

TEORIA GIROSCOPULUI

ȘI

APLICAȚIILE SALE TEHNICE

CU O PREFAȚA DE

Profesor N. VASILESCU-KARPEN

MEMBRU AL ACADEMIEI ROMÂNE

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE F. GÖBL FII S. A.

Strada Regală No. 19

Reg. Com. Nr. 449/932.

1945

GABRIELA ȚIȚEA

ALEXANDRU STOENESCU

TEORIA GIROSCOPULUI

ȘI

APLICAȚIILE SALE TEHNICE

CU O PREFAȚA DE

Profesor N. VASILESCU-KARPEN

MEMBRU AL ACADEMIEI ROMÂNE

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE F. GÖBL FII S. A.

Strada Regală No. 19

Reg. Com. Nr. 449/932.

1 9 4 5

P R E F A Ț Ă

Giroscopul este un aparat cu proprietăți din cele mai curioase, plastic caracterizat de GRAMMEL: Giroscopul este ca un animal îndărătnic, care pornește în altă direcție decât aceia în care este împins».

Soluțiunile majorității problemelor de Mecanică, pot fi prevăzute de specialiști — cel puțin calitativ — în mod intuitiv, fără calcul. Nu este tot astfel cu giroscopul, nimeni nici chiar Foucault, fără subtilă analiză matematică, n'ar fi putut bănuși că cu ajutorul acestui corp rotindu-se cu iuteală în jurul axului său, și folosind mișcarea de rotație a pământului, se poate ajunge la determinarea direcțiunii meridianului și a latitudinei.

Studiul giroscopului constituie, din acest motiv, unul din capitolele cele mai captivante ale Mecanicei și, în acelaș timp, cele mai folositoare din punct de vedere teoretic.

Dar și aplicațiunile practice ale giroscopului sunt din cele mai interesante; pe lângă determinarea latitudinei și a direcțiunei Nord-Sud, mai sigur și mai precis decât cu busola, giroscopul este folosit, între altele, la reducerea în mare măsură, a mișcărilor care produc răul de mare, la dirijarea torpilelor, la stabilizarea avioanelor și — aplicație foarte importantă — la pilotarea lor automată.

Lucrarea de față a D-rei Gabriela Țițeica și Ing. Al. Stoescu, are meritul de a prezenta, sub o formă simplă și relativ ușor accesibilă, principiile și proprietățile giroscopice, precum și aplicațiile practice ale giroscopului.

Autorii au adoptat, cu avantaș, pentru expunerea părții teoretice, o metodă diferită de cea obișnuită, întrucât plecând dela o mișcare presupusă cunoscută, se caută condițiile necesare realizării ei.

Lucrarea este însoțită de o serie de probleme a căror rezolvare desăvârșește înțelegerea fenomenului giroscopic.

O bibliografie termină această lucrare, realmente folositoare, care se adresează inginerilor mecanici, aviatorilor și marinarilor, precum și acelora curioși de proprietățile giroscopului.

Ii urex tot succesul pe care îl merită.

Prof. N. VASILESCU-KARPEN

4 Noembrie 1944, București.

NOTAȚII ȘI FORMULE

$Oxyz$ sistem de axe coordonate rectangulare *fix în raport cu giroscopul* cu origina în punctul fix O , axa Ox fiind pe axa de simetrie a giroscopului (axă principală de inerție) Ox și Oy în planul ecuatorial al giroscopului.

$Ox_1y_1z_1$ sistem de axe de coordonate *fix în spațiu*.

$Ox'y'z'$ sistem de axe de coordonate *mobil față de giroscop și de sistemul fix în spațiu*. Axa Ox' coincide cu Ox . Axa Ox' (linia nodurilor) este intersecția între planul xOy și planul x_1Oy_1 . Axa Oy' (linia transversală) este perpendiculară pe planul determinat de Ox' și Ox .

Sensul pozitiv de rotație considerat este dela *dreapta* spre *stânga* ca în *trigonometrie* (invers sensului de rotație al acelor de ceasornic).

Semnul \wedge înseamnă *produs vectorial*.

Semnul \rightarrow deasupra unei litere înseamnă *vector*.

Semnul \cdot deasupra unei litere înseamnă *derivata în raport cu timpul*.

\rightarrow

v = vectorul *iuteală* situat pe tangenta la traectorie, de mărime v .

\rightarrow

ω = *iuteala unghiulară de rotație proprie* a giroscopului în jurul axei sale de simetrie Ox .

\rightarrow

ω_1 = *iuteala unghiulară de precesie* a axei de simetrie a giroscopului în jurul unei axe fixe Ox_1 .

\rightarrow \rightarrow \rightarrow

$\Omega = \omega + \omega_1$ = *iuteala unghiulară de rotație rezultantă*.

θ = unghiul între axele Ox și Ox_1 .

α = unghiul între direcțiile pozitive ale vectorilor $\vec{\Omega}$ și $\vec{\omega}$,

$$\cos \alpha = \frac{\omega + \omega_1 \cos \theta}{\Omega}.$$

β = unghiul între direcțiile pozitive ale vectorilor $\vec{\Omega}$ și $\vec{\omega}_1$,

$$\cos \beta = \frac{\omega \cos \theta + \omega_1}{\Omega}.$$

$\psi = \sphericalangle(Ox_1, Ox') =$ unghiul de *precesie*, $\dot{\psi} = \omega_1 =$ *iuteala de precesie*.

$\varphi = \angle(Ox', Ox) =$ unghiul de rotație proprie $\dot{\varphi} = \omega =$ viteza de rotație proprie.

$\theta = \angle(Oz_1, Oz) =$ unghiul de nutație.

Con de precesie = con de deschidere 2θ , descris de $\vec{\omega}$ în jurul lui Oz_1 .

Con-bază = con de deschidere 2β , descris de $\vec{\Omega}$ în jurul lui Oz_1 .

Con rostogolitor = con de deschidere 2α , descris de $\vec{\Omega}$ în jurul lui Oz .

Precesie regulată = Mișcare în care ω , ω_1 și θ sunt constante.

$\vec{h} = m\vec{v} =$ cantitatea de mișcare a elementului material de masă m și viteza v .

$\vec{H} = \Sigma \vec{h} =$ suma cantităților de mișcare pentru întreg corpul.

$I_x, I_y, I_z =$ momente de inerție în raport cu axele principale $Oxyz$.

$\vec{F} =$ forța exterioară care lucrează asupra elementului de masă m .

$\vec{R} = \Sigma \vec{F} =$ rezultanta forțelor exterioare ce lucrează asupra corpului.

$\vec{M}_0 =$ moment în raport cu punctul O , al forțelor exterioare, de componente M_x, M_y, M_z față de $Oxyz$.

$\vec{k} = \vec{M}_0 h = OM \wedge m\vec{v} =$ momentul cantității de mișcare a punctului M de masă m în raport cu O .

$\vec{K} = \Sigma \vec{k} =$ suma momentelor cantităților de mișcare în raport cu punctul fix, de proiecții pe axele $Oxyz$: $K_x = I_x \Omega_x, K_y = I_y \Omega_y, K_z = I_z \Omega_z$.

$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{v}_k =$ viteza extremității vectorului \vec{K} .

$\angle \delta =$ unghiul lui \vec{K} cu axa Oz .

Ecuatiile lui Euler

$$I_x \frac{d\Omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \Omega_y \Omega_z = M_x$$

$$I_y \frac{d\Omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \Omega_x \Omega_z = M_y$$

$$I_z \frac{d\Omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \Omega_x \Omega_y = M_z$$

Diferite mișcări de precesie regulată.

Mișcare epicycloidală. Mișcare în timpul căreia conul rostogolitor rămâne exterior conului-bază, $\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega_1}$ este cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$. (fig. 13).

Mișcare hipocicloidală. Mișcare în timpul căreia conul rostogolitor este interior conului-bază, $\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega_1}$ este cuprins între $\frac{\pi}{2}$ și π , $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta > \frac{\pi}{2}$ (fig. 14).

Mișcare invers epicycloidală. Mișcare în timpul căreia conul rostogolitor este exterior conului-bază, $\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega_1}$ este cuprins între $\frac{\pi}{2}$ și π , $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$ (fig. 15).

Mișcare invers hipocicloidală sau pericycloidală. Mișcare în timpul căreia conul-bază rămâne interior conului rostogolitor $\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega_1}$ este cuprins între $\frac{\pi}{2}$ și π , $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$ (fig. 16).

$T =$ perioada oscilației armonice a axei giroscopului Ox în jurul vectorului iuștei unghiulare proprii

$$T = \frac{2\pi I_x}{(I_x - I_x)\omega_x}$$

Axa Ox a giroscopului este stabilă în cazul în care i se dă giroscopului o iușteală unghiulară proprie suficient de mare $\overrightarrow{\omega}$.

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_g =$ cuplu giroscopic = cuplu de inerție egal și de sens contrar cu cuplul exterior $\overrightarrow{\mathcal{M}}_0$. Efectul acestui cuplu este de a aduce axa Ox către Ox_1 pe drumul cel mai scurt (tendință de paralelism a axelor).

$$\overrightarrow{F} = \text{reacțiune giroscopică}; \quad F = \frac{I_x \omega \omega_1 \sin \theta}{a}$$

unde $a =$ distanța între reazămele axei giroscopului.

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_c =$ momentul total al forțelor de inerție Coriolis cu direcția pe axa Ox' (linia nodurilor): $\mathcal{M}_c = -I_z \omega \omega_1 \sin \theta$.

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_p =$ momentul total al forțelor centrifuge cu direcția pe axa Ox' :
 $\mathcal{M}_p = (I_x - I_z) \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta$.

\vec{R}_i = rezultanta totală a forțelor de inerție ce lucrează asupra giroscopului: $R_i = M \omega_1^2 x_0 \sin \theta$

unde M = masa giroscopului, x_0 = coordonata centrului de greutate al giroscopului în sistemul de axe $Oxyz$.

d = distanța dela punctul fix O la R_i : $d = \frac{\mathfrak{M}_g}{R_i}$.

Precesie pseudo-regulată = mișcare în care elementele ω , ω_1 și θ sunt variabile, dar variația lor este suficient de mică pentru a putea fi considerate practic constante.

θ_0 și θ_1 = unghiurile extreme între care variază unghiul de nutație θ .

$\omega_m = \omega_0 - \frac{mga \cos \theta_1}{I_x \omega_0}$ = iuțeala medie de rotație proprie.

ω_{1m} = iuțeala de precesie medie = $\frac{mga}{I_x \omega_0}$ (aceiaș ca în cazul precesiei regulate).

$\theta_m = \theta_0 + \frac{mga I_x \sin \theta_0}{I_x^2 \omega_0^2}$ = unghiul mediu de nutație.

$T_r = \frac{2\pi}{\omega_0}$ = perioada de rotație proprie.

$T_p = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi I_x}{mga} \omega_0$ = perioada de precesie.

$T_n = \frac{2\pi I_x}{I_x \omega_0}$ = perioada de nutație.

n = numărul de nutații făcut de axa giroscopului într'o rotație în jurul axei fixe Ox_1 : $n = \frac{I_x \omega_0^2}{mga I_x}$.

λ = latitudinea.

\mathfrak{M}_f = cuplul de frecare în jurul axei giroscopului, dirijat după axa Ox , de sens contrar cu ω .

PARTEA I

TEORIA GIROSCOPULUI

CAPITOLUL I

Teoremele cantităților de mișcare și momentelor cantităților de mișcare

Să considerăm un punct material M de masă m în mișcare. Fie, la un anumit moment, \vec{F} forța rezultantă ce lucrează asupra punctului, \vec{w} accelerația pe care o capătă punctul material sub acțiunea forței \vec{F} și \vec{v} viteza punctului (fig. 1). Prin definiție, vectorul $\vec{h} = m\vec{v}$ având ca suport, direcție și sens acele ale vectorului

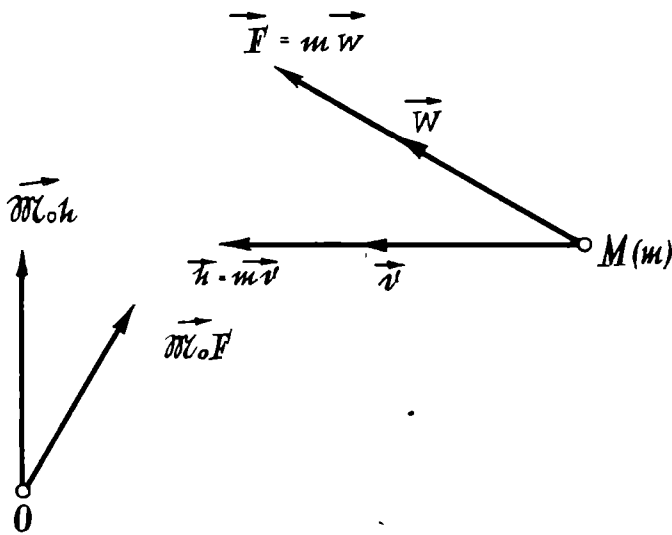


Fig. 1

rului \vec{v} , iar ca mărime valoarea produsului $m\vec{v}$, se numește *cantitate de mișcare* a mobilului M la momentul considerat.

Conform postulatului lui Newton, avem :

$$\vec{F} = m\vec{w}$$

Dar accelerația \vec{w} este derivata vitezei \vec{v} .

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Rezultă :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

sau :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{h}}{dt} \quad (1)$$

Prin urmare în mișcarea unui mobil, derivata în raport cu timpul a cantității sale de mișcare este egală în fiecare moment cu forța care produce mișcarea.

Fie O un punct fix oarecare în spațiu. Momentul în raport cu O al vectorului \vec{h} se numește *moment al cantității de mișcare* și este exprimat prin relația :

$$\vec{\mathcal{M}}_O \vec{h} = \vec{OM} \wedge (m\vec{v}) \quad (\text{semnul } \wedge \text{ indicând produs vectorial})$$

Derivând această relație în raport cu timpul, avem :

$$\frac{d}{dt} (\vec{\mathcal{M}}_O \vec{h}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge (m\vec{v}) + \vec{OM} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Dar

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}$$

și prin urmare :

$$\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0.$$

Rezultă :

$$\frac{d}{dt} (\vec{\mathcal{M}}_O \vec{h}) = \vec{OM} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}.$$

Produsul vectorial $\vec{OM} \wedge \vec{F}$ nu este însă decât *momentul forței \vec{F} în raport cu O*, deci :

$$\frac{d}{dt} (\vec{\mathcal{M}}_O \vec{h}) = \vec{\mathcal{M}}_O \vec{F}. \quad (2)$$

Prin urmare, în mișcarea unui mobil, derivata în raport cu timpul, a momentului față de un punct fix al cantității sale de mișcare, este egală cu momentul, față de punctul considerat, al forței \vec{F} .

Să considerăm acum un corp rigid (C) în mișcare. Fie \vec{R} rezultanta forțelor exterioare ce acționează corpul și $\vec{\mathcal{M}}_0$ momentul acestor forțe în raport cu un punct fix O (fig. 2).

Corpul fiind în mișcare, fiecărui element de volum din jurul

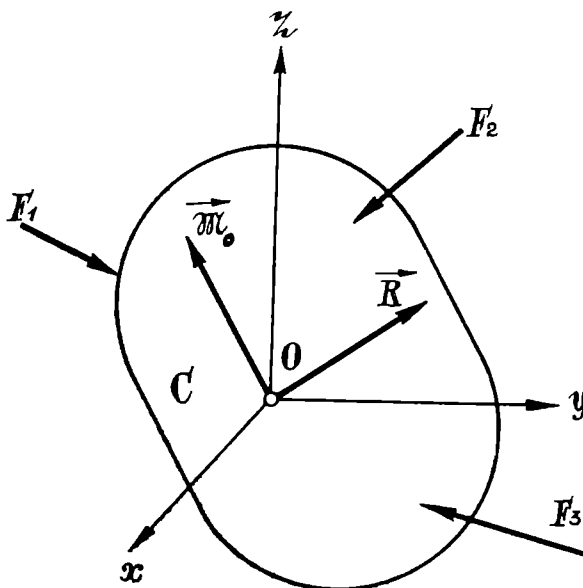


Fig. 2

fiecărui punct M al corpului îi va corespunde o vitează \vec{v} și o cantitate de mișcare $\vec{h} = m\vec{v}$.

Fie \vec{H} , rezultanta tuturor acestor vectori \vec{h} , și \vec{K} suma momentelor vectorilor \vec{h} în raport cu O. Aplicând fiecărui element de volum relațiile (1) și (2), obținem:

$$\sum \vec{F} = \sum \frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{h} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (3)$$

$$\text{și } \sum \mathcal{M}_0 \vec{F} = \sum \frac{d}{dt} (\mathcal{M}_0 \vec{h}) = \frac{d}{dt} \sum \mathcal{M}_0 \vec{h} = \frac{d\vec{K}}{dt} \quad (4)$$

Dar în suma $\Sigma \vec{F}$, forțele interioare dispar, fiind două câte două egale și de sens contrar. Deci:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{R}$$

Deasemenea în suma $\Sigma \mathfrak{M}_0 \vec{F}$ momentele forțelor interioare se distrug și prin urmare:

$$\Sigma \mathfrak{M}_0 \vec{F} = \vec{\mathfrak{M}}_0$$

Relațiile (3) și (4) devin:

$$\vec{R} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (5) \quad \text{și} \quad \vec{\mathfrak{M}}_0 = \frac{d\vec{K}}{dt} \quad (6)$$

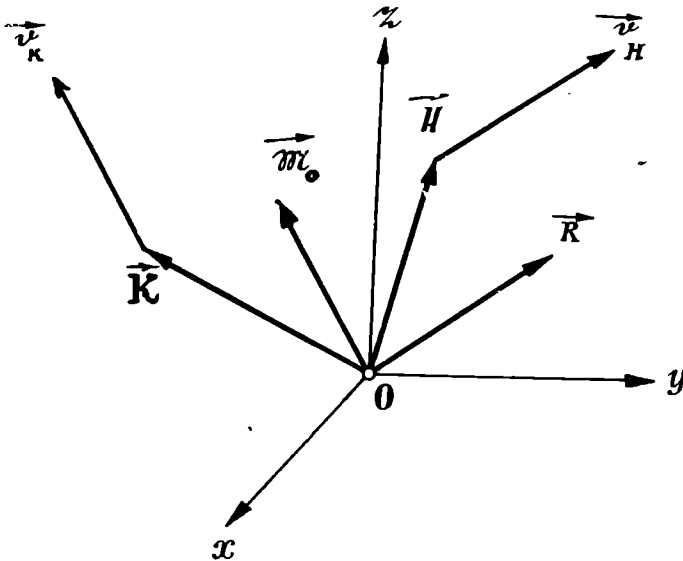


Fig. 3

Rezultă deci în mișcarea generală a unui corp rigid la fiecare moment:

1) *Derivata în raport cu timpul a sumei cantităților de mișcare este egală cu rezultanta forțelor exterioare.*

2) *Derivata în raport cu timpul a sumei momentelor cantităților de mișcare în raport cu un punct fix este egală cu suma momentelor exterioare în raport cu punctul considerat.*

Aceste două proprietăți exprimate prin formulele (5) și (6) au o interpretare geometrică simplă.

În adevăr, să presupunem vectorii \vec{H} și \vec{K} construiți grafic cu origina în punctul fix 0 (fig. 3).

Vectorii \vec{H} și \vec{K} variind cu timpul atât ca mărime cât și ca direcție, extremitățile lor vor descrie fiecare câte o curbă în spațiu. Dar în acest caz

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{v}_H; \quad \text{și} \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{v}_K$$

\vec{v}_H și \vec{v}_K fiind respectiv iuțeala extremității vectorului \vec{H} și iuțeala extremității vectorului \vec{K} . Relațiile (5) și (6) devin astfel:

$$\vec{R} = \vec{v}_H \quad (7) \quad \vec{M}_0 = \vec{v}_K \quad (8)$$

Adică: 1) *Iuțeala absolută a extremității vectorului reprezentând suma cantităților de mișcare este echipolentă în fiecare moment cu rezultanta forțelor exterioare.*

2) *Iuțeala absolută a extremității vectorului reprezentând suma momentelor cantităților de mișcare în raport cu un punct fix este echipolentă cu momentul forțelor exterioare în raport cu punctul considerat.*

CAPITOLUL II

Momente de inerție.

Prin definiție se numește *moment de inerție* al unui corp C în raport cu axa Δ , integrala:

$$I = \int m r^2$$

în care m , reprezintă masa unui element de volum al corpului și r distanța acestui element la dreapta Δ (fig. 4).

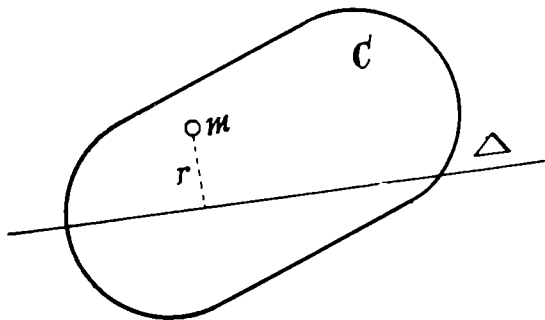


Fig. 4

Să considerăm un punct O și un sistem de referință Oxyz cu origina în O (fig. 5).

Momentele de inerție ale corpului în raport cu axele sunt respectiv

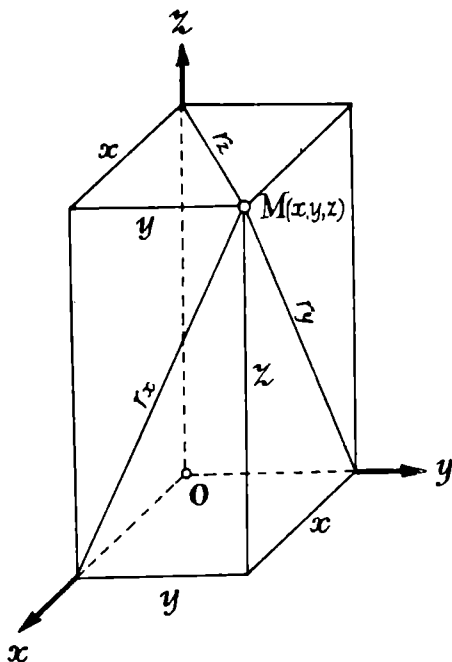


Fig. 5

$$I_x = \int m r_x^2 = \int m (x^2 + y^2)$$

$$I_y = \int m r_y^2 = \int m (x^2 + z^2) \quad (9)$$

$$I_z = \int m r_z^2 = \int m (x^2 + y^2)$$

Prin definiție expresiile I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} date de relațiile

$$I_{xy} = \int m \cdot xy, \quad I_{yz} = \int m \cdot yz,$$

$$I_{zx} = \int m \cdot zx$$

se numesc *momente centrifugale de inerție*.

Se pot alege astfel axele $Oxyz$ încât

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

În acest caz axele Ox , Oy , Oz se numesc *axe principale de inerție*

iar momentele în raport cu aceste axe se numesc *momente principale de inerție*.

În cazul când corpul are o axă de simetrie, această axă este axă principală de inerție iar momentele de inerție în raport cu axele perpendiculare pe axa de simetrie sunt *egale între ele*.

CAPITOLUL III

Determinarea vectorului-sumă a momentelor cantităților de mișcare în cazul unui corp ce se rotește în jurul unei axe.

Să considerăm (fig. 6) corpul C raportat la sistemul de referință $Oxyz$ și mobil, în jurul unei axe Δ care trece prin O , cu viteza unghiulară $\vec{\Omega}$ (Ω_x , Ω_y , Ω_z).

Viteza \vec{v} (v_x , v_y , v_z) a unui punct M (x , y , z) este dată de relația vectorială

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{M'M}$$

care reprezintă momentul vectorului $\vec{\Omega}$ în raport cu punctul M.

Scalar avem::

$$\begin{aligned} v_x &= \Omega_y z - \Omega_z y \\ v_y &= \Omega_z x - \Omega_x z \\ v_z &= \Omega_x y - \Omega_y x \end{aligned} \quad (10)$$

Ținând seama de definiția vectorului \vec{K} (K_x, K_y, K_z) care reprezintă suma momentelor cantităților de mișcare

$$\vec{K} = \Sigma \vec{OM} \wedge \vec{mv} = \Sigma \vec{r} \wedge \vec{mv}$$

Obținem pentru proiecțiile sale pe axe valorile:

$$\begin{aligned} K_x &= \Sigma (myv_z - mxv_y) \\ K_y &= \Sigma (mxv_x - mzv_z) \\ K_z &= \Sigma (mxv_y - myv_x) \end{aligned}$$

sau, ținând seama de (10) și grupând termenii:

$$\begin{aligned} K_x &= \Sigma [m \Omega_x (y^2 + z^2) - m \Omega_y xy - m \Omega_z xz] \\ K_y &= \Sigma [m \Omega_y (x^2 + z^2) - m \Omega_z yx - m \Omega_x yz] \\ K_z &= \Sigma [m \Omega_z (x^2 + y^2) - m \Omega_x zx - m \Omega_y zy] \end{aligned}$$

de unde, având în vedere definițiile momentelor de inerție

$$\begin{aligned} K_x &= I_x \Omega_x - I_{xy} \Omega_y - I_{xz} \Omega_z \\ K_y &= I_y \Omega_y - I_{yx} \Omega_x - I_{yz} \Omega_z \\ K_z &= I_z \Omega_z - I_{zx} \Omega_x - I_{zy} \Omega_y \end{aligned}$$

În cazul când sistemul de referință $Oxyz$ este astfel ales încât axele Ox, Oy, Oz sunt axe principale de inerție, momentele centrifugale fiind nule:

$$K_x = I_x \Omega_x, \quad K_y = I_y \Omega_y, \quad K_z = I_z \Omega_z \quad (11)$$

CAPITOLUL IV

Ecuțiile lui Euler

Pentru simplificarea expresiei vectorului \vec{K} , Euler studiază problema rotației unui corp în jurul unui punct fix, alegând drept sistem de axe de coordonate $Oxyz$, axele principale de inerție ale corpului. Acest sistem legat rigid cu corpul, este mobil cu iuțea de rotație $\vec{\Omega}$ față de un sistem fix $Ox_1 y_1 z_1$.

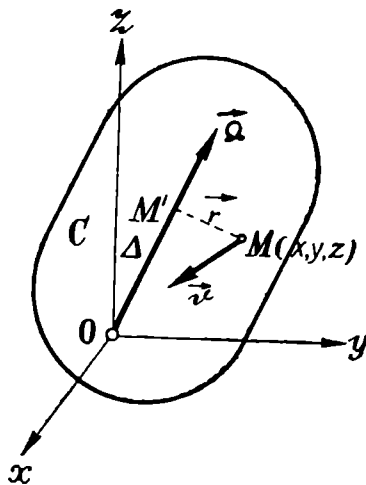


Fig. 6

Pentru stabilirea ecuațiilor mișcării aplicăm relația $\vec{\mathfrak{M}} = v_K$ în sistemul mobil $Oxyz$. În acest caz *iuțeala absolută* v_K a extremității lui K se compune din *iuțeala sa relativă* v_r în raport cu sistemul mobil și din *iuțeala conductoare* v_c a lui $Oxyz$ față de $Ox_1y_1z_1$

$$v_K = v_r + v_c.$$

Rezultă deci $v_r = \frac{d\vec{K}}{dt}$ (în sistemul mobil), iar $v_c = \vec{\Omega} \wedge \vec{K}$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K} = \vec{\mathfrak{M}}$$

sau proiectat pe axele mobile, obținem sistemul general:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + \Omega_y K_z - \Omega_z K_y &= \mathfrak{M}_x \\ \frac{dK_y}{dt} + \Omega_z K_x - \Omega_x K_z &= \mathfrak{M}_y \\ \frac{dK_z}{dt} + \Omega_x K_y - \Omega_y K_x &= \mathfrak{M}_z \end{aligned} \quad (12)$$

Pentru $K_x = I_x \Omega_x$; $K_y = I_y \Omega_y$; $K_z = I_z \Omega_z$, sistemul de mai sus devine:

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\Omega_x}{dt} - (I_y - I_x) \Omega_y \Omega_z &= \mathfrak{M}_x \\ I_y \frac{d\Omega_y}{dt} - (I_x - I_y) \Omega_x \Omega_z &= \mathfrak{M}_y \\ I_z \frac{d\Omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \Omega_x \Omega_y &= \mathfrak{M}_z \end{aligned} \quad (13)$$

Ecuațiile (12) sau (13) se numesc *ecuațiile dinamice ale lui Euler*.

CAPITOLUL V

TEORIA GENERALĂ A GIROSCOPULUI

rotație proprie uniformă. Precesie regulată.

Numim *giroscop* un *solid de revoluție* (C) care are un punct fix O situat pe axa sa de simetrie Ox , în jurul căreia i se dă o *mișcare rapidă de rotație*.

Să notăm cu I_x momentul de inerție al giroscopului în raport

cu Ox . Solidul, fiind de rotație în jurul lui Ox , momentul de inerție este același pentru orice dreaptă Δ trecând prin O și cuprinsă în planul P perpendicular în O pe Ox . Il notăm cu I_x . Să presupunem că dăm giroscopului o mișcare de rotație cu iuțeala unghiulară ω constantă în jurul lui Ox . ω este un vector \vec{OM} (fig. 7). Fie o dreaptă fixă Ox_1 care face unghiul θ constant cu Ox .

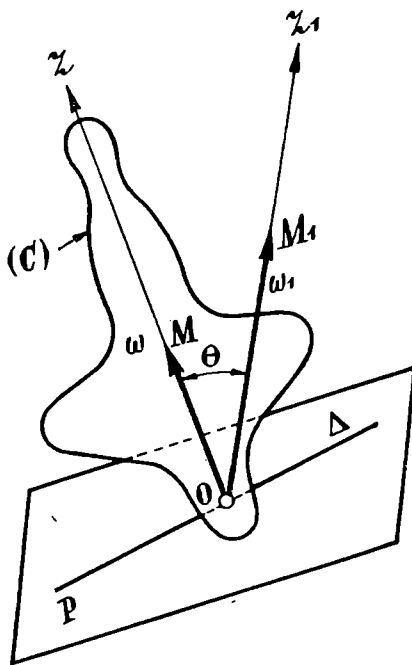


Fig. 7

Ne propunem să determinăm condițiile necesare pentru ca în timp ce giroscopul se rotește în jurul lui Ox cu iuțeala constantă ω , axa Ox să se rotească în jurul lui Ox_1 cu o iuțeală constantă ω_1 . ($\vec{OM}_1 = \vec{\omega}_1$).

Din cauza iuțelilor unghiulare $\vec{\omega}$ și $\vec{\omega}_1$, giroscopul va avea o iuțeală unghiulară rezultantă $\vec{\Omega}$ ($\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_1$) (fig. 8), care e dată prin relația vectorială:

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_1 \quad (14)$$

sau scalar din paralelogramul OM_1NM :

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos \theta \quad (15)$$

Proiectând vectorii ω , ω_1 și $\vec{\Omega}$ pe direcțiile Ox și Ox_1 avem:

$$\begin{aligned} \Omega \cos \alpha &= \omega + \omega_1 \cos \theta \\ \Omega \cos \beta &= \omega_1 + \omega \cos \theta \end{aligned}$$

De unde găsim:

$$\cos \alpha = \frac{\omega + \omega_1 \cos \theta}{\Omega} \quad (16)$$

$$\cos \beta = \frac{\omega \cos \theta + \omega_1}{\Omega}$$

α și β fiind unghiurile făcute de $\vec{\Omega}$ respectiv cu Ox și Ox_1 și legate prin relația $\alpha + \beta = \theta$.

Con-bază și con rostogolitor. Iuțelele ω și ω_1 și unghiul θ sunt presupuse constante prin ipoteză, rezultă deci din (15) și (16)

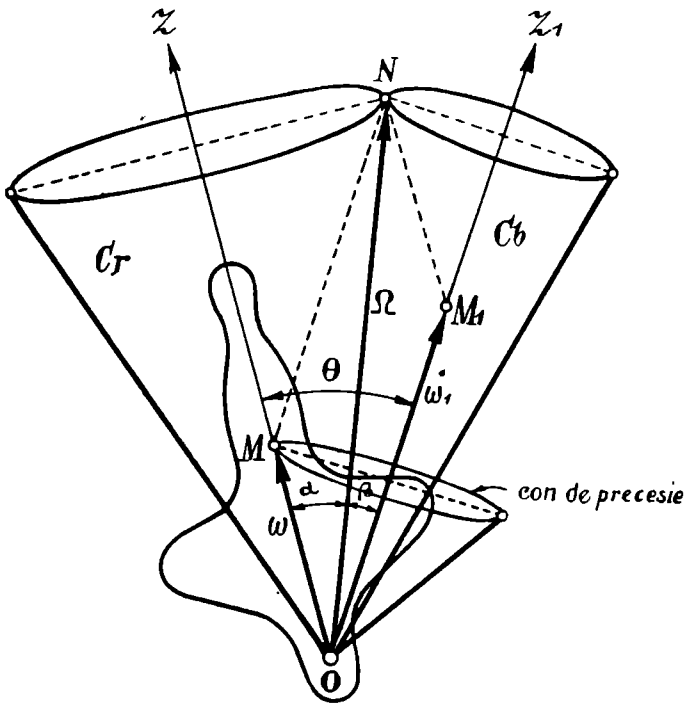


Fig. 8

că iuțea totală Ω precum și unghiurile α și β sunt constante.

Prin urmare, în timpul mișcării:

1) ω_1 și θ fiind constante, $\vec{\omega} = \vec{OM}$ descrie un con fix circular drept cu vârful în O și axa Ox_1 , de deschidere 2θ , denumit *con de precesie*. Iuțea de rotație a vectorului \vec{OM} în jurul lui Ox_1 este ω_1 , căci astfel a fost presupus în ipoteză (fig. 8).

2) Ω și β fiind constante, vectorul $\vec{\Omega} = \vec{ON}$ descrie în raport cu axa fixă Ox_1 un con C_b fix circular drept cu vârful în O și axa Ox_1 având deschiderea unghiulară 2β . Vectorul \vec{ON} are iu-

țeala de rotație $\vec{\omega}_1$ în jurul lui Ox_1 căci \vec{ON} fiind rezultanta dintre \vec{OM}_1 fix și \vec{OM} ce se rotește, trebuie ca \vec{ON} să rămână mereu în planul definit de OM_1M adică se rotește cu aceeași iuțeală ca \vec{OM} , deci cu $\vec{\omega}_1$ (fig. 8).

3) Ω și α fiind constante, vectorul $\vec{\Omega} = \vec{ON}$ descrie în raport cu axa mobilă Ox un con circular drept C_r , mobil cu vârful în O , de axă Ox , având deschiderea unghiulară 2α . Iuțeala de rotație a acestui vector în jurul lui Ox este $\vec{\omega}$, căci un observator situat pe corp, vede rotindu-se vectorul $\vec{\Omega}$ cu o rotație egală cu a corpului, deci cu $\vec{\omega}$. (fig. 8).

Observație. Conul fix descris de $\vec{\Omega}$ în jurul lui Ox_1 , și conul mobil descris de $\vec{\Omega}$ în jurul lui Ox , au în fiecare moment o generatoare $\vec{ON} = \vec{\Omega}$ comună.

Iuțele punctelor situate pe direcția ON fiind nule, rezultă că mișcarea generală a corpului se face prin rostogolirea fără alunecare a unui con C_r legat fix de corp, asupra unui con fix C_b . Din aceste motive C_b se numește *con-bază* iar C_r *con-rostogolitor*.

Din cele de mai sus, se observă că mișcarea generală a giroscopului este compusă din două mișcări simultane de rotație:

a) O rotație în jurul lui Ox , numită *rotație proprie*, cu iuțeala unghiulară $\vec{\omega}$, care se numește deci *iuțeala unghiulară de rotație proprie*.

b) O rotație în jurul unei axe fixe Ox_1 , numită *precesie* cu iuțeala de precesie $\vec{\omega}_1$.

În cazul de care ne-am ocupat am presupus $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_1$ și θ constante. Suntem în cazul unei *rotații proprii uniforme* și al unei *precesii regulate*.

Odată aceste elemente prime stabilite putem trece la studiul problemei ce ne-am propus:

Determinarea condițiilor ca un giroscop având o rotație proprie uniformă de iuțeală $\vec{\omega}$ în jurul axei de simetrie Ox , să aibă o precesie regulată de iuțeală $\vec{\omega}_1$ în jurul unei axe fixe Ox_1 , dându-se $\sphericalangle(Ox_1, Ox) = \theta = \text{constant}$.

Sisteme de axe fixe și mobile. — Pentru studiul ce urmează, vom lua într'un plan P_1 care trece prin O și e perpendicular pe

Oz_1 , 2 axe fixe Ox_1 și Oy_1 ($Ox_1 \perp Oy_1$). Obținem astfel *triedrul de referință fix* $Ox_1 y_1 z_1$. În planul P , care trece prin O și e perpendicular pe Oz , luăm axele Ox și Oy ($Ox \perp Oy$) fixe față de giroscopul (C) . Obținem astfel *triedrul de referință* $Oxyz$ *legat rigid cu giroscopul* (C) , dar *mobil* față de sistemul fix $Ox_1 y_1 z_1$ cu viteza de rotație $\vec{\Omega}$ (fig. 9).

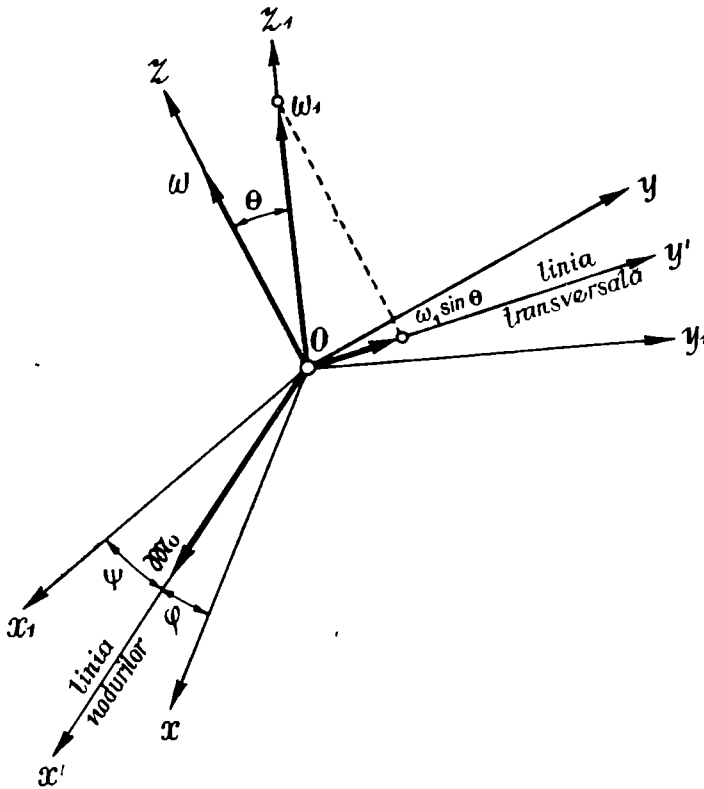


Fig. 9

Planele P_1 și P se taie după o dreaptă Ox' . În planul P ducem perpendiculara Oy' pe Ox' . Sistemul $Ox'y'z'$ în care Ox' se confundă cu Oz alcătuiește un *al treilea sistem de referință mobil atât față de $Oxyz$ cât și față de $Ox_1 y_1 z_1$* . În adevăr sistemul $Oxyz$ se mișcă față de $Ox'y'z'$ cu viteza de rotație ω , iar sistemul $Ox'y'z'$ se mișcă în raport cu $Ox_1 y_1 z_1$ cu viteza de rotație ω_1 .

Unghiurile lui Euler. Vom nota, conform notației lui Euler, unghiurile:

- $\angle (Ox_1, Ox') = \psi =$ unghi de precesie
- $\angle (Ox', Ox) = \varphi =$ unghi de rotație proprie
- $\angle (Oz_1, Oz) = \theta =$ unghi de nutație.

Dreapta Ox' se numește *linia nodurilor*, iar Oy' , *axă transversală*.

Iuțelile de rotație corespunzătoare unghiurilor lui Euler sunt:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_1 = (\text{rotația în jurul lui } Ox_1).$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = (\text{rotația proprie a corpului în jurul axei de simetrie}).$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = (\text{rotația în jurul axei nodurilor } Ox').$$

În cazul nostru $\theta' = 0$, deoarece am presupus $\theta = \text{constant}$.

Vom aplica ecuațiile lui Euler (12) în raport cu sistemul $Ox'y'z'$.

Proiecțiile vectorului $\vec{\Omega}$ pe aceste axe sunt:

$$\Omega_{x'} = 0, \quad \Omega_{y'} = \omega_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \omega_1 \sin\theta, \quad \Omega_{z'} = \omega + \omega_1 \cos\theta.$$

Rezultă deci pentru componentele $K_{x'}$, $K_{y'}$, $K_{z'}$ ale vectorului \vec{K} ($K = \text{momentul cantităților de mișcare}$), valorile din ecuațiile (11):

$$\begin{aligned} K_{x'} &= I_x \Omega_{x'} = 0, & K_{y'} &= I_y \Omega_{y'} = I_x \omega_1 \sin\theta, \\ K_{z'} &= I_x \Omega_{z'} = I_x (\omega + \omega_1 \cos\theta) \end{aligned} \quad (17)$$

Intrucât ω , ω_1 , θ sunt constante, avem:

$$\frac{dK_{x'}}{dt} = 0, \quad \frac{dK_{y'}}{dt} = 0, \quad \frac{dK_{z'}}{dt} = 0.$$

Iuțea unghiulară de rotație a sistemului $Ox'y'z'$ în raport cu sistemul fix fiind $\vec{\omega}_1$ de proiecții pe axele Ox' , Oy' , Oz' respectiv

$$0, \quad \omega_1 \sin\theta, \quad \omega_1 \cos\theta$$

rezultă din (12):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{x'} &= \omega_1 \sin\theta \cdot K_{z'} - \omega_1 \cos\theta \cdot K_{y'} \\ \mathfrak{M}_{y'} &= 0 \\ \mathfrak{M}_{z'} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

unde $\mathfrak{M}_{x'}$, $\mathfrak{M}_{y'}$, $\mathfrak{M}_{z'}$, sunt componentele pe axele $Ox'y'z'$ ale vectorului momentului rezultat $\vec{\mathfrak{M}}_0$.

Introducând în (18) valorile lui $K_{y'}$ și $K_{z'}$ date de (17) obținem

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_{x'} = I_x \omega \omega_1 \sin\theta \left(1 + \frac{I_x - I_y}{I_x} \frac{\omega_1}{\omega} \cos\theta \right) \quad (19)$$

Rezultă deci că *pentru a avea mișcarea din ipotexă, trebuie dat corpului un moment total rezultat de valoare constantă (19) și cu direcția pe linia nodurilor Ox' . ($Ox' \perp$ pe planul xOx_1).*

Caz particular. Observăm că în cazul $\cos \theta = 0$ ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$) obținem formula simplă

$$\mathfrak{M}_0 = \pm I_x \omega \omega_1 \quad (20)$$

Ajungem la o formulă simplă pentru valoarea momentului rezultat și în cazul $\cos \theta \neq 0$, considerând *iuțea de rotație proprie* ω suficient de mare față de cea de precesie ω_1 , pentru a putea neglija termenul:

$$\frac{I_x - I_x}{I_x} \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta$$

Căpătăm astfel o *relație aproximativă* pentru momentul \mathfrak{M}_0 :

$$\mathfrak{M}_0 = I_x \omega \omega_1 \sin \theta \quad (21)$$

Forma vectorială a relațiilor ce dau pe $\vec{\mathfrak{M}}_0$.

Ținând seama de faptul că $\vec{\mathfrak{M}}_0$, $\vec{\omega}_1$ și $\vec{\omega}$ sunt vectori îndreptați după Ox' , Ox_1 , Ox , și având în vedere că Ox' este perpendicular pe planul $Ox_1 z$, relațiile (20) și (21) se pot scrie vectorial:

$$\vec{\mathfrak{M}}_0 = I_x (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}) \quad (22)$$

Deasemenea putem scrie vectorial și relația exactă (19):

$$\vec{\mathfrak{M}}_0 = I_x \left(1 + \frac{I_x - I_x}{I_x} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right) \cdot (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}) \quad (23)$$

factorul

$$I_x \left(1 + \frac{I_x - I_x}{I_x} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right)$$

fiind considerat ca un simplu scalar.

Determinarea pe cale directă a relației aproximative (21).

Fie giroscopul (C) cărui i dăm o rotație cu iuțea foarte mare ω în jurul axei sale Ox (fig. 10). Vectorul momentului cantității de mișcare \vec{K} poate fi considerat ca îndreptat după axa Ox căci pentru ω_1 destul de mic față de ω , avem $\Omega \cong \omega$ și putem considera $\vec{K} = I_x \omega$.

Presupunând mărimea lui K constantă și aplicând principiul din relația (8) că *iuțea v_k a extremității vectorului \vec{K} este un vector echipolent cu vectorul moment $\vec{\mathfrak{M}}$* avem:

$$\vec{\mathfrak{M}}_0 = \vec{v}_k = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{M}'M = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{OM} = I_x \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}$$

sau scalar

$$\mathfrak{M}_0 = I_x \omega \omega_1 \sin \theta.$$

Determinarea mărimii și poziției exacte a vectorului \vec{K} .

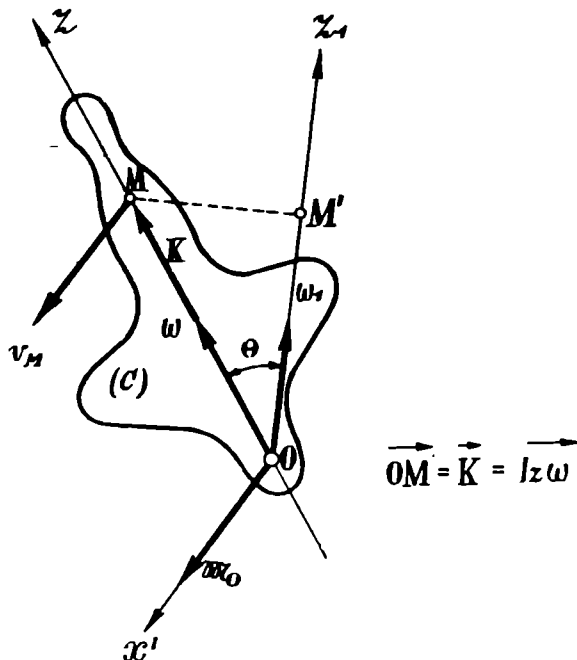


Fig. 10

Prin proiecții ale iteții unghiulare rezultante $\vec{\Omega}$ pe axa Ox

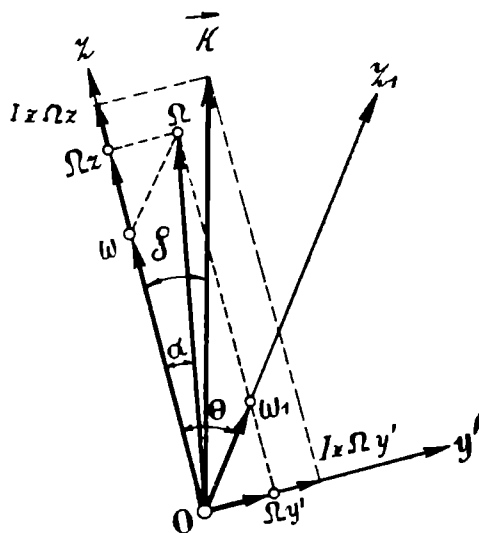


Fig. 11

și pe axa transversală Oy' (Oy' perpendicular pe Ox în planul Oxz_1) avem (fig. 11).

$$\Omega_x = \Omega \cos \alpha = \omega + \omega_1 \cos \theta$$

$$\Omega_{y'} = \Omega \sin \alpha = \omega_1 \sin \theta.$$

Proecțiile pe aceleaș axe ale vectorului \vec{K} vor fi:

$$\begin{aligned} K_x &= I_x \Omega_x = I_x \Omega \cos \alpha = I_x (\omega + \omega_1 \cos \theta) \\ K_{y'} &= I_x \Omega_{y'} = I_x \Omega \sin \alpha = I_x \omega_1 \sin \theta. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_{y'}^2} = \Omega \sqrt{I_x^2 \sin^2 \alpha + I_x^2 \cos^2 \alpha} \quad (24)$$

sau:

$$K = \sqrt{I_x^2 \omega_1^2 \sin^2 \theta + I_x^2 (\omega + \omega_1 \cos \theta)^2} \quad (25)$$

Notând cu δ , unghiul vectorului \vec{K} cu axa Ox avem:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{K_{y'}}{K_x} = \frac{I_x}{I_x} \operatorname{tg} \alpha = \frac{I_x \omega_1 \sin \theta}{I_x (\omega + \omega_1 \cos \theta)} \quad (26)$$

Vectorul \vec{K} fiind situat în planul xOx_1 , rezultă că se rotește odată cu acest plan în jurul axei fixe Ox_1 cu iuțea unghiulară $\vec{\omega}_1$.

Experiența lui Pohl

Pentru a evidenția mișcarea vectorului iuțelii de rotație $\vec{\Omega}$ a giroscopului se fixează pe axa de simetrie a acestui giroscop un disc D acoperit cu hârtie imprimată (de ex. dintr'un ziar) (fig. 12).

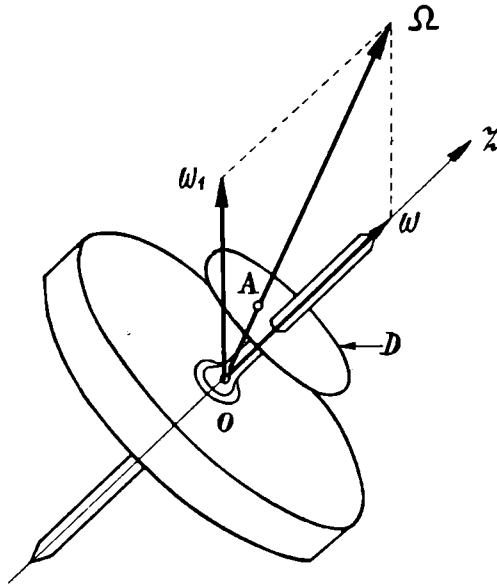


Fig. 12

Când giroscopul se rotește, literele imprimate, din cauza mișcării lor nu se pot distinge unele de altele, totul confundându-se într'un cenușiu uniform. Numai în punctul A de intersecție al axei

de rotație $\vec{\Omega}$ cu discul D ziarul este în repaos și se pot citi literele.

Astfel se poate urmări mișcarea axei de rotație $\vec{\Omega}$ în mod destul de deslușit.

Prin această experiență Pohl spune că se observă cum:

«Axa de rotație și axa corpului se înconjură una pe alta, ca o pereche care dansează».

Studiul formelor de mișcare ce se întâlnesc în cazul precesiei regulate.

Să considerăm giroscopul în mișcare de precesie regulată, având itueala de rotație proprie ω în jurul axei sale de simetrie Ox și itueala de precesie ω_1 în jurul axei fixe Ox_1 .

Pentru fixarea datelor, vom alege în mod arbitrar pe axa fixă Ox_1 un sens pozitiv (în cazul giroscopului greu am considerat drept axă Ox_1 , verticala ascendentă trecând prin O). Pe axa de simetrie Ox vom lua sensul pozitiv astfel încât:

$$\sphericalangle(Ox, Ox_1) = \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Ituelele de rotație ω și ω_1 sunt pozitive sau negative după cum sunt îndreptate în sensul pozitiv sau negativ pe axa respectivă Ox și Ox_1 .

Păstrând notațiile din fig. 8, vom împărți formele de mișcare ale giroscopului în cazul precesiei regulate în 2 categorii:

Categoria A

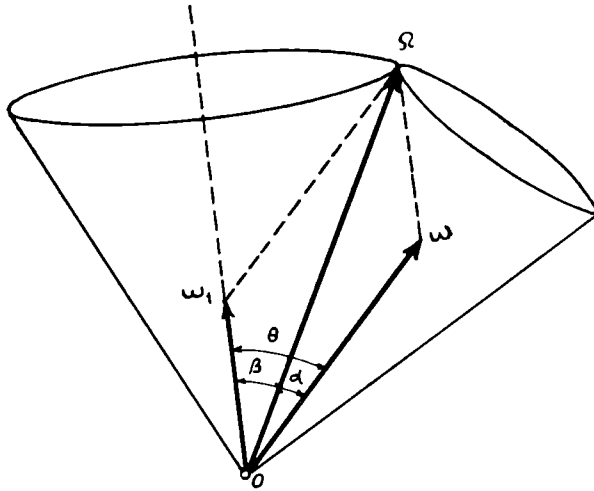
Pentru $\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) = \theta$ cuprins între O și $\frac{\pi}{2}$.

Avem: $\frac{\omega_1}{\omega} > 0$; $\alpha + \beta = \theta$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \theta}{\frac{\omega}{\omega_1} + \cos \theta}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \theta}{\frac{\omega_1}{\omega} + \cos \theta} \quad (27)$$

Ultimele 2 relații se obțin ușor din ecuațiile (16) eliminând pe Ω prin împărțire, și ținând seama că $\alpha + \beta = \theta$.

În această categorie, mișcarea de precesie a giroscopului este *progresivă*, vectorul $\vec{\omega}$ proiectându-se pe direcția vectorului $\vec{\omega}_1$ în



*Mișcare epicycloidală.
Precesie progresivă.*

Fig. 13

acelaș sens cu vectorul ω_1 . În timpul mișcării, conul rostogolitor rămâne exterior conului-bază. Mișcarea giroscopului în această categorie se numește *epicycloidală*. (fig. 13).

Categoria B

Pentru $\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) = \pi - \theta$ cuprins între $\frac{\pi}{2}$ și π .

$$\text{Avem: } \frac{\omega_1}{\omega} < 0, \quad \alpha + \beta = \pi - \theta \quad (28)$$

Formulele pentru calcularea unghiurilor α și β sunt în acest caz:

$$\text{tg } \alpha = \frac{-\sin \theta}{\frac{\omega}{\omega_1} + \cos \theta}, \quad \text{tg } \beta = \frac{-\sin \theta}{\frac{\omega_1}{\omega} + \cos \theta} \quad (29)$$

și se pot obține fie direct ca în cazul A, fie din formulele (27) deduse pentru A, înlocuind unghiul θ prin $\pi - \theta$ și schimbând semnul rapoartelor $\frac{\omega}{\omega_1}$ și $\frac{\omega_1}{\omega}$.

În categoria B, mișcarea de precesie este *retrogradă*, vectorul $\vec{\omega}$ proiectându-se pe direcția vectorului $\vec{\omega}_1$ în sens contrar acestui vector.

Categoria B se poate subdivide în 3:

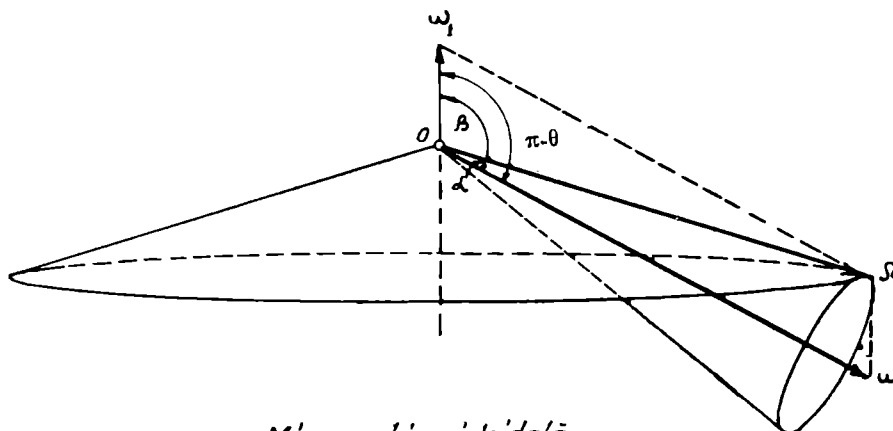
$$1) \quad \beta > \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă din relațiile (28) și (29): $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\text{tg } \beta < 0$, $\frac{\omega_1}{\omega} + \cos \theta > 0$.

De unde:

$$0 > \frac{\omega_1}{\omega} > -\cos \theta.$$

Mișcarea giroscopului este *hipocicloidală*. Conul rostogolitor rămâne în timpul mișcării în interiorul conului-bază (fig. 14).



*Mișcare hipocicloidală.
Precesie retrogradă.*

Fig. 14

$$2) \quad \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ și } \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă din (29):

$$\text{tg } \alpha > 0, \quad \text{tg } \beta > 0.$$

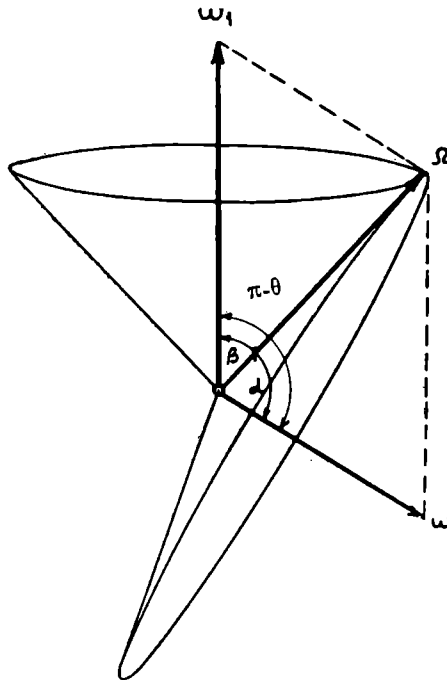
Deci:

$$\frac{\omega}{\omega_1} + \cos \theta < 0, \quad \frac{\omega_1}{\omega} + \cos \theta < 0.$$

De unde:

$$-\cos \theta > \frac{\omega_1}{\omega} > -\frac{1}{\cos \theta}.$$

Mișcarea giroscopului este *invers epicloidală*. Conul rostogolitor este *exterior* conului bază (fig. 15).



*Mișcare invers epicloidală.
Precesie retrogradă.*

Fig. 15

3) $\alpha > \frac{\pi}{2}.$

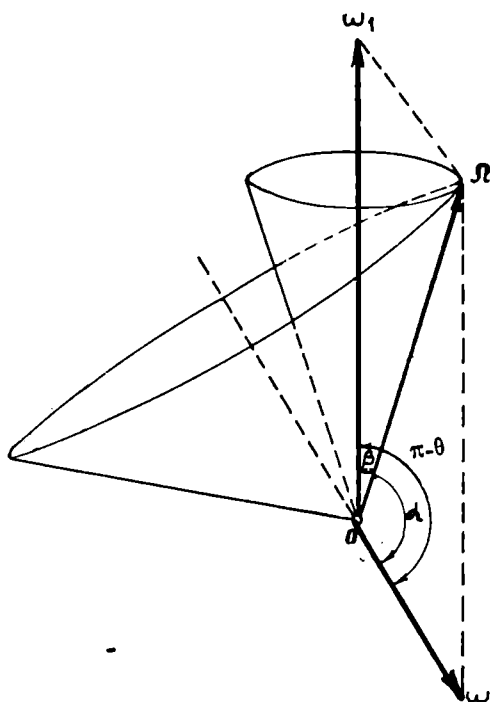
Rezultă din (28) și (29):

$$\beta < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha < 0, \quad \frac{\omega}{\omega_1} + \cos \theta > 0.$$

De unde:

$$-\frac{1}{\cos \theta} > \frac{\omega_1}{\omega} > -\infty.$$

Mișcarea giroscopului este *invers hipocicloidală* sau *pericicloidală*. Conul bază rămâne *interior* conului rostogolitor (fig. 16).



*Mișcarea invers hipocicloidală (pericicloidală).
Precesie retrogradă.*

Fig. 16

În rezumat putem exprima rezultatele obținute mai sus sub forma următorului tablou:

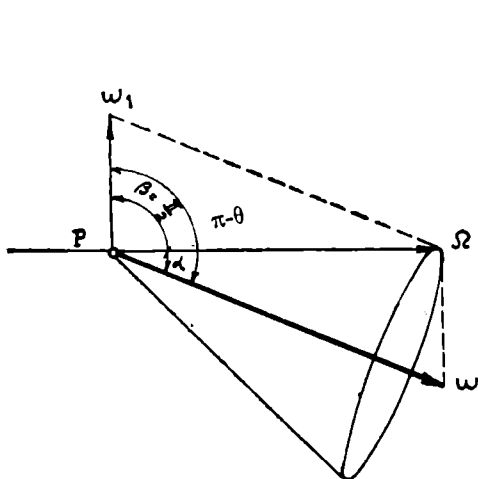
$\frac{\omega_1}{\omega}$	$\infty > \frac{\omega_1}{\omega} > 0$	$0 > \frac{\omega_1}{\omega} > -\infty$		
Sensul recesiei	progresivă	retrogradă		
Natura nișcării	epicicloidală	$0 > \frac{\omega_1}{\omega} > -\cos\theta$	$-\cos\theta > \frac{\omega_1}{\omega} > -\frac{1}{\cos\theta}$	$-\frac{1}{\cos\theta} > \frac{\omega_1}{\omega} > -\infty$
		hipocicloidală	invers epicicloidală	invers hipocicl. pericicloidală

Studiul cazului limită $\frac{\omega_1}{\omega} = -\cos\theta$ și $\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{1}{\cos\theta}$.

În primul caz, conul bază se reduce la un plan întrucât

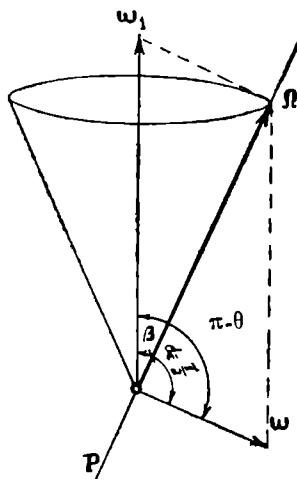
pentru $\frac{\omega_1}{\omega} = -\cos \theta$, $\operatorname{tg} \beta = \infty$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. În acest caz, vectorul $\vec{\Omega}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{\omega}_1$ (fig. 17).

În al doilea caz, conul rostogolitor se reduce la un plan, iar vectorul $\vec{\Omega}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{\omega}$ (fig. 18).



*Cazul $\omega_1 = -\omega \cos \theta$
Conul bază se reduce la planul P.*

Fig. 17



*Cazul $\omega = -\omega_1 \cos \theta$
Conul rostogolitor se reduce la planul P.*

Fig. 18

CAPITOLUL VI

Determinarea condițiilor ca axa de simetrie în jurul căreia se rotește giroscopul să fie fixă

Să considerăm un giroscop, mobil în jurul unui punct fix O și căruia i s'a dat o rotație $\vec{\omega}$ în jurul axei sale de simetrie Ox care are o direcție oarecare în spațiu.

Pentru ca această axă să rămână imobilă trebuie ca viteza sa de precesie $\vec{\omega}_1$ în jurul axei fixe Ox_1 să fie nulă.

Din formula (19) rezultă imediat condiția $\mathcal{M}_0 = 0$.

Prin urmare, un giroscop căruia i s'a dat o mișcare de rotație în jurul axei sale de simetrie, își păstrează neschimbată direcția acestei axe, în cazul când momentul tuturor forțelor exterioare în raport cu punctul fix O este nul.

Realizăm această condiție, alegând ca punct fix, punctul în care este aplicată rezultanta R a forțelor exterioare. În cazul par-

ticular, când singura forță care lucrează asupra giroscopului este greutatea lui, alegem drept punct fix O , centrul de greutate al corpului (fig. 19).

Să arătăm acum că poziția axei Oz este stabilă. Pentru aceasta presupunem că iuteala de rotație proprie ω s'a deplasat puțin depe axa de simetrie Oz a corpului și că deci acum ω are componente ω_x și ω_y pe Ox și Oy . Să presupunem că ele sunt

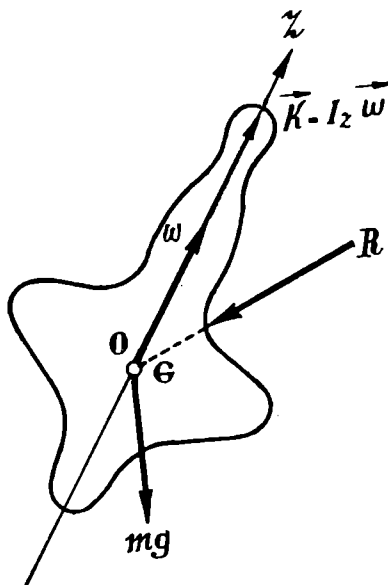


Fig. 19

mici la început și să arătăm că ele rămân tot mici în timpul mișcării, deci axa este stabilă.

Avem din ecuațiile lui Euler (13) scrise pentru corpul simetric: ($I_x = I_y$) și liber ($\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0$).

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_x - I_x) \omega_y \omega_x = 0$$

$$I_x \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_x) \omega_z \omega_x = 0$$

$$I_x \frac{d\omega_z}{dt} = 0$$

din ultima ecuație obținem $\frac{d\omega_z}{dt} = 0$ deci $\omega_z = \text{const.}$ Notând:

$$\alpha = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_x$$

primele două relații devin:

$$\frac{d\omega_x}{dt} + \alpha \omega_y = 0; \quad \frac{d\omega_y}{dt} - \alpha \omega_x = 0.$$

Eliminând pe ω_y respectiv ω_x între ele obținem:

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2} = -\alpha^2 \omega_x; \quad \frac{d^2\omega_y}{dt^2} = -\alpha^2 \omega_y.$$

Aceste două ecuații diferențiale au ca soluții

$$\omega_x = A_1 \sin \alpha t + A_2 \cos \alpha t$$

$$\omega_y = B_1 \sin \alpha t + B_2 \cos \alpha t$$

în care A_1, A_2, B_1, B_2 sunt constante de integrare depinzând de condițiile inițiale. Deoarece ω_x și ω_y sunt funcții sinusoidale de timp rezultă că valorile lor vor rămâne în jurul câtimilor A_1, A_2, B_1, B_2 adică în jurul iuțelilor mici inițiale. *Stabilitatea axei Ox este astfel demonstrată.*

Mai observăm deasemenea că ecuațiile (30) reprezintă două oscilații armonice cu perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi I_x}{(I_x - I_x) \omega_z} \quad (31)$$

timp în care axa Ox execută o rotație completă în jurul vectorului iuțelii $\vec{\omega}$.

Stabilitatea axei va fi cu atât mai mare cu cât perioada T va fi mai mică adică pentru un giroscop dat, *cu cât iuțeala de rotație proprie va fi mai mare.* În afară de aceasta giroscopul trebuie astfel construit încât I_x să fie mare în raport cu I_x (giroscop turtit). Un alt caz în care axa Ox se menține, dar de rândul acesta numai în poziție verticală este acela în care centrul de greutate G se găsește pe axa Ox .

Când G se află sub O sau chiar în O , poziție verticală a axei este stabilă; când G se află deasupra lui O , pentru a putea păstra stabilitatea axei Ox trebuie să dăm corpului o iuțeală de rotație proprie suficient de mare: (a se vedea cap. XIV sfârșeala adormită).

În toate cazurile când axa Ox își păstrează neschimbată direcția sa, vectorul \vec{K} este îndreptat în lungul lui Ox și are valoarea $I_x \omega$. Rezultatul este evident dar se poate deduce și din formulele (25) și (26) pentru $\omega_1 = 0$.

Aplicații ale proprietății axei giroscopului, de a fi stabilă în

cazul când se dă în jurul acestei axe o iuteală mare de rotație se întâlnesc foarte adesea în viața curentă.

Dăm mai jos câteva exemple:

a) *Jocul de diablo* (fig. 20). Aci se dă piesei C, cu ajutorul unui fir prins de 2 bețe A și B o rotație ω în jurul axei orizon-

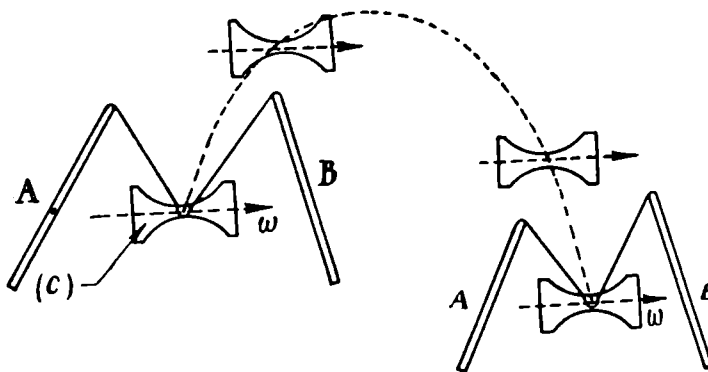


Fig. 20

tale a piesei, care este și axă principală de inerție. Se asvârle apoi piesa C în sus. În tot timpul mișcării, axa piesei rămâne orizontală și în cădere poate fi prinsă cu ușurință din nou pe firul AB.

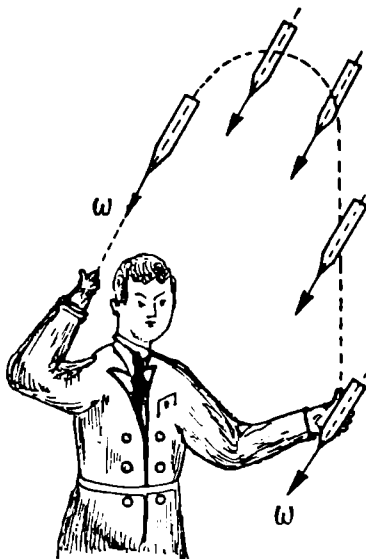


Fig. 21

b) *Aruncătorul de cuțite* (fig. 21). Înainte de a arunca cuțitul se dă o mișcare de rotație în jurul axei cuțitului. Această rotație face ca axa cuțitului să rămână paralelă cu ea însăși în tot timpul mișcării, astfel încât face posibilă prinderea de mâner în cădere.

c) *Skiorul care sare* (fig. 22). Când se aruncă de la înălțime rotește ambele brațe în acelaș sens în jurul orizontalei AB. Această axă continuând să rămână orizontală în tot timpul mișcării, skiorul va rămâne vertical în timpul căderii și deci va cădea în picioare.

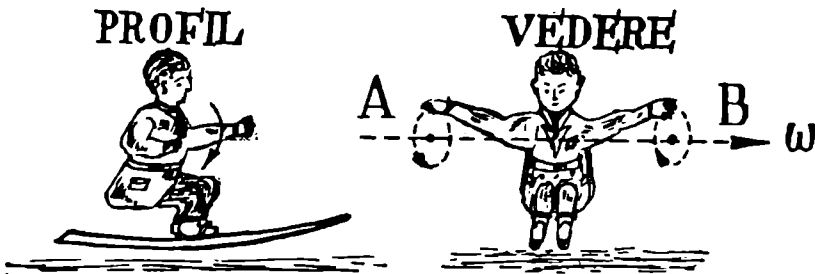


Fig. 22

Pentru cazul când punctul O nu coincide cu centrul de greutate, iar axa Oz este verticală menționăm următoarele exemple:

a) *Monedă învârtită în jurul unui diametru vertical OA* (Fig. 23).

b) *Sfârlează în rotație cu axa sa OA verticală* (fig. 24).

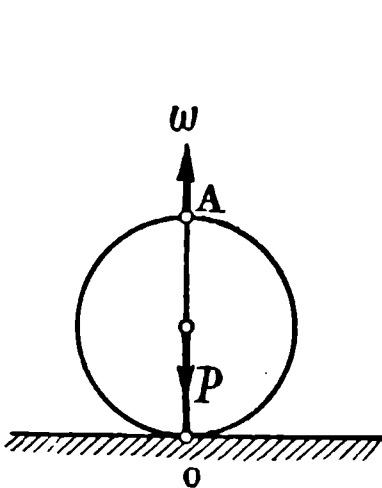


Fig. 23

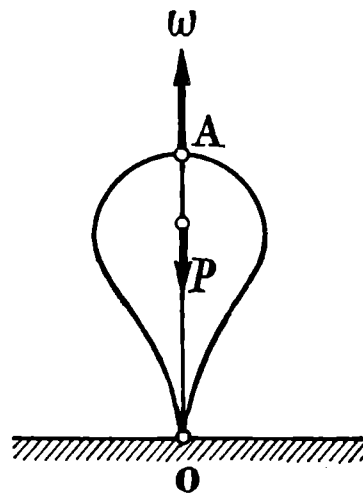


Fig. 24

Dându-se în aceste două cazuri monedei sau sfârleziei o rotație ω în jurul axei verticale OA, prin această rotație moneda sau sfârleaza își păstrează un timp poziția verticală.

c) *Giroscopul lui Gervat* (piciorul echilibrat) (fig. 25). Discul acestui giroscop are axa sa orizontală articulată pe șuruburile de calaj OA. Aceste șuruburi sunt menținute prin tubul metalic subțire OBCA îndoit în modul arătat în figură, astfel încât porțiunea

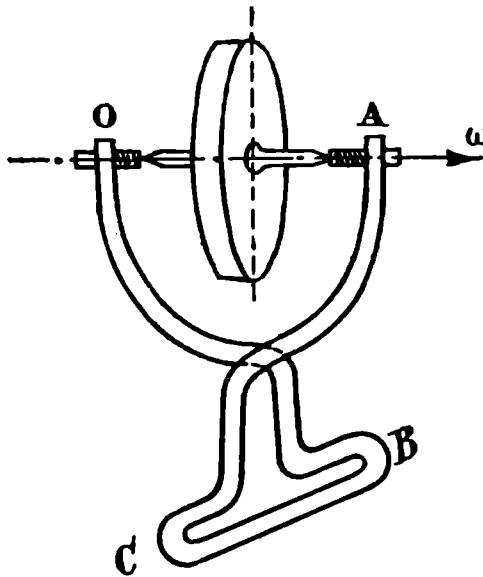


Fig. 25

BC este orizontală și formează un picior care poate fi așezat pe o masă orizontală.

Dându-i-se discului o rotație destul de mare ω în jurul lui OA, aparatul rămâne în echilibru pe piciorul său BC. \rightarrow

CAPITOLUL VII

Studiul mișcării unui giroscop suspendat în centrul de greutate, căruia i s'a dat o iuțea de rotație inițială de direcție oarecare

Să considerăm un giroscop mobil în jurul centrului său de greutate G căruia i s'a dat o iuțea de rotație inițială Ω , făcând unghiul α cu axa de simetrie a giroscopului (fig. 26).

Fie Gz_1 axa fixă și θ unghiul dintre axele Gz și Gz_1 ,
Din paralelogramul iuțelilor deducem:

$$\frac{\Omega}{\sin \theta} = \frac{\omega}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{\omega_1}{\sin \alpha} \quad (32)$$

în care ω reprezintă iuțeala de rotație proprie a giroscopului în jurul lui Gz și ω_1 iuțeala sa de precesie în jurul lui Gz_1 .

Giroscopul fiind suspendat în centrul său de greutate și ne-

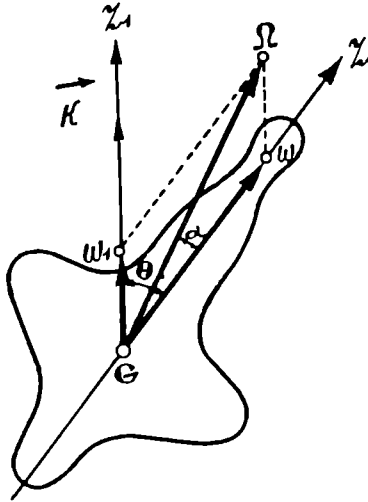


Fig. 26

supus nici unei forțe exterioare :

$$\mathfrak{M}_0 = 0.$$

Intrucât, ω_1 și $\sin \theta$ sunt diferiți de zero, din relația (19) deducem :

$$1 + \frac{I_z - I_x}{I_x} \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta = 0. \quad (33)$$

Dar, din (32):

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha}$$

Introducând această relație în (33) și simplificând obținem

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_x}{I_x} \operatorname{tg} \alpha. \quad (34)$$

Această relație ne dă posibilitatea de a determina poziția în spațiu a axei fixe Gz_1 :

În primul rând axa Gz_1 se găsește în planul determinat de poziția inițială a axei Gz și de vectorul $\vec{\Omega}$ reprezentând iuțeala inițială.

Luând în acest plan, unghiul θ dat de relația (34) cu axa Gz obținem poziția axei Gz_1 .

Iuțele de rotație proprie și de precesie rezultă ușor din formulele (32) și (34):

$$\omega = \frac{\Omega \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} = \Omega (\cos \alpha - \sin \alpha \cotg \theta) = \frac{I_x - I_z}{I_x} \Omega \cos \alpha \quad (35)$$

$$\omega_1 = \frac{\Omega \sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{\Omega \sqrt{I_x^2 \sin^2 \alpha + I_z^2 \cos^2 \alpha}}{I_x} \quad (36)$$

În concluzie, când, unui giroscop suspendat în centrul de greutate G , i se dă o rotație inițială înclinată pe axa sa de simetrie Gx , giroscopul are o mișcare de precesie în jurul unei axe fixe Gx_1 , situată în planul determinat de poziția inițială a axei Gx și de iuțea inițială $\vec{\Omega}$ și care face cu Gx un unghi θ dat de relația (34).

Iuțea de rotație proprie $\vec{\omega}$ și iuțea unghiulară de precesie $\vec{\omega}_1$ din această mișcare sunt date de formulele (35) și (36), iar mărimea vectorului \vec{K} este [din (24)]:

$$K = \Omega \sqrt{I_x^2 \sin^2 \alpha + I_z^2 \cos^2 \alpha}.$$

Pentru determinarea poziției acestui vector, din relația (26) deducem:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_x}{I_z} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta.$$

Rezultă: $\delta = \theta$.

Prin urmare, vectorul \vec{K} este îndreptat chiar după direcția axei fixe Ox_1 . Acest rezultat era de așteptat, întrucât momentul în raport cu G al forțelor exterioare fiind nul, conform formulei (6)

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}_0 = 0$$

adică vectorul \vec{K} are o poziție fixă în spațiu.

Cum acest vector este neapărat cuprins în planul xGx_1 , rezultă că vectorul \vec{K} va fi îndreptat după direcția Gx_1 , singura direcție fixă a planului xGx_1 .

Pentru $\alpha = 0$ obținem $\theta = 0$, $\omega_1 = 0$, $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$: axa Ox_1 se confundă prin urmare cu axa Ox .

Rezultă deci, în această ipoteză, că axa de simetrie Ox rămâne fixă în spațiu. Suntem în cazul studiat în capitolul precedent,

al unui giroscop asupra căruia nu lucrează nici un moment și căruia i s'a imprimat o iuteală inițială ω în jurul axei sale de simetrie.

Ca aplicație a acestui studiu, să considerăm un cilindru circular drept de masă M , de rază r și înălțime $h=6r$ (fig. 27) suspendat în centrul său de greutate O , și căruia i se dă o miș-

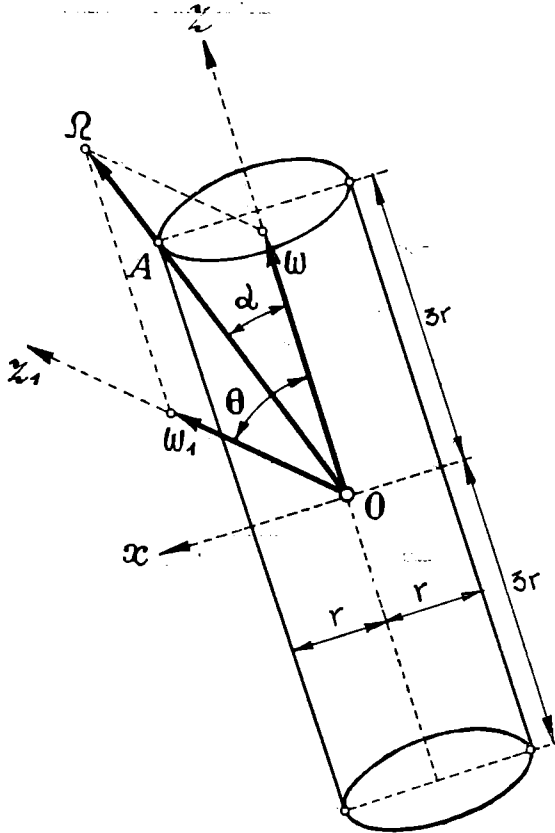


Fig. 27

care de rotație în jurul dreptei OA cu iuteala unghiulară $\Omega=20$ $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Unghiul dintre OA și axa Oz a cilindrului este α .

$$\left(\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}; \alpha = 18^\circ 26' \right).$$

Vom determina mai întâi axa fixă de rotație Oz_1 . Această axă se găsește în planul zOA și face cu Oz unghiul θ dat de relația (34):

$$\text{tg } \theta = \frac{I_x}{I_z} \cdot \text{tg } \alpha.$$

Dar la un cilindru, momentele de inerție I_x și I_z sunt:

$$I_x = \frac{3Mr^2 + Mh^2}{12} = \frac{39}{12} Mr^2, \quad I_z = \frac{Mr^2}{2}$$

rezultă:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{3} = 2,1666, \theta \cong 65^{\circ} 13'$$

Din relațiile (35) și (36) găsim pe ω și ω_1 :

$$\omega = \Omega \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} = 20 \frac{\sin 46^{\circ} 47'}{\sin 65^{\circ} 13'} = 16,05 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\omega_1 = \Omega \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = 20 \frac{\sin 18^{\circ} 26'}{\sin 65^{\circ} 13'} = 6,96 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Perioadele în mișcare de rotație proprie și în cea de precesie sunt respectiv:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,391 \text{ sec}, T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,903 \text{ sec}.$$

Realizarea practică a fixării centrului de greutate al cilindrului se face cu ajutorul suspensiei Cardan dată în fig. 28.

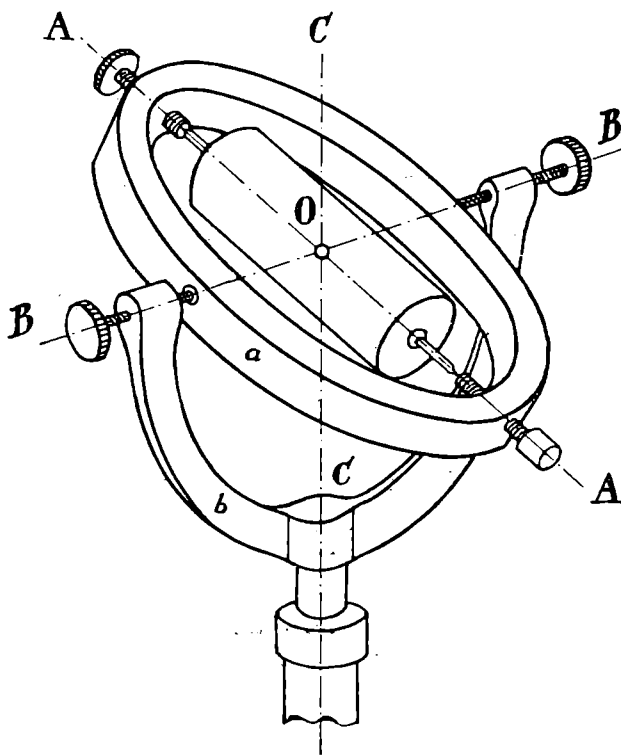


Fig. 28

Cilindrul are axa sa A—A articulată într'un inel AaA. Acest inel este articulată la rândul său în inelul BbB prin axa orizontală BB care se poate roti în jurul axei verticale CC. În acest mod, prin rotații convenabile în jurul axei verticale CC și ale axei ori-

zontale BB, axa AA a cilindrului poate fi adusă în orice poziție. Afară de aceasta cilindrul se poate roti în jurul lui AA (rotație proprie). Astfel cilindrul are cele 3 grade de libertate, iar axele AA, BB, CC trecând prin centrul O fixează poziția acestui centru.

Construcția suspensiei Cardan cere o mare atenție, condițiile unei bune execuții fiind:

1) Centrarea perfectă a axelor de rotație AA, BB, CC în centrul de greutate O al corpului. Necentrarea perfectă aduce după sine producerea unui moment al greutateii corpului și ca urmare o mișcare de precesie în jurul verticalei. Pentru acest motiv, de multe ori suspensia Cardan este făcută cu ajutorul unor șuruburi de calaj reglabile.

2) Obținerea unei frecări minime în articulație, pentru ca efectul cuplelor de frecare să fie neglijabil.

3) Greutățile inelelor și tuturor accesoriilor să fie neglijabile în raport cu corpul care se rotește în jurul axei sale AA.

CAPITOLUL VIII

Determinarea condițiilor ca un giroscop sub acțiunea momentului greutateii sale să aibă o mișcare de precesie regulată

Să considerăm un giroscop de greutate P, având punctul fix O situat pe axa de simetrie Oz, axă în jurul căreia i s'a dat giroscopului o mișcare de rotație proprie cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ (fig. 29).

Fie γ unghiul axei Oz cu verticala și l lungimea distanței OG (G centrul de greutate al giroscopului). Momentul în O al greutateii este *vectorul orizontal* $\vec{\mathcal{M}}_0$ dat de relația:

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{OG} \wedge \vec{P}$$

de mărime $\mathcal{M}_0 = Pl \sin \gamma$.

Pentru ca mișcarea acestui giroscop să fie o *mișcare de precesie regulată*, conform teoremei studiate la cap. V sunt necesare și suficiente următoarele condiții:

1) Mărimea momentului \mathcal{M}_0 să fie constantă deci $\gamma = \text{constant}$.

2) Direcția vectorului $\vec{\mathcal{M}}_0$ să fie în tot timpul mișcării, perpendiculară pe planul xOz_1 și deci perpendiculară și pe axa fixă

Ox_1 . Intrucât \vec{M}_0 în această mișcare, descrie un plan orizontal care trece prin O , rezultă că axa Ox_1 este verticală și deci paralelă cu \vec{P} , iar $\gamma = \sphericalangle(Ox_1, Oz) = \theta = \text{const.}$

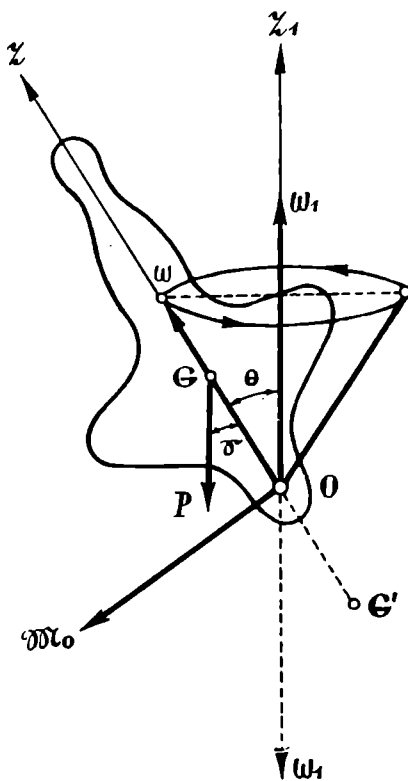


Fig. 29

3) La momentul inițial, între elementele geometrice θ, l, I_x, I_x greutatea \vec{P} , iuteala de rotație proprie $\vec{\omega}$ și iuteala de precesie $\vec{\omega}_1$ trebuie să existe relația de legătură (19):

$$Pl = I_x \omega \omega_1 + (I_x - I_x) \omega^2 \cos \theta \quad (37)$$

Cu alte cuvinte, pentru ca un giroscop, gata construit, de greutate dată având un punct fix O determinat, să aibă o mișcare de precesie regulată în jurul verticalei, trebuie, ca, pentru o înclinare inițială θ față de verticală a axei de simetrie Ox , să i se dea o iuteală inițială de rotație proprie $\vec{\omega}$ și o iuteală inițială de precesie $\vec{\omega}_1$ astfel încât să satisfacă relația (37).

Pentru cazul când ω este mare în raport cu ω_1 , formula (37) devine

$$Pl = I_x \omega \omega_1$$

de unde:

$$\omega_1 = \frac{Pl}{I_x \omega} \quad (38)$$

În cazul când condițiile inițiale mai sus menționate nu sunt îndeplinite, mișcarea giroscopului nu mai este o precesie regulată. În adevăr în acest caz, unghiul de nutație θ nu mai rămâne constant și prin urmare la mișcarea de rotație proprie și la cea de precesie se mai adaugă și una de nutație.

Cu studiul acestei mișcări de nutație ne vom ocupa într'un capitol următor.

În privința sensurilor vectorilor $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_1$ și $\vec{\mathcal{M}}_0$, trebuie să avem în vedere relația (23).

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{OG} \wedge \vec{P} = I_x \left(1 + \frac{I_x - I_x}{I_x} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right) \cdot (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}). \quad (39)$$

Pentru ω mare în raport cu ω_1 :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = I_x (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}). \quad (40)$$

Adică, pentru o rotație proprie $\vec{\omega}$ dată, sensul precesiei $\vec{\omega}_1$ este astfel încât momentul vectorului $\vec{\omega}_1$ în raport cu extremitatea vectorului $\vec{\omega}$ să aibă acelaș sens cu momentul greutății \vec{P} în raport cu punctul fix O .

Rezultă prin urmare, că dacă schimbăm poziția centrului de greutate din G depe partea pozitivă a axei Ox în G' pe partea negativă a axei, se modifică sensul momentului lui \vec{P} în raport cu O și deci și sensul precesiei.

Mărimea și poziția vectorului \vec{K} în mișcarea de precesie regulată a giroscopului greu sunt date de relațiile (24) și (26) din teoria generală a giroscopului.

Generalizare. În cazul când rezultanta forțelor la care este supus giroscopul este o forță unică \vec{R} de mărime, direcție și sens constante, aplicată într'un punct A ($OA = l$) al giroscopului, avem:

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{OA} \wedge \vec{R} \quad \text{mărimea lui } \mathcal{M}_0 \text{ fiind } \mathcal{M}_0 = R \cdot l \sin \gamma = \text{const.}$$

Condițiile ca mișcarea giroscopului să fie o mișcare de precesie regulată sunt identice cu cele din cazul precedent cu o singură diferență în cece privește direcția axei fixe Ox_1 , care de

rândul acesta nu mai este verticală ci paralelă cu direcția forței \vec{R} (fig. 30).

Dăm mai jos câteva exemple arătând acțiunea momentului greutății proprii asupra giroscopului. În toate aceste cazuri, i se

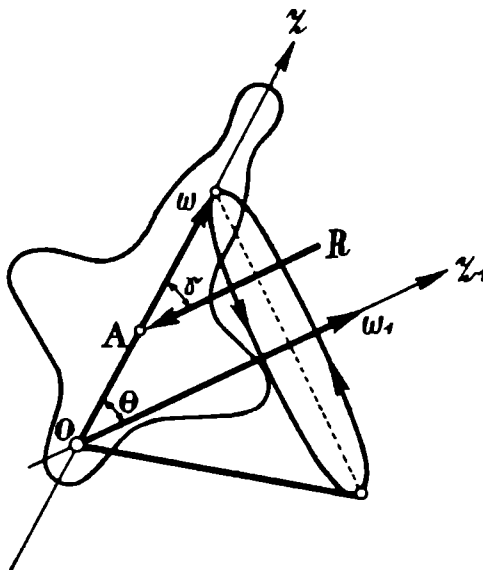


Fig. 30

dă giroscopului (C) o rotație proprie de iuțeală $\vec{\omega}$ în jurul axei sale Oz . Din cauza momentului greutății \vec{P} , pentru o iuțeală de rotație proprie destul de mare, axa Oz are o mișcare de precesie în jurul axei verticale Oz_1 cu iuțeala unghiulară $\vec{\omega}_1$ dată de relația:

$$\omega_1 = \frac{Pl}{I_x \omega}$$

Sensul acestor mișcări de precesie este dat în figură și corespunde sensului momentului greutății \vec{P} în raport cu O . (Relația (40)). Pentru o iuțeală suficient de mare ω , unghiul între axele Oz și Oz_1 rămâne aproape constant.

Exemple. a) Figurile (31) și (32) reprezintă 2 sfârleze astfel construite încât la una centrul de greutate se află pe partea pozitivă a axei Oz (fig. 31) și la cealaltă pe partea negativă. Dacă dăm celor două sfârleze o mișcare de rotație de același sens în jurul axei Oz , se observă că mișcările de precesie au sensuri contrarii una față de cealaltă.

de unde:

$$\omega_1 = \frac{Pl}{I_x \omega} \quad (38)$$

În cazul când condițiile inițiale mai sus menționate nu sunt îndeplinite, mișcarea giroscopului nu mai este o precesie regulată. În adevăr în acest caz, unghiul de nutație θ nu mai rămâne constant și prin urmare la mișcarea de rotație proprie și la cea de precesie se mai adaugă și una de nutație.

Cu studiul acestei mișcări de nutație ne vom ocupa într'un capitol următor.

În privința sensurilor vectorilor $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_1$ și $\vec{\mathcal{M}}_0$, trebuie să avem în vedere relația (23).

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{OG} \wedge \vec{P} = I_x \left(1 + \frac{I_x - I_x}{I_x} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right) \cdot (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}). \quad (39)$$

Pentru ω mare în raport cu ω_1 :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = I_x (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}). \quad (40)$$

Adică, pentru o rotație proprie $\vec{\omega}$ dată, sensul precesiei $\vec{\omega}_1$ este astfel încât momentul vectorului $\vec{\omega}_1$ în raport cu extremitatea vectorului $\vec{\omega}$ să aibă acelaș sens cu momentul greutății \vec{P} în raport cu punctul fix O .

Rezultă prin urmare, că dacă schimbăm poziția centrului de greutate din G depe partea pozitivă a axei Ox în G' pe partea negativă a axei, se modifică sensul momentului lui \vec{P} în raport cu O și deci și sensul precesiei.

Mărimea și poziția vectorului \vec{K} în mișcarea de precesie regulată a giroscopului greu sunt date de relațiile (24) și (26) din teoria generală a giroscopului.

Generalizare. În cazul când rezultanta forțelor la care este supus giroscopul este o forță unică \vec{R} de mărime, direcție și sens constante, aplicată într'un punct A ($OA = l$) al giroscopului, avem:

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{OA} \wedge \vec{R} \quad \text{mărimea lui } \mathcal{M}_0 \text{ fiind } \mathcal{M}_0 = R \cdot l \sin \gamma = \text{const.}$$

Condițiile ca mișcarea giroscopului să fie o mișcare de precesie regulată sunt identice cu cele din cazul precedent cu o singură diferență în ceea ce privește direcția axei fixe Ox_1 , care de

rândul acesta nu mai este verticală ci paralelă cu direcția forței \vec{R} (fig. 30).

Dăm mai jos câteva exemple arătând acțiunea momentului greutății proprii asupra giroscopului. În toate aceste cazuri, i se

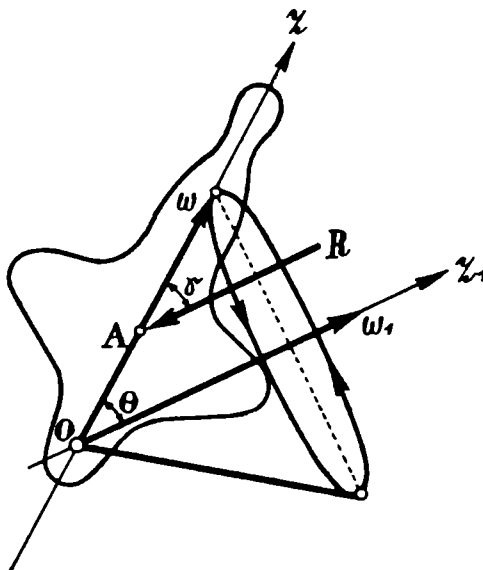


Fig. 30

dă giroscopului (C) o rotație proprie de iuțeală $\vec{\omega}$ în jurul axei sale Oz . Din cauza momentului greutății \vec{P} , pentru o iuțeală de rotație proprie destul de mare, axa Oz are o mișcare de precesie în jurul axei verticale Oz_1 cu iuțeala unghiulară $\vec{\omega}_1$ dată de relația:

$$\omega_1 = \frac{Pl}{I_z \omega}$$

Sensul acestor mișcări de precesie este dat în figură și corespunde sensului momentului greutății \vec{P} în raport cu O . (Relația (40)). Pentru o iuțeală suficient de mare $\vec{\omega}$, unghiul între axele Oz și Oz_1 rămâne aproape constant.

Exemple. a) Figurile (31) și (32) reprezintă 2 sfârleze astfel construite încât la una centrul de greutate se află pe partea pozitivă a axei Oz (fig. 31) și la cealaltă pe partea negativă. Dacă dăm celor două sfârleze o mișcare de rotație de același sens în jurul axei Oz , se observă că mișcările de precesie au sensuri contrarii una față de cealaltă.

b) Figura 33 reprezintă o roată situată pe o axă pe care e înfășurat un fir. Roata se coboară căpătând o rotație proprie $\vec{\omega}$ prin desfășurarea firului depe axa roții. Sensurile sunt arătate în figură.

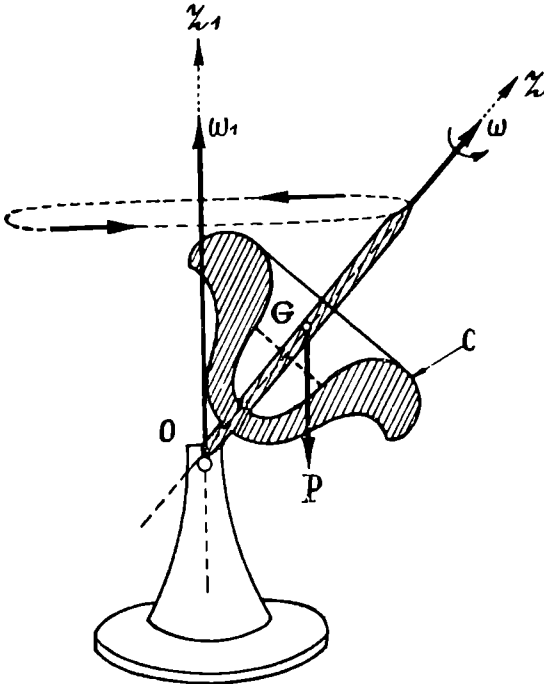


Fig. 31

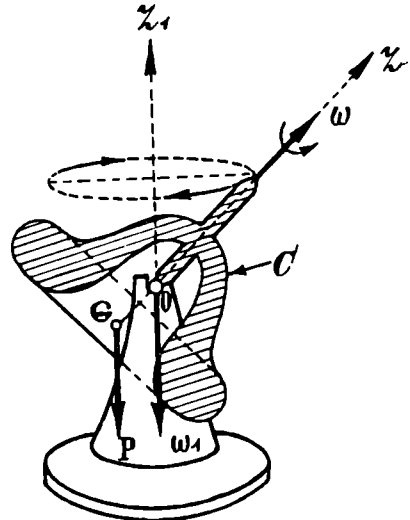


Fig. 32

În adevăr, momentul lui \vec{P} față de punctul O este negativ, este deci reprezentat printr'un vector $\vec{\mathcal{M}}_0$ perpendicular pe planul

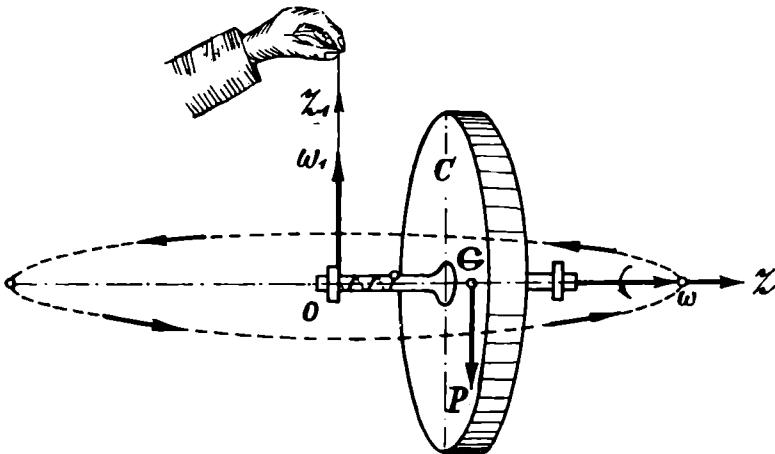


Fig. 33

figurii și cu direcția spre fundul hârtiei. Viteza extremității vectorului $\vec{\omega}$ este în sensul lui $\vec{\mathcal{M}}_0$, deci axul se rotește în plan

perpendicular pe Ox_1 în sens pozitiv. Din cauza precesiei, roata se coboară rotindu-se cu axa orizontală.

c) *Aparatul lui Fessel și Plücker. (balanța giroscopică)* (fig. 34). La acest aparat se poate muta centrul de greutate depe por-

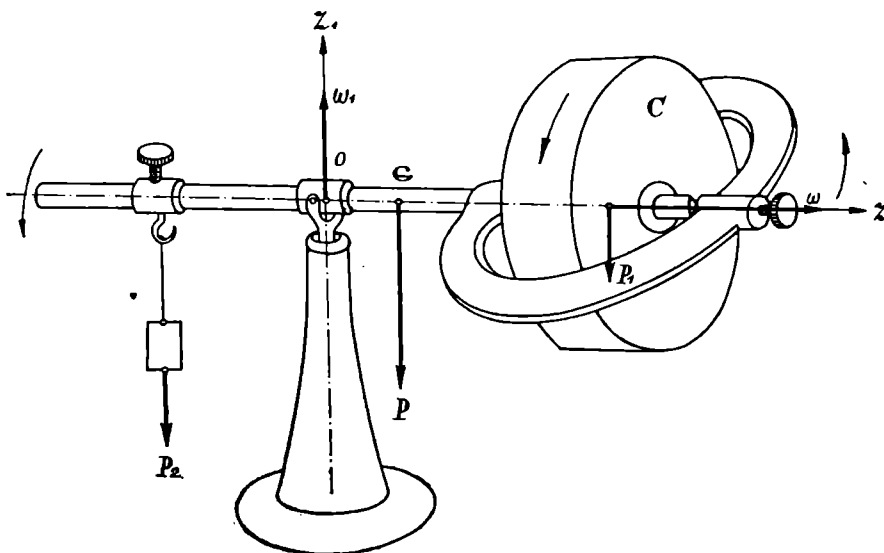


Fig. 34

țiunea pozitivă a axei Ox pe cea negativă. Prin aceasta se modifică sensul momentului lui \vec{P} și deci și sensul precesiei (forța P este rezultanta greutateților P_1 și P_2).

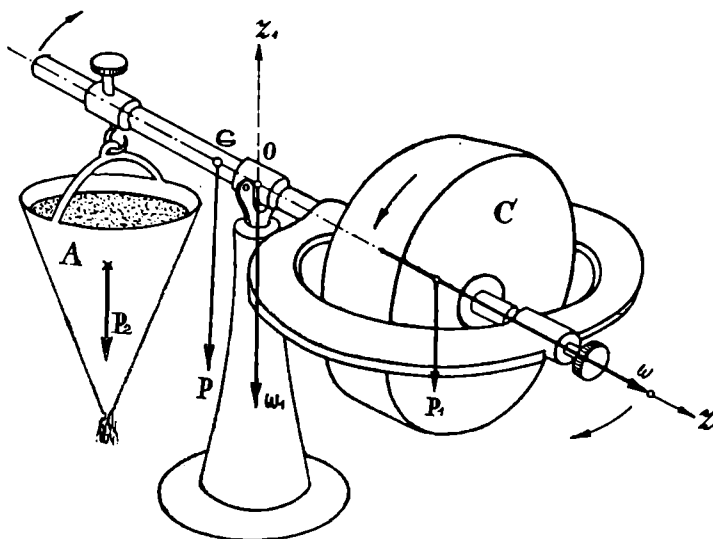


Fig. 35

d) În figura 35, la începutul experienței vasul A este umplut cu nisip și centrul de greutate se află pe partea negativă a axei

Ox, deci momentul \vec{M}_0 față de punctul de reazăm O este pozitiv (perpendicular pe planul hârtiei spre fața figurii). Viteza extremității lui $\vec{\omega}$ este paralelă și de acelaș sens cu \vec{M}_0 , deci vectorul $\vec{\omega}$ se învâртеște într'un plan orizontal în sens negativ. Vectorul $\vec{\omega}_1$ e dirijat în jos. Prin scurgerea nisipului, centrul de greutate se mută pe partea pozitivă a axei Ox, iar sensul precesiei se schimbă devenind pozitiv.

Sfârleaxa (fig. 36) cu axa Ox înclinată pe verticală. Din această înclinare, rezultă că greutatea P, dă un moment în raport cu O, ceea ce produce o mișcare de precesie în jurul verticalei.

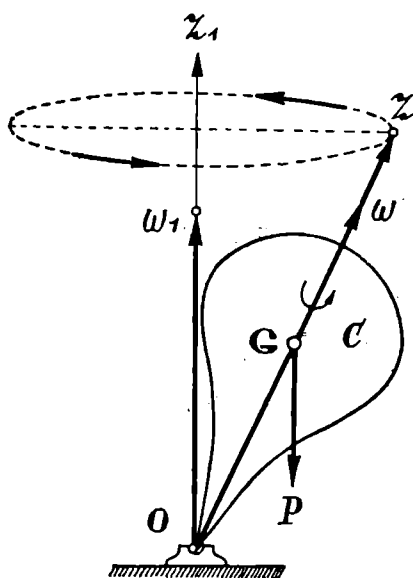


Fig. 36

d) *Experiența lui Charron* (fig. 37). În această experiență giroscopul are axa sa Ox formată dintr'un magnet NS. Cât timp giroscopul este imobil, pentru a putea atrage polul Nord al axei giroscopului, trebuie apropiat de el polul Sud al unui alt magnet.

Să imprimăm giroscopului o iuteală mare $\vec{\omega}$ în jurul axei sale NS. Apropiind de polul Nord al axei giroscopului, polul Nord al unui magnet, vedem că în loc ca vârful N al axei giroscopului să se depărteze de magnet, el se apropie astfel încât avem impresia că cei doi poli cu toate că sunt de acelaș sens se atrag.

În realitate, între cei doi poli, va exista o forță de respin-

gere \vec{F} . Această forță, împreună cu greutatea \vec{P} dau o rezultantă \vec{R} . Conform celor determinate la pag. 42 (fig. 30), giroscopul se va roti, în jurul unei axe SA care trece prin S și este paralelă cu \vec{R} ,

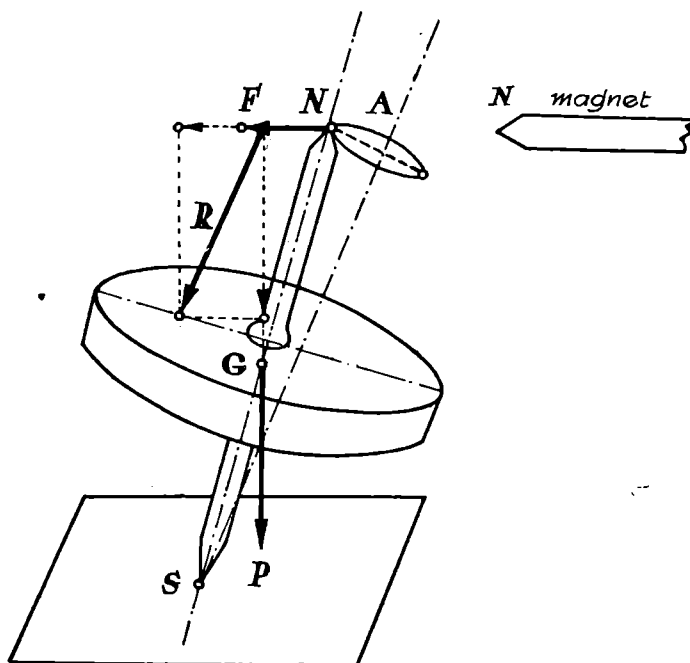


Fig. 37

deci se va apropia de magnet. Se observă ușor faptul că cu cât apropiem magnetul de giroscop, cu atât forța \vec{F} crește și deci \vec{R} și axa SA se vor înclina mai mult, îndepărtându-se de verticală, și apropiind din ce în ce mai mult vârful N al giroscopului de capătul N al magnetului.

Analog, se poate observa și explica faptul că în cazul când apropiem capătul Sud al magnetului de vârful Nord al giroscopului, giroscopul se depărtează, lăsând impresia paradoxală că poliul de sens contrar se resping.

CAPITOLUL IX

Analogie între mișcarea de precesie regulată a giroscopului și mișcarea uniformă pe cerc a punctului material

\vec{v} *Mișcarea circulară*
 \vec{v} = viteza constantă a punctului material.

$\vec{\Omega}$ *Mișcarea giroscopică*
 $\vec{\Omega}$ = viteza unghiulară constantă a giroscopului.

\vec{F} = forța constantă necesară mișcării.

\vec{F} este perpendicular pe \vec{v} în tot timpul mișcării.

Lucrul mecanic al forței \vec{F} este nul.

Vectorul cantității de mișcare \vec{mv} , constant ca mărime în timpul mișcării, se rotește în jurul punctului fix cu iuțeală constantă.

Când \vec{F} nu mai lucrează, \vec{mv} își păstrează o direcție fixă, punctul se mișcă rectiliniu pe direcția lui \vec{mv} .

\vec{M}_0 = momentul constant necesar mișcării.

\vec{M}_0 este perpendicular pe $\vec{\Omega}$ în tot timpul mișcării.

Lucrul mecanic al cuplului \vec{M}_0 este nul.

Vectorul momentelor cantităților de mișcare, \vec{K} , constant ca mărime în timpul mișcării, se rotește în jurul unei axe fixe cu iuțeală constantă.

Când \vec{M}_0 nu mai lucrează, \vec{K} își păstrează o direcție fixă, giroscopul are o precesie regulată, naturală în jurul lui \vec{K} .

CAPITOLUL X

Fenomenul giroscopic

Să presupunem un giroscop greu, mobil în jurul punctului

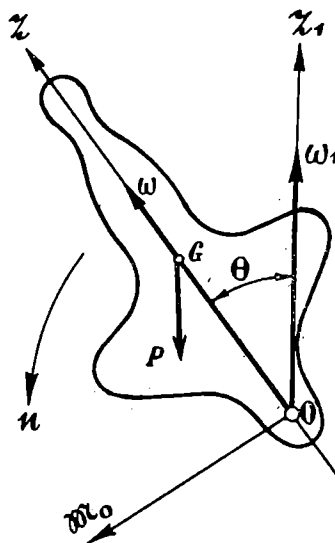


Fig. 38

fix O, lăsat liber sub acțiunea greutății sale, fără a i se da nici o mișcare de rotație (fig. 38).

Fie θ unghiul inițial făcut de axa Ox a giroscopului cu verticala Ox_1 .

Greutatea giroscopului va produce în O momentul \vec{M}_0 perpendicular pe planul $x_1 Ox$ care va mișca axa Ox mărind unghiul θ în sensul săgeții n din figură și producând căderea corpului.

În cazul însă, când dăm corpului o iuțeală de rotație ω în jurul axei Ox , destul de mare, observăm că efectul momentului este cu totul diferit și anume: *Unghiul θ rămâne constant, iar Ox ia o mișcare de precesie ω_1 cu direcția perpendiculară pe planul xOx_1 și pe greutatea P .*

Acest fenomen curios poartă numele de *fenomen giroscopic* și explică o întreagă serie de aplicații pe care le vom prezenta mai departe.

Acelaș fenomen giroscopic se observă și în cazul generalizării studiate în Cap. VIII în care sub acțiunea forței \vec{R} , axa Ox în loc de a se roti în planul xOx_1 căutând să se depărteze de Ox_1 și să mărească unghiul θ , se deplasează cu iuțeala de precesie ω_1 perpendiculară pe planul xOx_1 și pe direcția forței, unghiul θ rămânând constant.

CAPITOLUL XI

Cuplul giroscopic, reacțiune giroscopică, tendința de paralelism a axelor de rotație

Fie un corp (C) căruia îi dăm o rotație de iuțeală unghiulară ω în jurul axei sale de simetrie Ox . Se dă deasemenea iuțeala de rotație ω_1 în jurul axei fixe Ox_1 și unghiul θ între Ox și Ox_1 (fig. 39). Pentru a putea întretine această mișcare am văzut, în Cap. V, că este necesar un cuplu exterior de moment:

$$\vec{M}_0 = I_x \left(1 + \frac{I_z - I_x}{I_x} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right) (\omega_1 \wedge \omega).$$

sau aproximativ:

$$\vec{M}_0 = I_x (\omega_1 \wedge \omega).$$

Acest cuplu este perpendicular pe planul xOx_1 și păstrează constant unghiul θ dintre axa Ox și Ox_1 . Acestui cuplu de moment \vec{M}_0 i se va opune din partea corpului un cuplu de inerție egal și de sens contrar \vec{M}_g astfel încât:

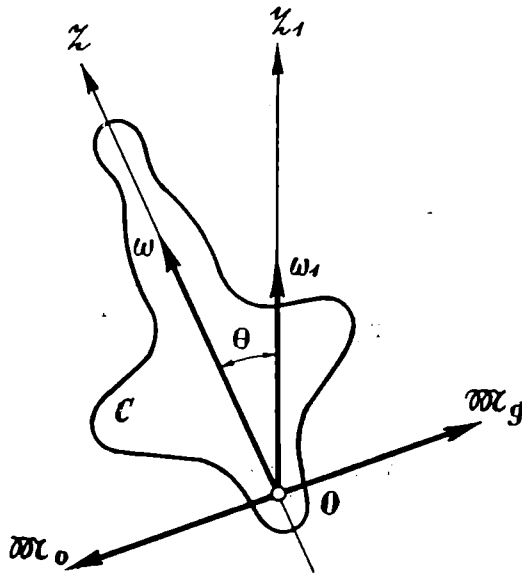


Fig. 39

$$\vec{M}_g = -\vec{M}_0 = I_x \left(1 + \frac{I_x - I_x}{I_x} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right) (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}_1) \quad (41)$$

sau aproximativ:

$$\vec{M}_g = I_x (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}_1) \quad (42)$$

\vec{M}_g se numește *cuplu giroscopic*.

În legătură cu acest cuplu giroscopic vom studia două proprietăți remarcabile ale giroscopului:

1) Să considerăm un giroscop suspendat în centrul său de greutate, căruia după ce îi imprimăm o iuțeală de rotație proprie $\vec{\omega}$ în jurul axei sale de simetrie Ox , îl rotim în jurul unei axe Ox_1 ($\sphericalangle Ox, Ox_1 = \theta$) cu iuțeala $\vec{\omega}_1$ (fig. 40).

Giroscopul fiind centrat $\vec{M}_0 = 0$; totuși datorită mișcării sale impuse din exterior ia naștere cuplul giroscopic \vec{M}_g care va acționa singur.

Din această cauză unghiul θ nu va mai putea rămâne constant. Având în vedere sensul cuplului giroscopic rezultă că unghiul

θ se va micșora (săgeata n din figură). Prin urmare sub efectul cuplului giroscopic, axa Ox este adusă către axa Ox_1 pe drumul cel mai scurt, astfel încât sensurile pozitive ale vectorilor $\vec{\omega}$ și $\vec{\omega}_1$ să coincidă.

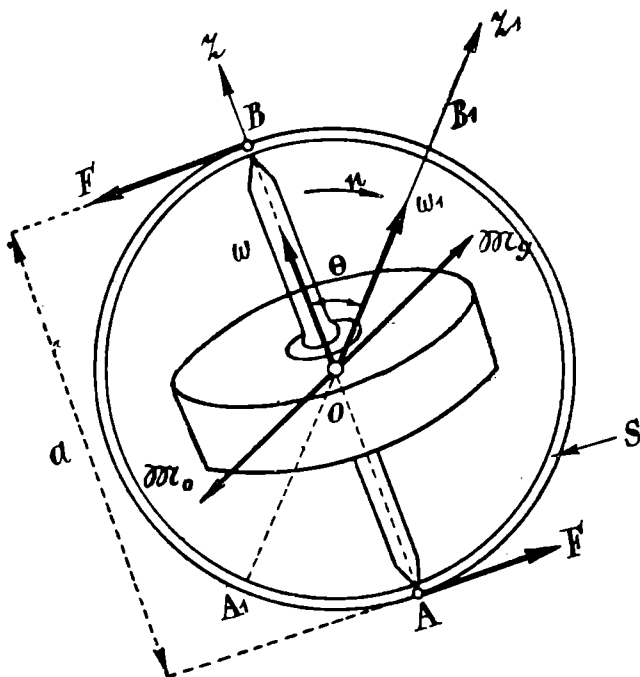


Fig. 40

Această proprietate a giroscopului este cunoscută sub denumirea de *tendința de paralelism a axelor de rotație ale giroscopului*.

2) Să considerăm acum un giroscop suspendat în centrul său de greutate, căruia, după ce îi imprimăm o iuțeală de rotație proprie $\vec{\omega}$ în jurul axei sale de simetrie, îl rotim în jurul unei axe Ox_1 cu iuțeala $\vec{\omega}_1$, menținând în același timp unghiul θ dintre axe constant.

Aceasta nu se poate realiza decât anihilând efectul cuplului giroscopic \vec{M}_g , care caută să apropie axele Ox și Ox_1 , prin reintroducerea cuplului exterior \vec{M}_0 egal și direct opus cu \vec{M}_g .

În adevăr, pentru efectuarea mișcării menționate mai sus, trebuie să acționăm asupra axei AB a giroscopului printr'o armătură S (fig. 40).

Prin aceasta se introduc în A și B forțele \vec{F} care produc cuplul $\vec{\mathcal{M}}_0$:

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{AB} \wedge \vec{F} \cong I_x (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}). \quad (43)$$

Forțele \vec{F} sunt reacțiuni în A și B ale armăturii S asupra axei AB și se numesc *reacțiuni giroscopice*.

Scalar avem:

$$F \cong \frac{I_x \omega \omega_1 \sin \theta}{a} \quad (44)$$

în care a este brațul de pârghie AB.

Forțele egale și direct opuse cu \vec{F} reprezintă presiunile în A și B ale cuplului giroscopic $\vec{\mathcal{M}}_g$ asupra axei AB și se numesc *presiuni giroscopice*.

Aceste presiuni giroscopice sunt cele care caută să aducă axa Ox peste axa Ox_1 .

CAPITOLUL XII

Acțiunea unui cuplu exterior asupra giroscopului centrat

Să considerăm (fig. 41) un giroscop A suspendat cardanic în centrul său de greutate căruia i s'a dat o iuteală de rotație proprie în jurul axei sale de simetrie $a-a$. Notăm cu $b-b$ axa de rotație a inelului interior B și cu $c-c$ axa de rotație a armăturii exterioare C.

Vom studia efectul unui cuplu exterior asupra giroscopului în următoarele cazuri:

1) *Vectorul cuplului este îndreptat după axa $a-a$ a volanțului giroscopului.*

Efectul acestui cuplu este de a mări sau micșora iuteala de rotație proprie, direcția axei $a-a$ a giroscopului rămânând fixă.

2) *Vectorul cuplului este îndreptat după axa $b-b$ a inelului interior B.* Suntem în cazul teoriei giroscopului studiate la Cap. V; axa $a-a$ a giroscopului va avea o mișcare de precesie în jurul axei $c-c$.

3) *Vectorul cuplului este îndreptat după axa $c-c$ a armăturii exterioare C.* Acest cuplu se poate descompune într'un cuplu îndreptat după axa $a-a$, al cărui efect este studiat la punctul (1),

și un cuplu îndreptat după o perpendiculară pe planul determinat de axele $a-a$ și $b-b$.

Efectul acestui din urmă cuplu este o mișcare de precesie a axei $a-a$ a giroscopului în jurul axei $b-b$.

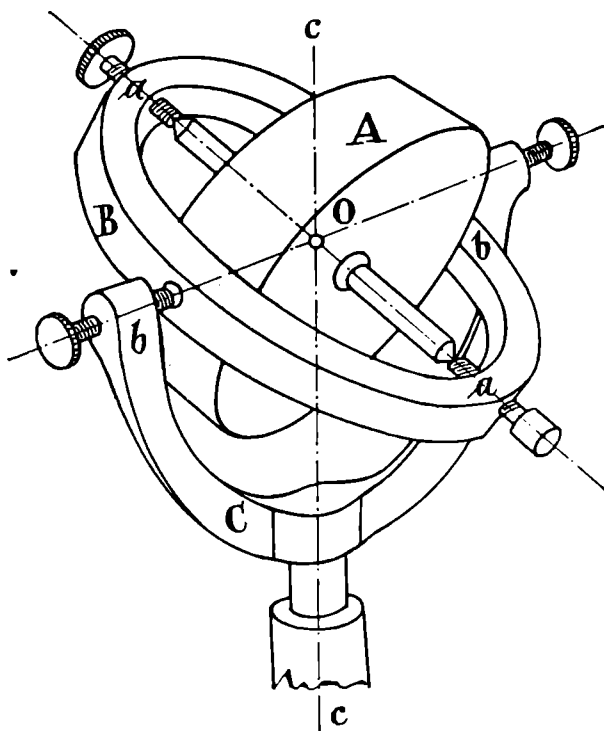


Fig. 41

În cazul când vectorul cuplului îndreptat după axa $c-c$ este constant, mișcarea de precesie a axei $a-a$ a giroscopului în jurul lui $b-b$ caută să aducă pe drumul cel mai scurt axa $a-a$ peste axa $c-c$ astfel încât sensurile pozitive ale vectorului ω și vectorului cuplului să coincidă.

Aceste influențe ale cuplelor exterioare asupra mișcării giroscopului sunt întrebuințate în aplicațiile tehnice ale giroscopului, în special în construcția pilotului-automat.

CAPITOLUL XIII

Calculul forțelor de inerție în mișcarea de precesie regulată a giroscopului

În studiul mișcării unui giroscop în jurul unui punct fix O , în cazul unei mișcări de precesie regulată, am descompus mișcarea generală în două mișcări:

a) O mișcare de rotație proprie a giroscopului în jurul axei sale de simetrie Ox cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}$ constituind mișcarea relativă a giroscopului.

b) O mișcare a axei Ox în jurul axei Ox_1 (mișcarea de precesie) cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}_1$ constituind mișcarea conductoare a giroscopului.

În aceste mișcări, unghiul θ dintre axele Ox și Ox_1 a fost presupus constant.

Să considerăm un punct M al giroscopului de masă m și de coordonate x, y, z în raport cu sistemul de referință $Ox'y'z$ în care Ox' este linia nodurilor, Oy' axa transversală și Oz axa de simetrie.

Asupra punctului M al giroscopului vor lucra trei feluri de forțe:

1) Forțele centrifuge datorite rotației proprii a giroscopului în jurul axei Ox .

2) Forțele centrifuge datorite rotației axei Ox în jurul axei Ox_1 .

3) Forțele de inerție *Coriolis* datorite faptului că mișcarea conductoare este o rotație.

1) *Forțele centrifuge datorite rotației proprii.*

Corpul fiind simetric în raport cu axa Ox , unei forțe centri-

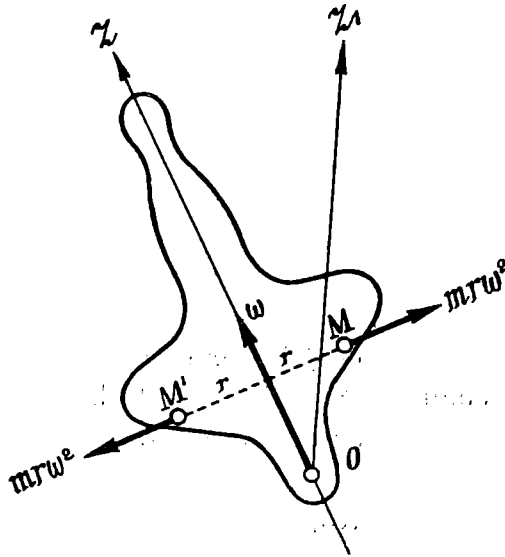


Fig. 42

fuge elementare $mr\omega^2$ (r fiind distanța de la M la Ox) care lucrează asupra lui M îi va corespunde o forță egală și de sens contrar care lucrează asupra simetricului M' al lui M în raport cu axa Ox

(fig. 42). Rezultanta tuturor acestor forțe va fi nulă; deasemenea și momentul forțelor centrifuge, față de punctul fix va fi nul $\mathfrak{M}_r=0$.

2) *Forțele centrifuge din mișcarea de precesie.*

Forța centrifugă elementară în M va fi perpendiculară pe axa de precesie Ox_1 și va avea ca valoare

$$\vec{F}_M = m \cdot \overrightarrow{M'M} \cdot \omega_1^2 = m \omega_1^2 r$$

în care $\overrightarrow{MM'}$ reprezintă distanța punctului M la Ox_1 . Proiectând conturul MBAO pe direcția Ox_1 obținem: (fig. 43)

$$OM' = y \sin \theta + z \cos \theta$$

iar, prin proiecții ale lui OM' pe axele de coordonate, obținem coordonatele punctului M'

$$x_{M'} = 0$$

$$y_{M'} = (y \sin \theta + z \cos \theta) \sin \theta$$

$$z_{M'} = (y \sin \theta + z \cos \theta) \cos \theta.$$

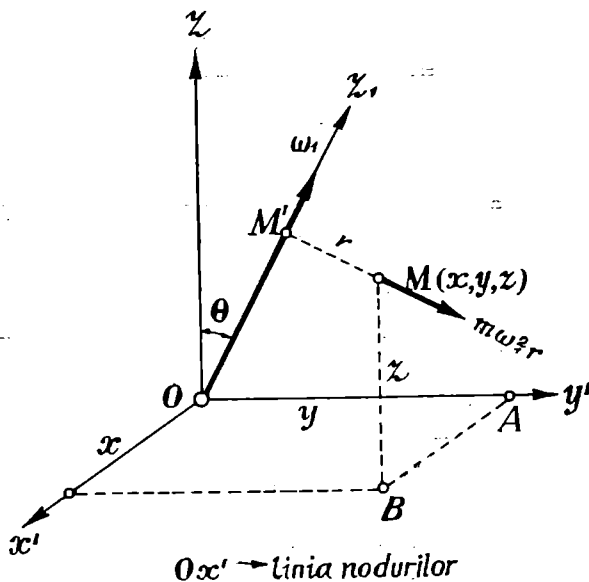


Fig. 43

Proiecțiile pe axe ale forței centrifuge elementare F_M vor fi deci:

$$X = m \omega_1^2 x$$

$$Y = m \omega_1^2 [y - (y \sin \theta + z \cos \theta) \sin \theta]$$

$$Z = m \omega_1^2 [z - (y \sin \theta + z \cos \theta) \cos \theta]$$

Rezultanta $R(R_x, R_y, R_z)$ a acestor forțe se obține prin sumare:

$$R_x = \Sigma X; \quad R_y = \Sigma Y; \quad R_z = \Sigma Z.$$

Având în vedere că centrul de greutate al giroscopului este situat pe axa de simetrie Ox , rezultă că coordonatele sale sunt respectiv :

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 \neq 0.$$

Mai avem deasemenea, conform teoremei momentelor statice:

$$\Sigma mx = Mx_0 = 0; \quad \Sigma my = My_0 = 0; \quad \Sigma mz = Mz_0$$

în care M reprezintă masa totală a corpului.

Ținând seama de aceste două observații :

$$R_x = \Sigma m \omega_1^2 x = \omega_1^2 \Sigma mx = 0$$

$$R_y = \Sigma m \omega_1^2 [y - (y \sin \theta + z \cos \theta) \sin \theta] = \omega_1^2 \cos^2 \theta \Sigma my - \\ - \omega_1^2 \cos \theta \sin \theta \Sigma mz = -M \omega_1^2 z_0 \cos \theta \sin \theta$$

$$R_z = \Sigma m \omega_1^2 [z - (y \sin \theta + z \cos \theta) \cos \theta] = M \omega_1^2 z_0 \sin^2 \theta.$$

Rezultanta R a tuturor forțelor centrifuge va fi deci;

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = M \omega_1^2 z_0 \sin \theta \quad (46)$$

În cazul particular când giroscopul este susținut chiar în centrul de greutate: $z_0 = 0$ și deci $R = 0$.

Pentru calculul momentului \mathfrak{M}_p ($\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$) în raport cu O al forțelor de inerție centrifugale datorite precesiei, avem :

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma yZ - zY = \Sigma m \omega_1^2 y [x - (y \sin \theta + z \cos \theta) \cos \theta] - \Sigma m \omega_1^2 z (y - \\ (y \sin \theta + z \cos \theta) \sin \theta) \\ = \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta \Sigma m (xz - y^2) + \omega_1^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \Sigma myz = \\ = \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta [\Sigma m (xz + x^2) - \Sigma m (y^2 + x^2)] + \omega_1^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \Sigma myz.$$

Dar conform definiției momentelor de inerție (9) pentru un giroscop simetric ($I_y = I_x$), avem :

$$\Sigma m (xz + x^2) = I_y = I_x$$

$$\Sigma m (y^2 + x^2) = I_z$$

$$\Sigma myz = I_{yz} = 0.$$

În definitiv :

$$\mathfrak{M}_x = (I_x - I_z) \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Procedând analog, găsim pentru \mathfrak{M}_y și \mathfrak{M}_z valorile :

$$\mathfrak{M}_y = \Sigma m \omega_1^2 xz + m \omega_1^2 x \sin \theta (y \cos \theta - z \sin \theta) = 0$$

$$\mathfrak{M}_z = \Sigma m \omega_1^2 x \cos \theta (y \cos \theta - z \sin \theta) - m \omega_1^2 xy = 0.$$

Momentul total al forțelor centrifuge este deci :

$$\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_x = (I_x - I_z) \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta \quad (47)$$

și îndreptat după linia nodurilor Ox' .

3) Calculul forțelor de inerție Coriolis.

Numim forțe de inerție Coriolis, forțele corespunzătoare accelerațiilor lui Coriolis. Pentru a determina aceste forțe în cazul giroscopului, să ducem printr'un punct al său M , un plan P perpendicular pe axa de simetrie Ox (fig. 44).

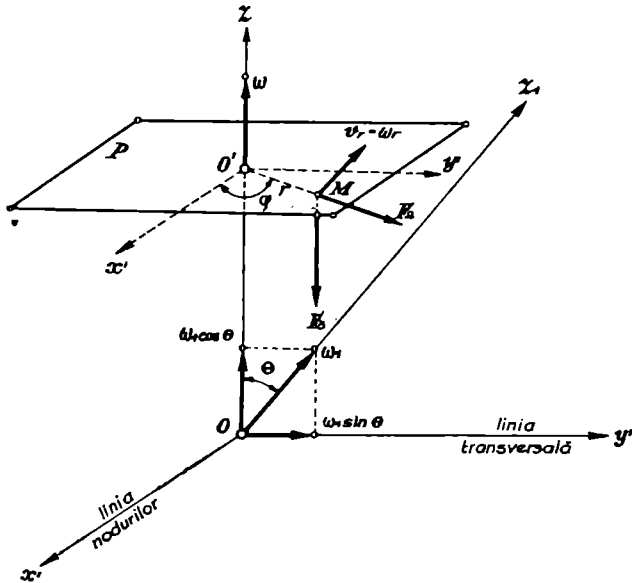


Fig. 44

Vectorul care reprezintă iuțea relativă în mișcarea de rotație proprie a giroscopului se găsește în planul P , este perpendicular pe MO' (O' fiind punctul în care axa Ox înțeapă planul P) și are mărimea :

$$v_r = \omega \cdot MO' = \omega \cdot r$$

$$(MO' = r).$$

Să descompunem iuțea de precesie $\rightarrow \omega_1$ corespunzătoare mișcării conductoare în două componente :

a) o componentă $\omega_2 = \omega_1 \cos \theta$ îndreptată după axa Ox .

b) o componentă $\omega_3 = \omega_1 \sin \theta$ perpendiculară pe axa Ox și situată în planul xOx_1 .

Forța de inerție Coriolis corespunzătoare componentei $\rightarrow \omega_2$ are mărimea :

$$F_2 = 2 m v_r \omega_2 = 2 m \omega \omega_1 r \cos \theta$$

întrucât $\angle(v_r, \omega_2) = \frac{\pi}{2}$ și $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Vectorial $\vec{F}_2 = 2m (\vec{v}_r \wedge \vec{\omega}_2)$. Vectorul care reprezintă pe \vec{F}_2 este situat în planul P având direcția $O'M$ și sensul centrifug indicat în figură.

Forța elementară de inerție Coriolis corespunzătoare lui $\vec{\omega}_3$ are mărimea;

$$F_3 = 2 m v_r \omega_3 \sin(\vec{v}_r, \vec{\omega}_3) = 2 m \omega \omega_1 r \sin \theta \sin \varphi$$

în care $\varphi = \sphericalangle(O'x', O'M) = \sphericalangle(\vec{v}_r, \vec{\omega}_3)$

Vectorial; $\vec{F}_3 = 2 m (\vec{v}_r \wedge \vec{\omega}_3)$.

Vectorul care reprezintă pe \vec{F}_3 e perpendicular pe planul P și îndreptat în sensul arătat în figură.

Proiectând pe axele de coordonate Ox' , Oy' și Oz și sumând: pe axa $Ox' \dots \Sigma F_2 \cos \varphi = 2 \omega \omega_1 \cos \theta \Sigma mr \cos \varphi = 2 \omega \omega_1 \cos \theta \Sigma mx = 0$
pe axa $Oy' \dots \Sigma F_2 \sin \varphi = 2 \omega \omega_1 \cos \theta \Sigma mr \sin \varphi = 2 \omega \omega_1 \cos \theta \Sigma my = 0$
pe axa $Oz \dots \Sigma F_3 = -2 \omega \omega_1 \sin \theta \Sigma mr \sin \varphi = 0$.

Rezultanta forțelor lui Coriolis este nulă.

Calculând momentul $\vec{M}_C (M_{x'}; M_{y'}; M_z)$ în raport cu O al forțelor de inerție Coriolis, avem:

$$\begin{aligned} M_{x'} &= \Sigma (y F_3 - z F_2 \sin \varphi) \\ &= -2 \omega \omega_1 \Sigma myr \sin \varphi \sin \theta + mxr \sin \varphi \cos \theta \\ &= -2 \omega \omega_1 \Sigma my^2 \sin \theta + myx \cos \theta \\ &= -2 \omega \omega_1 \sin \theta \Sigma my^2 = -\omega \omega_1 \sin \theta \Sigma m (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

sau $M_{x'} = -I_x \omega \omega_1 \sin \theta$.

Prin calcul absolut analog, ținând seama că axele Ox' , Oy' și Oz sunt axe principale de inerție și că deci momentele centrifugale sunt nule, găsim:

$$\begin{aligned} M_{y'} &= \Sigma x F_2 \cos \varphi - x F_3 = 0 \\ M_z &= \Sigma x F_2 \sin \varphi - y F_2 \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Rezultă pentru momentul total al forțelor de inerție Coriolis:

$$\vec{M}_C = M_{x'} = -I_x \omega \omega_1 \sin \theta, \quad (48)$$

Momentul total al tuturor forțelor de inerție va fi:

$$\vec{M}_g = \vec{M}_r + \vec{M}_P + \vec{M}_C \quad (49)$$

Intrucât $\vec{M}_r = 0$, iar \vec{M}_P și \vec{M}_C sunt situați pe aceeași axă Ox' (linia nodurilor), suma din relația (49) este algebrică.

Avem prin urmare:

$$\mathfrak{M}_g = (I_x - I_x) \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta - I_x \omega \omega_1 \sin \theta$$

sau:

$$\mathfrak{M}_g = - I_x \omega \omega_1 \sin \theta \left(1 + \frac{I_x - I_x}{I_x} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right) \quad (50)$$

Am regăsit valoarea cuplului giroscopic determinată în Cap. XI. Rezultanta totală a tuturor forțelor de inerție este (46):

$$R_i = M \omega_1^2 x_0 \sin \theta$$

care neavând componentă pe Ox' înseamnă că se găsește în planul xOx_1 definiț de vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\omega}_1$.

Notând cu d distanța dela punctul fix O la R_i (în planul xOx_1) avem:

$$\mathfrak{M}_g = R_i d$$

de unde:

$$d = \frac{\mathfrak{M}_g}{R_i}$$

CAPITOLUL XIV

Studiul mișcării de nutație în cazul giroscopului greu

Am studiat în paragrafele precedente mișcarea unui giroscop în care iuțeala de rotație proprie $\vec{\omega}$, iuțeala $\vec{\omega}_1$ în mișcarea de precesie, θ unghiul de nutație, s'au presupus constante (cazul precesiei regulate).

Am stabilit în această ipoteză formula fundamentală:

$$\mathfrak{M}_0 = I_x \omega \omega_1 \sin \theta + (I_x - I_x) \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (51)$$

Pentru un giroscop asupra căruia nu lucrează decât greutatea sa proprie mg

$$\mathfrak{M}_0 = mga \sin \theta$$

(a = distanța centrului de greutate de punctul fix).

Introducând această valoare în formula (51) și simplificând obținem:

$$(I_x - I_x) \omega_1^2 \cos \theta + I_x \omega \omega_1 - mga = 0. \quad (52)$$

Pentru a avea o precesie regulată, trebuie ca din momentul inițial, relația (52) să fie satisfăcută. Astfel, presupunând că sunt date elementele geometrice I_x, I_x, θ, a , masa m și iuțeala de rotație

→
 proprie ω , trebuie ca la momentul inițial să se imprime axei Ox a giroscopului o iuțeală de precesie ω_1 dată de ecuația:

$$\omega_1 = \frac{I_x \omega \pm \sqrt{I_x^2 \omega^2 - 4(I_x - I_x) m g a \cos \theta}}{2(I_x - I_x) \cos \theta} \quad (53)$$

Problema admite deci în general două soluții, date de cele două valori ale lui ω_1 , din ecuația (53). Pentru ca ω_1 să fie real trebuie ca

$$\omega \geq 2 \frac{\sqrt{(I_x - I_x) m g a \cos \theta}}{I_x}$$

În cazul particular $\theta = \frac{\pi}{2}$ sau $\theta = -\frac{\pi}{2}$, obținem din (52):

$$\omega_1 = \frac{m g a}{I_x \omega}$$

În privința celor de mai sus, observăm următoarele:

a) Iuțeli unghiulare inițiale care să satisfacă o relație dată sunt greu de realizat în practică.

b) Din cauza frecărilor și rezistenței aerului, ω și ω_1 nu pot fi constanți și ca urmare θ variază și el.

În consecință, *mișcarea de precesie regulată este o mișcare teoretică ce nu poate fi realizată practic.*

Vom studia în cele de mai jos, mișcarea unui giroscop de elemente geometrice cunoscute, de greutate dată, cărui i s'a dat o

→
 iuțeală de rotație proprie inițială ω și care este lăsat liber când axa Ox face cu verticala Ox_1 , unghiul inițial θ_0 .

Vom considera că asupra giroscopului nu lucrează decât propria lui greutate. Spre deosebire de mișcarea de precesie regulată studiată anterior, vom presupune că iuțelile ω și ω_1 și unghiul θ sunt variabile. În afară de aceasta, în momentul inițial vom considera iuțea de precesie ω_1 , neglijabilă în raport cu iuțea proprie de rotație ω .

Să reluăm sistemul de referință fix Ox_1, y_1, z_1 , în care Ox_1 este vertical ascendent și sistemul mobil $Oxyz$ legat rigid cu giroscopul, având axele Ox, Oy, Oz îndreptate după direcțiile principale de inerție.

Poziția sistemului $Oxyz$ este determinată prin unghiurile lui Euler φ, ψ și θ (fig. 45).

→
 Iuțea unghiulară totală Ω are drept componente:

$$1^\circ) \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

îndreptată în lungul axei Ox .

$$2^{\circ}) \quad \omega_1 = \frac{d\psi}{dt}$$

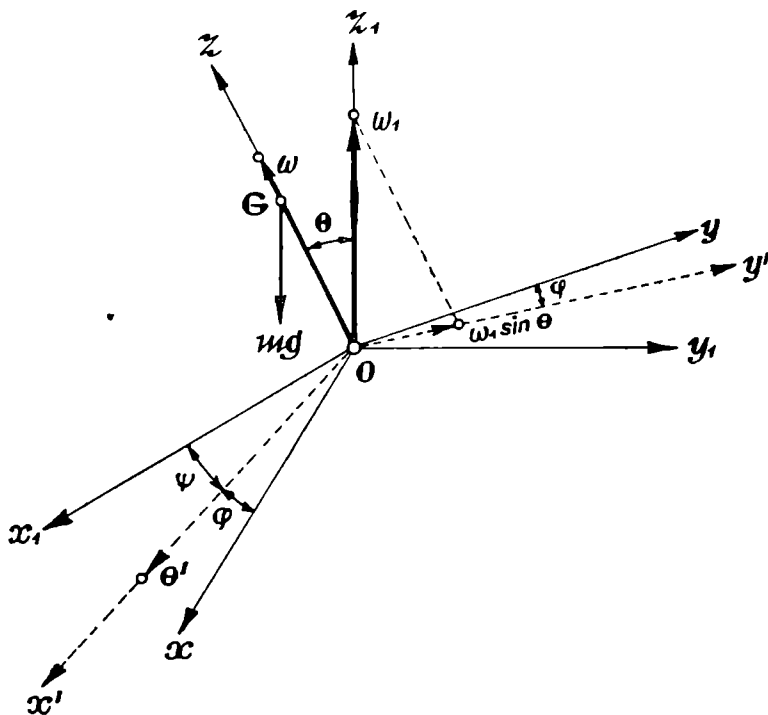


Fig. 45

îndreptată în lungul axei Ox_1 , și

$$3^{\circ}) \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

îndreptată după linia nodurilor Ox' .

Rezultă că proiecțiile lui $\vec{\Omega}$ respectiv pe Ox , Oy și Oz sunt:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \omega_1 \sin \theta \sin \varphi \\ \Omega_y &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \omega_1 \sin \theta \cos \varphi \\ \Omega_z &= \omega + \omega_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (54)$$

Proiecțiile pe axe ale vectorului \vec{K} reprezentând momentul cantităților de mișcare, vor fi deci:

$$\begin{aligned} K_x &= I_x \Omega_x = I_x (\dot{\theta} \cos \varphi + \omega_1 \sin \theta \sin \varphi) \\ K_y &= I_x \Omega_y = I_x (-\dot{\theta} \sin \varphi + \omega_1 \sin \theta \cos \varphi) \\ K_z &= I_z \Omega_z = I_z (\omega + \omega_1 \cos \theta). \end{aligned} \quad (55)$$

Momentele greutateii mg în raport cu axele Ox și Ox_1 sunt

nule, deoarece vectorul mg se găsește în planul xOx_1 , rezultă conform teoremei (8), că proiecțiile *înfelelor extremităților vectorului*
 \vec{K} pe Ox și Ox_1 sunt nule și deci K_x și K_{x_1} sunt constanți.

Avem astfel:

$$K_x = \text{constant}$$

de unde

$$\omega + \omega_1 \cos \theta = \omega_0 \quad (56)$$

Prin proiecții pe direcția Ox_1 :

$$K_{x_1} = K_x \sin \varphi \sin \theta + K_y \cos \varphi \sin \theta + K_z \cos \theta$$

sau, înlocuind pe K_x, K_y, K_z prin valorile lor din (55):

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= I_x \omega_1 \sin^2 \theta + I_x (\omega + \omega_1 \cos \theta) \cos \theta \\ K_{x_1} &= I_x \omega_1 \sin^2 \theta + I_x \omega_0 \cos \theta = \text{constant} = I_x \omega_0 \cos \theta_0 \quad (57) \end{aligned}$$

Am obținut astfel pentru cele 3 necunoscute φ, ψ și θ , două relații (56) și (57). Pentru obținerea celei de a treia relații, să aplicăm teorema energiei cinetice:

Energia cinetică inițială este:

$$E_0 = \frac{1}{2} I_x \omega_0^2.$$

Energia cinetică la un moment oarecare este:

$$E = \frac{1}{2} I_x \Omega_x^2 + \frac{1}{2} I_x \Omega_y^2 + \frac{1}{2} I_x \Omega_z^2$$

sau, ținând seama de (54):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \omega_1^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_x (\omega + \omega_1 \cos \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \omega_1^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_x \omega_0^2. \end{aligned}$$

Variația energiei cinetice este prin urmare:

$$E - E_0 = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \omega_1^2 \sin^2 \theta).$$

Această variație a energiei cinetice fiind egală cu lucrul mecanic al greutateii, obținem cea de-a treia relație:

$$\frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \omega_1^2 \sin^2 \theta) = mga (\cos \theta_0 - \cos \theta). \quad (58)$$

Pentru rezolvarea sistemului format din ecuațiile (56), (57), (58), eliminăm pe ω_1 între (57) și (58). Căpătăm astfel:

$$\dot{\theta}^2 + \frac{I_z^2 \omega_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{I_x^2 \sin^2 \theta} = \frac{2 m g a}{I_x} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (59)$$

adică o ecuație în θ . Notând: $u = \cos \theta$, avem

$$\dot{u} = -\sin \theta \cdot \dot{\theta}; \quad \sin^2 \theta = 1 - u^2; \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{\sin^2 \theta} = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2}.$$

Introducând aceste valori în (59) și grupând termenii, obținem:

$$\dot{u}^2 = \frac{(u_0 - u)}{I_x^2} [2 m g a I_x (1 - u^2) - I_z^2 \omega_0^2 (u_0 - u)] \quad (60)$$

sau:

$$\dot{u}^2 = \frac{2 m g a}{I_x} (u_0 - u) (u - u_1) (u_2 - u) \quad (61)$$

în care u_1 și u_2 sunt rădăcinile ecuației de gradul II:

$$f(u) = 2 m g a I_x (1 - u^2) - I_z^2 \omega_0^2 (u_0 - u) = 0 \quad (62)$$

Să presupunem: $u_2 > u_1$

Pentru $a > 0$, avem: $f(-1) < 0$; $f(u_0) > 0$; $f(+1) > 0$,
 $f(+\infty) < 0$.

Rădăcina mică u_1 se găsește în intervalul $(-1, u_0)$, iar rădăcina mare u_2 în intervalul $(+1, +\infty)$. Cum $u = \cos \theta$ deci $u \leq 1$, rădăcina u_2 nu are sens,

Pentru ca fenomenul fizic să existe, trebuie ca u să fie real, deci produsul:

$$\frac{2 m g a}{I_x} (u_0 - u) (u - u_1) (u_2 - u)$$

trebuie să fie pozitiv.

Factorii $\frac{2 m g a}{I_x}$ și $(u_2 - u)$ fiind pozitivi ($a > 0$) rezultă necesitatea ca $(u_0 - u) (u - u_1) > 0$.

Deci $u_0 \geq u \geq u_1$

sau: $\cos \theta_0 \geq \cos \theta \geq \cos \theta_1$

deci: $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$

adică în mișcarea de precesie, axa giroscopului Ox , oscilează între 2 conuri de deschidere unghiulară $2\theta_0$ și $2\theta_1$ (fig. 46), având drept axă comună, verticala ascendentă Oz_1 .

Pentru $a < 0$, după o discuție absolut identică obținem:

$$\theta_0 \geq \theta \geq \theta_1$$

adică o oscilație analoagă cu cea precedentă.

Ducând din O o sferă, cele două conuri determină pe sferă

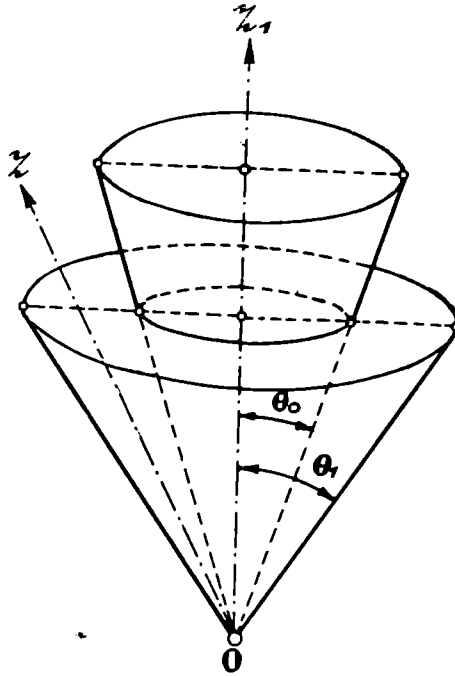
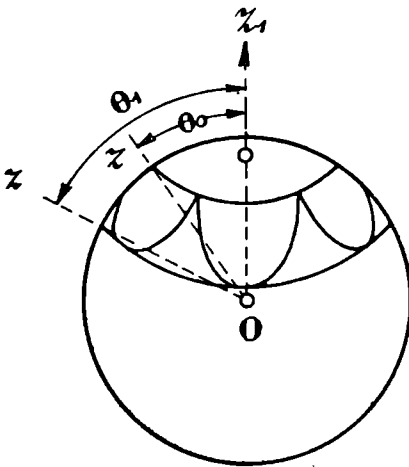


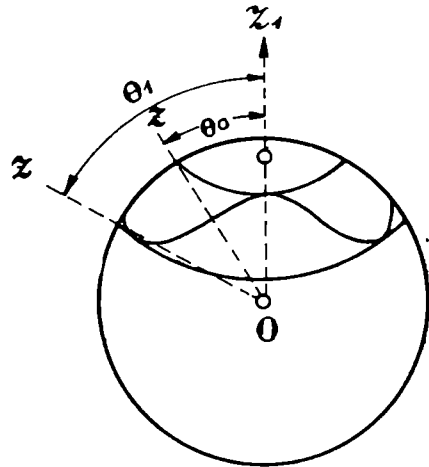
Fig. 46

două cercuri concentrice. Prin mișcarea de nutație, axa Oz a gi-



$a > 0$

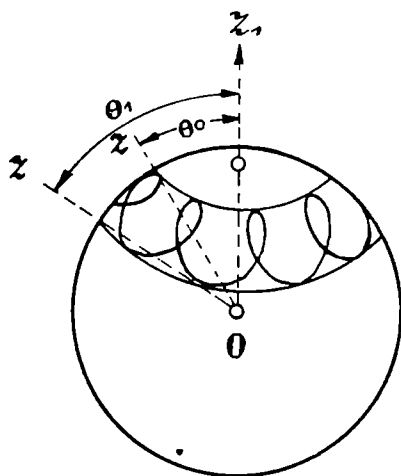
Fig. 47



$a > 0$

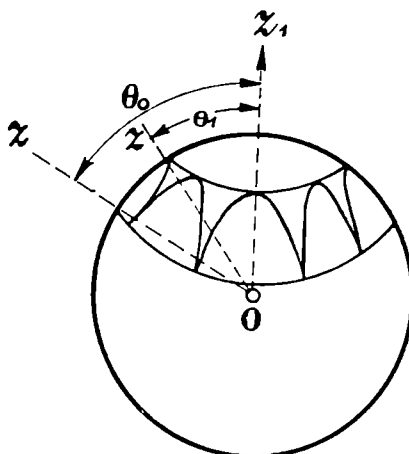
Fig. 48

roscopului descrie pe sferă curbe cuprinse între cele două cercuri de forma celor date în figurile (47 până la 51).



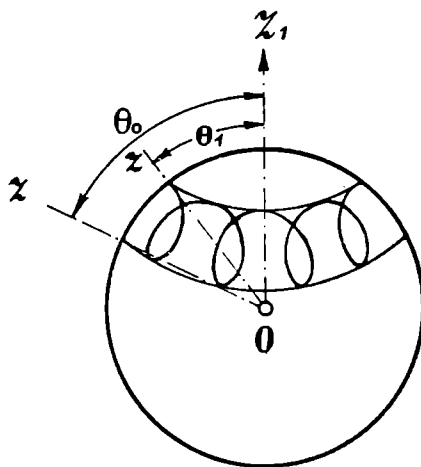
$$a > 0$$

Fig. 49



$$a < 0$$

Fig. 50



$$a < 0$$

Fig. 51

Cazul unei ineli de rotație proprie inițială ω_0 mare și al unui cuplu mga mic

În această ipoteză, u_1 este foarte apropiat de u_0 și deci și θ_1 de θ_0 . În adevăr, din (62):

$$u_0 - u_1 = \frac{2mga I_x (1 - u_1^2)}{I_x^2 \omega_0^2}$$

sau:

$$\cos \theta_0 - \cos \theta_1 = \frac{2mga I_x \sin^2 \theta_1}{I_x^2 \omega_0^2} \quad (63)$$

diferență care tinde spre 0 când ω_0 crește.

Rezultă deci că în acest caz, cele două conuri sunt foarte apropiate între ele și prin urmare *mișcarea de nutație este redusă*.

Din (63):

$$\cos \theta_0 - \cos \theta_1 = 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta_0}{2} = \frac{2 m g a I_x \sin^2 \theta_1}{I_z^2 \omega_0^2}.$$

Diferența $\theta_1 - \theta_0$ fiind mică, putem considera:

$$\sin \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} = \sin \theta_0, \quad \sin \frac{\theta_1 - \theta_0}{2} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{2}, \quad \sin \theta_1 = \sin \theta_0.$$

Rezultă formula aproximativă:

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{2 m g a I_x \sin \theta_0}{I_z^2 \omega_0^2} \quad (64)$$

$$\text{Unghiul mediu } \theta_m = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{2} = \theta_0 + \frac{m g a I_x \sin \theta_0}{I_z^2 \omega_0^2} \quad (65)$$

(fig. 52). Din relația ultimă din (57) și ținând seama de egalitatea

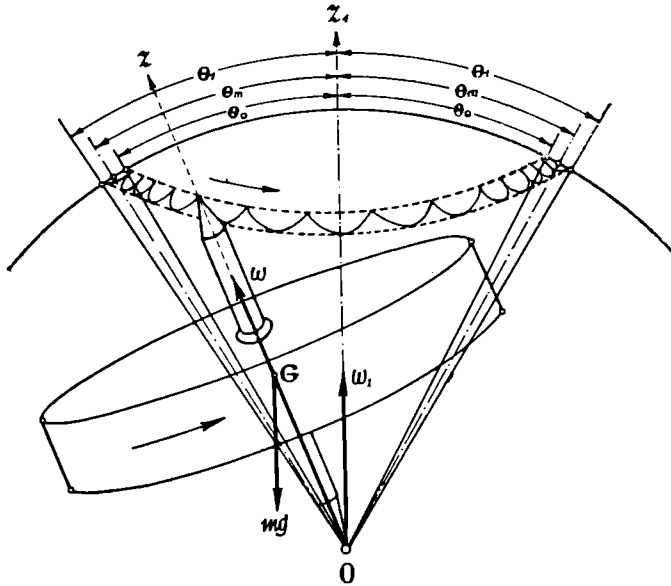


Fig. 52

(63) rezultă că în timp ce θ variază între θ_0 și θ_1 , iuțeala de precesie variază de la zero la:

$$\frac{I_x \omega_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta_1)}{I_x \sin^2 \theta_1} = \frac{2 m g a}{I_x \omega_0}.$$

Prin urmare iuțeala de precesie medie este

$$\omega_{1m} = \frac{m g a}{I_x \omega_0} \quad (66)$$

adică aceeași ca în cazul precesiei regulate.

Observăm că în aceeași perioadă de timp variază și iuțea de rotație proprie. În adevăr, din relația (56):

$$\omega = \omega_0 - \omega_1 \cos \theta.$$

Rezultă că pentru $\theta = \theta_0$; $\omega_1 = 0$ și deci $\omega = \omega_0$, iar pentru $\theta = \theta_1$; $\omega_1 = \frac{2mga}{I_x \omega_0}$ deci $\omega = \omega_0 - \frac{2mga \cos \theta_1}{I_x \omega_0}$. Obținem o iuțea de rotație medie ω_m :

$$\omega_m = \omega_0 - \frac{mga \cos \theta_1}{I_x \omega_0} \quad (67)$$

Intrucât ω_0 este mare în raport cu mga , putem considera pe ω constant în timpul mișcării și egal cu ω_0 . În concluzie, rezultă că pentru iuțeli mari de rotație, mișcarea giroscopului se apropie de o precesie regulată. Din această cauză precesia în mișcarea giroscopului greu cu iuțea mare de rotație proprie se numește pseudo-regulată.

Perioada de rotație proprie T_r este:

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (68)$$

Perioada de precesie T_p este:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi I_x}{mga} \omega_0 \quad (69)$$

Determinarea perioadei de nutație.

Pentru aceasta vom rezolva ecuația diferențială (59) în cazul când diferența $\theta_1 - \theta_0$ este mică, adică pentru o variație mică a unghiului θ .

Avem în acest caz:

$$\cos \theta_0 - \cos \theta = 2 \sin \frac{\theta_0 + \theta}{2} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \cong (\theta - \theta_0) \sin \theta_0. \quad (70)$$

Introducând această valoare în (59) și având în vedere că:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\theta - \theta_0)}{dt}; \sin \theta \cong \sin \theta_0$$

obținem:

$$\left[\frac{d(\theta - \theta_0)}{dt} \right]^2 = \frac{2mga \sin \theta_0}{I_x} (\theta - \theta_0) - \frac{I_x^2 \omega_0^2}{I_x^2} (\theta - \theta_0)^2$$

cu soluția:

$$\theta - \theta_0 = \frac{mga I_x \sin \theta_0}{I_x^2 \omega_0^2} \left[1 - \cos \left(\frac{I_x \omega_0}{I_x} \cdot t \right) \right] \quad (71)$$

Perioada de oscilație a nutației T_n este deci:

$$T_n = \frac{2\pi}{\frac{I_x \omega_0}{I_x}} = \frac{2\pi I_x}{I_x \omega_0} \quad (72)$$

Din (71) pentru $t = \frac{\pi I_x}{I_x \omega_0}$ se obține θ_1 și diferența:

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{2 m g a I_x \sin \theta_0}{I_x^2 \omega_0^2}$$

regăsind astfel formula (64).

Din (56) și (57) având în vedere (70) și (71) și luând $\sin \theta \cong \sin \theta_0$; $\cos \theta \cong \cos \theta_0$, găsim:

$$\omega_1 = \frac{m g a}{I_x \omega_0} \left(1 - \cos \frac{I_x \omega}{I_x} t \right) \quad (73)$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{m g a \cos \theta_0}{I_x \omega_0} \left(1 - \cos \frac{I_x \omega}{I_x} t \right) \quad (74)$$

Numărul de nutații (numărul de bucle) făcut de axa giroscopului într'o singură rotație completă de precesie în jurul verticalei Ox_1 este:

$$n = \frac{T_p}{T_n} = \frac{(I_x \omega_0)^2}{m g a I_x} \quad (75)$$

Se vede din această relație că numărul de nutații e cu atât mai mare cu cât iuteala de rotație inițială ω_0 este mai mare, cu cât giroscopul este mai ușor (mg mai mic) și mai turtit (I_x mare, I_x mic, a mic). Acest număr de nutații nu depinde de deschiderea conului de precesie.

Sfârleaza adormită. Ca aplicație a studiului mișcării de nutație să determinăm condiția de stabilitate, în poziție verticală, a axei de simetrie a unei sfârleze căreia i s'a dat o iuteală de rotație proprie. Sfârleaza se presupune așezată cu vârful său pe un plan orizontal lucios.

O asemenea sfârlează pare nemișcată, cel puțin ca prim aspect și din această cauză se numește *sfârleaza adormită*.

Fie O punctul de sprijin și Ox axa sfârlezei (fig. 53). Din condiția inițială, Ox fiind vertical, rezultă $\theta_0 = 0$ și $\cos \theta_0 = u_0 = 1$.

Ecuția (62) devine:

$$f(u) = (1 - u) [2 m g a I_x (1 + u) - I_x^2 \omega_0^2] = 0$$

având rădăcinile 1 și $\frac{I_x^2 \omega_0^2}{2 m g a I_x} - 1$.

Pentru

$$\frac{I_x^2 \omega_0^2}{2 m g a I_x} - 1 > 1 \quad (76)$$

rezultă pentru rădăcina mică valoarea $u_1 = \cos \theta_1 = 1$ și prin ur-

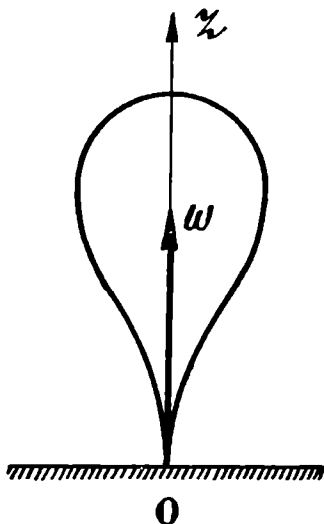


Fig. 53

mare axa Oz a giroscopului, variabilă în general între θ_0 și θ_1 , este stabilă deoarece $\theta_0 = \theta_1 = 0$.

În cazul când inegalitatea (76) nu este satisfăcută, rezultă

$$u_1 = \cos \theta_1 = \frac{I_x^2 \omega_0^2}{2 m g a I_x} - 1$$

și prin urmare axa Oz nu mai e stabilă, ci variază între $\theta_0 = 0$ și θ_1 .

Inegalitatea (76) se poate pune sub forma

$$\omega_0 > \frac{2\sqrt{m g a I_x}}{I_x} \quad (77)$$

Dacă această vitează inițială ar rămâne constantă, sfârleaza ar continua să doarmă liniștită, dar din cauza frecării în O și a rezistenței aerului, viteza de rotație proprie scade cu timpul. Condiția de stabilitate nu mai este îndeplinită și axa Oz se înclină din ce în ce mai mult și sfârleaza își sfârșește mișcarea prin cădere.

CAPITOLUL XV

Studiul mișcării giroscopului sub influența rotației pământului

Vom studia în cele ce urmează influența rotației pământului asupra mișcării giroscopului în următoarele cazuri:

A) Cazul când axa giroscopului este mobilă în *planul orizontal* al locului.

B) Cazul când axa giroscopului este mobilă în *planul meridianului* locului.

C) Cazul când giroscopul este liber.

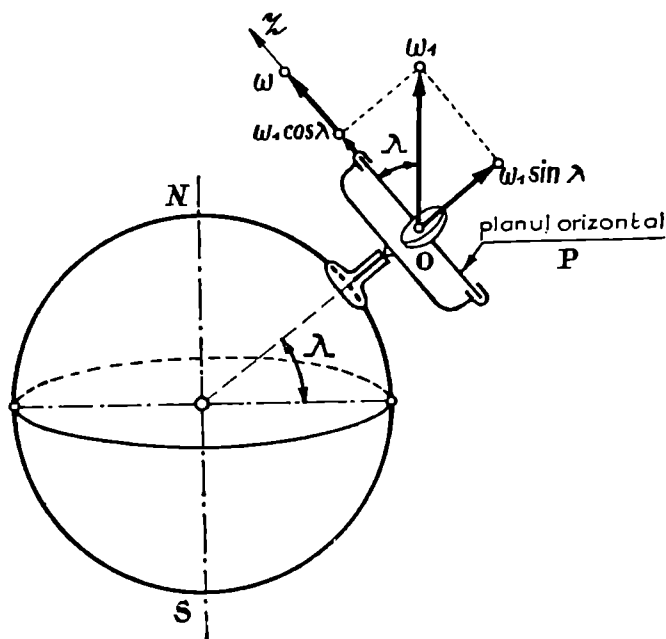


Fig. 54

Cazul A). Să presupunem un giroscop centrat, căruia i s'a dat o iuteală de rotație proprie ω în jurul axei sale Ox , axă mobilă în planul orizontal P al locului (fig. 54).

Notând cu ω_1 iuteala unghiulară de rotație a pământului, obținem prin proiecții, componentele:

$\omega_1 \cos \lambda =$ componenta după direcția tangentei la meridian în planul P ,

$\omega_1 \sin \lambda =$ componenta după direcția verticalei locului.

($\lambda =$ latitudinea locului).

Ne propunem să studiem mișcarea axei de simetrie Ox a giroscopului în planul orizontal P , în jurul verticalei locului, de o parte sau de cealaltă a tangentei orizontale $N'S'$ la meridian (fig. 55). Mișcarea este o rotație simplă în jurul verticalei.

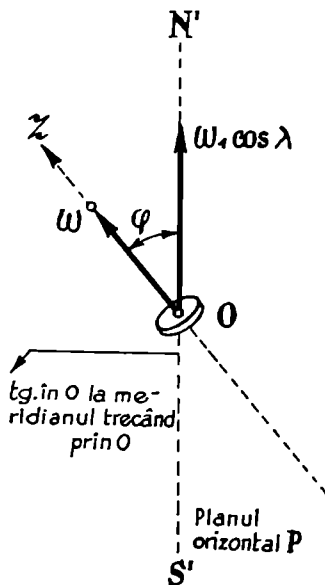


Fig. 55

Fie φ unghiul lui Ox cu $N'S'$. În raport cu un sistem fix de axe, ecuația mișcării este:

$$I_x \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \mathfrak{M} \quad (78)$$

în care \mathfrak{M} reprezintă suma momentelor forțelor exterioare. În cazul nostru, studiem însă mișcarea *relativă* a giroscopului față de pământ. În acest caz, pentru a putea aplica formula (78), trebuie ca în \mathfrak{M} să introducem și cuplele de inerție datorite mișcării pământului:

1) Din rotațiile $\vec{\omega}$ și $\vec{\omega}_1 \sin \lambda$ rezultă momentul forțelor de inerție (cuplul giroscopic) $\vec{\mathfrak{M}}_1 = I_x \vec{\omega} \wedge \vec{\omega}_1 \sin \lambda$, (de mărime $I_x \omega \omega_1 \sin \lambda$ căci unghiul între ω și $\omega_1 \sin \lambda$ este $\frac{\pi}{2}$). Vectorul care reprezintă acest moment, este situat în planul P și *efectul său este anulat prin condiția impusă dela început ca axa giroscopului să rămână în planul P .*

2) Din rotațiile $\vec{\omega}$ și $\vec{\omega}_1 \cos \lambda$ rezultă momentul forțelor de inerție $\vec{\mathfrak{M}}_2 = I_x \vec{\omega} \wedge \vec{\omega}_1 \cos \lambda$ de mărime $I_x \omega \omega_1 \cos \lambda \sin \varphi$, îndreptat după verticala locului, cuplu ce caută să micșoreze pe φ .

Deci

$$\mathfrak{M}_z = -I_x \omega \omega_1 \cos \lambda \sin \varphi.$$

Introducând în (78):

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{I_x}{I_x} \omega \omega_1 \cos \lambda \sin \varphi = 0. \quad (79)$$

Pentru φ suficient de mic, $\sin \varphi$ poate fi înlocuit cu φ și ecuația (79) reprezintă o oscilație simplă armonică în jurul lui $N'S'$ cu perioada:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_x}{I_x \omega \omega_1 \cos \lambda}} \quad (30)$$

Poziția de echilibru a axei Oz este pentru $\varphi = 0$, adică pentru cazul în care axa giroscopului este îndreptată după direcția meridianului locului.

Rezultă deci că prin frecări sau printr'un sistem de amorti-

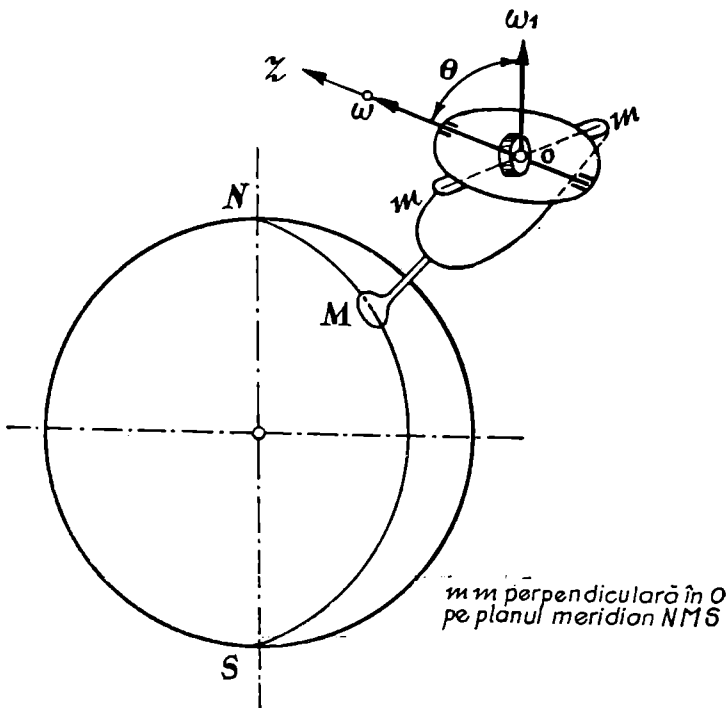


Fig. 56

zare convenabil ales, axa Oz a giroscopului se va opri pe direcția tangentei la meridian $N'S'$.

Proprietatea giroscopului lăsat cu axă sa liberă în planul orizontal de-a se așeza cu această axă după direcția meridianului, a fost experimentată de Foucault și întrebuințată în marină și aviație la construcția compasului giroscopic pentru determinarea nordului.

Cazul B). Să considerăm acum cazul unui giroscop al cărui axă Ox este mobilă în planul vertical al meridianului (fig. 56).

Procedând analog ca în cazul precedent, obținem următoarea ecuație a mișcării axei Ox :

$$I_x \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - I_x \omega \omega_1 \sin \theta \quad (81)$$

în care θ reprezintă unghiul axei Ox cu direcția Nord-Sud (fig. 56).

Pentru θ mic, $\sin \theta$ poate fi înlocuit cu θ și ecuația (81) devine:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{I_x}{I_x} \omega \omega_1 \theta = 0$$

și reprezintă o oscilație armonică simplă a axei Ox în jurul direcției N-S cu perioada

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_x}{I_x \omega \omega_1}} \quad (82)$$

Poziția de echilibru a axei giroscopului are loc pentru $\theta=0$, adică în cazul când axa giroscopului are direcția axei polilor.

Prin urmare, fie prin frecări, fie prin aplicarea unui amortizor, giroscopul se va opri când axa sa va fi paralelă cu axa de rotație Nord-Sud a pământului.

Această proprietate a fost experimentată de Foucault și întrebuințată ulterior la construcția giroscopului de azimut care determină latitudinea unui punct de pe pământ prin citirea unghiului făcut de axa giroscopului cu orizontala.

Cazul C. În cazul giroscopului liber, în sistemul de axe fix, rotația pământului nu are nici o influență. Prin urmare, dacă așezăm axa Ox a giroscopului în direcția unei stele, axa continuă să rămână în această direcție cu toată rotația pământului.

În raport cu pământul, axa Ox a giroscopului este însă mobilă, descriind în jurul unei paralele la axa polilor pământului N-S, un con de precesie în 24 ore siderale și având sensul de rotație invers cu acel al rotației pământului. În adevăr, să considerăm un giroscop a cărui axă Ox în jurul căreia se rotește cu viteza ω , face cu viteza ω_1 de rotație a pământului unghiul θ (fig. 57). Când studiem mișcarea acestui giroscop în raport cu pământul presupus fix, trebuie să introducem cuplul de inerție:

$$\vec{M}_g = I_x \vec{\omega} \wedge \vec{\omega}_1 \text{ de mărime } I_x \omega \omega_1 \sin \theta, \text{ drept cuplu activ. Sub}$$

acțiunea acestui cuplu, giroscopul ia o mișcare de precesie $-\omega_1$

egală și direct opusă cu $\vec{\omega}_1$. Rezultă deci că în raport cu pământul, axa giroscopului se rotește în sens invers cu rotația pământului făcând o rotație completă în 24 ore siderale. În raport cu un sis-

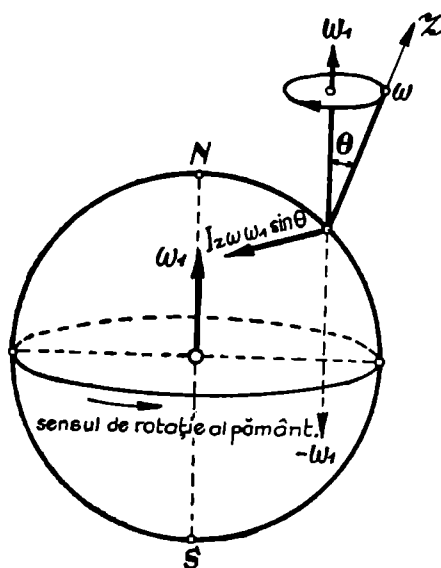


Fig. 57.

tem de axe fixe, axa giroscopului rămâne fixă în spațiu, întrucât efectul rotației pământului este anulat de rotația direct opusă de precesie a giroscopului.

CAPITOLUL XVI

Influența frecării asupra mișcării giroscopului

Studiul influenței frecării asupra mișcării giroscopului în cazul general prezintă mari greutateți analitice, astfel încât până în prezent nu s'a putut obține o soluție completă a problemei.

În cele de mai jos se arată influența frecării în câteva cazuri simple.

Cazul A. Giroscopul suspendat cardanic în centrul de greutate.

Să presupunem iuțeala de rotație proprie ω menținută constantă printr'un mijloc exterior: presiunea unui curent de aer, curent electric, etc.

În acest caz, efectul frecării axei giroscopului pe inelul cardanic interior este anihilat. În schimb din cauza frecării datorite

rotației de precesie ω_1 , mărimea ω_1 scade. Intrucât în cazul giroscopului liber suspendat în centrul de greutate trebuie să avem:

$$I_x \omega + (I_x - I_x) \omega_1 \cos \theta = 0 \quad (83)$$

(relație demonstrată în Cap. VII formula (33))

Deoarece ω este constant și ω_1 scade, rezultă că mărimea lui $\cos \theta$ trebuie să crească și să ajungă la valoarea $+1$ pentru $I_x < I_x$ (giroscop alungit) sau la valoarea -1 pentru $I_x > I_x$ (giroscop turtit). Rezultă $\theta = 0$ sau $\theta = \pi$.

Deci în ambele cazuri axa giroscopului ia locul axei de precesie, iar mișcarea giroscopului se reduce la mișcarea de rotație proprie în jurul axei sale.

În cazul, când iuțeala de rotație proprie ω nu mai este menținută constantă printr'un mijloc exterior, se produce un cuplu de frecare \vec{M}_f în jurul axei giroscopului care va cauza scăderea lui ω .

Vectorul care reprezintă acest cuplu este îndreptat după axa Ox și este de sens contrar lui ω .

Acțiunea cuplului de frecare asupra inelului interior cardanic este cuplul \vec{M}_f' egal și direct opus lui \vec{M}_f (conform principiului acțiunii și reacțiunii) iar proiecția acestui cuplu pe direcția axei de precesie ω_1 este $M_f' \cos \theta$.

Pentru $I_x < I_x$ (giroscop alungit) θ este cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$ iar cuplul $M_f' \cos \theta$ caută să mărească pe ω_1 (fig. 58).

Intrucât relația (83) trebuie să fie satisfăcută, trebuie ca să se micșoreze $\cos \theta$, deci θ crește ajungând la valoarea $\theta = \frac{\pi}{2}$ când axa giroscopului este perpendiculară pe axa precesiei (poziție instabilă).

Pentru $I_x > I_x$ (giroscop turtit), θ este cuprins între $\pm \frac{\pi}{2}$ și $\pm \pi$ iar cuplul $M_f' \cos \theta$ caută să micșoreze pe ω_1 (fig. 59) care scade mult mai repede ca ω .

Intrucât relația (83) trebuie să fie satisfăcută trebuie să se mărească $\cos \theta$, deci θ se micșorează ajungând la valoarea $\theta = 0$, când axa giroscopului se așează peste axa de precesie (poziție stabilă).

Cazul B. Giroscopul greu cu o iuțeală mare de rotație proprie.

Să considerăm un giroscop greu în mișcare de precesie regu-

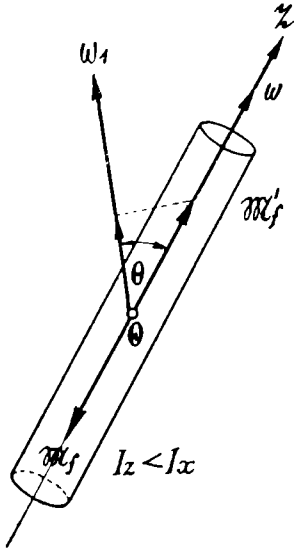


Fig. 58

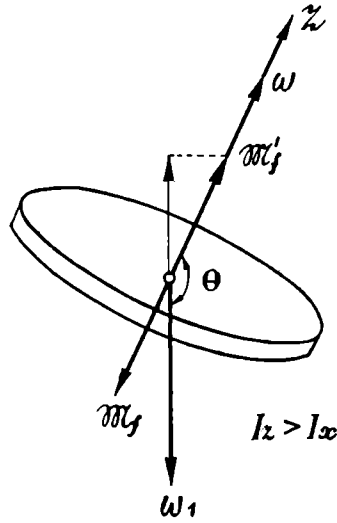


Fig. 59

lată, în jurul punctului O , având iuțeala de rotație proprie $\vec{\omega}$, iuțeala de precesie $\vec{\omega}_1$ (în jurul verticalei Ox_1) și centrul său de

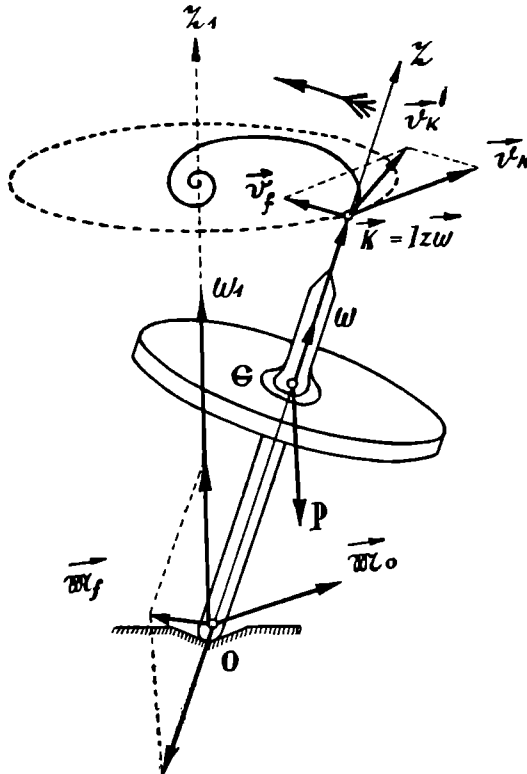


Fig. 60

greutate G situat pe partea pozitivă a axei de simetrie Oz (fig. 60).

Fie \vec{M}_0 momentul în O al greutateii (\vec{M}_0 perpendicular pe planul x_1Ox) și \vec{K} vectorul reprezentând suma momentelor cantităților de mișcare. În cazul unei rotații proprii cu viteza $\vec{\omega}$ mare putem considera $\vec{K} = I_x \vec{\omega}$ în lungul axei Ox . Ținând seama numai de momentul greutateii, conform teoremei dată de relația (8) viteza v_K a extremității vectorului \vec{K} este

$$v_K = \vec{M}_0$$

Sub influența frecării însă, viteza de rotație proprie ω scade în timp ce viteza de precesie ω_1 se mărește.

Fenomenul se observă ușor experimentul. Rezultă că cuplul de frecare \vec{M}_f are o componentă îndreptată după Ox de sens contrar cu $\vec{\omega}$ și o componentă după Ox_1 de același sens cu $\vec{\omega}_1$. Vectorul \vec{M}_f se găsește deci în planul x_1Ox și are direcția și sensul arătat în figură. *Practic \vec{M}_f se poate considera de mărime constantă și de direcție orizontală.*

Prin aceste aproximații rezultă că am neglijat frecarea de pivotare în jurul verticalei, precum și frecarea de nutație, neținând seama decât de cuplul de frecare de lunecare al extremității O a giroscopului în lagărul său fix (extremitatea O s'a presupus emisferică, iar lagărul un con plat cu axa verticală).

Aplicând relația (8) avem ținând seama de frecare:

$$\vec{v}_K' = \vec{M}_0 + \vec{M}_f = v_K + v_f$$

unde $v_f = \vec{M}_f$.

Se observă că sub acțiunea cuplului de frecare, vectorul \vec{K} și axa Ox se îndreaptă către verticala Ox_1 .

Acest fenomen se poate exprima în modul următor: *frecarea redresează axa de rotație proprie a giroscopului aducând-o pe cea mai scurtă cale spre verticală.*

Extremitatea vectorului \vec{K} descrie în acest caz o curbă asemănătoare spiralei lui Arhimede, ajungând după un număr finit de nutații și într'un timp finit pe verticală.

Giroscopul odată ridicat, cuplul de frecare de lunecare \vec{M}_f dispăre, rămânând în acțiune numai frecarea de pivotare care va

deci poate fi comparat cu un giroscop, care ar avea centrul de greutate sub punctul de rezăm.

Momentul \vec{M} îi dă deci o mișcare de precesie în jurul normalei la ecliptică. Această precesie dă naștere mișcării retrograde a nodurilor cu $50''$ pe an. Rotația completă a axei pământului în jurul normalei la ecliptică se face deci în $\frac{360^\circ}{50''} = 26000$ ani.

În general, se consideră axa de rotație Oz ca trecând prin polii geografici. În realitate, această axă intersectează suprafața pământului în alt punct care se mișcă, trasând pe suprafața pământului un cerc, *cercul lui Euler*.

Presupunând pământul ca un corp rigid a cărui turtire este dată de elipticitate:

$$\frac{I_x - I_z}{I_x} = \frac{1}{300}$$

și ținând seama de relația (31) care dă perioada în care axa Oz execută o rotație completă în jurul vectorului iuțelii $\vec{\omega}$.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{I_x}{I_x - I_z} = \frac{2\pi \times 300 \times 24 \times 3600}{2\pi} \text{ sec} = 300 \text{ zile} = 10 \text{ luni.}$$

Această perioadă de 10 luni nu s'a adevărit experimental, căci deplasarea masselor de aer schimbă viteza de rotație $\vec{\omega}$, deci lungimea zilei.

Deasemenea, pământul nu este rigid, ci se deformează elastic din cauză că prin oscilarea polilor, forțele centrifuge variază. Perioada determinată experimental (*perioada lui Chandler*) este de 14 luni.

Mișcarea giroscopică a atomului.

Întâlnim deasemenea fenomene giroscopice și în infinitul mic. Astfel, atomul *considerat izolat*, cu toată constituția sa complexă, formată dintr'un nucleu și un anumit număr de electroni, care se rotesc în jurul acestui nucleu, are totuș un vector \vec{K} al momentului cantităților de mișcare, rezultat al vectorilor momentelor cantităților de mișcare elementare, ai fiecărui electron în mișcarea sa. Acest vector rezultat \vec{K} este *constant în mărime, direcție și sens, iar suportul său trece prin centrul de greutate al atomului*.

Se poate considera că vectorul K trece prin nucleul atomului.

Putem deci, prin analogie, să asemănăm un atom cu un solid

suspendat în centrul său de greutate și căruia i s'a imprimat o iuțeală de rotație în jurul unei axe principale de inerție.

Să considerăm acum atomul într'un câmp magnetic exterior \vec{H} .

Sub influența acestui câmp se exercită asupra atomului, un cuplu atomic \vec{M} perpendicular pe planul determinat de vectorii \vec{K} și \vec{H} , dat de relația :

$$\vec{M} = a \cdot \vec{K} \wedge \vec{H}$$

în care a este un scalar, care depinde de sarcina electronului, etc.

Sub acțiunea acestui cuplu, axa vectorului \vec{K} are o mișcare de precesie în jurul unei axe care trece prin centrul de greutate și paralelă cu direcția câmpului \vec{H} .

Suntem deci într'un caz cu totul asemănător giroscopului greu sub acțiunea momentului rezultat din greutatea proprie (câmp gravitațional).

Menționăm faptul că producerea cuplului \vec{M} se datorește mișcării electronilor, traectoriile acestor electroni îndeplinind un rol identic cu cel al spirelor unui solenoid.

Iuțeala de precesie a vectorului \vec{K} se poate observa prin metode speciale precum liniile noi în spectru (efect Zeeman), metode de rezonanță, etc., iar pe baza acestor măsurători se poate determina valoarea momentului magnetic \vec{M} .

PARTEA II

APLICAȚIILE TEHNICE ALE GIROSCOPULUI

CAPITOLUL XVIII

Fenomene giroscopice în mișcarea vapoarelor și avioanelor

Să presupunem un vapor cu turbină, cu axa de rotație Ox în lungul vasului, susținută în lagărele A și B (fig. 62). În cazul când vaporul înaintează în linie dreaptă în direcția Ox , nu se întâmplă nimic deosebit.

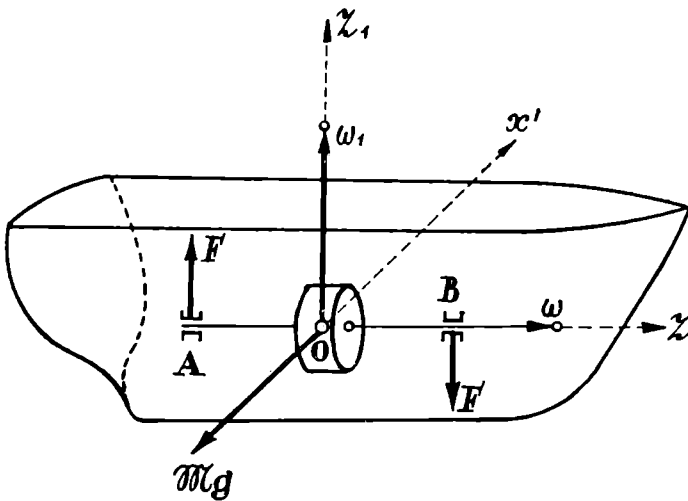


Fig. 62

Dacă însă vaporul se întoarce dându-i-se o rotație în jurul verticalei Oz_1 cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_1$, se produce un cuplu giroscopic (al forțelor de inerție) de moment

$$\vec{M}_g = I_x \vec{\omega} \wedge \vec{\omega}_1$$

al cărui vector este perpendicular pe planul lui $\vec{\omega}$ și $\vec{\omega}_1$ și are sensul indicat în figură (astfel încât să aducă pe Ox peste Oz_1 în

sens pozitiv). Acast cuplu \mathcal{M}_g acționează asupra reazămelor A și B ale axei turbinei, a căror reacțiuni giroscopice \vec{F} produc cuplul \mathcal{M}_0 egal și direct opus cu \mathcal{M}_g . Avem:

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = -\vec{\mathcal{M}}_g = I_x \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega} = \vec{F} \wedge \vec{AB}$$

iar scalar, deoarece $\theta = \angle(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}) = \frac{\pi}{2}$ iar $\sin \theta = 1$:

$$F = \frac{I_x \omega \omega_1}{AB}$$

(Acest rezultat a fost demonstrat în Cap. XI). Rezultă deci că prin rotirea vaporului se produc:

a) o modificare a reacțiunilor statice în A și B ale axei turbinei și anume: în A se încarcă în plus cu forța \vec{F} , iar în B se descarcă cu aceeași forță.

b) o mișcare de tangaj a vaporului (rotire în jurul axei Ox , orizontale situată în planul transversal al vasului).

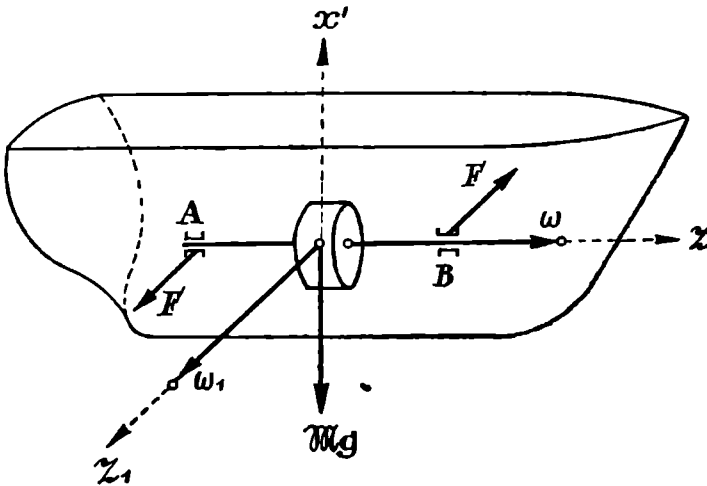


Fig. 63

Să considerăm acum același vas, cu aceeași turbină, supus unei mișcări de tangaj în jurul lui Oz_1 cu viteza ω_1 (fig. 63) (axa Oz_1 este orizontală într'un plan perpendicular pe axa vasului).

De rândul acesta, momentul giroscopic $\vec{\mathcal{M}}_g$ este îndreptat după verticala punctului O, iar reacțiunile \vec{F} ale reazemelor A și B sunt orizontale și au valoarea

$$F = \frac{I_x \omega \omega_1}{AB}$$

Se observă în acest caz, *tendința vasului de a se roti în jurul verticalei*. În mod absolut analog, se pot studia și cazurile când axa corpului în rotație este verticală sau orizontală într'un plan transversal vaporului.

Fenomene analoage se întâmplă și în mișcarea avionului. Influența momentelor giroscopice este însă în acest caz mult mai

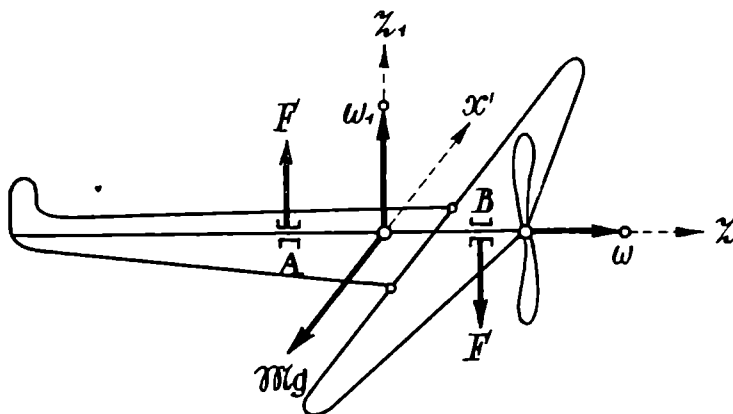


Fig. 64

mare decât la vapoare, greutatea propulsorului sau motorului rotativ față de greutatea totală fiind la avioane mult mai mare decât greutatea turbinei în raport cu greutatea totală a unui vapor.

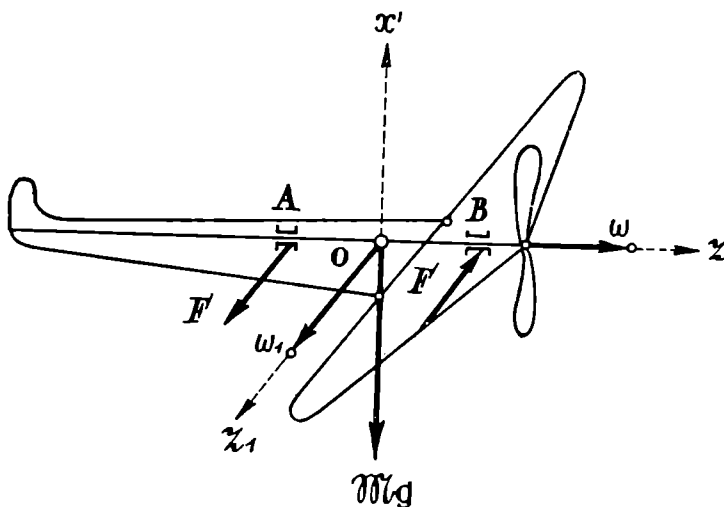


Fig. 65

Din această cauză, la virări prea brusce ale avionului în jurul verticalei (ω_1 este mare), se produce un tangaj violent al aparatului ceea ce explică avariile care au loc câteodată la această manevră.

Figurile (64 și 65) corespund pentru avion cazurilor studiate pentru vapor din figurile (62 și 63).

La avioanele cu două elice (aparatele Wright și Savary) pentru combaterea efectului de tangaj în timpul virajului li se dau celor două elice rotații de sensuri contrare.

În acest mod cuplele giroscopice care produc tangajul sunt egale și de sensuri contrarii și deci se distrug.

CAPITOLUL XIX

Fenomene giroscopice în balistică

Proectilele, după ce ies din țeava tunului, au, pe lângă mișcarea centrului de greutate G și o mișcare de rotație în jurul axei lor de simetrie Gz .

(Cazul I). În cazul când presupunem că tragerea se face, fie în vid, fie în aer a cărui rezistență \vec{R} însă trece neconținut prin centrul de greutate G , *momentul forțelor exterioare este nul*. Deoarece iuțeala de rotație proprie a fost dată în jurul axei principale de inerție *direcția acestei axe nu se va schimba* (Cap. VI), (fig. 66).

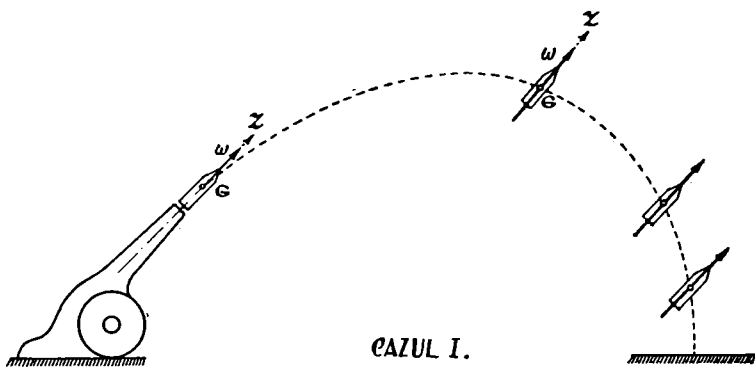


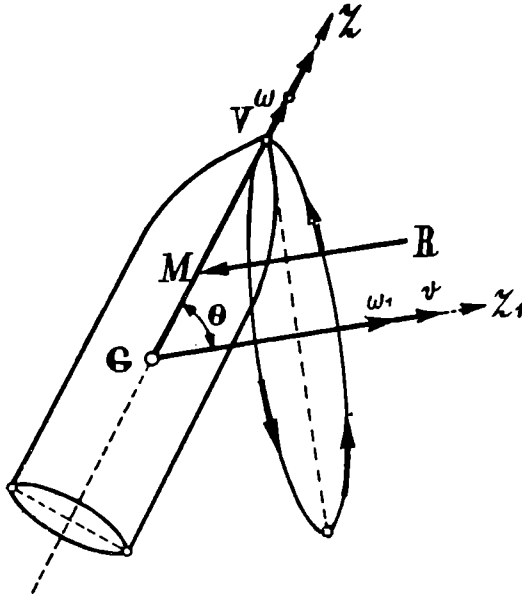
Fig. 66

Ar rezulta în aceste condiții că axa proiectilului pe măsură ce centrul de greutate parcurge traectoria, se depărtează de tangenta la traectorie, prezentând pe lângă dezavantajul de a oferi rezistenței aerului o suprafață din ce în ce mai mare și pe acela de a lovi ținta cu partea inferioară a proiectilului.

În realitate nu se observă însă aceste fenomene.

Rezultă prin urmare, că rezistența R a aerului nu trece prin centrul de greutate. Să reluăm studiul problemei în această ipoteză.

(Caul II). Fie (fig. 67) în A o poziție a proiectilului pe traectorie, \vec{v} iuteala centrului de greutate și \vec{R} rezistența aerului sen-



A

Fig. 67

sibil paralelă cu \vec{v} . \vec{R} produce un moment \vec{M}_0 față de G perpendicular pe planul traectoriei, din care rezultă o mișcare de precesie a proiectilului în jurul iuteții \vec{v} cu iuteala unghiulară:

$$\omega_1 = \frac{M_0}{I_x \omega \sin \theta} = \frac{R \cdot MG}{I_x \omega}$$

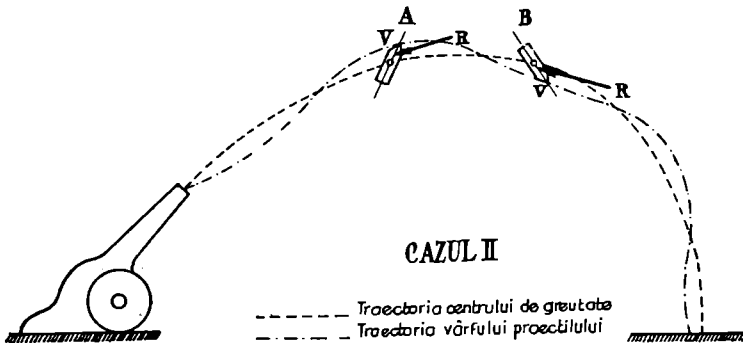


Fig. 68

Prin aceasta, vârful V al proiectilului este îndreptat către tangenta traectoriei. Datorită acestei mișcări, proiectilul ajunge în poziția

B (fig. 68). În această poziție, prin considerații analoge, rezultă din studiul mișcării de precesie, că vârful V al proiectilului (fig. 69) este din nou îndreptat către direcția tangentei. Am obținut în acest mod, un rezultat cunoscut în balistică și care se enunță astfel: *proiectilul aleargă după tangenta sa.*

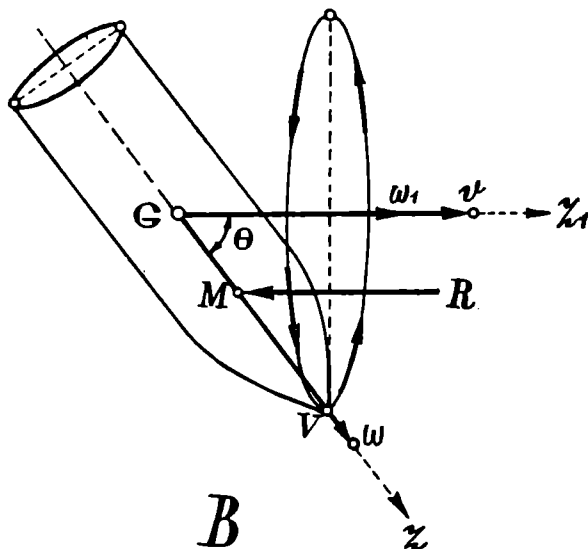


Fig. 69

În concluzie, în mișcarea reală, vârful proiectilului descrie o curbă situată de o parte și de cealaltă a traectoriei, adică o mișcare de șurub în jurul traectoriei (fig. 68).

Prin alegerea dimensiunilor proiectilului, unghiul θ dintre axa proiectilului și tangenta la traectorie, rămâne suficient de mic, iar căderea proiectilului se face în vârful său.

CAPITOLUL XX

Giroscopul întrebuințat pentru stabilizarea torpilei automobile. (Torpila Whitehead, giroscopul Obry)

Torpila automobilă este prevăzută cu un giroscop mobil în jurul centrului său de greutate, printr'o suspensie Cardan (fig. 70). Poziția giroscopului în torpila este dată în fig. 71. Fiind încă în tubul de lansare se dă giroscopului o mișcare de rotație cu o vitează unghiulară foarte mare ω în jurul axei sale, care coincide cu axa torpilei și cu direcția de asvârlire a torpilei.

În momentul lansării din tub, giroscopul este lăsat liber (Caz

studiat în Cap. VI în care giroscopul își păstrează neschimbată direcția axei sale de rotație).

Dacă dintr'o cauză oarecare, torpila își schimbă direcția, axa giroscopului își modifică poziția în raport cu torpila.

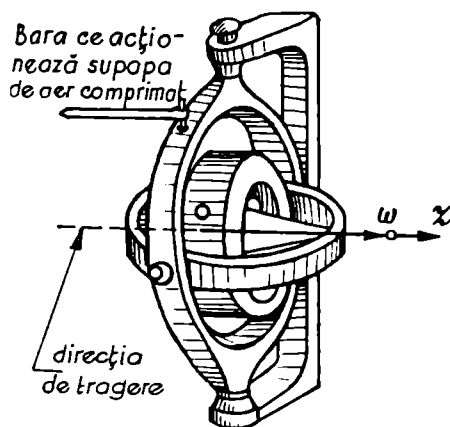


Fig. 70

Prin această modificare a poziției este pus în acțiune un mecanism auxiliar cu aer comprimat care pune în funcțiune o cârmă C, care readuce torpila în direcția în care a fost lansată (fig. 71 și 72). Condițiile ce trebuiesc îndeplinite de acest giroscop (giroscopul Obry) pentru buna lui funcționare sunt:

Torpila Whitehead

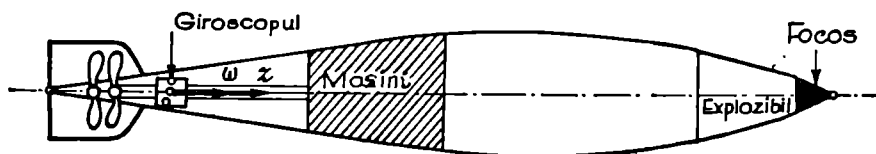


Fig. 71

a) *perfecta centrare*, pentru a nu se produce mișcare de precesie datorită momentului greutății proprii.

b) giroscopul trebuie să transmită comanda mișcării cârmii printr'un mecanism foarte sensibil, astfel încât *reacțiunea mecanismului asupra giroscopului să fie neglijabilă*. În cazul, contrar, mișcarea de precesie este produsă de momentul reacțiunii mecanismului.

c) *Iuteala de rotație proprie trebuie să coincidă cu axa giroscopului și cu axa torpilei.*

d) *Giroscopul trebuie să fie montat astfel încât să nu fie derulat de șocul lansării torpilei.*

e) *Timpul între lansarea torpilei și atingerea țintei trebuie să fie scurt pentru ca axa giroscopului să nu se deplaseze sub influența rotației pământului.*

Un alt aparat giroscopic stabilizator este cel realizat de Howell care acționează direct asupra torpilei prin menținerea axei

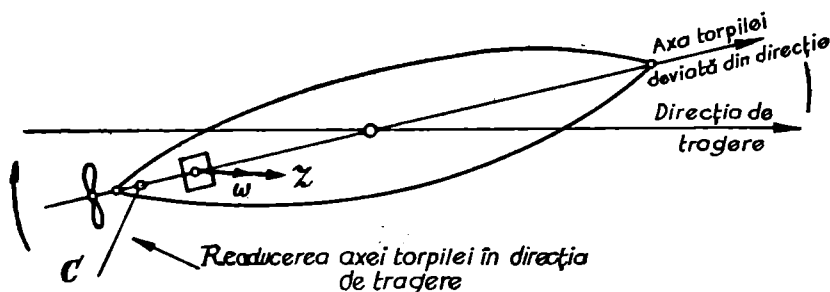


Fig. 72

de rotație a volantului său greu (150 kgr.) căruia i s'a dat o rotație mare inițială ($10000 \frac{\text{rot}}{\text{min}}$). Rezultatele obținute însă cu acest aparat nu au corespuns așteptărilor, și stabilizarea torpilei prin acțiune indirectă (giroscopul *Obry*) a rămas superioară.

Actualmente sunt întrebuițate la torpile, giroscopae perfecționate, la a căror construcție s'a ținut seama ca influența rotației pământului asupra mișcării giroscopului să fie anulată. Un astfel de giroscop este giroscopul *Bliss-Leawitt*.

Menționăm deasemenea faptul că astfel de giroscopae stabilizatoare automate s'au montat și pe avioane având mecanisme de comandă pneumatice sau electrice ale aparatelor ce pun în mișcare cârmele.

Cităm astfel auto-stabilizatoarele *Sperry*, *Boykow*, *Boucher* și *Askania*.

Aceste auto-stabilizatoare formează puntea de trecere către admirabila realizare în aviație a pilotului automat, de care ne ocupăm pe larg într'un capitol următor.

CAPITOLUL XXI

Giroscopul întrebuițat ca stabilizator al vapoarelor
și al vagoanelor pe o singură șină

A) Stabilizarea vapoarelor.

În capitolul precedent, am studiat giroscopul ca stabilizator prin acțiune indirectă, giroscopul fiind întrebuițat numai pentru transmiterea mișcării unor mecanisme care execută stabilizarea.

În alte cazuri această stabilizare este executată chiar de giroscop direct.

În această a doua categorie se cuprind giroscopurile *Schlick* și *Sperry* pentru vapoare, *Scherl* și *Brennan* pentru vagoane cu o singură șină.

Giroscopul Schlick. Se compune dintr'un volant V (fig. 73) cu axa Ox în jurul căreia se rotește cu o iuțeală foarte mare $\vec{\omega}$.

Volantul este susținut prin capetele axei sale BB de o armătură S mobilă în jurul axei transversale AOA .

De partea inferioară a armăturii S este prinsă o greutate, astfel încât în poziție normală, Ox este verticală, iar AOA orizontală.

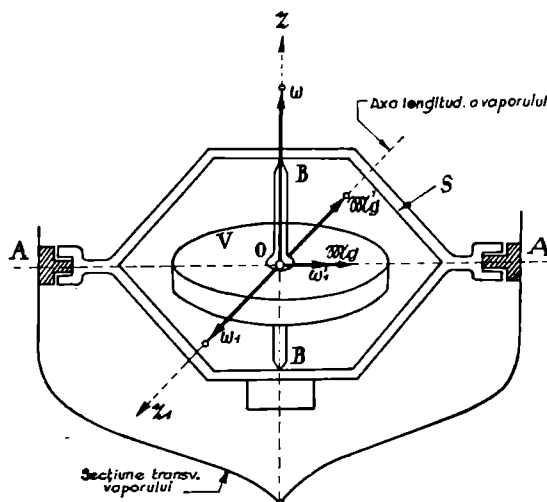


Fig. 73

Să presupunem că vaporul sub acțiunea valurilor se înclină, rotindu-se în jurul axei sale longitudinale Ox_1 cu iuțeala unghiulară $\vec{\omega}_1$ (mișcare de ruliu). Se produce astfel momentul giroscopic

$$\vec{M}_g = I_x \vec{\omega} \wedge \vec{\omega}_1$$

de mărime $I_x \omega \omega_1$, îndreptat în sensul arătat pe figură pe direcția AOA. Acest moment, lucrând prin capetele BB ale axei volantului, îi produce o rotație în jurul axei AOA cu o iuțeală pe care o notăm ω'_1 (mișcare de tangaj). Din cauza lui ω'_1 se produce un al doilea moment giroscopic dirijat de rândul acesta în lungul axei Oz_1 a vaporului, de sens contrar cu vectorul $\vec{\omega}_1$, $\vec{\mathcal{M}}'_g = I_x \vec{\omega} \wedge \vec{\omega}'_1$, de mărime $\mathcal{M}'_g = I_x \omega \omega'_1$.

Prin intermediul lagărelor AA, momentul \mathcal{M}'_g se împotrivesc acțiunii ruliului, micșorând prin aceasta, înclinarea navei în jurul axei sale longitudinale.

Pentru a amortiza oscilațiile sale, giroscopul Schlick are și o frână de amortizare care dă vasului o perioadă de oscilare foarte lungă, făcând astfel imposibilă o sincronizare periculoasă cu ruliul.

Giroscopul Schlick funcționează bine în mersul în linie dreaptă al vasului, precum și în întoarceri ale vasului în jurul verticalei făcute în acelaș sens cu rotația giroscopului. În cazul în care întoarcerea vasului în jurul verticalei este de sens contrar sensului de rotație al giroscopului, pentru anumite iuțeli de rotație ale vasului, giroscopul Schlick în loc de a opri, produce el însăș mișcări de ruliu care pot deveni periculoase.

Giroscopul Sperry. Un alt giroscop mai nou, întrebuințat pentru stabilizarea vapoarelor, este giroscopul Sperry, compus ca și giroscopul Schlick dintr'un volant cu axa verticală, a cărei mișcare de rotație este produsă de un electromotor. Un alt electromotor produce mișcarea de precesie a axei volantului în planul longitudinal al navei. Această mișcare este regulată printr'un al doilea giroscop mic și foarte sensibil, denumit *giroscopul-pilot*, care printr'un releu electric, determină prin electromotorul respectiv mișcarea de precesie.

Ca și în cazul giroscopului Schlick, cuplul giroscopic $\vec{\mathcal{M}}'_g$ care amortizează ruliul este produs de mișcarea de precesie în planul longitudinal, caracterizată prin vectorul iuțeală $\vec{\omega}'_1$.

Un alt stabilizator pentru vapoare este aparatul anti-ruliu *Schneider-Fieux* compus din două giroscopuri care se învârtesc în sens contrar cu axele înclinate între ele și situate în acelaș plan.

Cu titlu de curiozitate, amintim giroscopul *Bessemer* construit pentru a stabili numai una sau mai multe cabine ale unui vapor, după ce în prealabil aceste cabine se separau, prin suspensie, de restul vaporului.

B) Stabilizarea vagoanelor cu o singură șină (monorail).

Giroscopul Scherl. Pentru stabilizarea vagoanelor ce merg pe o singură șină, Scherl întrebuintează un giroscop cu axa de rotație proprie Oz , giroscop mobil în jurul axei AA care este solidară cu giroscopul (fig. 74).

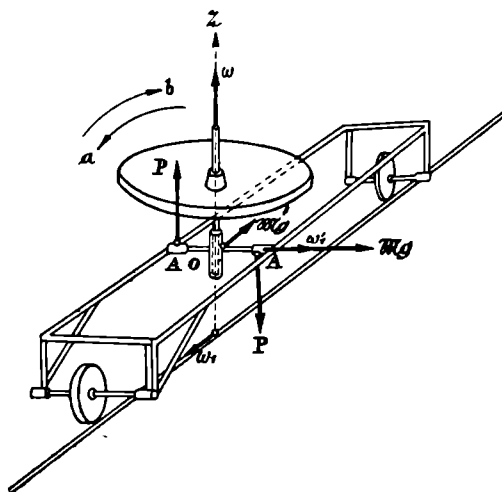


Fig. 74

În poziție normală, Oz este vertical, iar AA este orizontală. Se dă o iuțeală mare $\vec{\omega}$ în jurul lui Oz . Să presupunem că vagonul se înclină dintr-o cauză oarecare în jurul axei sale longitudinale, cu iuțeala $\vec{\omega}_1$, și se produce astfel cuplul giroscopic $\vec{\mathcal{M}}_g$. Acest cuplu rotește axa Oz a giroscopului în jurul lui AOA cu iuțeala $\vec{\omega}_1'$.

Datorită acestei rotații, se produce cuplul giroscopic $\vec{\mathcal{M}}_g'$ și presiunile \vec{P} pe articulațiile AA care rotind vagonul în sens invers lui $\vec{\omega}_1$ îl stabilizează.

Aceste presiuni \vec{P} sunt date de relația vectorială:

$$\vec{\mathcal{M}}_g' = \vec{P} \wedge \vec{AA}$$

Scalar:

$$P = \frac{\mathcal{M}_g'}{AA}$$

Pe figură s'a considerat că vagonul are tendința să cadă în sensul săgeții a . Cuplul de redresare \mathcal{M}_g' caută să readucă axa Oz înapoi, în sensul săgeții b .

Se observă o identitate teoretică absolută între giroscopul Schlick și Scherl.

Vagonul prevăzut cu giroscopul Scherl este stabil în mers rectiliniu precum și în curbele în care iuțeala de rotație a vagonului are acelaș sens cu iuțeala $\vec{\omega}$ a giroscopului. În curbele în care aceste sensuri nu corespund, vagonul nu mai este stabil și se poate răsturna. (Aceaș observație s'a făcut și la vapoarele prevăzute cu giroscopul Schlick).

În cazul când iuțeala proprie a giroscopului este de sens contrar celui considerat, pentru o rotire de cădere a vagonului în acelaș sens $\vec{\omega}_1$, primul cuplu giroscopic \vec{M}_g își schimbă sensul ca și iuțeala de rotație $\vec{\omega}_1'$, însă cuplul de stabilizare \vec{M}'_g își păstrează sensul. Prin urmare, sensul de rotație proprie al giroscopului este indiferent pentru stabilizarea vagonului.

Giroscopul Brennan, întrebuințează pentru stabilizarea vagonului un volant cu axa orizontală (fig. 75). Pentru o rotație proprie $\vec{\omega}$ a volantului și o rotație de cădere a vagonului $\vec{\omega}_1$, regăsim primul cuplu giroscopic \vec{M}_g , rotirea ω_1' datorită acestui cuplu, precum și cuplul de redresare \vec{M}'_g ca și în cazurile studiate precedent.

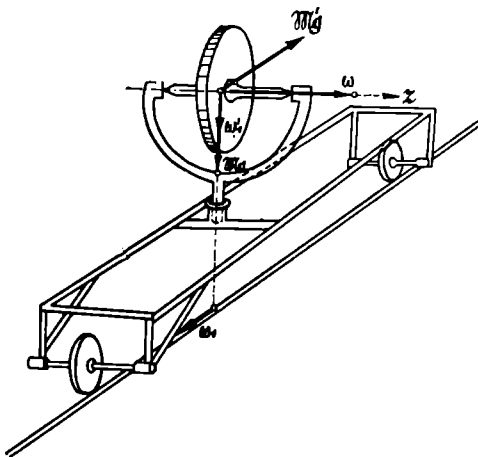


Fig. 75

Prin schimbarea sensului iuțelii de rotație proprie, cuplul de redresare rămâne acelaș. Prin urmare, și în cazul giroscopului Brennan, stabilizarea produsă de giroscop, nu depinde de sensul rotației proprii a acestuia.

Un vagon prevăzut cu un singur giroscop Brennan, nu este stabil decât în mișcarea rectilinie a vagonului. În curbă, iuțea de rotație în jurul centrului curbei produce un cuplu giroscopic, de rândul acesta de răsturnare. Pentru compensare, vagoanele sunt prevăzute cu două giroscopae Brennan, care se rotesc în sensuri contrare. Prin aceasta, cuplele de redresare se adună, iar în curbă cuplele giroscopice de răsturnare se distrug, fiind egale și de sens contrar. În fig. 76 este arătat modul în care aceste cuple de răsturnare \vec{M}_g se distrug. Pentru mărirea stabilității experiența a do-

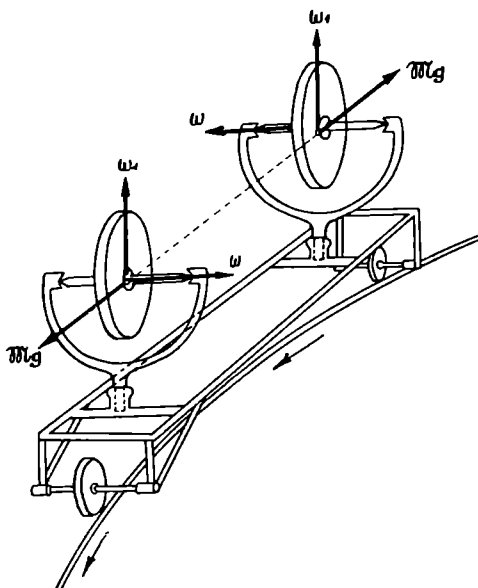


Fig. 76

vedit că este necesar să se acționeze din afară pentru mărirea precesiei, prin aparate auxiliare, fie manevrate cu mâna, fie automat, cu aer comprimat.

Menționăm faptul că pe proprietatea de stabilizare a giroscopului Brennan, inginerul Schilowsky a realizat vagonul monorail și automobilul giroscopic pe două roți.

Cu titlul de curiozitate, amintim și invenția motocicletei giroscopice cu o singură roată făcută de un american.

Incheem acest capitol cu observația că realizările practice ale vagoanelor monorail, automobile și motociclete giroscopice au rămas — cel puțin până acum — în domeniul experimental, întrucât din cauza inconvenientelor ce prezintă în viraje, nu s'au putut răspândi și industrializa.

CAPITOLUL XXII

Pilotul-automat.

Prin pilotul-automat se înțelege un sistem de aparate, care acționând asupra cârmei de direcție, cârmelor de profunzime și aripișoarelor, menține avionul fără intervenția pilotului, într-o direcție și poziție dinainte determinate.

Rolul pilotului-automat este de-a înlocui pilotul-om în conducerea avionului, pentru un regim permanent de zbor ales de pilot, în conformitate cu caracteristicile avionului, starea atmosferică, condiții de rapiditate, siguranță, consumație etc.

Prin întrebuițarea pilotului-automat se obțin următoarele avantajii:

a) *Se micșorează munca brută a pilotului lăsându-i libertatea de a se ocupa în timpul zborului de regim cu studiul navigației, cu stabilirea legăturilor și comunicațiilor etc.* În multe cazuri, pilotul-automat face inutilă în avion, prezența unui pilot ajutor.

b) *Conducerea avionului este mai sensibilă prin pilotul-automat, întrucât acesta detectează instantaneu cea mai mică deviație din orientarea ordonată, pe când pilotul-om, pentru a putea observa o perturbare în mișcare, trebuie ca aceasta să se fi produs în mod apreciabil și numai ulterior poate să ia măsuri de îndreptare.* Din această cauză, mersul unui avion pe timp rău cu ajutorul pilotului-automat este mai lin.

Deasemenea se obțin rezultate bune prin navigarea cu pilotul-automat în zborul fără vizibilitate. Redăm în cele de mai jos, descrierea și modul de funcționare al pilotului-automat britanic *Smith-Jaeger*.

Pilotul-automat britanic se compune din 2 giroscopae libere:

(1) un giroscop G_1 cu axa $a-a$ aproape orizontală așezată în planul longitudinal de simetrie al avionului, care servește pentru *menținerea direcției și stabilizarea tangajului* (rotire în jurul axei transversale a avionului) (fig. 77);

(2) un giroscop G_2 cu axa $a-a$ orizontală așezată într'un plan transversal avionului, care servește *pentru stabilizarea ruliului*, (rotire în jurul axei longitudinale a avionului) (fig. 78).

Ambele giroscopae se compun dintr'un volant cu suspensie Cardan și anume: axa volantului A este susținută printr'un inel interior B, care se poate roti la rândul său în jurul unui inel exterior C mobil și el în raport cu suportul D, rigid legat de avion.

Axele de rotație sunt arătate în figură și notate respectiv aa , bb , cc , pentru volantul giroscopic A și inelele B și C.

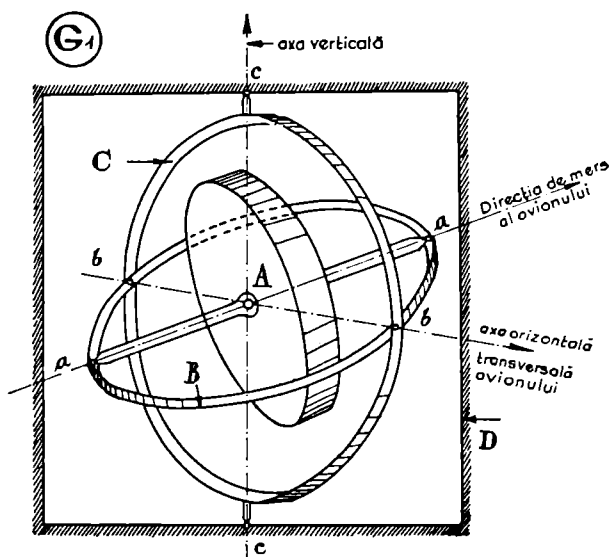


Fig. 77

Volantului A i se dă o mișcare de rotație cu turație foarte mare de aproximativ 10.000—12.000 ture pe minut. Această înțeață

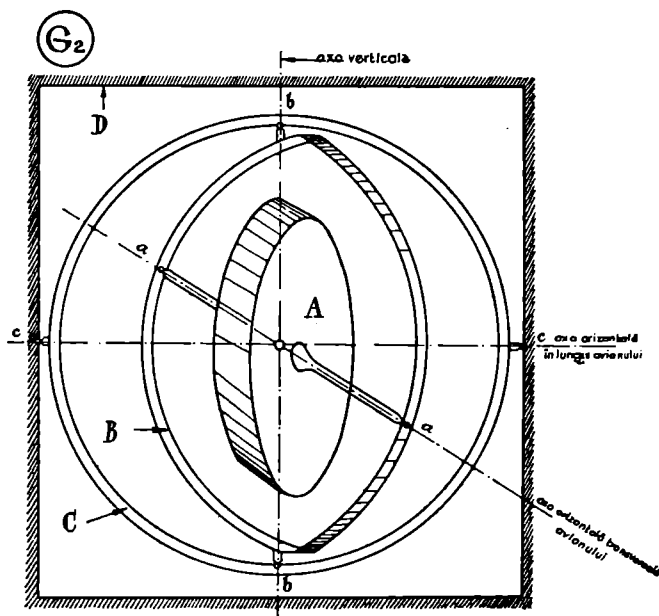


Fig. 78

este produsă și menținută prin acțiunea presiunii a 2 coloane subțiri de aer comprimat asupra volantului.

Aerul comprimat este adus prin pivotul inelului C și prin interiorul gol al acestui inel. Modul de funcționare al acestor giroscopae se întemeiază pe proprietatea axei volantului de a rămâne fixă în spațiu. Atât timp cât avionul zboară în direcția comandată și nu suferă mișcări de tangaj sau raliu, inelele giroscopelor și suportul lor rămân în nemișcare unul față de altul.

Dacă însă avionul are tangaj, inelul interior B al giroscopului G_1 se deplasează, față de suportul său D, rotindu-se în jurul axei bb (fig. 77). Când avionul își schimbă direcția, inelul exterior C al giroscopului G_1 se deplasează față de suportul său D rotindu-se în jurul axei cc .

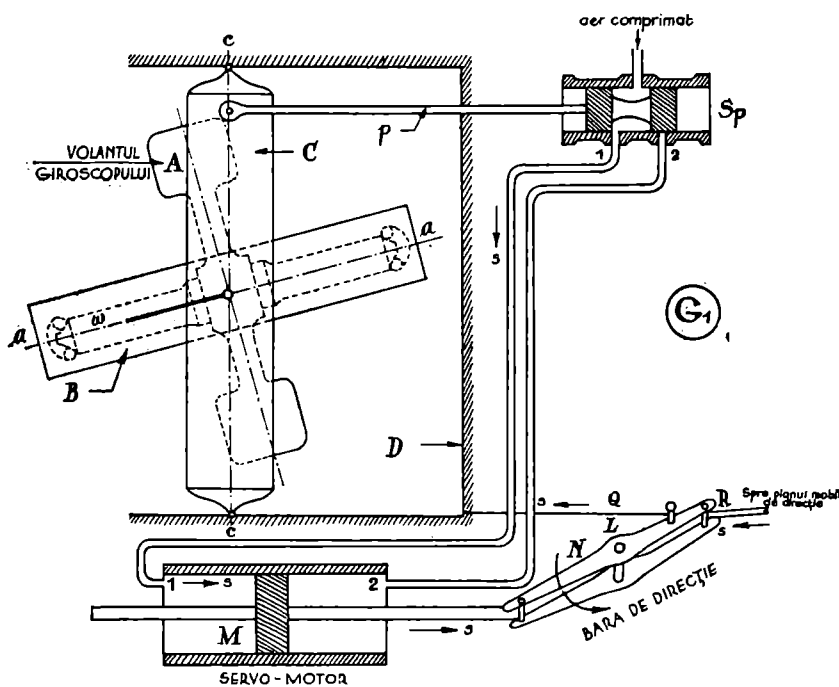


Fig. 79

Pentru mișcarea de raliu, giroscopul G_1 nu poate interveni, întrucât axa volantului A a acestui giroscop și axa raliului sunt aproape paralele. Din această cauză, a fost necesară întrebuințarea giroscopului G_2 , care în cazul raliului își deplasează inelul său exterior C, față de suportul său D, rotindu-se în jurul axei cc .

Asupra giroscopului G_2 , acțiunea tangajului nu are nici o influență, întrucât la acest giroscop, *axa sa de rotație și axa de rotație a tangajului sunt paralele.*

În cazul schimbării direcției și virărilor spre dreapta sau stânga, nu mai este același lucru. Aceste mișcări caută să dea gi-

roscopului G_2 o mișcare de precesie pentru împiedicarea căreia vor trebui luate măsuri speciale, pe care le vom studia mai departe.

Modul în care giroscopul pune în funcțiune planul mobil de direcție și profundorul pentru păstrarea direcției și pentru stabilizarea avionului în mișcarea sa de tangaj sunt date în fig. 79 și 80.

Astfel în fig. 79 în cazul unei schimbări de direcție, mișcarea

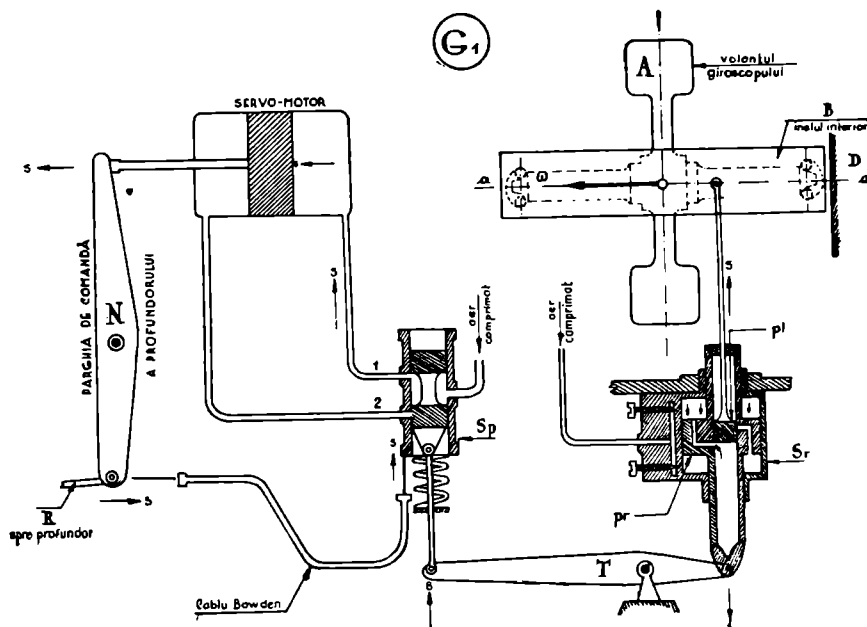


Fig. 80

relativă dintre inelul exterior C, care rămâne fix și suportul său D care se rotește în jurul axei cc , produce o mișcare între pistonul p prins de inelul C și supapa principală S_p , fixată de suportul D.

Prin această mișcare se dă drumul aerului comprimat dela compresor, fie prin tubul 1, fie prin tubul 2 printr'o parte sau alta a cilindrului servomotorului M. Presiunea introdusă în servomotor, va deplasa într'o direcție sau alta pistonul servomotorului care acțiunează asupra barei de direcție N. Prin această acțiune, bara de direcție se rotește în jurul axei sale L și prin pârghia R pune în mișcare planul mobil de direcție, care va readuce avionul în direcția fixată. (În figură s'a arătat cu săgeți s sensul mișcărilor în cazul când pistonul p , liberează trecerea aerului comprimat în tubul 1).

Mecanismul acesta este numit *mecanism giroscopic al comenzii de direcție* și este prevăzut cu un sistem compensator care limitează și oprește deschiderea prin pistonul p a supapei S_p .

Această operație se face prin intermediul barei Q în modul

următor: Odată cu rotirea cârmei de direcție în jurul lui L, bara Q acționează asupra suportului D care nu este fixat rigid față de avion, ci permite o rotație mică în jurul axei verticale pe un cusinet situat sub pivotul inferior c .

Ca urmare, prin bara Q cadrul D este rotit în sens invers rotației inițiale, pistonul revine astfel în poziția inițială și pătrunderea aerului în tuburi este oprită.

Figura 80 reprezintă mecanismul de comandă al tangajului și ne arată modul în care este acționat profundorul de tangaj. Se observă că, spre deosebire de mecanismele de comandă ale direcției, punerea în funcțiune a supapei principale S_p se face cu ajutorul unei supape auxiliare, *supapa de releu* S_r cu două pistoane, un piston interior p_i legat de giroscop, care comandă mișcarea pistonului principal p_r . Legătura dintre supapa de releu și supapa principală este stabilită printr'o pârghie amplificatoare T.

Necesitatea introducerii acestei supape intermediare a rezultat din grija constructorului ca reacțiunea pistonului legat de giroscop să nu producă asupra inelului interior B decât un cuplu de mărime neglijabilă incapabil de a modifica direcția axei giroscopului.

O a doua deosebire a mecanismului de comandă al tangajului în raport cu cel al comenzii de direcție, constă în sistemul de compensare compus de rîndul acesta dintr'un cablu *Bowden* care readuce supapa principală în poziția inițială, împiedicând trecerea în tuburi a aerului comprimat.

Modul de funcționare este ușor de dedus din fig. 80 mișcarea producându-se prin deplasarea relativă dintre inelul interior B și suportul D și se transmite succesiv prin pistonul interior p_i la pistonul principal p_r apoi la pârghia T, supapa principală S_p , unul din tuburile 1 sau 2, servomotorul M, bara N a profundorului și pârghia R de acțiune asupra profundorului.

Cablul *Bowden* este pus în mișcare de bara profundorului și acționează supapa principală S_p în acelaș sens în care a fost acționat și pistonul acestei supape prin giroscop. Se închide astfel pătrunderea aerului comprimat prin tub în servomotor.

(În fig. 80 s'ă arătat cu săgeata s sensul mișcărilor în cazul când pistonul supapei principale S_p deschide drumul aerului comprimat în tubul 1). Modul de punere în funcțiune al aripioarelor cu ajutorul giroscopului G_2 pentru a stabiliză avionul în mișcările sale de ruluu este identic cu acela arătat în mecanismul de comandă al profundorului. Singura deosebire esențială constă în faptul că sistemul compensator nu este alcătuit printr'un cablu *Bowden* lu-

crând asupra supapei principale S_p , ci printr'o pârghie legată de bara de comandă, care rotește suportul giroscopului în sens invers rotației inițiale.

Sistemul de compensare al mecanismului comenzii aripioarelor este deci asemănător mecanismului de comandă al direcției, (pârghia Q din fig. 79).

Schimbarea direcției avionului.

În cele precedente, am schițat modul în care giroscopul, păstrându-și direcția fixă, stabilizează direcția de mers a avionului.

Giroscopul G_1 poate însă servi și la schimbarea voită a direcției avionului. Se dă drumul aerului comprimat cu ajutorul *robinetului schimbării de direcție*. Aerul comprimat trece printr'un cilindru, de o parte sau de alta a pistonului, care este astfel pus în mișcare și, prin ajutorul unui braț, aplică o forță asupra inelului interior B, în dreptul pivotului a , producând un cuplu de axă bb . Sub efectul acestui cuplu, giroscopul capătă o mișcare de precesie în jurul verticalei cc , producând o deplasare între inelul exterior al giroscopului și suportul său și prin aceasta o *rotire a avionului în plan orizontal*, prin intermediul mecanismului de comandă al direcției.

Sensul de rotație spre stânga (babord) sau spre dreapta (tribord) depinde de sensul momentului produs în jurul axei bb și prin urmare de introducerea aerului comprimat de o parte sau cealaltă a pistonului, introducerea comandată de pilotul-om prin manevrarea robinetului schimbării de direcție.

Schimbarea înclinării avionului

Pentru a putea face posibilă schimbarea, prin pilotul automat, a înclinării avionului, inelul exterior C al giroscopului G_1 este prevăzut cu o contragreutate prinsă cu o bară situată în planul acestui inel și perpendiculară pe direcția axei cc (fig. 81).

În cazul când axa cc este verticală, momentul contragreutății în raport cu axa cc este nul, și nu va avea deci nici un efect asupra giroscopului. Pentru o înclinare anumită a avionului (în urcare sau în coborâre) axa cc nu mai este verticală. În acest caz, contragreutatea produce un cuplu în jurul lui cc al cărui efect ar fi o mișcare de precesie a giroscopului în jurul axei bb . Pentru

păstrarea unei anumite înclinări, trebuie, prin urmare, ca efectul contragreutății să fie anihilat.

În acest scop se aplică asupra inelului exterior, un cuplu egal și direct opus, cu ajutorul unei pârgii T cu resort ce poate fi pusă în funcțiune printr'o manetă de comandă, denumită *comanda profundorului*.

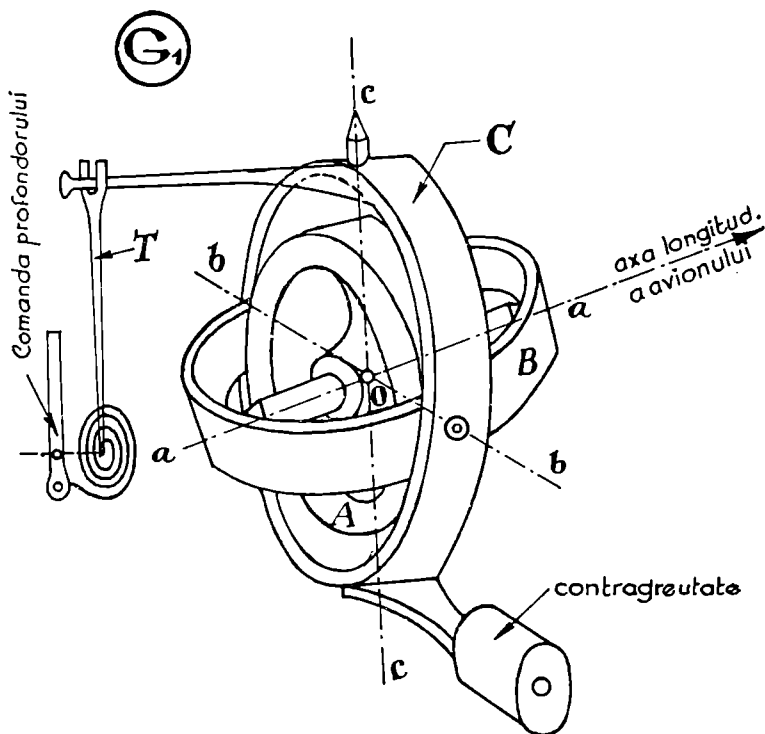


Fig. 81

Când pilotul-om dorește să schimbe înclinarea avionului, acționează comanda profundorului. Egalitatea dintre cele 2 cuple este astfel distrusă, iar giroscopul capătă o mișcare de precesie, până când se restabilește echilibrul dintre cuple, pentru o nouă poziție a axei volantului aa .

Ulterior, noua poziție a axei volantului rămâne constantă și păstrează neschimbată noua înclinare impusă prin comanda profundorului.

Menționăm deasemenea faptul important că *contragreutatea joacă și rolul de redresor*, întrucât de îndată ce inelul exterior este deplasat din poziția de echilibru din diferite cauze (rotația pământului, schimbarea de latitudine, etc.) cuplele nu se mai echilibrează, iar precesia produsă de diferența de moment readuce axa giroscopului în poziția comandată.

Mecanismul de redresare al giroscopului G_2 (fig. 82)

Pentru menținerea axei aa a volantului G_2 în planul transversal al avionului și pentru menținerea într'un plan vertical a inelului exterior C , giroscopul G_2 este prevăzut cu următoarele piese:

a) o greutate prinsă rigid de inelul exterior și situată în prelungirea axei bb .

b) o supapă principală S_p , care poate fi pusă în acțiune prin mișcarea relativă dintre inelul interior B de care este prins pistonul și inelul exterior C de care este fixată supapa.

c) un cilindru cu piston cu dublu efect E denumit *cilindrul de precesie*.

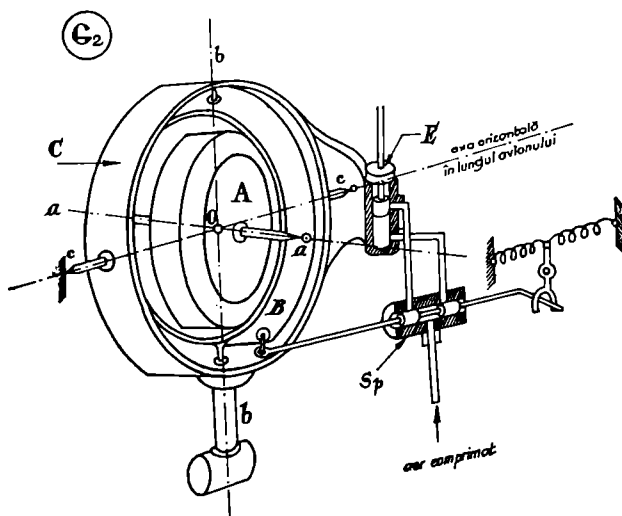


Fig. 82

d) un arc redresor.

Să considerăm avionul în zbor rectilin, și să presupunem că dintr'o cauză oarecare, inelul C și deci și greutatea sunt deviate din poziția verticală. Din această cauză, greutatea produce un cuplu de axă cc al cărui efect va fi o mișcare de precesie a giroscopului în jurul axei bb .

Prin această mișcare de precesie, inelul interior B se rotește și prin supapa principală S_p dă drumul aerului comprimat în cilindru E . Pistonul cilindrului E este astfel pus în mișcare și la rândul său aplică asupra inelului exterior C un cuplu de sens contrar celui produs prin deplasarea greutății. Acest aparat oprește deci mișcarea de precesie.

Pe de altă parte, arcu redresor, prin mișcarea inelului inte-

rior B, reacționează asupra acestui inel, producând un cuplu redresor îndreptat după axa bb .

Acest cuplu redresor produce o precesie a inelului exterior C în jurul axei longitudinale, readucând acest inel, precum și greutatea într'un plan vertical.

Să considerăm acum avionul în viraj. În acest caz, greutatea este supusă unei forțe centrifuge ce exercită un cuplu după axa cc a inelului exterior.

Acest cuplu produce o precesie în jurul verticalei bb a inelului interior al giroscopului. Pentru o anumită iuțeală a avionului (se alege iuțeala normală de sbor a avionului) se calculează greutatea giroscopului astfel încât iuțeala unghiulară a precesiei mai sus menționată să fie egală cu iuțeala unghiulară de rotație a avionului.

În acest mod, nu se produce nici o mișcare relativă între avion și giroscop, greutatea păstrează direcția verticală și inelul interior rămâne în planul transversal al avionului.

Rezultă că pentru acea iuțeală anumită a avionului, virarea se face *plat*.

Pentru orice altă iuțeală, cilindrul de precesie exercită un cuplu care menține inelul interior B în poziția sa transversală printr'o mișcare de precesie. Resortul înclină însă greutatea și prin urmare avionul.

În afara pilotului-automat britanic realizat de casa constructoare Smith și descris mai sus, mai sunt asemenea aparate construite și de alte case constructoare. Astfel este pilotul-automat *Sperry* care întrebuințează ca și pilotul automat britanic, două giroscopae, comanda cârmelor obținându-se însă prin intermediul unei membrane manometrice sensibile la diferența de presiune produsă prin mișcarea inelelor cardanice ale giroscopului.

Un alt pilot-automat este cel realizat de *Alkan* și care este compus din trei giroscopae electrice dintre care unul este direcțional, iar celelalte două servesc la stabilirea orizontului giroscopic.

CAPITOLUL XXIII

Compasul giroscopic

Compasul giroscopic este întrebuințat pentru determinarea direcției Nord-Sud în marină și aviație. Acest aparat înlocuiește adesea busola a cărei indicații sunt lipsite de precizie fiind incon-

tinuu influențate de prezența în apropiere a masselor de fier, a curenților electrici sau magnetici etc. În afară de aceasta, citirea indicațiilor busolei întâmpină greutăți din cauza instabilității acului magnetic ale cărui oscilații cu perioadă lungă de amortizare nu permit citiri instantanee.

Din aceste cauze, compasul giroscopic este indispensabil în conducerea submarinelor și foarte des întrebuințat pe vasele de război.

Schematic, compasul giroscopic se compune dintr'un volant V a cărui axă de simetrie Ox aproape orizontală este susținută printr'un cadru într'un punct S (fig. 83). Pentru menținerea și readucerea aței Ox în poziție orizontală, o greutate mg este așezată în A pe axa Oy perpendiculară pe Ox .

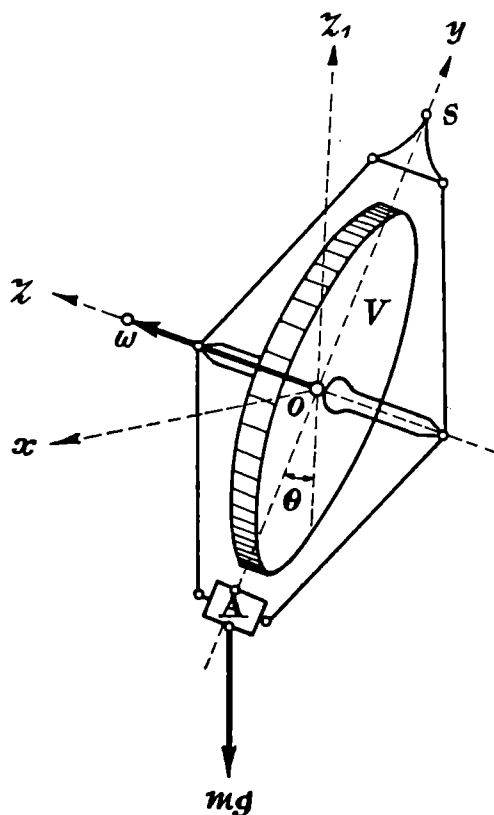


Fig. 83

Luăm ca sistem de axe legat fix de giroscop sistemul de axe $Oxyz$, în care Ox și Oy sunt cele de mai sus, iar Oz este perpendicular pe planul xOy astfel încât sistemul $Oxyz$ să fie un sistem drept.

Figura 84 reprezintă planul vertical zOy , iar figura 85 reprezintă planul xOz perpendicular pe Oy .

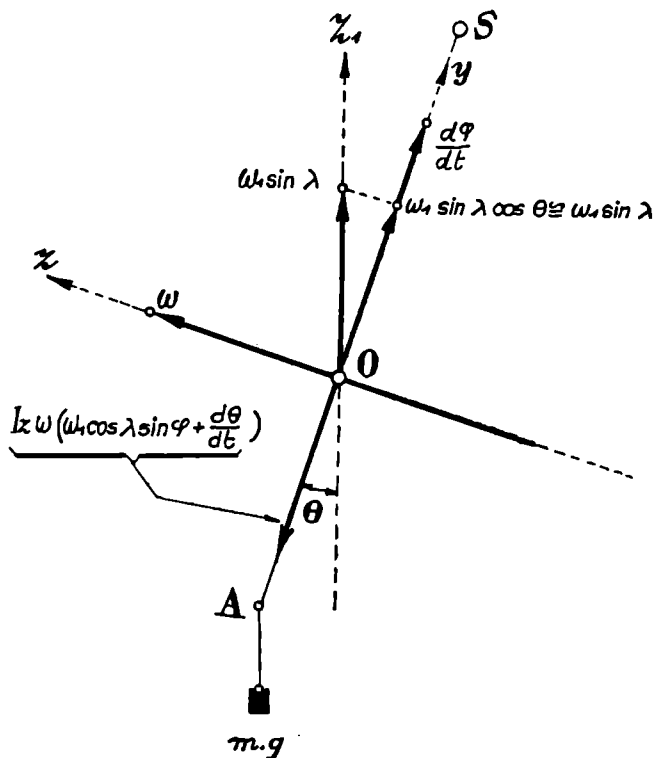


Fig. 84

Fie θ = unghiul z_1Oy (Oz_1 este verticala locului) și φ = unghiul zON' (ON' = tangenta la meridian).

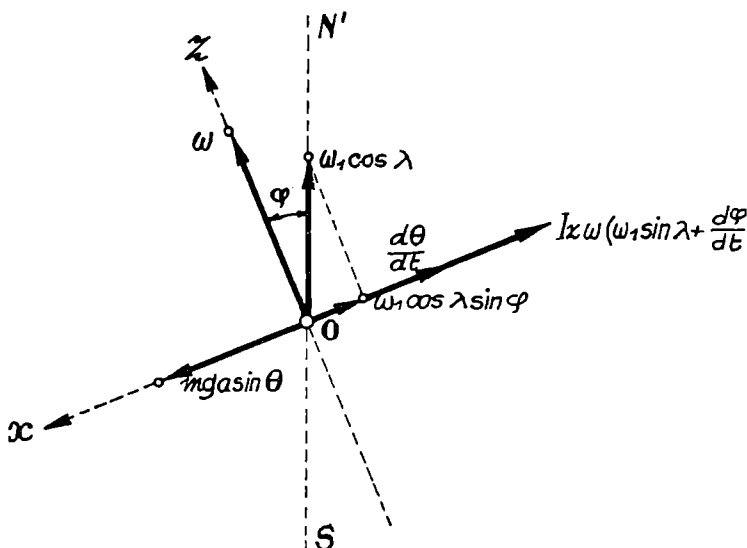


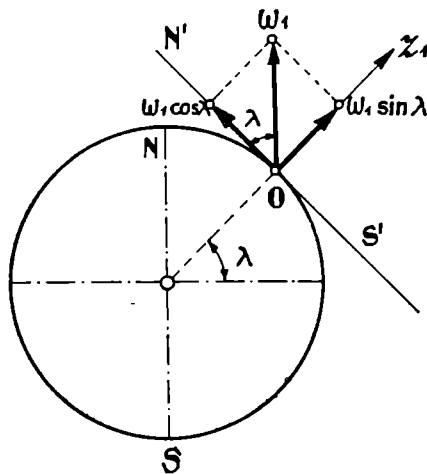
Fig. 85

Aceste două unghiuri determină complet poziția compasului giroscopic.

Iuțea unghiulară $\vec{\omega}_1$ a pământului se poate descompune în două componente $\vec{\omega}_1 \sin \lambda$ îndreptată după verticala locului Oz_1 și $\vec{\omega}_1 \cos \lambda$ îndreptată după tangenta la meridian (fig. 86).

La rândul lor aceste componente dau următoarele proiecții pe direcțiile axelor de coordonate:

- $\omega_1 \cos \lambda \sin \varphi$ pe axa Ox
- $\omega_1 \sin \lambda \cos \theta$ pe axa Oy
- $\omega_1 \sin \lambda \sin \theta + \omega_1 \cos \lambda \cos \varphi$. . . pe axa Oz



Cig. 86

$\Omega_x; \Omega_y; \Omega_z$ fiind proiecțiile iuțelii totale $\vec{\Omega}$ pe cele 3 axe, avem

$$\Omega_x = -\omega_1 \cos \lambda \sin \varphi - \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Omega_y = \omega \sin \lambda \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Omega_z = \omega + \omega_1 \sin \lambda \sin \theta + \omega_1 \cos \lambda \cos \varphi.$$

Având în vedere că θ este mic, iar ω foarte mare în comparație cu ω_1 , putem scrie:

$$\Omega_x = -\omega_1 \cos \lambda \sin \varphi - \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Omega_y = \omega_1 \sin \lambda + \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Omega_z = \omega.$$

Pentru a putea studia mișcarea compasului giroscopic în raport cu pământul trebuie să introducem cuplele de inerție (giroscopice):

După axa Ox $\vec{\mathfrak{M}}_{gx} = I_x \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}_y$ de mărime $- I_x \omega$
 $\left(\omega_1 \sin \lambda + \frac{d\varphi}{dt} \right)$

După axa Oy $\vec{\mathfrak{M}}_{gy} = I_x \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}_x$ de mărime $- I_x \omega$
 $\left(\omega_1 \cos \lambda \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \right)$.

Ecuțiile mișcării sunt:

$$I_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \mathfrak{M}_{gy} = - I_x \omega \left(\omega_1 \cos \lambda \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (84)$$

$$I_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - mga \sin \theta - \mathfrak{M}_{gx} = - mga \sin \theta + I_x \omega \left(\omega_1 \sin \lambda + \frac{d\varphi}{dt} \right) \quad (85)$$

I_1 este momentul de inerție al tuturor pieselor ce iau parte la rotație (inclusiv giroscopul) în raport cu Oy .

I_2 este momentul de inerție al acestor piese în raport cu Ox , a este distanța la O a punctului de aplicare a greutateii.

Semnul momentului \mathfrak{M}_{gy} din ecuația (84) este pozitiv întrucât caută să mărească unghiul φ . Semnele momentelor greutateii și \mathfrak{M}_{gx} din ecuația (85) sunt negative căci caută să micșoreze unghiul θ . În acest ultim caz, se vede *rolul greutateii de a menține axa Oy cât mai aproape de verticală*.

Cum θ este mic, $\sin \theta \cong \theta$, și $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$.

Din (85) rezultă

$$\theta = \frac{I_x \omega \left(\omega_1 \sin \lambda + \frac{d\varphi}{dt} \right)}{mga} \quad (86)$$

Prin derivare obținem:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{I_x \omega}{mga} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

Introducând această valoare în (84) și simplificând:

$$\left(I_1 + \frac{I_x^2 \omega^2}{mga} \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + I_x \omega \omega_1 \cos \lambda \sin \varphi = 0.$$

sau pentru φ suficient de mic, având $\sin \varphi = \varphi$

$$\left(I_1 + \frac{I_x^2 \omega^2}{mga} \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + I_x \omega \omega_1 \cos \lambda \varphi = 0 \quad (87)$$

Ecuția (87) reprezintă o mișcare oscilatorie armonică în jurul lui ON' cu perioada:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 + \frac{I_z^2 \omega^2}{mga}}{I_z \omega \omega_1 \cos \lambda}} \quad (88)$$

Neglijând termenul I_1 față de $\frac{I_z^2 \omega^2}{mga}$, obținem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z \omega}{mga \omega_1 \cos \lambda}} \quad (89)$$

Presupunând la $t=0$, $\varphi=0$, obținem din (87):

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (90)$$

Rezultă:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

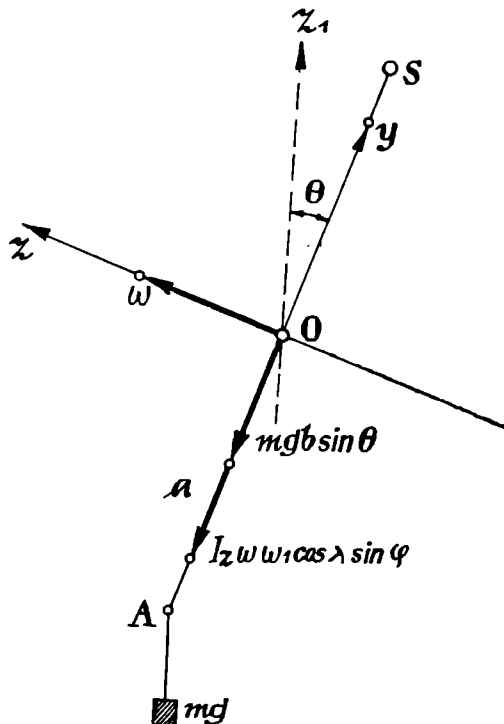


Fig. 87

Introducând această valoare în (86) și ținând seama de (89), căpătăm:

$$\theta = \frac{I_z \omega \omega_1 \sin \lambda}{mga} + \varphi_0 \sqrt{\frac{I_z \omega \omega_1 \cos \lambda}{mga}} \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (91)$$

Relațiile (90) și (91) determină complet mișcarea compasului giroscopic.

Din (87) rezultă că poziția de echilibru a compasului are loc pentru $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$; $\varphi = 0$, adică axa Oz a giroscopului este îndreptată după direcția meridianului.

Ecuatiile (90) și (91) ne arată însă că mișcarea compasului este oscilatorie în jurul poziției de echilibru. Rezultă prin urmare, necesitatea introducerii unui amortisor care să oprească această oscilație. În acest scop, greutatea mg în loc să fie în A pe Oy , se deplasează spre *Est* cu o distanță $OA' = b$. Prin această mutare greutatea mg , dă în raport cu Oy momentul $mg b \sin \theta$ (fig. 87) și (fig. 88).

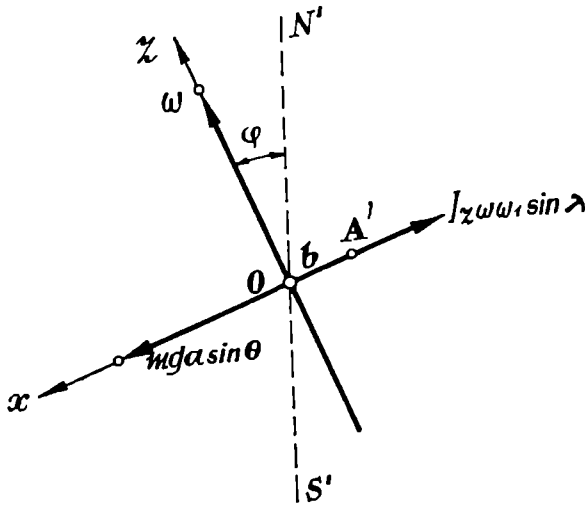


Fig. 88

Pentru echilibru pe axele Ox , Oy :

$$\begin{aligned} -mg b \sin \theta - I_z \omega \omega_1 \cos \lambda \varphi &= 0 \\ m g a \sin \theta - I_z \omega \omega_1 \sin \lambda &= 0. \end{aligned}$$

De unde, prin eliminarea lui $\sin \theta$:

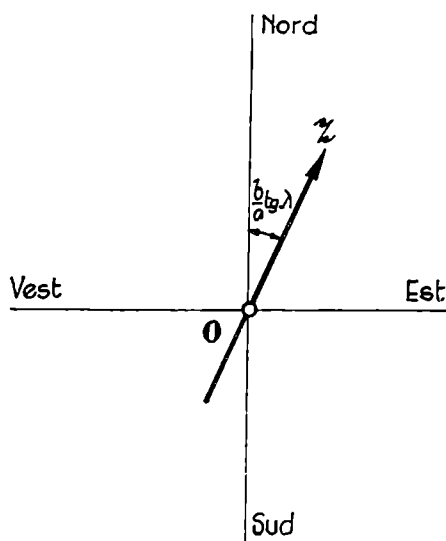
$$\varphi = - \frac{b}{a} \operatorname{tg} \lambda.$$

Obținem astfel, odată cu amortizarea și o deviere a axei Oz a compasului. și anume o deviere spre *Est* (φ negativ) față de meridian, pentru latitudinea nordică, (fig. 89). Această deviere este vestică pentru emisfera de Sud a pământului.

În afară de această deviere, în întrebuințarea compasului gi-

rosopic, trebuie ținut seama și de devierea produsă prin mișcarea vasului, care depinde de componenta iuțelii vasului, după direcția meridianului, deviație dată de tabele speciale.

Pentru ca, prin schimbarea de iuțală sau în viraj, direcția Oz a axei giroscopului să nu se modifice sensibil, compasul se construiește astfel încât perioada sa T dată de (88) să fie egală cu $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ unde R este raza pământului. Deasemenea pentru a se împiedica influența ruliului și tangajului se adaugă compasului un sistem de greutate de compensare.



Deviația axei compasului giroscopic
în emisfera boreală

Fig. 89

Ca realizare practică a compasului giroscopic, menționăm compasul giroscopic *Anschütz* care este alcătuit dintr'un vas fix K umplut cu mercur în care plutește un flotor inelar F care poartă la partea superioară roză R și la partea inferioară cutia C cu giroscopul G (fig. 90).

Axa de rotație proprie a giroscopului este $a-a$ și este paralelă cu planul rozet R .

Sistemul compus din flotor, roză și cutia giroscopului formează un sistem rigid care urmează toate mișcărilor axei $a-a$ a giroscopului.

Sistemul este stabil având centrul de greutate situat puțin sub centrul de subpresiune al mercurului.

Un ac A ce coboară prin capacul vasului K centrează flotorul în mișcarea sa. Giroscopul G formează rotorul unui electromotor cu curent trifazic, statorul fiind montat în cutia C a giroscopului în exteriorul volantului giroscopului.

Curentul este adus la stator prin acul de centrare A care are extremitatea sa inferioară scufundată în mercur, printr'un tub

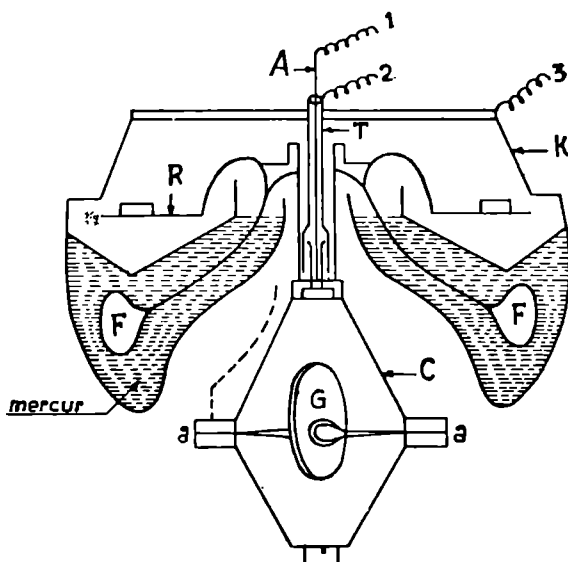


Fig. 90

de contact T din jurul acului A și prin vasul compasului, mercurul din vas și flotor (pe figură No. 1, 2, 3).

Alte compasuri giroscopice au fost realizate în diferite țări, precum compasul *Sperry, Brown, Florentia, Réghin*, precum și diferite modele de compase bigiroscopice și trigiroscopice ale casei *Anschütz*, etc.

CAPITOLUL XXIV

Orizontul giroscopic

În navigația marină, orizontul mării este adeseori acoperit de ceață, ceea ce face imposibilă întrebuințarea sextantului marin obișnuit.

În navigația aeriană, chiar când orizontul terestru este vizibil, determinarea la fiecare moment a poziției avionului în raport cu acest orizont este greu de efectuat.

Din aceste cauze, a rezultat necesitatea creării unui orizont artificial la realizarea căruia s'a întrebuințat giroscopul.

Pentru a putea întrebuința sextantul pe orice timp, căpitanul francez *Fleuriais* a adaptat la acest aparat un giroscop *G* închis într'un carter (*C*) fixat pe brațul sextantului (fig. 91).

Înainte de întrebuințare, robinetul 1 se lasă deschis în comunicație cu atmosfera, iar robinetul 2 este pus în legătură cu o pompă de aer aspiratoare acționată cu mâna.

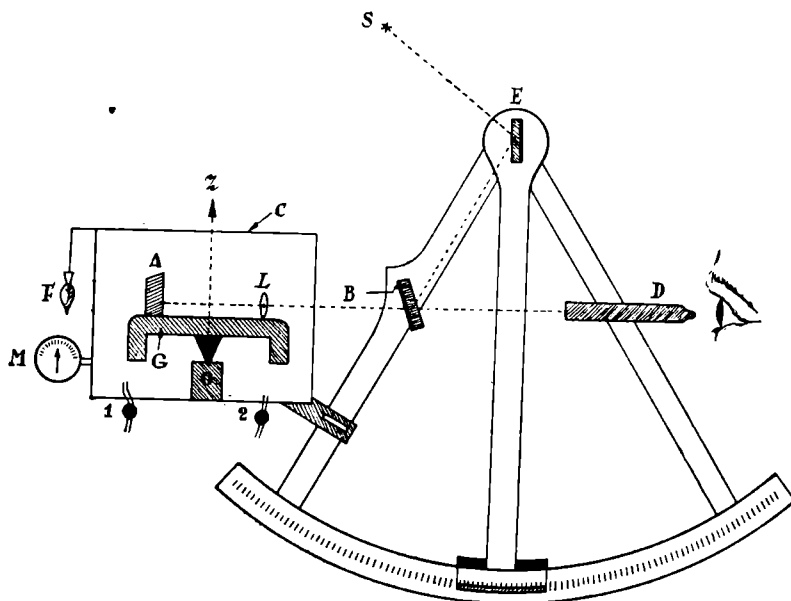


Fig. 91

Aerul va intra prin urmare prin 1 și va eși prin 2, producând un curent violent, care lucrând asupra volantului îi va imprima o iuțeală mare de rotație în jurul axei Oz .

Când această iuțeală este suficient de mare, se închide robinetul 1 și se continuă cu aspirarea aerului din carter cu pompa aspiratoare, până când se obține în interiorul carterului un vid anumit controlat cu manometrul *M*.

Se închide apoi și robinetul 2 iar giroscopul prin iuțeala inițială căpătată (mediul în care se rotește fiind de densitate foarte mică) este utilizabil circa 30 minute.

Volantul poartă pe partea sa superioară, un geam mat *A* și o lentilă *L*. Din cauza iuțelii de rotație mare, sub acțiunea greutății proprii (centrul de greutate este situat sub punctul *O* de sprijin) și a cuplului de redresare și amortizare al frecării, axa Oz este adusă în câteva minute în poziția verticală.

Ca urmare, linia ce unește centrul geamului mat și cel al lentilei este orizontală și constituie orizontul artificial giroscopic pentru sextant.

Prinderea carterului la sextant este astfel făcută încât linia orizontului artificial trece prin centrul oglinzii fixe B depe cadrul sextantului.

Cu toate că geamul mat și lentila nu trec prin fața lunetei D decât odată la fiecare rotație a volantului giroscopului, din cauza iuțelii mari a volantului și a persistenței pe retină a imaginilor, vizibilitatea lor este continuă.

Astfel în lunetă se va vedea imaginea stelei S, dublu reflectată prin două oglinzi E și B, proiectându-se pe geamul mat. Prin aducerea acestei imagini în centrul geamului mat, imaginea se va găsi pe orizont și unghiul citit pe sextant va da înălțimea stelei.

Menționăm că geamul mat este gradat printr' o rețea de linii orizontale. În cazul când imaginea stelei oscilează pe geamul mat se citesc pozițiile extreme deasupra și dedesuptul liniei centrale, iar înălțimea stelei se deduce ușor ulterior prin aplicarea regulei de simplă proporționalitate.

În timpul nopții un bec electric F exterior carterului, luminează rețeaua geamului mat.

În navigația aeriană, rolul orizontului artificial este și mai important întrucât este folosit pentru menținerea stabilității în zbor a avionului și este absolut indispensabil în zborul fără vizibilitate.

Realizări de orizonturi artificiale giroscopice sunt numeroase.

Principial, ca și la aparatul căpitanului Fleuriats, se compun dintr'un giroscop cu axa verticală. Când această axă este deviată din poziția verticală, din diferite motive, se produce automat un cuplu de redresare pentru readucerea pe verticală a axei. Acest cuplu de redresare este obținut în mod diferit de casele constructoare, fie prin presiunea aerului, sau prin depresiuni, prin frecare, cu ajutorul unei bile mobile, etc.³

În raport cu o machetă care execută aceleaș mișcări cu avionul se poate deduce înclinarea avionului.

Când aparatele de orizont artificial giroscopic sunt prevăzute cu capace gradate și transparente, prin care se poate urmări mișcarea axei verticale a giroscopului și prin urmare determina atât înclinarea față de orizont a axei longitudinale a avionului precum și a celei transversale, se numesc *giroclinometre*.

Cităm astfel giroclinometrele Bonneau, Badin, Derrier, Garnier, Le Prieur. S'au realizat orizonturi artificiale și cu ajutorul

unul *giroscop cu axa orizontală*, dintre care dăm mai jos descrierea orizontului artificial al lui Anschütz (fig. 92). Giroscopul *g*, suspendat cardanic de inelele 1 (mobil) și 2 (fix) este adus la o turație de $20000 \frac{\text{rot.}}{\text{min.}}$. De axa *bb* este fixat un disc pe care este

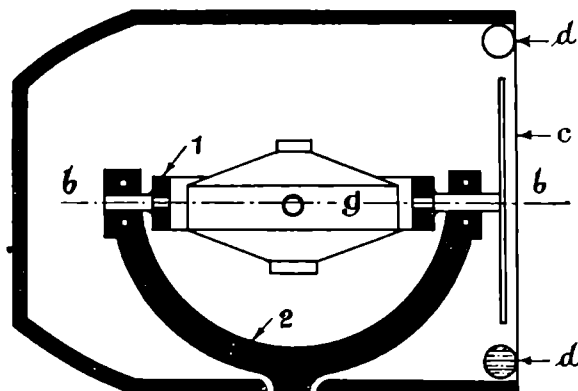


Fig. 92

trasată linia orizontului *h* (fig. 93). Capacul *cc* este transparent (fig. 92) și pe el este desenat o schemă de avion (fig. 93). De jur împrejurul capacului este un tub *d* cu apă a cărei suprafață se

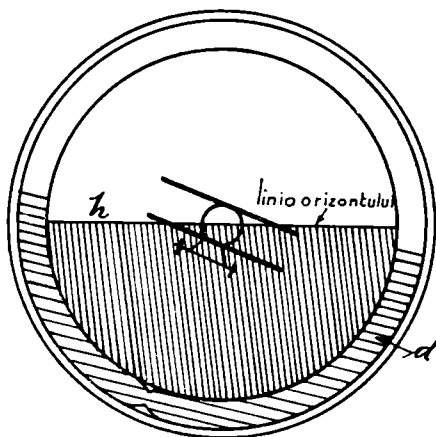


Fig. 93

încalină astfel încât să fie perpendiculară pe vectorul accelerației totale, rezultantă din compunerea accelerației avionului cu accelerația gravitației. Suprafața apei indică deci orizontul relativ.

Când avionul zboară pe o traecterie rectilinie, suprafața apei coincide cu orizontul *h*. Dacă și avionul schematic coincide cu

orizontul h , atunci și avionul real este orizontal, în caz contrar avionul real este înclinat cu înclinarea dintre cel schematic și h . Deci înclinarea avionului schematic față de h dă înclinarea avionului real față de orizont, iar înclinarea suprafeței apei față de h dă deplasarea accelerației rezultante față de verticală. Amortizarea mișcării apei se face îngustând tubul în punctul cel mai de jos.

Mai menționăm ca orizonturi giroscopice orizontale, orizonturile *Askania*, *Drexler*.

PARTEA III

P R O B L E M E

Problema 1

Să considerăm 4 cilindri omogeni, circulari, drepti, de acelaș volum și de aceeaș massă M , suspențați cardanic în centrul lor de greutate O și având dimensiile respective: $r_1 = 12a, h_1 = \frac{a}{4}, r_2 = 6a, h_2 = a, r_3 = 3a, h_3 = 4a, r_4 = 2a, h_4 = 9a$.

Se imprimă acestor cilindri o aceeaș turație în jurul axei Oz : $n = 600$ rot/min. Să se determine pentru fiecare caz în parte:

- 1) Mărimea momentului cantităților de mișcare.
- 2) Perioada micilor oscilații ale axei Oz .
- 3) Clasificarea după gradul lor de stabilitate.

Soluție

Momentul de inerție al unui cilindru de rază r și înălțime h în raport cu axa sa Oz este I_x dat de:

$$I_x = \frac{Mr^2}{2}$$

iar în raport cu o axă Ox situată într'un plan perpendicular pe Oz :

$$I_x = \frac{M}{12}(h^2 + 3r^2)$$

în care M este masa corpului.

Suma momentelor cantităților de mișcare este: $K = I_x \omega$ în care $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ și este îndreptată după Oz .

Perioada micilor oscilații este dată de relația:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{I_x}{I_x - I_x}$$

Se obține astfel pentru fiecare caz în parte:

$$\begin{array}{ll} K_1 = 72 Ma^2 \omega & T_1 = 0,10003 \text{ secunde} \\ K_2 = 18 Ma^2 \omega & T_2 = 0,1018 \text{ sec} \\ K_3 = 4,5 Ma^2 \omega & T_3 = 0,3909 \text{ sec} \\ K_4 = 2 Ma^2 \omega & T_4 = 0,1348 \text{ sec} \end{array}$$

Axa este cu atât mai stabilă cu cât perioada micilor oscilații este mai mică. Rezultă din cele ce preced, următoarea clasificare după gradul lor de stabilitate: 1, 2, 4, 3.

Problema 2

Se consideră cilindrul omogen, circular, drept, de rază r și înălțime $h = r\sqrt{3}$ suspendat cardanic în centrul de greutate O și căruia i se imprimă o iuțeală de rotație proprie în jurul axei sale de simetrie Oz .

Să se calculeze durata micilor oscilații și să se explice rezultatul.

Soluție

$$\text{Se obține: } I_x = I_x = \frac{Mr^2}{2} \text{ și } T = \infty$$

Axa de rotație O_x nu este stabilă.

Rezultatul se explică prin faptul că în cazul dat elipsoidul central de inerție din O se reduce la o sferă.

Problema 3

Să considerăm un giroscop căruia i s'a imprimat o iuțeală de rotație proprie Ω în jurul axei sale de simetrie Oz . Să se arate că această iuțeală se poate considera ca suma algebrică a unei iuțeli ω de rotație proprie și a unei iuțeli de precesie ω_1 ambele având direcția Oz .

Să se arate că perioada micilor oscilații ale giroscopului în jurul lui Oz este egală cu perioada corespunzătoare iuțelii de rotație ω . Se vor considera, I_x momentul de inerție al giroscopului în raport cu Oz și I_x momentul său de inerție transversal.

Soluție

Să presupunem $I_z < I_x$. Să considerăm că vectorul Ω face cu Oz un unghi foarte mic α . Din formula (34) rezultă că și θ este foarte mic și deci:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\theta}{\alpha} = \frac{I_x}{I_z}$$

Din formulele (35) și (36) obținem:

$$\omega = \frac{\Omega \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} = \Omega \left(1 - \frac{\alpha}{\theta}\right) = \Omega \left(1 - \frac{I_z}{I_x}\right)$$

$$\omega_1 = \frac{\Omega \sin \alpha}{\sin \theta} = \Omega \frac{\alpha}{\theta} = \Omega \frac{I_z}{I_x}$$

$$\Omega = \omega + \omega_1$$

Perioada rotației proprii ω va fi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \cdot \frac{I_x}{I_x - I_z}$$

adică tocmai perioada micilor oscilații (formula 31).

Pentru $I_z > I_x$, când vectorul Ω este foarte apropiat de Oz .

$$\alpha = \pi - \varepsilon \text{ și } \theta = \pi - \varepsilon_1$$

ε și ε_1 fiind niște unghiuri foarte mici.

Rezultă:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{I_x}{I_z}$$

$$\omega = \frac{\Omega \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} = \frac{\Omega \sin(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon_1} = \Omega \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) = \Omega \left(\frac{I_z}{I_x} - 1\right)$$

$$\omega_1 = \frac{\Omega \sin \alpha}{\sin \theta} = \Omega \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_1} = \Omega \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \Omega \frac{I_x}{I_z}$$

$$\Omega = \omega_1 - \omega \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \cdot \frac{I_x}{I_x - I_z}$$

Problema 4

Să considerăm un giroscop alungit ($I_z < I_x$) (fig. 94) suspendat cardanic în centrul său de greutate O , cunoscând poziția sa inițială în spațiu prin direcția inițială a axei sale de simetrie Oz , iar iuteala inițială de rotație prin vectorul Ω .

Să se determine caracteristicile mișcării.

Să se aplice rezultatele în cazul unui con circular, drept, de masă M , de rază r și înălțime $h = 4r$, pentru $\Omega = 20$ rad/sec, lu-

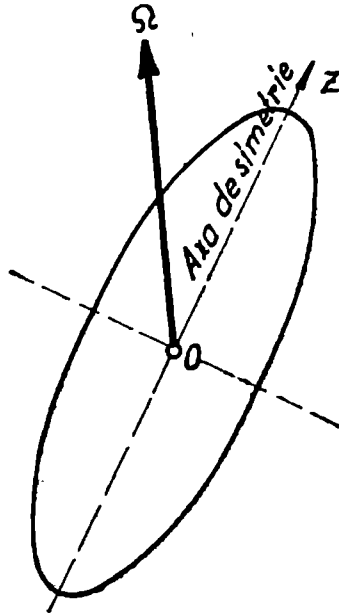


Fig. 94

ându-se unghiul dintre Ω și Oz succesiv $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$.

Soluție

Considerând iuțea de rotație proprie ω și iuțea de precesie ω_1 cantități pozitive, θ unghiul dintre vectorii ω și ω_1 din relația (33), pentru $I_x < I_z$ rezultă $\cos \theta > 0$ și deci:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Din relația (34) rezultă:

$$\alpha < \theta$$

și deci cu atât mai mult:

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Unghiul θ și iuțelile ω și ω_1 ne sunt date de formulele (34), (35) și (36):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_x}{I_z} \operatorname{tg} \alpha, \quad \omega = \frac{\Omega \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}, \quad \omega_1 = \frac{\Omega \sin \alpha}{\sin \theta}.$$

Sensul vectorului ω pe axa Oz trebuie astfel luat încât $\angle(\Omega, \omega) \leq \frac{\pi}{2}$. Axa fixă Oz_1 coincide cu vectorul ω_1 și se determină înănd în planul dat de poziția inițială a axei Oz și de vectorul Ω unghiul $\angle(Oz_1, \omega) = \theta$.

În mișcarea unui giroscop alungit, conul rostogolitor este exterior conului bază, iar conul de precesie se află de aceeaș parte cu conul bază (precesie regulată epicycloidală) (fig. 95).

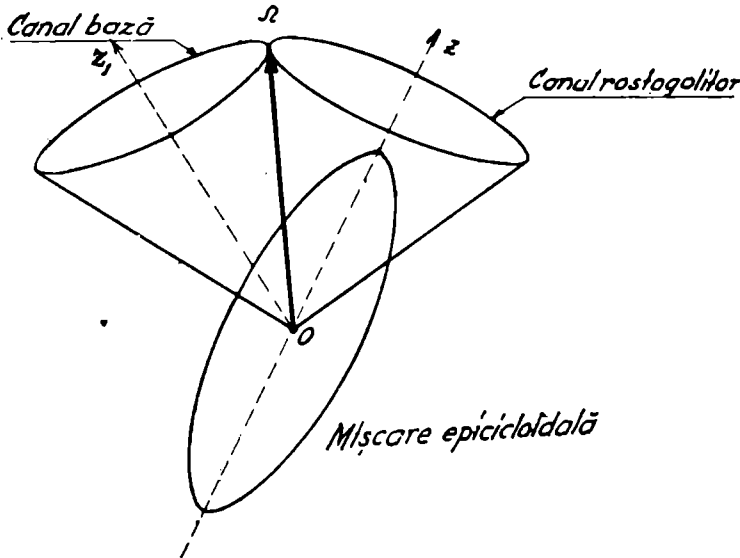


Fig. 95

În cazul exemplului:

$$I_x = \frac{3Mr^2}{10}, \quad I_z = \frac{3M}{20} \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right) = \frac{3Mr^2}{4}, \quad \frac{I_x}{I_z} = 2,5.$$

Cu ajutorul formulelor de sus obținem rezultatele din tabloul de mai jos:

$\chi(\Omega, Oz)$	$\chi(\Omega, \omega)$ α	$\chi(\omega_1, \omega)$ θ	ω rad/sec	ω_1 rad/sec	Observații
0°	0°	0°	12,00	8,00	Mișcarea simplă de rotație proprie stabilă cu înțeața $\Omega = \omega + \omega_1$
30°	30°	55°17'	10,39	12,16	
45°	45°	68°12'	8,48	15,23	
60°	60°	77°	6,00	17,78	
90°	90°	90°	0	20,00	Mișcare simplă de rotație proprie instabilă cu înțeața $\Omega = \omega_1 = 20$ rad/sec
120°	60°	77°	6,00	17,78	
135°	45°	68°12'	8,48	15,23	
150°	30°	55°17'	10,39	12,16	
180°	0°	0°	12,00	8,00	Mișcare simplă de rotație proprie stabilă cu înțeața $\Omega = \omega + \omega_1 = 20$

Problema 5

Să considerăm un giroscop turtit ($I_x > I_z$) suspendat cardanic în centrul său de greutate (fig. 96). Se cunoaște poziția sa inițială în spațiu prin direcția inițială a axei sale de simetrie Oz și iuțea inițială de rotație prin vectorul Ω . Să se determine caracteristicile mișcării.

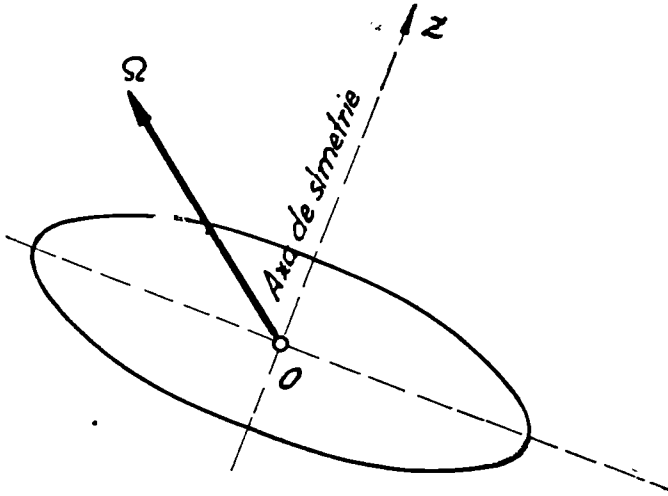


Fig. 96

Să se aplice rezultatele în cazul unui disc subțire de rază r și masă M , pentru $\Omega = 20$ rad/sec, luându-se unghiul dintre Ω și Oz succesiv: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$.

Soluție

Procedând analog ca în problema precedentă, găsim:

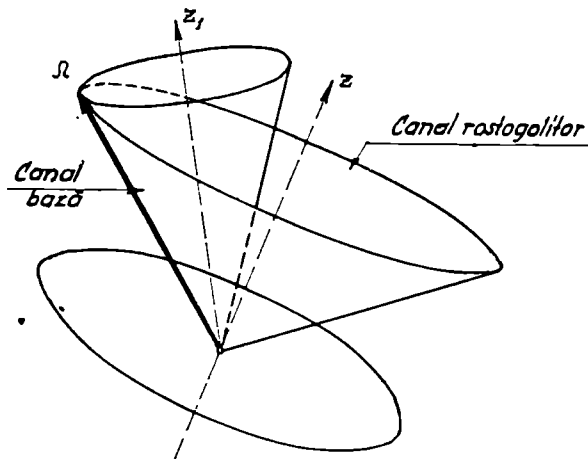
$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi.$$

Unghiul θ și iuțele ω și ω_1 sunt date de aceleaș formule, Sensul vectorului ω pe axa Oz trebuie astfel luat încât:

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha = \sphericalangle(\Omega, \omega) \leq \pi.$$

Axa fixă Oz_1 coincide cu vectorul ω_1 și se determină luând în planul dat de poziția inițială a axei Oz și de vectorul Ω . $\sphericalangle(Oz_1, \omega) = \theta$.

În mișcarea unui giroscop turtit, conul bază este tangent interior conului rostogolitor, iar conul de precesie este de partea opusă conului bază (precesie regulată *pericicloidală* (fig. 97).



Mișcare pericicloidală.

Fig. 97

În cazul exemplului:

$$I_x = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_x = \frac{Mr^2}{4}, \quad \frac{I_x}{I_x} = \frac{1}{2}.$$

$\angle(\Omega, Oz)$	$\angle(\Omega, \omega)$ α	$\angle(\omega_1, \omega)$ θ	ω rad/sec	ω_1 rad/sec	Observații
0°	180°	180°	20	40	Mișcare simplă de rotație proprie stabilă $\Omega = \omega_1 - \omega = 20$
30°	150°	163°54'	17,32	36,06	
45°	135°	153°26'	14,13	32,14	
60°	120°	139°6'	10,00	26,46	
90°	90°	90°	0	20	Mișcarea simplă de rotație instabilă $\Omega = \omega_1 = 20$
120°	120°	139°6'	10,00	26,46	
135°	135°	153°26'	14,13	32,14	
150°	150°	163°54'	17,32	36,06	
180°	180°	180°	20	40	

Problema 5

Să considerăm un giroscop turtit ($I_x > I_z$) suspendat cardanic în centrul său de greutate (fig. 96). Se cunoaște poziția sa inițială în spațiu prin direcția inițială a axei sale de simetrie Oz și iuțea inițială de rotație prin vectorul Ω . Să se determine caracteristicile mișcării.

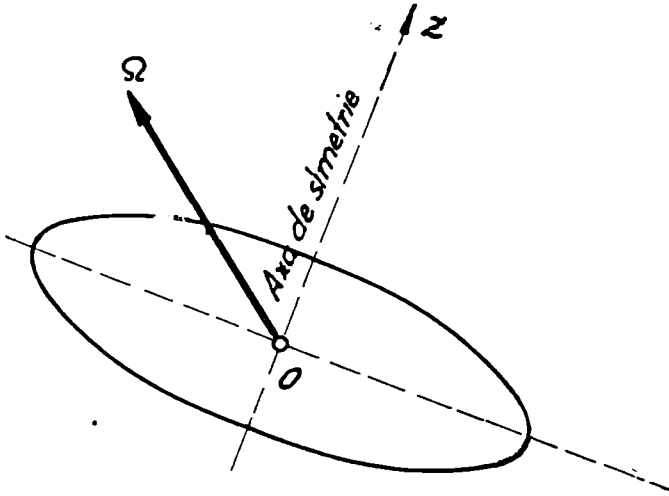


Fig. 96

Să se aplice rezultatele în cazul unui disc subțire de rază r și masă M , pentru $\Omega = 20$ rad/sec, luându-se unghiul dintre Ω și Oz succesiv: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$.

Soluție

Procedând analog ca în problema precedentă, găsim:

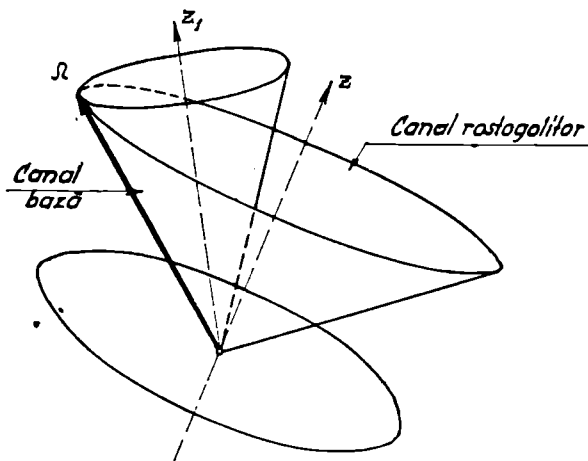
$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi.$$

Unghiul θ și iuțelile ω și ω_1 sunt date de aceleași formule, Sensul vectorului ω pe axa Oz trebuie astfel luat încât:

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha = \angle(\Omega, \omega) \leq \pi.$$

Axa fixă Oz_1 coincide cu vectorul ω_1 și se determină luând în planul dat de poziția inițială a axei Oz și de vectorul Ω . $\angle(Oz_1, \omega) = \theta$.

În mișcarea unui giroscop turtit, conul bază este tangent interior conului rostogolitor, iar conul de precesie este de partea opusă conului bază (precesie regulată *pericicloidală* (fig. 97).



Mișcare pericicloidală.

Fig. 97

În cazul exemplului:

$$I_x = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_x = \frac{Mr^2}{4}, \quad \frac{I_x}{I_x} = \frac{1}{2}.$$

$\alpha(\Omega, Oz)$	$\alpha(\Omega, \omega)$	$\alpha(\omega_1, \omega)$	ω rad/sec	ω_1 rad/sec	Observații
0°	180°	180°	20	40	Mișcare simplă de rotație proprie stabilă $\Omega = \omega_1 - \omega = 20$
30°	150°	163°54'	17,32	36,06	
45°	135°	153°26'	14,13	32,14	
60°	120°	139°6'	10,00	26,46	
90°	90°	90°	0	20	Mișcarea simplă de rotație instabilă $\Omega = \omega_1 = 20$
120°	120°	139°6'	10,00	26,46	
135°	135°	153°26'	14,13	32,14	
150°	150°	163°54'	17,32	36,06	
180°	180°	180°	20	40	

P r o b l e m a 6

Să se studieze natura mișcării de precesie regulată a unui giroscop alungit ($I_z < I_x$) suspendat cardanic într'un punct O situat pe axa sa la o distanță a de centrul său de greutate în funcție de raportul dat $n = \frac{\omega_1}{\omega}$ ($\omega =$ iuțeala de rotație proprie, $\omega_1 =$ iuțeala de precesie) cunoscând unghiul θ dintre verticala ascendentă și axa giroscopului.

Ca aplicație, în cazul giroscopului cilindric de rază $r = 0,1$ m. și de dimensiunile date în fig. 98 și suspendat în O , pentru $\theta = 60^\circ$ să se determine:

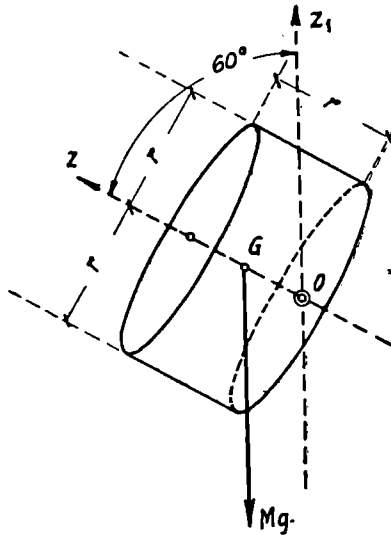


Fig. 98

1) Iuțeala ω_1 și natura mișcării pentru $\omega = 10$ rad/sec. și $\omega = -10$ rad/sec (se va considera cazul când centrul de greutate se găsește deasupra planului orizontal care trece prin O , precum și cazul când acest centru se găsește dedesuptul acestui plan).

2) Iuțelile ω și ω_1 astfel încât conul bază să fie un plan.

3) Iuțelile ω și ω_1 astfel încât conul rostogolitor să fie un plan.

S o l u ție

S'a considerat ca axă Oz_1 , verticala ascendentă care trece prin O , iar ca axă Oz pozitivă semiaxa giroscopului care face cu Oz_1 un unghi θ mai mic decât $\frac{\pi}{2}$.

Iuțelile ω și ω_1 sunt pozitive sau negative după cum sunt dirijate pe porțiunea pozitivă sau negativă a axelor Oz sau Oz_1 .

Deasemenea distanța a este pozitivă pe porțiunea Oz (când centrul de greutate se găsește deci deasupra planului orizontal care trece prin O) și negativ pe prelungirea în jos a lui Oz (când centrul de greutate se găsește sub planul orizontal ce trece prin O).

Din ecuația generală:

$$(I_x - I_x) \omega_1^2 \cos \theta + I_x \omega \omega_1 = Mga$$

pentru $\frac{\omega_1}{\omega} = n$ se găsește

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{Mga}{\frac{I_z}{n} - (I_x - I_x) \cos \theta}} ;$$

$$\omega = \pm \frac{1}{n} \sqrt{\frac{Mga}{\frac{I_x}{n} - (I_x - I_x) \cos \theta}}$$

Natura mișcării și semnul lui a ne sunt date de tabloul de mai jos, dedus din studiul realității lui ω și ω_1 având în vedere formele de mișcare de precesie regulată studiată în Cap. V.

$+\infty > \frac{\omega_1}{\omega} > \frac{I_z}{(I_x - I_x) \cos \theta}$	$\frac{I_z}{(I_x - I_x) \cos \theta} > \frac{\omega_1}{\omega} > 0$	$0 > \frac{\omega_1}{\omega} > -\cos \theta$	$-\cos \theta > \frac{\omega_1}{\omega} > -\frac{1}{\cos \theta}$	$-\frac{1}{\cos \theta} > \frac{\omega_1}{\omega} > -\infty$
a negativ	a pozitiv	a negativ		
Mișcare epicycloidală	Mișcare hipo-cycloidală	Mișcare invers epicycloidală	Mișcare peri-cycloidală	

În cazul aplicației:

$$I_x = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_x = \frac{7}{12}Mr^2, \quad a = \pm \frac{r}{2}$$

Luând $g \cong 10 \text{ m/sec}^2$ obținem datele din tablourile alăturate:

$\omega = 10 \text{ rad/sec}$			
a pozitiv		a negativ	
$\omega_1 = 109 \text{ rad/sec}$	$\omega_1 = 11 \text{ rad/sec}$	$\omega_1 = 129,3 \text{ rad/sec}$	$\omega_1 = -9,3 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
Mișcări epicycloidale		Mișcare epicycloidală	Mișcare invers epicycloidală

$\omega = -10 \text{ rad/sec}$			
a pozitiv		a negativ	
$\omega_1 = -109 \text{ rad/sec}$	$\omega_1 = -11 \text{ rad/sec}$	$\omega_1 = -129,3 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega_1 = +9,3 \text{ rad/sec}$
Mișcări epicycloidale		Mișcare epicycloidală	Mișcare invers epicycloidală

În cazul când conul — bază este un plan:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 = +6,93 \text{ rad/sec} \quad \omega = -13,86 \text{ rad/sec} \quad \text{a negativ} \\ \text{sau } \omega_1 = -6,93 \text{ rad/sec} \quad \omega = +13,86 \text{ rad/sec} \quad \text{a negativ} \end{aligned}$$

În cazul când conul rostogolitor este un plan:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{1}{\cos\theta} = -2$$

$$\begin{aligned} \omega = +6,54 \text{ rad/sec} \quad \omega_1 = -13,09 \text{ rad/sec} \quad \text{a negativ} \\ \text{sau } \omega = -6,54 \text{ rad/sec} \quad \omega_1 = +13,09 \text{ rad/sec} \quad \text{a negativ} \end{aligned}$$

Problema 7

Să se studieze natura mișcării de precesie regulată a unui

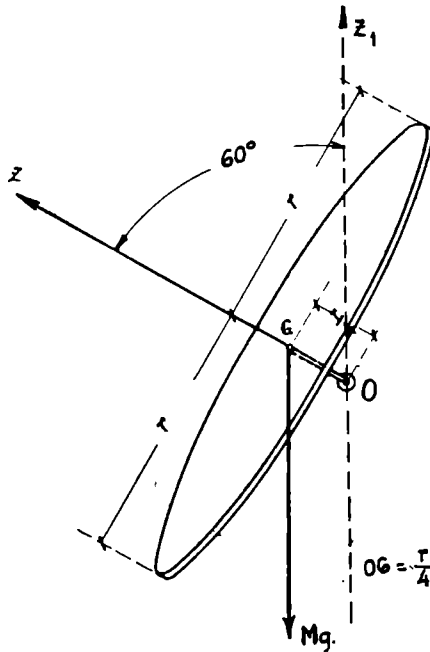


Fig. 99

giroscop turtit ($I_z > I_x$) suspendat cardanic într'un punct O situat

pe axa sa la o distantă a de centrul său de greutate în funcție de raportul dat $n = \frac{\omega_1}{\omega}$ (unde $\omega =$ iuțeala de rotație proprie, $\omega_1 =$ iuțeala de precesie) cunoscând unghiul θ dintre verticala ascendentă și axa giroscopului.

Ca aplicație, în cazul giroscopului în formă de disc circular de rază $r = 0,1$ m (fig. 99), suspendat în O, pentru $\theta = 60^\circ$, să se determine:

1. Iuțeala ω_1 și natura mișcării pentru $\omega = \text{rad/sec}$, și $\omega = -10 \text{ rad/sec}$.
2. Iuțeala ω și ω_1 astfel încât conul-bază să fie un plan.
3. Iuțeala ω și ω_1 astfel încât conul rostogolitor să fie un plan.

Soluție

Se procedează analog ca în problema precedentă, și se obține rezultatele din tabloul de mai jos.

$+\infty > \frac{\omega_1}{\omega} > 0$	$0 > \frac{\omega_1}{\omega} > -\cos \theta$	$-\cos \theta > \frac{\omega_1}{\omega} > -\frac{1}{\cos \theta}$	$-\frac{1}{\cos \theta} > \frac{\omega_1}{\omega} > \frac{-I_x}{(I_x - I_x) \cos \theta}$	$\frac{-I_x}{(I_x - I_x) \cos \theta} > \frac{\omega_1}{\omega} > -\infty$
a pozitiv	a negativ		a pozitiv	
Mișcare epicycloidală	Mișcare hipocicloidală	Mișcare invers epicycloidală	Mișcare invers hipocicloidală sau pericycloidală	

În cazul aplicației:

$$I_x = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_x = \frac{5}{16}Mr^2, \quad a = \pm \frac{r}{4}.$$

Luând $g = 10 \text{ m/sec}^2$, obținem datele din tablourile alăturate:
 $\omega = 10 \text{ rad/sec}$

a pozitiv		a negativ	
$\omega_1 = +4,60$ rad/sec	$\omega_1 = -57,94$ rad/sec	$\omega_1 = -5,58$ rad/sec	$\omega_1 = -47,75$ rad/sec
Mișcare epicycloidală	Mișcare pericycloidală	Mișcare invers epicycloidală	Mișcare pericycloidală

$$\omega = -10 \text{ rad/sec}$$

a pozitiv		a negativ	
$\omega_1 = -4,60$ rad/sec	$\omega_1 = +57,94$ rad/sec	$\omega_1 = +5,58$ rad/sec	$\omega_1 = +47,75$ rad/sec
Mișcare epicicloidă	Mișcare pericicloidă	Mișcare invers epicicloidă	Mișcare pericicloidă

In cazul când conul-bază este un plan:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

sau $\omega = +10,5 \text{ rad/sec}$ $\omega_1 = -5,25 \text{ rad/sec}$ a negativ
 $\omega = -10,5 \text{ rad/sec}$ $\omega_1 = +5,25 \text{ rad/sec}$ a negativ

In cazul când conul-rostogolitor este un plan

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{1}{\cos \theta} = -2$$

sau $\omega = +6,32 \text{ rad/sec}$ $\omega_1 = -12,64 \text{ rad/sec}$ a negativ
 $\omega = -6,32 \text{ rad/sec}$ $\omega_1 = +12,64 \text{ rad/sec}$ a negativ

Problema 8

Fie un con circular drept de înălțime $h=2r$, care se învâрте cu $N=4800 \frac{\text{rot}}{\text{minut}}$ în jurul axei sale, raza bazei sale fiind $r=3 \text{ cm}$. Să se determine iuțeala de precesie ω_1 , presupunând că conul se reazămă în vârf pe un plan orizontal, iar înclinația axei conului față de verticală este $\theta=30^\circ$.

Soluție

Găsim iuțeala de precesie ω_1 din relația aproximativă:

$$I_z \omega \omega_1 \sin \theta = \mathfrak{M}_0 = mga \sin \theta$$

deci:

$mga = I_z \omega \omega_1$ unde a = distanța centrului de greutate de punctul fix.

In cazul nostru $a = \frac{3r}{2}$, $\omega = \frac{2\pi N}{60} = 160\pi \text{ rad/sec}$, $I_z = \frac{3mr^2}{10}$.

De unde:

$$\omega_1 = \frac{mga}{\frac{3}{10} mr^2 \cdot 160\pi} = 3,25 \text{ rad/sec} \text{ sau } N_1 = \frac{30\omega_1}{\pi} = 31 \text{ rot/min.}$$

Luând relația exactă, să determinăm iuțea necesară spre a avea o precesie regulată, $\theta = 30^\circ$, Conform relației (53):

$$\omega_1 = \frac{I_x \omega \pm \sqrt{I_x^2 \omega^2 - 4(I_x - I_x) mag \cos \theta}}{2(I_x - I_x) \cos \theta}$$

Aci:

$$I_x = \frac{3mr^2}{10}, \quad I_x = \frac{3}{20} \cdot m \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right) + m \frac{3^2}{4^2} h^2 = \frac{51}{20} mr^2.$$

De unde ω_1 poate căpăta valorile:

$$\omega_1 = \begin{cases} 3,38 \text{ rad/sec (precesie lentă)} \\ 74,0 \text{ rad/sec (precesie rapidă)} \end{cases}$$

$$N_1 = \begin{cases} 32,2 \text{ rot/min (precesie lentă)} \\ 706,6 \text{ rot/min (precesie rapidă)} \end{cases}$$

Se observă că relația aproximativă ne dă soluția aproximativă a problemei în cazul precesiei lente, pentru o iuțea de rotație proprie ω suficient de mare.

Problema 9

Se consideră un giroscop format dintr'un disc subțire, cir-

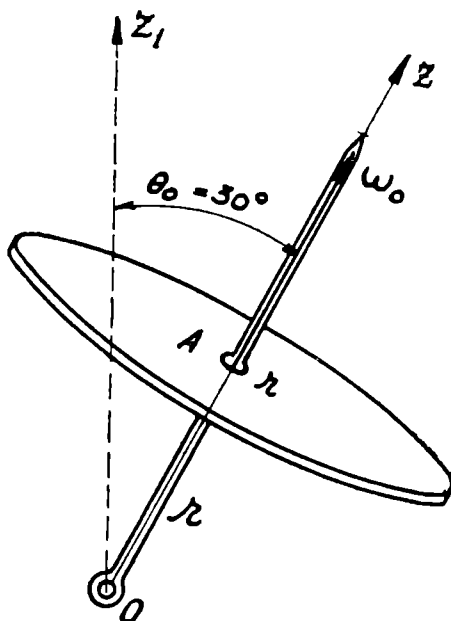


Fig. 100

cular, de rază $r = 10$ cm., sprijinit într'un punct O al axei de simetrie, situat la distanța r de planul discului (fig. 100).

În momentul inițial axa Oz face unghiul $\theta = 30^\circ$ cu verticala, iar giroscopului i se imprimă o iuțeală inițială de rotație proprie ω_0 în jurul lui Oz .

Să se determine :

- 1) Variația unghiului de nutație
- 2) Iuțeala de precesie și perioada de precesie
- 3) Perioada de nutație
- 4) Numărul de bucle făcut de axa giroscopului într'o rotație completă de precesie.

Se va lua succesiv:

$\omega_0 = 100$ rad/sec, 500 rad/sec, 1000 rad/sec, 2000 rad/sec.

Soluție

Avem :

$$I_x = \frac{mr^2}{2}, \quad I_x = \frac{mr^2}{4} + mr^2 = \frac{5}{4} mr^2.$$

Variația unghiului de nutație se obține cu ajutorul relației (64):

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{2mgr I_x \sin \theta_0}{I_x^2 \omega_0^2} = \frac{5g}{r \omega_0^2}.$$

Iuțeala de precesie ω_1 va fi:

$$\omega_1 = \frac{mgr}{I_x \omega_0} = \frac{2g}{r \omega_0}.$$

Iar perioadele de precesie T_p și nutație T_n și numărul de bucle n :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T_n = \frac{2\pi I_x}{I_x \omega_0} = \frac{5\pi}{\omega_0}, \quad n = \frac{T_p}{T_n} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{r \omega_0^2}{5g}.$$

Numeric rezultatele sunt concentrate în tabloul de mai jos:

ω_0	100 rad/sec	500 rad/sec	1000 rad/sec	2000 rad/sec
$\theta_1 - \theta_0$	0,04905 rad 2°48'	0,001962 rad 6'44''	0,0004905 rad 1'40''	0,000122625 25''
ω_1	1,962 rad/sec	0,3924 rad/sec	0,1962 rad/sec	0,0981 rad/sec
T_p	3,202 sec	16,01 sec	32,02 sec	64,04 sec
T_n	0,157 sec	0,0314 sec	0,0157 sec	0,00785 sec
n	20,39	509,8	2039	8157

Problema 10

Fie un disc circular de rază $r=10$ cm. de masă m , cu axa perpendiculară pe disc, de masă neglijabilă iar lungimea r . Axa fiind înclinată cu $\theta_0=30^\circ$ față de verticală, să se determine ω, ω_1 astfel încât nutația să fie maximum 1° .

Soluție

Avem aci:

$$I_x = \frac{mr^2}{2}, \quad I_x = \frac{mr^2}{4} + mr^2 = \frac{5mr^2}{4}$$

$$a = r, \quad \sin \theta_0 = \frac{1}{2}; \quad \theta_1 - \theta_0 = 1^\circ = 0,0174 \text{ rad.}$$

Deci din relația (64):

$$0,017 = \frac{2 mgr \cdot \frac{5mr^2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{m^2 r^4}{4} \cdot \omega_0^2} = \frac{5g}{r \omega_0^2}$$

Deci:

$$\omega_0^2 = \frac{5g}{0,0174 r} \approx 28190$$

De unde:

$$\omega_0 = \pm 168 \text{ rad/sec, adică } N = 1604 \text{ rotații/minut}$$

iar

$$\omega_1 = \frac{mga}{I_x \omega_0} = \frac{mgr}{\frac{mr^2}{2} \cdot 168} = 1,16 \text{ rad/sec, adică } N_1 = 11 \text{ rot/min.}$$

Numărul de nutații într'o perioadă este deci:

$$n = \frac{I_x^2 \omega_0^2}{mga I_x} = 57,4 \text{ nutații}$$

Problema 11

Să considerăm o roată de rază R și greutate G situată într'un plan vertical și care are momentul de inerție I în raport cu axa orizontală AOB perpendiculară pe planul roții. Roata se învâртеște în jurul lui AOB cu iuțeala constantă ω . În acelaș timp, axa este

rotită în jurul verticalei care trece prin O cu viteza unghiulară constantă ω_1 .

Să se determine reacțiunile în A și B în timpul mișcării. Se va lua $AO = OB = a$ (fig. 101).

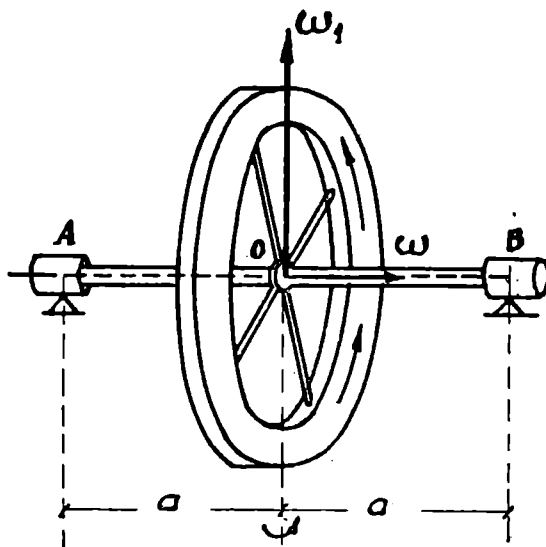


Fig. 101

Soluție

Din cauza fenomenului giroscopic se produc în A și B reacțiunile verticalei F date de relația:

$$\mathcal{M} = F \cdot AOB = F \cdot 2a = I\omega\omega_1.$$

Rezultă pentru reacțiunile în A și B valorile:

$$R_A = \frac{G}{2} + F = \frac{G}{2} + \frac{I\omega\omega_1}{2a}, \quad R_B = \frac{G}{2} - F = \frac{G}{2} - \frac{I\omega\omega_1}{2a}$$

Se vede că R_B poate avea valori pozitive sau negative.

Problema 12

Fie o navă al cărei tangaj se poate asimila unei oscilații simple armonice având o amplitudine de 5° și perioada $T = 5$ sec. Turbina acestei nave are un rotor de rază 1 m. și greutate 2000 kgr., care se rotește cu $N = 1200$ rot/min. Lungimea axei turbinei, situată chiar pe axa longitudinală a navei, fiind de 2 m., să se determine valoarea maximă a reacțiunilor la capetele axei, datorite rotirii turbinei. Pentru calcularea momentului de inerție, rotorul se va considera ca un disc circular plin.

Soluție

Iuțeala de rotație proprie a rotorului este

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = 40\pi \text{ rad/sec}$$

Iuțeala de precesie ω_1 o determinăm cu ajutorul variației unghiului Ψ (Ψ = unghiul dintre orizontală și axa navei în planul vertical longitudinal al navei)

$$\omega_1 = \Psi'$$

Dar

$$\Psi = \Psi_{max} \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

unde

$$\Psi_{max} = 5^\circ = \frac{\pi}{36} \text{ rad.} \quad \text{și } T = 5 \text{ sec}$$

Deci

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \Psi_{max} \cos \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{\pi}{36} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} t = \frac{2\pi^2}{180} \cos \frac{2\pi}{5} t$$

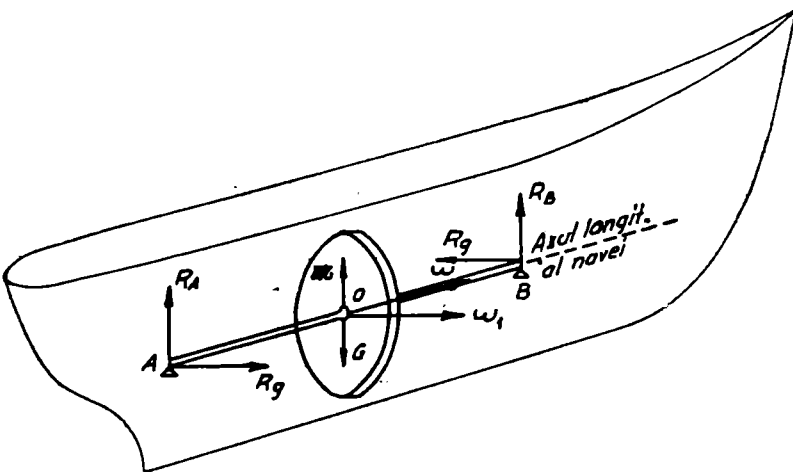


Fig. 102

Momentul exterior necesar este:

$$\mathfrak{M}_g = I_x \omega \omega_1$$

el trebuie să fie produs de reacțiunile giroscopice R_g din A și B. Aceste reacțiuni sunt prin urmare orizontale perpendiculare pe planul vertical longitudinal al navei. (fig. 102).

$$I_x \omega \omega_1 = R_g \cdot l$$

In cazul rotorului:

$$I_z = \frac{M r^2}{2} = \frac{G}{2g} r^2 = \frac{2000}{2,9,81} \cdot 1^2 = 100 .$$

$$\text{Pentru a avea } R_{g \max} \text{ luăm } \omega_{1 \max} = \frac{2 \pi^2}{180}$$

Deci:

$$R_{g \max} = \frac{I_z \omega \omega_1}{l} = \frac{100 \cdot 40 \pi \cdot \frac{2 \pi^2}{180}}{2} \approx 700 \text{ kgr.}$$

Reacțiunile date de greutate sunt verticale deci perpendiculare pe R_g și au valorile

$$R_A = R_B = 1000 \text{ kgr.}$$

Reacțiunile totale în A și B vor fi deci

$$R = \sqrt{700^2 + 1000^2} \approx 1220 \text{ kgr.}$$

P r o b l e m a 13

Intr'o torpilă *Whitehead*, giroscopul *Obry* are o mică descentrare de 0,1 mm. Să se determine unghiul de deviere al torpilei față de direcția de tragere știind că torpila are o viteză constantă de 20 m/sec, iar țelul vizat este la o distanță de 1000 m. Volantul giroscopului are greutatea de 1 kgr. și raza 10 cm., și se rotește cu $N = 3000$ rot/min.

S o l u Ț i e

Avem:

$$\omega = \frac{2 \pi N}{60} = 100 \pi \text{ rad/sec}$$

$$I_z = \frac{G}{g} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{1}{9,81} \cdot \frac{0,1^2}{2} = 0,0005.$$

Iuțea de precesie datorită momentului greutății excentrice este:

$$\omega_1 = \frac{G a}{I_z \omega} = \frac{1 \cdot 0,0001}{0,0005 \cdot 100 \pi} = 0,00063 \text{ rad/sec}$$

sau un unghi de înclinare

$$\theta = \omega_1 t \text{ (} t = \text{timpul de mers al torpilei).}$$

Torpila înaintează cu viteza uniformă de 20 m/sec, timp de

$$t = \frac{1000}{20} = 50 \text{ sec.}$$

Vom avea deci pentru unghiul de deviere

$$\theta = 0,00063 \cdot 50 = 0,0315 \text{ rad} = 1^\circ 48'.$$

Problema 14

Se dau doi cilindri omogeni, circulari, drepti, de dimensiile arătate în figură (fig. 103) și suspențați cardanic pe axele lor de simetrie în O. Cilindrii au amândoi aceeaș greutate iar centrele de greutate sunt la aceeaș distanță de punctul fix O.

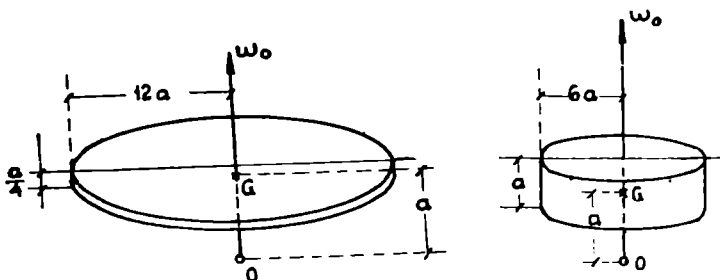


Fig. 103

Să se determine pentru fiecare din acești cilindri, iuțea de rotație minimă ω_0 ce trebuie dată în jurul verticalei pentru stabilitatea mișcării în poziția în care axele de simetrie ale cilindrilor sunt verticale.

Soluție

Suntem în cazul sfârlezei adormite. Iuțea maximă ω_0 este dată de relația:

$$\omega_0 = \frac{2\sqrt{mga I_x}}{I_x}.$$

Avem în primul caz:

$$I_x = 72 Ma^2, \quad I_x = \frac{7105}{192} Ma^2$$

$$\omega_0 = 0,169 \sqrt{\frac{g}{a}}$$

In cazul rotorului:

$$I_z = \frac{M r^2}{2} = \frac{G}{2g} r^2 = \frac{2000}{2,9,81} \cdot 1^2 = 100 .$$

$$\text{Pentru a avea } R_{g \max} \text{ luăm } \omega_1 \max = \frac{2 \pi^2}{180}$$

Deci:

$$R_{g \max} = \frac{I_z \omega \omega_1}{l} = \frac{100 \cdot 40 \pi \cdot \frac{2 \pi^2}{180}}{2} \approx 700 \text{ kgr.}$$

Reacțiunile date de greutate sunt verticale deci perpendiculare pe R_g și au valorile

$$R_A = R_B = 1000 \text{ kgr.}$$

Reacțiunile totale în A și B vor fi deci

$$R = \sqrt{700^2 + 1000^2} \approx 1220 \text{ kgr.}$$

P r o b l e m a 13

Intr'o torpilă *Whitehead*, giroscopul *Obry* are o mică descentrare de 0,1 mm. Să se determine unghiul de deviere al torpilei față de direcția de tragere știind că torpila are o viteză constantă de 20 m/sec, iar țelul vizat este la o distanță de 1000 m. Volantul giroscopului are greutatea de 1 kgr. și raza 10 cm., și se rotește cu $N = 3000$ rot/min.

S o l u Ț i e

Avem:

$$\omega = \frac{2 \pi N}{60} = 100 \pi \text{ rad/sec}$$

$$I_z = \frac{G}{g} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{1}{9,81} \cdot \frac{0,1^2}{2} = 0,0005.$$

Iuțea de precesie datorită momentului greutății excentrice este:

$$\omega_1 = \frac{G a}{I_z \omega} = \frac{1 \cdot 0,0001}{0,0005 \cdot 100 \pi} = 0,00063 \text{ rad/sec}$$

sau un unghi de înclinare

$$\theta = \omega_1 t \text{ (} t = \text{timpul de mers al torpilei).}$$

Torpila înaintează cu viteza uniformă de 20 m/sec, timp de

$$t = \frac{1000}{20} = 50 \text{ sec.}$$

Vom avea deci pentru unghiul de deviere

$$\theta = 0,00063 \cdot 50 = 0,0315 \text{ rad} = 1^{\circ} 48'.$$

Problema 14

Se dau doi cilindri omogeni, circulari, drepti, de dimensiunile arătate în figură (fig. 103) și suspențați cardanic pe axele lor de simetrie în O. Cilindrii au amândoi aceeaș greutate iar centrele de greutate sunt la aceeaș distanță de punctul fix O.

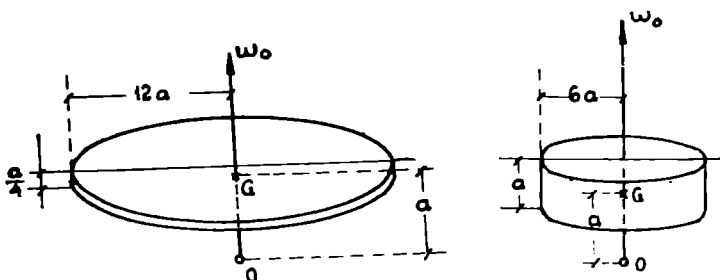


Fig. 103

Să se determine pentru fiecare din acești cilindri, iuțea de rotație minimă ω_0 ce trebuie dată în jurul verticalei pentru stabilitatea mișcării în poziția în care axele de simetrie ale cilindrilor sunt verticale.

Soluție

Suntem în cazul sfârlezei adormite. Iuțea maximă ω_0 este dată de relația:

$$\omega_0 = \frac{2\sqrt{mga I_x}}{I_x}.$$

Avem în primul caz:

$$I_x = 72 Ma^2, \quad I_x = \frac{7105}{192} Ma^2$$

$$\omega_0 = 0,169 \sqrt{\frac{g}{a}}$$

In cazul al doilea :

$$I_x = 18 Ma^2, \quad I_x = \frac{121}{12} Ma^2$$

$$\omega_0 = 0,351 \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Se observă că cu cât giroscopul este mai alungit cu atât este necesară o viteză de rotație mai mare pentru obținerea stabilității mișcării.

BIBLIOGRAFIE

- P. Appel*, Précis de Mécanique rationnelle.
Auerbach, Handbuch der phys. und tech. Mechanik.
Béghin, Statique et Dynamique.
Collignon, Traité de Mécanique.
Boat, Le compas gyroscopique.
Diemel, Mechanics of the gyroscope
Drăgănescu, Curs de mecanică.
Föopl, Vorlesungen über die tech. Mechanik.
Gehlhoff, Lehrbuch der technischen Physik.
Grammel, Der Kreisel.
Hort, Technische Schwingungslehre.
Ioachimescu, Curs de Mecanică.
Lucas, Théorie élémentaire du compas gyroscopique.
Maxet, Travaux pratiques de Mécanique rationnelle.
Menge-Schrieder, Mechanik-Aufgaben.
Martienssen, Kreiselbewegung.
Müller, Führer durch die technische Mechanik.
Perry. Der Kreisel.
Pohl, Mechanik und Akustik.
Pöschl, 1) Lehrbuch der technischen Mechanik; 2) Technische Anwendungen
(Kap. 9, Bd. V. Hdbuch der Physik).
Prossing, Navigation.
Reis, Elemente der Physik.
Reuth, Advanced rigid Dynamics.
Schnerb, Le pilotage automatique des avions (Revue scientifique Nov. 1938).
Smith (Brevet), Le pilote-automatique.
Sommerfeld, Mechanik.
Streh, Mines et Torpilles.
Vălcovici, Curs de mecanică.
Winkelmann und Grammel, Kinetik der starren Körper (Kap. 8 Bd. V. Hand-
buch der Physik).

TABLA DE MATERII

	Pagina
<i>Prefața</i> de D-l Prof. N. Vasilescu-Karpen	3
<i>Notații și formule</i>	5
Partea I. Teoria giroscopului	
<i>Cap. I.</i> Teoremele cantităților de mișcare și momentelor cantităților de mișcare	9
<i>Cap. II.</i> Momente de inerție	13
<i>Cap. III.</i> Determinarea vectorului sumă a cantităților de mișcare în cazul unui corp ce se rotește în jurul unei axe	14
<i>Cap. IV.</i> Ecuațiile lui <i>Euler</i>	15
<i>Cap. V.</i> Teoria generală a giroscopului. Rotație proprie uniformă. Precesie regulată	16
<i>Cap. VI.</i> Determinarea condițiilor ca axa de simetrie în jurul căreia se rotește giroscopul să fie fixă	30
<i>Cap. VII.</i> Studiul mișcării unui giroscop suspendat în centrul de greutate, căruia i s'a dat o iuteală de rotație inițială de direcție oarecare	35
<i>Cap. VIII.</i> Determinarea condițiilor ca un giroscop în acțiunea momentului greutății sale să aibă o mișcare de precesie regulată	40
<i>Cap. IX.</i> Analogie între mișcarea de precesie regulată a giroscopului și mișcarea uniformă pe cerc a punctului material	47
<i>Cap. X.</i> Fenomenul giroscopic	48
<i>Cap. XI.</i> Cuplul giroscopic, reacțiune giroscopică, tendința de paralelism a axelor de rotație	49
<i>Cap. XII.</i> Acțiunea unui cuplu exterior asupra giroscopului centrat	52
<i>Cap. XIII.</i> Calculul forțelor de inerție în mișcarea de precesie regulată a giroscopului	53
<i>Cap. XIV.</i> Studiul mișcării de nutație în cazul giroscopului greu	59
<i>Cap. XV.</i> Studiul mișcării giroscopului sub influența rotației pământului	70
<i>Cap. XVI.</i> Influența frecării asupra mișcării giroscopului	74
<i>Cap. XVII.</i> Mișcarea giroscopică în Univers	78
Partea II. Aplicații tehnice ale giroscopului	
<i>Cap. XVIII.</i> Fenomene giroscopice în mișcarea vapoarelor și avioanelor	81
<i>Cap. XIX.</i> Fenomene giroscopice în balistică	84
<i>Cap. XX.</i> Giroscopul întrebuințat pentru stabilizarea torpilei automobile	86

	<u>Pagina</u>
<i>Cap. XXI.</i> Giroscopul întrebuințat ca stabilizator al vapoarelor, pe o singură șină	80
<i>Cap. XXII.</i> Pilotul-automat	94
<i>Cap. XXIII.</i> Compasul giroscopic	
<i>Cap. XXIV.</i> Orizontul artificial	

Partea III. Probleme

Probleme	115—134
Bibliografie	135
Tabla de materii	137

ERATĂ

Pag. 8 rândul 19 în loc de $n = \frac{I_x \omega_0^2}{mga I_x}$ se va citi $n = \frac{I_x^2 \omega_0^2}{mga I_x}$

Pag. 60 rândul 19 în loc de ω se va citi ω_0

Pag. 64 rândul 2 în loc de cuvântul *concentrice* se va citi *având centrele pe axa Oz_1* .

Pag. 66 rândul 4 în formulă în loc de θ se va citi θ_1 .

Pag. 68 în formulele 73 și 74 în loc de $\cos \frac{I_x \omega}{I_x} t$ se va citi $\cos \frac{I_x \omega_0}{I_x} t$

Pag. 82 rândul 1 în loc de Acest se va citi Acest.