în domeniul structurii fine ($1\,\mathrm{MHz} = 4{,}1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{eV}$; termenul fundamental al hidrogenului corespunde energiei de 13,5 eV). Aceste măsurători de precizie au trezit o atenţie generală şi au dus la dezvoltarea teoriei respective a deplasării, teoria care pleacă de la considerarea fluctuaţiilor de vid ale cîmpului electromagnetic, pe care mai înainte teoria lui Dirac le neglija. Primul calcul nerelativist al lui Bethe, cu toate că dădea o concordanţă bună cu experienţe, folosea o tăiere arbitrară la $\mathcal{E} \approx mc^2$ a integralei care era divergentă logaritmic; teoria relativistă ulterioară a fost mai consecventă şi a dus la un rezultat final în concordanţă cu experienţa. Analiza ulterioară a confirmat că toate celelalte corecţii posibile şi cauze ale deplasării joacă un rol secundar. Deplasarea nivelelor este prezisă de asemenea şi pentru alţi atomi şi ea a fost observată la atomul ionizat He^+, în concordanţă generală cu teoria.

---

[1]) V. Д. Иваненко и В. Родичев, ДАН, **70**, **80**, 1950: Д. Иваненко и А. Цандер, ЖЭТФ, **18**, 434, 1948

[2]) V. articolul de sinteză al lui I. A. Smorodinski, УФН, **39**, No. 3, 325, 1949.

Istoria stabilirii momentului magnetic suplimentar al electronlui este mult mai scurtă. După ce cu cîţiva ani în urmă s-a găsit în laboratorul lui Rabi, cu ajutorul metodei de studiu cu radiofrecvenţe a efectului Zeeman, pentru o serie de spectre (Na, Ga) abaterea de la valoarea obişnuită $g=2$ a coeficientului giromagnetic g al electronului, coeficient care indică raportul dintre momentul magnetic şi momentul cinetic, Breit a propus să se explice această disconcordanţă prin faptul că electronul posedă un moment magnetic suplimentar („anomal"). In curînd, pe baza noii teorii a vidului, Schwinger şi alţii au obţinut, în concordanţă excelentă cu experienţa, următoarea valoare a momentului magnetic al electronului [1])

$$\mu_e=\mu_B\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right),\quad \mu_B=\frac{eh}{4\pi mc},\quad \alpha=\frac{2\pi e^2}{hc}\approx\frac{1}{137}.$$

Ulterior, noua teorie a vidului a fost aplicată la calculul abaterilor de la formula lui Klein-Nishina a efectului Compton, apoi la abaterile de la formula lui Rutherfold a difuziei particulelor încărcate etc.; în toate cazurile însă, în afară de cele două efecte menţionate, corecţiile au fost dincolo de limitele posibilităţilor experimentale actuale. Aplicarea noii teorii a vidului la cîmpul mezonic, în particular la calculul momentelor magnetice ale nucleonilor, datorită disocierii lor virtuale, a dat rezultate acceptabile din punct de vedere calitativ, dar departe de a fi definitive. Noua teorie a vidului nu a fost încă aplicată cîmpului gravitaţional, cu toate că o asemenea generalizare se impune de la sine [2]).

b. *Deplasarea nivelelor*

După cum s-a menţionat mai sus, noua teorie a vidului este o dezvoltare naturală a etapei precedente a teoriei cuantice relativiste a particulelor şi a cîmpurilor, dezvoltare care nu iese însă din cadrul vechii teorii cu ajutorul vreunor ipoteze suplimentare, fie ele chiar

---

[1]) Vezi de exemplu А. Д. Галанин, ЖЭТФ, **19**, 521, 1949, Referate amănuntite asupra articolului lui Schwinger există în culegerea „Сдвиг уровней атомных электронов" ИЛ., 1950.

[Vezi şi culegerea „Dezvoltarea cea mai recentă a electrodinamicii cuantice", Moscova, 1954, în special articolele lui R. Karplus şi A. Klein şi cartea lui A. Ahiezer şi V. Berestetki „Electrodinamica cuantică" capitolul VIII şi D. Ivanenko, Kolesnikov, ДАН, (1953), **91**, 47 — N. Red. E. T.]

[2]) La dezvoltarea teoriei cuantice a gravităţiei au contribuit în mod special autorii cărţii de faţă (vezi Sokolov, Ivanenko — Teoria cuantică a cîmpului, partea II, cap. 2; Sokolov-Vestinic MGU, No. **9**, 5, (1952); Ivanenko, Brodski, DAN, **84**, 683, (1952); **92**, No. 4, (1953) (N. Red. E. T.).

prelucrate cu ajutorul metodelor relativiste cuantice. Printre acestea din urmă menţionăm de pildă ipoteza spaţiu-timpului cuantificat [1]), sau ipoteza lui Born a existenţei unei funcţii bine determinate a lui Lagrange, sau propunerea recentă a lui Born de a simetriza teoria în coordonate şi impulsuri pe baza unui anumit principiu de „reciprocitate" [2]), sau teoria generală a „fuziunii" a lui De Broglie [3]), care dezvoltă ideile anterioare al teoriei luminii pe baza particulei neutrino [4]) etc. Mai mult, noua teorie a vidului reprezintă în mare măsură o reabilitare a sistemului complet al mecanicii cuantice relativiste, care a dus la timpul său cu necesitate la precizarea fluctuaţiilor de zero şi a altor caracteristici ale vidului, a cărei semnificaţie fizică era pusă la îndoială deoarece erau date de integrale divergente.

După cum se ştie, s-au făcut de mai multe ori încercări de a interzice tranziţiile în stările cu energie negativă, de a elimina acestea din urmă din teorie, de a elimina fluctuaţiile de zero, etc. Noua teorie a vidului propune în fond să se înceteze aceste încercări de ocolire a consecinţelor naturale ale mecanicii cuantice relativiste şi să se admită aceste consecinţe cu toată seriozitatea, să se dea o interpretare cît mai directă, dacă se poate chiar o interpretare intuitivă, fluctuaţiilor de zero ale cîmpurilor şi totodată să se ajungă, cu minimum de arbitrar, la eliminarea cel puţin parţială a integralelor divergente. Una din ideile fundamentale ale noii teorii a vidului şi deducerea cu ajutorul ei a expresiei pentru deplasarea nivelului electronului, au fost explicate intuitiv, cu toate că neriguros, de către Welton pe baza următorului raţionament nerelativist, semicuantic.

Este bine cunoscut că energia cîmpului de radiaţie poate fi reprezentată sub forma unei sume de energii de oscilatori. Aceştia din urmă însă, conform teoriei cuantice, au o energie de zero, $\mathcal{E}_0$, care nu dispare nici în starea de zero, pentru $n=0$:

$$\mathcal{E}_n = h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right); \quad \mathcal{E}_0 = \frac{h\nu}{2}. \qquad (57,1)$$

---

[1]) Această ipoteză a fost propusă de către V. Ambraţumian şi D. Ivanenko (Zs. f. Phys., **64**, 563, 1930) şi a fost discutată apoi de multe ori în literatură; vezi de exemplu lucrarea lui Snyder (Snyder, Phys. Rev., **71**, 38, 1947).

[2]) M. Born, Rev. Mod. Phys., **21**, 463, 1949.

[3]) L. De Broglie, Théorie générale des particules à spin, Paris, 1943.

[4]) Bazele teoriei luminii explicate prin particula neutrino sînt expuse de exemplu în lucrările lui A. A. Sokolov: ЖЭТФ. **7**, 1055, 1937; **8**, 113, 644, 1938.

Toate acestea duc la faptul că, chiar în lipsa protonilor, există fluctuaţii ale energiei. Să lăsăm pentru mai tîrziu această energie de zero, deşi suma energiilor de zero, extinsă asupra tuturor frecvenţelor cîmpului este egală cu infinit, şi să încercăm să-i dăm un sens real, cel al energiei cîmpului electromagnetic sub acţiunea căruia se găseşte în mod continuu electronul, chiar în lipsa oricăror cîmpuri exterioare. Acţiunea acestui cîmp de vid al fotonilor „negeneraţi", va obliga electronul să execute oscilaţii care se supun, într-o aproximaţie brută, ecuaţiei de mişcare:

$$m\ddot{\vec{r}}=e\vec{E}_{\text{vid}}. \tag{57,2}$$

Astfel, deplasarea coordonatelor electronului sub influenţa cîmpului din vid va fi egală cu:

$$\Delta\vec{r}=-\frac{e}{m}\int\frac{\vec{E}_\omega}{\omega^2}\cos\omega t\,d\omega,$$

unde $\vec{E}_\omega$ este amplitudinea Fourier a dezvoltării intensităţii cîmpului electric $\vec{E}_{\text{vid}}=\vec{E}$:

$$\vec{E}=\int\vec{E}_\omega\cos\omega t\,d\omega.$$

In consecinţă pentru valoarea medie în timp avem:

$$\overline{\Delta\vec{r}^2}=\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{m^2}\int\frac{1}{\omega^4}\,E_\omega^2\,d\omega.$$

Pînă acuma avem de-a face cu ecuaţia clasică obişnuită a mişcării. Acum să facem un pas hotărîtor şi să egalăm energia cîmpului

$$\mathcal{E}=\frac{\overline{E^2+H^2}}{8\pi}=\frac{\overline{E^2}}{4\pi}=\frac{1}{8\pi}\int E_\omega^2\,d\omega,$$

cu energia fluctuaţiilor cuantice de zero,

$$\mathcal{E}_{\text{vid}}=\int\left(\frac{1}{2}\,\frac{h\omega}{2\pi}\right)\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}\,d\omega,$$

unde factorul al doilea de sub semnul integralei este expresia cunoscută a densităţii stărilor de frecvenţă ω în intervalul ω, $\omega+d\omega$. De aici rezultă $E_\omega^2=\dfrac{2h\omega^3}{\pi^2c^3}$.

Prin urmare,

$$\overline{\Delta\vec{r}^2}=\frac{2}{\pi}\,\frac{2\pi e^2}{hc}\left(\frac{h}{2\pi mc}\right)^2\int\frac{d\omega}{\omega}=\text{const}\ln\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}\,.$$

Divergenţa acestei expresii nu prezintă vreo dificultate principială şi este legată de neglijări ce pot fi uşor eliminate. In primul rînd, electronul nu este liber, ci legat în atom. Aceasta elimină divergenţa pentru limita inferioară. In al doilea rînd la studiul nerelativist, nu are sens să integrăm pentru energii sau frecvenţe oricît de mari, de aceea trebuie să luăm drept limită superioară mărimea $\mathcal{E}_{\max}\sim mc^2$, $\omega_{\max}\sim 2\pi\frac{mc^2}{h}$, şi nu infinit. O analiză ulterioară confirmă aceste concluzii.

Astfel, ajungem la concluzia importantă că sub influenţa cîmpului de vid un electron liber, în repaus, execută un fel de mişcare browniană cu o anumită valoare a patratului deplasării. Prin aceasta oscilaţiile datorite vidului, după cum au subliniat deosebit de clar Bogoliubov şi Tiablikov [1]), determină la electronul iniţial, punctiform, o anumită extindere (răspîndire) sau o rază eficace, a cărei mărime reprezintă media geometrică dintre raza electronică clasică şi raza cuantică, adică lungimea de undă Compton :

$$r_{\text{vid}}\sim\sqrt{\alpha}\,\frac{h}{2\pi mc}\,.$$

Existenţa unei asemenea raze eficace se manifestă într-o serie de efecte ce rezultă din analiza comportării electronului. In particular, pentru interacţiunea electronului cu cîmpul electric exterior, în locul relaţiei vechi

$$V=-e\varphi(\vec{r})$$

vom avea, luînd în considerare termenii datoriţi vidului, o nouă expresie :

$$V'=-e\varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r})=-e\left[1+(\Delta\vec{r}\nabla)+\frac{1}{2}(\Delta\vec{r}\nabla)^2+\ldots\right]\varphi(\vec{r})=$$

$$=-e\left[1+\frac{1}{6}\overline{(\Delta\vec{r})^2}\nabla^2+\ldots\right]\varphi(\vec{r}),$$

1) Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов, Изв. АН УССР, No 5, 10, 1946.

întrucît

$$\overline{(\Delta\vec{r})}=0, \quad \overline{(\Delta\vec{r}\nabla)^2}=\frac{1}{3}\overline{(\Delta\vec{r})^2}\nabla^2.$$

Prin urmare, variaţia energiei de interacţiune, cu considerarea influenţei cîmpului de vid, este

$$V'-V=-\frac{e}{6}\overline{(\Delta\vec{r})^2}\nabla^2\varphi=\frac{2\pi e^2}{3}\overline{(\Delta\vec{r})^2}\delta(\vec{r}),$$

deoarece [v. (10,8)] pentru atomul de hidrogen

$$\nabla^2\varphi=-4\pi e\delta(\vec{r}).$$

In sfîrşit, pentru a obţine deplasarea căutată a nivelului, ca o valoare medie — în raport cu stările electronului din atom — a variaţiei enegiei de interacţiune, este necesar să înmulţim mărimea $V'-V$ cu $|\psi(\vec{r})|^2$ şi să integrăm pe tot spaţiul.

Atunci pentru deplasarea căutată a nivelului găsim valoarea

$$\mathcal{E}'=\int(V'-V)\,|\psi(\vec{r})|^2\,(d\vec{r})=\frac{4e^2}{3}\alpha\left(\frac{h}{2\pi mc}\right)^2|\psi(0)|^2\ln\frac{2\pi mc}{hk_{\min}},$$

unde $k_{\min}$ este legat de energia medie a excitaţiei $\overline{\Delta\mathcal{E}}$ prin relaţia

$$k_{\min}=\frac{2\pi}{hc}\overline{\Delta\mathcal{E}}.$$

După cum se ştie, pentru starea S avem:

$$|\psi(0)|^2=\frac{1}{\pi a^3 n^3},$$

unde a este raza lui Bohr, iar n — numărul cuantic principal.

Pentru alte stări (P, D etc.) avem

$$|\psi(0)|^2=0.$$

De aici obţinem formula lui Bethe, din care se vede că deplasările nivelelor, condiţionate de corecţiile datorite vidului, trebuie să se observe în aproximaţia nerelativistă numai pentru stările S:

$$\mathcal{E}'=\frac{8}{3\pi}\alpha^3\frac{Ry}{n^3}\ln\frac{mc^2}{\overline{\Delta\mathcal{E}}},$$

unde Ry reprezintă energia de ionizare a stării fundamentale a hidrogenului. In particular, pentru starea $2S$ ($n=2$, $\Delta\mathcal{E}=17{,}8\ Ry$) găsim pentru deplasarea termenilor 1 040 MHz.

Obținem valoarea deplasării căutate a nivelelor energetice dacă calculăm, pe de o parte, energia de interacțiune cu oscilațiile de zero ale electronului liber și pe de altă parte, ale electronului legat de atom. In ambele cazuri se obține un rezultat infinit, cu divergență pătratică. Diferența celor două mărimi divergente prezintă însă, în teoria relativistă, numai o divergență logaritmică, iar în teoria relativistă, ținînd seamă de noile reguli de regularizare (v. p. 421) ea este o mărime finită și ne dă o deplasare, în excelentă concordanță cu experiența. Energia de interacțiune a electronului cu oscilațiile de zero este condiționată de legătura lui cu partea transversală a cîmpului electromagnetic reprezentat de potențialul vector $\vec{A}$:

$$U_{\text{pot}}=\frac{e}{c}(\vec{v}\vec{A})=e(\vec{\alpha}\vec{A})$$

(reamintim că în teoria necuantică pentru un electron în repaus' acest termen de interacțiune lipsește). Vorbind intuitiv, interacțiunea se datorește emisiei și absorbției cuantelor cîmpului. In cazul de față electronul însuși emite și absoarbe fotoni transversali, ceea ce duce pentru particulă la o energie de autocțiune sau la o energie electromagnetică proprie infinită și în consecință la o masă proprie infinită. Această energie de cîmp, proprie, transversală, se adaugă la energia de cîmp electrostatică longitudinală, clasică, a cîmpului generat de electron. Alături de aceasta joacă rol și un alt factor fundamental al noii teorii a vidului, renormarea masei. Ideea renormării masei constă în următoarele: în loc de a lăsa la o parte masele de cîmp infinite menționate mai sus, sau de a le elimina imediat într-un mod ipotetic oarecare, să admitem că dezvoltarea ulterioară a teoriei va elimina într-un fel oarecare divergențele și va da o valoare finită pentru masă. De aceea, putem considera că termenii infiniți menționați sînt incluși în valoarea empirică finită a masei, renormînd-o pe aceasta din urmă. Această renormare nu este o simplă schimbare de nume a expresiilor, întrucît fiind aplicată electronului legat, ea ne obligă să scădem din energia lui de cîmp totală valoarea energiei de cîmp a particulei libere. Diferența devine atunci, așa cum s-a arătat, finită.

Am menționat mai sus de nenumărate ori că calculul relativist riguros micșorează gradul de divergență în energia de interacțiune a electronului cu cîmpul lui electromagnetic sau cu vidul. Fondul chestiunii constă în faptul că electronul este legat nu numai de oscilaţiile de zero ale cîmpului electromagnetic, dar şi de fluctuaţiile cîmpului perechilor virtuale electron-pozitron. De aceea în prezenţa electronului, perechile virtuale electron-pozitron de vid, în primul rînd se deplasează întrucîtva, — vidul „se polarizează“ sui-generis, — astfel încît constanta lui dielectrică este mai mică decît 1, cu aproximativ $\frac{1}{137}$ într-o regiune de ordinul lui $\frac{h}{2\pi mc}$ din vecinătatea electronului [1]. Menţionăm că asemenea corecţii de polarizare sînt mici de tot:

$$\mathcal{E}''' = -\frac{8}{15\pi}\cdot\frac{\alpha^3}{n^3}Ry,$$

adică deplasarea nivelului datorită polarizării, pentru stările $2S$, este aproximativ egală cu $\frac{1}{40}$ din deplasarea examinată mai sus, condiţionată de legătura cu oscilaţiile de zero ale fotonilor. Alături de aceasta, fiecare sarcină exterioară induce în vid o sarcină de valoare infinită, care trebuie considerată ca inclusă în sarcina finită reală [2], efectuînd renormarea ei, analog cu renormarea masei. In al doilea rînd, influenţa vidului perechilor electron-pozitron se manifestă prin apariţia, datorită principiului lui Pauli, a unei respingeri a electronilor din vid de electronul exterior real şi această redistribuţie a sarcinii din vid se manifestă sub forma unei extinderi a sarcinii electronului. Tocmai acest fapt face ca energia proprie electromagnetică să fie egală cu:

$$\mathcal{E}_0 = \left(\frac{2\pi e^2}{hc}\right) mc^2 \ln\frac{\lambda_c}{r_0}$$

$$\left(\lambda_c = \frac{h}{2\pi mc}\right),$$

adică să fie divergentă numai logaritmic, atunci cînd raza eficace a electronului tinde către zero $r_0 \to 0$. In al treilea rînd, oscilaţiile de zero ale cîmpului electromagnetic interacţionează cu perechile virtuale electron-pozitron, datorită cărui fapt deplasarea şi energia electronului, provocate de către fotonii de zero, sînt substanţial micşorate. Pătratul mediu al deplasării devine acum convergent şi independent de raza electronului (de unde era divergent logaritmic),

[1] V. Weisskopf, vezi culegerea „Сдвиг уровней атомных электронов“, ИЛ, 1950, p. 23.

[2] Vezi Dirac, Culegerea „Атомное ядро“, ГТТИ, 1934 şi Culegerea „Сдвиг уровней атомных электронов“ ИЛ, 1950.

iar energia medie căpătată de electron sub influenţa impulsurilor fotonilor de zero (energia transversală proprie de cîmp) va fi divergentă logaritmic şi nu pătratic, adică va depinde mult mai slab de structura electronului. In sfîrşit, diferenţa energiilor de cîmp pentru electronul liber şi electronul legat este finită, aşa cum s-a subliniat mai sus.

Nu ne vom opri asupra explicării deducerii momentului magnetic suplimentar al electronului, moment care, exprimîndu-ne inutiv, este datorit acţiunii oscilaţiilor de zero ale vidului asupra mişcării vibrante de tip Schrödinger, executată de electronul lui Dirac. După cum se ştie, datorită vibrării, magnetismul propriu, obişnuit, al electronului poate fi interpretat intuitiv ca o mărime condiţionată de curenţi circulari de rază $\sim \frac{h}{2\pi mc}$. Aici este important să se sublinieze numai că valoarea corecţiei datorite vidului asupra momentului magnetic se obţine de la sine în cadrul teoriei generale a cîmpului care ţine seama de interacţiunea cu vidul, iar întregul moment al electronului va fi egal cu

$$\mu_e = \mu_B \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right).$$

Din punct de vedere principial trebuie subliniat nu numai succesul teoriei în ceea ce priveşte deducerea deplasării nivelelor şi obţinerea momentului suplimentar, ci de asemenea şi în ceea ce priveşte punctul de vedere mai general asupra naturii masei. Probabil nu este exclus ca masa proprie a particulelor să aibă o natură dublă (c. f. cu § 34). O anumită masă fundamentală „reziduală" (masă mecanică, după terminologia teoriei clasice a electronului a lui Lorentz) nu poate fi încă pusă în evidenţă şi nu este exclus ca tocmai explicarea ei să necesite o depăşire esenţială a cadrului mecanicii cuantice relativiste actuale. Pe de altă parte este posibil ca fracţiunea de cîmp a masei, să fie pînă la urmă finită, de odinul lui $\frac{1}{137}m$. In mod analog trebuie să abordăm explicarea maselor altor particule, de exemplu a nucleonilor, care se pare că în afară de masa proprie fundamentală „reziduală" vor avea şi mase mezonice de cîmp, precum şi mase electromagnetice de cîmp etc. După renormarea masei şi a sarcinii, infiniţii sînt eliminaţi din teorie şi putem da din nou tuturor expresiilor, în termeni de potenţiale eficace şi de alte mărimi, o interpretare relativ intuitivă. Alături de raza eficace şi de momentul magnetic suplimentar, se poate arăta că interacţiunea cu vidul induce la electroni şi la alte particule, momente multipolare eficace de ordin superior, adică un moment cvadrupolar etc. care trebuie luaţi în considerare în energia de legătură din ecuaţiile lui Dirac pentru electron.

După indicarea ideilor fizice principale ale noii teorii a vidului şi explicarea celor două efecte principale, să ne oprim încă pe scurt asupra unor laturi mai formale, dar care joacă un rol principial în teoria modernă a cîmpului.

c) *Formalismul supramultitemporal*

Alături de dezvoltarea teoriei vidului prin metodele obişnuite ale mecanicii cuantice relativiste, metode care au permis explicarea tuturor ideilor fizice fundamentale necesare pentru explicarea deplasării nivelelor electronilor din atom şi a momentului magnetic suplimentar al electronului, aceleaşi rezultate au fost obţinute cu metoda întrucîtva diferită, a noului formalism „supramultitemporal" [1]. Acest formalism, fără să depăşească cadrul mecanicii cuantice relativiste, reprezintă cunoscutul avantaj al formulării covariante relativiste, depline, a teoriei, în timp ce în mod obişnuit, cu tot caracterul în fond covariant al teoriei, timpul care este acelaşi pentru cîmp şi pentru toate particulele, este explicitat în mod special şi covarianţa trebuie demonstrată suplimentar, de multe ori pe o cale dificilă. Formalismul supramultitemporal reprezintă o generalizare a formalismului multitemporal al lui Dirac-Fock-Podolski, formalism în care în sistemul de particule ce interacţionează cu cîmpul se introduce — pentru fiecare particulă — alături de timpul T, comun pentru întregul cîmp, un timp propriu special t_i [2]. Aşa cum a menţionat Markov [3], formalismul multitemporal poate fi aplicat de asemenea şi în teoria relativistă clasică a interacţiunii particulelor cu cîmpul. O observaţie analogă trebuie evident făcută şi în ceea ce priveşte posibilitatea de aplicare a noului formalism supramultitemporal la teoria clasică. In noul formalism, care poate fi numit de asemenea formalism „cu o infinitate de timpuri", fiecărui punct al cîmpului sau spaţiului i se ataşează timpul său local

---

1) J. Schwinger, Phys. Rev., **73**, 415 (1948); **74**, 1943 (1948); **75**, 651 (1949); vezi referatul asupra acestora şi asupra altor lucrări înrudite în culegerea „Сдвиг уровней атомных электронов" ИЛ. 1950.

2) V. П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ГТТИ, 1932: Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат 1947.

3) М. А. Марков, ЖЭТФ, **10**, 1311, 1940.

$t=\sigma(x, y, z)$. In felul acesta, timpul apare sub formă de hipersuprafeţe similispaţiale în spaţiul cvadridimensional, în urma cărui fapt poziţiile în spaţiu şi timp devin inseparabile. Locul derivării funcţiei de undă în raport cu timpul, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, îl ocupă în noua teorie derivata funcţională a funcţionalei $\psi(t_{xyz})=\psi(\sigma)$ sau în teoria necuanatică, derivata funcţiei acţiunii $S(\sigma)$.

$$\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\rightarrow\frac{\delta\psi(\sigma)}{\delta\sigma}.$$

Cînd trecem de la o hipersuprafaţă la alta, funcţiile de undă se transformă cu ajutorul unui operator unitar:

$$\psi(\sigma_2)=U\psi(\sigma_1),$$

ar pentru cazul limită al transformării de la starea infinit depărtată n trecut în spre starea infinit depărtată în viitor, operatorul U coincide cu matricea S a lui Heisenberg. Astfel, electrodinamica cuantică şi teoria vidului, rămînînd pe terenul formalismului lui Lagrange şi Hamilton, conţin ca un caz particular teoria lui Heisenberg, care a căutat să înlocuiască formalismul hamiltonian, prin matricea S, presupunînd că nu este posibilă determinarea variaţiei funcţiei ψ într-un interval infinit de mic de timp, în decursul căruia procesele ar fi oarecum inobservabile, din cauza existenţei unui interval minim de distanţă şi de timp (întrucîtva în spiritul cuantificării spaţiului şi timpului).

d) *Masa de cîmp a fotonului*

Intrucît masa de cîmp proprie a particulelor este condiţionată de interacţiunea particulei cu diferitele cîmpuri ale tuturor celorlalte particule, cu alte cuvinte cu particulele şi cîmpurile pe care particula noastră le poate genera, atunci apare problema valorii finite a masei de cîmp a fotonului. Intr-adevăr, fotonul generează în mod virtual perechi electron-pozitron, perechi de mezoni încărcaţi şi perechi proton-antiproton. Calculul masei de cîmp a fotonului a dus pe diferiţi autori la rezultate care nu concordă: divergenţe finite (Wentzel) şi egale cu zero. Ultimul rezultat, cerut de invarianţa de etalon a fost mai tîrziu confirmat. Această situaţie a impus o nouă analiză mai minuţioasă a operaţiilor efectuate cu diferite expresii divergente şi o încercare de a stabili reguli mai univoce de „regularizare“ a unor asemenea expresii.

e) *Noile reguli de regularizare* [1])

Aşa cum am arătat mai sus (v. §§ 32—34), problema eliminării energiei de cîmp proprii infinite a electronului a apărut încă în teoria clasică a lui Lorentz şi a fost apoi discutată de nenumărate ori. Toate metodele de regularizare pot fi împărţite comod în două clase, după terminologia lui Pauli-Villars.

1. Teoriile „realiste", care propun să se introducă în afară de cîmpul electromagnetic, alte cîmpuri, presupuse că există în mod real, a căror energie ar putea compensa valoarea infinită în componentele tensorului energie al cîmpului electromagnetic şi ar asigura atît valoarea finită a masei de cîmp a electronului (sau chiar ar putea duce la o expresie definitivă a acestei mase, conform ipotezei de cîmp suplimentare), cît şi la anularea componentelor tensiunii; această din urmă condiţie este necesară conform teoriei lui Laue pentru a asigura stabilitatea electronului şi pentru a satisface relaţia corectă între energie şi impuls. Dintre teoriile realiste fac parte: teoria presiunii a lui Poincaré în forma ei prerelativistă, teoria cîmpului vectorial compensator, formînd împreună cu cîmpul maxwellian un bi-cîmp (Sokolov, v. § 34b), teoria cîmpurilor cu derivate superioare (Bopp şi alţii § 33)[2]), precum şi noua teorie a cîmpului scalar neutru compensator a lui Pais (mezonii *c*). Pînă acum nu s-a putut realiza programul teoriei realiste în orice grad de aproximaţie a teoriei cuantice a perturbaţiilor. Este posibil ca o astfel de teorie să necesite folosirea chiar de la început a unor reguli de comutare lipsite de singularităţi. In afară de aceasta, nici cîmpul vectorial compensator, nici mezonii *c* nu apar nicăieri în nici un fel de fenomene fizice şi problema existenţei lor reale rămîne deschisă.

2. Pe de altă parte putem adopta punctul de vedere „formalist" şi putem introduce, pentru compensarea divergenţelor, cîmpuri suplimentare care dispar în rezultatul final, de pildă pe calea anulării unor vectori sau a egalării cu infinit a maselor legate de cîmpuri.

---

[1]) In legătură cu ultimele dezvoltări ale teoriei cîmpului vezi culegerea „Cele mai noi dezvoltări ale electrodinamicii cuantice" şi în special lucrările lui Landau, Abrikosov, Halatnikov Д. A. H. 95, 497, 773, 1177 (1954) **96**, 261 (1954) **97**, 723 (1954) şi B. Ioffe Д. A. H 95, 761 (1952) 94, 437 (1954) Fradkin **98**, No. 1, (1954) N. Red. E. T.).

[2]) Vezi de asemenea lucrările de mai tîrziu ale lui H. I. Bhabha. Rev. Mod. Phys., **17**, 200 (1945); **21**, 451 (1949); H. A. Kramers, F. I. Belinfante, I. K. Lubanski, Physica, **8**, 598, (1941).

Dintre teoriile formaliste face parte evident metoda procesului λ de limită (v. § 34a).

In legătură cu dezvoltarea noii teorii a vidului au fost propuse cîteva noi metode de regularizare. Tipică este metoda lui Pauli-Villars[1]), constînd în înlocuirea funcției lui Green, G_1, singulare pe conul de lumină, a ecuațiilor lui D'Alembert și a ecuației scalare, precum și a funcțiilor Δ și D legate de ea, — care determină regulile de comutare (§§ 17 și 20), — prin noi funcții regularizate G_R, egale cu suma unor funcții analoge dar cu o serie de mase auxiliare $M_i = \frac{k_i h}{2\pi c}$ puse în locul masei vechi, $m = \frac{k_0 h}{2\pi c}$, legate de particulele cîmpului respectiv:

$$G_R = \sum c_i G(k_i),$$

unde $G(k_i)$ are conform § 20 forma

$$G(k_i) = \frac{k_i^2 c}{4\pi^2} \int \cos\left(\lambda k_i^2 \alpha + \frac{1}{4\alpha}\right) d\alpha;$$

aici $c_0 = 1$, $M_0 = m$, iar coeficienții $c_i (i \neq 0)$ și masele auxiliare k_i satisfac condițiile

$$\sum_{i \neq 0}' c_i = 0, \quad \sum_{i \neq 0}' c_i k_i^2 = 0.$$

In rezultatul final toți k_i tind către infinit. Această metodă de regularizare este legată de faptul că funcția lui Green a ecuației scalare are în vecinătatea conului de lumină $\lambda = c^2 T^2 - R^2 \to 0$ forma (v. § 20, precum și 3,1):

$$G_R = \frac{c}{4\pi}\left\{\delta(\lambda) + \left(\frac{k^2}{4} + \ldots\right)\theta(\lambda)\right\}, \tag{1}$$

unde

$$\theta(\lambda) = \gamma(\lambda) + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

In locul seriei discrete de mase auxiliare și de cîmpuri compensatoare se poate folosi o distribuție continuă. Folosirea unei astfel de regularizări a confirmat rezultatele precedente ale teoriei

---

[1]) W. Pauli and F. Villars. Rev. Mod. Phys., 21, 434, 1949; vezi culegerea „Сдвиг уровней атомных электронов" ИЛ, 1950.

vidului, a dat valoarea zero necesară pentru masa fotonului şi a introdus o oarecare claritate intr-o serie de alte calcule.

Este esenţial de menţionat că, cu tot punctul de plecare formalist al regularizării prin intermediul maselor auxiliare, putem da acestei metode o interpretare fizică mai concretă. Intr-adevăr, luînd drept punct de plecare funcţia regularizată a lui Green, G_R, o vom considera ca funcţie Green a unui anumit cîmp. Atunci este uşor de arătat că acest cîmp corespunde unor particule de diferite mase M_i şi este descris de o ecuaţie cu derivate de ordin superior. De la funcţia cvadridimensională a lui Green putem trece la legea statică de interacţiune, care va avea evident forma (v. de asemenea § 48):

$$V = \text{const}\left\{\frac{e^{-k_0 r}}{r} + c_1 \frac{e^{-k_1 r}}{r} + \ldots\right\}.$$

Deosebirea în semnele coeficienţilor c_i (vezi § 33), caracteristică în acest caz pentru teoria cu derivate de ordin superior, duce nemijlocit la condiţia (I). Vedem că tinderea către infinit a maselor auxiliare, necesară pentru eliminarea cîmpurilor compensatoare în rezultatul final, nu este deloc obligatorie din punctul de vedere de mai sus.

Alte metode formaliste constau în faptul că tăierea nerelativistă a integralelor divergente este înlocuită printr-una relativistă. Una din încercările întreprinse în acest sens a fost făcută prin introducerea unei tăieri invariante în spaţiul impulsurilor electronului. Asupra acestei metode noi nu ne vom opri acum. Mai frecvent se foloseşte astăzi propunerea lui Feynman de a extinde in mod relativist legea de interacţiune a sarcinii cu cîmpul electromagnetic [1]) astfel încît efectele datorite frecvenţelor mult mai mici decît 137 mc^2/h să ne dea rezultatul vechi şi în acelaşi timp integralele divergente să devină finite.

Practic, calculul se efectuează după următoarea schemă: înainte de toate, integrala

$$J = \int \frac{(d\vec{k})}{k}$$

[1]) R. P. Feynman, Phys. Rev., 74, 939, 1948; 74, 1430, 1948; un referat amănunţit asupra articolului lui Feynman există in culegerea „Сдвиг уровней атомных электронов", ИЛ, 1950.

se prezintă sub forma

$$J=\frac{2}{c}\int(d\vec{k})\int_{0}^{\infty}\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)d\omega,$$

iar extinderea invariantă se reduce la faptul că, pentru eliminarea infiniţilor cînd $k\to\infty$, funcţia singulară cvadridimensională a densităţii $\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)$ se înlocuieşte cu expresia

$$g\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)=\int_{0}^{\infty}\left[\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)-\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2-\lambda^2\right)\right]G(\lambda)\,d\lambda,$$

unde $G(\lambda)$ este o funcţie arbitrară, regulată, normată la unitate şi care ia valoarea maximă într-o regiune de ordinul lui $137\,\frac{2\pi mc}{h}$.
Această metodă este aplicabilă atît în teoria clasică, cît şi în teoria cuantică. In urma unei asemenea tăieri (întreruperi) energia de cîmp a electronilor (sau masa de cîmp), care devine finită, se determină din expresia:

$$\mathcal{E}_0\psi=\rho_3\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{h\lambda_0}{2\pi mc}+\frac{3}{8}\right)mc^2\psi,$$

unde

$$\ln\lambda_0=\int_{0}^{\infty}G(\lambda)\ln\lambda\,d\lambda.$$

De aici se vede că masa de cîmp a electronului constituie numai aproximativ $\frac{1}{137}$ din masa totală, ceea ce am menţionat şi mai sus, şi are de asemenea dimensiunea tensorială necesară, adică este proporţională cu matricea ρ_3.

Pentru a evita catastrofa infraroşie care apare în calculul aceleaşi deplasări a nivelelor, trebuie să introducem după Feynman, — în locul funcţiei $\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)$, funcţia

$$\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2-\lambda_{\min}^2\right),$$

unde $\lambda_{\min}$ se alege din condiţia ca expresia relativistă să se transforme în formula nerelativistă a lui Bethe, în care tăierea la limita inferioară este datorită faptului că electronul e legat în atom (v. p. 415).

Atunci trebuie să punem

$$\ln \lambda_{min} = \ln 2k_{min} - \frac{5}{6},$$

unde

$$k_{min} = \frac{2\pi\,(\overline{\Delta\mathcal{E}})}{ch}.$$

Deplasarea nivelelor S faţă de nivelele P, pentru numărul cuantic interior $j = \frac{1}{2}$ şi orice valoare a numărului cuantic principal n, se va compune din trei părţi

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' + \mathcal{E}''' = \frac{8}{3\pi}\alpha^3 Ry \frac{1}{n^3}\left(\ln\frac{mc^2}{\overline{\Delta\mathcal{E}}} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right).$$

Deplasarea $\mathcal{E}'$ (proporţională cu coeficientul $\ln\frac{mc^2}{\overline{\Delta\mathcal{E}}} - \ln 2 + \frac{11}{24}$, unde $\ln\frac{mc^2}{\overline{\Delta\mathcal{E}}} = 7{,}6876$) este în fond deplasarea lui Bethe. Deplasarea $\mathcal{E}''$ $\left(\text{proporţională cu coeficientul} -\frac{1}{5}\right)$ este legată de polarizarea vidului electrono-pozitronic. In sfîrşit deplasarea $\mathcal{E}'''$ $\left(\text{proporţională cu coeficientul } \frac{1}{2}\right)$ este legată de interacţiunea momentului suplimentar al electronului cu cîmpul electrostatic. In cazul atomului de hidrogen găsim pentru deplasarea totală:

$$2S_{\frac{1}{2}} - 2P_{\frac{1}{2}} = 1\,051 \text{ MHz},$$

care îmbunătăţeşte rezultatul iniţial al lui Bethe (1 040 MHz) şi se găseşte în bună concordanţă cu experienţa (1 062 MHz).

Observăm că oricare metodă auxiliară formală, cu toată comoditatea şi simplicitatea ei de aplicare (de exemplu tăierea), chiar independent de problemele legate de univocitate, poate în cel mai bun caz să reprezinte numai o treaptă preliminară a teoriei, teorie care mai tîrziu va trebui să dea o interpretare fizică reală tuturor cîmpurilor şi particulelor auxiliare introduse.

Trebuie subliniat că toate metodele enumerate „realiste" şi „formaliste" de regularizare reprezintă deocamdată o depăşire aparentă a cadrelor fizicii moderne, întrucît primele teorii prevăd noi particule sau cîmpuri, însă nedescoperite experimental, iar teoriile din a doua clasă, cu toate că operează, analog cu cele realiste, cu metodele mecanicii cuantice relativiste, depăşesc esenţial cadrul teoriei, generalizînd funcţiile lui Green şi regulile de comutare pe seama noilor cîmpuri fictive, eliminate în rezultatul final. In orice caz este incontestabil că teoria generală a particulelor elementare trebuie să fie închisă, adică infiniţii în interacţiunea particulelor *A* cu particulele *B* trebuie compensaţi de alte particule, posibil de toate celelalte cîmpuri şi particule reale.

Cu toate că, datorită succeselor teoriei care a permiş să se explice noile fenomene şi să se izoleze infiniţii, de pildă în masa proprie, necesitatea unei depăşiri mai esenţiale a cadrelor mecanicii cuantice relativiste nu este astăzi prea acută; menţionăm totuşi încă o dată apariţia unei serii de ipoteze, care încearcă să avanseze mai rapid pe baza noilor presupuneri — în înţelegerea particulelor elementare. Dintre acestea fac parte în particular teoria reciprocităţii, diferitele forme ale teoriei pentadimensionale, ipoteza reinviată a cuantificării spaţiului şi timpului, precum şi teoria generală a reducerii unora dintre cîmpuri la alte cîmpuri printr-o „fuziune“ specială (de exemplu în spiritul teoriei luminii pe baza particulei neutrino).

Incheind descrierea succeselor şi a dificultăţilor teoriei particulelor elementare şi a cîmpurilor, vedem că dezvoltarea teoriei structurii substanţei poate fi înţeleasă corect numai din punctul de vedere al filosofiei materialismului dialectic, conform căruia fiecare nouă etapă a cunoştinţelor noastre este legată de găsirea (pe baza colaborării fecunde a teoriei şi experienţei, în contact strîns cu practica şi tehnica cea mai nouă) a unor legi mai profunde ale interdependenţei generale a fenomenelor naturii.

Astfel, evoluţia concepţiilor noastre asupra structurii materiei confirmă în mod absolut convingător teza cunoscută a lui I. V. Stalin „... că nu există în lume lucruri care nu pot fi cunoscute, ci există numai lucruri care nu sînt încă cunoscute, care vor fi descoperite şi cunoscute prin mijloacele ştiinţei şi ale practicii“ [1]).

---

[1]) I. Stalin, „Problemele leninismului“, Edit. pentru Lit. Politică, Ed. III-a, 1952, p. 560.

INDICE DE MATERII

TABLA DE MATERII

Revizor științific: prof. Novacu Valeriu
Responsabil de carte: Neagu Dumitru
Tehnoredactor: Condopol Viorica
Corector responsabil: Mitu Aristide

Dat la cules 01.09.55. Bun de tipar 05.12.55. Hîrtie cărți școlare de 65 g/m², 61×86/16. Coli editoriale 26. Coli de tipar 27,50. Comanda S 2591 A. 02984.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 538.1.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 538.

Tiparul executat sub comanda nr. 6027 la Intreprinderea Poligrafică Timișoara, str. Popa Șapcă nr. 8. R.P.R.

ERATA

Pag.	Rîndul	In loc de:	Se va citi:	Din vina
16	ec.(3,15)	$=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx}\,dx$	$=\frac{1}{2\pi}\int ike^{ikx}\,dx$	Tipografiei
16	ec.(3,14) și (3,15)	dx	dk	Editurii
65	ec.(14,11)	$\int \rho$	$=\int \rho$	Editurii
73	5 de jos	$e^{-(\ )}\,dy$	$e^{(\ )^2}\,dy$	Tipografiei
74	3	$-\frac{\mid\xi\mid}{t}$	$-\frac{\mid\xi\mid}{vt}$	Tipografiei
83	6 de jos	e^{-ikx}	e^{ikx}	Editurii
124	5	$\dot{\xi}_\mu -$	$\dot{\xi}_\mu =$	Editurii
143	5 de jos	$=n^2\beta^2=1$	$=n^2\beta^2-1$	Editurii
196	ec.(33,28)	$\varphi' +$	$\varphi' =$	Editurii
197	ec.(33,36)	$=\frac{ck_0^2}{4\pi}-\frac{e^{-k_0 r}}{r}$	$=\frac{ck_0^2}{4\pi}\frac{e^{-k_0 r}}{r}$	Editurii

Teoria clasică a cîmpului

2591

201

Lei 17,10

(Rămîne la cumpărător)

2591

201

D. Ivanenko și
A. Socolov
Teoria clasică
a cîmpului

Numărul din borderoul de casă al unității

Lei 17,10

(Rămîne la unitate)

2591

201

D. Ivanenko și
A. Sokolov
Teoria clasică
a cîmpului

Numărul din borderoul de casă al unității

Lei 17,10

(Pentru centrul regional C. L. D. C.)