N. N. BUCHHOLTZ, I. M. VORONKOV, I. A. MINAKOV

CULEGERE DE PROBLEME DE MECANICĂ RAȚIONALĂ

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA TEHNICĂ

N. N. BUCHHOLTZ, I. M. VORONKOV, I. A. MINAKOV

CULEGERE DE PROBLEME DE MECANICĂ RAȚIONALĂ

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA TEHNICĂ
1 9 5 2

Titlul original:

Н. Н. БУХГОЛЬЦ, И. М. ВОРОНКОВ и А. П. МИХА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕ

Издание третье... ГОСТЕХИЗДАТ

Москва-Ленинград, 1949

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A TREIA

Ediția a treia a „Culegerii de probleme de mecanică rațională" este mult sporită în comparație cu cele precedente.

In capitolul „Statica" a fost introdus un paragraf asupra echilibrului firului elastic inextensibil. In capitolul „Cinematica" s'a introdus un paragraf asupra mișcării unui corp solid cu un punct fix. In capitolul „Dinamica punctului" s'au introdus noi paragrafe asupra oscilațiilor punctului material, asupra forțelor centrale și asupra mișcării relative a punctului material. In capitolul „Dinamica sistemelor și a corpului solid" s'au adăugat paragrafe asupra mișcării corpului solid cu un punct fix, asupra ecuațiilor de gradul doi ale lui Lagrange, asupra oscilațiilor mici ale unui sistem cu unul și două grade de libertate în jurul poziției de echilibru și asupra ciocnirilor. Paragrafele edițiilor anterioare au fost în mare măsură prelucrate; unele probleme au fost înlocuite și, în afară de acestea, s'au adăugat probleme noi.

Autorii aduc vii mulțumiri tuturor acelora care au arătat lipsurile și greșelile edițiilor anterioare.

STATICA

§. Compunerea şi descompunerea forţelor

1. Rezultanta a două forţe, aplicate în punctul O (fig. 1) este reprezentată prin diagonala paralelogramului construit pe vectorii care reprezintă forţele, adică,

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q},$$

prin urmare, mărimea rezultantei se determină prin egalitatea

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(\overline{P}, \overline{Q})}.$$

Unghiurile dintre vectorii $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ se află din relaţiile :

$$\frac{P}{\sin(\overline{Q}, \overline{R})} = \frac{Q}{\sin(\overline{P}, \overline{R})} = \frac{R}{\sin(\overline{P}, \overline{Q})}$$

şi

$$R = P \cos(\overline{P}, \overline{R}) + Q \cos(\overline{Q}, \overline{R}).$$

2. Dacă forţa $\overline{P}$ este dată prin proiecţiile ei X, Y, Z, pe axele de coordonate atunci :

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,;\ \cos(\overline{P}, x) = \frac{X}{P},\quad (\cos \overline{P}, y) = \frac{Y}{P},\quad \cos(\overline{P}, Z) = \frac{Z}{P}.$$

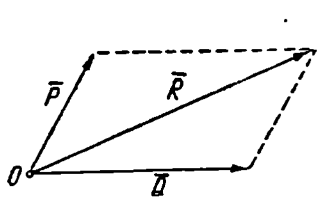


Fig. 1

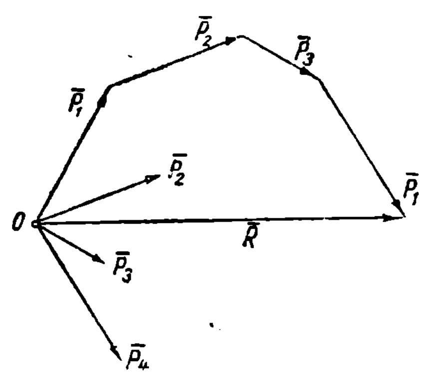


Fig. 2

3. Dacă în punctul O sunt aplicate mai multe forţe, rezultanta lor este reprezentată prin latura care închide poligonul vectorial, construit cu vectorii

care reprezintă forțele date (fig. 2), adică

$$\bar{R} = \Sigma \bar{P},$$

proiecția l a rezultantei pe o direcție oarecare este egală cu suma algebrică a proiecțiilor forțelor componente pe aceeași direcție, adică

$$R_l = \Sigma P_l.$$

4. Dacă **forțele $\bar{P}_1 (X_1, Y_1, Z_1), \bar{P}_2 (X_2, Y_2, Z_2), \ldots, \bar{P}_n (X_n, Y_n, Z_n)$ sunt date prin proiecțiile lor pe axele de coordonate, rezultanta lor se definește, ca mărime și orientare, prin egalitățile**:

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad R_z = \Sigma Z,$$

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}$$

$$\cos(\bar{R}, x) = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos(\bar{R}, y) = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos(\bar{R}, z) = \frac{\Sigma Z}{R}.$$

1. Să se determine unghiul format de două forțe de mărimile $F_1 = 20$ kg și $F_2 = 40$ kg, dacă mărimea rezultantei lor este de 50 kg.

Răspuns: $\alpha = 90°$.

2. Două forțe, care au mărimea de 5 și 16 kg, formează un unghi de 60°; să se afle mărimea rezultantei și unghiurile pe care rezultanta le formează cu fiecare din cele două forțe.

Răspuns: 19 kg; 13°10′25″ și 46°49′35″.

3. Să se afle raportul mărimilor a două forțe $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, știind că ele formează un unghi de 135°, iar mărimea rezultantei este egală cu mărimea $\bar{F}_2$ a forței celei mai mici.

Răspuns: $\bar{F}_1 : \bar{F}_2 = \sqrt{2}$.

4. Să se determine unghiul format de două forțe, dacă ele sunt de mărimi egale între ele și egale cu rezultanta lor.

Răspuns: 120°.

5. Două forțe formează un unghi de 50°; raportul mărimilor lor este 2 : 3. Să se afle unghiurile formate de rezultantă cu fiecare forță.

Răspuns: 30°19′41″ și 19°40′19″.

6. Forța $\bar{P}$ se descompune în două componente. Una are mărimea forței $\bar{P}$ și formează cu ea un unghi α. Să se afle mărimea componentei a doua și unghiul β, pe care îl formează cu forța $\bar{P}$.

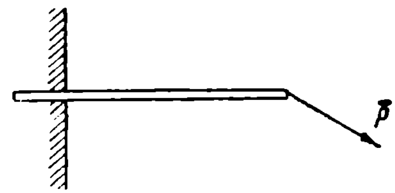
Răspuns: $2 P \sin\frac{\alpha}{2}$; $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

7. La Moscova componenta orizontală a intensității câmpului magnetic terestru este egală cu 0,182 unități, iar înclinația, adică unghiul pe care îl formează un ac magnetic, suspendat la mijloc, cu orizontala, este de 68°30′. Să se determine mărimea I a intensității câmpului magnetic terestru.

Răspuns: $I = 0{,}497$ unități.

8. O grindă, încastrată în perete, este solicitată de o forță $\overline{P}$ sub un unghi de 40° față de direcția grinzii. Știind că mărimea forței $\overline{P}$ este 1000 kg, să se afle forța care înconvoaie și forța care întinde grinda.

Răspuns: 642,79 și 766,04 kg.



La problema 8

9. Să se descompună forța $\overline{F}$, de mărime $F = 14$ kg, în două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, astfel încât $F_1+F_2 = 16$ kg, iar unghiul dintre forțele componente să fie $\alpha = 60°$.

Răspuns: $F_1 = 6$ kg și $F_2 = 10$ kg.

10. O forță de mărime $P = 50$ kg, se descompune în două componente; o componentă formează un unghi de 35° cu forța dată, iar mărimea componentei a doua este de 30 kg. Să se afle mărimea primei componente și unghiul format de componenta a doua cu forța $\overline{P}$.

Răspuns: 49,76 și kg 72°4′ sau 32,15 kg și 37°56′.

11. Să se descompună forța $\overline{R}$ în două forțe $\overline{P}$ și $\overline{Q}$, astfel încât cele două componente să fie perpendiculare una pe alta și mărimea lor să satisfacă relația $F : Q = m : n$.

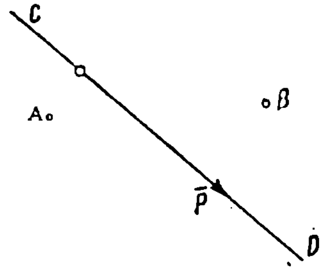
Răspuns: $P = \dfrac{mR}{\sqrt{m^2+n^2}}$; $Q = \dfrac{nR}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

12. Să se descompună forța $\overline{P}$ în două forțe, astfel încât raportul mărimilor să fie 2 : 1 și să se afle locul geometric al extremităților primei componente.

Răspuns: Cercul de rază $\frac{2}{3} P$ cu centrul pe linia de acțiune a forței $\overline{P}$, la distanța $\frac{4}{3} P$ dela punctul de aplicare al acestei forțe.

13. Două forțe, care formează un unghi dat, trec prin două puncte date A și B; rezultanta lor are mărimea P și

este îndreptată după o dreaptă dată CD. Să se afle aceste forțe pe cale grafică.



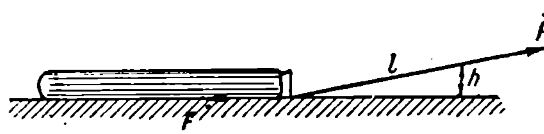
La problema 13

14. Sunt date trei forțe de mărimi egale. Cele două forțe extreme formează un același unghi dat cu forța cuprinsă între ele. Rezultanta celor trei forțe este reprezentată printr'un segment AB de lungime dată. Să se afle aceste forțe pe cale grafică.

15. Un buștean este tras uniform cu ajutorul unei funii de lungimea l, cu o forță de mărime P. Distanța dela capătul funiei la pământ este de h m. Să se afle mărimea F a forței de frecare a bușteanului de pământ.

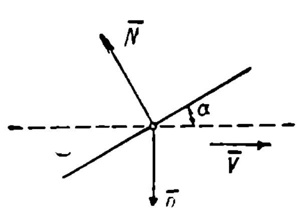
Răspuns: In cazul unei mișcări uniforme forța de frecare $\overline{F}$, îndreptată în sensul opus mișcării, trebue să fie de mărime egală cu componenta orizontală a forței $\overline{P}$; de aci obținem:

$$F = P\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}.$$

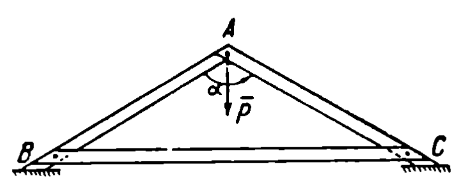


La problema 15

16. Un avion sboară orizontal cu viteză constantă. Presiunea $\overline{N}$ a aerului pe aripa avionului este perpendiculară pe suprafața aripei. Mărimea ei $N = 0{,}42\, sv^2 \sin\alpha$, unde s este suprafața aripei, α unghiul format de aripă cu direcția mișcării și v viteza avionului. Presupunând că s, α și greutatea avionului P sunt cunoscute, să se determine mărimea forței $\overline{N}$ și viteza v.



La problema 16



La problema 17

Răspuns: Intrucât avionul sboară orizontal, mărimea componentei verticale a forței $\overline{N}$ este egală cu greutatea P a avionului; de aici se deduce:

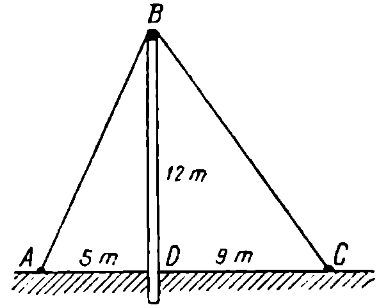
$$N = \frac{P}{\cos\alpha}; \quad v = \sqrt{\frac{P}{0{,}21\, s \sin 2\alpha}}.$$

17. In punctul de îmbinare A a două grinzi identice AB şi AC dintr'o fermă de acoperiş, este suspendată o greutate P. Să se determine mărimea forţei $\overline{S}$, care întinde grinda orizontală BC, dacă $\sphericalangle BAC = \alpha$.

Răspuns : $S = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ·

18. Un stâlp de antenă DB este susţinut prin două cabluri de tracţiune AB şi BC. Să se determine relaţia între tensiunile T_1 şi T_2 din cablurile AB şi BC, presupunând că stâlpul nu se încovoaie. Se dă : $AD = 5$ m, $DC = 9$ m şi $BD = 12$ m.

Răspuns : $\frac{T_1}{T_2} = \frac{39}{25}$ ·



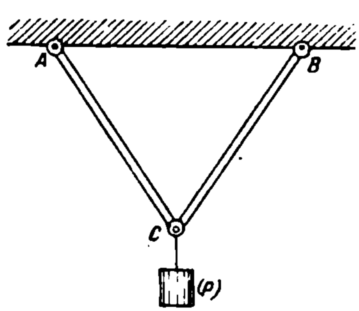
La problema 18

19. In punctul C de articulaţie a două bare egale AC şi BC este suspendată greutatea P. Să se afle reacţiunile în articulaţiile A şi B, dacă $\sphericalangle ACB = \alpha$.

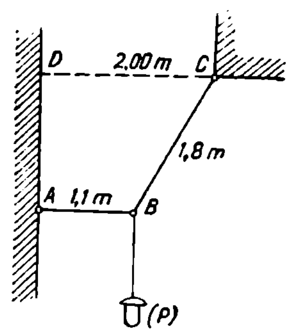
Răspuns : $R_A = R_B = \frac{P}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ ·

20. O lampă, având greutatea $P = 3$ kg, este suspendată cu ajutorul a două fire AB şi BC, dintre care primul este orizontal. Să se afle tensiunile T_1 şi T_2 din aceste fire, dacă $AB = 1{,}1$ m, $BC = 1{,}8$ m şi $DC = 2$ m.

Răspuns : $T_1 = \sqrt{3}$ kg ; $T_2 = 2\sqrt{3}$ kg.



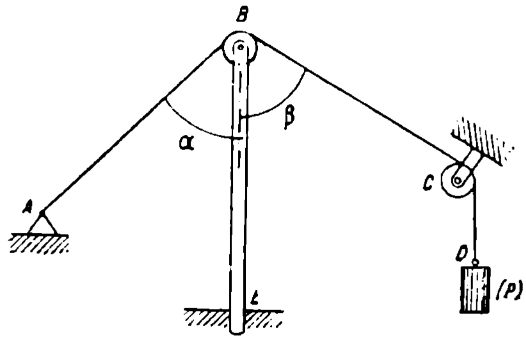
La problema 19



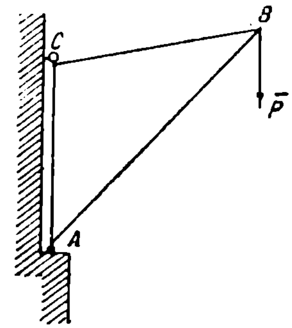
La problema 20

21. Un fir ABC, fixat în punctul A, trece peste scripeţii mici B şi C. La extremitatea D a firului este suspendată greutatea $P = 100$ kg. Să se determine presiunea verticală în suportul BE, dacă $\sphericalangle\ \alpha = 45°$ și $\sphericalangle\ \beta = 60°$.

Răspuns: $50\,(1 + \sqrt{2})$ kg.



La problema 21

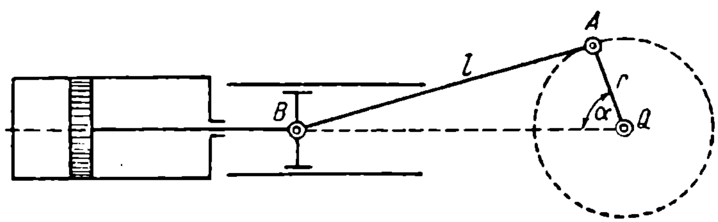


La problema 22

22. O greutate $P = 100$ kg este suspendată de macaraua ABC. Să se determine eforturile S_1 și S_2 în barele AB și BC, dacă $AB = 3{,}8$ m, $AC = 2$ m și $BC = 2{,}6$ m.

Răspuns: $S_1 = -190$ kg, $S_2 = 130$ kg (Semnul minus înseamnă un efort de compresiune).

23. Diametrul pistonului unei mașini cu abur este de d cm.



La problema 23

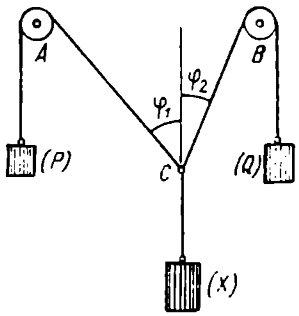
Presiunea aburului dintr'o parte a pistonului este egală cu p at, iar din partea cealaltă p_0 at. (1 atmosferă este presiunea de 1 kg pe 1 cm²). Să se afle mărimea forței $\overline{T}$, care învârtește manivela OA, dacă lungimea $OA = r$, lungimea bielei $AB = l$ și unghiul de rotație al manivelei $OAB = \alpha$.

Răspuns: $T = \frac{\pi d^2}{4}(p - p_0) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta}$ kg, unde $\sin\beta = \frac{r\sin\alpha}{l}$.

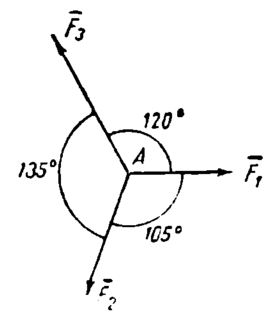
24. Trei fire sunt prinse în nodul C. Două dintre ele trec peste scripeții A și B, iar la extremitățile lor sunt suspendate greutățile $P = 3$ kg și $Q = 5$ kg. La extremitatea firului al treilea este suspendată o greutate X.

Să se afle valoarea lui X și unghiurile φ_1 și φ_2 formate din firele AC și BC cu verticala, știind că sistemul se află în echilibru și că $\measuredangle ACB = 60°$.

Răspuns: $X=7$ kg; $\varphi_1 = 38° 13'$; $\varphi_2 = 21° 47'$.



La problema 24



La problema 25

25. In punctul A al unui corp sunt aplicate trei forțe: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$, situate în același plan și formând între ele unghiuri de 105°, 135° și 120°. Să se determine mărimea și direcția rezultantei acestor forțe, dacă $F_1 = 18$ kg, $F_2 = 24$ kg și $F_2 = 30$ kg.

Răspuns: $R = 4{,}26$ kg. Această forță este situată între forțele $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$ și formează cu $\overline{F}_3$ un unghi de 18°54'.

26. Mărimile a trei forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, aplicate în același punct, sunt proporționale respectiv cu $1:2:3$; aceste forțe sunt situate într'un singur plan și unghiurile dintre ele sunt egale.

Să se afle mărimile acestor forțe și orientarea rezultantei lor, știind că mărimea ei este $R = 10$ kg.

Răspuns: $F_1 = \frac{10}{\sqrt{3}}$ kg; $F_2 = \frac{20}{\sqrt{3}}$ kg; $F_3 = 10\sqrt{3}$ kg.

Unghiul dintre $\overline{R}$ și $\overline{F}_3$ este de 30°.

27. Trei forțe, proporționale cu laturile unui triunghi, sunt aplicate în mijlocurile laturilor corespunzătoare și îndreptate în direcția perpendicularelor pe aceste laturi spre interiorul triunghiului. Să se demonstreze, că aceste trei forțe sunt în echilibru, adică rezultanta lor este nulă. Să se generalizeze pentru cazul unui poligon.

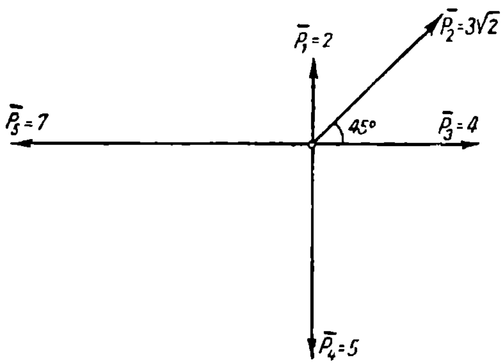
28. Se dă un sistem plan de patru forțe, aplicate într'un singur punct; să se înlocuiască acest sistem printr'un sistem echivalent de două forțe, aplicate în același punct și paralele cu două drepte date sau având mărimi date (pe cale grafică).

29. Vârfurile unui pătrat atrag un punct material, aflat în interiorul lui la distanța a de centrul pătratului, cu forțe proporționale cu distanțele (factorul de proporționalitate este k). Să se afle rezultanta acestor forțe.

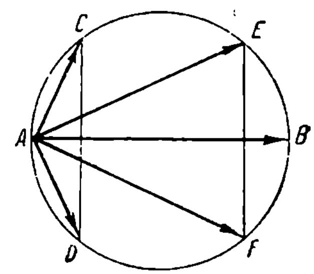
Răspuns : Rezultanta are mărimea $4\ ka$ și este orientată spre centrul pătratului.

30. Sunt date cinci forțe, având mărimile : $P_1=2$ kg, $P_2=3\sqrt{2}$ kg, $P_3=4$ kg, $P_4=5$ kg, $P_5=7$ kg și orientate ca în figură. Să se afle rezultanta acestor forțe.

Răspuns : $R=0$.



La problema 30



La problema 31.

31. Intr'un cerc se duce diametrul AB și două coarde egale CD și EF perpendiculare pe diametru. Să se afle rezultanta $\bar{R}$ a celor cinci forțe, reprezentate prin vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ și $\overline{AF}$.

Răspuns : $\bar{R}=3\ \overline{AB}$.

32. In centrul unui poligon regulat de n laturi, sunt aplicate $n-1$ forțe, orientate spre vârfuri ; mărimea fiecărei forțe este P. Să se afle mărimea rezultantei.

Răspuns : $R=P$.

33. Să se construiască vectorii coplanari, $\bar{A}$, $\bar{P}$, $\bar{V}$, $\bar{Q}$ și să se afle modulul fiecărui vector și unghiul pe care îl formează cu axa Ox, după următoarele date :

		$\bar{A}$	$\bar{P}$	$\bar{V}$	$\bar{Q}$
Proiecțiile vectorilor pe axele de coordonate	$X=$	-2	3	1	-4
	$Y=$	4	1	-3	-3
Coordonatele punctelor de aplicație	$x=$	1	-3	0	2
	$y=$	-3	2	1	1

Răspuns : $A=2\sqrt{5}$; tg $(\overline{A}, x)= -2$ (cadranul al doilea),

$P=\sqrt{10}$; tg $(\overline{P}, x)=\frac{1}{3}$ (cadranul întâi),

$V=\sqrt{10}$; tg $(\overline{V}, x)=-3$ (cadranul al patrulea),

$Q=5$; tg $(\overline{Q}, x)=\frac{3}{4}$ (cadranul al treilea).

34. O forță $\overline{P}$, având mărimea de 26 kg, este descompusă în trei componente perpendiculare între ele; mărimile componentelor sunt proporționale respectiv cu 3 : 4 : 12. Să se afle mărimile acestor componente și unghiurile α, β, γ, formate de componente cu forța $\overline{P}$.

Răspuns : 6 kg, 8 kg, 24 kg. $\cos\alpha=\frac{3}{13}$, $\cos\beta=\frac{4}{13}$, $\cos\gamma=\frac{12}{13}$.

35. Asupra unui punct acționează patru forțe, ale căror proiecții pe axele rectangulare $Oxyz$ sunt date în tabela :

	I	II	III	IV
$X=$	1	2	0	2
$Y=$	10	15	-5	10
$Z=$	3	4	1	-2

Să se afle mărimea rezultantei și unghiurile α, β, γ, formate de ea cu axele.

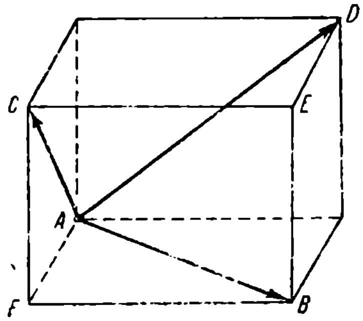
Răspuns : $R=31$, $\alpha=80°43'$, $\beta=15°35'$, $\gamma=78°50'$.

36. Intr'un punct acționează trei forțe, ale căror proiecții pe axele rectangulare $Oxyz$ sunt date în tabela :

	I	II	III
$X=$	2	1	2
$Y=$	10	4	-2
$Z=$	6	-4	-2

Să se afle mărimea rezultantei și unghiurile φ_1, φ_2, φ_3, formate de rezultantă cu fiecare forță.

Răspuns: $R=13$, $\cos\varphi_1=\frac{5}{\sqrt{35}}$, $\cos\varphi_2=\frac{53}{13\sqrt{33}}$, $\cos\varphi_3=\frac{7}{13\sqrt{3}}$.



La problema 37

37. In vârful A al paralelipipedului drept $ABCDEF$ sunt aplicate trei forțe, reprezentate prin vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ și $\overline{AD}$. Să se afle rezultanta lor.

Răspuns: $\overline{R}=2\overline{AE}$.

38. In origine sunt aplicate forțele $\overline{P}_1=3\overline{i}$, $\overline{P}_2=-7\overline{j}$, $\overline{P}_3=4\overline{k}$, care acționează în direcția axelor x, y, z și forța $\overline{P}_4$, care are modulul egal cu 3 și formează unghiuri egale cu cele trei axe. Să se afle mărimea rezultantei $\overline{R}$ a acestor forțe și unghiurile formate cu axele.

Răspuns: $R=\sqrt{83}\approx 9{,}1104$, $\alpha=58°40'$, $\beta=125°30'$, $\gamma=51°$.

§ 2. Echilibrul unui sistem de forțe, ale căror linii de acțiune se intersectează într'un singur punct

1. *Condiția necesară și suficientă pentru echilibrul unui sistem de forțe* $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, ale căror linii de acțiune se intersectează într'un singur punct, poate fi exprimată printr'o singură egalitate vectorială:

$$\overline{R}=\Sigma\overline{P}=0 \tag{1}$$

sau prin trei egalități scalare:

$$\Sigma X=0, \qquad \Sigma Y=0, \qquad \Sigma Z=0, \tag{2}$$

unde X, Y, Z înseamnă proiecțiile forțelor $\overline{P}$ pe axele de coordonate.

Când sistemul de forțe este situat într'unul din planele de coordonate, una din ecuațiile (2), dispare.

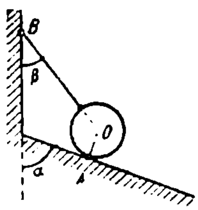
Pentru rezolvarea problemelor de statică se poate folosi fie metoda analitică [(ecuațiile (2)], fie metoda grafică [ecuația (1)].

Când direcția reacțiunii este necunoscută în prealabil (de exemplu în cazul unei articulații) la rezolvarea prin metodă analitică, se descompune reacțiunea necunoscută după axele de coordonate și se introduce în ecuațiile de echilibru, ca necunoscute, proiecțiile acestei reacțiuni pe axele de coordonate.

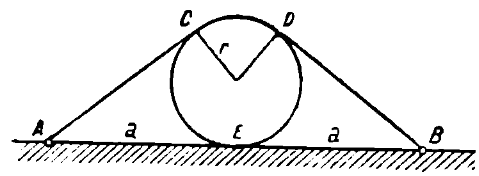
Dacă, după rezolvarea ecuațiilor, se constată că o proiecție oarecare a reacțiunii este negativă, aceasta înseamnă că componenta respectivă este orientată în partea negativă a axei.

In cazul rezolvării prin metoda grafică, problema se reduce, conform ecuației (1), la construcția unui poligon închis de forțe. La rezolvarea problemei de echilibru a trei forțe neparalele este adeseori necesar să se determine în prealabil orientarea reacțiunii, folosind teorema relativă la intersecția a trei forțe concurente, într'un singur punct.

39. O sferă de greutate P este prinsă printr'un fir de punctul fix B, iar în punctul A se sprijină pe un plan înclinat. Să se determine mărimea reacțiunii N în punctul A și tensiunea T a firului, fiind cunoscute unghiurile α și β. Să se cerceteze cazul : 1. $\alpha=\beta$; 2. $\alpha=0$.



La problema 39



La problema 40

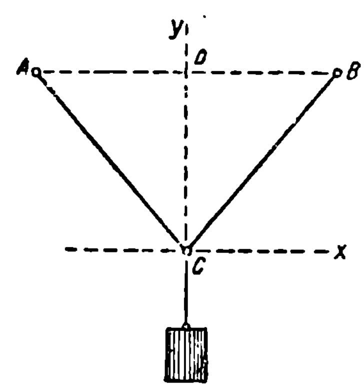
Răspuns : $N=\dfrac{P\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$; $T=\dfrac{P\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$.

40. Un cilindru de rază r și greutate P este legat de un plan orizontal fix prin cablul $ACDB$, în care se produce tensiunea T. Să se determine mărimea reacțiunii N în punctul E, dacă distanța $AE=EB=a$.

Răspuns : $N=P+\dfrac{4ar}{a^2+r^2}\,T$.

41. O greutate P trebue atârnată de două fire identice AC și BC, prinse în punctele fixe A și B, care se află pe aceeași orizontală. Să se determine lungimea firelor, știind că tensiunea maximă la care poate rezista firul, fără pericol, este egală cu T_0 și că distanța AB este egală cu $2a$.

Răspuns : $l \geqslant \dfrac{2a\,T_0}{\sqrt{4\,T_0^2-P^2}}$.

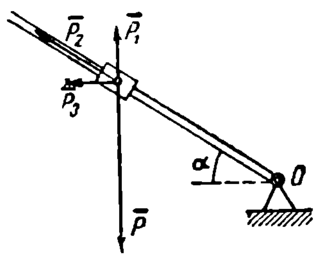


La problema 41

42. Un punct material se află în echilibru pe un plan înclinat neted, fie sub acțiunea forței $\overline{P}_1$, orientată în sus, dealungul liniei de cea mai mare pantă, fie sub acțiunea unei forțe orizontale $\overline{P}_2$. Să se afle greutatea punctului material.

Răspuns: $P = \frac{P_1 P_2}{\sqrt{P_2^2 - P_1^2}}$.

43. O culisă de greutate P alunecă pe o bară netedă, subțire, care se poate mișca într'un plan vertical în jurul extremității ei O. In orice poziție a barei acționează asupra culisei trei forțe, în afară de forța gravitații:



La problema 43

$P_1 = \frac{1}{3} P$, orientată pe verticală în sus,

$P_2 = \frac{1}{3} P$, orientată dealungul barei, în sens opus celei spre articulație,

$P_3 = \frac{1}{3} P$, orientată orizontal spre stânga.

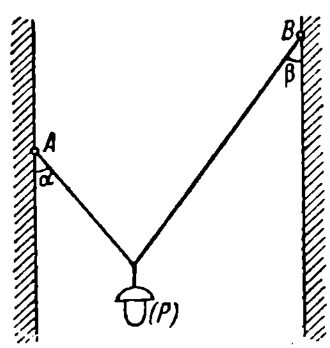
Să se afle poziția barei, pentru cazul când culisa este în echilibru și să se calculeze reacțiunea barei în acest caz.

Răspuns: 1) $\alpha_1 = 180°$; $N_1 = \frac{2}{3} P$. 2) $\alpha_2 = \arcsin \frac{4}{5} \approx$ $\approx 53°7'48''$; $N_2 = \frac{2}{3} P$.

44. O lampă de greutate P este suspendată de două fire, între doi pereți verticali. Firul din stânga formează unghiul α cu peretele, iar cel din dreapta unghiul β. Să se afle tensiunile T_1 și T_2 din cele două fire.

Răspuns: $T_1 = P \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$,

$T_2 = P \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$.

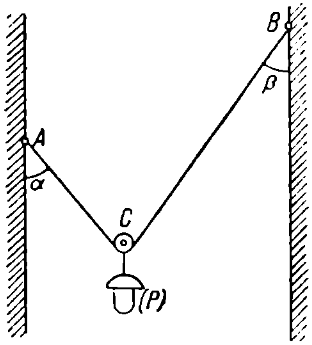


La problema 44

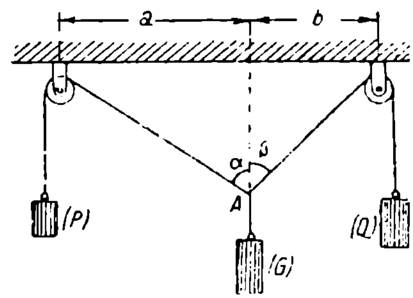
45. Aceleași condiții ca în problema precedentă, cu deosebirea că lampa este fixată de axul unui scripete foarte mic, care alunecă liber pe cablul, care este fixat în punctele A şi B. Ştiind că $AC + CB = l$ şi că distanţa între pereţi este d, să se afle tensiunea din cablu.

Indicaţie. Când scripetele se află în echilibru, unghiurile α şi β sunt egale

Răspuns : $T_1 = T_2 = \dfrac{P}{2\cos\alpha} = \dfrac{Pl}{2\sqrt{l^2-d^2}}$.



La problema 45

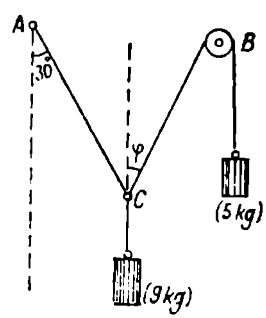


La problema 46

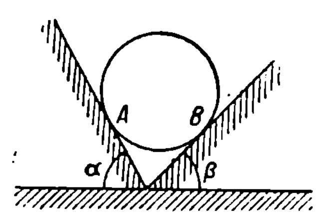
46. Un fir, având la extremităţi două greutăţi P şi Q trece peste doi scripeţi mici, situaţi pe aceeaşi orizontală. Intr'un punct A al firului, situat între scripeţi, este legată o greutate G $(G \leqslant P+Q)$. Să se afle raportul în care verticala, ce trece prin punctul A, împarte distanţa între scripeţi, când sistemul se află în echilibru.

Răspuns : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{G^2 + Q^2 - P^2}{G^2 + P^2 - Q^2}$.

47. Trei fire sunt legate în nodul C; unul dintre fire este prins de punctul fix A, al doilea trece peste scripetele B şi de extremitatea lui este atârnată o greutate de 5 kg. De extremitatea firului al treilea este legată o greutate de 9 kg. Unghiul dintre firul AC şi verticală este de 30°. Să se afle tensiunea T a acestui fir şi unghiul φ, dintre firul CB şi verticală, în poziţia de echilibru.



La problema 47



La problema 48

Răspuns : $\varphi_1 = 34°9'30''$, $T_1 = 5{,}61$ kg, $\varphi_2 = 85°50'30''$, $T_2 = 9{,}97$ kg.

~~c-21008~~

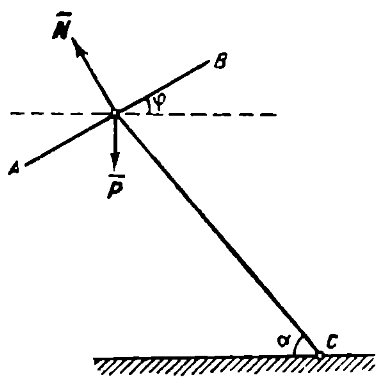
48. O sferă de greutate P se sprijină în punctele A și B pe două plane fixe, înclinate cu unghiurile α și β față de orizontală. Să se afle reacțiunile în punctele A și B.

Răspuns: $N_A = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} P, \quad N_B = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} P.$

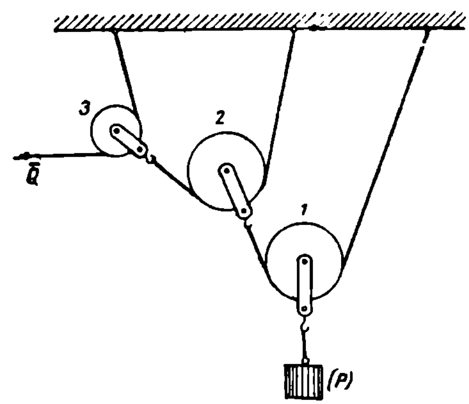
49. Un smeu AB de greutate P, legat printr'un fir de punctul fix C, este ținut în echilibru de presiunea vântului, perpendiculară pe planul AB. Să se determine unghiul φ dintre planul smeului și orizontală și mărimea presiunii N a vântului, fiind cunoscute unghiul α dintre fir și orizontală și tensiunea T a firului. Să se efectueze calculul pentru $P=2$ kg, $T=6$ kg, $\alpha=45°$.

Răspuns: $N=\sqrt{P^2+T^2+2\,PT\,\sin\alpha}$; $\operatorname{ctg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{P}{T\cos\alpha}$,

$N=7{,}55$ kg, $\varphi=34°12'$.



La problema 49



La problema 50

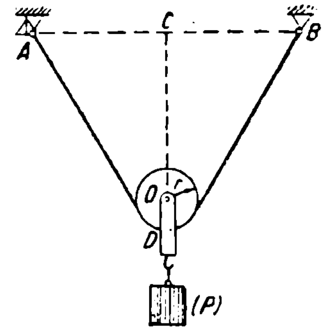
50. Să se demonstreze că în sistemul de scripeți din figură a căror greutate poate fi neglijată, raportul dintre mărimea forței Q și greutatea suspendată P este dat de formula următoare (dacă neglijăm frecarea):

$$\frac{Q}{P}=\frac{r_1 r_2 r_3}{c_1 c_2 c_3},$$

în care r_i sunt razele scripeților și c_i coardele corespunzătoare arcelor cuprinse de fire pe scripeți.

51. Scripetele O de rază r este suspendat pe firul ADB; de acest scripete este atârnată o greutate care adunată la cea a scripetului dă greutatea P. Să se determine tensiunea T a firului, dacă $AC = CB = a$ și $OC = b$. Punctele A și B se află pe aceeași orizontală.

Răspuns : $T = \frac{P}{2} \cdot \frac{b\sqrt{a^2 + b^2 - r^2} - ar}{b^2 - r^2}$.

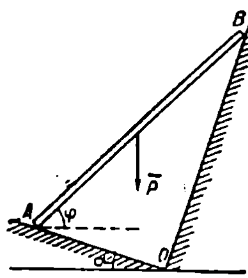


La problema 51

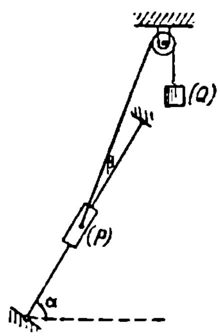
52. O bară omogenă, AB, de lungime $2l$ și greutate P, se află în echilibru într'un plan vertical sprijinindu-se cu capetele de două plane înclinate, care formează între ele un unghi drept. Să se afle unghiul φ dintre bară și orizontală și distanța AO, știind că unul din plane formează cu orizontala unghiul α.

Răspuns : $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $AO = 2l \sin \alpha$.

53. O axă netedă, care formează cu orizontala unghiul α și un scripete fix, se află în același plan vertical, ca în figură. Pe axă se mișcă liber un corp de greutate P. De acest corp este fixat un fir, care trece peste scripete și poartă la extremitatea liberă greutatea Q. Să se afle unghiul β dintre fir și axă și presiunea corpului asupra axei pentru poziția de echilibru. Să se cerceteze cazul : 1) $\alpha = 90°$; 2) $\alpha = 0$.



La problema 52



La problema 53

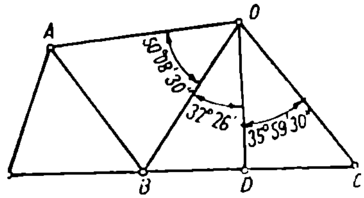
Răspuns : 1) $\cos \beta = \frac{P}{Q} \sin \alpha$; $N = |P \cos \alpha - \sqrt{Q^2 - P^2 \sin^2 \alpha}|$.

2) $\alpha = 90°$; $\beta = \arccos \frac{P}{Q}$; $N = \sqrt{Q^2 - P^2}$.

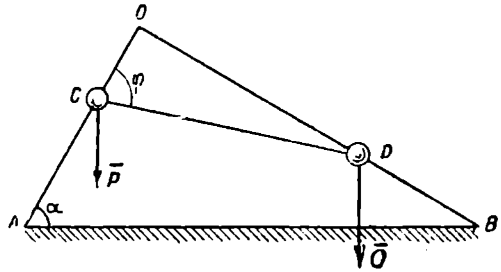
3) $\alpha = 0$; $\beta = 90°$; $N = |P - Q|$.

54. In nodul O al unei ferme, se întâlnesc patru bare. Eforturile S_1 și S_3 din barele OA și OC sunt de câte 10 t, barele

OA și OC fiind supuse la tracțiune. Să se determine eforturile S_2 și S_4 în celelalte două bare OB și OD. Unghiurile dintre bare sunt indicate în figură.



La problema 54



La problema 55

Răspuns: $S_2 = -7,3$ t; $S_3 = -2,7$ t (semnul minus arată că barele OB și OD sunt supuse la compresiune).

55. Se dă un triunghi dreptunghic AOB, executat din sârmă, situat într'un plan vertical, ipotenuza fiind așezată orizontal. Pe catetele triunghiului alunecă două sfere, de greutăți P și Q legate printr'un fir inextensibil.

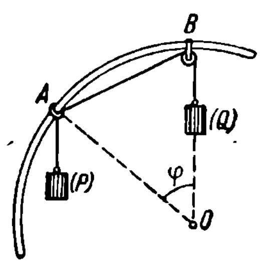
Să se afle poziția de echilibru (unghiul $OCD = \varphi$), reacțiunile în punctele C și D și tensiunea firului în cazul echilibrului, știind că $\sphericalangle BAO = \alpha$ și că nu există frecare. Să se analizeze cazul: 1) $P = Q$; 2) $\varphi = \alpha$; 3) $\alpha = 45°$.

Răspuns: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} \operatorname{ctg} \alpha$.

Reacțiunile: $N_C = (P + Q) \cos \alpha$; $N_D = (P + Q) \sin \alpha$.

Tensiunea firului $T = \sqrt{P^2 \sin^2 \alpha + Q^2 \cos^2 \alpha}$.

56. Un inel A poate aluneca liber pe o circumferință din sârmă, situată într'un plan vertical și având centrul în punctul O. De inel este legată de o parte o greutate P, iar de cealaltă parte un fir, care trece peste un scripete foarte mic, fixat în punctul B, cel mai înalt al circumferinței. Firul poartă la extremitatea lui liberă o greutate Q. Să se afle unghiul $\varphi = AOB$ și reacțiunile din punctele A și B pentru poziția de echilibru.



La problema 56

Răspuns: 1) $\varphi = 2 \arcsin \frac{Q}{2P}$; $N_A = P$; $N_B = Q\sqrt{2 + \frac{Q}{P}}$.

2) $\varphi = \pi$; $N_A = Q - P$; $N_B = 2Q$.

57. O greutate de 6000 kg este suspendată de două bare de fier, cu secţiune dreptunghiulară, care formează între ele un unghi de 30°. Lăţimea barelor este de 7 cm. Să se calculeze grosimea minimă a barelor, ştiind că rezistenţa admisibilă este de 400 kg/cm².

Răspuns : 1,2 cm.

58. O platformă rotundă, având diametrul de 1 m, este suspendată de trei cabluri identice, fiecare având lungimea de 2 m; cablurile se întâlnesc într'un nod. Punctele de fixare ale cablurilor de platformă se află pe circumferinţa ei, la distanţe egale. Greutatea platformei şi a încărcăturii aflată în centrul ei este de 150 kg.

Să se determine diametrul cablului, rezistenţa admisibilă fiind de 55 kg/cm².

Răspuns : $d = 1,1$ cm.

§ 3. Forţe paralele

1. Rezultanta $\overline{R}$ a două forţe paralele $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$, orientate în acelaşi sens, este paralelă cu aceste forţe, orientată în acelaşi sens, egală în mărime cu suma lor şi trece prin punctul C, care împarte interior distanţa AB, între punctele de aplicaţie ale forţelor componente, în părţi invers proporţionale cu mărimea forţelor (fig. 3).

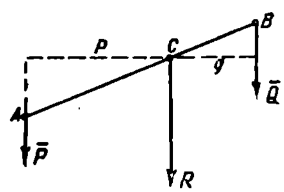


Fig. 3

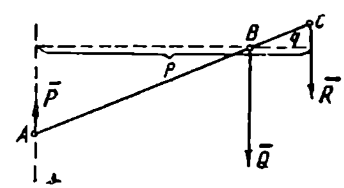


Fig. 4

Dacă forţele sunt îndreptate în direcţii opuse, rezultanta este egală cu diferenţa lor, este paralelă cu forţele date, orientată în sensul forţei mai mari şi trece prin punctul C, care împarte exterior distanţa AB în părţi invers proporţionale cu forţele (fig. 4). Avem, deci, în ambele cazuri :

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}, \quad \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

2. Fie distanţele punctului C la liniile de acţiune a forţelor $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$ respectiv egale cu p şi q. In acest caz

$$Pp = Qq$$

adică momentele forţelor paralele $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$ în raport cu un punct oarecare, situat pe linia de acţiune a rezultantei, sunt egale în mărime absolută.

Rezultanta unui sistem de forțe paralele $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, aplicate în punctele $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$, este paralelă cu aceste forțe și egală în mărime cu suma lor algebrică, adică

$$R = \sum_{i=1}^{n} P_i;$$

coordonatele punctului $C(x_c, y_c, z_c)$, prin care trece linia de acțiune a rezultantei, se determină prin formulele:

$$x_c = \frac{\Sigma P_i x_i}{R}, \qquad y_c = \frac{\Sigma P_i y_i}{P}, \qquad z_c = \frac{\Sigma P_i z_i}{R},$$

în care R și P_i sunt, spre deosebire de notațiile folosite în alte cazuri, valorile algebrice ale forțelor.

Punctul C se numește centrul forțelor paralele și nu depinde de orientarea lor.

59. La capetele A și B ale unei bare drepte, în greutate de $P = 10$ kg, sunt suspendate două greutăți $P_1 = 10$ kg și $P_2 = 20$ kg. Să se afle punctul în care bara trebue sprijinită, pentru ca să fie în echilibru.

Răspuns: La distanța de $\frac{3}{8}$ din lungimea barei calculată dela punctul de suspensie a greutății mai mari.

60. Forța $\overline{R}$ de 100 kg, aplicată în punctul A, se descompune în două forțe $\overline{P}$ și $\overline{Q}$, paralele cu forța dată, aplicate în punctele B și C. Punctele A, B și C se află pe aceeași dreaptă. $P = 130$ kg, distanța AB este de 6 dm. Să se afle forța $\overline{Q}$ și distanța AC.

Răspuns: $\overline{Q} = -0{,}3\ \overline{R}$; $AC = 26$ dm.

61. Să se descompună forța $\overline{P}$ în două forțe paralele cu ea, astfel încât linia de acțiune a uneia dintre ele să fie la distanța a, iar a celeilalte la distanța b de linia de acțiune a forței $\overline{P}$.

Răspuns: $\overline{P}_1 = \overline{P}\frac{b}{a+b}$; $\overline{P}_2 = \overline{P}\frac{a}{a+b}$.

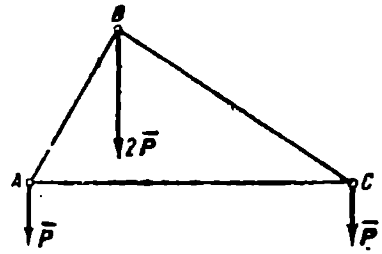
Aceste forțe se află de o parte și de alta a liniei de acțiune a forței $\overline{P}$.

62. Să se descompună forța $\overline{P}$ în două forțe $\overline{P}_1$ și $\overline{P}_2$ paralele și de sensuri opuse, astfel încât prima să se afle la distanța a, iar a doua la distanța $b < a$ de linia de acțiune a forței $\overline{P}$.

Răspuns: $\overline{P}_1 = -\overline{P}\frac{b}{a-b}$; $\overline{P}_2 = \overline{P}\frac{a}{a-b}$.

Ambele forțe se află de aceeași parte a liniei de acțiune a forței date $\overline{P}$.

63. In două vârfuri A și C ale unui triunghi sunt aplicate două forțe egale cu $\overline{P}$, iar în vârful al treilea B este aplicată o forță egală cu $2\overline{P}$. Să se afle centrul acestor forțe.



La problema 63

Răspuns: Centrul căutat se află la mijlocul medianei, care pornește din vârful B.

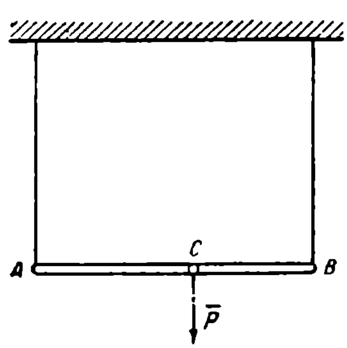
64. Se dă triunghiul ABC și un punct interior M. In acest punct se aplică o forță dată $\overline{P}$. Să se descompună această forță în trei forțe paralele cu ea, orientate în același sens și aplicate în vârfurile A, B și C ale triunghiului (soluție grafică).

65. In vârfurile unui tetraedru dat sunt aplicate patru forțe egale și paralele, orientate în același sens. Să se afle centrul acestor forțe paralele.

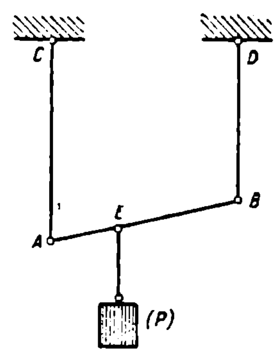
Răspuns: Centrul căutat se află pe segmentul, care unește vârful tetraedrului cu punctul de intersecție al medianelor bazei, la distanța de vârf egală cu $\frac{3}{4}$ din lungimea segmentului.

66. O grindă omogenă, de greutate $P = 100$ kg, se sprijină simetric pe două puncte A și B, distanța între ele fiind $AB = 2$ m. Intr'un punct C al grinzii este așezată greutatea $Q = 80$ kg; distanța $AC = 1{,}5$ m. Să se determine presiunea in punctele de sprijin.

Răspuns: $P_A = 70$ kg, $P_B = 110$ kg.



La problema 67



La problema 68

67. Un atlet se ține într'un punct C al unui trapez AB, lung de 40 cm. Greutatea atletului este $P = 56$ kg, distanța

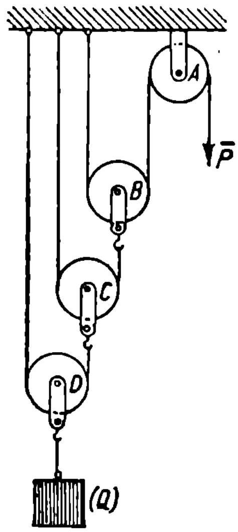
$AC = 25$ cm. Să se calculeze tensiunea funiilor trapezului.

Răspuns: $T_A = 21$ kg, $T_B = 35$ kg.

68. O bară AB, de care este legată o greutate P în punctul E, este suspendată de două fire de cauciuc CA și DB, care au în stare neîntinsă aceeași lungime l_0. Forța de întindere a firului se consideră direct proporțională cu alungirea relativă $\frac{l - l_0}{l_0}$, factorul de proporționalitate fiind k. Neglijând greutatea barei AB, să se determine lungimile firelor CA și DB, dacă $AE = a$ și $EB = b$.

Răspuns: $CA = l_0 + \frac{bl_0P}{k(a+b)}$;

$$DB = l_0 + \frac{al_0P}{k(a+b)}.$$

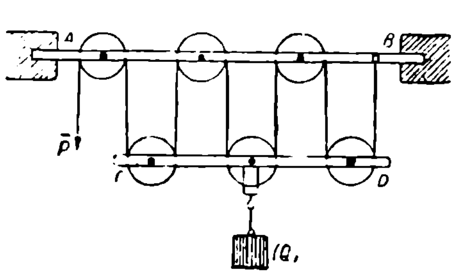


La problema 69

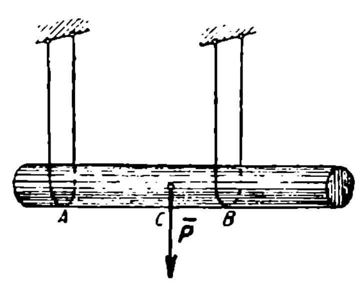
69. O muflă constă dintr'un scripete fix A și trei scripeți mobili B, C și D. O greutate Q, atârnată la scripetele inferior D, este susținută de forța $\overline{P}$, aplicată la extremitatea firului, care trece peste scripetele fix A. Neglijând frecarea, să se determine dependența între P și Q, dacă greutatea proprie a fiecărui scripete este q. Să se generalizeze problema pentru cazul a n scripeți mobili.

Răspuns: $P = \frac{Q}{2^n} + q\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

70. Un palan constă din trei scripeți fixați de o traversă fixă AB și trei scripeți fixați de o traversă mobilă CD.



La problema 70



La problema 71

Toți acești scripeți sunt cuprinși de un fir, care este fixat cu un capăt de traversa fixă în punctul B iar în celălalt capăt acționează forța P. De traversa inferioară mobilă este atârnată greutatea Q. Să se determine dependența între mărimile P și Q în poziția de echilibru, neglijând frecarea și greutatea proprie a scripeților și traverselor și considerând că toate porțiunile firului, aflate între scripeți, sunt paralele între ele. Să se generalizeze problema pentru cazul a n scripeți mobili

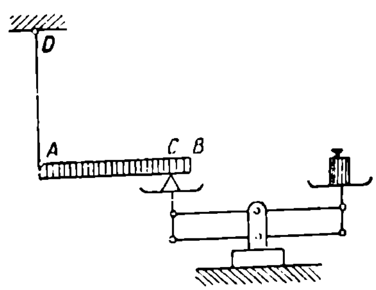
Răspuns: $P = \frac{Q}{6}$; pentru n scripeți $P = \frac{Q}{2n}$.

71. O grindă de formă cilindrică, în greutate de $P = 60$ kg, este suspendată de două cabluri. Să se afle tensiunile T_A și T_B din cabluri, dacă $AC = 1{,}5$ m și $CB = 0{,}5$ m.

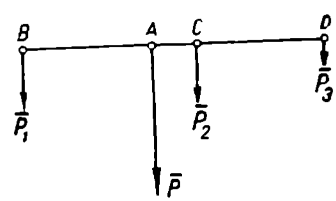
Răspuns: $T_A = 7{,}5$ kg, $T_B = 22{,}5$ kg.

72. O grindă neomogenă AB, de greutate P este suspendată la capătul A de un fir, fixat în punctul O. In punctul C ea se sprijină pe talerul unui cântar Roberval, păstrând o poziție orizontală. Cântarul se menține în echilibru prin greutatea Q. Să se determine distanța dela centrul de greutate a grinzii la extremitatea A, știind că distanța $AC = a$.

Răspuns: $\frac{aQ}{P}$.



La problema 72



La problema 73

73. Forța $\bar{P}$, aplicată în punctul A, se descompune în trei forțe paralele cu ea, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ și $\bar{P}_3$, aplicate în punctele B, C și D. Să se afle mărimile forțelor componente, știind că $AB = 15$ dm, $AD = 20$ dm, $AC = 5$ dm, $P = 50$ kg și $P_2 = 2P_3$.

Răspuns: $P_1 = 20$ kg, $P_2 = 20$ kg, $P_3 = 10$ kg.

74. In vârfurile A, B, C și D ale unui dreptunghi $ABCD$ sunt aplicate forțe de 5, 15, 35 și 45 kg. In punctul O de intersecție al diagonalelor este aplicată o forță de 20 kg. Toate aceste forțe sunt perpendiculare pe planul dreptunghiului și orientate în acelaşi sens. Să se afle poziţia centrului acestor forţe, ştiind că $AB = 4$ cm şi $AD = 10$ cm.

Răspuns: Luând laturile AD şi AB drept axe de coordonate x şi y, coordonatele centrului căutat sunt $x = 7{,}5$ cm, $y = 2$ cm.

75. Pe o grindă orizontală acţionează 10 forţe verticale, orientate în jos, având mărimea de 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 şi 100 kg. Punctele lor de aplicaţie se află la distanţe egale. Să se afle centrul acestor forţe paralele.

Răspuns: Centrul căutat coincide cu punctul de aplicaţie al forţei de 70 kg.

76. Asupra unui corp acţionează cinci forţe paralele:

$P_1 = 10$ kg aplicată în punctul A_1 (1 ; 2 ; 3)
$P_2 = 15$,, ,, ,, ,, A_2 (2 ; 3 ; 1)
$P_3 = 30$,, ,, ,, ,, A_3 (3 ; 1 ; 2)
$P_4 = 15$,, ,, ,, ,, A_4 (0 ; 1 ; 1)
$P_5 = -10$ kg ,, ,, ,, A_5 (1 ; −1 ; 0).

Să se afle mărimea rezultantei acestor forţe şi coordonatele centrului lor.

Răspuns: $R = 60$ kg, $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$.

§ 4. Teoria cuplurilor şi momentelor

1. Se numeşte cuplu de forţe un sistem de două forţe egale, paralele, orientate în sensuri opuse, ale căror linii de acţiune nu coincid (fig 5). Momentul unui cuplu este o mărime vectorială, a cărei valoare numerică este egală cu produsul dintre mărimea unei forţe a cuplului şi distanţa între liniile de acţiune ale forţelor acestui cuplu (braţul cuplului) adică

$$|\mathrm{MOM}(\bar{P}, \bar{P}')| = Pp,$$

orientarea lui fiind perpendiculară pe planul cuplului şi având sensul astfel, încât un observator aşezat în direcţia acestui vector, să vadă rotaţia, provocată de cuplu, orientată în sens invers mişcării acelor de ceasornic (adică direcţia momentului se defineşte *după regula şurubului drept*, fig. 6).

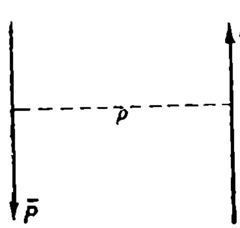


Fig. 5

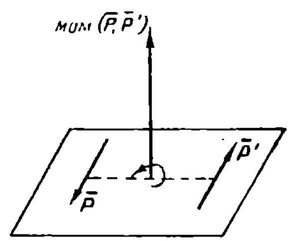


Fig. 6

Cuplul poate să fie schimbat oricum, cu condiţia ca să-şi păstreze neschimbate mărimea şi orientarea momentului său; momentul unui cuplu este un vector *liber*, adică orice punct poate fi luat ca origine.

Un sistem de mai multe cupluri, care acţionează în acelaşi plan, sau în plane paralele este echivalent cu un cuplu al cărui moment este egal cu suma algebrică a momentelor cuplurilor componente. Dacă cuplurile acţionează în plane neparalele, momentul cuplului rezultant este egal cu suma geometrică a momentelor cuplurilor componente.

2. Momentul unei forţe P în raport cu centrul O este vectorul, aplicat în centrul O şi perpendicular pe planul triunghiului OAB (fig. 7); sensul acestui vector se determină, ca şi în cazul unui cuplu, după regula şurubului drept, iar modulul (lungimea) lui este egal cu produsul dintre mărimea forţei şi distanţa p dela centrul O la linia de acţiune a forţei, adică

$$|\mathrm{MOM}_O P| = Pp.$$

Valoarea numerică a momentului este egală cu dublu ariei triunghiului OAB (fig. 7). Dacă A (x, y, O) este punctul de aplicaţie al forţei, iar X, Y şi $Z=0$ proiecţiile forţei pe axele de coordonate, mărimea algebrică a momentului forţei,

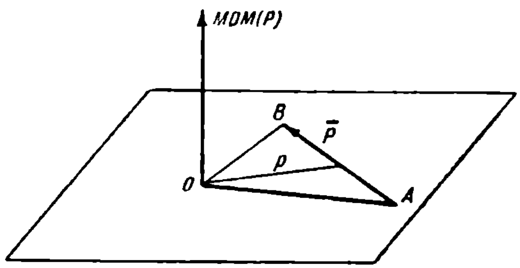


Fig. 7

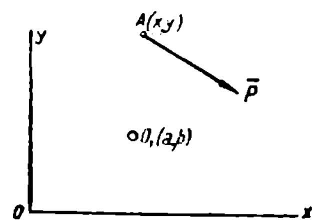


Fig. 8

faţă de origine, va fi egală cu $xY-yX$ (fig. 8). Mărimea algebrică a momentului forţei $\bar{P}$ în raport cu centrul O_1 (a, b, O) este egală cu

$$(x-a)\,Y-(y-b)\,X.$$

3. Se numeşte momentul forţei $\bar{P}$ faţă de axa x, valoarea algebrică a momentului proiecţiei forţei pe planul π, perpendicular pe axă, în raport cu punctul de intersecţie al axei cu acest plan, adică (fig. 9).

$$\mathrm{MOM}_x P = \mathrm{MOM}_O\ [pr_x\, P]$$

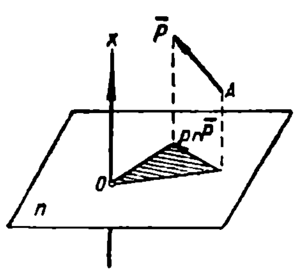


Fig. 9

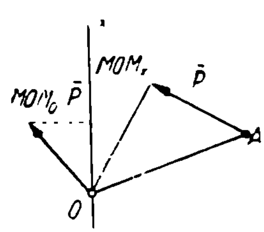


Fig. 10

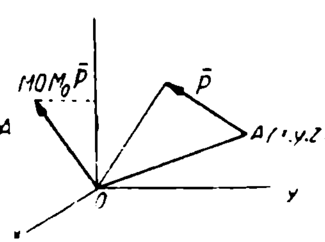


Fig. 11

Proiecţia momentului forţei P, în raport cu centrul O, pe oricare axă x, care trece prin O (fig. 10), este egală cu momentul forţei P în raport cu această axă, adică $pr_x|\mathrm{MOM}_O\bar{P}| = \mathrm{MOM}_x P$.

4. Dacă forța $\bar{P}(X, Y, Z)$ este aplicată în punctul $A(x, y, z)$ (fig. 11) avem

$$pr_x[\text{MOM}_O \bar{P}] = \text{MOM}_x \bar{P} = yZ - zY,$$

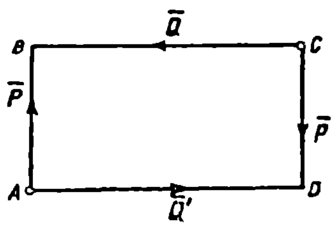
$$pr_y[\text{MOM}_O \bar{P}] = \text{MOM}_y \bar{P} = zX - xZ,$$

$$pr_z[\text{MOM}_O \bar{P}] = \text{MOM}_z \bar{P} = xY - yX.$$

sau, cu alte cuvinte, momentele forței $\bar{P}$ față de axele de coordonate, sunt egale cu determinanții minori corespunzători din tabela

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix}.$$

77. Pe laturile unui dreptunghi $ABCD$, în care $AD=a$ și $AB=b$, acționează forțe, care formează două cupluri $(\bar{P}, \bar{P}')$ și $(\bar{Q}, \bar{Q}')$, cum rezultă din figură. Ce relație trebue să existe între P și Q pentru ca aceste două cupluri să se echilibreze reciproc?



La problema 77

Răspuns: Relația $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{b}{a}$.

78. Șase cupluri acționează într'un plan. Mărimile forțelor lor sunt: 5, 3, 2, 3, $\frac{1}{2}$ și 1, iar brațele corespunzătoare: 2, 1, 4, x, 6 și 3. Să se afle brațul x, cunoscând că sistemul acestor cupluri este echilibrat cu zero și că primele trei cupluri au momentele pozitive, iar celelalte cupluri au momentele negative.

Răspuns: $x=5$.

79. Una din forțele unui cuplu, situat în planul xOy, este aplicată în punctul (2, 2). Proiecțiile acestei forțe sunt egale cu: $X=1$, $Y=-5$. A doua forță a cuplului este aplicată în punctul (4, 3). Să se afle mărimea momentului acestui cuplu.

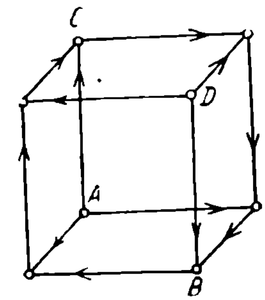
Răspuns: $L = 11$.

80. Să se afle mărimea momentului L al cuplului, echivalent cu două cupluri, situate în plane perpendiculare între ele, dacă mărimile forțelor acestor cupluri sunt $P_1 = P_1'=4$ și $P_2=P_2'=5$, iar brațele lor sunt: $d_1=2$ și $d_2=3$.

Răspuns: $L = \sqrt{(P_1d_1)^2 + (P_2d_2)^2} = 17$.

81. Douăsprezece forțe egale ca mărime, formând șase perechi, acționează dealungul muchiilor cubului $ABCD$, ca în figură. Să se determine mărimea și orientarea momentului cuplului rezultant, dacă mărimea fiecărei forțe este P.

Răspuns : Momentul cuplului rezultant este orientat după diagonala DA și numeric egal cu $2AD \cdot P$.



La problema 81

82. Să se compună patru cupluri, așezate în cele patru fețe ale unui tetraedru regulat știind că momentele lor sunt egale și orientate spre interiorul tetraedrului.

Răspuns : Sistemul de cupluri este echivalent cu zero.

83. Asupra unui corp acționează trei cupluri. Proiecțiile momentelor pe axele de coordonate sunt cuprinse în tabela :

$l_x =$	2	4	0
$l_y =$	4	2	2
$l_z =$	18	10	-4

Să se determine mărimea L a momentului cuplului rezultant și unghiurile α, β, γ formate de el cu axele.

Răspuns : $L=26$, $\alpha=76°39'27''$, $\beta=72°4'46''$, $\gamma=22°37'12''$.

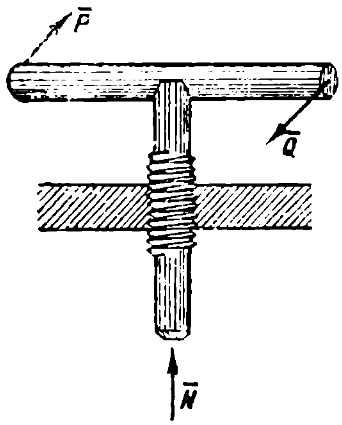
84. Una din forțele unui cuplu este aplicată în punctul (5, 3, 10). Proiecțiile acestei forțe pe axele de coordonate sunt $X = 12$, $Y = -8$, $Z = 0$. A doua forță a cuplului este aplicată în punctul (4, 4, 10). Să se determine mărimea L a momentului cuplului și unghiurile α, β, γ formate cu axele.

Răspuns : $L = 4$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma=0$.

85. Asupra unui corp acționează trei cupluri. Forțele primului cuplu sunt aplicate în punctele (1, 4, 7) și (−1, −4, −7). Proiecțiile primei forțe pe axele de coordonate sunt : $X_1=-10$, $Y_1=10$, $Z_1=0$. Forțele cuplului al doilea sunt aplicate în punctele (2, 5, 8) și (−2, −5, −8.) Proiecțiile primei forțe ale acestui cuplu sunt : $X_2=8$, $Y_2=0$, $Z_2=12$. Forțele cuplului al treilea sunt aplicate în punctele (3, 6, 9) și (−3, −6, −9), iar proiecțiile primei forțe sunt : $X_3=0$, $Y_3=0$, $Z_3=15$. Să se determine mărimea momentului cuplului rezultant și unghiurile formate de el cu axele de coordonate.

Răspuns : $L = 10\sqrt{485}\approx 220{,}23$; $\alpha = 43°24'$, $\beta = 132°56'$, $\gamma = 84°47'$.

86. Din teoria cuplurilor este cunoscut că o forță nu poate echilibra un cuplu. Cum se explică atunci, că la presa cu șurub (partea ei esențială este arătată în figură) cuplul ($\overline{P}$, $\overline{Q}$) pare să fie echilibrat de puterea de rezistență N a corpului presat?



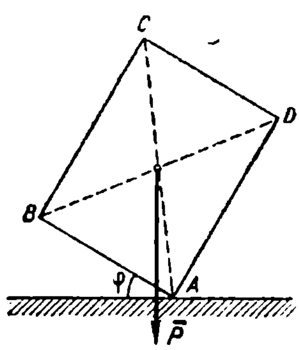
La problema 86

87. Un paralelipiped drept $ABCD$, în greutate de $P = 10$ kg și cu dimensiunile $AB = 6$ dm, $AD = 8$ dm, este astfel înclinat, încât baza lui formează cu orizontala un unghi $\varphi = 30°$. Să se determine momentul greutății lui în raport cu muchia A. Pentru ce valoare a unghiului φ se anulează acest moment?

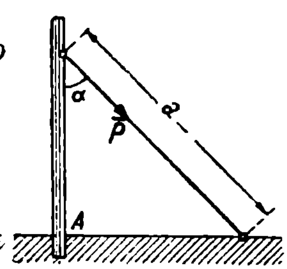
Răspuns: $|\mathrm{mom}_A \overline{P}| = 5{,}98$ kg dm, $|\mathrm{mom}_A \overline{P}| = 0$ pentru $\varphi = 36°52'11''$.

88. Un fir de lungime a, legat de un stâlp, sub un unghi α, este întins cu o forță, a cărei mărime este P. Să se determine momentul acestei forțe în raport cu punctul A (moment de răsturnare). Pentru ce valoare a unghiului α acest moment atinge valoarea maximă?

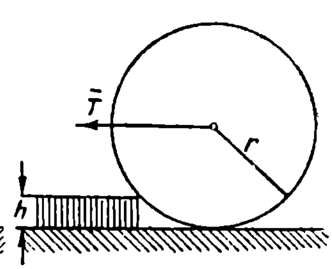
Răspuns: $|\mathrm{mom}_A \overline{P}| = \frac{1}{2} aP \sin 2\alpha$; acest moment are valoarea maximă pentru $\alpha = 45°$.



La problema 87



La problema 88



La problema 89

89. Greutatea unui tăvălug cilindric este P, raza lui este egală cu r. Să se determine forța orizontală T, necesară pentru rostogolirea tăvălugului peste cărămida, a cărei înălțime este h.

Răspuns : $T = P \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r-h}$.

90. O forță de mărimea $P = 10$ kg este orientată dealungul dreptei $3x+4y-10=0$. Să se determine mărimea absolută a momentului ei în raport cu originea.

Răspuns : 20.

91. Să se afle locul geometric al extremităților vectorilor, care reprezintă forțe aplicate într'un punct dat A, care au momentul dat $\bar{L}$ în raport cu un centru dat O.

Răspuns : O dreaptă, paralelă cu AO, situată in planul perpendicular pe $\bar{L}$ la distanța $\frac{L}{AO}$ de dreapta AO.

92. In punctul (4,2) sunt aplicate trei forțe, ale căror proiecții pe axele de coordonate sunt : $X_1=5$, $Y_1=12$, $X_2=4$, $Y_2=3$, $X_3=10$, $Y_3=0$. Să se afle mărimea momentului rezultantei lor, în raport cu originea.

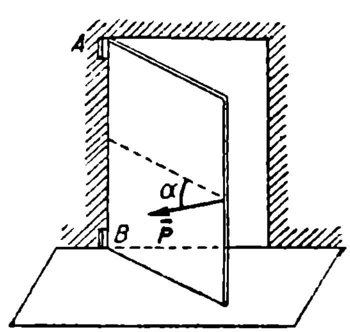
Răspuns : 22.

93. Mărimile a trei forțe, aplicate în cele trei vârfuri ale unui triunghi dat, sunt proporționale cu laturile opuse. Forțele sunt orientate după perpendicularele la aceste laturi, înspre interiorul triunghiului. Aplicând teorema lui Varignon, să se demonstreze că aceste trei forțe se echilibrează între ele.

Indicație. Trebue demonstrat că momentul rezultantei, în raport cu fiecare vârf al triunghiului, este egal cu zero.

94. Asupra unei uși, care se rotește în jurul axei AB, acționează o forță de mărimea $P=2$ kg, situată într'un plan perpendicular pe AB și formând un unghi $\alpha = 45°$ cu planul ușii. Să se afle momentul acestei forțe față de axa AB, știind că lățimea ușii $a = 0,5$ m.

Răspuns : 0,71 kgm.



La problema 94

95. Să se afle mărimea momentului în raport cu originea a unei forțe P, aplicată în punctul (x, y, z) și formând unghiurile α, β, γ cu direcțiile pozitive ale axelor de coordonate.

Răspuns :

$$P\sqrt{(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2}.$$

96. Se dă o forță reprezentată prin vectorul AB și un fascicol de drepte cu centrul într'un punct oarecare O, care nu se află pe linia de acțiune a forței date. Considerând momentele acestei forțe față de dreptele fascicolului dat, drept vectori, aplicați în punctul O și orientați dealungul dreptelor corespunzătoare, să se afle locul geometric al extremităților acestor vectori.

Răspuns : Sfera tangentă la planul triunghiului OAB în punctul O și având diametrul egal cu dublul ariei acestui triunghi.

97. Să se afle, în spațiu, locul geometric al extremităților vectorilor, aplicați într'un punct dat A și având momentele, în raport cu un alt punct O, aflat la distanța a de A, identice ca mărime și egale cu L.

Răspuns : Un cilindru circular de rază $\frac{L}{a}$, având dreapta OA ca axă de rotație.

§ 5. Reducerea unui sistem de forțe la forma cea mai simplă

1. Orice forță $\bar{P}$, aplicată în punctul A, este echivalentă cu o forță P identică ca mărime și orientare, aplicată în punctul B și un cuplu ($\bar{P}'$, $\bar{P}''$) al cărui moment este egal cu momentul forței $\bar{P}$ în raport cu punctul B (fig. 12). Deaceea punctele de aplicație ale tuturor forțelor situate într'un plan, pot fi mutate în orice punct O al acestui plan (centru de reducere), obținându-se ca rezultat o singură forță $\bar{R} = \Sigma \bar{P}_i$ (*forță rezultantă* sau *vector principal*) și un cuplu, al cărui moment $\bar{L}$ este egal, ca mărime, cu suma momentelor tuturor forțelor date, în raport cu centrul de reducere O (*moment rezultant* sau *principal*) (fig. 13).

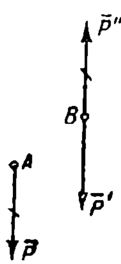


Fig. 12

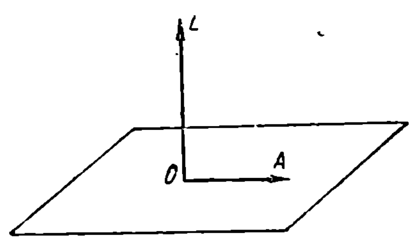


Fig. 13

2. Schimbând centrul de reducere, forța rezultantă $\bar{R}$ rămâne neschimbată, adică este un *invariant* al sistemului plan de forțe, iar momentul rezultant $\bar{L}$ suportă o creștere egală cu momentul forței $\bar{R}$ în raport cu noul centru de reducere O_1, adică

$$\bar{L}_1 = \bar{L} + \mathrm{MOM}_{O_1}\bar{R}.$$

Dacă $\bar{R} = \Sigma \bar{P}_i \neq 0$, se poate găsi întotdeauna un astfel de centru de reducere O^*, încât momentul rezultant în raport M_{O^*} cu acest centru să fie nul, adică

$$\bar{L}^* = \Sigma \, \text{MOM}_{O^*} \bar{P}_i = 0 :$$

astfel, forța rezultantă $\bar{R}^* = \bar{R}$, aplicată în centrul O^*, va fi *rezultanta* sistemului de forțe în plan, întrucât sistemul se reduce numai la această forță. Linia de acțiune a rezultantei $\bar{R}^*$ se numește *axă centrală* a sistemului plan de forțe.

Dacă $\bar{R} = \Sigma \bar{P}_i = 0$, atunci momentul rezultant $\bar{L}$ nu se schimbă în cazul schimbării centrului de reducere; în acest caz sistemul de forțe se reduce la un cuplu, cu momentul $\bar{L}$.

Dacă $\bar{R} = 0$ și $\bar{L} = 0$, sistemul de forțe se află în echilibru.

3. In mod analog, toate forțele unui sistem din spațiu pot fie reduse într'un centru O, ales arbitrar, obținându-se ca rezultat: 1) o forță rezultantă $\bar{R}$, egală cu suma tuturor forțelor date (vector principal), și 2) un cuplu rezultant, al cărui vector-moment $\bar{L}$ este egal cu suma vectorilor-moment a forțelor date $\bar{P}_i$ în raport cu centrul O (momentul principal al sistemului de forțe dat). Astfel (fig. 14)

$$\bar{R} = \Sigma \bar{P}_i, \quad \bar{L} = \Sigma \text{MOM}_O \bar{P}_i.$$

4. Dacă se mută centrul de reducere din punctul O într'un punct oarecare O_1, forța rezultantă $\bar{R}$ rămâne neschimbată, iar vectorul-moment rezultant $\bar{L}$ primește o creștere, egală cu $\text{MOM}_{O_1} \bar{R}$ adică

$$\bar{L}_1 = \bar{L} + \text{MOM}_{O_1} \bar{R}.$$

Prin urmare, în cazul mutării centrului de reducere, momentul rezultant L se modifică, atât în privința mărimii, cât și în privința direcției. Dacă vectorul $\bar{L}$ este descompus în două componente: una pe direcția $\bar{R}$, de mărime egală cu $|L \cos \alpha|$, iar a doua perpendiculară pe $\bar{R}$, având mărimea $L \sin \alpha$, α fiind unghiul dintre $\bar{R}$ și $\bar{L}$ prima componentă nu se modifică prin schimbarea centrului de reducere întrucât $M_{O_1} \bar{R}$, modifică numai componenta a doua, perpendiculară pe $\bar{R}$, deoarece acest moment este perpendicular pe $\bar{R}$. Prin urmare, invarianții unui sistem în spațiu sunt: 1) forța rezultantă $\bar{R}$ și 2) proiecția momentului rezultant $\bar{L}$ pe direcția $\bar{R}$, adică $L \cos \alpha$.

5. Dacă $R \neq 0$, se poate găsi întotdeauna un astfel de centru de reducere O^*, încât componenta vectorului $\bar{L}$, perpendiculară pe $\bar{R}$, să se anuleze și prin urmare, tot sistemul de forțe să se reducă la forța $\bar{R}$ și la cuplul, al cărui vector-moment $\bar{L}^*$ este paralel cu această forță (fig. 14). In acest caz vectorul-moment rezultant are cea mai mică valoare absolută L^* egală cu $|L \cos \alpha|$. Dreapta care trece prin punctul O^* și are direcția vectorilor $\bar{R}$ și $\bar{L}^*$ se numește *axa centrală* a sistemului de forțe în spațiu.

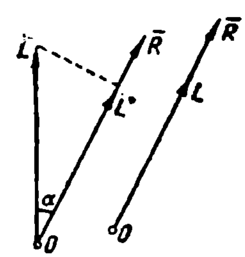


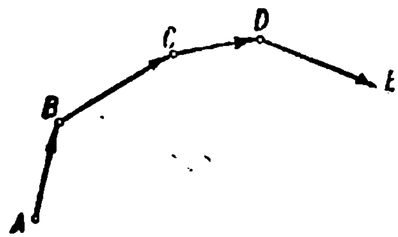
Fig. 14

6. Totalitatea forței și a cuplului, al cărui vector-moment este paralel cu forța, se numește *dinam*. Prin urmare, în cazul general, un sistem de forțe în spațiu poate fi redus la un dinam.

7. Dacă $L \cos \alpha = 0$, sistemul de forțe se reduce numai la forța $\bar{R}$, adică are o rezultantă. Dacă $\bar{R} = 0$, sistemul de forțe se reduce numai la un cuplu. In acest caz $\bar{L} = \text{const}$.

8. In cazul general orice sistem de forțe poate fi redus la două forțe secante și neparalele, dintre care una are punctul de aplicație și orientarea dată-

98. Unui corp absolut rigid îi sunt aplicate în punctele A, B, C şi D situate în acelaşi plan, forţe reprezentate prin vectorii $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$. Să se mute acest sistem de forţe în punctul A.



La problema 98

Răspuns : Vectorul principal al sistemului este egal cu vectorul $\overline{AE}$, iar momentul principal este egal (numeric) cu dublul ariei poligonului $ABCDE$.

99. Este cunoscut, că un sistem de forţe în plan este echivalent cu forţa rezultantă $\overline{R}$. Să se afle locul geometric al extremităţilor vectorilor, care reprezintă momentele principale ale acestui sistem în raport cu toate punctele din planul lui.

Răspuns : Un plan, care intersectează planul sistemului de forţe dat după linia de acţiune a forţei $\overline{R}$.

100. Un sistem de forţe dat în plan, este echivalent cu o singură forţă $\overline{R}$. Să se afle în planul acestui sistem, locul geometric al centrelor de reducere, în raport cu care momentele lui principale au o valoare algebrică dată L.

Răspuns : Dreapta paralelă cu linia de acţiune a forţei $\overline{R}$, dusă la distanţa $\frac{|L|}{R}$ de aceasta.

101. Se dă în plan un sistem de patru forţe $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ şi $\overline{P}_4$; proiecţiile X şi Y ale acestor forţe şi coordonatele x, y ale punctelor lor de aplicaţie, sunt cuprinse în următoarea tabelă.

	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\overline{P}_3$	$\overline{P}_4$
X	1	-2	3	-4
Y	4	1	-3	-3
x	2	-2	3	-4
y	1	-1	-3	-6

Să se reducă acest sistem în origine şi să se afle ecuaţia axei centrale (a liniei de acţiune a rezultantei).

Răspuns : Modulul vectorului principal $R=\sqrt{5}$; modulul momentului principal $L_0=9$; ecuația axei centrale este: $x-2y+9=0$.

102. Să se mute forța $\bar{P}$ cu proiecțiile $P_x=1$, $P_y=-2$, $P_z=3$, din punctul ei de aplicație $(2, 2, 2)$ în punctul $(-1, 4, 2)$, fără a modifica efectul ei.

Răspuns : Ca rezultat al mutării se obține forța $\bar{P}$ și cuplul cu un moment, al cărui modul este $L=\sqrt{133}$, iar cosinusurile directoare sunt:

$$-\frac{6}{\sqrt{133}},\quad -\frac{9}{\sqrt{133}},\quad -\frac{4}{\sqrt{133}}.$$

103. Se dau trei forțe:

$\bar{P}_1$ $(3, 5, 4)$ cu punctul de aplicație $(0, 2, 1)$,

$\bar{P}_2$ $(-2, 2, -6)$ cu punctul de aplicație $(1, -1, 3)$,

$\bar{P}_3$ $(-1, -7, 2)$ cu punctul de aplicație $(2, 3, 1)$.

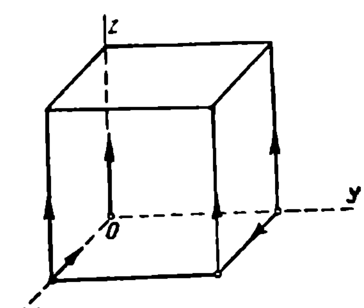
Să se mute acest sistem în origine.

Răspuns : In urma mutării sistemului se obține un cuplu cu un moment, al cărui modul este $L=3\sqrt{61}\approx 23{,}43$, iar cosinusurile directoare sunt:

$$\frac{16}{3\sqrt{61}},\quad -\frac{2}{3\sqrt{61}},\quad -\frac{17}{3\sqrt{61}}.$$

104. Pe muchiile unui cub acționează șase forțe, cum se arată în figură, fiecare având mărimea P. Să se afle momentul principal minim $\bar{L}_{\min}$, forța rezultantă $\bar{R}$, axa centrală, precum și parametrul dinamului, știind că lungimea muchei cubului este a.

Răspuns : $L_{\min}=Pa$; $R=4P$. Axa centrală este paralelă cu axa z și trece prin centrele fețelor orizontale ale cubului. Parametrul dinamului este egal cu $\frac{a}{4}$.



La problema 104

105. Să se demonstreze teorema: proiecțiile momentelor principale ale sistemului de forțe dat, față de două puncte oarecare din spațiu, pe axa, care trece prin aceste puncte, sunt egale.

106. Sunt date: două puncte, momentul principal al unui sistem oarecare de forțe în raport cu unul din aceste puncte și orientarea momentului principal al aceluiași sistem, în raport cu punctul al doilea. Să se afle mărimea acestui al doilea moment.

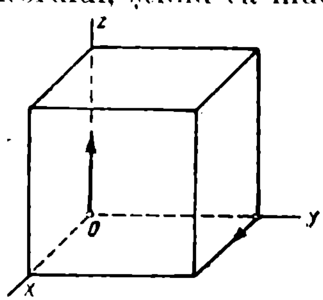
Răspuns: Se folosește teorema din problema precedentă. Notând cu $\bar{a}$ vectorul care unește punctele date, și cu $\bar{L}_1$ și $\bar{L}_2$ momentele principale în raport cu aceste puncte, se găsește

$$L_2 = \frac{\bar{L}_1 \cdot \bar{a}}{\bar{L}_2^0 \cdot \bar{a}},$$

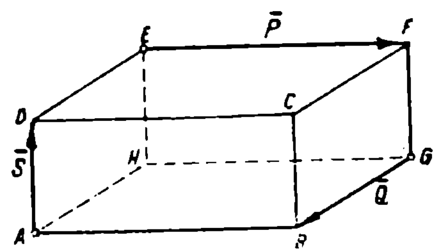
unde $\bar{L}_2^0$ este versorul, care determină direcția lui $\bar{L}_2$.

107. Un sistem de forțe dat în spațiu este redus la două forțe. Să se demonstreze, că perpendiculara comună pe liniile de acțiune ale acestor forțe intersectează axa centrală a sistemului dat, sub un unghi drept.

108. Pe două muchii ale unui cub, acționează, cum se arată în figură, două forțe, fiecare având mărimea P. Să se afle mărimea forței rezultante R, a momentului rezultant minim $\bar{L}_{min}$, poziția axei centrale, precum și parametrul răsucitorului, știind că muchea cubului este a.



La problema 108



La problema 109

Răspuns: $R = P\sqrt{2}$; $L_{min} = \frac{1}{2} Pa\sqrt{2}$. Parametrul răsucitorului este egal cu $\frac{1}{2} a$. Axa centrală trece prin punctul $(0, \frac{1}{2} a, 0)$ și centrul cubului.

109. Trei forțe $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{S}$ acționează în lungul muchiilor $EF=a$, $GB=b$, $AD=c$ ale unui paralelipiped dreptunghi. Să se afle condiția de existență a rezultantei acestor trei forțe, precum și mărimea ei.

Răspuns: Mărimea rezultantei este $R=\sqrt{P^2+Q^2+S^2}$. Condiția ei de existență: $aQS+bSP+cPQ=0$.

110. Să se afle locul geometric al centrelor de reducere ale unui sistem de forțe în spațiu, în raport cu care momentul rezultant al acestui sistem are mărimea dată L.

Răspuns: Un cilindru circular cu raza $r=\frac{\sqrt{L^2-L^2_{min}}}{R}$, având drept axă de rotație axa centrală a sistemului de forțe dat, R fiind mărimea vectorului principal al acestui sistem.

§ 6. Echilibrul unui sistem de forțe în plan

1. Pentru ca un sistem de forțe în plan să se afle în echilibru, este necesar și suficient, ca forțele sistemului să satisfacă condițiile:

$$\overline{R}=\Sigma\overline{P}=0 \text{ și } \Sigma M_O P=0.$$

O fiind un centru arbitrar. Din prima ecuație rezultă că în caz de echilibru $R_x=\Sigma P_x=0$ și $R_y=\Sigma P_y=0$; deaceea condițiile de echilibru ale unui sistem de forțe în plan se exprimă prin următoarele trei ecuații:

$$\Sigma P_x=0, \quad \Sigma P_y=0, \quad \Sigma M_O P=0.$$

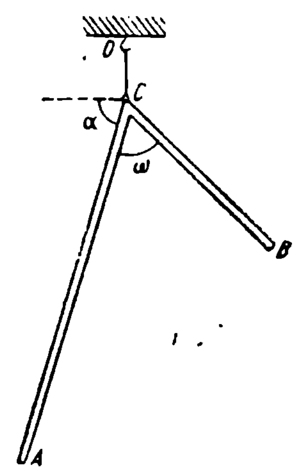
La rezolvarea problemelor trebue avut în vedere considerațiile generale, expuse în § 2, ținând seama că este convenabil să se aleagă drept centru al momentelor punctul în care se intersectează un număr mai mare de forțe.

2. Dacă într'un sistem de forțe în plan suma momentelor forțelor în raport cu fiecare centru din trei centre arbitrare, care nu sunt situate pe aceeași dreaptă, este egală cu zero, sistemul se află în echilibru și invers.

a) *Echilibrul pârghiei (o ecuație de echilibru)*

111. Un sistem invariabil, care constă din două bare omogene AC de lungime $2a$ și CB de lungime $2b$, unite solidar în punctul C, formând un unghi ω, este suspendat de firul CO. Să se afle poziția de echilibru (unghiul α format de AC cu orizontala). Să se demonstreze, că în caz de echilibru, centrul de greutate al liniei frânte ACB se află pe verticala care trece prin punctul C.

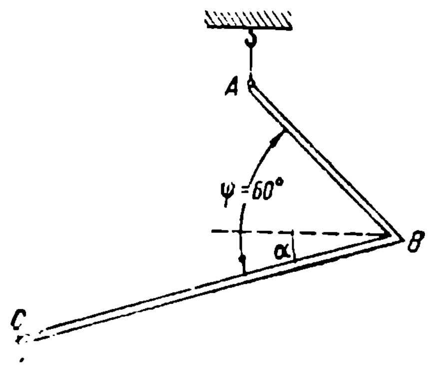
Răspuns: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^2+b^2\cos\omega}{b^2\sin\omega}$.



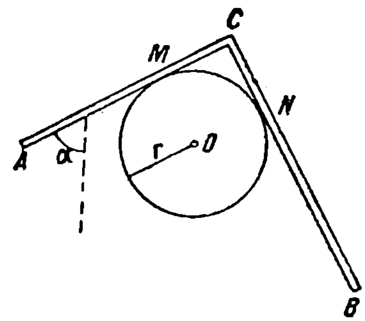
La problema 111

112. Două bare omogene AB și BC, una fiind jumătate din cealaltă ($AB=\frac{1}{2}BC=2l$), sunt unite solidar între ele, formând un unghi $\varphi=60°$. Sistemul obținut este suspendat de un fir la extremitatea A. Să se determine unghiul dintre bara CB și orizontală în poziția de echilibru.

Răspuns: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - 5 \cos \varphi}{5 \sin \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.



La problema 112



La problema 113

113. Un sistem invariabil constă din 2 bare omogene AC și CB, unite solidar în punctul C și formând un unghi drept. Sistemul se află în echilibru într'un plan vertical, sprijinindu-se pe un cilindru fix, absolut neted, cu rază r, a cărui axă este orizontală. Să se afle poziția de echilibru (unghiul α dintre latura AC și verticală). $AC = 2a$ și $CB = 2b$.

Răspuns: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(a+b)\, r - b^2}{(a+b)\, r - a^2}$.

114. Greutatea Q este atârnată la marginea unei emisfere omogene de rază r și greutate P, așezată cu partea convexă pe un plan orizontal. Să se afle unghiul φ, dintre axa de simetrie a emisferei și verticală, în poziția de echilibru.

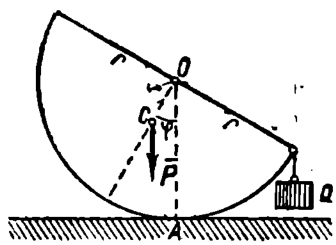
Indicație. Distanța între centrul de greutate C al emisferei și centrul ei O este egală cu $\frac{3}{8} r$.

Răspuns: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{8}{3} \cdot \frac{Q}{P}$.

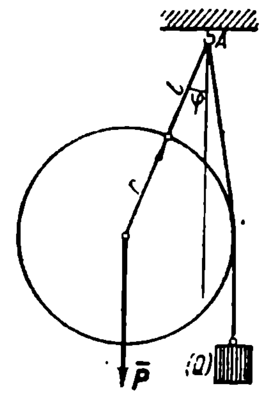
115. Două fire sunt prinse de un punct fix A; de unul din fire, având lungimea $l = 18$ dm, atârnă o sferă omogenă de rază $r = 22$ dm și greutate $P = 2$ kg, de al doilea este suspendată o greutate $Q = 20$ kg; firul al doilea atinge sfera dealungul unui arc oarecare, abătând-o într'o parte. Știind că sistemul se află în echilibru, să se afle unghiul φ dintre verticală și firul de care atârnă sfera.

Indicație. Se va scrie ecuația momentelor în raport cu punctul de suspensie A.

Răspuns: $\varphi = \arcsin \dfrac{Qr}{(P+Q)(r+l)} = 30°$.

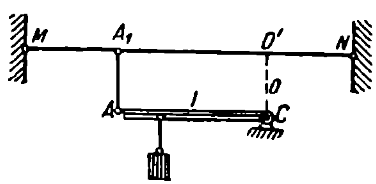


La problema 114

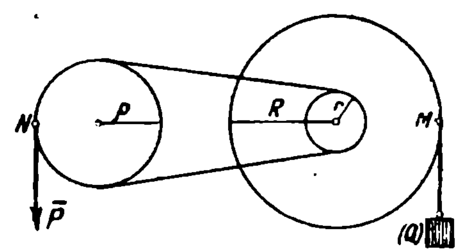


La problema 115

116. Intr'un plan vertical se află o sârmă orizontală MN și tubul AO de lungime l, care se rotește în jurul axei O și este la distanța $OO' = a$ de sârmă. De capătul O al tubului este fixat în interiorul lui, un fir de cauciuc, a cărui lungime



La problema 116



La problema 117

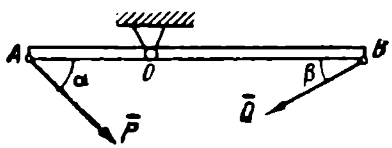
în stare inițială este egală cu lungimea tubului; de capătul liber al firului este fixat un cârlig. Cârligul se prinde de sârmă, în punctul A_1 astfel încât $A_1O' = AO = l$, apoi se prinde undeva de tub o greutate, astfel încât tubul să fie în poziție orizontală. Cum va varia unghiul, dintre axa tubului și orizontală, dacă se deplasează cârligul dealungul sârmei? Se presupune că forța de întindere a firului de cauciuc este proporțională cu lungimea lui.

Răspuns: Tubul va rămâne orizontal, indiferent de punctul în care se află cârligul de sârmă.

117. La o transmisie de curele, raza roții conducătoare este egală cu ρ. Pe axa roții conduse este fixată solidar o roată de rază R. Pe roata conducătoare acționează forța $\overline{P}$, aplicată în punctul N al circumferinței și dirijată în direcția tangentei la această circumferință. In punctul M de pe circumferința roții conduse este atârnată o greutate Q. Să se afle relația între P și Q, în poziția de echilibru.

Răspuns : $P = Q\,\dfrac{R}{r}$.

118. La capetele unei pârghii drepte AB de lungime a, care se rotește în jurul punctului O, acționează forțele $\overline{P}$ și $\overline{Q}$, care formează cu pârghia unghiurile α și β. Să se afle distanța AO în poziția de echilibru și reacțiunea R_0 din articulația O.



La problema 118

Răspuns :

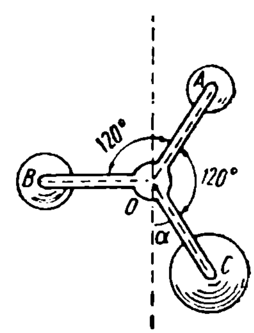
$$AO = \frac{aQ\sin\beta}{P\sin\alpha + Q\sin\beta}, \qquad R_0 = \sqrt{P^2+Q^2-2\,PQ\cos(\alpha+\beta)}.$$

119. Asupra unei pârghii acționează trei forțe. Coordonatele punctelor de aplicație ale acestor forțe, într'un sistem rectangular, al cărui origine este în punctul fix al pârghiei, sunt : (0, 2), (1, −1), (1, 1). Proeicțiile acestor forțe pe aceleași axe sunt : (5, 0), (5, 1) și (3, −3).

Să se determine mărimea forței care trebue aplicată în punctul (1, 2), pentru ca pârghia să fie în echilibru, când tangenta unghiului dintre această forță și direcția pozitivă a axei x este $\dfrac{3}{4}$.

Răspuns : 10.

120. Trei bare identice, a căror greutate poate fi neglijată, sunt legate invariabil între ele în punctul O, formând între ele unghiuri de 120°. La extremitățile lor se află centrele sferelor A, B și C, ale căror greutăți sunt proporționale respectiv cu 1 : 2 : : 3. Tot sistemul se poate învârti în jurul unei axe orizontale O, perpendiculară pe planul, în care se află centrele sferelor. Să se determine unghiul α dintre bara OC și verticală, în poziția de echilibru.

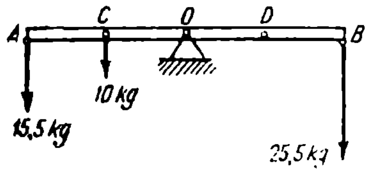


La problema 120

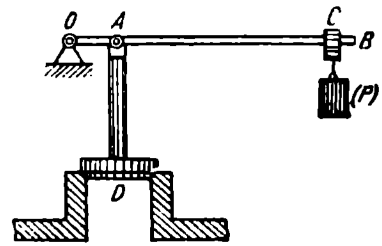
Răspuns : $\alpha = 30°$.

121. O pârghie AB lungă de 20 dm se rotește în jurul articulației O. In punctele A, C și B ale pârghiei sunt aplicate forțe de 15,5, 10 și 25,5 kg, perpendiculare pe AB. Să se determine mărimea și orientarea forței perpendiculare pe AB, care trebue aplicată în punctul D, pentru ca pârghia să fie în echilibru, dacă $AC = CO = OD = DB$.

Răspuns : O forță de 10 kg, orientată în sus.



La problema 121



La problema 122

122. Un ventil de siguranță al unui cazan cu abur este legat prin articulația A de pârghia OB lungă de 40 cm, în greutate de 1 kg. Pârghia se rotește în jurul articulației O, distanța OA fiind de 5 cm. In punctul C al pârghiei este atârnată o greutate $P = 32{,}5$ kg. Suprafața ventilului este 25 cm^2. Să se determine distanța OC pentru ca ventilul să se deschidă la o presiune în cazan mai mare de 10 at. O atmosferă este egală cu 1,03 kg pe 1 cm^2. Greutatea ventilului poate fi neglijată.

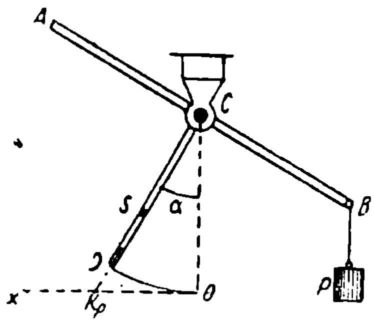
Răspuns : $OC = 39$ cm.

123. Unghiul de înclinare al unui ac magnetic este de 60°. Dacă se atârnă la capătul lui superior o greutate de 1 g, unghiul de înclinare se micșorează la 30°. Ce greutate trebue să se atârne la capătul acului, pentru ca el să ocupe poziția orizontală?

Răspuns: $1^1/_2$ g.

124. O pârghie $ACBD$ simetrică și în formă de T se poate roti în jurul unei axe orizontale C. Poziția extremității D se înregistrează pe un arc de cerc gradat. Se cere să se gradeze arcul astfel, încât aparatul să poată servi la cântărirea greutăților, fixate de extremitatea B. Se dă: $CB = a$, distanța CS dela axa de rotație la centrul de greutate S al brațului CD este egală cu b, greutatea brațului CD este egală cu Q.

Răspuns : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{b}$, unde α este unghiul dintre brațul CD și verticală. Deaceea gradarea arcului poate fi făcută astfel: se atârnă în B o greutate egală cu unitatea și se prelungește CD până la intersecția cu orizontala Ox în punctul k_1. Se împarte apoi dreapta Ox în segmente egale:

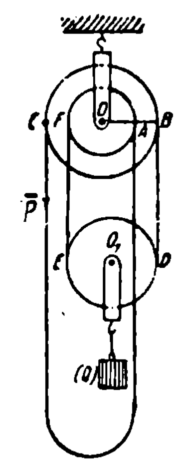


La problema 124

$$Ok_1 = k_1k_2 = k_2k_3 = \ldots$$

Unind prin drepte punctele k_1, k_2, k_3.... cu punctul C, se va obține pe scară punctele corespunzătoare la 1, 2, 3 . . . unități de greutate.

125. Scripetele diferențial, reprezentat schematic în figură, constă din scripetele mobil O_1ED și din doi scripeți ficși OAF și OBC, legați solidar între ei, care se rotesc în jurul axului comun O. Marginile scripeților sunt prevăzute cu dinți peste care trec zalele unui lanț închis $CBDEFA$. O parte a acestui lanț atârnă liber de pe scripetele OAF, iar pe partea cealaltă, care atârnă pe scripetele OBC se aplică forța $\overline{P}$. De scripetele O_1ED atârnă greutatea Q. Să se afle relația între P și Q, în poziția de echilibru, știind că $OB=R$ și $OA=r$. Se va neglija frecarea și greutatea scripetelui O_1ED.



La problema 125

Răspuns: Se observă, că tensiunea lanțului în părțile FE și BD este egală cu $^1/_2\ Q$ și se scrie ecuația momentelor față de punctul O. Se obține:

$$P = \frac{R-r}{2R}\,Q.$$

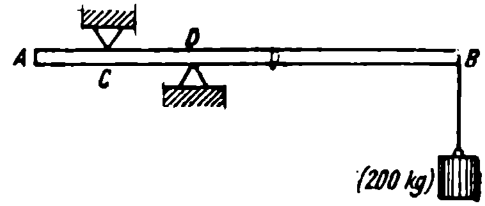
126. Să se determine pentru scripetele diferențial (dela problema precedentă): 1) mărimea forței $\overline{P}$, când $Q=600$ kg, $R=30$ cm și $r=29$ cm; 2) raportul razelor $R:r$ astfel încât mărimea P să fie egală cu $\frac{Q}{n}$.

Răspuns: 1) $P = 10$ kg; 2) $\frac{R}{r} = \frac{n}{n-2}$.

b) *Echilibrul unui sistem de forțe paralele (două ecuații de echilibru)*

127. O grindă omogenă AB lungă de 1,5 m și în greutate de 80 kg, este așezată între două reazime C și D. La capătul B al grinzii este suspendată o greutate de 200 kg. Să se afle reacțiunile punctelor de sprijin C și D, dacă $AC = 25$ cm și $CD = 30$ cm.

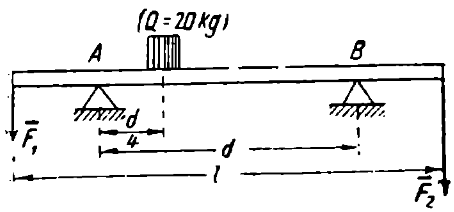
Răspuns : $N_C = 686\ ^2/_3$ kg, $N_D = 966\ ^2/_3$ kg.



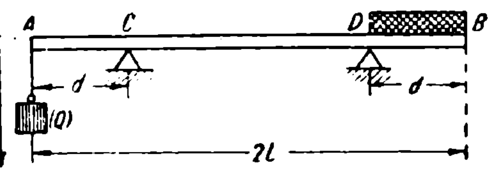
La problema 127

128. O grindă omogenă, orizontală, de lungime $l = 5$ m și greutate $P = 30$ kg, este așezată simetric pe două reazime A și B, distanța dintre ele fiind $d = 3$ m. La capetele libere ale grinzii acționează forțele verticale, $F_1 = 10$ kg și $F_2 = 20$ kg; între reazime, la distanța $^1/_4\, d$ de punctul A, se așează pe grindă o greutate $Q = 20$ kg. Să se afle reacțiunile reazimelor.

Răspuns : $N_A = 36\ ^2/_3$ kg, $N_B = 43\,^1/_3$ kg.



La problema 128



La problema 129

129. O grindă omogenă AB de lungime $2l$ și greutate P, este așezată orizontal, sprijinindu-se liber pe două reazime C și D, aflate la distanța d de capătul grinzii. La capătul A al grinzii este suspendată o greutate Q, iar pe porțiunea DB, grinda poartă o greutate repartizată uniform, egală cu p, pe unitatea de lungime. Să se afle reacțiunile reazimelor C și D.

$$\textit{Răspuns} : N_C = \frac{2P\,(l-d) + 2Q\,(2l-d) - pd^2}{4\,(l-d)},$$

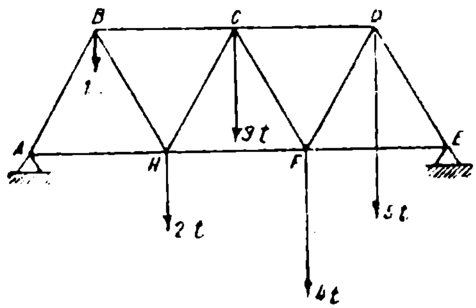
$$N_D = \frac{2P\,(l-d) - 2Qd + pd\,(4l-3d)}{4\,(l-d)}.$$

130. In nodurile B, H, C, F și D, ale unei ferme simetrice, sunt aplicate forțe verticale de 1, 2, 3, 4, și 5 t. Să se determine reacțiunile reazimelor A și E, știind, că triunghiurile isoscele ABH, HCF și FDE au baze egale.

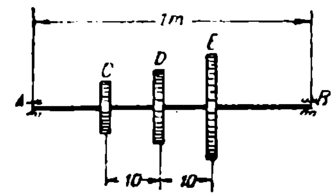
Răspuns : $N_A = 5{,}83$ t; $N_E = 9{,}17$ t.

131. Trei șaibe C, D și E, în greutate de 10, 12 și 18 kg, se află pe o axă comună, la distanța de 10 cm între ele. Să se determine la ce distanță de lagărul A trebue așezată șaiba C pentru ca presiunile pe lagărele A și B să fie egale. Distanța $AB = 1$ m.

Răspuns: $x = 38$ cm.



La problema 130

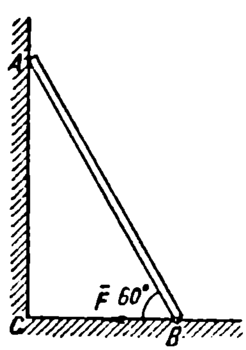


La problema 131

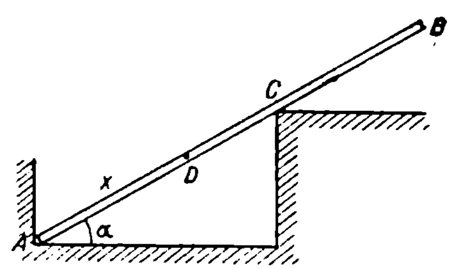
c) *Trei ecuații de echilibru*

132. O scară AB, în greutate de 15 kg, este așezată sub un unghi de 60° și se sprijină pe un perete neted, vertical și o podea orizontală care nu este netedă. Ea se menține în echilibru prin forța de frecare $\bar{F}$, orientată în direcția BC. Presupunând că centrul de greutate al scării este la mijlocul ei, să se afle presiunea scării pe podea și pe perete și mărimea forței de frecare F.

Răspuns: $N_A = F = 4{,}33$ kg, $N_B = 15$ kg.



La problema 132



La problema 133

133. Pe o scândură AB, de lungime $2a = 2$ m și greutate $P = 20$ kg, care formează cu planul orizontal un unghi $\alpha = 30°$, merge un om de greutate $Q = 64$ kg. El se află în punctul D ($AD = x$). Să se determine reacțiunile în punctele A și C, în funcție de x, dacă $AC = b = \frac{5}{4}$ m. Pentru ce valoare a lui x, echilibrul va fi imposibil?

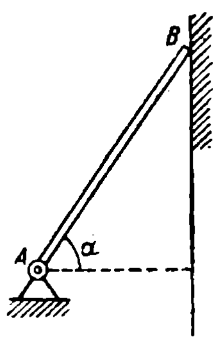
Răspuns: $X_A = 0{,}8\sqrt{3}\,(16\,x + 5)$, $Y_A = 72 - 38{,}4\,x$, $X_C = 1{,}6\sqrt{3}\,(16\,x + 5)$. Echilibrul este imposibil pentru $x > 1^7/_8$ m.

134. O grindă omogenă AB, așezată într'un plan vertical, este fixată de podea cu capătul inferior, prin articulația A, iar cu capătul superior B se sprijină de un perete neted, vertical. Se dau greutatea P a grinzii, lungimea ei $2a$ și unghiul de înclinare α. Să se afle reacțiunea totală a articulației și reacțiunea peretelui.

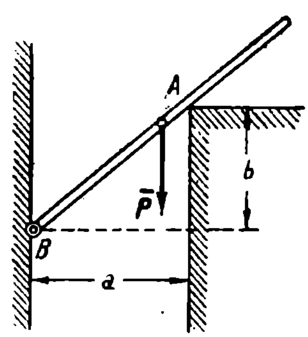
Răspuns: Reacțiunea peretelui este orizontală și egală cu $\frac{P}{2}$ ctg α. Reacțiunea articulației este $R_A = \frac{P}{2}\sqrt{4 + \text{ctg}^2\,\alpha}$. Unghiul ei cu orizontala se determină din ecuația: $\text{tg}\,\varphi = 2\,\text{tg}\,\alpha$.

135. Datele problemei precedente, cu deosebirea că articulația se află la capătul B al grinzii, care se sprijină cu capătul inferior pe o podea netedă. Să se afle reacțiunea podelei și reacțiunea totală a articulației.

Răspuns: Ambele reacțiuni sunt orientate vertical în sus și sunt egale cu $\frac{P}{2}$.



La problema 134



La problema 136

136. O bară omogenă de lungime $2l$ și greutate P este fixată prin articulația B de perete, iar în punctul A se sprijnă pe muchea unui alt perete. Să se afle reacțiunile în punctele A și B, știind că punctul A se află la distanța a de primul perete, și la înălțimea b deasupra articulației B.

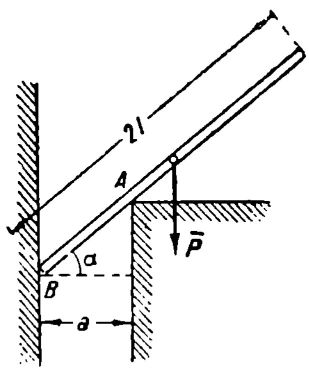
Răspuns :

$$N_A = P\frac{la}{a^2+b^2},\quad X_B = P\frac{abl}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}},\quad Y_B = P\left(1-\frac{a^2l}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

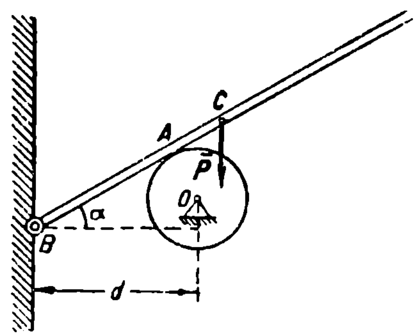
137. Aceleași date ca în problema precedentă, cu deosebirea că nu există articulație, iar bara se sprijină cu capătu de un perete neted.

Să se afle unghiul α și reacțiunile în punctele A și B, pentru poziția de echilibru.

Răspuns : $\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$, $N_A = \frac{P}{\cos\alpha}$, $N_B = P\operatorname{tg}\alpha$.



La problema 137



La problema 138

138. O bară omogenă, de lungime $2l$ și greutate P, este fixată prin articulația B de un perete, iar în punctul A ea se sprijină pe un cilindru circular, fix, de rază r, al cărui centru se află la distanța d de perete. Să se afle reacțiunile în punctele A și B, fiind cunoscut unghiul α, dintre bară și orizontală. Să se analizeze cazurile particulare : 1) când bara atinge cilindrul la mijlocul ei ; 2) când $\alpha=0$; 3) când punctele B și O (centrul cilindrului) se află la același nivel.

Răspuns :

$$N_A = P\frac{l\cos^2\alpha}{d-r\sin\alpha},\quad X_B = P\frac{l\cos^2\alpha\sin\alpha}{d-r\sin\alpha},\quad Y_B = P\left(1-\frac{l\cos^2\alpha}{d-r\sin\alpha}\right).$$

Cazurile particulare :

1) $l\cos\alpha + r\sin\alpha = d$, $N_A = P\cos\alpha$, $R_B = P\sin\alpha$; forța $\overline{R}_B$ (reacția totală a articulației) este orientată în direcția BA ;

2) $\alpha = 0,\quad N_A = P\frac{l}{d},\quad X_B = 0,\ Y_B = P\frac{d-l}{d}$;

3) $r = d\sin\alpha,\ N = P\frac{l}{d}, X = \frac{Plr}{d^2},\ Y = \frac{P}{d^2}(d^2 - l\sqrt{d^2 - r^2}).$

139. Aceleași date ca în problema precedentă, cu deosebirea că nu există articulație, iar bara se sprijină cu capătul B de un perete vertical, neted. Să se afle unghiul α pentru poziția de echilibru, și reacțiunile în punctele A și B.

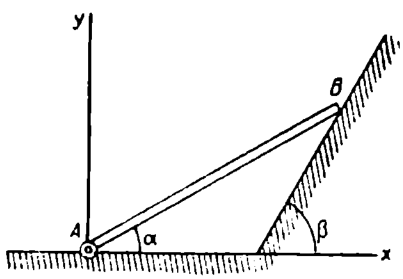
Răspuns : Unghiul α se determină din ecuația

$$l\cos^3\alpha + r\sin\alpha - d = 0,\quad N_A = \frac{P}{\cos\alpha},\ N_B = P\operatorname{tg}\alpha.$$

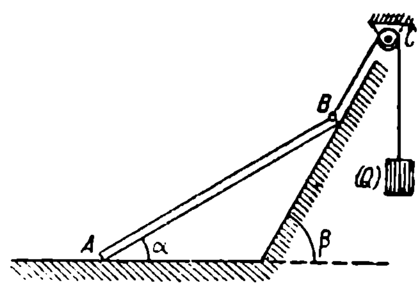
140. O bară omogenă AB, de greutate P și lungime $2l$ este fixată cu extremitatea inferioară de podea, printr'o articulație, iar cu extremitatea superioară se sprijină de un plan înclinat, neted, care formează cu orizontala unghiul β. Să se afle reacțiunea articulației și reacțiunea peretelui, știind că unghiul dintre bară și podea este egal cu α.

Răspuns :

$$N_B = \frac{P\cos\alpha}{2\cos(\beta-\alpha)},\ X_A = \frac{P}{2}\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)},\ Y_A = P\left[1 - \frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\cos(\beta-\alpha)}\right].$$



La problema 140



La problema 141

141. Datele problemei precedente, cu deosebirea că bara se sprijină liber pe podea și este menținută în echilibru cu ajutorul unui fir fixat de capătul ei superior și trecut peste scripetele C. De capătul liber al firului atârnă o greutate Q.

Să se afle unghiul α dintre bară și podea, în poziția de echilibru, și reacțiunile în punctele A și B.

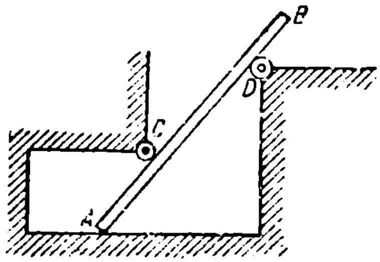
Răspuns : Dacă există echilibru, el este indiferent de unghiul α, condiția de echilibru se exprimă prin egalitatea

$$Q = \frac{P}{2}\sin\beta;$$

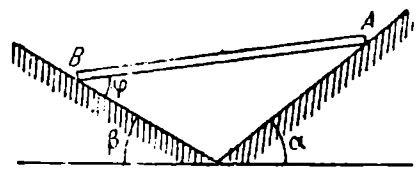
reacțiunea peretelui este $N_B = \frac{P}{2}\cos\beta$, reacțiunea podel
$N_A = \frac{P}{2}$

142. O bară omogenă AB, de lungime $2a = 3$ m ș
greutate $P = 30$ kg, se sprijină cu capătul A pe o podea ori
zontală, netedă și pe două role C și D. Distanța între role est
$CD = b = 1,4$ m. Rola D este situată cu $h = 0,95$ m mai su
decât rola C. Să se determine presiunea barei pe podea și p
cele două role.

Răspuns: $N_A = P = 30$ kg, $N_D = N_C = P\frac{a\sqrt{b^2 - h^2}}{b^2} = 23,61$ kg.



La problema 142



La problema 143

143. O bară omogenă AB de greutate P se reazimă pe două plane fixe, care formează cu orizontala unghiurile α și β. Să se determine reacțiunile punctelor A și B și unghiul φ în poziția de echilibru.

Răspuns:

$$N_A = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}P,\quad N_B = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}P,\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\alpha}{\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)} - \operatorname{ctg}\beta.$$

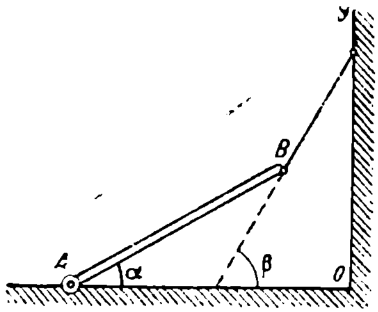
144. O bară omogenă AB este fixată de podea cu capătul ei inferior A, printr'o articulație și se menține, sub unghiul α față de orizontală, cu ajutorul unui fir legat cu o extremitate de capătul superior B al barei și cu cealaltă extremitate de perete. Unghiul dintre fir și orizontală este egal cu β. Să se afle tensiunea T a firului și reacțiunea articulației, știind că greutatea barei este P.

Răspuns:

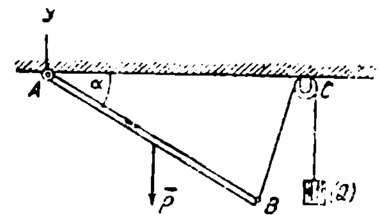
$$T = \frac{P}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},\quad Y_A = \frac{P}{2}\left[2 - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right].$$

$$X_A = \frac{P}{2}\,\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

145. O bară omogenă AB de lungime $2a$, și greutate P, este fixată la capătul ei superior, printr'o articulație, de un punct fix A. De capătul ei inferior este prins un fir, trecut peste un scripete mic C, așezat pe aceeași orizontală cu punctul A. Firul poartă la extremitatea lui liberă greutatea Q. Să se afle unghiul $\alpha = \sphericalangle CAB$ și reacțiunea articulației în poziția de echilibru, știind că $CA = BA$.



La problema 144



La problema 145

Răspuns : $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{Q^2+2P^2}+Q}{2P}$. $X_A = Q\sin\frac{\alpha}{2}$,

$Y_A = P - Q\cos\frac{\alpha}{2}$.

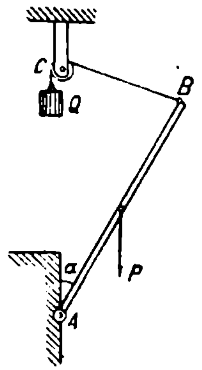
146. Datele din problema precedentă cu deosebirea că punctele A și C se află pe aceeași verticală. Să se afle poziția de echilibru și reacțiunea articulației.

Răspuns : $\alpha_1 = \sphericalangle CAB = 2 \arcsin\frac{Q}{P}$, $\alpha_2 = 180°$. In primul caz reacțiunea articulației este $X_A = \sqrt{P^2 - Q^2}$ și orientată în direcția bisectoarei unghiului CAB. In cazul al doilea ea este egală cu $|Q - P|$.

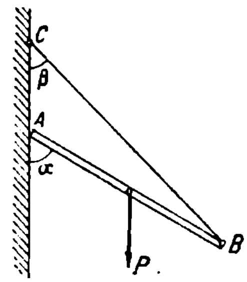
147. O bară omogenă de greutate P și lungime $2a$ se reazimă, cu capătul ei superior A, de un perete absolut neted; de capătul ei inferior B este prins un fir inextensibil BC, fixat de perete în punctul C, care se află deasupra punctului A pe aceeași verticală; unghiul dintre bară și perete este egal cu α, unghiul dintre fir și perete este egal cu β. Să se afle relația între α și β în poziția de echilibru, dacă planul ABC este vertical și perpendicular pe perete.

Răspuns : $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$.

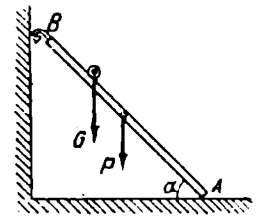
148. Scara AB se sprijină cu capătul ei inferior de p
deaua orizontală și netedă, iar la capătul ei superior este pr
văzută cu două cârlige, agățate de o bară metalică, întin
dealungul peretelui paralel cu podeaua. Să se afle reacțiun
barei și reacțiunea podelei, dacă greutatea scării este ega



La problema 146



La problema 147

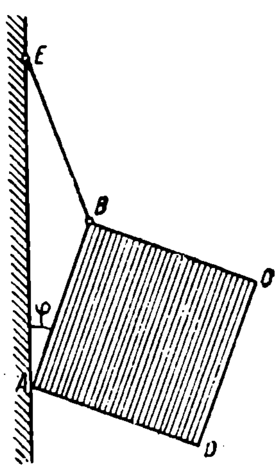


La problema 148

cu P, lungimea ei egală cu l, iar pe scară stă un om de greutat
G, la distanța a de capătul ei superior.

Răspuns : $N_A = \frac{P}{2} + \frac{a}{l} G$, $N_B = \frac{P}{2} + \frac{l-a}{l} G$.

149. O scândură pătrată $ABCD$, de greutate P est
atârnată de firul BE; cu vârful A ea s
sprijină de un perete neted, fix și vertica
EA. Să se determine reacțiunea peretelu
în punctul A, tensiunea T a firului și un-
ghiul φ, dacă $AB = BE = a$.



La problema 149

Răspuns : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}$, $N_A = \frac{1}{3} P$.

$$T = \frac{\sqrt{10}}{3} P.$$

150. O bară omogenă AB de lun-
gime $2a$ și greutate P se reazimă cu ca-
petele ei pe două plane fixe absolut ne-
tede. Unghiul dintre plane este egal cu
α, unghiul dintre planul orizontal și bară
este egal cu β. Bara se menține în echi-
libru prin firul DC, legat în punctul D al
barei și în punctul fix C de pe linia de intersecția planelor.
Unghiul dintre direcția firului și orizontală este egal cu γ.

Să se determine tensiunea T a firului și reacțiunile în punctele A și B.

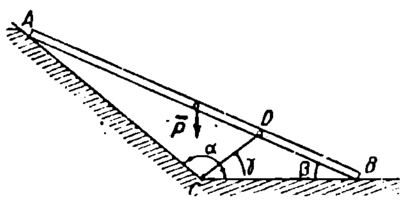
Ce condiție trebue să satisfacă unghiul γ, pentru ca echilibrul să fie posibil? Să se cerceteze cazurile particulare ale acestei probleme: 1) $\gamma = 0$; 2) $\alpha = 90°$.

Răspuns:

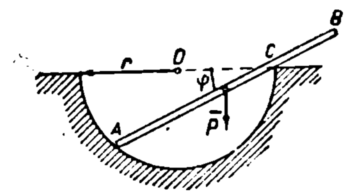
$$T = -\frac{P \sin\alpha \cos\beta}{2\cos(\alpha+\beta-\gamma)}, \quad N_A = -\frac{P\cos\beta\cos\gamma}{2\cos(\alpha+\beta-\gamma)},$$

$$N_B = P\left(1 - \frac{\cos\beta\,\cos(\alpha-\gamma)}{2\cos(\alpha+\beta-\gamma)}\right).$$

Condiția posibilității echilibrului: $\gamma < \sphericalangle ACF$ și $CF \perp AB$.



La problema 150



La problema 151

151. Intr'un vas emisferic neted, de rază $OC = r$, este așezată o bară omogenă AB de lungime $2a$ și greutate P. Să se determine unghiul φ și reacțiunile în punctele A și C în poziția de echilibru. Să se afle deasemenea condiția posibilității echilibrului.

Răspuns: $\cos\varphi = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}$; $N_C = P\frac{a}{2r}$; $N_A = P\operatorname{tg}\varphi$.

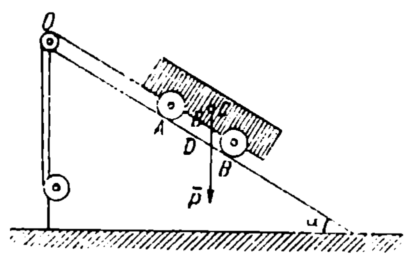
Echilibrul este posibil pentru $a \leqslant 2r$.

152. Un vagonet de greutate $P = 100$ kg este menținut pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ printr'un cablu trecut peste scripetele O și paralel cu planul. Să se determine presiunea roților vagonetului pe plan în punctele A și B și tensiunea T a cablului, dacă $AD = DB = a = 0{,}75$ m (D este proiecția centrului de greutate C al vagonetului pe planul înclinat), $CE = b = 0{,}3$ m.

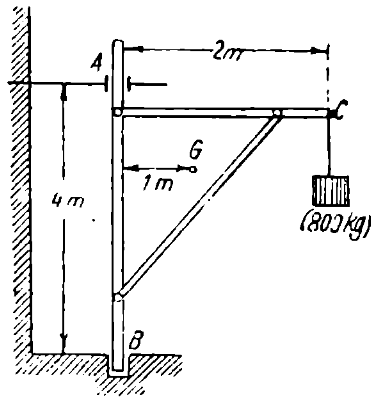
Răspuns: $T = 50$ kg. $N_A = 33{,}30$ kg, $N_B = 53{,}30$ kg.

153. Axa AB a unei macarale, a cărei greutate este 1500 kg, se rotește în pivotul B și în lagărul A. De macara este atârnată în punctul C, o greutate de 800 kg. Să se determi reacțiunile în A și B, dacă $AB = 4$ m, distanța dela centrul d greutate a macaralei G la axa AB este de 1 m și distanța del punctul C la aceiași axă este de 2 m.

Răspuns: $X_A = -775$ kg, $Y_A = 0$, $X_B = 775$ kg, $Y_B = 2300$ kg

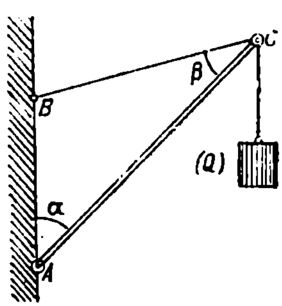


La problema 152



La problema 153

154. O macara constă dintr'o bară omogenă AC de greutate P, care se rotește în jurul articulației A, și este fixată de punctul fix B printr'un lanț BC. De capătul C al barei este atârnată o greutate Q. Să se determine tensiunea T a lanțului și reacțiunea în articulația A dacă unghiurile α și β sunt cunoscute. Cum se va modifica mărimea tensiunii T, în cazul când lanțul va deveni orizontal?



La problema 154

Răspuns: $T = \dfrac{(2Q+P)\sin\alpha}{2\sin\beta}$,

$$X_A = \frac{(2Q + P)\sin\alpha\,\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$$

$$Y_A = P + Q + \frac{(2Q + P)\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}.$$

155. La problema precedentă să se determine tensiunea lanțului, precum și mărimea și direcția reacțiunii totale $\overline{R}_A$ a articulației, neglijând greutatea barei AC.

Răspuns: Reacțiunea $\overline{R}_A$ este orientată după AC,

$$R_A = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}Q, \qquad T = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}Q.$$

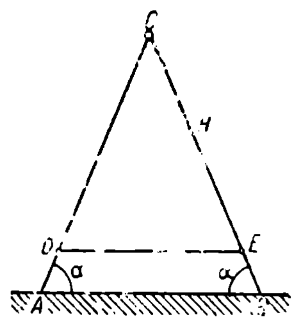
d) *Echilibrul mai multor corpuri*

La rezolvarea problemelor de echilibru a unui sistem, care constă din mai multe corpuri, trebue considerat separat echilibrul fiecărui corp, sub acţiunea forţelor, care i se aplică direct şi a reacţiunilor corpurilor alăturate lor, ţinându-se seamă de legea egalităţii acţiunii şi reacţiunii.

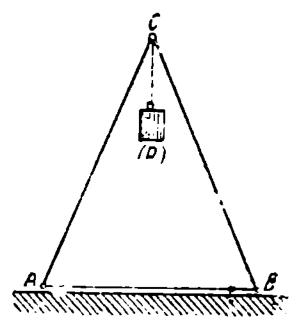
156. O scară constă din două părţi identice legate prin articulaţia C şi lanţul DE. Să se afle reacţiunea podelei, tensiunea T a lanţului şi reacţiunea articulaţiei, dacă pe scară se află un om în punctul H. Se dă: $AC = BC = 2l$; $CH = x$; $AD = BE = a$; greutatea scării este $2P$; greutatea omului este Q; $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \alpha$.

Răspuns: $N_A = P + \dfrac{2l - x}{4l} Q, \quad N_B = P + \dfrac{2l + x}{4l} Q,$

$$T = \frac{2Pl + (2l - x)\,Q}{2\,(2l - a)} \operatorname{ctg} \alpha, \quad X_C = T, \quad Y_C = \frac{2l - x}{4l} Q.$$



La problema 156



La problema 157

157. Două bare, fără greutate, aşezate într'un plan vertical, au aceeaşi lungime $AC = BC = a$ şi sunt îmbinate în punctul C printr'o articulaţie, de care este atârnată greutatea P. Barele se reazimă pe o podea orizontală, netedă.

Capetele A şi B sunt legate printr'un fir elastic AB, a cărui lungime este l_0; în stare liberă, tensiunea firului este considerată proporţională cu lungimea lui (factorul de proporţionalitate k). Să se afle relaţia dintre greutatea P şi unghiul 2φ din punctul C. Să se afle valoarea lui P, pentru cazul când unghiul ACB este drept.

Răspuns: P şi φ sunt legate în ecuaţia $P = 2K\,(2a \cos\varphi - l_0 \operatorname{ctg} \varphi)$, de unde se deduce pentru $\varphi = 45°$

$$P = 2k\,(a\sqrt{2} - l_0).$$

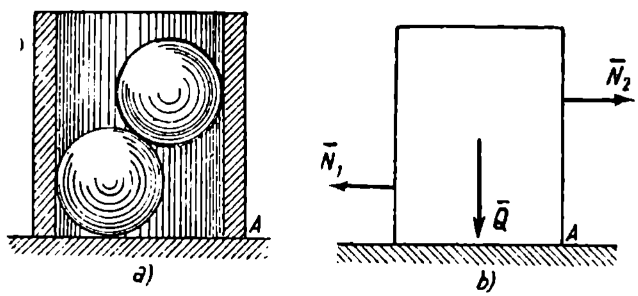
158. Două sfere omogene, identice, de rază r, fiecare având greutatea P, sunt așezate în interiorul unui cilindru drept, de rază R, deschis la ambele capete, și care stă pe o masă orizontală, aspră. Să se determine greutatea minimă a cilindrului, necesară pentru ca el să nu se răstoarne, neglijând grosimea pereților lui.

Indicație. Se determină presiunea sferei superioare și a celei inferioare pe pereții cilindrului, în poziția de echilibru.

$$N_1 = N_2 = \frac{P(R-r)}{\sqrt{R(2r-R)}}.$$

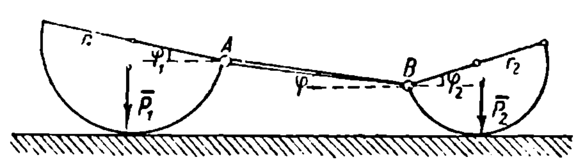
Apoi se folosește egalitatea dintre momentul cuplului $(\overline{N}_1, \overline{N}_2)$ și momentul forței $\overline{Q}$ față de punctul A.

Răspuns : $Q_{\min} = 2P\left(1 - \frac{r}{R}\right)$.



La problema 158

159. Două emisfere omogene sunt legate printr'o bară omogenă fixată de ele prin articulații. Greutatea emisferei mai mari este P_1, raza ei r_1, iar greutatea și raza emisferei mai mici sunt P_2 și r_2; lungimea barei este l, greutatea ei Q. Să se



La problema 159

afle poziția de echilibru a acestui sistem, dacă el este așezat pe un plan orizontal neted, adică să se afle unghiurile φ_1 și φ_2 dintre bazele emisferelor și orizontală și unghiul φ dintre bară și orizontală. (Se știe că distanța între centrul de greutate al unei emisfere de rază r și centrul ei este $^3/_8\, r$).

Răspuns : $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4}{3} \frac{Q}{P_1}$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4}{3} \frac{Q}{P_2}$,

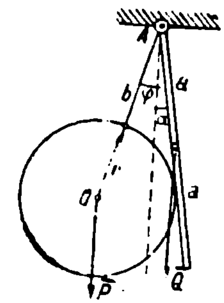
$$\sin \varphi = \frac{1}{l} [r_1 (1 - \sin \varphi_1) - r_2 (1 - \sin \varphi_2)].$$

160. Intr'un punct A al tavanului este atârnată de un fir de lungime b, o sferă de rază r și greutatea P; în același punct A este fixată printr'o articulație o bară omogenă de lungime $2a$ și greutate Q. In poziția de echilibru, reprezentată în figură, firul și bara formează cu verticala unghiurile φ și α. Să se afle aceste unghiuri.

Indicație: Se va exprima $\sin(\varphi + \alpha)$ în funcție de b și r și se va aplica ecuația momentelor în raport cu punctul de suspensie A.

Răspuns : $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{b(b + 2r)}}{r} + \frac{Qa}{Pr}$,

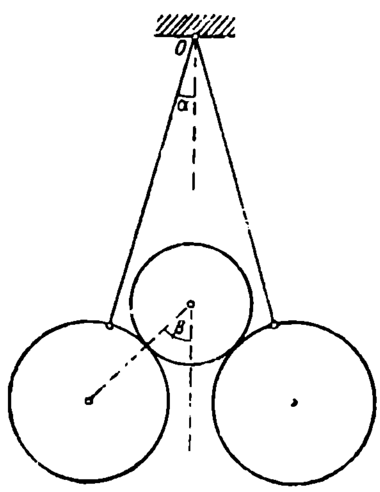
$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sqrt{b(b+2r)}}{r} + \frac{P}{Q} \frac{(b+r)^2}{ar}.$$



La problema 160

161. Două sfere netede identice sunt atârnate de punctul fix O prin două fire identice și susțin o a treia sferă de aceeași greutate ca și primele două. Să se afle relația dintre unghiurile α și β.

Răspuns : $\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$.



La problema 161

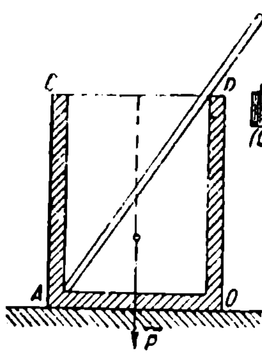
162. O bară, fără greutate, AB, de lungime l, este introdusă cu un capăt într'un vas cilindric, având înălțimea b, diametrul a și greutatea P. Să se afle greutatea minimă Q, care, atârnată de capătul B al barei, este în stare să răstoarne vasul. Să se afle deasemenea reacțiunile punctelor A și D și momentul de răsturnare inițial.

Se presupune, că bara nu poate aluneca cu capătul ei pe peretele AC și că grosimile pereților și fundului cilindrului pot fi neglijate.

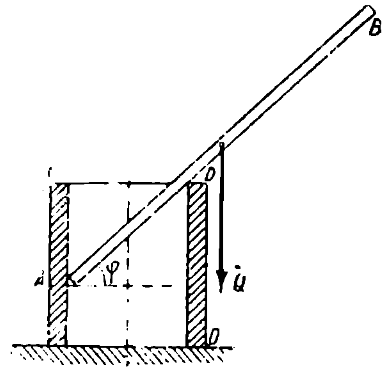
Indicație, Considerând bara și vasul ca un întreg se va scrie ecuația momentelor forțelor P și Q față de punctul O. Mai departe se obțin condițiile din problema 136, întrucât Q este determinat.

Răspuns: $Q_0 = Q_{min} = \frac{Pd}{2(l-d)}$, unde $d = AD = \sqrt{a^2+b^2}$

$$X_D = \frac{Q_0 la}{d^2} = \frac{Pal}{2d\,(l-d)},\quad X_A = Q_0\frac{lab}{d^3},\quad Y_A = Q_0\left(1-\frac{la^2}{d^3}\right).$$



La problema 162



La problema 163

163. Pe o masă orizontală este așezat un cilindru, absolut neted în interior, de diametru a și greutate P.

In cilindru se introduce o bară omogenă de lungime 2 și greutate Q, care ocupă o poziție de echilibru oarecare, unghiul dintre bară și orizontală este egal cu φ.

Să se afle greutatea minimă Q_0, care este în stare să răstoarne cilindrul, unghiul φ_0 dintre bară și orizontală și reacțiunile în punctele A și D în momentul inițial de răsturnare. Grosimea pereților cilindrului poate fi neglijată.

Răspuns: $Q_0 = Q_{min} = \frac{1}{2}Pa\frac{\sqrt[3]{l}}{l\sqrt[3]{a} - a\sqrt[3]{l}}$, $\cos\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$,

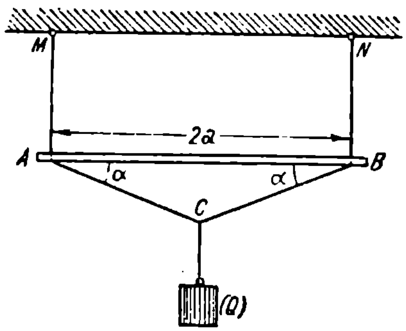
$$X_D = Q_0\sqrt[3]{\frac{l}{a}};\quad X_A = Q_0\frac{\sqrt{l^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{a}}.$$

164. Aproape de capetele A și B ale unei bare omogene, orizontale, de greutate P, sunt două găuri mici, distanța între ele fiind $2a$. Prin aceste găuri trece un fir de lungime $2l$, la mijlocul căruia este atârnată greutatea Q, iar capetele M și N ale firului sunt fixate la același nivel, având distanța $2a$ între ele.

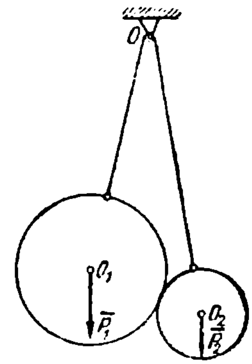
Să se afle unghiul α în poziția de echilibru a sistemului, precum și forța $\overline{S}$, care comprimă bara.

Răspuns: $\sin\alpha = \frac{Q}{P+Q}$, $S = \frac{1}{2}\sqrt{P(2Q+P)}$.

165. Două sfere tangente, cu razele r_1 și r_2, având greutățile P_1 respectiv P_2, se află în echilibru, fiind suspendate de un fir, care trece peste un scripete mic O. Să se afle condiția de echilibru.



La problema 164

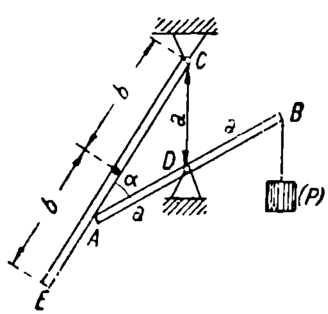


La problema 165

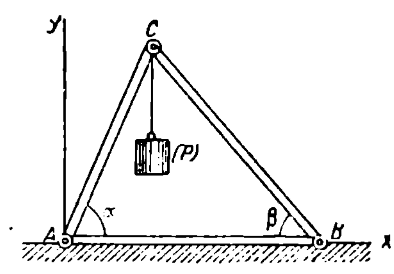
Răspuns: $\dfrac{OO_1}{OO_2} = \dfrac{P_2}{P_1}$. Dacă sferele sunt făcute din același material, această condiție devine:

$$\frac{OO_1}{OO_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 .$$

166. Două bare omogene AB de lungime $2a$ și CE, de lungime $2b$ și greutate Q, se pot roti într'un plan vertical: prima în jurul mijlocului său D, a doua în jurul articulației C.



La problema 166



La problema 167

așezată pe aceeași verticală cu D la distanța $CD = a$. De capătul B al barei AB este legată o greutate P. Bara AB sprijinindu-se cu capătul A pe bara CE, o înclină din poziția ei

verticală. Să se afle unghiul $CAB = \alpha$ în poziția de echilib[ru]
a sistemului.

Răspuns: α poate avea două valori: $\alpha_1 = 0$ și $\alpha_2 =$
$= \arccos \frac{Qb}{4aP}$.

167. Un triunghi articulat ABC, fără greutate, est[e]
așezat într'un plan vertical pe latura AB; de articulația [C]
este atârnată o greutate P. Să se afle reacțiunile verticale ș[i]
orizontale în punctele A și B, știind că $\sphericalangle\, CAB = \alpha$, ia[r]
$\sphericalangle\, CBA = \beta$.

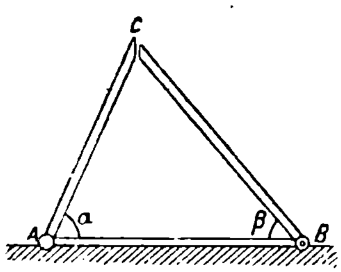
Răspuns: $Y_A = P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $Y_B = P\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,

$$X_A = -X_B = P\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

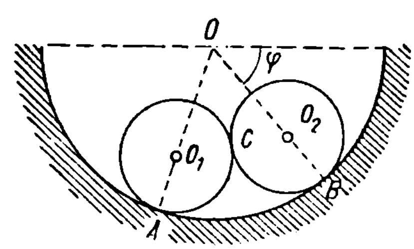
168. Se dă triunghiul din problema precedentă cu deosebirea că el are greutate, este construit din bare omogene; în punctul C lipsește articulația și există o suprafață de atingere foarte mică, verticală și netedă între cele două bare.

Să se afle relația dintre unghiurile α și β în poziția de echilibru, dacă greutatea barei AC este P_1 și greutatea barei BC este P_2.

Răspuns: $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{P_1}{P_2}$.



La problema 168



La problema 169

169. Intr'o cupă emisferică netedă, având raza $R = 30$ dm și centrul în punctul O sunt așezate două sfere O_1 și O_2 cu aceeași rază $r = 10$ dm, însă de greutăți diferite; prima sferă cântărește 10 kg, a doua 5 kg. Să se determine unghiul φ. dintre dreapta OO_2 și planul orizontal, precum și reacțiunile în punctele A, B și C.

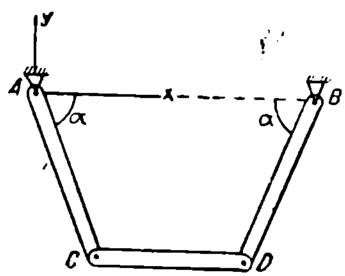
Răspuns: $\varphi = 49°6'24''$, $N_A = 11{,}34$ kg, $N_B = 5{,}67$ kg.
$N_C = 3{,}78$ kg.

170. Două bare omogene AC și BD, fiecare de greutate P, se rotesc în jurul articulațiilor A și B și sunt îmbinate cu o a treia bară CD, prin articulațiile C și D. Bara CD este orizontală și are greutatea Q.

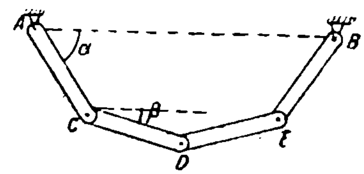
Tot sistemul se află în echilibru într'un plan vertical. Să se determine reacțiunile articulațiilor A și C, când unghiul α este cunoscut.

Răspuns: $X_A = -\frac{1}{2}(P+Q)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Y_A = P + \frac{1}{2}Q,$

$$X_C' = \frac{1}{2}(P+Q)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Y_C = -\frac{1}{2}Q.$$



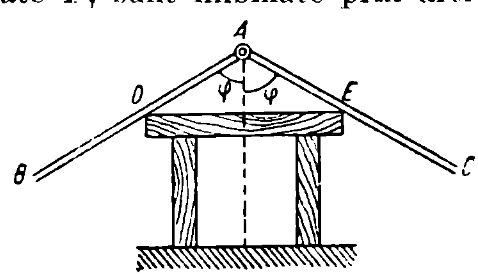
La problema 170



La problema 171

171. Patru bare de lungimi și greutăți egale sunt îmbinate între ele prin articulațiile C, D și E. Cele două bare extreme se rotesc în articulații în jurul punctelor fixe A și B situate pe aceeași orizontală. Tot sistemul este în echilibru într'un plan vertical. Să se demonstreze că unghiurile α și β sunt legate prin relația $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\beta$.

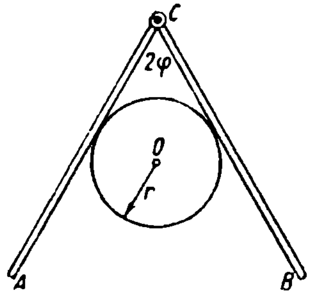
172. Două scânduri identice perfect netede AB și AC, fiecare de lungime $2a$ și greutate P, sunt îmbinate prin articulația A și se reazimă pe marginea unei mese în punctele D și E, fiind așezate simetric față de verticala, care trece prin A. Să se determine unghiul φ dintre scândură și verticală și reacțiunile în punctele D și E, dacă lățimea mesei DE este egală cu $2b$.



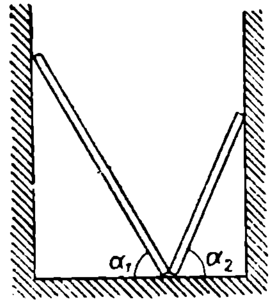
La problema 172

Răspuns: $\sin\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \quad N_D = N_E = P\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$

173. Două bare omogene, fiecare având lungimea $2l$ și greutatea P, sunt îmbinate prin articulația C și se sprijină pe un cilindru neted, fix, de rază r, cu axa orizontală. Să se afle unghiul $ACB = 2\varphi$ pentru poziția de echilibru a sistemului, reacțiunile N_1 și N_2 ale cilindrului și reacțiunea articulației.



La problema 173



La problema 174

Răspuns: Unghiul φ se determină din ecuația $l \sin^3 \varphi - r \cos \varphi = 0$. Reacțiunile ale cilindrului sunt: $N_1 = N_2 = \frac{P}{\sin \varphi}$. Reacțiunea articulației este orizontală și egală ca mărime cu $P \operatorname{ctg} \varphi$.

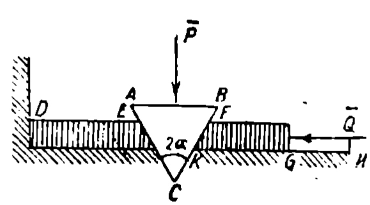
174. Două bare omogene, așezate într'un plan vertical se sprijină cu capetele inferioare pe un plan neted orizontal și între ele, iar cu capetele superioare se sprijină de doi pereți verticali netezi. Lungimile barelor sunt $2a_1$ și $2a_2$, greutățile lor P_1 și P_2. Să se afle relația între unghiurile α_1 și α_2 de înclinare a barelor față de orizontală, în poziția de echilibru.

Răspuns: $\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = P_1 : P_2$.

175. In condițiile problemei precedente să se afle distanța între pereți, astfel ca unghiul dintre bare să fie drept.

Răspuns: $d = 2\frac{a_1\sqrt{P_2} + a_2\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}$.

176. O pană are forma unei prisme, care are ca secțiune transversală triunghiul isoscel ABC, cu unghiul la vârf 2α. Pana se sprijină cu una din fețele laterale AC, pe prisma fixă DE, iar cu cealaltă față BC pe prisma FG, care poate aluneca pe planul orizontal, neted KH.



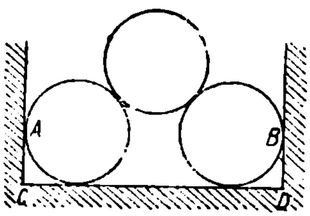
La problema 176

Asupra penei lucrează forța verticală $\bar{P}$, asupra prismei FG, forța orizontală $\bar{Q}$. Să se afle dependența între aceste forțe pentru poziția de echilibru, neglijând frecarea și greutatea proprie a penei.

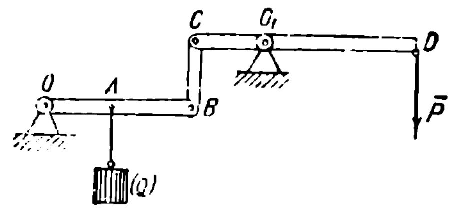
Răspuns: $P = 2Q \operatorname{tg} \alpha$.

177. Doi cilindri identici, netezi, de rază r și greutate P fiecare, sunt așezați pe o podea netedă orizontală între două plane netede verticale AC și BD. Peste acești cilindri este așezat un al treilea cilindru identic, cum se arată în figură. Să se determine reacțiunile din punctele A și B, dacă $CD = 2a$.

Răspuns : $X_A = X_B = \frac{1}{2} P \frac{a-r}{\sqrt{(a-r)(3r-a)}}$.



La problema 177



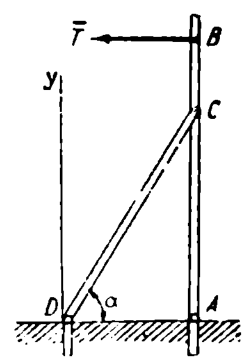
La problema 178

178. Un sistem de pârghii constă din două pârghii orizontale OB și CD cu axele de rotație în O și O_1 și sunt îmbinate prin articulațiile C și B cu bara verticală CB. De pârghia OB este atârnată, în punctul A, greutatea Q; de extremitatea pârghiei CD acționează forța verticală P. Să se afle relația între forțele $\bar{P}$ și Q în poziția de echilibru a sistemului, precum și forța $\bar{S}$, care întinde bara BC, în cazul când $OA = a$, $OB = b$, $O_1C = c$, $O_1D = d$. Greutatea pârghiilor și a barei CB poate fi neglijată.

Răspuns : $P = \frac{ac}{bd} Q$, $\quad S = \frac{a}{b} Q$.

179. Un stâlp de telegraf AB de greutate P are propteaua DC de greutate Q. Tensiunea firului telegrafic este egală cu T.

Să se afle reacțiunile în punctele A și D și reacțiunea proptelei asupra stâlpului în punctul C, fiind cunoscute unghiul α, $AC = a$ și $BC = b$. Îmbinările din punctele A, C și D se presupun articulate.



La problema 179

Răspuns :

$$X_A = -\frac{b}{a} T, \quad Y_A = P + \frac{1}{2} Q - \frac{a+b}{a} T \operatorname{tg} \alpha,$$

$$X_D = \frac{a+b}{a} T, \quad Y_D = \frac{1}{2} Q + \frac{a+b}{a} T \operatorname{tg} \alpha,$$

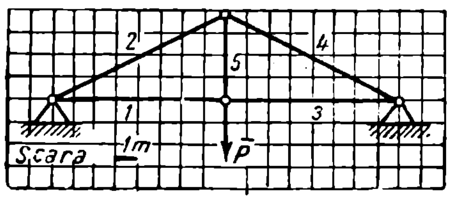
$$X_C = \frac{a+b}{a} T, \quad Y_C = -\left(\frac{1}{2} Q + \frac{a+b}{a} T \operatorname{tg} \alpha\right).$$

180. Să se afle în mod analitic eforturile din barele fermei ale cărei dimensiuni sunt date în figură.

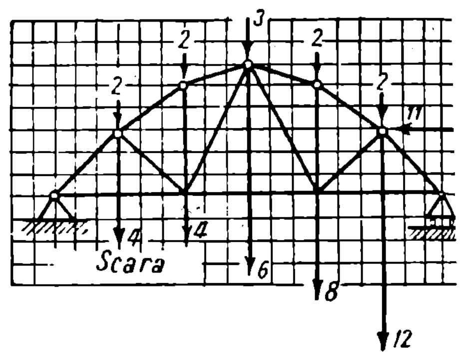
Răspuns :

Nr. barei	1	2	3	4	5
Efortul	$+P$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}P$	$+P$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}P$	$+P$,

semnul plus însemnând întindere, semnul minus comprimare.



La problema 180

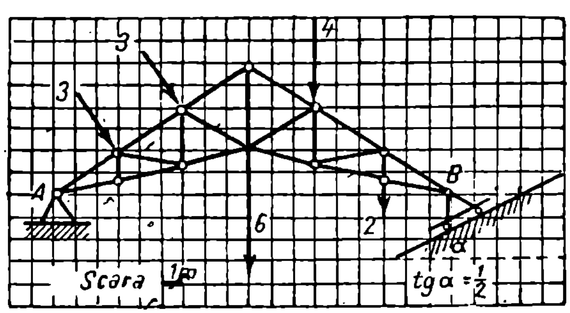


La problema 181 a

181. Să se afle pe cale analitică reacțiunile articulației A și reazimului B din fermele reprezentate în figuri. Sarcinile în tone și dimensiunile sunt date în figuri.

Răspuns : a) reacțiunea articulației : $R = \sqrt{562} \approx 23{,}71$ t;

reacțiunea reazimului $N = 24$ t ; $\operatorname{tg}(\bar{R}, x) = \frac{21}{11} \approx 1{,}91$; $(\widehat{\bar{R}, x}) \approx 62°21'$.



La problema 181 b

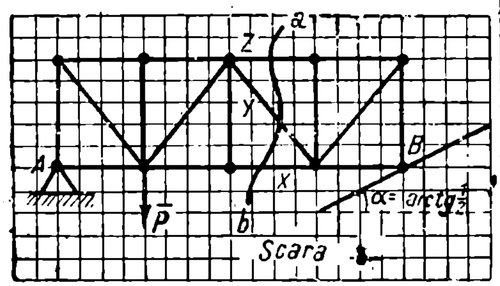
b) proiecțiile reacțiunei articulației : cea orizontală $X \approx 1{,}24$ t, cea verticală $Y \approx 7{,}86$ t. Reacțiunea reazimului este $N \approx 10{,}21$ t.

182. Să se afle pe cale analitică eforturile în secțiunea *ab* din barele fermelor reprezentate în figuri.

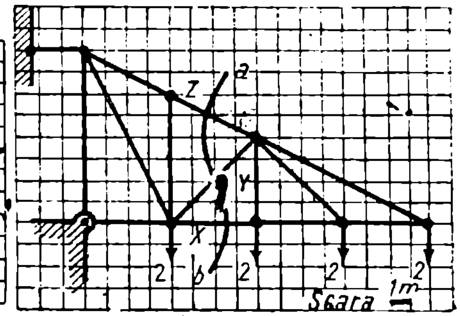
Forțele din figura 182 *b* sunt date în tone.

Răspuns: a) $X = \frac{11}{40}P$, $Y = -\frac{\sqrt{41}}{20}P$, $Z = -\frac{1}{5}P$.

b) $X = -6$ t, $Y = 2\sqrt{2}$ t, $Z = 4\sqrt{5}$ t.



La problema 182 a



La problema 182 b

Semnul plus înseamnă întindere, semnul minus comprimare.

§ 7. Echilibrul unui sistem de forțe în spațiu

Pentru echilibrul unui sistem de forțe în spațiu este necesar și suficient ca pentru un centru de reducere să fie valabile egalitățile $\overline{R} = 0$ și $\overline{L} = 0$ (vezi § 5). Dacă se ia ca origine a unui sistem rectangular de coordonate $(x\,y\,z)$ centrul de reducere O, atunci condițiile de echilibru se exprimă în mod analitic prin următoarele șase ecuații:

$$R_x = \Sigma X = 0, \quad R_y = \Sigma Y = 0, \quad R_z = \Sigma Z = 0,$$

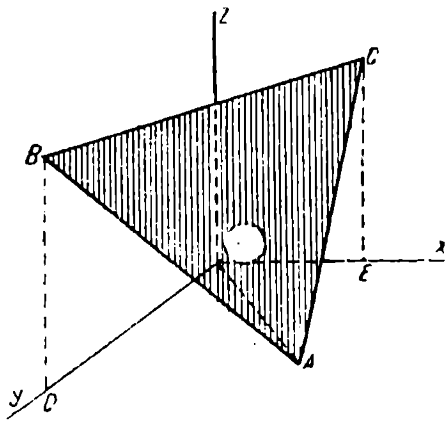
$$L_x = \Sigma \text{MOM}_x(\overline{P}) = \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad L_y = \Sigma \text{MOM}_y(\overline{P}) = \Sigma(zX - xZ) = 0,$$

$$L_z = \Sigma \text{MOM}_z(\overline{P}) = \Sigma(xY - yX) = 0.$$

183. Să se demonstreze teorema lui Varignon pentru un sistem de forțe oarecare, care se reduce la o singură rezultantă (momentul rezultantei este egal cu suma momentelor componentelor), introducând o forță, care echilibrează sistemul dat și folosind ecuațiile generale de echilibru.

184. O placă de greutate P, având forma unui triunghi echilateral ABC cu latura a, se sprijină cu vârfurile A, B și C pe trei plane perpendiculare între ele xOy, yOz și zOx. In vârful

A placa este legată de punctul O printr'un fir de lungime l care împarte unghiul xOy în două părţi egale. Să se afle reacţiunile în punctele A, B, C şi tensiunea T a firului, dacă $OD = OE$.



La problema 184

Răspuns :

$$N_A = P,$$

$$N_B = N_C = P\frac{2l-a}{3\sqrt{a^2+2al-2l^2}};$$

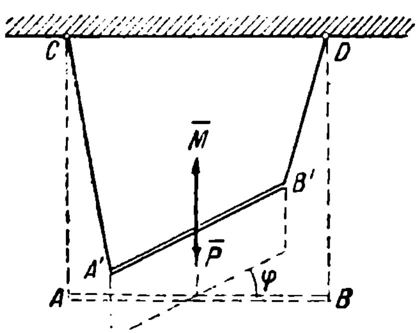
$$T = P\frac{\sqrt{2}\,(2l-a)}{3\sqrt{a^2+2al-2l^2}}.$$

185. Pe un plan orizontal sunt aşezate trei sfere identice tangente două câte două şi înconjurate la nivelul centrelor lor, cu un fir inextensibil.

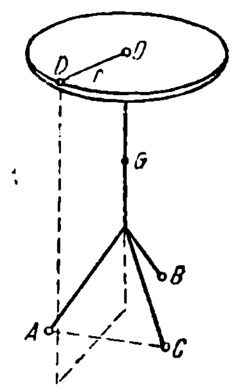
Pe aceste trei sfere se aşează a patra sferă identică. Să se afle tensiunea T a firului, dacă greutatea fiecărei sfere este P.

Răspuns : $T = \frac{\sqrt{6}}{18}P.$

186. Bara AB de greutate P este atârnată de două fire paralele CA şi DB. Se dă barei o poziţie nouă $A'B'$ în care este menţinută în echilibru de un cuplu orizontal de forţe, având un



La problema 186



La problema 187

moment dat $\overline{M}$. Să se afle unghiul φ, de rotire al barei, dacă $CA = DB = AB = l$.

Răspuns : $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2M}{Pl}.$

187. O masă rotundă de rază r are trei picioare, ale căror capete formează un triunghi echilateral ABC, cu latura a. Greutatea mesei este egală cu P și aplicată în punctul G, aflat pe axa mesei. Pe marginea din față a mesei în punctul D se află greutatea Q, OD fiind perpendicular pe AC. Să se afle presiunea picioarelor mesei pe podea. Pentru ce valoare Q, se va răsturna masa?

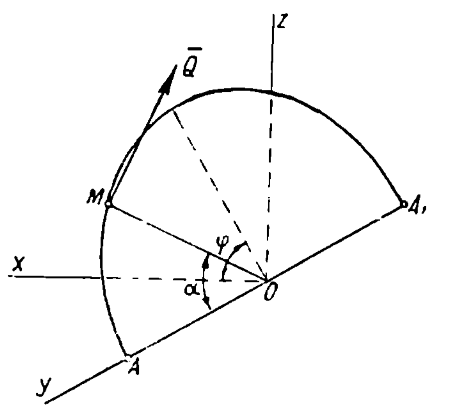
Răspuns :

$$N_A = N_C = \frac{P+Q}{3} + \frac{Qr}{a\sqrt{3}}, \quad N_B = \frac{P+Q}{3} - \frac{2Qr}{a\sqrt{3}}.$$

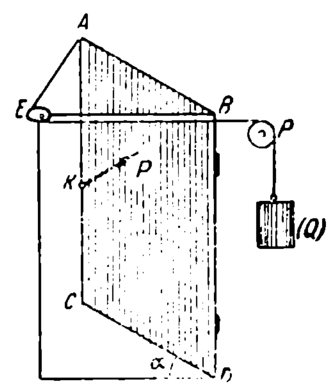
Dacă $r > \frac{a}{2\sqrt{3}}$, masa se va răsturna pentru $Q > P\frac{a}{2\sqrt{3}\,r-a}$.

188. O placă omogenă de greutate P, în formă de semicerc de rază r, se poate roti liber pe articulațiile A și A_1 în jurul axei orizontale y. La extremitatea M a razei, care formează unghiul α cu axa y, este aplicată forța $\overline{Q}$ perpendiculară pe planul plăcii. Să se afle mărimea acestei forțe, dacă ea menține placa în poziția de echilibru sub un unghi φ, față de orizontală. Să se afle deasemenea reacțiunile articulațiilor.

Indicație. Distanța între centrul de greutate al semicercului și centru este $\frac{4r}{3\pi}$.



La problema 188



La problema 189

Răspuns : $Q = \frac{4}{3\pi}\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}P.$

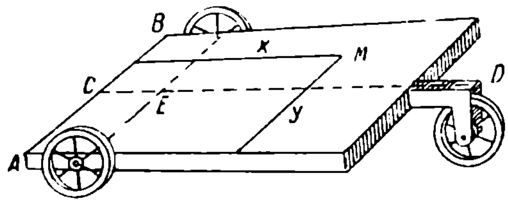
Reacțiunile $X = Q\sin\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $X_1 = Q\sin\varphi\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

$$Z = \frac{P}{2} - Q\cos\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad Z_1 = \frac{P}{2} - Q\cos\varphi\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

189. Uşa $ABCD$ se închide cu ajutorul greutăţii Q, atâ
nată de firul AEF, care trece peste scripeţii E şi F. Uşa fiin
deschisă cu unghiul α, se menţine în echilibru prin forţa $\overline{P}$
aplicată în punctul K şi perpendiculară pe planul uşii. Să s
afle relaţia între mărimile P şi Q.

Răspuns : $P = Q \cos \frac{\alpha}{2}$.

190. Pe platforma unui cărucior cu trei roţi se află în punctul M greutatea $P = 100$ kg. Poziţia punctului M este determinată de coordonatele $x = 1{,}1$ m, $y = 0{,}7$ m. Să se afle presiunea fiecărei roţi a căruciorului asupra podelei, neglijând greutatea lui proprie şi fiind cunoscute $AB = 1$ m, $CE = 0{,}2$ m şi $CD = 2{,}2$ m.

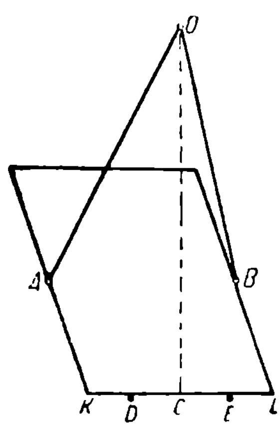


La problema 190

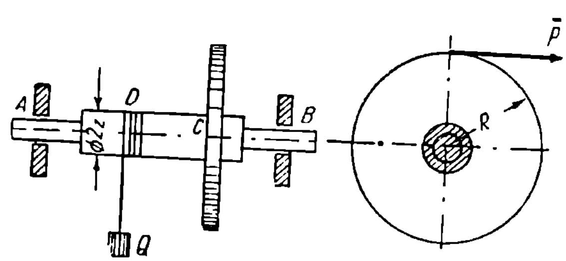
Răspuns : $N_1 = 2{,}5$ kg, $N_2 = 52{,}5$ kg, $N_3 = 45$ kg.

191. Un tablou de greutate P, în formă de dreptunghi cu laturile $2a$ şi $2b$, este atârnat de două fire AO şi BO şi se sprijină pe doi opritori rotunzi şi netezi D şi E. Să se afle tensiunea firelor şi presiunea verticală a tabloului asupra fiecărui opritor, dacă $AK = BL = b$, $KC = CL = a$, $OC = c$, $AO = BO = l$ şi $DC = CE$.

Răspuns : $T_1 = T_2 = \frac{1}{2}\frac{l}{c}P$, $N_D = N_E = \frac{1}{4}\frac{a^2+b^2+c^2-l^2}{c^2}P$.



La problema 191



La problema 192

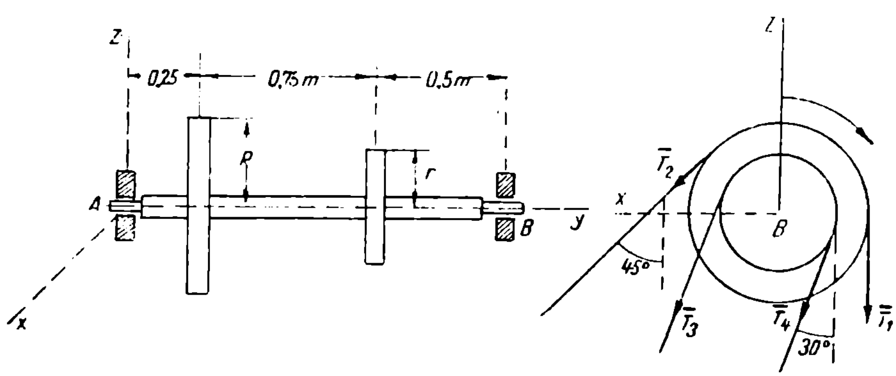
192. O macara constă dintr'un tambur de rază r şi o roată de rază R, care se învârteşte pe acelaşi arbore AB. Pe tambur este înfășurat cablul D, la capătul căruia atârnă greutatea Q. Roata este deasemenea înfășurată de un cablu, la al cărui capăt este aplicată forța orizontală $\overline{P}$. Să se afle relația dintre mărimile P și Q în poziția de echilibru și reacțiunile în lagărele A și B, dacă $AB = l$, $AC = a$ și $AD = b$.

Răspuns : $P = \frac{r}{R} Q$; dacă se orientează axa y după AB, axa x paralel cu forța $\overline{P}$ și axa z vertical în sus, atunci :

$$X_A = -\frac{l-a}{l} P,\ Z_A = \frac{l-b}{l} Q,\ X_B = -\frac{a}{l} P,\ Z_B = \frac{b}{l} Q.$$

193. De un arbore de transmisie orizontal sunt fixate solidar două șaibe de rază $R = 0{,}4$ m și $r = 0{,}2$ m. Se dau tensiunile din capetele curelei, care este trecută peste prima șaibă : $T_1 = 340$ kg și $T_2 = 200$ kg ; primul capăt este vertical, iar unghiul dintre al doilea capăt și verticală este egal cu $45°$. Tensiunile din capetele curelei, care este trecută peste a doua șaibă, sunt T_3 și T_4, capetele fiind paralele și formând cu verticala unghiuri de $30°$. Să se determine reacțiunea lagărelor A și B și tensiunile T_3 și T_4 știind că $T_3 = 2\,T_4$ și că forțele de tensiune din curele și reacțiunile lagărelor se echilibrează între ele (arborele se mișcă uniform și nu există rezistență). Dimensiunile sunt date pe figură.

Răspuns : $T_3 = 560$ kg, $T_4 = 280$ kg, $X_1 = 257$ kg, $Z_1 = 643$ kg, $X_2 = 304$ kg, $Z_2 = 565$ kg.



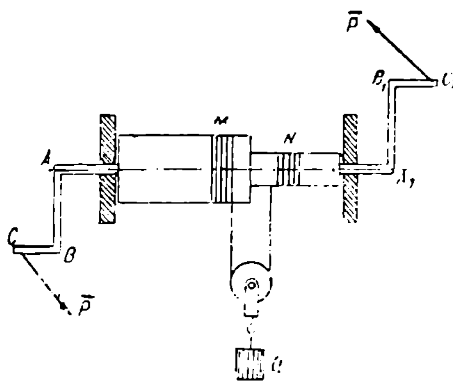
La problema 193

194. Un inel rotund, greu, este suspendat în punctul A cu ajutorul unui anumit număr de fire inextensibile, de lungime egală, fixate în mod simetric de inel. Pe conul de fire format astfel, se așează un al doilea inel rotund cu raza mai mică, însă de aceeaşi greutate ca şi primul. Se constată, că sistemul se află în echilibru, când inelul al doilea se află la mijlocul firelor. Să se afle raportul distanţelor celor două inele la punctul de suspensie A.

Indicaţie. Se presupune că numărul firelor este cunoscut şi egal cu n.

Răspuns : 2 : 3.

195. Un troliu diferenţial constă dintr'un tambur M de rază R şi un alt tambur N de rază r, care se rotesc pe acelaşi arbore AA_1. Pe cei doi tamburi este înfăşurat un cablu, care susţine un scripete mobil, de care este atârnată greutatea Q. Cablul este astfel înfăşurat, încât la rotirea arborelui, el se desfăşoară de pe un tambur şi se înfăşoară pe celălalt tambur. Porţiunile de cablu, care atârnă sub tamburi sunt paralele. Pe mânerul BC se aplică o forţă de mărimea P, perpendiculară pe planul ABC. O forţă de aceeaşi mărime P, perpendiculară pe planul $A_1B_1C_1$ este aplicată şi pe mânerul B_1C_1. Să se afle relaţia dintre mărimile P şi Q în poziţia de echilibru, ştiind că lungimea mânerelor AB şi $A_1 B_1$ este l.


La problema 195

Răspuns : Observând că tensiunea din porţiunile de cablu, coborîte de pe tamburii M şi N, este egală cu $\frac{1}{2} Q$, se egalează cu zero suma momentelor tuturor forţelor, care acţionează pe troliu, în raport cu axa AA_1 şi din ecuaţia obţinută se află

$$P = \frac{R-r}{4l} Q.$$

196. La un troliu diferenţial (problema precedentă) raza tamburului mare $R = 25$ cm, iar lungimea mânerelor $l = 0{,}4$ m. Cât de mare trebue să fie raza r a tamburului mic, pentru ca forţa P să fie a suta parte din greutatea Q?

Răspuns : $r = 23{,}4$ cm.

§ 8. Echilibru cu frecare

Dacă un corp solid A (fig. 15), care se află sub acţiunea unui sistem de forţe, se sprijină pe suprafaţa unui corp fix B, atunci în punctul de contact ia naştere o reacţiune oarecare $\overline{R}$ din partea corpului B asupra corpului A.

In cazul când suprafețele de contact sunt netede, reacțiunea este normală pe aceste suprafețe. In cazul când suprafețele sunt aspre reacțiunea este orientată sub un unghi ascuțit α față de normala comună la suprafețele de contact și poate fi descompusă într'o componentă normală $\overline{N}$ (*reacțiunea normală*) și o componentă tangențială $\overline{F}$ (*forța de frecare la alunecare*). In starea de repaus relativ a corpurilor în contact, forța de frecare poate avea orice direcție în planul tangent la suprafețele de contact. Această direcție se determină prin forțele active, care acționează pe corpul A. Mărimea forței de frecare se determină deasemenea prin forțele active, însă ea nu depășește o anumită valoare la limită, care este proporțională cu mărimea reacțiunii normale, adică

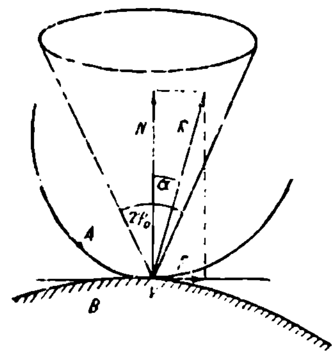


Fig. 15

$$F \leqslant f_0 N,$$

factorul de proporționalitate f_0 fiind un număr abstract, care depinde de materialul și starea suprafețelor care se ating; el se numește *coeficient de frecare la alunecare, în repaus* sau *coeficient static de frecare la alunecare.*

Intrucât

$$F = N \operatorname{tg} \alpha,$$

rezultă că

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0 \quad \text{și} \quad \alpha \leqslant \varphi_0,$$

φ_0 fiind *unghiul de frecare* în repaus. Dacă am construi un con circular cu vârful în punctul de contact K al corpurilor și cu unghiul la vârf $2\,\varphi_0$ reacțiunea totală $\overline{R}$ se află fie în interiorul acestui con, fie pe suprafața lui. Acest con se numește *con de frecare în repaus.*

Dacă are loc o alunecare relativă a corpurilor în contact, forța de frecare are o orientare opusă sensului vitezei relative de alunecare, iar mărimea forței de frecare este proporțională cu reacțiunea normală, adică

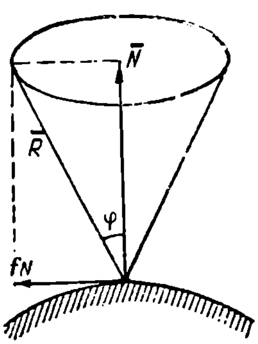


Fig. 16.

$$F = f N,$$

în care factorul de proporționalitate f este *coeficientul de frecare la alunecare în mișcare sau coeficientul dinamic de frecare la alunecare.* Coeficientul frecării dinamice este mai mic decât coeficientul frecării statice

$$f < f_0.$$

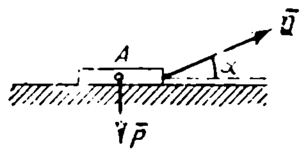
In cazul alunecării, unghiul φ dintre reacțiunea totală și normală se numește unghi de frecare dinamică. El satisface ecuația

$$f = \operatorname{tg} \varphi.$$

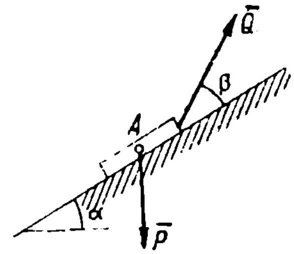
Reacțiunea totală este orientată după una din generatoarele conului circular, care are drept axă normala comună la suprafețele corpurilor în contact, iar unghiul la vârf este egal cu 2φ (con de frecare) (fig. 16).

197. Un corp A de greutate P este așezat pe un plan orizontal. Corpului i se aplică forța $\overline{Q}$. Unghiul dintre forță și orizontală este egal cu α. Ce mărime trebue să aibă forța $\overline{Q}$, pentru ca ea să poată pune în mișcare corpul A, când coeficientul de frecare al corpului pe plan este f?

Răspuns: $Q \geqslant \dfrac{fP}{\cos\alpha + f\sin\alpha}$.



La problema 197



La problema 198

198. Pe un plan înclinat cu unghiul α se află un corp A de greutate P. Acestui corp i se aplică forța Q care formează cu planul înclinat unghiul β. Ce mărime va avea forța $\bar{Q}$ în caz de echilibru al corpului, dacă unghiul de frecare al corpului pe plan este φ?

Răspuns: $P\dfrac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} \geqslant Q \geqslant P\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}$.

199. Care este coeficientul de frecare f, pentru care este mai ușor a ridica direct un corp greu, decât a-l trage pe un plan înclinat, cu unghiul α față de orizontală.

Răspuns: Pentru $f > \operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

200. Scara AB de lungime $2a$ și greutate P se sprijină cu extremitățile ei de un perete vertical și de podeaua orizontală. Coeficientul de frecare în punctul A este 0,4, iar în punctul B este 0,5. Să se determine unghiul α dintre scară și verticală, pentru care echilibrul este posibil, știind că centrul de greutate al scării se află la mijlocul ei.

Răspuns: $145° \geqslant \alpha \geqslant 0$.

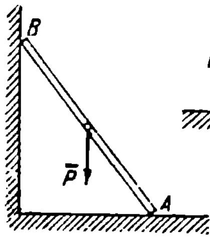
201. O scândură omogenă AB de lungime $2a$ și greutate P se sprijină pe un plan orizontal și pe un punct fix D, distanța DE dela punctul D la planul orizontal fiind egală cu h. Să se arate, că unghiul limită de înclinare α, pentru care echilibrul este posibil se determină din ecuația

$$\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{h}{2a}\sin 2\varphi = 0,$$

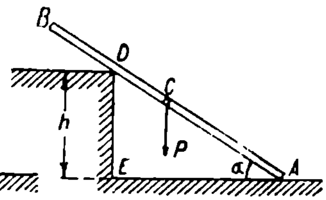
în care φ este unghiul de frecare în punctele A și D.

202. Două sarcini, ale căror greutăți sunt P și Q, legate printr'un fir trecut peste un scripete, sunt așezate pe plane înclinate cu unghiurile α și β ca în figură. Să se afle raportul $\frac{P}{Q}$ pentru poziția de echilibru, când unghiul de frecare a sarcinilor pe plan este φ.

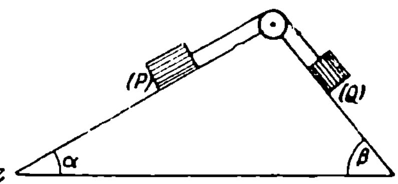
Răspuns : $\frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)} \geqslant \frac{P}{Q} \geqslant \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}$.



La problema 200



La problema 201

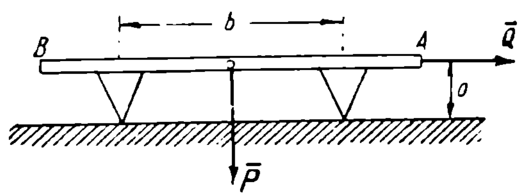


La problema 202

203. Un lanț omogen de lungime l, care are greutatea p pe unitatea de lungime, atârnă de pe masă și este menținut în echilibru prin forța de frecare. Să se afle coeficientul de frecare f, știind că lungimea părții, care atârnă de pe masă, este a.

Răspuns : $f \geqslant \frac{a}{l - a}$.

204. O scândură omogenă se sprijină prin două reazime pe un plan orizontal, aspru. Greutatea scândurii este P, coeficienții de frecare dintre reazime și planul fix sunt f_1 și f_2; dimensiunile sunt date în figură. Să se afle forța maximă orizontală Q, sub acțiunea căreia scândura va rămâne în echilibru.

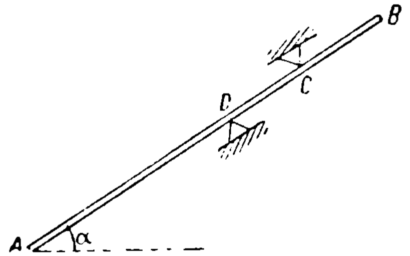


La problema 204

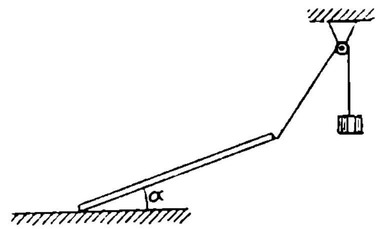
Răspuns : $Q = \frac{(f_1 + f_2)\, b}{2\,[b + (f_1 - f_2)\, a]}\, P$.

205. O bară omogenă AB, de greutate P, este așezată între două reazime fixe D și C. Coeficientul de frecare între bară și reazime este f. Care va fi lungimea l a barei pentru a fi în echilibru, când unghiul dintre bară și orizontală este egal cu α; se dă $DC = a$, $BC=b$, iar grosimea barei poate fi neglijată.

Răspuns: $l > a + 2b + \frac{a}{f} \operatorname{tg} \alpha$.



La problema 205



La problema 206

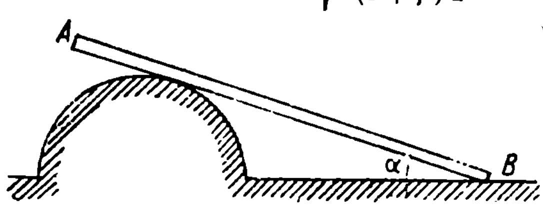
206. O bară omogenă se sprijină cu capătul ei inferior pe un plan orizontal, aspru și se menține în echilibru cu ajutorul unui fir, legat cu o extremitate de capătul ei superior și trecut peste un scripete fix ideal, de cealaltă extremitate a firului este atârnată o greutate oarecare. Să se afle valoarea maximă a acestei greutăți, cunoscând coeficientul de frecare f al barei pe plan, unghiul α dintre bară și orizontală și greutatea barei P.

Răspuns: $Q = P \frac{\sqrt{f^2 + (1 + 2kf)^2}}{2(1 + kf)}$, în care $k = \operatorname{tg} \alpha$.

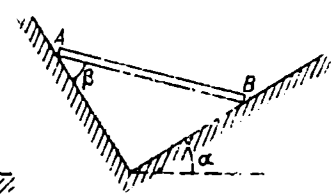
Dacă $f = 0$ atunci $Q = \frac{1}{2} P$.

207. O bară omogenă AB, de lungime $2a$ și greutate P, se sprijină pe un plan orizontal și pe un cilindru fix de rază r. Coeficientul de frecare al barei cu cilindrul și cu planul este f. Să se afle valoarea maximă a unghiului α, pentru care bara este în echilibru.

Răspuns: $\sin \alpha = \sqrt{\frac{fr}{(1 + f^2) a}}$.



La problema 207



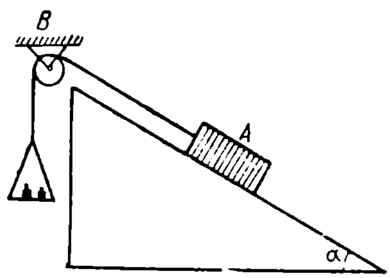
La problema 208

208. O bară omogenă AB de greutate P, se sprijină pe două plane perpendiculare între ele. Unghiul dintre unul din plane și orizontală este egal cu α. Cât de mare va fi unghiul β în poziția de echilibru, dacă unghiul de frecare al barei cu planul este egal cu φ?

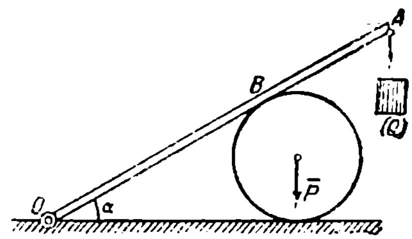
Răspuns: $\alpha + 2\varphi \geqslant \beta \geqslant \alpha - 2\varphi$.

209. Corpul A, de greutate P, este așezat pe un plan înclinat cu unghiul α. De acest corp este legat un fir paralel cu planul și trecut peste scripetele B; de capătul firului este legat un taler cu greutăți. In clipa când corpul A începe să se miște pe plan în sus, pe taler se află greutatea Q. Să se determine coeficientul de frecare al corpului cu planul.

Răspuns: $f = \dfrac{Q - P \sin \alpha}{P \cos \alpha}$.



La problema 209



La problema 210

210. Scândura OA, care se rotește în articulația O, se sprijină în punctul B de o sferă, având greutatea P, și așezată pe un plan fix orizontal. La capătul A al scândurii este atârnată greutatea Q. Greutatea scândurii poate fi neglijată. Să se determine unghiul α în poziția de echilibru, știind, că unghiul de frecare al sferei cu scândura și cu planul orizontal este egal cu φ.

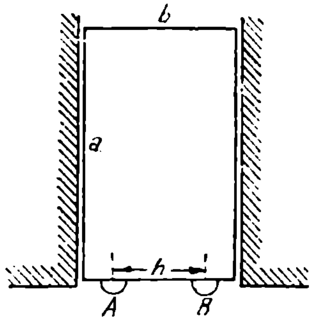
Răspuns: $\alpha \leqslant 2\varphi$.

211. Un punct material, aflat sub acțiunea forței gravității, se poate deplasa, cu frecare, pe un cerc de rază r, așezat într'un plan vertical. La ce diferență de nivel, față de centrul cercului, punctul material poate fi în echilibru, dacă coeficientul de frecare este f?

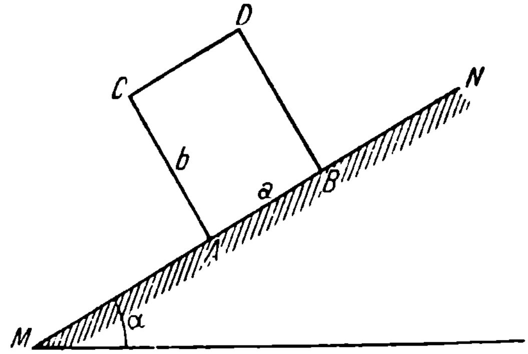
Răspuns: $h \leqslant -\dfrac{r}{\sqrt{1+f^2}}$ și $h \geqslant +\dfrac{r}{\sqrt{1+f^2}}$.

212. Un sertar de dulap are lungimea a și lățimea b; pe peretele său frontal se află două mânere A și B, așezate simetric, distanța între ele fiind h. Să se afle cât de mare trebue să fie coeficientul de frecare f, încât să fie imposibil scoaterea sertarului trăgând de un singur mâner, oricât de mare ar fi forța cu care am trage normal pe peretele frontal al sertarului.

Răspuns : $f \geqslant \frac{a}{h}$.



La problema 212



La problema 213

213. Un paralelipiped dreptunghic omogen $ABCD$ de greutate P se sprijină cu suprafața AB pe un plan înclinat aspru MN, al cărui unghi cu orizontala crește mereu. Care va fi valoarea unghiului α în momentul când paralelipipedul va începe să alunece pe plan în jos sau se va răsturna în jurul muchiei A?

Răspuns : Dacă $\frac{a}{b} < f$ se va produce o răsturnare pentru $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$; dacă $\frac{a}{b} > f$, se va produce o alunecare pentru $\alpha = \operatorname{arctg} f$, unde f este coeficientul de frecare.

214. O placă omogenă $ABCD$ de formă pătrată și greutate P, așezată într'un plan vertical, se sprijină cu vârful D de un perete vertical aspru, iar cu latura AB de un punct fix E. Coeficientul de frecare f este același pentru perete și pentru reazimul E. Să se afle valoarea minimă a lui f în poziția de echilibru, neglijând unghiul mic α dintre latura AD și verticală și distanța mică BE.

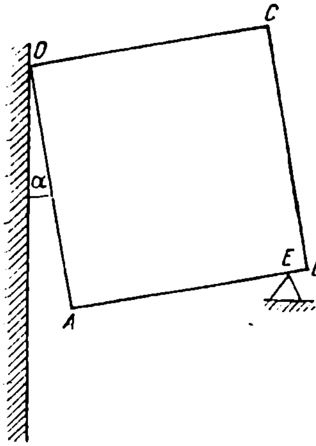
Răspuns : $f_{\min} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$.

215. Un cilindru circular drept A se menține în echilibru pe un plan înclinat aspru, cu ajutorul unui fir fără greutate, inextensibil și perfect flexibil care este fixat cu un capăt pe suprafața cilindrului, apoi întins, paralel cu planul, trecut peste scripetele B și purtând la celălalt capăt greutatea Q.

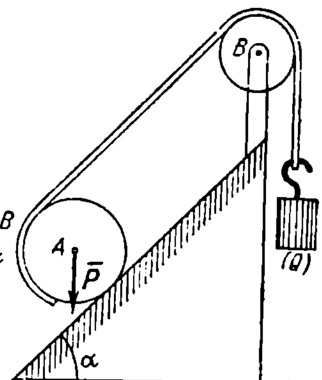
Să se afle condițiile de echilibru, dacă greutatea cilindrului este P, unghiul de înclinare al planului este α, iar coeficientul de frecare este f.

Răspuns : Echilibrul are loc în condițiile $\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f$ și

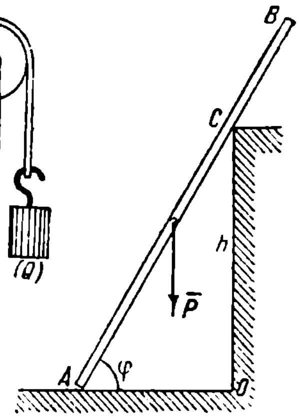
$$Q = \frac{P}{2} \sin \alpha.$$



La problema 214



La problema 215



La problema 216

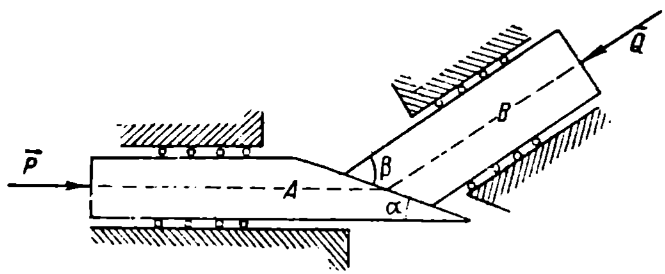
216. O grindă omogenă de lungime $2l$ și greutate P se sprijină cu capătul inferior pe un plan aspru, orizontal și în punctul C pe un punct fix, aflat la înălțimea h deasupra planului. Valoarea minimă a unghiului $\varphi = OAC$, pentru care grinda mai poate fi în echilibru în poziția descrisă, este φ_0. Să se afle coeficientul de frecare f în punctul A (frecarea în punctul C se neglijează).

Răspuns : $f = \dfrac{l \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0}{h - l \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}$.

217. Două pene A și B, având coeficientul de frecare între ele egal cu $f = \operatorname{tg} \varphi$, se pot mișca fără frecare în ghidajele lor. Să se rezolve și să se discute următoarele probleme: 1) penei A i se aplică forța $\overline{P}_1$; ce forță $\overline{Q}_1$ trebue aplicată penei B, pentru ca pana A să se deplaseze uniform în direcția acțiunii forței $\overline{P}_1$; 2) penei B i se aplică forța $\overline{Q}_2$; ce forță $\overline{P}_2$ trebue aplicată penei A, pentru ca pana B să se deplaseze uniform în direcția acțiunii forței $\overline{Q}_2$? Forțele $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ sunt paralele cu ghidajele corespunzătoare.

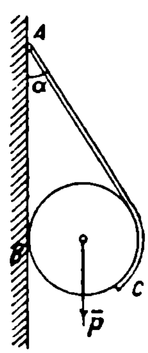
Răspuns: 1) $Q_1 = P_1 \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}$; soluția este posibilă pentru orice valoare φ.

2) $P_2 = Q_2 \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}$; pentru $\varphi < \alpha$ forța $\overline{P}_2$ acționează împotriva mișcării penei A; pentru $\varphi = \alpha$, $P_2 = 0$; pentru $\alpha < \varphi < \beta$ forța $\overline{P}_2$ are direcția mișcării penei A (împănare), pentru $\varphi \geqslant \beta$ mișcarea uniformă nu este posibilă pentru nicio valoare a forței $\overline{P}_2$.

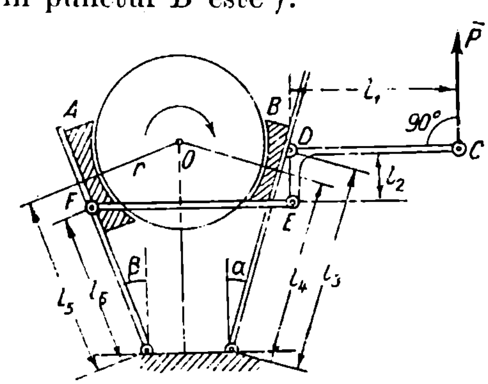


La problema 217

218. Un cilindru omogen, rezemat în punctul B de un plan vertical aspru, este ținut în echilibru, printr' un fir elastic, fixat de cilindru în punctul C și de perete în punctul A. Să se afle unghiul cel mai mic α dintre fir și perete, în poziția de echilibru, precum și tensiunea firului și reacțiunea corespunzătoare a peretelui, știind, că greutatea cilindrului este P și coeficientul de frecare în punctul B este f.



La problema 218



La problema 219

Răspuns:

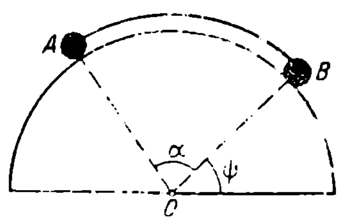
$$\sin\alpha = \frac{1}{f}, \quad T = \frac{f}{f+\sqrt{f^2-1}} P, \quad N = \frac{1}{f} T \quad (f \geqslant 1).$$

219. O șaibă de rază r este frânată cu ajutorul a doi saboți A și B. Bara EF este articulată în punctul F de sabotul stâng, iar în punctul E de capătul unei pârghii în unghi drept. Pârghia se poate roti în jurul axei D, prinsă de sabotul drept. La capătul C al acestei pârghii este aplicată forța $\overline{P}$. Unghiul dintre $\overline{P}$ și brațul DC, paralel cu bara EF este drept. Cunoscând lungimile r, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 și unghiurile α și β, precum și coeficientul de frecare f între saboți și șaibă, să se afle momentul de frânare al șaibei.

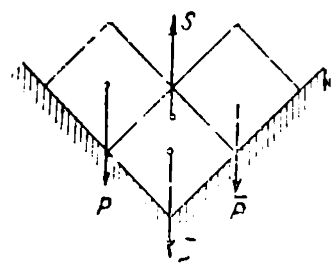
Răspuns: $Pfr\left[\frac{l_3}{l_4}(\sin\alpha + \frac{l_1}{l_2}\cos\alpha) + \frac{l_1 l_4}{l_2 l_6}\cos\beta\right]$.

220. Două sfere mici A și B, fiecare de greutate P, sunt legate printr'un fir inextensibil și așezate pe un semicilindru fix. Unghiul la centru α al arcului AB este cunoscut. Unghiul de frecare al sferelor de cilindru este φ. Care va fi valoarea unghiului ψ în poziția de echilibru?

Răspuns: $90° - \frac{\alpha}{2} + \varphi \geqslant \psi \geqslant 90° - \frac{\alpha}{2} - \varphi$.



La problema 220

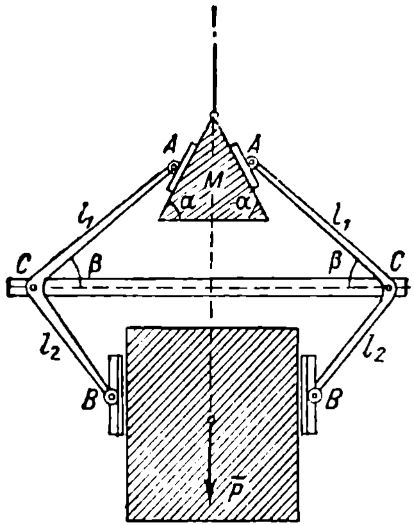


La problema 221

221. Să se afle forța verticală S, care trebue aplicată cubului de jos, pentru a-l trage în sus. Se știe că unghiurile dintre planele fixe și orizontală sunt de 45°, că toate trei cuburile au aceeași greutate P și că coeficientul de frecare al cuburilor cu planurile înclinate este f, iar cel între cuburi este f_1.

Răspuns: $S = \frac{2 + f + f_1 + 2ff_1}{1 + ff_1} P$.

222. Un dispozitiv de ridicat constă din două pârghii identice în unghi drept ACB, fixate prin articulații de traversa CC. Pernițele superioare A și A se pot roti la capetele brațelor CA și se depărtează prin pana M, iar pernițele inferioare, care se rotesc pe axele B și B, strâng greutatea P, care trebue ridicată. Cunoscând lungimile l_1 și l_2, unghiurile α și β, precum și unghiul de frecare φ între pernițele superioare și pană, să se afle coeficientul de frecare f_1, între pernițele inferioare și pereții sarcinii, astfel încât ea să poată fi ținută între pernițe. Se va neglija greutatea dispozitivului.



La problema 222

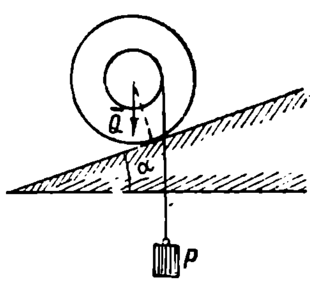
Răspuns :

$$f_1 \geqslant \frac{l_2}{l_1 + [l_1 \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) - l_2] \operatorname{tg} \beta}.$$

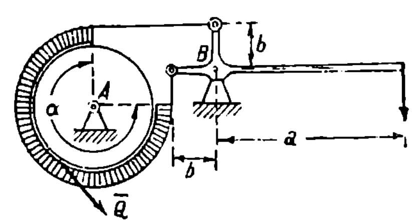
223. Un cilindru drept circular de rază R și greutate Q având la mijloc o prelungire circulară cu raza r, este menținut în echilibru pe un plan înclinat aspru prin forța de frecare și o greutate P, atârnată de capătul liber al unui cablu, înfășurat pe prelungirea cilindrică. Dacă unghiul dintre plan și orizontală este egal cu α, iar coeficientul de frecare cu f, să se afle: 1) condițiile de echilibru, 2) greutatea P, care echilibrează și 3) presiunea cilindrului pe plan în poziția de echilibru.

Răspuns : 1) Condițiile de echilibru : $\operatorname{tg} \alpha \leqslant f$, $R \sin \alpha < r$.

$$2)\ P = \frac{QR \sin \alpha}{r - R \sin \alpha}, \quad 3)\ N = \frac{Qr \cos \alpha}{r - R \sin \alpha}.$$



La problema 223



La problema 225

224. Un punct material, de greutate P, este așezat pe un plan orizontal, aspru; el este respins de un centru fix O, situat pe acest plan, cu o forță proporțională cu distanța, factorul de proporționalitate fiind k. Să se determine domeniul de echilibru al punctului, când coeficientul de frecare este f.

Răspuns: Un cerc cu centrul O și rază $\frac{Pf}{k}$.

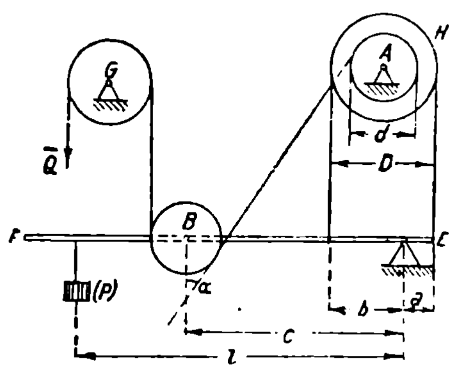
225. Arborele unei macarale se rotește în jurul unei axe fixe A și se află în echilibru, sub acțiunea unei forțe tangențiale $\overline{Q}$ și a forțelor de frecare, provocate de o bandă de frânare, care este întinsă cu ajutorul unei pârghii cu axă fixă B, la capătul căreia este aplicată forța $\overline{P}$. Să se afle mărimea forței $\overline{P}$, cunoscând coeficientul de frecare f și unghiul de înfășurare α al benzii.

Dimensiunile sunt indicate în figură.

Indicație. Se va utiliza formula lui Euler: $T_1 = T_2 e^{f\alpha}$ în care T_1 și T_2 sunt mărimile forțelor aplicate la capetele benzii de frânare.

Răspuns: $P = \dfrac{(e^{f\alpha}+1)\,b}{(e^{f\alpha}-1)\,a}\,Q$.

226. Un cablu care coboară pe un tambur A, este trecut peste scripetele B, așezat liber pe brațul pârghiei EF, apoi peste scripetele fix G. Șaiba H, care formează un tot cu tamburul, este înfășurată de o bandă de frânare; capetele benzii sunt fixate de pârghia EF, de care atârnă greutatea P. Să se afle tensiunea Q a cablului, neglijând frecarea la scripeții A, B, și G și greutatea pârghiei; coeficientul de frecare între banda de frânare și șaibă este cunoscut și egal cu f, dimensiunile și unghiul α sunt arătate pe figură. Să se cerceteze cazul $f = 0$.



La problema 226

Răspuns: $Q = \dfrac{lD\,(e^{f\alpha}-1)}{2\,cD\,(e^{f\alpha}-1)\cos^2\frac{\alpha}{2} - (ae^{f\alpha}-b)\,d}\,P$ (v. indicația la problema 225).

§ 9. Centrul de greutate

1. Dacă se divide un corp în mai multe părți și se notează cu p greutatea unei părți și cu x, y, z coordonatele centrului de greutate al acestei părți, atunci coordonatele centrului de greutate a întregului corp sunt:

$$x_0 = \frac{\Sigma\, px}{\Sigma p}, \quad y_0 = \frac{\Sigma\, py}{\Sigma p}, \quad z_0 = \frac{\Sigma\, pz}{\Sigma p}.$$

Dacă corpul este omogen, greutăţile părţilor din corp sunt proporţionale cu volumele lor, adică $p = \gamma \Delta v$, unde γ este greutatea unităţii de volum. In cazul acesta centrul de greutate al corpului coincide cu centrul de greutate al volumului, care va avea coordonatele

$$x_0 = \frac{\Sigma x \, \Delta v}{v}, \quad y_0 = \frac{\Sigma y \, \Delta v}{v}, \quad z_0 = \frac{\Sigma z \, \Delta v}{v}.$$

Expresiile $\Sigma x \Delta v$, $\Sigma y \Delta v$, $\Sigma z \Delta v$ se numesc *momente statice* ale volumului în raport cu planele de coordonate corespunzătoare (yz), (zx) şi (xy).

In cazul unei figuri omogene plane, ţinând seama de faptul că greutăţile sunt proporţionale cu ariile, se obţine:

$$x_0 = \frac{\Sigma x \, \Delta s}{s}, \quad y_0 = \frac{\Sigma y \, \Delta s}{s}$$

în care Δs sunt ariile părţilor din figură, s aria întregii figuri. Expresiile $\Sigma x \Delta s$, $\Sigma y \Delta s$ se numesc momente statice ale suprafeţei în raport cu axele y şi x.

In mod analog se obţin expresiile:

$$x_0 = \frac{\Sigma x \, \Delta l}{l}, \quad y_0 = \frac{\Sigma y \, \Delta l}{l}, \quad z_0 = \frac{\Sigma z \, \Delta l}{l},$$

ale coordonatelor centrului de greutate al unei linii curbe omogene.

2. Pentru a afla centrul de greutate al unui volum, al unei suprafeţe sau al unei curbe, se împarte figura geometrică dată în părţi, ale căror centre de greutate sunt cunoscute şi apoi se determină momentele statice corespunzătoare.

Trebue să se ţină seama de următoarele: 1) când corpul are un plan de simetrie, centrul de greutate se află în acest plan; 2) când corpul are o axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă; 3) când corpul este simetric în raport cu un punct, centrul de greutate coincide cu centrul de simetrie.

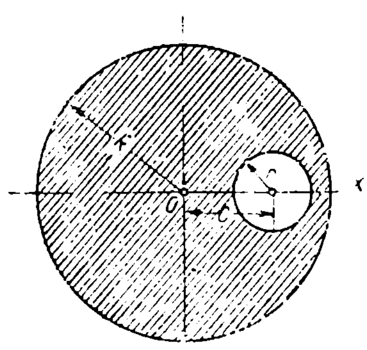


Fig. 17.

Când corpul are goluri (scobituri), volumul acestora se socoteşte negativ, la aflarea centrului de greutate; în mod analog se determină centrul de greutate pentru suprafeţe cu goluri.

De exemplu, centrul de greutate al suprafeţei unui cerc de rază R cu un gol rotund de rază r şi distanţa c între centre (fig. 17), se află la distanţa

$$x_0 = \frac{\pi R^2 \, O - \pi r^2 c}{\pi (R^2 - r^2)} = - \frac{r^2 c}{R^2 - r^2}$$

de centrul cercului O.

3. Dacă volumul, suprafaţa sau linia se împarte în elemente infinit de mici, sumele din expresiile coordonatelor centrului de greutate se înlocuesc în mod corespunzător prin integrale de volum, de suprafaţă sau curbilinii.

I. Aria suprafeței, obținută prin rotația unui arc de curbă plană în jurul unei axe, situată în planul acestei linii și care nu o intersectează, este egală cu produsul dintre lungimea arcului, care se rotește și lungimea circumferinței, descrisă de centrul de greutate al arcului.

II. Volumul unui corp de rotație, format prin rotirea unei figuri plane în jurul unei axe, situată în planul figurii și care nu o intersectează, este egal cu produsul dintre aria figurii și lungimea circumferinței, descrisă de centrul ei de greutate.

a) *Centrul de greutate al unei linii*

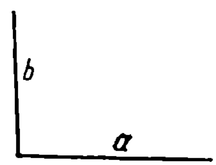
227. O sârmă omogenă este îndoită în formă de unghi drept cu laturile a și b. Să se afle poziția centrului său de greutate.

Răspuns : Luând laturile unghiului drept axe de coordonate, coordonatele centrului de greutate căutat vor fi

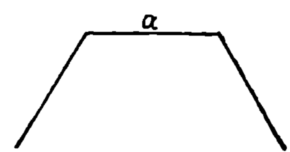
$$x = \frac{a^2}{2(a+b)}, \quad y = \frac{b^2}{2(a+b)}.$$

228. Să se determine poziția centrului de greutate al semiperimetrului unui exagon regulat cu latura a.

Răspuns : Centrul de greutate se află pe axa de simetrie la distanța $\frac{a}{\sqrt{3}}$ de centrul exagonului.



La problema 227



La problema 228

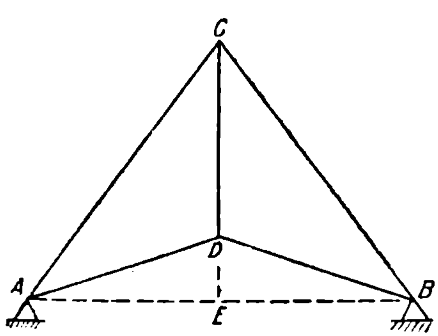
229. Aplicând teorema lui Guldin, să se determine suprafața torului, adică a corpului, obținut prin rotația unei circumferințe de rază R în jurul unei axe, situată la distanța l de centrul cercului, l fiind mai mare ca R.

Răspuns : $S = 4\pi^2 Rl$.

230. Să se determine după teorema lui Guldin, suprafața corpului, obținut prin rotația unui arc de cerc cu unghiul la centru 2α și raza R, în jurul coardei sale.

Răspuns :

$$S = 4\pi R^2 (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$



La problema 231

231. Să se afle poziția centrului de greutate al unei ferme simetrice, $ABCD$, barele având următoarele dimensiuni : $AB = 6$ m, $CD = 3$ m și $DE = 1$ m.

Răspuns : Centrul de greutate se află pe dreapta EC la distanța de 1,587 m de punctul E.

232. Să se determine distanța între centrul cercului și centrul de greutate al perimetrului unui sector circular cu unghiul la centru de 90° și raza R.

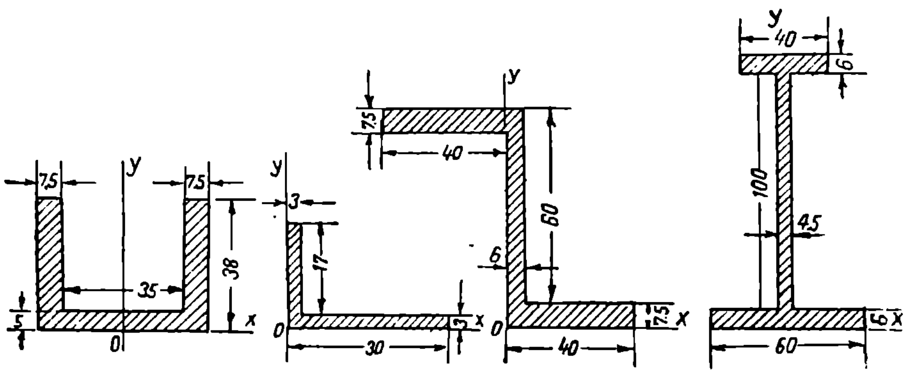
Răspuns : $x = \frac{3\sqrt{2}}{\pi + 4} R.$

b) *Centrul de greutate al suprafețelor*

233. Să se determine coordonatele în centimetri ale centrelor de greutate ale figurilor plane date în figuri.

Răspuns :

1) $x = 0,$ $y = 15{,}1$ cm
2) $x = 10{,}1$ cm $y = 5{,}1$ cm
3) $x = 1{,}125$ cm $y = 35{,}2$ cm
4) $x = 0,$ $y = 49{,}64$ cm



La problema 233

234. Să se arate că distanța dela centrul de greutate al suprafeței unui segment circular la centrul cercului este egală cu $\frac{l^3}{12A}$ unde l este lungimea coardei segmentului și A aria lui.

235. Aplicând teorema lui Guldin, să se afle volumul torului (problema 229).

Răspuns : $V = 2\pi^2 R^2 l.$

236. Să se determine prin teorema lui Guldin, volumul unui corp, obținut prin rotația în jurul coardei sale a unui segment circular cu unghiul la centru 2α și raza R.

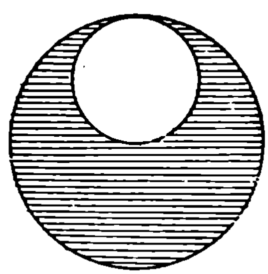
Răspuns : $V = 2\pi R^3 \left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha\right).$

237. Să se afle poziția centrului de greutate al unei figuri. formată dintr'un triunghi dreptunghic isoscel și pătratele construite pe ipotenuza și catetele sale.

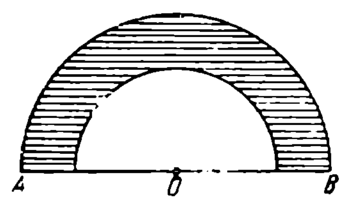
Răspuns: Centrul de greutate se află pe înălțimea, coborîtă din vârful unghiului drept pe ipotenuză, la distanța de $\frac{1}{27}$ din această înălțime socotită dela ipotenuză.

238. Dintr'un cerc de rază R se taie un cerc tangent interior cu raza $\frac{R}{2}$. Să se afle poziția centrului de greutate al porțiunii rămase.

Răspuns: Centrul de greutate se află pe dreapta care unește centrele cercurilor, la distanța de $\frac{R}{6}$ dela centrul cercului mai mare.



La problema 238



La problema 240

239. Coordonatele vârfurilor patrulaterului $ABCD$ sunt: A (4, 4), B (5, 7), C (10, 10), D (12, 4). Să se calculeze coordonatele centrului său de greutate.

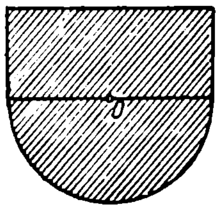
Răspuns: $x = 8{,}2$; $y = 6{,}2$.

240. Pe segmentul AB sunt construite două semicercuri cu razele R și r. Să se afle distanța dela centrul O comun a semicercurilor, la centrul de greutate al suprafeței închise între ele.

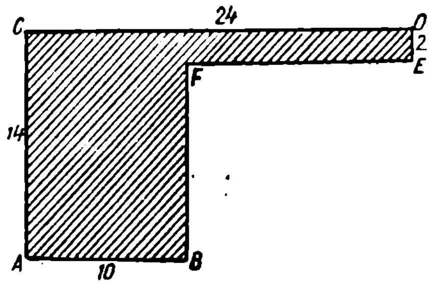
Răspuns: $y = \frac{4(R^2+r^2+Rr)}{3\pi\,(R+r)}$.

241. O figură constă din semicercul de rază R și dintr'un dreptunghi cu baza egală cu diametrul semicercului și cu înălțimea h. Care trebue să fie valoarea raportului $\frac{h}{R}$ pentru ca centrul de greutate al intregei figuri să coincidă cu centrul semicercului O?

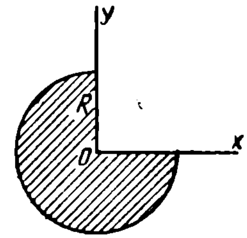
Răspuns: $\dfrac{h}{R} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



La problema 241



La problema 242



La problema 243

242. Dimensiunile figurei $ACDEFBA$ sunt date pe schiță. Să se afle pe cale grafică poziția centrului de greutate al acestei figuri și apoi să se calculeze coordonatele lui, luând ca axe de coordonate laturile AB și AC.

Răspuns: $x = 7$; $y = 8$.

243. Să se afle coordonatele centrului de greutate al figurii, care reprezintă trei sferturi din cercul de rază R.

Răspuns: $x = y = -\dfrac{4R}{9\pi} \approx -0{,}14\,R$.

244. Să se demonstreze că centrele de greutate ale suprafeței și conturului unui poligon circumscris unui cerc se află pe același diametru și că distanțele lor la centrul cercului sunt proporționale cu $2:3$.

245. O placă omogenă triunghiulară, de greutate P este așezată orizontal, sprijinindu-se cu vârfurile pe trei puncte fixe. Să se determine presiunea pe reazime.

Răspuns: $\dfrac{P}{3}$.

246. Patru oameni trebue să ridice o placă triunghiulară omogenă ABC. Doi dintre ei apucă placa de vârfurile B și C. In care puncte M și N ale laturilor AB și AC trebue să țină placa ceilalți doi oameni, pentru ca greutatea ei să se distribue egal între toți patru oameni.

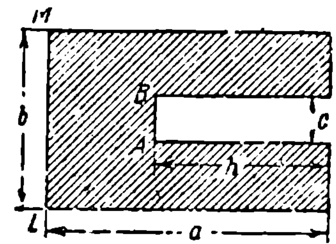
Răspuns: $AM = \dfrac{1}{3}AB$, $AN = \dfrac{1}{3}AC$.

247. Trei oameni trebue să ridice o scândură omogenă, având forma unui paralelogram, astfel încât greutatea ei să se împartă în mod egal între oameni. Unul apucă scândura de un vârf. Unde trebue să țină scândura ceilalți doi?

Răspuns: In mijlocurile laturilor paralelogramului care se intersectează în vârful opus celui apucat.

248. Dintr'o scândură dreptunghiulară omogenă trebue tăiată din margine cu ferestrăul o deschizătură care să aibă lățimea dată c, o lungime oarecare h și să fie așezată simetric dealungul axei longitudinale. Să se determine lungimea h, astfel încât:

1) centrul de greutate al suprafeței rămase să fie cât mai apropiat de marginea LM a scândurii, 2) centrul de greutate să fie chiar pe marginea AB a deschizăturii.



La problema 248

Răspuns: In ambele cazuri $h = \frac{a}{c}\left[b - \sqrt{b\ (b - c)}\right]$.

249. O figură (suprafață) plană dată este împărțită în trei părți, care au centrele de greutate în punctele C_1, C_2 și C_3. In ce caz centrul de greutate al întregei figuri date va coincide cu centrul de greutate al suprafeței triunghiului C_1, C_2, C_3?

Răspuns: Când suprafețele celor trei părți, în care este împărțită figura, sunt egale.

250. O placă rotundă omogenă se află în echilibru, fiind sprijinită în centrul O. In care puncte A_1, A_2, A_3, ale circumferinței trebue așezate trei sarcini diferite, cu greutățile P_1, P_2, P_3, pentru ca placa să-și păstreze echilibrul?

Răspuns: Unghiurile $A_1\,OA_2$, $A_2\,OA_3$, $A_3\,OA_1$ sunt aceleași ca și când forțele P_1, P_2, P_3, acționând după liniile OA_1, OA_2, OA_3, s'ar afla în echilibru.

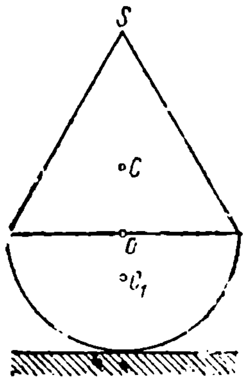
c) *Centrul de greutate al volumelor*

251. Pe o semisferă, care se sprijină cu suprafața convexă pe un plan orizontal, se așează un con circular, având raza bazei r egală cu raza semisferei. Pentru care valori ale înălțimii h a conului, echilibrul va fi stabil?

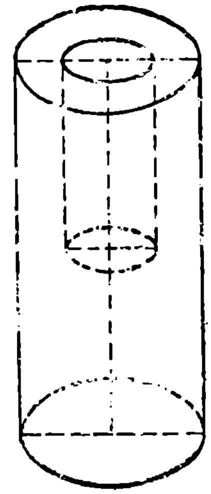
Răspuns: $h < r\sqrt{3}$.

252. Un corp constă dintr'un cilindru și un con, legate prin bazele lor egale. Inălțimea cilindrului este H, înălțimea conului h. Să se determine raportul $\frac{h}{H}$, astfel încât centrul de greutate al acestui corp să coincidă cu centrul bazei conului?

Răspuns : $\frac{h}{H} = \sqrt{6}$.



La problema 251



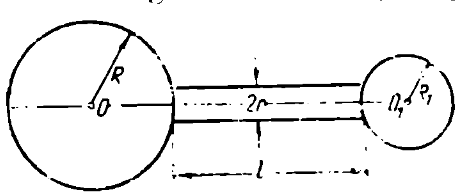
La problema 254

253. Să se arate că distanța între centrul de greutate al volumului unui segment de sferă și centrul sferei este egală cu $\frac{\pi d^4}{64v}$, unde d este diametrul bazei segmentului și v volumul segmentului.

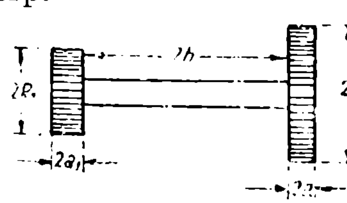
254. Dintr'un cilindru rotund cu raza bazei R și înălțimea H se taie un cilindru, care are axa comună și baza în același plan cu una din bazele cilindrului dat iar raza $r = \frac{1}{2} R$ și înălțimea $h = \frac{1}{2} H$. Să se afle poziția centrului de greutate al porțiunii rămase.

Răspuns : Centrul de greutate se află pe axa de simetrie la distanța $\frac{13}{28} H$ de baza inferioară a cilindrului.

255. Un corp omogen constă dintr'un cilindru cu raza bazei $r = 5$ cm și înălțimea $l = 30$ cm și două sfere fixate de el, cu razele $R = 13$ cm și $R_1 = 7\frac{1}{4}$ cm. Să se determine poziția centrului de greutate al acestui corp.



La problema 255



La problema 256

Răspuns : Centrul de greutate se află pe axa OO_1 la distanța 10,37 cm de punctul O.

256. Un corp omogen constă din două șaibe cilindrice cu razele R și R_1 și înălțimile $2a$ și $2a_1$, care sunt fixate la capetele unui arbore cilindric cu raza r, distanța între șaibe fiind $2h$. Să se afle poziția centrului de greutate al acestui corp.

Răspuns : Distanța x între centrul de greutate căutat și mijlocul intervalului între șaibe este dată de :

$$x = \frac{a(a+h)R^2 - a_1(a_1+h)R_1^2}{aR^2 + a_1R_1^2 + hr^2}.$$

257. Să se demonstreze că centrul de greutate al unui trunchi de piramidă se află pe dreapta care unește centrul de greutate al bazei inferioare cu cel al bazei superioare, la distanța

$$z = \frac{H}{4} \cdot \frac{S + 2\sqrt{Ss} + 3s}{S + \sqrt{Ss} + s}$$

de baza inferioară, S fiind aria bazei inferioare, s aria bazei superioare și H înălțimea piramidei.

258. Să se determine distanța dela centrul de greutate al unui trunchi de con la baza inferioară, știind că razele bazelor sunt R și r, iar înălțimea lui este H.

Răspuns :

$$z = \frac{H}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

259. Se dă un sector sferic cu raza R. Să se determine înălțimea h a segmentului său, astfel ca distanța între centrul de greutate al sectorului și centrul sferei să fie egală cu $\frac{1}{n} R$.

Răspuns : $h = 2R \dfrac{3n-4}{3n}$.

260. Dintr'un trunchi de con, cu razele bazelor R și r și înălțimea H, se taie un cilindru circular cu raza ρ care are axa comună cu conul și aceeași înălțime H. Să se afle distanța dela centrul de greutate al corpului rămas la baza inferioară a trunchiului de con.

Răspuns : $z = H \dfrac{R^2 + 2Rr + 3r^2 - 6\rho^2}{4(R^2 + Rr + r^2 - 3\rho^2)}$.

261. Prin centrul O al unei sfere cu raza R se duc trei plane de coordonate perpendiculare între ele. Să se determine coordonatele și distanța r dela punctul O la centrul de greutate al volumului, cuprins intre aceste trei plane și suprafața sferei.

Răspuns : $x = y = z = \frac{3}{8}R, \quad r = \frac{3\sqrt{3}}{8}R.$

262. Să se afle prin teorema lui Guldin, volumul și suprafața unei zone sferice simetrice, având înălțimea h, știind că raza sferei este R, iar raza bazelor zonei este r.

Răspuns : $v = \frac{1}{6}\pi h\,(6r^2 + h^2), \quad s = 2\pi hR.$

263. Să se afle prin teorema lui Guldin, volumul corpului, format prin rotația unui triunghi dreptunghic, care are catetele a și b în jurul ipotenuzei sale c.

Răspuns : $v = \frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{c}.$

264. Să se determine poziția centrului de greutate al unui corp, care constă din două conuri, care au baza comună cu raza R și înălțimile h_1 și h_2.

Răspuns : Centrul de greutate se află pe axa de simetrie, la distanța $\frac{h_1 - h_2}{4}$ dela centrul O al bazei conurilor.

§ 10. Firul flexibil inextensibil

1. Dacă asupra unui fir flexibil inextensibil, fixat la capetele sale A și B, acționează forțe distribuite continuu pe toată lungimea firului, el ia în poziția de echilibru, forma unei anumite curbe (fig. 18). In fiecare punct firul este supus tensiunii $\overline{T}$, dirijată pe tangenta la această curbă. Dacă forța, raportată la unitatea de lungime a firului va fi într'un punct dat M egală cu $\overline{F}$, ecuația de echilibru a firului, în forma sa vectorială, va fi :

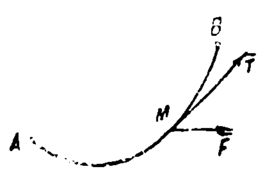


Fig. 18

$$\frac{d\overline{T}}{ds} + \overline{F} = 0, \tag{1}$$

sau

$$\frac{dT}{ds}\overline{\tau}^0 + \frac{T}{\rho}\overline{n}^0 + \overline{F} = 0, \tag{1'}$$

$\overline{\tau}^0$ și $\overline{n}^0$ fiind vectorii unitari ai direcțiilor tangentei și normalei principale în punctul M, iar ρ raza de curbură în acest punct. In proiecții pe axele de coordonate, aceste ecuații capătă forma

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + F_x = 0, \text{ etc.} \tag{2}$$

sau

$$\frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + T\frac{d^2x}{ds^2} + F_x = 0, \text{ etc.} \tag{2'}$$

Proiectând ecuaţia vectorială (1') pe tangentă, normala principală şi binormală, se obţin ecuaţiile de echilibru ale firului în forma naturală

$$\frac{dT}{ds} + F_\tau = 0, \tag{3}$$

$$\frac{T}{\rho} + F_n = 0, \tag{4}$$

$$F_b = 0. \tag{5}$$

Din ecuaţiile (5) se vede, că, în poziţia de echilibru, firul se aşează astfel, încât forţa $\overline{F}$ se află în planul osculator.

2. Dacă $\overline{F}$ este o forţă centrală, adică linia ei de acţiune pentru oricare punct al firului, trece printr'un punct fix, atunci firul se aşează în poziţia de echilibru în forma unei curbe plane. Dacă forţa $\overline{F}$ este derivata potenţialului U, adică $\overline{F}$ = grad U, ecuaţia (1) dă integrala scalară

$$T + U = \text{const.} \tag{6}$$

3. Dacă direcţia forţei $\overline{F}$ este constantă firul ia, în poziţia de echilibru forma unei curbe plane, al cărei plan este paralel cu $\overline{F}$; în afară de aceasta, proiecţia tensiunii firului pe direcţia perpendiculară pe forţă este o mărime constantă pentru toate punctele firului.

4. Dacă firul se află în echilibru într'un câmp gravitaţional omogen (fix greu) atunci $F = \gamma$, γ fiind greutatea raportată la unitatea de lungime în punctul dat.

Dacă firul este omogen şi suprafaţa secţiunii este aceeaşi în toate punctele, atunci γ = const pentru toate punctele. In cazul acesta, orientând axa y vertical în sus (fig. 19) ecuaţiile de echilibru ale firului (2) capătă forma

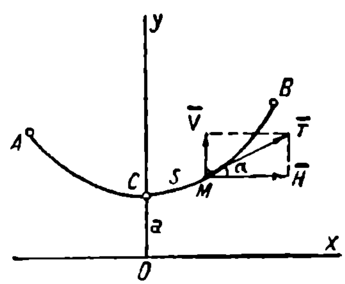


Fig. 19

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \gamma. \tag{7}$$

Descompunând tensiunea $\overline{T}$ a firului în componentele orizontală şi verticală $\overline{H}$ şi $\overline{V}$ încât

$$\overline{T} = \overline{H} + \overline{V},$$

iar

$$H = T\cos\alpha = T\frac{dx}{ds}, \quad V = T\sin\alpha = T\frac{dy}{ds}, \tag{8}$$

ecuaţiile (7) pot fi scrise în forma

$$\frac{dH}{ds} = 0, \quad \frac{dV}{ds} = \gamma, \tag{9}$$

de unde

$$H = \text{const}, \quad V = \gamma s + c, \tag{10}$$

adică proiecţia orizontală a tensiunii firului este constantă în toate punctele (comp. Nr. 3).

In cazul acesta, în poziţia de echilibru, firul ia forma lănţişorului, a cărui ecuaţie, raportată la sistemul de coordonate din fig. 19, este

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \text{ sau } y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \tag{11}$$

în care

$$a = \frac{H}{\gamma} = OC \tag{12}$$

este o mărime constantă liniară (parametrul lănţişorului). Dacă săgeata firului este suficient de mică, lănţişorul poate fi reprezentat cu aproximaţie, printr'o parabolă, a cărei ecuaţie este

$$y = a + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}. \tag{13}$$

Ecuaţia a doua (10) dă posibilitatea să se determine proiecţia verticală a tensiunii $\overline{T}$ şi anume: calculând lungimea s a firului, dela punctul lui cel mai jos C (adică, dacă $s = CM$), atunci în baza faptului că în acest punct $V = 0$ şi $s = 0$ şi din constanta arbitrară $c = 0$ rezultă

$$V = \gamma s \tag{14}$$

adică componenta verticală V a tensiunii este egală cu greutatea porţiunii CM a firului. Pe baza ecuaţiilor (8):

$$\left.\begin{aligned} H &= V \operatorname{ctg} \alpha = \gamma s \operatorname{ctg} \alpha, \\ T &= H\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = H \sec\alpha = \frac{\gamma s}{\sin \alpha} \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Lui T i se poate da altă expresie. Intrucât din (11) rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

urmează

$$T = H\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}} = H \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

sau ţinând seama de (11) şi (12)

$$T = \gamma y, \tag{16}$$

adică tensiunea în fiecare punct al firului este egală cu greutatea porţiunii de fir, a cărei lungime este egală cu ordonata lănţişorului.

265. Un lanţ omogen de greutate Q este atârnat pe două cârlige A şi B, aflate pe aceeaşi orizontală şi fixate în pereți verticali. Cunoscând unghiul α, format de tangenta la lănțișor în punctul B cu orizontala, să se determine forța care tinde să scoată cârligul B din perete.

Răspuns : $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\sin \alpha}$.

266. Un lanț greu omogen de lungime $2l$ și greutate Q este atârnat de capete în două puncte, situate pe aceeași orizontală. Cunoscând săgeata f, să se determine tensiunea la capete.

Răspuns : $T = \frac{l^2 + f^2}{4lf} Q$.

267. Un lanț greu omogen de lungime $2l$ este atârnat de capete în două puncte A și B, situate pe aceeași orizontală. Unghiul dintre tangenta în punctul B și orizontală este de 45°. Să se afle săgeata lanțului.

Răspuns : $f = (\sqrt{2} - 1)\, l$.

268. Un fir greu omogen de lungime l este atârnat de capete în două puncte A și B care nu se află pe aceeași orizontală, unghiurile dintre tangentele la fir duse în aceste puncte și verticala sunt egale cu α respectiv β. Să se afle diferența de înălțime a punctelor A și B.

Răspuns : $\dfrac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} l$.

269. Un lanț având lungimea $l = 33$ m, este atârnat în două puncte situate pe aceeași orizontală: distanța între aceste puncte este $d = 32{,}4$ m. Să se arate, că tensiunea în punctul cel mai de jos al lanțului este aproximativ de 1,5 ori mai mare decât greutatea lanțului.

270. La ce distanță trebue alese punctele de suspensie ale unui lanț greu omogen de lungime $2\,l$, situate pe aceeași orizontală, pentru ca tensiunea lanțului în fiecare din aceste puncte să fie egală cu greutatea întregului lanț? Să se afle deasemenea unghiul α dintre tangenta la lanț și orizontală, în punctele de atârnare.

Răspuns : $d = l\sqrt{3}\, \ln 3$; $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

271. Un lanț omogen de greutate Q este atârnat în două puncte A și B. Tensiunea lanțului în punctul ei cel mai de jos C are o valoare dată H. Porțiunea AC a lanțului are lungimea l_1, iar porțiunea CB lungimea l_2. Să se determine coordonatele punctelor A și B, presupunând că axa y trece prin punctul C, iar axa x coincide cu baza lănțișorului ACB.

$$\textit{Răspuns}: x_A = \frac{H(l_1+l_2)}{Q}\ln\frac{\sqrt{l_1^2Q^2+(l_1+l_2)^2H^2}-l_1Q}{H(l_1+l_2)},$$

$$y_A = \sqrt{l_1^2+\frac{H^2(l_1+l_2)^2}{Q^2}},$$

$$x_B = \frac{H(l_1+l_2)}{Q}\ln\frac{\sqrt{l_2^2Q^2+(l_1+l_2)^2H^2}+l_2Q}{H(l_1+l_2)}.$$

$$y_B = \sqrt{l_2^2+\frac{H^2(l_1+l_2)^2}{Q^2}}.$$

272. Un lanț omogen de lungime $2l$ este atârnat în două puncte A și B, situate pe aceeași orizontală. Greutatea unității de lungime a lanțului este egală cu q. In punctul de mijloc C al lanțului este atârnată o sarcină de greutate P, distanța punctului C la linia AB fiind h.

Să se determine: 1) tensiunile T_1 și T_2 în punctele C și B; 2) unghiul φ dintre tangentele, duse în C la lănțișoarele AC și CB; 3) parametrul a al lănțișoarelor AC și CB.

$$\textit{Răspuns}: T_1 = \frac{Pl+q(l^2-h^2)}{2h},\quad T_2 = \frac{Pl+q(l^2+h^2)}{2h},$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{Ph}{Pl+q(l^2-h^2)},$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{l^2}{h^2}-1\right)\left(\frac{P}{q}+l+h\right)\left(\frac{P}{q}+l-h\right)}.$$

273. Un lanț greu omogen de lungime l este atârnat cu capetele sale de o bară fixă orizontală prin intermediul a două inele mici, care pot aluneca, cu frecare, pe bară. Cunoscând unghiul de frecare φ, să se determine distanța d între inele pentru care este posibil echilibrul lanțului.

$$\textit{Răspuns}: d \leqslant l \operatorname{tg}\varphi \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

274. Un fir omogen greu este trecut peste doi scripeți mici ideali, situați la același nivel, la distanța a unul de altul.

In felul acesta capetele firului atârnă liber. Să se afle lungimea minimă a firului pentru care este posibil echilibrul.

Răspuns : $l = ae$, e fiind baza logaritmilor naturali.

275. Un fir greu, neomogen este atârnat în două puncte. Să se deducă următoarea formulă pentru raza de curbură a firului

$$\rho = \frac{T^2}{\gamma g H},$$

în care T este tensiunea într'un punct dat al firului, γ densitatea liniară a firului în acelaşi punct şi H tensiunea în punctul cel mai de jos al firului

276. Un fir greu, neomogen este atârnat în două puncte. Să se determine legea variaţiei greutăţii specifice pe fir, astfel ca el să capete forma unui arc de cerc cu raza R. Greutatea specifică a firului în punctul cel mai de jos este γ_0. Să se afle deasemenea tensiunea firului într'un punct oarecare al lui.

Răspuns : $\gamma = \dfrac{\gamma_0}{\cos^2\left(\dfrac{s}{R}\right)}$, $\quad T = \dfrac{\gamma_0 g R}{\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)}$,

în care s este lungimea arcului de fir, socotit dela punctul cel mai de jos.

277. Un fir omogen, cu greutatea specifică variabilă se află în echilibru în câmpul forţei de gravitate. Variaţia densităţii dealungul firului este dată de ecuaţia $\gamma = f(s)$, unde s este arcul firului. Să se arate, că ecuaţia diferenţială a figurii de echilibru poate fi prezentată în forma

$$\frac{dp}{ds} = A f(s),$$

în care

$$A = \text{const}, \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

278. Un fir neomogen, aflat în echilibru în câmpul forţei de gravitate are forma unei cicloide, exprimată prin ecuaţiile:

$$x = R\,(\varphi + \sin\varphi);$$
$$y = R\,(1 - \cos\varphi),$$

axa y având direcţia verticală. Să se afle legea variaţiei densității dealungul firului, când densitatea în punctul cel mai de jos este γ_0.

Răspuns: $\gamma = \gamma_0 \left[1 - \left(\frac{s}{4R}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$, s fiind lungimea arcului de cicloidă, calculat dela punctul cel mai de jos.

279. Un fir omogen, a cărui densitate liniară este γ, se află în echilibru într'un câmp de forțe de direcție constantă, paralelă cu axa y; mărimea tensiunii câmpului este o funcție oarecare de y, adică $Y = f(y)$. Să se afle forma funcției f, dacă firul are forma unei parabole cu ecuația

$$y = \frac{1}{4} + x^2,$$

și dacă tensiunea în punctul cel mai de jos al firului este egală cu T_0. Să se determine deasemenea tensiunea în fiecare punct al firului.

Răspuns: $Y = -\frac{A}{\sqrt{y}}$, în care $A = \frac{T_0}{\gamma}$; $T = 2T_0\sqrt{y}$.

280. Un fir omogen se află în echilibru în câmpul unei forțe centrale, care este funcție de distanța r la centru. Să se deducă formula următoare pentru mărimea forței

$$F = -C\frac{dh^{-1}}{dr},$$

în care $C = \text{const}$, iar h este lungimea perpendicularei, coborîtă din centrul forței pe tangenta la fir.

281. Aplicând formula din problema precedentă, să se arate următoarele: 1) dacă un fir omogen, care se află în echilibru în câmpul unei forțe centrale, are forma unui cerc, centrul forței fiind pe acest cerc, forța este invers proporțională cu cubul distanței; 2) dacă un fir omogen, aflat în echilibru în câmpul unei forțe centrale, are forma unei spirale logaritmice cu polul în centrul forței, forța este invers proporțională cu pătratul distanței.

282. Un fir omogen, cu densitatea liniară γ, se află în echilibru în câmpul unei forțe centrale de atracție, tensiunea câmpului având o valoare constantă k. Să se afle figura de echilibru a firului, știind că într'un punct al firului, aflat la distanța r_0 de centru, tensiunea firului este $T_0 = k\gamma r_0$.

Răspuns: hiperbolă echilateră.

CINEMATICA

I. CINEMATICA PUNCTULUI

§ 11. Mişcarea rectilinie uniformă şi uniform variată

Mişcarea uniformă a unui punct se numeşte o mişcare cu viteză constantă. Dacă mărimea vitezei într'o mişcare uniformă este egală cu v, atunci drumul s, parcurs în intervalul de timp t, va fi

$$s = vt. \tag{1}$$

Când punctul se mişcă astfel, încât mărimea vitezei sale variază proporţional cu timpul, mişcarea se numeşte mişcare uniform variată. In cazul acesta viteza punctului în momentu t va fi

$$v = v_0 + at, \tag{2}$$

în care v_0 este viteza iniţială, a acceleraţia mişcării uniform variate. Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{v}$ au aceeaşi direcţie mişcarea se numeşte uniform accelerată, dacă direcţiile lor sunt opuse, ea se numeşte uniform întârziată. Drumul s, parcurs de punct în intervalul de timp t într'o mişcare uniform variată se exprimă astfel:

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}. \tag{3}$$

Eliminând pe t din (2) şi (3) se obţine dependenţa dintre v şi s în forma

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,as}. \tag{4}$$

Pentru $v_0 = 0$, ultima formulă devine

$$v = \sqrt{2\,as}.$$

In cazul mişcării unui *corp* vitezele şi acceleraţiile punctelor sale sunt în general diferite; deaceea se poate spune că „un corp se mişcă uniform sau uniform accelerat'' numai în cazul când toate punctele corpului se mişcă cu viteze şi acceleraţii egale, adică atunci când corpul are o mişcare de *translaţie*, întrucât în acest caz mişcarea corpului se determină prin mişcarea unui punct oarecare al său.

283. Trenul Nr. 1 pleacă din staţia A la ora 3 şi soseşte în staţia B la ora 5 şi 30 minute; trenul Nr. 2 pleacă din staţia B la ora 4 şi 30 minute şi ajunge în staţia A la ora 7.

Distanța între A și B este de 75 km. Să se determine pe cale grafică locul și timpul întâlnirii trenurilor.

Răspuns: La ora 5, la distanța de 60 km de A.

284. Graficul unei mișcări uniforme este o dreaptă, care taie segmentul $a = -2$ cm pe axa timpilor, iar pe axa distanțelor segmentul $b = 5$ cm. Pe prima axă, 1 cm corespunde unui interval de timp de 1 oră; pe axa a doua, 1 cm corespunde distanței de 10 km. Să se afle viteza acestei mișcări.

Răspuns: $v = 25$ km/oră.

285. Loviturile unui ciocan se repetă la interval de n secunde. Să se determine intervalul de timp care separă două lovituri succesive ale ciocanului, pentru un om, care se depărtează de el cu viteza de v m/s, dacă viteza sunetului este egală cu c m/s? (Să se rezolve pe cale grafică).

Răspuns: $n_1 = n \dfrac{c}{c - v}$.

286. Mecanicii de tren folosesc uneori următoarea metodă pentru determinarea vitezei trenului; calculează numărul turelor roții conducătoare a locomotivei în timpul 9/8 D secunde, D fiind mărimea diametrului roții în decimetri. Acest număr este aproape egal cu viteza trenului, exprimată în km/oră. Să se demonstreze exactitatea acestui calcul.

287. Un avion sboară cu o viteză constantă orizontală v; din avion se observă printr'un tub un obiect fix A. Intr'un moment dat unghiul dintre tubul de observație și verticală este egal cu φ_1. După t secunde, același unghi devine egal cu φ_2. Să se afle înălțimea de sbor h.

Răspuns: $h = \dfrac{vt}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}$.

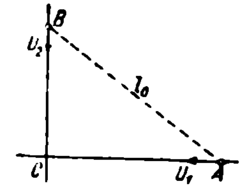
288. Două puncte pleacă simultan din A și B și se mișcă uniform în linie dreaptă. Viteza primului punct este dată ca mărime și orientare; viteza punctului al doilea este dată ca mărime. Să se afle (prin construcție) orientarea acestei viteze astfel încât punctele să se întâlnească.

(Problema poate avea una, două sau nicio soluție).

289. Două drumuri rectilinii se întretaie în punctul C sub un unghi drept. Pe drumuri se deplasează două mașini spre punctul C, plecând simultan din punctele A și B cu viteze constante v_1 și v_2. Să se afle momentul t_1, când distanța l între mașini va fi minimă și momentul t_2, când va fi din nou egală cu distanța inițială $AB = l_0$, dacă $AC = a$ și $BC = b$.

Răspuns: $t_1 = \dfrac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$; $t_2 = 2t_1$;

$$l_{\min} = \frac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$



La problema 289

290. Un proiectil, pornind dintr'o țeavă de 1 m lungime, are în momentul părăsirii țevii, viteza de 400 m/s. Presupunând, că mișcarea proiectilului în interiorul țevii este uniform accelerată, să se determine accelerația și durata acestei mișcări.

Răspuns: $t = 0{,}005$ s, accelerația este egală cu 80 000 m/s^2.

291. O piatră este aruncată într'un puț, fără viteză inițială; sunetul provocat de lovirea pietrei de pământ se aude după 7,7 s dela începutul căderii pietrei. Să se determine adâncimea puțului, dacă viteza sunetului este de 350 m/s, iar accelerația căderii $g = 10$ m/s^2.

Răspuns: 245 m.

292. O sferă, care se rostogolește într'un jghiab înclinat, parcurge 2 m în timp de trei secunde consecutive, iar în cele trei secunde următoare distanța de 4 m. Să se determine accelerația sferei.

Răspuns: 2/9 m/s^2.

293. O locomotivă merge cu viteza $v_0 = 15$ m/s. Pe un parcurs $s = 34$ m se dă contrapresiune, în urma căreia viteza locomotivei scade dela v_0 la $v = 5$ m/s. Să se afle în ce interval de timp s'a dat contrapresiune.

Răspuns: $t = \dfrac{2s}{v_0 + v} = 3{,}4$ s.

294. Să se determine viteza acțiunii unui declanșator fotografic, dacă în urma fotografierii unei sfere, care cade fără viteză inițială, în dreptul unei scări împărțită în cm, s'a produs pe negativ o dungă între diviziunile n_1 și n_2.

Răspuns: $t = \sqrt{\dfrac{2}{981}}\left(\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}\right) \approx \dfrac{1}{22}\left(\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}\right)$.

295. Un corp este aruncat vertical în sus, în gol, în câmpul forței gravitației. Să se scrie formula pentru drumul parcurs de corp în timp de t secunde calculate dela începutul mișcării.

Răspuns : Drumul parcurs de corp, până într'un moment cuprins în intervalul

$$0 < t \leqslant \frac{v_0}{g},$$

se determină cu ajutorul formulei

$$\sigma = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

iar pentru

$$t > \frac{v_0}{g}$$

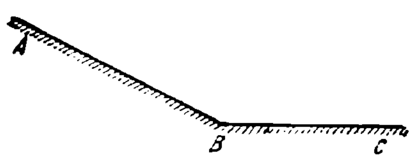
prin formula

$$\sigma = \frac{v_0^2}{g} - \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right).$$

296. Să se determine viteza inițială v_0 și înălțimea h la care se ridică un proiectil, care cade la pământ după T secunde dela tragerea executată vertical în sus (nu se va ține seama de rezistența aerului).

Răspuns : $v_0 = \frac{1}{2} g T$; $h = \frac{1}{8} g T^2$.

297. O săniuță pornește din punctul A fără viteză inițială și alunecă uniform accelerat pe dealul AB, apoi uniform întârziat pe un plan orizontal, până la oprire în punctul C. Cunoscând lungimea $AB = s_1$, distanța $BC = s_2$ și timpul t, în care săniuța parcurge tot drumul ABC, să se afle accelerația a_1 și întârzierea a_2 la mișcarea săniuței pe AB și BC.



La problema 297

Răspuns : $a_1 = \frac{2(s_1 + s_2)^2}{s_1 t^2}$; $a_2 = \frac{2(s_1 + s_2)^2}{s_2 t^2}$.

298. Un corp cade în gol fără viteză inițială; după t_0 secunde dela începutul căderii un al doilea corp este aruncat deasemenea fără viteză inițială. In cât timp dela începutul căderii primului corp, distanța între cele două corpuri va fi de a metri?

Răspuns : $t = \frac{t_0}{2} + \frac{a}{gt_0}$.

299. Un corp este aruncat, în gol, vertical în sus, cu viteza inițială v_0; după $t_0 < \frac{2v_0}{g}$ s dela începutul mișcării lui, un al doilea corp este aruncat în sus cu aceeași viteză inițială v_0. După câte secunde dela începutul mișcării primului corp și la ce distanță de poziția lui inițială se vor întâlni cele două corpuri?

Răspuns: $t = \frac{1}{2} t_0 + \frac{v_0}{g}$; $h = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{4} g t_0^2\right)$.

300. Două corpuri, aflate în momentul inițial la distanța de 100 m, se mișcă unul spre celălalt: primul în mod uniform cu viteza $v_1 = 3$ m/s, al doilea uniform accelerat cu viteza inițială $v_0 = 7$ m/s și accelerația $a = 4$ m/s². Să se afle locul și timpul întâlnirii acestor corpuri.

Răspuns: După 5 secunde la distanța de 15 m de poziția inițială a primului corp.

301. Două puncte se mișcă în linie dreaptă unul spre celălalt cu accelerațiile $a_1 = 6$ m/s² și $a_2 = 4$ m/s² și cu vitezele inițiale $v_{01} = 10$ m/s și $v_{02} = 15$ m/s. Distanța inițială între ele este de 750 m. După cât timp se vor întâlni?

Răspuns: După 10 s.

302. Două puncte se mișcă pe o linie dreaptă în același sens, având accelerațiile a_1 și a_2 și vitezele inițiale v_{01} și v_{02}: distanța inițială între puncte este s. După cât timp vor coincide punctele? Câte soluții poate avea problema?

Răspuns: Timpul căutat t se află din ecuația

$$(a_1 - a_2)\, t^2 + 2\,(v_1 - v_2)\, t - 2s = 0.$$

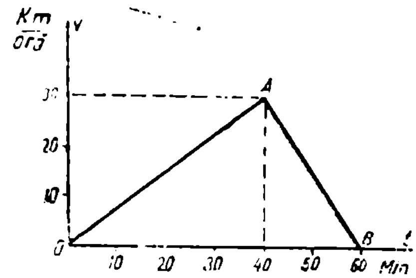
Pentru $a_1 > a_2$ este o singură soluție; pentru $a_1 < a_2$ și $v_1 < v_2$ punctele nu vor coincide niciodată; pentru $a_1 < a_2$, $v_1 > v_2$ și $(v_1 - v_2)^2 + 2s\,(a_1 - a_2) > 0$ problema are două soluții.

303. Linia frântă OAB reprezintă o diagramă de viteză. Să se determine din această diagramă, drumul parcurs în intervalul de timp dela $t = 0$ la $t = 60$ minute.

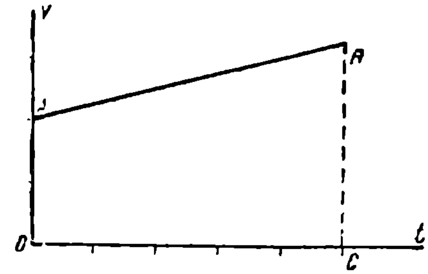
Răspuns: 15 km.

304. Diagrama de viteză a unei mișcări uniform variată este prezentată pe figură prin dreapta AB; $OA = 2$ cm, $OC = 5$ cm și $CB = 3\,^1\!/_4$ cm. Pe axa absciselor 1 cm reprezintă un interval de timp de 10 minute, iar pe axa ordonatelor 1 cm reprezintă o viteză de 1 km/minut. Să se determine accelerația acestei mișcări în m/s^2.

Răspuns: $\frac{1}{144}$ m/s^2.



La problema 303



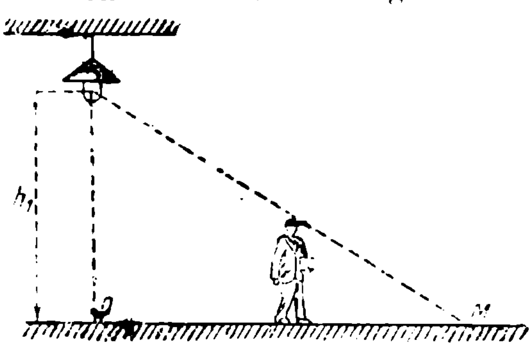
La problema 304

305. Două stații de tramvai se află la distanța de 400 m. In timpul primelor 10 secunde dela pornire vagonul se mișcă uniform accelerat; apoi el merge uniform cu 36 km/oră; ultimele 10 secunde, înainte de oprire, vagonul se mișcă uniform întârziat.

Să se construiască graficul vitezei vagonului și să se determine viteza lui medie.

Răspuns: $v_m = 8$ m/s.

306. Un om de înălțimea h_2 m trece cu viteza constantă c sub un felinar, care se află la înălțimea h_1 m deasupra pământului. Să se afle, cu ce viteză v se mișcă pe pământ extremitatea M a umbrei omului.



La problema 306

Răspuns: $v = \frac{h_1}{h_1 - h_2}\, c$.

§ 12. Mișcarea rectilinie variată

Dacă un punct se deplasează pe o dreaptă după legea

$$x = \mathrm{f}(t), \tag{1}$$

valoarea algebrică a vitezei punctului se exprimă prin formula

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathrm{f}'(t), \tag{2}$$

iar valoarea algebrică a accelerației prin formula:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t). \qquad (3)$$

Graficele funcțiilor $x = f(t)$ și $v = f'(t)$ se numesc, respectiv, *diagrama mișcării* (sau curba distanțelor) și *diagrama vitezei* (sau curba vitezelor).

Accelerația punctului mai poate fi dată sub forma:

$$w = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}. \qquad (4)$$

Dacă punctul execută o oscilație rectilinie armonică după legea

$$x = a \sin(\omega t),$$

perioada oscilației este

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad (5)$$

iar frecvența

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (6)$$

307. Un punct se deplasează în linie dreaptă după legea: $x = 5t + 6t^2$. Să se afle viteza medie v^* a punctului în intervalul de timp dintre începutul secundei a 10-a și sfârșitul secundei a 12-a, precum și viteza lui adevărată în fiecare din aceste momente.

Răspuns: $v^* = 131$ m/s; $v_1 = 113$ m/s; $v_2 = 149$ m/s.

308. Un punct se mișcă în linie dreaptă după legea: $x = t^3 - 4t^2 + 10t + 1$. Să se afle viteza și accelerația lui în momentele: $t = 0$, $t = 1$, și $t = 2$. Să se determine deasemenea viteza minimă a punctului și să se construiască diagrama vitezei.

Răspuns: $v_0 = 10$; $v_1 = 5$; $v_2 = 6$; $v_{\min} = 4^2/_3$; $w_0 = -8$; $w_1 = -2$; $w_2 = 4$. Diagrama vitezei este o parabolă.

309. Diagrama vitezei este reprezentată prin primul sfert al unui cerc cu raza de 5 cm. Pe axa absciselor 1 cm reprezintă 20 s, pe axa ordonatelor 1 cm reprezintă 10 m/s. Să se determine drumul parcurs de corp până la oprire.

Răspuns: $s = 3926$ m.

310. Pentru o mișcare dată a unui corp, diagrama vitezelor este o parabolă cu axa verticală, îndreptată cu concavitatea în sus și trecând prin origine. Să se determine timpul în care corpul va parcurge un drum de mărime dată s_1 și viteza v_1 a corpului la sfârșitul drumului, dacă în momentul inițial, accelerația corpului este w_0, iar la sfârșitul drumului s_1 accelerația are mărimea w_1.

Răspuns : $t_1 = \sqrt{\dfrac{6\,s_1}{2\,w_0 + w_1}}$; $v_1 = \dfrac{w_0 + w_1}{2}\sqrt{\dfrac{6\,s_1}{2\,w_0 + w_1}}$.

311. Un punct se mișcă în linie dreaptă pe axa x; accelerația este proporțională cu abscisa lui, adică, $w = k^2 x$, unde k este un coeficient constant. Să se afle legea mișcării punctului știind că în momentul inițial $x = 0$ și $v = v_0$.

Răspuns : $x = \dfrac{v_0}{2k}(e^{kt} - e^{-kt})$.

312. Un punct se mișcă cu viteza variabilă $v = \mathrm{f}\,(t)$. Să se afle viteza lui medie în intervalul de timp dela t_1 la t_2.

Răspuns : $v^* = \dfrac{1}{t_2 - t_1} \cdot \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{f}\,(t)\,\mathrm{d}t$.

313. Un punct se mișcă în linie dreaptă cu accelerația variabilă negativă $w = -\,\mathrm{f}\,(t)$ și se oprește după T secunde dela începutul mișcării. Să se arate că mărimea drumului parcurs de punct se exprimă astfel:

$$s = \int_0^T t \cdot \mathrm{f}\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

314. Un punct execută o oscilație armonică după legea:

$$x = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right).$$

Pentru $x = x_1$ și $x = x_2$ viteza punctului este respectiv egală cu v_1 și v_2. Să se afle amplitudinea a și perioada T a acestei oscilații.

Răspuns : $a = \sqrt{\dfrac{v_2^2 x_1^2 - v_1^2 x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$.

315. Un punct se mișcă în linie dreaptă după legea $x = \dfrac{a}{2}\,(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$. Să se afle viteza și accelerația lui în funcție de x.

Răspuns : $v = \omega\sqrt{x^2 - a^2}$; $w = \omega^2\,x$.

316. Legea mișcării armonice a coliviei de mină, este exprimată prin formula următoare:

$$h = \frac{H}{2}(1 - \cos\varphi),$$

în care H este înălțimea totală la care se ridică colivia de mină, $\varphi = \sqrt{\frac{2a}{H}}\,t$, $a = \text{const}$. Să se determine viteza și accelerația coliviei în funcție de φ, precum și timpul de ridicare T a coliviei la înălțimea H.

Răspuns: $v = \sqrt{\frac{aH}{2}}\sin\varphi$; $w = a\cos\varphi$; $T = \pi\sqrt{\frac{H}{2a}}$.

317. Accelerația variabilă a unei colivii de mină în timpul mișcării accelerate, se exprimă prin formula următoare:

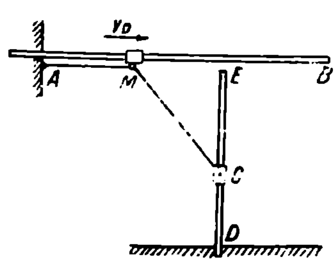
$$w = a\left(1 - \sin\frac{\pi t}{2t_1}\right),$$

în care a și t_1 sunt mărimi constante. Să se afle viteza coliviei de mină și drumul parcurs în t secunde după începutul mișcării, știind că viteza ei inițială este egală cu zero.

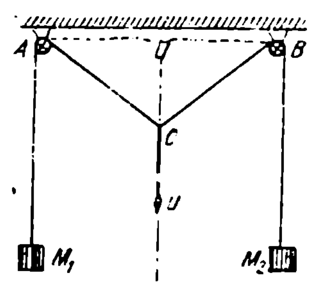
Răspuns: $v = a\left[t + \frac{2t_1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{2t_1} - 1\right)\right]$;

$$s = a\left[\frac{t^2}{2} + \frac{2t_1}{\pi}\left(\frac{2t_1}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2t_1} - t.\right)\right].$$

318. Un fir AMC este fixat cu un capăt de un punct fix A, apoi este trecut printr'un ochi al culisei M și legat cu celălalt capăt de culisa C. Culisa M se mișcă cu o viteză constantă



La problema 318



La problema 319

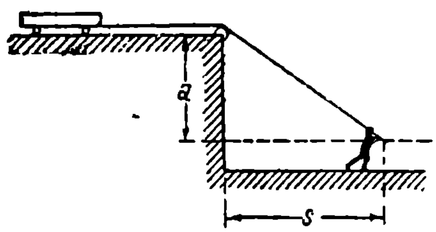
dată v_0, lungimea firului este l, segmentul AE este egal cu h și perpendicular pe DE. Să se afle viteza culisei C în funcție de distanța $AM = x$. Ce valoare are această viteză când culisa M trece prin punctul E?

$$Răspuns:\ |v_c| = \sqrt{\frac{l-h}{l+h-2x}}\cdot v_0.$$

319. La extremitățile unui fir, trecut peste doi scripeți A și B sunt atârnate greutățile M_1 și M_2. Punctul C al firului, care în momentul inițial coincide cu punctul D, este tras în jos, pe verticala DC, cu viteza constantă u. Să se afle viteza cu care se mișcă greutățile, dacă $AD = DB = a$.

$$Răspuns:\ v = \frac{u^2 t}{\sqrt{u^2 t^2 + a^2}}.$$

320. Un om aleargă pe pământ și trage cu o funie o căruță, care se află pe un teren orizontal. Să se afle viteza v și accelerația w a căruței, știind că viteza omului este constantă și egală cu u, iar diferența de înălțime între extremitatea funiei și căruță este egală cu a. Să se afle deasemenea viteza căruței pe cale geometrică (prin construcție).



La problema 320

$$Răspuns:\ v = \frac{s\,u}{\sqrt{a^2+s^2}};\quad w = \frac{u^2 a^2}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

s fiind lungimea drumului parcurs de om.

Construcția vitezei: viteza căruței este egală cu proiecția vectorului $\bar{u}$ pe direcția funiei.

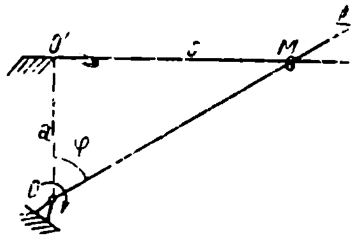
321. O bară subțire OL se rotește în jurul unui punct fix O, cu viteză unghiulară constantă ω și mișcă inelul M pe sârma fixă, aflată la distanța a de punctul O. Să se exprime viteza și accelerația inelului în funcție de distanța $O'M = S$.

$$Răspuns:\ v = a\,\omega + \frac{\omega}{a}s^2;\quad w = 2\,\omega^2 s\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right).$$

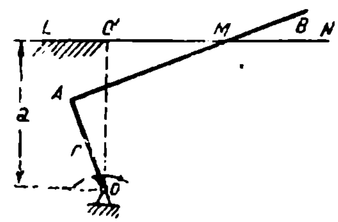
322. O bară OAB îndoită în formă de unghi drept, se rotește în planul său, în jurul punctului fix O, cu viteza unghiulară constantă ω. In același plan se află dreapta fixă LN, depărtată de punctul O la distanța $OO' = a$. Să se afle viteza și accelerația punctului M, de intersecție al barei cu dreapta LN, știind, că $OA = r$.

Răspuns: $v = \omega \dfrac{a - r\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$; $w = \omega^2 \dfrac{2a\cos\varphi - r(1 + \cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi}$.

în care φ este unghiul AOO'.



La problema 321

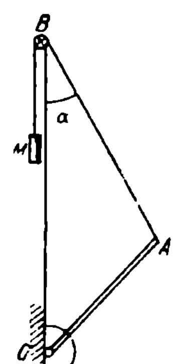


La problema 322

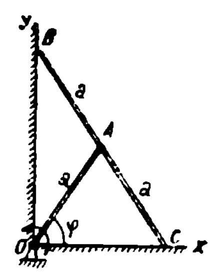
323. Ecuația mișcării rectilinii a unui punct, care execută o oscilație amortisată este de forma: $x = a\, e^{-nt} \cdot \sin(kt + \alpha)$. Să se arate, că între abscisa x, viteza v și accelerația w a acestui punct, există relația următoare:

$$w + 2nv + (k^2 + n^2)\, x = 0.$$

324. Bara OA se rotește în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară ω. La extremitatea A a barei este legat un fir trecut peste un scripete mic B, fir care poartă la extremitatea liberă greutatea M. Să se arate că viteza greutății este dată de formula $v = h\,\omega \sin\alpha$, în care $h = OB$ și $\alpha = \sphericalangle OBA$.



La problema 324



La problema 325

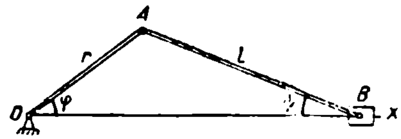
325. Manivela OA se rotește în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară constantă ω și pune în mișcare bara BC cu care este legată printr'o articulație în punctul A. Extremitățile C și B ale barei alunecă pe două drepte fixe Ox și Oy. Să se determine viteza și accelerația punctelor B și C în funcție de unghiul de rotire φ al manivelei, dacă

$$OA = BA = AC = a.$$

Răspuns: $v_C = -2a\,\omega \sin\varphi$; $w_C = -2a\,\omega^2 \cos\varphi$.

$v_B = 2a\,\omega\cos\varphi$; $w_B = -2a\,\omega^2 \sin\varphi$.

326. Manivela $OA = r$ se rotește uniform în jurul unui punct fix O și face o învârtitură în T secunde. Prin intermediul bielei $AB = l$ ea pune în mișcare o culisă, astfel încât punctul B se deplasează pe dreapta Ox. Să se afle viteza culisei în funcție de unghiurile $AOB = \varphi$ și $ABO = \psi$.



La problema 326

Răspuns: $v = -r\omega \dfrac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}$, unde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (viteza unghiulară a manivelei).

327. In condițiile problemei precedente să se afle expresiile aproximative ale vitezei și accelerației culisei presupunând că raportul $\dfrac{r}{l}$ este mic și, prin urmare, unghiul ψ păstrează o valoare mică.

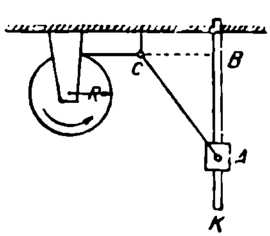
Indicație: Se va pune prin aproximație $\cos\psi = 1$.

Răspuns:

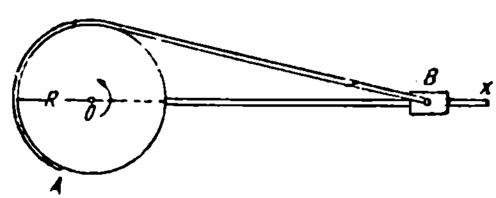
$$v = -r\omega\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right); \quad w = -r\omega^2\left(\cos\varphi + \frac{r}{l}\cos 2\varphi\right).$$

328. Culisa A este pusă în mișcare dealungul barei KB cu ajutorul firului AC, trecut peste o roată fixă C; acest fir se înfășoară pe roata, care se rotește cu o viteză unghiulară constantă ω. Să se afle viteza culisei în funcție de distanța $AB = x$, dacă $BC = a$, iar raza roții este R.

Răspuns: $v = R\omega \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}$.



La problema 328



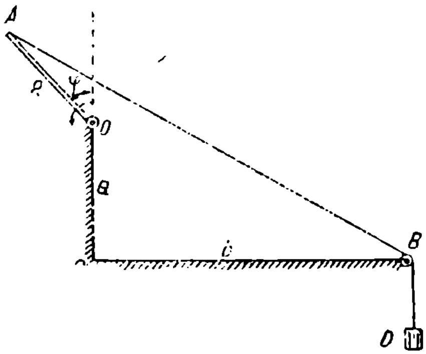
La problema 329

329. Culisa B este pusă în mișcare prin intermediul unui fir, care se înfășoară pe o șaibă de rază R. Să se afle viteza culisei în funcție de distanța $OB = x$, dacă viteza unghiulară a roții este ω.

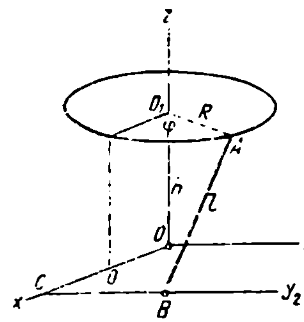
Răspuns: $v = R\omega \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - R^2}}$.

330. Bara OA se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul extremității sale O. De cealaltă extremitate este legat un fir, care trece peste un scripete mic B și poartă la extremitatea liberă o greutate D. Să se afle viteza cu care se mișcă greutatea, în funcție de unghiul φ, fiind date: $OA = R$, $OC = a$, $CB = b$.

Răspuns: $$v_D = \frac{b\cos\varphi - a\sin\varphi}{\sqrt{2R(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + a^2 + b^2 + R^2}}\,\omega R.$$



La problema 330



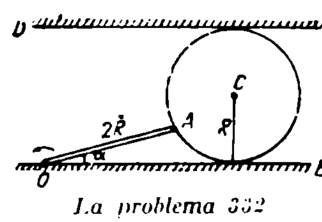
La problema 331

331. Punctele A și B sunt legate printr'o bară. Punctul A se mișcă pe un cerc cu centrul pe axa Oz, într'un plan paralel cu planul xOy; punctul B poate aluneca pe dreapta Cy_1, paralelă cu axa Oy. Să se afle viteza punctului B în funcție de unghiul φ, fiind date $OO_1 = h$, $OC = a$, $O_1A = R$, $AB = l$ și viteza v_A a punctului A.

Să se cerceteze cazul când $h = a$.

Răspuns: $$v_B = \left[\cos\varphi + \frac{(a - R\cos\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - h^2 - (a - R\cos\varphi)^2}}\right] v_A.$$

332. O bară OA de lungime $2R$ se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul extremității sale O. A doua extremitate A este fixată pe periferia unui disc de rază R, care poate aluneca liber între două glisiere OB și DE. Să se afle viteza centrului C al discului în funcție de $\sphericalangle AOB = \alpha$.



La problema 332

Răspuns: $$v = \omega R\left[2\sin\alpha + (2\sin\alpha - 1)\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin\alpha\,(1 - \sin\alpha)}}\right].$$

§ 13. Determinarea traectoriei, vitezei şi acceleraţiei unui punct din ecuaţiile mişcării, în coordonate carteziene

1. Mişcarea unui punct este cunoscută când sunt cunoscute coordonatele lui în orice moment, adică, dacă sunt date ecuaţiile:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{1}$$

în care expresiile din membrii doi sunt funcţii uniforme, continue şi diferenţiabile ale timpului.

Ecuaţiile (1) pot fi considerate ca ecuaţii ale traiectoriei punctului în forma parametrică, în care timpul t are rolul de parametru. Eliminând pe t între ecuaţiile (1) se obţin ecuaţiile traiectoriei de forma

$$\varphi(x, z) = 0, \quad \psi(y, z) = 0.$$

Când punctul se mişcă în planul (x, y), mişcarea lui este definită prin două ecuaţii:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \tag{2}$$

Eliminând pe t din ecuaţiile (2), se obţine ecuaţia traiectoriei

$$F(x, y) = 0.$$

2. Derivând coordonatele x, y, z în raport cu timpul t se obţin proiecţiile corespunzătoare ale vitezei

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \tag{3}$$

de unde

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

$$\cos(\bar{v}, x) = \frac{1}{v}\frac{dx}{dt}, \quad \cos(\bar{v}, y) = \frac{1}{v}\frac{dy}{dt}, \quad \cos(\bar{v}, z) = \frac{1}{v}\frac{dz}{dt}.$$

Ridicând la pătrat ecuaţiile (3) şi adunându-le se obţine

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2},$$

de unde

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right|, \tag{4}$$

în care ds este elementul de arc al traiectoriei. Din ecuaţiile (3) rezultă, că orientarea vitezei coincide cu direcţia elementului de arc al traiectoriei, adică viteza punctului este orientată după tangenta la traiectorie.

3. Derivând de două ori coordonatele în raport cu timpul se obţin proiecţiile corespunzătoare ale acceleraţiei:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

$$\cos(\overline{w}, x) = \frac{1}{w}\frac{d^2x}{dt^2}; \quad \cos(\overline{w}, y) = \frac{1}{w}\frac{d^2y}{dt^2}; \quad \cos(\overline{w}, z) = \frac{1}{w}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

4. Dacă dintr'un punct oarecare O (pol) se duc vectori egali din punct de vedere geometric cu viteza punctului în mişcare, extremităţile acestor vectori vor descrie o curbă, care se numeşte *hodograful* vitezei. Insemnând cu ξ, η, ζ coordonatele punctelor hodografului, atunci

$$\xi = v_x = \frac{dx}{dt} = f_1'(t), \quad \eta = v_y = \frac{dy}{dt} = f_2'(t), \quad \zeta = v_z = \frac{dz}{dt} = f_3'(t).$$

Eliminând pe t din aceste ecuaţii se obţin ecuaţiile hodografului în forma

$$\Phi(\xi, \eta) = 0, \quad \Psi(\eta, \zeta) = 0.$$

Observaţie. In toate problemele din acest paragraf unitatea de măsură pentru lungimi este metrul, iar pentru timp secunda, în afară de cazurile în care se dau alte indicaţii.

333. In problemele următoare să se afle traiectoria, viteza şi acceleraţia din ecuaţiile de mişcare date:

1) $x = 15\, t^2$, $y = 4 - 20\, t^2$;

să se afle deasemenea intervalul de timp T, în care punctul va parcurge porţiunea din traectorie, cuprinsă între axele de coordonate.

Răspuns: Traiectoria $4x + 3y - 12 = 0$; $v = 50\, t$.
$\cos(\overline{v}, x) = \frac{3}{5}$, $\cos(\overline{v}, y) = -\frac{4}{5}$; $w = 50$, $\cos(\overline{w}, x) = \frac{3}{5}$,

$\cos(\overline{w}, y) = -\frac{4}{5}$, $T = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

2) $x = \frac{1}{3}\, t^3$, $y = \frac{2}{3}\, t^3 + 2$.

Răspuns: Traiectoria $2x - y + 2 = 0$; $v = \sqrt{5}\, t^2$, $\cos(\overline{v}, x) = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos(\overline{v}, y) = \frac{2}{5}\sqrt{5}$; $w = 2\sqrt{5}\, t\, \cos(\overline{w}, x) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\overline{w}, y) = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

3) $x = 2\, e^t - 1$, $y = 2\, e^t + 1$.

Răspuns: Traiectoria $x-y+2=0$, $v=2\sqrt{2}\,e^t$.
$\cos(\overline{v},x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\overline{v},y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $w=2\sqrt{2}\,e^t$, $\cos(\overline{w},x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos(w,y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) $x=a\cos(bt)$, $y=c-a\cos(bt)$ $(a>0,\ b>0)$.

Răspuns: Traiectoria $x+y=c$; $v=ab\sqrt{2}\,|\sin(bt)|$;

$$\cos(\overline{v},x)=-\frac{\sin(bt)}{\sqrt{2}\,|\sin(bt)|};\quad \cos(\overline{v},y)=\frac{\sin(bt)}{\sqrt{2}\,|\sin(bt)|};$$

$w=ab^2\sqrt{2}\,|\cos(bt)|$,

$$\cos(\overline{w},x)=-\frac{\cos(bt)}{\sqrt{2}\,|\cos(bt)|};\quad \cos(\overline{w},y)=\frac{\cos(bt)}{\sqrt{2}\,|\cos(bt)|}.$$

5) $x=a\cos^2 t$, $y=b\sin^2 t$, $(a>0,\ b>0)$.

Răspuns: Traiectoria $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $v=c\,|\sin 2t|$;

$w=2c\,|\cos 2t|$, în care $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Punctul execută o mișcare oscilatorie pe segmentul de traiectorie, cuprins între axele de coordonate.

6) $x=a\cos(\omega t)$, $y=a\sin(\omega t)$ $(a>0,\ \omega>0)$.

Cum se va modifica mișcarea punctului, dacă se pune:

$$x=a\sin(\omega t),\ y=a\cos(\omega t)?$$

Răspuns: Traiectoria este un cerc cu raza a și cu centrul în origine; mișcarea punctului va avea loc pe acest cerc în sens contrar mișcării acelor de ceasornic și are perioada $\frac{2\pi}{\omega}$. Viteza $v=a\,\omega$; accelerația $w=a\,\omega^2$ și orientată spre centrul cercului.

Modificând ecuațiile mișcării, se va obține aceeași traiectorie și perioadă, însă mișcarea punctului se produce în sensul mișcării acelor de ceasornic.

7) $x=a\cos(\omega t)$, $y=b\sin(\omega t)$ (a, b și ω sunt pozitive).

Să se afle și hodograful vitezei.

Răspuns: Traiectoria este elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Mişcarea punctului se produce în sens contrar mişcării acelor de ceasornic, şi are perioada $\frac{2\pi}{\omega}$. Viteza este

$$v = \frac{\omega}{ab}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2};$$

accelerația $w = \omega^2 r$ şi orientată spre centrul elipsei, r fiind modulul razei vectoare a punctului mobil dusă din origine.

Hodograful vitezei este elipsa $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \omega^2$.

8) $x = t^2 - 6\,t,\ y = 2{,}5\,t.$

Răspuns: Traiectoria este parabola $4y^2 - 60\,y - 25\,x = 0$ (axa parabolei este paralelă cu axa x); $v = \sqrt{4t^2 - 24t + 42{,}25}$; $w = 2$ (accelerația este paralelă cu axa x).

9) $x = ae^{kt},\ y = be^{-kt}.$

Răspuns: Traiectoria este hiperbola $xy = ab$; $v = kr$, r fiind modulul razei vectoare a punctului mobil; $w = k^2 r$ (accelerația are direcția razei vectoare).

10) $x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}),\ y = \frac{a}{2}(e^{kt} - e^{-kt}).$

Să se afle deasemenea hodograful mişcării.

Răspuns: Traiectoria este hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\quad v = \frac{k}{ab}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2};\quad w = k^2 r,$$

r fiind raza vectoare a punctului mobil; accelerația este orientată din centrul hiperbolei în direcția razei vectoare.

Hodograful vitezei este hiperbola $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = k^2$.

11) $x = at^3,\ y = bt^2$; să se afle şi hodograful vitezei.

Răspuns: Traiectoria este parabola semicubică

$$b^3x^2 = a^2y^3;\quad v = t\sqrt{9a^2t^2 + 4b^2},\quad \operatorname{tg}(v, x) = \frac{2b}{3\,at};$$

$$w = 2\sqrt{9a^2t^2 + b^4},\ \operatorname{tg}(w, x) = \frac{b}{3\,at}.$$

Hodograful vitezei este o parabolă.

12) $x = 2a\cos^2(kt)$, $y = a\sin(2kt)$.

Răspuns: Traiectoria este un cerc cu raza a, care trece prin origine și este tangent la axa y; $v = 2\,ka$; $w = 4k^2a$, accelerația este orientată pe direcția razei cercului spre centru.

13) $x = 2t^2$, $y = 3t^2$, $z = 4t^2$.

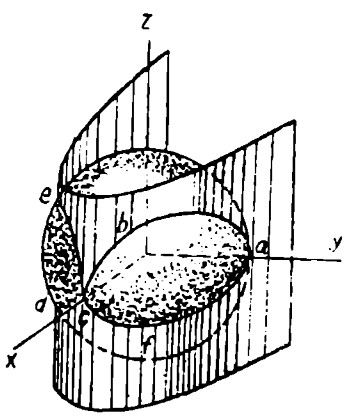
Răspuns: Mișcarea uniform accelerată pe dreapta $4y = 6x = 3z$, cu accelerația $w = 2\sqrt{29}$.

14) $x = 2\cos(3t)$, $y = 2\sin(3t)$, $z = 4t$.

Răspuns: Mișcarea uniformă cu viteza $v = 2\sqrt{13}$ pe o linie elicoidală, care se află pe suprafața unui cilindru circular cu raza $r = 2$, având axa z ca axă de rotație. Accelerația este $w = 18$; ea este perpendiculară pe axa z și o intersectează.

15) $x = R\sin^2(kt)$, $y = R\cos(kt)$, $z = \dfrac{R}{2}\sin(2kt)$.

Răspuns: Traiectoria are forma cifrei opt așezată pe o sferă cu raza R și reprezintă linia de intersecție a sferei cu cilindrul parabolic,



La problema 333 (15)

$$y^2 = R^2 - Rx$$

sau cu cilindrul circular

$$z^2 + x^2 - Rx = 0\,;$$

$$v = kR\sqrt{1 + \sin^2(kt)}\,;$$

$$w = k^2R\sqrt{1 + \cos^2(kt)}.$$

Punctul se deplasează pe traiectorie în sensul *abcdecfa*.

16) $x = a + \alpha\cdot f(t)$, $y = b + \beta\cdot f(t)$, $z = c + \gamma\cdot f(t)$.

Să se determine funcția $f(t)$ astfel, încât mișcarea să fie uniform variată.

Răspuns: Traiectoria este dreapta $\dfrac{x-a}{\alpha} = \dfrac{y-b}{\beta} = \dfrac{z-c}{\gamma}$;

$$v = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\, f'(t)\,; \quad w = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\, f''(t)\,;$$

mișcarea va fi uniform variată când $f(t)$ este un polinom de gradul al doilea.

334. Un punct se mișcă pe conica:

$$y^2 - 2mx - nx^2 = 0$$

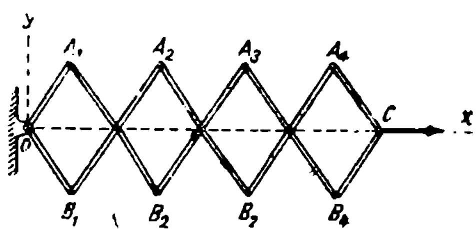
cu viteza c, constantă ca mărime. Să se afle proiecțiile vitezei acestui punct pe axele de coordonate.

Răspuns: $v_x = \pm \dfrac{cy}{\sqrt{y^2 + (m + nx)^2}}$, $v_y = v_x \dfrac{m + nx}{y}$.

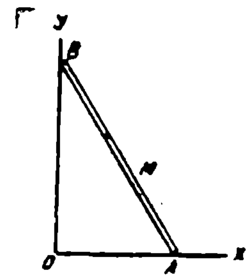
335. Pe figură este reprezentat un mecanism cu articulații, care constă din barele OA_1, OB_1, CA_4, CB_4, de lungimea a și din barele A_1B_2, B_1A_2, A_2B_3, B_2A_3, A_3B_4, B_3A_4 de lungime $2a$. Să se afle traiectoriile descrise de articulațiile A_1, A_2, A_3, A_4 când articulația C se mişcă dealungul axei x.

Răspuns: Elipsele $\dfrac{x^2}{(2n - 1)^2a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$,

n fiind numărul de ordine al articulației ($n=1, 2, 3, 4$).



La problema 335



La problema 336

336. Bara AB a unui elipsograf alunecă cu extremitățile ei A și B pe două drepte directoare Ox și Oy, astfel încât punctul B se deplasează cu viteză constantă c. Să se afle viteza și accelerația punctului M al barei, știind că $MA=a$, $MB=b$ și $\sphericalangle OBA=\varphi$.

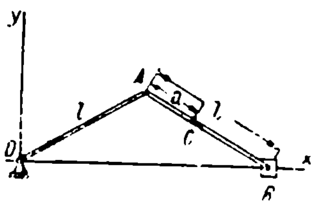
Răspuns: $v = \dfrac{c}{a+b}\sqrt{a^2+b^2\,\mathrm{ctg}^2\,\varphi}$; $w = \dfrac{b^4c^2}{(a+b)^2y^3}$.

337. Manivela OA se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unui punct fix O și pune în mișcare culisa B prin intermediul bielei AB, de care este legată printr'o articulație în punctul A. Să se determine traiectoria, viteza și accelerația unui punct C al bielei, dacă $OA=AB=l$ și $AC=a$.

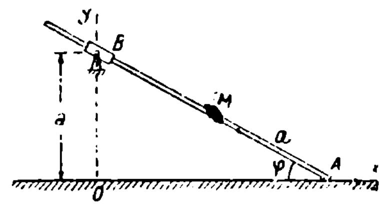
Răspuns: Traiectoria este $\dfrac{x^2}{(l+a)^2} + \dfrac{y^2}{(l-a)^2} = 1$; $v=\omega \cdot OC'$,

C' fiind punctul de pe bielă, simetric lui C față de punctul A; $w=\omega^2 \cdot OC$.

338. Extremitatea A a unei bare, alunecă pe o dreaptă fixă Ox cu viteza constantă c; bara trece printr'o culisă, care se rotește într'o articulație în jurul punctului fix B. Să se determine traiectoria, viteza și accelerația unui punct M al barei în funcție de unghiul φ dacă $AM = OB = a$.



La problema 337

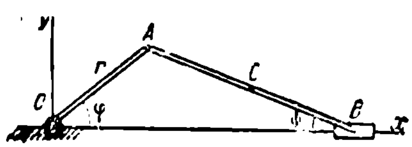


La problema 338

Răspuns: Traiectoria este $(y-a)^2(y^2-a^2)+x^2y^2=0$;

$$v = c\sqrt{1-2\sin^3\varphi+\sin^4\varphi};\quad w = \frac{c^2}{a}\sin^3\varphi\sqrt{1+3\cos^3\varphi}.$$

339. Manivela $OA = r$ se rotește în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară constantă ω. Prin intermediul bielei AB ea pune în mișcare o culisă astfel încât punctul B se mișcă pe dreapta Ox. Să se afle traiectoria punctului C al bielei, pentru care $AC = CB = a$. Să se determine deasemenea viteza acestui punct în funcție de unghiurile $\sphericalangle AOB = \varphi$ și $\sphericalangle ABO = \psi$.



La problema 339

Răspuns: Ecuația traiectoriei este: $4x^2(a^2-y^2)=(x^2+3y^2+$

$$+a^2-r^2)^2;\quad v = \frac{r\omega}{2\cos\psi}\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin\varphi\cdot\cos\psi\cdot\sin(\varphi+\psi)}.$$

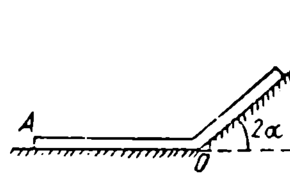
340. In condițiile problemei precedente să se afle expresia aproximativă a proiecțiilor vitezei și accelerației punctului C pe axele de coordonate, presupunând, că raportul $\frac{r}{2a}$ este mic și, prin urmare, că unghiul ψ rămâne mic, astfel că se poate pune $\operatorname{tg}\psi = \sin\psi$.

Răspuns: $v_x = -r\omega\left(\sin\varphi+\frac{r}{8a}\sin 2\varphi\right),\ v_y = \frac{1}{2}r\omega\cdot\cos\varphi;$

$$w_x = -r\omega^2\left(\cos\varphi+\frac{r}{4a}\cos 2\varphi\right),\quad w_y = -\frac{1}{2}r\omega^2\cdot\sin\varphi.$$

341. Un lanț omogen, de lungime l, se deplasează pe o dreaptă orizontală AO și apoi pe o dreaptă înclinată OB, care formează unghiul 2α cu prima dreaptă. Să se afle traiectoria centrului de greutate al lanțului.

Răspuns: Luând drept axe de coordonate bisectoarele unghiului 2α și a celui adiacent, ecuația traiectoriei căutate va fi:

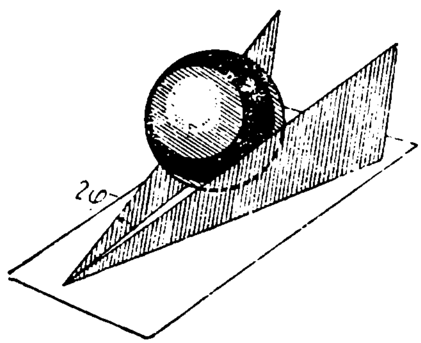


La problema 341

$$y = \frac{\sin\alpha}{l\cos^2\alpha}x^2 + \frac{l}{4}\sin\alpha,$$

adică ecuația unei parabole, înscrisă în unghiul AOB.

342. O sferă, de rază R, se rostogolește pe două drepte, care se taie sub unghiul 2φ și sunt egal înclinate față de orizontală. Să se afle traiectoria centrului sferei.



La problema 342

Răspuns: Un sfert al elipsei

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R^2}{\sin\varphi}\right)} + \frac{y^2}{R^2} = 1,$$

pentru care axa x este bisectoarea unghiului dintre dreptele date, axa y este perpendiculară pe planul acestor drepte, iar originea este în punctul lor de intersecție.

343. O tijă AB, de lungime $2a$, alunecă cu capătul B pe axa y și cu capătul A pe o curbă dată prin ecuația $y = f(x)$.

Să se afle traiectoria mijlocului tijei. Să se studieze cazurile particulare: a) când tija alunecă cu capătul A pe axa absciselor; *b*) când alunecă cu capătul A pe elipsa

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Răspuns: $y = f(2x) \pm \sqrt{a^2 - x^2}$.

Cazurile particulare: a) $x^2 + y^2 = a^2$; *b*) $y = 0$ sau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$$

344. Dreapta FM se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în planul unei elipse date, în jurul focarului F al acesteia.

Să se afle viteza punctului de intersecție M al acestei drepte cu elipsa.

Răspuns : $v = \frac{\omega r}{b}\sqrt{r(2a-r)}$, în care $r = FM$, iar a și b sunt semiaxele elipsei.

345. Un punct descrie o cicloidă cu viteza c, constantă ca mărime. Să se arate, că proiecția acestui punct pe axa y se mișcă cu o accelerație constantă. Ecuațiile cicloidei sunt :

$$x = R(\varphi - \sin\varphi), \quad y = R(1 - \cos\varphi).$$

Problema inversă : Un punct se mișcă pe o curbă cu viteza c constantă ca mărime. Proiecția punctului pe o dreaptă oarecare care o intersectează și se află în planul curbei, are accelerația constantă a. Să se afle ecuația curbei.

Răspuns : Luând dreapta dată ca axă x, iar punctul ei de intersecție cu curba drept originea unor axe rectangulare, se va afla că curba căutată este cicloida :

$$y = R \arccos\left(\frac{R-x}{R}\right) + \sqrt{x(2R-x)}$$

în care $R = \frac{c^2}{4a}$. Prin urmare, cercul generator are raza R și se rostogolește pe dreapta $x = 2R$.

§ 14. Determinarea traiectoriei, vitezei și accelerației unui punct din ecuațiile mișcării, în coordonate polare

Când mișcarea unui punct este dată prin ecuații în coordonate polare :

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t)$$

se obține prin eliminarea timpului t, ecuația traiectoriei în coordonate polare

$$F(r, \varphi) = 0.$$

Mărimea vitezei punctului se determină prin formula

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$$

în care $\dot{r}$ este proiecția vitezei pe direcția razei vectoare (viteză radială), iar $r\dot{\varphi}$ proiecția vitezei pe direcția perpendiculară pe raza vectoare (viteza transversală) ;

$\dot{\varphi}$ este viteza unghiulară de rotație a razei vectoare. Unghiul dintre viteză și raza vectoare se determină prin formula

$$\operatorname{tg}(\overline{v}, \overline{r}) = \frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{r d\varphi}{dr}.$$

Mărimea accelerației punctului se determină cu ajutorul formulei

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2},$$

în care $w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ (accelerația radială), $w_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$ (accelerație transversală).

Unghiul format de accelerație cu raza vectoare se determină cu ajutorul formulei

$$\operatorname{tg}(\overline{w}, \overline{r}) = \frac{w_\varphi}{w_r}.$$

Viteza areolară se numește derivata în raport cu timpul a suprafeței σ, descrisă de raza vectoare $\overline{r}$ a unui punct în timpul t, în care s'a rotit cu unghiul φ:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}.$$

346. In problemele următoare, unde sunt date ecuațiile de mișcare ale unui punct, să se afle traiectoria, viteza și accelerația mișcării respective.

1) $r = at, \quad \varphi = bt.$

Răspuns: Spirala lui Arhimede $r = \frac{a}{b}\varphi$; $v = a\sqrt{1+b^2t^2}$, $\operatorname{tg}(\overline{v}, \overline{r}) = bt = \varphi$; $w = ab\sqrt{4 + b^2t^2}$, $tg(\overline{w}, \overline{r}) = -\frac{2}{bt} = -\frac{2}{\varphi}$.

2) $r = at, \quad \varphi = \frac{b}{t}.$

Răspuns: Traiectoria este spirala hiperbolică $r = \frac{ab}{\varphi}$; $v = \frac{a}{t}\sqrt{b^2+t^2}$, $\operatorname{tg}(\overline{v}, \overline{r}) = -\frac{b}{t} = -\varphi$; $w = \frac{ab^2}{t^3}$, $\operatorname{tg}(\overline{w}, \overline{r}) = \pi$.

3) $r = e^{at}; \quad \varphi = bt.$

Răspuns: Traiectoria este spirala logaritmică $r = e^{\frac{a\varphi}{b}}$; $v = \sqrt{a^2+b^2}\cdot r$, $\operatorname{tg}(\overline{v}, \overline{r}) = \frac{b}{a} = \text{const}$; $w = (a^2+b^2)r$, $\operatorname{tg}(\overline{w}, \overline{r}) = \frac{2ab}{a^2-b^2} = \text{const}.$

4) $r = \sqrt{a(a+2ct)}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{2c}{a}}\, t - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2c}{a}}\, t\right).$

Răspuns: Mișcarea uniformă cu viteza c pe desfășurata unui cerc cu raza a, a cărei ecuație în coordonate polare are forma

$$\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right).$$

5) $r = r_0 (1 - at), \quad \varphi = \frac{at}{1 - at}.$

Răspuns: Traiectoria este spirala hiperbolică $r = \frac{r_0}{1+\varphi}$, a cărei asimptotă se află la distanța r_0 de pol. Unghiul dintre asimptotă și direcția pozitivă a axei polare este egal cu $\pi - 1$ (in radiani);

$$v = \frac{ar_0}{r}\sqrt{r_0^2 + r^2}, \quad \operatorname{tg}\,(\widehat{\bar{v}, \bar{r}}) = \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}} = -\,(1+\varphi); \quad w = \frac{a^2 \bar{r}_0^{\,4}}{\bar{r}^3}.$$

347. Se dau ecuațiile de mișcare ale unui punct:

$$y = bt, \quad \varphi = at.$$

Să se afle ecuațiile traiectoriei în coordonate polare și carteziene.

Răspuns: $r = \frac{b}{a}\frac{\varphi}{\sin\varphi}$; $x = y\,\operatorname{ctg}\left(\frac{a}{b}y\right)$; aceasta este ecuația unei cuadrice cu asimptota $y = \frac{b}{a}\pi$.

348. Un punct descrie o traiectorie plană; viteza radială a punctului este pozitivă și constantă, iar accelerația radială este negativă și invers proporțională cu cubul distanței la pol, adică:

$$v_r = c > 0, \quad w_r = -\frac{a^2}{r^3} \quad (a > 0).$$

Să se afle traiectoria și viteza areolară a punctului, știind că pentru t egal cu zero, $r = r_0$; $\varphi = \varphi_0$ și că $\dot{\varphi} > 0$.

Răspuns: $r = \frac{ar_0}{a - cr_0(\varphi - \varphi_0)}$; $\dot{\sigma} = \frac{a}{2} = \text{const.}$

349. Un punct descrie o traiectorie plană. Se știe că viteza areolară este proporțională cu modulul razei vectoare și că viteza radială este constantă, adică

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} ar, \quad v_r = b, \quad (a>0, \ b>0),$$

și că $\varphi=0$ și $r=r_0$ pentru $t=0$. Să se afle traiectoria punctului și ecuațiile mișcării.

Răspuns: Traiectoria este spirala logaritmică $r=r_0 e^{\frac{b}{a}\varphi}$; ecuațiile mișcării sunt

$$r = r_0 + bt, \quad \varphi = \frac{a}{b} \ln\left(\frac{b}{r_0} t + 1\right).$$

350. In mișcarea unui punct modulul vitezei este o mărime constantă, egală cu c, iar viteza unghiulară de rotație a razei vectoare este deasemenea constantă și egală cu ω_0. Să se afle ecuațiile mișcării și traiectoria punctului, când $r = 0$ pentru $\varphi = 0$.

Răspuns: Un cerc cu raza $\frac{c}{2\omega_0}$, tangent în pol la axa polară.

351. Să se demonstreze următoarea metodă de construcție a tangentei la spirala lui Arhimede (v. problema 346,1): se unește un punct mobil M cu polul O, se ridică din O o perpendiculară pe OM și pe această perpendiculară spre partea în care se rotește raza vectoare se măsoară un segment OA egal cu $\frac{a}{b}$. Dreapta dusă prin M, perpendicular pe MA este tangenta la spirală în punctul M.

352. Un punct descrie o elipsă. Folosind proprietatea că suma razelor vectoare, care unesc acest punct cu focarele elipsei, este o mărime constantă, să se arate că normala la elipsă împarte în părți egale unghiul dintre razele vectoare. Tot așa să se arate că tangenta la hiperbolă împarte în părți egale unghiul dintre razele vectoare, care unesc punctul de tangență cu focarele hiperbolei.

353. Un punct descrie o parabolă. Folosind proprietatea că distanțele lui la directoare și la focarul parabolei sunt mereu egale între ele, să se arate că tangenta la parabolă formează unghiuri egale cu raza vectoare și cu axa parabolei.

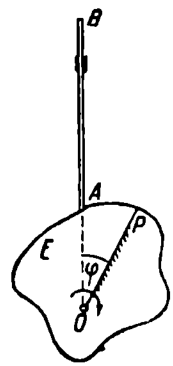
354. O bară rectilinie se rotește în jurul capătului ei fix, O, cu viteza unghiulară constantă ω_0. Dealungul barei alunecă o culisă cu viteza constantă v_0. Să se afle traiectoria și viteza culisei, dacă în momentul inițial (pentru $t = 0$) $r = 0$ și $\varphi = 0$.

Răspuns: $r = \frac{v_0}{\omega_0}\varphi$; $v = v_0\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}$.

355. O bară rectilinie se rotește în jurul capătului ei fix O, cu viteza unghiulară constantă ω_0; dealungul barei alunecă o culisă cu o viteză proporțională cu distanța culisei la axa de rotație, factorul de proporționalitate fiind k. Să se afle traiectoria și viteza culisei, știind că $r = r_0$ și $\varphi = 0$ pentru $t = 0$.

Răspuns: $r = r_0\, e^{\frac{k}{\omega_0}\varphi}$; $v = r\sqrt{k^2 + \omega_0^2}$.

356. Ecuația polară a profilului unui excentric OE raportată la axa polară OP, solidară cu excentricul, este



La problema 356

$$r = \mathrm{F}(\varphi).$$

Excentricul se rotește cu viteza unghiulară

$$\omega = \dot{\varphi} = \mathrm{F}_1(t)$$

în jurul punctului fix O și împinge tija AB, a cărei axă trece mereu prin punctul O. Să se afle viteza și accelerația tijei. Să se cerceteze cazul particular al unui excentric cu profil rectiliniu a cărui ecuație are forma

$$r = \mathrm{F}(\varphi) = \frac{a}{\cos\omega}\ (a > 0)$$

cu condiția, că $\omega = \text{const}$.

Răspuns: $v = \frac{dr}{d\varphi}\omega$; $w = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\omega}{dt}$.

In cazul excentricului cu profil rectiliniu

$$v = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\omega;\quad w = \frac{1 + \sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}a\,\omega^2.$$

357. Un punct se mișcă pe suprafața unui cilindru drept eliptic pe o elice. Unghiul dintre elice și generatoarea cilindrului este egal cu α. Viteza areolară a proiecției acestui punct pe un plan perpendicular pe generatoarea cilindrului este constantă și egală cu c. Să se afle viteza punctului.

Răspuns: $v = \frac{2c}{h \cos\alpha}$ în care h este lungimea perpendicularei, coborîtă din centrul secțiunii perpendiculare a cilindrului pe tangenta la această secțiune, dusă prin proiecția punctului mobil.

358. Plecând dela expresiile generale pentru accelerația radială și transversală, să se arate că, în cazul când nu există accelerație, mișcarea punctului este rectilinie și uniformă.

§ 15. Proiecțiile accelerației pe axele intrinseci (tangenta, normala principală și binormala)

1. In fiecare punct al traiectoriei se pot construi trei drepte perpendiculare între ele, legate direct de traiectorie : tangenta, normala principală și binormala. Aceste drepte formează axele intrinseci, a căror origine se află în punctul mobil. Intrucât un vector este complect determinat prin proiecțiile sale pe trei direcții perpendiculare, rezultă că $\overline{w}$ este determinat fie prin proiecțiile sale pe axele de coordonate fixe (x, y, z), ca în § 13, fie prin proiecțiile pe tangentă, normală principală și binormală, adică pe axele intrinseci (τ, n, b)

Vectorul $\overline{w}$ este întotdeauna situat în planul osculator al traiectoriei (adică în planul care trece prin trei puncte infinit vecine ale traiectoriei) și, întrucât binormala este perpendiculara ridicată în punctul dat al traiectoriei pe planul osculator, proiecția lui $\overline{w}$ pe binormală este întotdeauna egală cu zero, adică

$$w_b = 0.$$

(Când curba este plană, planul osculator este planul acestei curbe).

Proiecția lui $\overline{w}$ pe tangentă este egală cu derivata modulului vitezei în raport cu timpul, adică

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}$$

(cu condiția ca axa τ să fie orientată înspre partea mișcării) iar proiecția pe normala principală este

$$w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

ρ fiind raza de curbură a traiectoriei în punctul dat.

Urmează că

$$w = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg}(\overline{w}, \overline{v}) = \frac{w_n}{w_\tau}.$$

2. Dacă mişcarea punctului este dată în coordonate carteziene, raza de curbură a traiectoriei poate fi determinată în felul următor:

din ecuaţiile mişcării

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

se află

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \frac{v^2}{\rho}.$$

de unde se determină ρ.

3. Dacă punctul se mişcă pe un cerc cu raza R, atunci

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = R\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = R|\omega|,$$

în care ω este viteza unghiulară de rotaţie a razei vectoare a punctului.

Proiecţiile acceleraţiei punctului pe tangentă şi normală sunt

$$w_\tau = R\frac{d\omega}{dt}, \quad w_n = R\omega^2,$$

(cu condiţia, ca sensul pozitiv al tangentei să coincidă cu sensul pozitiv la calcularea unghiurilor şi arcurilor) şi prin urmare

$$w = R\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg}(\widehat{w, v}) = \frac{\omega^2}{\dot{\omega}}.$$

359. Să se demonstreze că, alegând în mod corespunzător scala unghiurilor, unghiul, sub care se vede acceleraţia normală din extremitatea vectorului vitezei, este egal cu unghiul sub care vectorul vitezei este văzut din centrul de curbură al traiectoriei în punctul dat.

360. Un punct descrie o traiectorie plană cu viteza v_0, constantă ca mărime; prelungirea vectorului acceleraţiei punctului trece mereu printr'un punct fix dat O; distanţa iniţială a punctului mobil la O este a. Să se determine traiectoria.

Răspuns: Un cerc cu raza a şi centrul în punctul O.

361. Să se arate că în cazul unei mişcări plane mărimea vitezei punctului poate fi exprimată astfel:

$$v = \rho\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|,$$

unde ρ este raza de curbură a traiectoriei, iar φ unghiul dintre viteză şi o dreaptă oarecare fixă, aşezată în acelaşi plan în care se mişcă punctul.

362. In cazul mişcării unui punct in plan, unghiul α, dintre viteză şi acceleraţie este constant. Să se arate că, în cazul acesta, mărimea vitezei punctului poate fi exprimată prin formula următoare:

$$v = v_0 e^{\pm c(\varphi - \varphi_0)},$$

în care φ este unghiul dintre viteză şi o dreaptă oarecare, fixă, situată în planul mişcării; φ_0 şi v_0 sunt valorile iniţiale ale acestui unghi şi al vitezei şi $c = \operatorname{ctg} \alpha$.

363. Să se arate că atunci când mişcarea unui punct este dată în coordonate carteziene prin ecuaţiile:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

acceleraţiile tangenţială şi normală se pot exprima prin formulele următoare:

$$w_\tau = \frac{1}{v}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})$$

$$w_n = \frac{1}{v}\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}.$$

In cazul particular al unei mişcări în plan:

$$w_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad w_n = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

iar raza de curbură a traiectoriei

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}.$$

364. Un punct descrie o curbă plană astfel, încât dreapta, după care este orientată acceleraţia $\bar{w}$, trece mereu printr'un punct fix O. Să se arate, că în acest caz:

$$w = \mp v\frac{dv}{dr}.$$

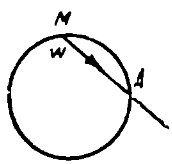
in care v este mărimea vitezei punctului, iar r este modulul razei vectoare în raport cu O. Semnul plus se ia în cazul când accelerația este orientată dela punctul O înafară și semnul minus în cazul contrar.

365. Un punct descrie o traiectorie plană astfel, încât proiecția vitezei pe axa x are mereu o valoare constantă c. Să se arate că, în cazul acesta, mărimea accelerației se exprimă astfel :

$$w = \frac{v^3}{c\rho},$$

v fiind mărimea vitezei punctului, iar ρ raza de curbură a traiectoriei.

366. Punctul M descrie o curbă plană. Linia de acțiune a accelerației formează prin intersecția cu cercul de curbură, coarda $MA = l$. Să se exprime mărimea accelerației în funcție de mărimea vitezei și lungimea acestei coarde.



La problema 366

Răspuns : $w = \dfrac{2v^2}{l}$.

367. Un punct descrie fie elipsa :

$$x = a\cos(kt), \quad y = b\sin(kt),$$

fie hiperbola :

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right), \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right),$$

fie parabola :

$$x = \frac{p}{2}t^2, \quad y = pt.$$

Să se arate, că raza de curbură în oricare punct al acestor curbe este egală cu

$$\rho = \frac{a^2b^2}{h^3}$$

în cazul elipsei și hiperbolei și cu

$$\rho = \frac{p\,x^3}{h^3}$$

în cazul parabolei; mărimea h înseamnă în primele două cazuri distanța dela tangenta în punctul ales la centrul elipsei sau hiperbolei, iar în ultimul caz distanța tangentei la vârful parabolei.

368. Un punct se mişcă pe o linie elicoidală cu viteza v_0 constantă ca mărime. Să se determine mărimea şi direcţia acceleraţiei şi raza de curbură a traiectoriei.

Răspuns: Acceleraţia este orientată pe normala interioară a cilindrului, pe care este situată elicea şi este egală ca mărime cu $w = \dfrac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{R}$; raza de curbură este $\rho = \dfrac{R}{\cos^2 \alpha}$, R fiind raza cilindrului şi α unghiul de înclinare al elicei.

369. Ecuaţiile de mişcare ale unui punct material aruncat în gol cu viteza v_0 sub un unghi α faţă de orizontală sunt de forma:

$$x = at, \quad y = bt - \frac{1}{2}gt^2 \quad (a = v_0 \cos \alpha_0, \quad b = v_0 \sin \alpha_0).$$

Să se afle raza de curbură a traiectoriei în funcţie de abscisa x; caz particular pentru vârful traiectoriei.

Răspuns: $\rho = \dfrac{1}{ag}\left[a^2 + \left(b - \dfrac{g}{a}x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$;

pentru vârf

$$\rho = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{g} \quad \text{pentru } x = \frac{ab}{g}.$$

370. Un pod are forma parabolei $y = -0{,}005\,x^2$, x şi y fiind exprimaţi în metri. O locomotivă se deplasează cu viteză constantă de 72 km/oră. Să se afle mărimea acceleraţiei locomotivei în vârful parabolei.

Răspuns: $w = 4$ m/s^2.

371. Se dau ecuaţiile de mişcare ale unui punct:

$$x = at, \quad y = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}) = a \cdot \mathrm{ch}\, t;$$

să se afle traiectoria şi raza de curbură a traiectoriei în funcţie de ordonata y.

Răspuns: Traiectoria este lănţişorul:

$$y = a\, \mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right),$$

raza de curbură este

$$\rho = \frac{y^2}{a}.$$

372. Un punct descrie un cerc de rază R cu viteza inițială v_0. Unghiul dintre accelerația și viteza punctului este constant și egal cu α. Să se afle mărimea vitezei punctului în funcție de timp.

Răspuns : $v = \dfrac{v_0 R}{R - v_0 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot t}$.

373. Un punct se mișcă pe un cerc cu raza R după legea

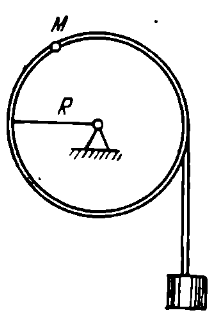
$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2.$$

Să se determine mărimea accelerației punctului. Când va fi această mărime egală cu a și câte rotații face punctul până în acel moment ?

Răspuns : $w = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{R^2}(v_0 - at)^4}$; $w = a$ pentru $t = \dfrac{v_0}{a}$;

numărul rotațiilor este $N = \dfrac{v_0^2}{4\pi a R}$.

374. Pe o șaibă de rază $R = 0{,}5$ m este înfășurat un fir, care poartă o greutate la capătul liber. Greutatea se lasă în jos după legea : $s = 0{,}6\, t^2$ și pune în mișcare șaiba. Să se afle accelerația punctului M, situat pe circumferința șaibei după 1 s dela începutul mișcării.



La problema 374

Răspuns : $w_1 = 3{,}12$ m/s^2.

375. Un pendul matematic de lungime $l = 10$ cm oscilează conform legii :

$$\varphi = 0{,}01\, \pi \cos (10\, t),$$

în care φ este unghiul de înclinare al pendulului față de verticală. Să se afle accelerația tangențială, normală și totală a pendulului.

Răspuns : $w = \dfrac{\pi}{10} \sqrt{\pi^2 \sin^4 (10\, t) + 10\,000 \cos^2 (10\, t)}$ cm/s^2.

376. Un punct pornind din starea de repaus, se mișcă pe un cerc cu raza R, având accelerația tangențială constantă a. După câte secunde dela începutul mișcării accelerația tangențială va fi numeric egală cu cea normală ?

Răspuns : $t = \sqrt{\dfrac{R}{a}}$.

§ 16. Mişcarea compusă a punctului

1. Când un punct se mişcă în raport cu sistemul de referinţă care la rândul său este deasemenea în mişcare, se obţine o mişcare compusă a punctului. In cazul acesta mişcarea punctului în raport cu sistemul mobil se numeşte mişcare *relativă*; mişcarea punctului împreună cu sistemul mobil se numeşte mişcare de *transport*, iar mişcarea faţă de sistemul de referinţă considerat fix, se numeşte mişcare *absolută*. Dacă $\bar{v}_r$ este viteza mişcării relative, $\bar{v}_t$ viteza mişcării de transport şi $\bar{v}$ viteza mişcării absolute, atunci

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_t.$$

Invers, dacă se dau vitezele mişcării absolute şi a celei de transport şi trebue aflată viteza mişcării relative, se scade (geometric) viteza mişcării de transport sau, ceeace este acelaşi lucru, se adună (geometric) vectorul $(-\bar{v}_t)$ la vectorul $\bar{v}$, deoarece

$$\bar{v}_r = \bar{v} - \bar{v}_t = \bar{v} + (-\bar{v}).$$

2. Dacă acceleraţia mişcării relative este $\bar{w}_r$, a mişcării de transport $\bar{w}_t$ şi a mişcării absolute $\bar{w}$ şi *dacă sistemul de referinţă are o mişcare de translaţie*, atunci:

$$\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_t.$$

Dacă sistemul de referinţă mobil nu are o mişcare de translaţie, ci într'un moment dat execută o rotaţie cu o viteză unghiulară $\bar{\omega}$, atunci ia naştere pe lângă acceleraţia relativă şi de transport şi o acceleraţie complimentară $\bar{w}_k$, astfel încât în cazul acesta avem, $\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_t + \bar{w}_k$ (teorema lui Coriolis). Acceleraţia $\bar{w}_k$ se determină din formula

$$\bar{w}_k = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r.$$

Modulul vectorului $\bar{w}_k$ este egal cu

$$w_k = 2\,\omega\, v_r \sin\left(\bar{\omega}, \bar{v}_r\right)$$

iar direcţia lui este perpendiculară pe planul, care trece prin vectorul $\bar{v}_r$ şi este paralel cu axa rotaţiei translatoare (fig. 20).

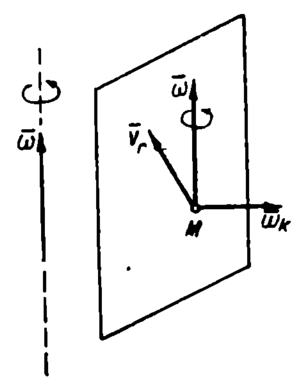


Fig. 20

377. Un vapor parcurge distanţa $l = 216$ km în direcţia curentului unui fluviu în $t_1 = 10$ ore, şi aceeaşi distanţă împotriva curentului în $t_2 = 15$ ore. Să se afle viteza v_2 a vaporului în raport cu apa şi viteza v_1 a curentului apei.

Răspuns: $v_1 = \frac{l(t_2 - t_1)}{2\,t_1 t_2} = 3{,}6$ km/oră, $v_2 = \frac{l(t_2 + t_1)}{2\,t_1 t_2} =$
$= 18$ km/oră.

378. Cât timp călătorul dintr'un tren, care merge cu viteza $v_1 = 40$ km/oră va vedea un alt tren care trece în sens contrar cu viteza $v_2 = 35$ km/oră și are lungimea $l = 150$ m.

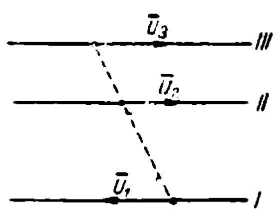
Răspuns : $t = \frac{36\,l}{10(v_1 + v_2)} = 7.2$ s.

379. Un biciclist merge cu viteza u. Să se afle vitezele absolute v_1 și v_2 ale pedalelor, pentru poziția verticală și orizontală a manivelei pedalelor, știind că lungimea acestei manivele este a și că viteza ei unghiulară este ω.

Răspuns : 1. In poziția verticală $v_1 = u + a\,\omega$; $v_2 = u - a\omega$.

2. In poziția orizontală $v_1 = v_2 = \sqrt{u^2 + a^2\omega^2}$.

380. Două puncte se mișcă uniform pe dreptele paralele I și II cu viteze de sens opus $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ iar un al treilea punct se mișcă pe o a treia paralelă cu viteza $\bar{v}_3$.



La problema 380

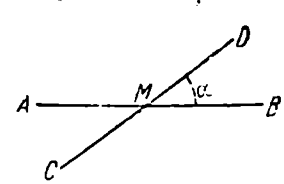
Distanțele dintre drepte sunt m și n. Să se afle valoarea vitezei $\bar{v}_3$, dacă în orice moment al mișcării cele trei puncte se află în linie dreaptă.

Răspuns : $v_3 = \frac{m}{n}(v_1 + v_2) + v_2$.

381. Un glonte a trecut printr'un vagon, care merge cu viteza v_1 km/oră pe drum drept. Se știe că împușcătura s'a executat perpendicular pe direcția mișcării vagonului și că gaura de ieșire a glontelui se află cu a metri mai departe de peretele frontal al vagonului (socotind după direcția mișcării vagonului), decât gaura de intrare. Să se afle viteza glontelui, dacă lățimea vagonului este b m.

Răspuns : $v_2 = \frac{5\,bv_1}{18\,a}$ m/s.

382. Dreapta AB execută o mișcare de translație cu viteza $\bar{v}_1$ perpendiculară pe AB, iar dreapta CD o mișcare de translație cu viteza $\bar{v}_2$, perpendiculară pe CD. Să se afle mărimea vitezei v a punctului M de intersecție a acestor drepte, dacă ele formează un unghi egal cu α.

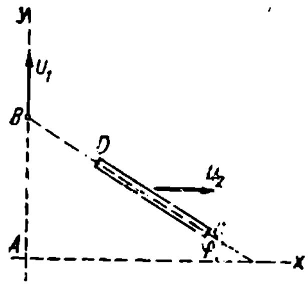


La problema 382

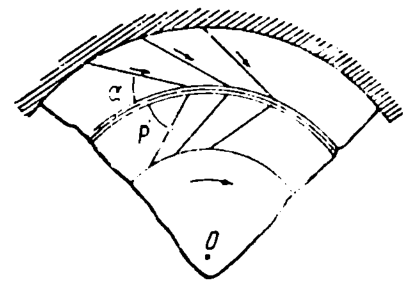
Răspuns : $v = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2\,v_1 v_2 \cos\alpha}$.

383. Punctul B se mişcă pe dreapta Ay cu viteza constantă $\bar{v}_1$, iar luneta CD are o mişcare de translaţie cu viteza $\bar{v}_2$, paralelă cu dreapta Ax. Sub ce unghi φ trebue aşezată luneta, pentru ca punctul B să fie mereu în câmpul vizual al lunetei?

Răspuns: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_1}{v_2}$.



La problema 383



La problema 385

384. O corabie se mişcă în linie dreaptă cu viteza iniţială $\bar{v}_1$. Un om aflat pe covertă, aruncă o minge vertical în sus cu viteza iniţială v_0. Neglijând rezistenţa aerului, să se afle traiectoria mingii şi viteza ei absolută.

Răspuns: Traiectoria este o parabolă cu axa verticală şi parametrul $\frac{v_1^2}{g}$. Viteza absolută $v = \sqrt{(v_0 - gt)^2 + v_1^2}$.

385. Părticelele de apă trec de pe roata directoare a unei turbine pe roata motoare, cu viteza $u = 7{,}57$ m/s. Unghiul α dintre viteza şi direcţia tangentei la cercul interior al roţii directoare este de 40°. Să se determine unghiul β dintre lopeţile roţii motoare şi direcţia tangentei la circumferinţa acestei roţi, la locul de intrare al apei, considerând că apa intră în roata motoare fără lovire. Diametrul exterior al roţii motoare este $D = 450$ mm, iar numărul turelor turbinei pe minut este $n = 320$.

Răspuns: $\operatorname{tg} \beta = \frac{60\, u \sin \alpha}{\pi D n - 60\, u \cos \alpha}$, $\beta = 71°$.

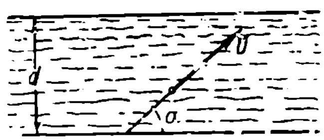
386. O barcă traversează un râu de lăţime d. In timpul traversării viteza ei relativă are mărimea u. Unghiul dintre viteza relativă u şi malul râului este egal cu α.

Să se determine durata traversării, presupunând că viteza curentului apei este aceeaşi pe toată lăţimea râului.

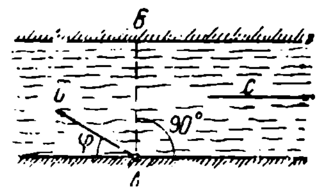
Răspuns: $t = \frac{d}{u \sin \alpha}$.

387. O barcă se află în punctul A; în ce direcție trebue să se traverseze râul pentru a atinge malul opus în punctul B, dacă viteza relativă a bărcii este $u = 2$ m/s, iar viteza curentului râului este $c = 0{,}5$ m/s pe toată lățimea lui?

Răspuns: $\cos\varphi = 0{,}25$.



La problema 386



La problema 387

388. Să se afle condiția pentru traversarea cea mai rapidă a unui râu, de lățime d, dacă viteza curentului $\bar{v}$ este constantă pe toată lățimea râului și mărimea vitezei relative a bărcii este egală cu u.

Răspuns: Viteza u trebue să fie perpendiculară pe malul râului.

389. Viteza curentului unui râu de lățime d este egală cu zero la mal și crește proporțional cu distanța dela mal, atingând valoarea c la mijlocul râului.

Barca se deplasează pe râu cu viteza relativă constantă u, perpendiculară pe direcția curentului. Să se afle traiectoria bărcii și locul în care barca va atinge malul opus.

Răspuns: Luând punctul O drept origine de pornire a bărcii și orientând axa x paralel cu curentul apei, iar axa y perpendicular pe el, se găsește că ecuația traiectoriei dela punctul O până la mijlocul râului este

$$y = +\sqrt{\frac{ud}{c}\,x}$$

(parabolă); cealaltă jumătate a traiectoriei este simetrică cu prima în raport cu punctul $\left(\frac{cd}{4u}, \frac{d}{2}\right)$.

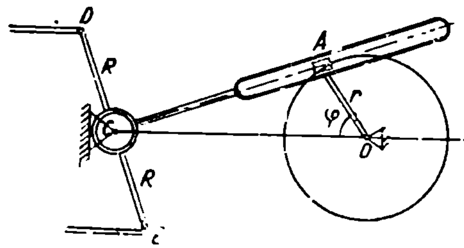
Locul de atingere a malului opus are abscisa: $x = \frac{cd}{2u}$.

390. Pe figură se arată schema mecanismului motor a unui conveior oscilant cu culise. Manivela $OA = 204$ mm face 70 ture pe minut. Distanța $OC = 565$ mm; brațul pârghiei oscilante $R = 196$ mm. Să se determine vitezele capetelor

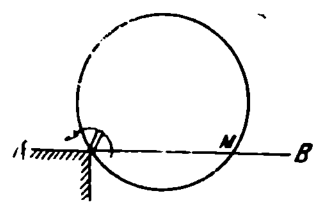
D și E ale pârghiei DE pentru acea poziția mecanismului când $\sphericalangle\varphi = 30°$.

Răspuns : $v = 0{,}52$ m/s.

391. Dreapta AB este imobilă. Un cerc cu raza r se rotește în planul figurii în jurul punctului O al dreptei cu viteza unghiulară constantă ω. Să se afle vitezele și accelerațiile punctului de intersecție M ale cercului cu dreapta AB, în timpul deplasării lui : 1) pe dreapta AB, 2) pe cerc.



La problema 390



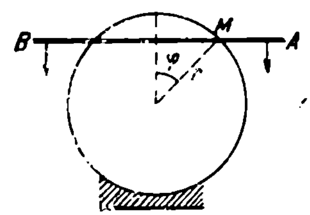
La problema 391

Răspuns :

1) $v_1 = \omega\sqrt{4r^2 - s^2} = \omega\, h$, $w_1 = \omega^2 s$ (îndreptat spre O);

2) $v_2 = 2r\omega$; $w_2 = 4r\omega^2$ (îndreptat spre centru), în care $s = OM$ și h este lungimea coardei, care trece prin M perpendicular pe AB.

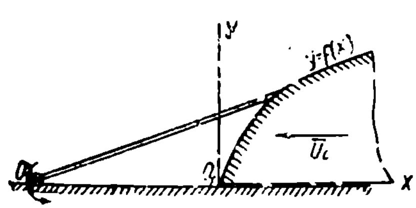
392. Dreapta AB are o mișcare de translație cu viteza constantă c, perpendiculară pe AB, în planul unui cerc fix cu raza r. Să se afle viteza v și accelerația w a punctului de intersecție M al cercului cu dreapta AB.



La problema 392

Răspuns : $v = \dfrac{c}{\sin\varphi}$; $w = \dfrac{c^2}{r\sin^3\varphi}$ (îndreptat dealungul dreptei AB dela M spre B).

393. O camă are o mișcare de translație dela dreapta spre stânga cu viteza constantă v_0. Se dă ecuația profilului său față de axele $O_1\,xy$, cu care este solidară. Să se afle viteza unghiulară ω a unei tije de lungime l care este legată printr'o articulație de punctul fix O și se sprijină cu capătul liber pe camă.



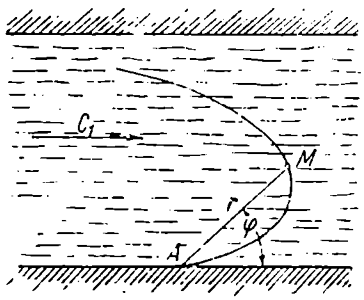
La problema 393

Să se afle forma camei (ecuația conturului) pentru care tija să se rotească cu viteza unghiulară constantă ω_0.

Răspuns : 1) $\omega = \dfrac{v_0}{y + \dfrac{dx}{dy}\sqrt{l^2 - y^2}}$;

2) $x = \dfrac{v_0}{\omega_0} \arcsin\left(\dfrac{y}{l}\right) + \sqrt{l^2 - y^2} - l.$

394. O barcă M, dusă de curentul apei, este trasă cu o funie spre punctul A de pe mal. Să se afle traiectoria bărcii, considerând-o ca un punct şi presupunând că: viteza c_1 a curentului apei este constantă pe toată lăţimea ei, viteza de înfăşurare a funiei este constantă şi egală cu c_2 şi viteza relativă a bărcii este orientată dealungul funiei.



La problema 394

Răspuns : $r = r_0 \operatorname{ctg}^k \alpha_0 \operatorname{tg}^k \alpha$,

unde $k = \dfrac{c_2}{c_1}$, $\alpha = \dfrac{\varphi}{2}$.

395. In condiţiile problemei precedente, cu deosebirea că nu există funie, vâslaşul îndreaptă mereu barca spre punctul A al malului, dând astfel bărcii o viteză relativă constantă c_2. Să se afle traiectoria bărcii. Să se cerceteze cazul $c_2 = c_1$.

Răspuns : $r = r_0 \dfrac{\cos^{k+1} \alpha_0}{\sin^{k-1} \alpha_0} \cdot \dfrac{\sin^{k+1} \alpha}{\cos^{k-1} \alpha}$, în care $\alpha = \dfrac{\varphi}{2}$,

$k = \dfrac{c_1}{c_2}$

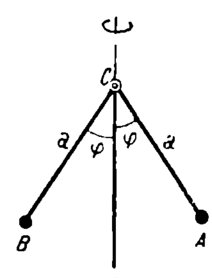
In cazul $c_2 = c_1$ traiectoria este parabolică.

396. Un regulator centrifugal Watt se roteşte în jurul unei axe verticale fixe OC cu viteza unghiulară ω_1.

Sferele A şi B se depărtează în acelaşi timp de axă, rotindu-se în jurul lui C, cu viteza unghiulară $\omega_2 = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Să se afle viteza absolută a sferelor în funcţie de unghiul φ, dacă $CA = CB = a$.

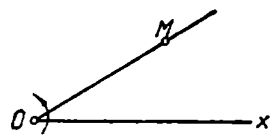
Răspuns : $v = a\sqrt{\omega_1^2 \sin^2 \varphi + \omega_2^2}$.



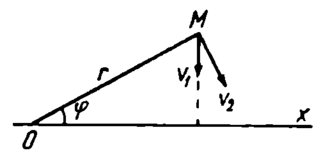
La problema 396

397. O dreaptă se roteşte într'un plan imobil în jurul extremităţii sale O cu viteza unghiulară constantă ω. Când dreapta este în poziția Ox, punctul M începe să se miște din punctul O dealungul dreptei. Să se determine astfel legea mișcării punctului pe dreaptă, încât el să aibă viteza absolută, cu modul constant v. Să se afle traiectoria și accelerația punctului.

Răspuns: 1) $OM = r = \frac{v}{\omega} \sin \omega t$. 2) Traiectoria este un cerc cu raza $\frac{v}{2\omega}$, tangent în punctul O la axa Ox. 3) Accelerația este $w = 2v\omega$ (orientată spre centrul cercului).



La problema 397



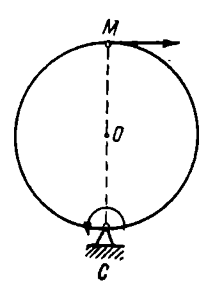
La problema 398

398. Punctul M participă simultan la două mișcări, caracterizate prin vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$. Viteza $\bar{v}_1$ este perpendiculară pe Ox, viteza $\bar{v}_2$ este perpendiculară pe raza vectoare OM a punctului, iar modulii $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ ai vitezelor, sunt constanți. Să se afle traiectoria și accelerația w a punctului:

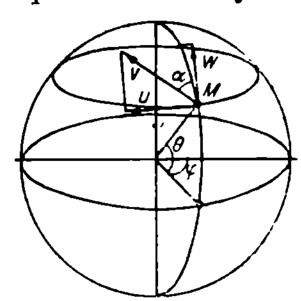
Răspuns: 1) traiectoria este $r = \frac{\text{const}}{v_2 + v_1 \cos \varphi}$ (conică).

2) $w = \frac{\text{const}}{r^2}$.

399. Un cerc O cu raza a se rotește în planul său în jurul unui punct fix C, cu viteza unghiulară constantă ω, contrar mișcării acelor de ceasornic. Un punct M se mișcă pe acest cerc cu viteza unghiulară 2ω, în sensul mișcării acelor de ceasornic. In momentul inițial punctele M, O și C se află pe aceeași dreaptă. Să se determine traiectoria absolută a punctului M, viteza și accelerația lui.



La problema 399



La problema 400

Răspuns: traiectoria este dreapta MC; $v = 2a\omega \sin \omega t$; $w = \omega^2 r$, în care r este distanța dela M la C.

400. Un punct se mişcă pe suprafaţa unei sfere cu viteza $\bar{v}$. Unghiul dintre viteza $\bar{v}$ şi meridianul care trece prin punct este constant şi egal cu α. Să se determine traiectoria punctului.

Rezolvare: Mişcarea punctului pe suprafaţa sferei poate fi considerată ca rezultanta a două mişcări: o mişcare pe meridian cu viteza $\bar{w}$ şi a doua pe paralelă cu viteza $\bar{u}$. Dacă însemnăm latitudinea şi longitudinea punctului mobil cu θ şi φ, atunci aceste viteze se exprimă astfel:

$$w = R\frac{d\theta}{dt} \quad \text{şi} \quad u = R\cos\theta\,\frac{d\varphi}{dt},$$

R fiind raza sferei. Intrucât vitezele $\bar{u}$ şi $\bar{w}$ sunt perpendiculare între ele, vom avea, ţinând seama de condiţia problemei

$$w = v\cos\alpha, \quad u = v\sin\alpha,$$

sau

$$R\frac{d\theta}{dt} = v\cos\alpha \quad \text{şi} \quad R\cos\theta\frac{d\varphi}{dt} = v\sin\alpha;$$

împărţind prima ecuaţie prin a doua, obţinem:

$$\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{d\theta}{d\varphi} = \text{ctg}\,\alpha \quad \text{sau} \quad \frac{d\theta}{\cos\theta} = m\,d\varphi,$$

în care $m = \text{ctg}\,\alpha$; prin integrare aflăm

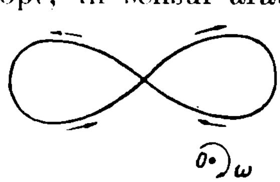
$$\int\frac{d\theta}{\cos\theta} = \int m d\varphi + c \quad \text{sau} \quad \ln\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = -m\varphi + C.$$

Dacă presupunem, că pentru $\varphi = 0$, unghiul θ este deasemenea egal cu zero, atunci $C = 0$ şi obţinem în fine

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = e^{-m\varphi}.$$

Aceasta este ecuaţia traiectoriei căutate, în coordonate sferice. Această curbă se numeşte loxodromă. Când φ creşte, unghiul θ creşte deasemenea: $\theta = \frac{\pi}{2}$ pentru $\varphi = \infty$; aceasta înseamnă, că punctul atinge polul, înconjurându-l de un număr infinit de ori. Proiecţia loxodromei pe planul ecuatorului este o spirală, pentru care centrul sferei O este un punct asimptotic.

401. Un punct descrie o traiectorie plană, în formă de opt, în sensul arătat pe figură prin săgeţi. Insăşi traiectoria se roteşte, în sensul acelor de ceasornic, în jurul unei axe, perpendiculară pe planul traiectoriei, care trece printr'un punct oarecare fix O al acestui plan. Să se indice, cum este orientată acceleraţia complimentară a punctului în diferitele lui poziţii pe traiectorie.



La problema 401

Răspuns: Pe bucla din dreapta acceleraţia complimentară este orientată spre interior, iar pe cea stângă spre exterior (pe normala la traiectorie).

402. Un punct M se mişcă uniform pe un cerc cu raza r, în sensul acelor de ceasornic, făcând n_1 ture pe secundă; cercul se roteşte în acelaşi timp în jurul centrului său, în sens opus mişcării acelor de ceasornic, făcând n ture pe secundă. Să se afle acceleraţia absolută a punctului M.

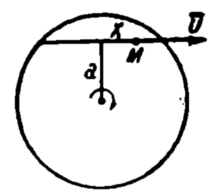
Răspuns: $w = 4\pi^2 r\,(n - n_1)^2$.

403. Un punct descrie o curbă oarecare plană. Considerăm mişcarea punctului ca o mişcare compusă din două mişcări: o mişcare relativă de alunecare pe raza vectoare şi a doua mişcare de rotaţie a razei vectoare în jurul polului. Să se arate, aplicând teorema lui Coriolis, că proiecţiile acceleraţiei totale pe raza vectoare şi pe perpendiculara la aceasta sunt respectiv egale cu

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \text{ şi } \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

r şi φ fiind coordonatele polare.

404. Pe coarda unui disc, care se roteşte uniform în jurul unei axe, care trece prin centrul său şi este perpendiculară pe planul său, se mişcă un punct M cu o viteză relativă constantă, pornind din mijlocul coardei. Să se afle viteza şi acceleraţia absolută a punctului M în funcţie de poziţia lui pe coardă. Sunt date: viteza unghiulară ω a discului, viteza relativă u a punctului M, distanţa a dela centrul discului la coardă şi distanţa x a punctului M la mijlocul coardei.



La problema 404

Răspuns: 1) $v = \sqrt{(a\omega \pm u)^2 + x^2\omega^2}$;

2) $w = \omega\sqrt{(a\omega \pm 2u)^2 + x^2\omega^2}$;

unghiul dintre acceleraţie şi perpendiculara pe coardă este egal cu arcsin $\dfrac{x\omega^2}{w}$.

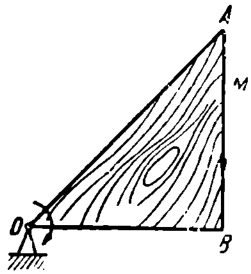
405. Un triunghi dreptunghic isoscel OAB se roteşte în planul său, în jurul vârfului O, cu viteza unghiulară constantă ω, şi un punct oarecare M se mişcă cu viteză relativă constantă dealungul laturii AB, parcurgând distanţa AB în timpul unei rotaţii complecte a triunghiului.

Să se afle viteza şi acceleraţia absolută a punctului în momentul când el se află în A, dacă $AB = a$.

Răspuns: Viteza este egală ca mărime cu

$$v = \frac{a\omega}{2\pi}\sqrt{8\pi^2 + 4\pi + 1}$$

și este îndreptată sub unghiul $\alpha = \operatorname{arctg}(4\pi + 1)$ față de ipotenuza triunghiului, la dreapta ei. Accelerația este egală ca mărime cu



La problema 405

$$w = \frac{a\omega^2}{\pi}\sqrt{2\pi^2 + 2\pi + 1}$$

și îndreptată sub unghiul $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\pi + 1}\right)$ față de ipotenuză, la stânga ei.

406. Un tub drept orizontal se rotește în jurul unei axe verticale cu viteza unghiulară constantă ω. O sferă care se află în tub, se mișcă în interiorul lui după legea $r = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$, în care r este distanța sferei la axa de rotație a tubului. Să se afle modulii vitezei și accelerației absolute a sferei în funcție de r.

Răspuns: $v = \omega\sqrt{2r^2 - a^2}$; $w = 2\omega^2\sqrt{r^2 - a^2}$.

407. Un disc de rază R se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe, care trece prin centrul său și este perpendicular pe planul său. Pe diametrul discului se mișcă un punct, care pornește din centru, după legea

$$s = R \sin(\omega t).$$

Să se afle traiectoria, viteza și accelerația absolută a punctului.

Răspuns: Traiectoria este un cerc cu raza $\frac{R}{2}$, care trece prin centrul discului. Viteza absolută este egală cu $R\omega$, iar accelerația absolută este egală cu $2R\omega^2$.

408. Un plan Oxy se rotește în jurul originii O cu viteza unghiulară variabilă ω. Mișcarea unui punct în acest plan este dată prin ecuațiile: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. Să se afle proiecțiile accelerației absolute a punctului pe axele mobile Ox și Oy.

Răspuns: $w_x = \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} - \omega^2 x - y\frac{d\omega}{dt}$,

$$w_y = \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} - \omega^2 y + x\frac{d\omega}{dt}.$$

409. In problema precedentă, presupunând că $\omega = \text{const}$, să se afle mișcarea absolută a punctului în două cazuri:

1) accelerația absolută a punctului coincide cu accelerația ei purtătoare, 2) accelerația absolută coincide cu accelerația relativă.

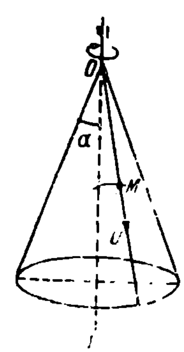
Răspuns : 1) Traiectoria este un cerc, descris cu viteza unghiulară 2ω ; 2) traiectoria este un cerc cu centrul în origine, descris cu viteza unghiulară $\frac{\omega}{2}$.

410. Căruciorul B, al unei macarale, se deplasează pe o grindă orizontală OA cu viteza $u = 2$ m/s. Macaraua se rotește în același timp, în jurul axei verticale Oz, cu viteza unghiulară $\omega = 0{,}3$ $^1/_s$. Să se determine accelerația absolută a căruciorului în momentul când distanța $OB = 5^5/_9$ m.

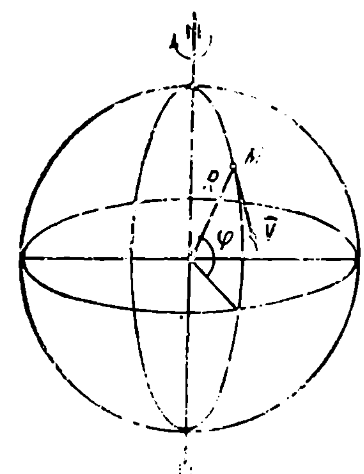
Răspuns : $w = 1{,}3$ m/s^2.

411. Punctul M pornește din vârful O al unui con, și se mișcă uniform pe generatoarea conului cu viteza $\bar{v}$; conul însuși se rotește în jurul axei sale cu viteza unghiulară constantă ω. Să se afle mărimea accelerației absolute a punctului M după t s dela începutul mișcării.

Răspuns : $w = v\omega \sin\alpha \sqrt{\omega^2 t^2 + 4}$.



La problema 411



La problema 412

412. Punctul M se mișcă uniform cu viteza v pe meridianul unei sfere cu raza R, iar sfera se rotește în jurul diametrului vertical cu viteza unghiulară constantă ω. Să se afle accelerația absolută a punctului M în funcție de unghiul φ.

Răspuns : $w = \frac{1}{R}\sqrt{v^4 - 2\omega^2 R^2 (1 - \sin^2\varphi)\, v^2 + R^4\omega^4 \cos^2\varphi}$.

II. CINEMATICA CORPURILOR PERFECT RIGIDE

§ 17. Rotația unui corp rigid în jurul unei axe fixe

Se numește rotația unui corp rigid în jurul unei axe fixe, acea mișcare a corpului la care două puncte ale corpului rămân fixe. Rezultă că toate punctele dreptei, care trec prin aceste două puncte fixe, vor fi deasemenea fixe. Această dreaptă se numește *axă de rotație*. La rotația în jurul unei axe fixe, toate punctele corpului descriu cercuri, ale căror plane sunt perpendiculare pe *axa de rotație*, iar centrele lor se află pe axa de rotație.

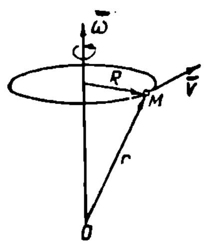


Fig. 21

Mișcarea de rotație este definită într'un moment dat prin axa de rotație și viteza unghiulară de rotație ω. Viteza unghiulară este un vector, îndreptat în direcția axei de rotație astfel încât privind dela extremitatea vectorului se vede rotația invers mișcării acelor de ceasornic. Viteza unghiulară este un vector alunecător.

Un punct M al corpului (fig. 21), aflat la distanța R de axa de rotație, are mărimea vitezei

$$v = \omega R.$$

Viteza punctului M, ca vector, poate fi definită prin formula

$$\bar{v} = \bar{w} \times \bar{r}.$$

Mărimea accelerației punctului M este dată de

$$w = R\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg}(\bar{w}, \bar{R}) = -\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}.$$

413. Un corp pornește din starea de repaus și începe să se rotească uniform accelerat cu accelerația unghiulară ε 1/s². Să se afle care va fi viteza lui unghiulară precum și numărul corespunzător n de ture pe minut după t' minute sau t'' secunde dela începutul mișcării. Să se afle deasemenea deplasarea unghiulară N a corpului, în ture, în acelaşi interval de timp.

Răspuns: $\omega = \varepsilon t'' = 60\ \varepsilon t'$; $n = \dfrac{30}{\pi}\varepsilon t'' = \dfrac{1800}{\pi}\varepsilon t'$,

$$N = \frac{1}{4\pi}\varepsilon t''^2 = \frac{900}{\pi}\varepsilon t'^2.$$

414. O roată, care primește viteza unghiulară inițială ω_0, a făcut n ture și s'a oprit ca urmare a unei rezistențe la mișcare. Să se afle accelerația unghiulară ε, presupunând că rotația este uniform întârziată.

Răspuns: $\varepsilon = -\dfrac{\omega_0^2}{4\pi n}$.

415. Un corp, care se rotește uniform accelerat pornind din starea de repaus, atinge în decurs de 10 s viteza unghiulară $\omega = 30$ 1/s. Câte ture a făcut corpul în aceste 10 secunde?

Răspuns: Aproximativ 24 ture.

416. Un ventilator face 4200 ture/minut. Cât de mare poate fi diametrul său, dacă viteza periferică a ventilatorului nu trebue să depășească 88 m/s?

Răspuns: $D \leqslant 0{,}4$ m.

417. Să se determine viteza punctelor de pe suprafața pământului, situate pe latitudinea Moscovei ($\sim 55°$), ca urmare a mișcării zilnice a pământului.

Răspuns: Aproximativ 950 km/oră.

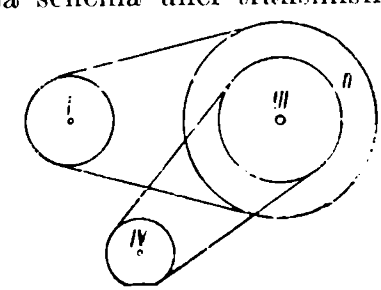
418. Punctul A al unei roți se mișcă cu viteza v_1, iar punctul B, situat pe aceeași rază cu A, la distanța l de el, are o viteză $v_2 > v_1$. Să se afle viteza unghiulară a roții.

Răspuns: $\omega = \frac{v_2 - v_1}{l}$.

419. Două roți A și B sunt legate printr'o curea de transmisie fără sfârșit; diametrul primei roți $d_1 = 1$m, diametrul roții a doua $d_2 = 1{,}5$ m. Roata B face 100 ture pe minut. Să se afle viteza v a punctelor curelei și vitezele unghiulare ale ambelor roți.

Răspuns: $v = 7{,}854$ m/s; $\omega_1 = 15{,}708$ 1/s, $\omega_2 = 10{,}472$ 1/s.

420. Pe figură este reprezentată schema unei transmisii prin curele. Roțile II și III se află pe același ax și sunt solidar legate între ele. Diametrele roților sunt: $d_1 = 200$ mm, $d_2 = 500$ mm, $d_3 = 300$ mm și $d_4 = 100$ mm. Câte ture face pe minut roata cu diametrul d_4, dacă roata cu diametrul d_1 face 500 ture pe minut?



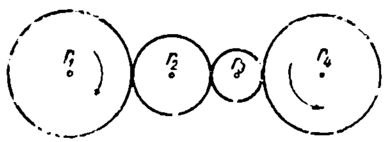
La problema 420

Răspuns: $n_4 = 600$ ture/minut.

421. O roată dințată, care are z_1 dinți și face n_1 ture pe minut, este angrenată cu altă roată, care are z_2 dinți. Pe axul acestei ultime roți se află fixată o roată dințată, care are z_3 dinți. La rândul ei, această roată este angrenată cu a patra roată dințată cu z_4 dinți. Să se determine numărul de ture pe minut al ultimei roți.

Răspuns: $n_4 = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} n_1$.

422. Să se afle raportul de transmisie $k = \frac{\omega_4}{\omega_1}$ al vitezelor unghiulare pentru roțile dințate cu razele r_1, r_2, r_3, r_4, care compun angrenajul din figură.

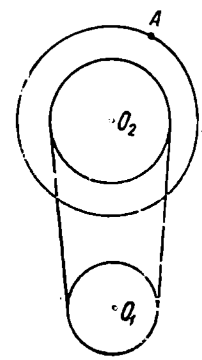


La problema 422

Răspuns : $k = (-1)^{n-1} \frac{r_1}{r_n}$, n fiind numărul roților dințate.

423. Roata O_1 de rază r_1 face n_4 ture pe minut; ea este legată printr'o curea de transmisie cu roata O_2 de rază r_2. Să se determine viteza liniară a punctului A de pe roata a treia $O_2A = R$, care este prinsă de roata O_2.

Răspuns : $v = \frac{\pi r_1 R}{30 r_2} n$.



La problema 423

424. Să se determine accelerația unui punct, care se află la distanța r de axul unui corp, care se rotește uniform în jurul acestui ax, făcând n ture pe minut.

Răspuns : $w \approx 0{,}011\ rn^2$.

425. Să se afle accelerația centripetă în mișcarea zilnică a unui punct de pe suprafața pământului, situat pe latitudinea $\varphi°$.

Răspuns : $w_n = \frac{\pi^2}{432^2\ 10^4} R \cos\varphi \approx 53 \cdot 10^{-10}\ R \cos\varphi$ m/s^2,

unde R este raza pământului în metri.

426. Roata unei mașini are raza de 0,3 m și se rotește uniform cu 1000 ture pe minut. Să se afle viteza ei unghiulară, precum și vitezele și accelerațiile punctelor, situate pe circumferința roții.

Răspuns : $\omega = 104{,}7$ 1/s, $v = 31{,}41$ m/s, $w = 3289{,}9$ m/s^2.

427. O greutate, legată de un fir înfășurat pe un arbore orizontal, este lăsată în jos uniform accelerat, fără viteză inițială. In primele t secunde ea a parcurs o distanță de h m. Să se afle accelerația unghiulară a arborelui, dacă raza lui este de r m.

Răspuns : $\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}$ 1/s^2.

428. O colivie de mină se ridică uniform accelerat din starea de repaus, cu accelerația de 2 m/s^2. La câte ture pe minut va corespunde viteza unghiulară a tamburului instalației de ridicat, după 4 s dela începutul mișcării, și care va fi accelerația punctelor situate pe periferia tamburului, dacă diametrul lui este $d = 5$ m?

Răspuns: $n = 30{,}57$ ture/minut; $w = 25{,}15$ m/s^2.

429. Pe obada unei roți, care are un ax orizontal, este înfășurat un fir, care poartă o sarcină la capătul lui liber. Intr'un anumit moment sarcina începe să se lase în jos uniform accelerat, punând roata în mișcare. Să se afle accelerația unui punct de pe obadă în funcție de înălțimea h, dela care a coborît sarcina, dacă raza roții este R și accelerația sarcinii este a.

Răspuns: $w = \frac{a}{R}\sqrt{R^2+4h^2}$, $\quad \mathrm{tg}\,(w, R) = \frac{R}{2h}$.

§ 18. Mișcarea unui corp rigid cu un punct fix

1. Dacă un corp rigid are un punct fix, atunci conform teoremei lui d'Alembert, există în fiecare moment o axă de rotație instantanee, care trece prin punctul fix și o viteză unghiulară instantanee $\bar{\omega}$. Viteza unui punct oarecare M al corpului va fi

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad v = \omega d, \tag{1}$$

unde $\bar{r}$ și d au semnificația arătată în fig. 22. Proiecțiile vitezei $\bar{v}$ pe axele de coordonate fixe xyz, se obțin, conform formulelor lui Euler, din

$$\bar{v} = \bar{w} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \tag{2}$$

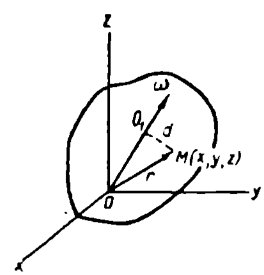


Fig. 22

Expresia accelerației punctului M se obține diferențiind ecuația (1) în raport cu timpul:

$$\bar{w} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{w}_{ro} + \bar{w}_{ax}. \tag{3}$$

Intrucât $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$ este accelerația unghiulară, care, evident, este egală cu viteza extremității vectorului $\bar{\omega}$, componenta $\bar{w}_{ro}$ a accelerației, numită accelerație de rotație se exprimă astfel:

$$\bar{w}_{ro} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad w_{ro} = \varepsilon\, r \sin\,(\widehat{\bar{\varepsilon}, \bar{r}}). \tag{4}$$

Această componentă este perpendiculară pe planul care trece prin $\bar{\varepsilon}$ și r.

Componenta

$$\bar{w}_{ax} = \bar{\omega} \times \bar{v}; \quad w_{ax} = \omega^2 d \tag{5}$$

se numeşte acceleraţie *axipetă* şi este îndreptată perpendicular pe vectorul $\bar{\omega}$ dela M la O_1.

2. La mişcarea unui corp rigid cu un punct fix O, axa instantanee de rotaţie, determinată prin vectorul $\bar{\omega}$, descrie în spaţiul imobil un con cu vârful în punctul O, care se numeşte axoidă fixă; în spaţiul mobil, legat direct de corpul în mişcare, axa instantanee descrie deasemenea un con cu vârful în punctul O; acest con se numeşte axoidă mobilă. In timpul mişcării corpului axoida mobilă se rostogoleşte fără alunecare pe cea fixă.

3. Dacă un corp rigid, invariabil legat de un triedru mobil $x'\,y'\,z'$, se mişcă în jurul unui punct fix O, poziţia corpului poate fi determinată în fiecare moment prin unghiurile lui Euler φ, ψ, şi θ, ca în figura 23. Unghiul φ se numeşte *unghiul de rotaţie proprie* a corpului, unghiul ψ unghi de *precesie*, iar θ unghi de *nutaţie*. In mod corespunzător, mişcarea unui corp în timpul căreia variază numai φ, se numeşte rotaţie proprie a corpului; mişcarea în timpul căreia variază ψ, se numeşte precesie şi mişcarea în timpul căreia variază unghiul θ, se numeşte *nutaţie*. Dacă $\theta = \text{const}$ şi $\psi = \text{const}$ mişcarea corpului se numeşte *precesie regulată*. Intrucât unghiurile φ, ψ şi θ definesc perfect poziţia unui corp rigid cu un punct fix, mişcarea unui astfel de corp poate fi dată prin ecuaţiile:

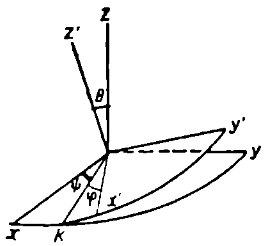
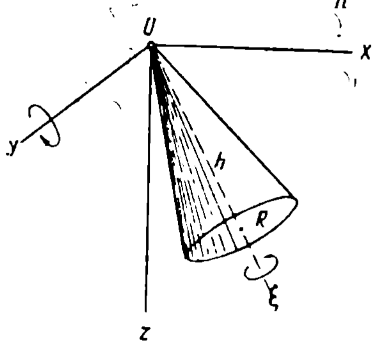


Fig. 23

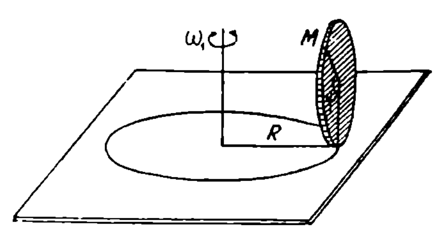
$$\varphi = f_1(t), \qquad \psi = f_2(t), \qquad \theta = f_3(t). \tag{6}$$

430. Un con circular suspendat de vârf într'un punct fix O, se roteşte în jurul axei sale geometrice $O\xi$ cu viteza unghiulară constantă ω_1 şi, pe lângă aceasta, oscilează, ca un pendul, în jurul unei axe orizontale Oy perpendiculară pe $O\xi$. In ce moment, adică pentru care viteză unghiulară de oscilaţie ω_2, axa instantanee de rotaţie se află pe suprafaţa conului ştiind că înălţimea lui este h şi raza bazei R?

Răspuns: $\omega_2 = \dfrac{R}{h}\,\omega_1$.



La problema 430



La problema 431

431. Un disc vertical de rază r, se rostogoleşte, fără alunecare pe un plan cu viteza unghiulară constantă ω_1 descriind un cerc cu raza R. Să se afle acceleraţia axipetă w_{ax}

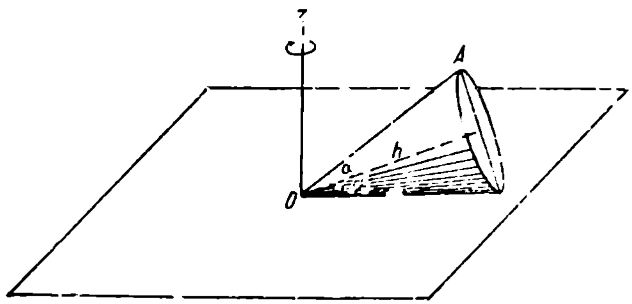
şi acceleraţia de rotaţie w_{ro} a unui punct M, a cărui poziţie pe marginea discului este determinată prin unghiul φ, arătat pe figură.

Răspuns : $w_{ax} = \frac{2\omega_1^2}{r}\sqrt{(r^2+R^2)\left(R^2+r^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}\sin\frac{\varphi}{2}$,

$$w_{ro} = \frac{R\omega_1^2}{r}\sqrt{R^2+r^2\cos^2\varphi}.$$

432. Un con circular cu înălţimea h şi unghiul la vârf 2α se rostogoleşte, fără alunecare, pe un plan, care se roteşte în jurul axei Oz cu viteza unghiulară constantă ω_1. Să se afle acceleraţiile w_{ro} şi w_{ax} ale punctului A de pe baza conului.

Răspuns : $w_{ro} = \frac{h}{\sin\alpha}\omega_1^2$, $w_{ax} = 2\omega_1\cos^2\alpha$.



La problema 432

433. Un triedru de coordonate $Oxyz$ se roteşte cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe, care trece prin punctul O şi formează cu axele de coordonate unghiuri egale. Să se afle vitezele a trei puncte, situate pe bisectoarele celor trei unghiuri de coordonate, pozitive, la distanţa r de O.

Răspuns : $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{\omega r}{\sqrt{3}}$.

434. Un corp se roteşte în jurul unei axe, care trece prin origine. Viteza punctului M (1, 0, 1) a corpului este egală cu $v_1 = 4$ m/s. Unghiul α_1 dintre viteza punctului M şi axa absciselor este de 45°; unghiul dintre viteza punctului M_2 (3, 4, 0) şi axa absciselor este egal cu α_2, pentru care $\cos\alpha_2 = -0{,}8$. Să se afle ecuaţia axei instantanee de rotaţie, viteza unghiulară instantanee ω şi viteza v_2 a punctului M_2.

Răspuns : $x = \frac{3}{4}y = z$, $\omega = \sqrt{17}$ 1/s, $v_2 = 7{,}5\cdot\sqrt{2}$ m/s.

435. Un corp se rotește în jurul unei axe, care trece prin punctul M_0 (2, 1, 3), cu viteza unghiulară $\omega=25$ 1/s, cosinusurile directoare ale vectorului $\overline{\omega}$ fiind: 0,60; 0,48; 0,64. Să se determine viteza punctului M (10, 7, 11) a corpului.

Răspuns: $v = 10$ m/s.

436. Să se arate, că în cazul precesiei regulate, adică în cazul când unghiurile lui Euler se exprimă prin:

$$\varphi=at, \quad \psi=bt, \quad \theta=c,$$

în care a, b, c sunt mărimi constante, atunci proiecțiile accelerației unghiulare a corpului pe axele mobile se exprimă astfel:

$$\varepsilon_x=ab \sin c \cdot \cos (at), \quad \varepsilon_y=-ab \sin c \cdot \sin (at), \quad \varepsilon_z=0.$$

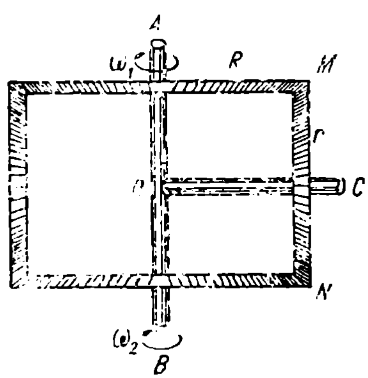
437. Să se arate că viteza punctului (unui corp) ale cărui coordonate mobile sunt într'un anumit moment egale cu $x=-a \cos \varphi$, $y=a \sin \varphi$, $z=a$ (a este constantă), are în acel moment următoarele proiecții pe axele mobile:

$$v_x=a\,[\dot{\psi} \sin (\theta-\varphi) - (\dot{\varphi}+\dot{\theta}) \sin \varphi],$$

$$v_y=-a\,[\dot{\psi} \cos (\theta-\varphi)+(\dot{\varphi}+\dot{\theta}) \cos \varphi],$$

$$v_z=a\,\dot{\psi} \sin \theta,$$

și că mărimea acestei viteze nu depinde de φ; φ este unghiul rotației proprii, ψ unghiul de precesie, θ unghiul de nutație.



La problema 438

438. Aplicând formula $\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r}$ la vitezele punctelor M și N ale unei roți planetare dintr'un mecanism diferențial, reprezentat pe figură, să se arate, că vitezele unghiulare de rotație ale acestei roți în jurul axelor AB și OC se exprimă prin formulele următoare:

$$\Omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \quad \omega=\frac{\omega_1-\omega_2}{r}\,\frac{R}{r},$$

ω_1 și ω_2 fiind vitezele unghiulare ale roților orizontale.

§ 19. Mișcarea plan paralelă a unui corp rigid

1. Dacă un corp rigid se mișcă paralel cu un plan (adică astfel, încât distanțele punctelor sale la acest plan sunt constante), atunci orice dreaptă, dusă în corp, perpendiculară pe plan, are o mișcare de translație cu viteza și accelerația paralele cu planul director. Urmează de aici că pentru a defini o mișcare plan paralelă a unui corp, este suficient să se considere mișcarea secțiunii corpului cu

un plan oarecare, paralel cu planul director, reducându-se astfel mişcarea, la mişcarea unei figuri plane în planul ei, adică la o aşa numită mişcare plană.

Poziţia unei figuri plane invariabile în planul ei se defineşte perfect prin poziţia a două puncte ale figurii, A şi B, sau prin poziţia unui segment AB; prin urmare, mişcarea unei figuri invariabile se reduce la mişcarea unui segment de linie dreaptă, de care figura este legată solidar.

Orice deplasare a unei figuri plane, dintr'o poziţie dată în altă poziţie dată, poate fi realizată prin rotirea figurii în jurul unui centru oarecare P, care se numeşte *centrul* (sau *polul*) de *rotaţie finită*. In mod analog, deplasarea figurii dintr'o poziţie dată într'o poziţie învecinată (infinit apropiat), poate fi obţinută printr'o rotaţie infinit de mică a figurii în jurul centrului P, care se numeşte *centru* (*pol*) *instantaneu* de rotaţie; prin urmare, centrul instantaneu de rotaţie este punctul în jurul căruia figura se roteşte în momentul dat; viteza centrului instantaneu este nulă.

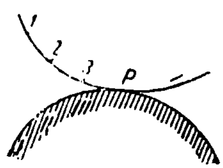


Fig. 24

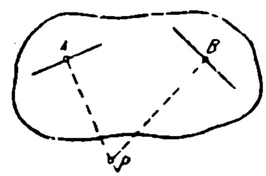


Fig. 25

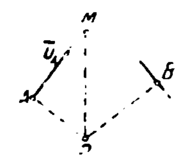


Fig. 26

Mişcarea unei figuri plane constă dintr'o succesiune continuă de deplasări dintr'o poziţie în alta, infinit de apropiată; deaceea această mişcare poate fi considerată ca o succesiune continuă de rotaţii infinit de apropiate. Locul geometric al centrelor instantanee, pe un plan fix, este o curbă continuă, care se numeşte *bază* (*centroidă*); locul geometric al centrelor instantanee, pe planul figurii mobile, se numeşte *rostogolitoare*. Mişcarea figurii plane poate fi obţinută, dacă rostogolitoarea (care este solidar legată de figura în mişcare) se rostogoleşte fără alunecare pe bază (care este legată solidar pe planul fix) (Teorema lui Poinsot). Punctul de contact al bazei şi rostogolitoarei este centrul instantaneu de rotaţie al figurii în momentul dat (fig. 24).

2. Pentru a determina centrul instantaneu de rotaţie al figurii este suficient să se cunoască direcţiile vitezelor a două puncte oarecare ale acestei figuri; centrul instantaneu va fi în punctul de intersecţie al perpendicularelor, ridicate în aceste puncte, pe direcţiile vitezelor lor (fig. 25).

3. Când se cunoaşte viteza unui punct oarecare al figurii şi direcţia vitezei unui alt punct al ei, se pot determina vitezele tuturor punctelor figurii. Intr'adevăr, dacă se construeşte centrul instantaneu P, pe baza direcţiilor date ale vitezelor punctelor A şi B, se va obţine (fig. 26)

$$v_A = \omega \cdot AP,$$

în care ω este viteza unghiulară instantanee a figurii. Mai departe, viteza punctului M

$$v_M = \omega \cdot MP = v_A \cdot \frac{MP}{AP} \text{ şi } v_M \perp MP.$$

4. Proiecţiile vitezelor extremităţilor segmentului solidar pe direcţia segmentului sunt egale.

439. Să se afle viteza și accelerația absolută a unui punct pe bandajul unei roți de rază r, care se rostogolește fără alunecare cu viteza constantă u pe o șină dreaptă.

Răspuns : 1) viteza $v = 2\,u \cos\frac{\varphi}{2}$, în care φ este unghiul dintre razele care trec prin punctul dat și raza care trece prin punctul cel mai de sus al bandajului; v trece întotdeauna prin punctul cel mai de sus;

2) accelerația $w = \frac{u^2}{r}$ și este orientată către centrul roții.

440. Să se afle viteza absolută v a extremităților unui diametru orizontal al unei roți de automobil, care se deplasează în linie dreaptă cu viteza u.

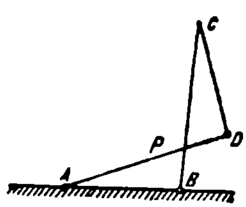
Răspuns : $v = u\sqrt{2}$; vitezele sunt orientate sub unghiuri de 45° și −45° față de acest diametru.

441. Un cilindru așezat pe un plan orizontal, este înfășurat de un fir; un capăt al firului este fixat de cilindru, iar celălalt capăt este liber. Să se afle viteza unghiulară a cilindrului și viteza centrului lui, când capătul liber al firului este tras paralel cu planul și perpendicular pe axa cilindrului, cu viteză constantă c și când cilindrul se rostogolește, fără alunecare.

Răspuns : Insemnând raza cilindrului cu r, se găsește: viteza unghiulară $\omega = \frac{c}{2r}$, viteza centrului $v = \frac{c}{2}$.

442. Un mecanism articulat plan constă din patru bare

$$AD = BC = 2a, \quad AB = CD = 2c < 2a,$$



La problema 442

legate prin articulații în punctele A, B, C și D, AB fiind bara fixă (antiparalelogram așezat pe o latură mică). Să se afle baza și rostogolitoarea barei CD.

Răspuns : Baza și rostogolitoarea sunt elipse identice, cu semiaxele a și $\sqrt{a^2 - c^2}$. Focarele primei elipse sunt în A și B, focarele elipsei a doua în C și D. Punctul de tangentă al bazei și rostogolitoarei este P (centrul instantaneu de rotație).

443. In antiparalelogramul din problema precedentă să se afle raporturile dintre unghiul $\varphi_1 = \sphericalangle PAB$ și unghiul

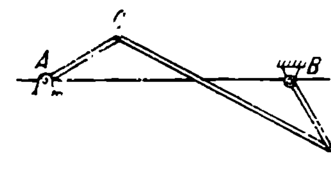
$\varphi_2 = 180° - \sphericalangle PBA$, precum și raportul dintre vitezele unghiulare $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$ și $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$ ale laturilor AD și BC.

Răspuns : $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{BD}{AC} = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi_1}{a^2 + c^2 + 2ac\cos\varphi_2}}$, în care $r_1 = AP$, $r_2 = BP$.

444. Să se afle baza și rostogolitoarea antiparalelogramului (vezi problema 442) așezat pe bara mare AB. Se dă

$$AB = CD = 2c > AC = BD = 2a.$$

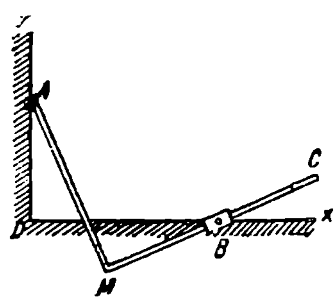
Răspuns : Două hiperbole identice cu axa reală egală cu $2a$, prima cu focarele în A și B, a doua cu focarele în C și D.



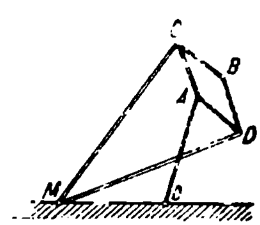
La problema 444

445. Un unghi drept AMC se mișcă în planul său astfel, încât extremitatea A alunecă pe axa coordonatelor, iar latura MC trece mereu prin punctul B, situat pe Ox la distanța a de O. Să se afle baza și rostogolitoarea, dacă $AM = OB$.

Răspuns : Ecuația bazei este $y^2 = (2x - a)a$, adică o parabolă cu directoarea Oy, focarul în punctul B și parametrul a. Ecuația rostogolitoarei este $y_1^2 = (2x_1 - a)\,a$, în care x_1 și y_1 sunt coordonatele sistemului mobil cu originea în M și axa x_1 orientată după MA. Rostogolitoarea este, prin urmare, o parabolă cu directoarea MC, focarul în A și parametrul a.



La problema 445



La problema 446

446. Un mecanism articulat („inversorul" lui Lipkin) are construcția arătată în figură, în care

$$OM = OA = r; \quad MC = MD = l;$$
$$AC = CB = BD = AD = a.$$

Să se afle traiectoria punctului B când mecanismul este în mișcare.

Răspuns : O dreaptă perpendiculară pe MO la distanța $\frac{l^2-a^2}{2r}$ de M.

447. Să se demonstreze, că extremitățile vectorilor care reprezintă vitezele punctelor unui segment de dreaptă, care se mișcă într'un plan fix, sunt așezate în linie dreaptă.

Indicație. Vitezele extremităților vectorilor se vor descompune în componente longitudinale și perpendiculare față de segmentul dat. Se va analiza separat deplasarea longitudinală și rotația segmentului.

448. Pe un segment de dreaptă AB, care se mișcă într'un plan fix, să se afle punctul M, a cărui viteză este orientată dealungul segmentului. Să se afle mărimea acestei viteze, distanța h a centrului instantaneu la segment și viteza instantanee unghiulară ω a segmentului AB.

Sunt cunoscute mărimile v_1 și v_2 ale vitezelor extremităților segmentului, unghiurile α_1 și α_2 dintre aceste viteze și segmentul dat și lungimea l a segmentului.

Răspuns : $AM = l\,\dfrac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$, $h = \dfrac{l}{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}$,

$$v=v_1\cos\alpha_1=v_2\cos\alpha_2,\quad \omega=\frac{v}{l}(\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2).$$

449. O tijă se mișcă în planul xOy astfel, încât capătul ei inferior A alunecă pe axa Ox, iar tija este tangentă la un cerc cu raza r și centrul în O.

Să se afle : viteza de modificare a unghiului OAB (dacă viteza capătului A este egală cu v), baza și rostogolitoarea tijei precum și viteza ei unghiulară instantanee ω.

Răspuns : 1) $\dfrac{d\varphi}{dt}=-\dfrac{rv}{x\sqrt{x^2-r^2}}$, unde $x=OA$, $\varphi=\sphericalangle OAB$;

2) ecuația bazei este $x^4-r^2x^2-r^2y^2=0$;

3) rostogolitoarea este parabola $y_1^2=rx_1$, axa tijei fiind axa y_1 iar originea axelor mobile în punctul A.

4) $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$.

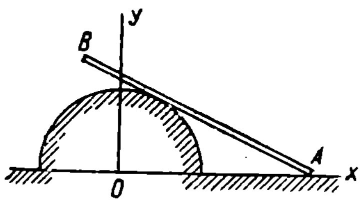
450. O tijă se mișcă în planul Oxy astfel încât capătul A alunecă pe Ox, iar tija trece mereu prin punctul M (O, h).

Să se afle baza, rostogolitoarea și viteza unghiulară instantanee a tijei, dacă viteza capătului A este v (comp. cu problema 449).

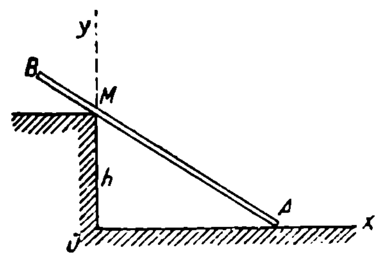
Răspuns : 1) se alege originea axelor fixe (x_1, y_1) în punctul M iar axele, paralele cu Ox și Oy. Se alege originea axelor mobile în A, iar axa ξ îndreptată dealungul tijei. In acest caz ecuația bazei este $x_1^2 = hy_1$, adică o parabolă iar ecuația rostogolitoarei $\xi^4 - h^2 (\xi^2 + \eta^2) = 0$;

2) viteza unghiulară instantanee este

$$\omega = \frac{hv}{x^2 + h^2}, \text{ în care } x = OA.$$



La problema 449



La problema 450

451. Tija AB de lungime l alunecă cu extremitățile ei pe laturile unui unghi drept xOy. Să se afle baza, rostogolitoarea și traiectoriile punctelor tijei. Să se afle deasemenea viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{w}$ a unui punct oarecare M al tijei, aflat la distanța m de extremitatea A, în ipoteza că viteza extremității A este constantă și egală cu u.

Răspuns : 1) traiectoriile sunt elipsele $\dfrac{x^2}{(l-m)^2} + \dfrac{y^2}{m^2} = 1$;

2) baza este cercul cu centrul în O și raza l. Rostogolitoarea este cercul cu raza $\dfrac{l}{2}$ și centrul în mijlocul tijei;

3) $v_x = \dfrac{l-m}{l} u$, $v_y = -\dfrac{m}{l} u \operatorname{ctg} \varphi$, $\operatorname{tg} (\bar{v}, x) = -\dfrac{m}{l-m} \operatorname{ctg} \varphi$;

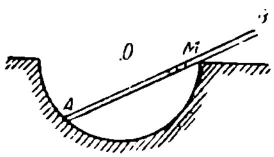
4) $w_x = 0$, $w_y = -\dfrac{mu^2}{l^2 \sin^3 \varphi}$, $w = |w_y|$, accelerația este paralelă cu axa y, φ este unghiul dintre tijă și axa x.

452. Un unghi rigid $AOB = \varphi$ se mişcă în planul său astfel, încât latura OA trece mereu printr'un punct fix M, iar latura a doua printr'un punct fix N.

Să se afle baza şi rostogolitoarea acestei mişcări.

Răspuns : Baza este cercul care trece prin O, M şi N, rostogolitoarea este un cerc cu rază de două ori mai mare decât raza bazei, cu centrul în O. Centrul instantaneu de rotaţie (punctul de contact al bazei şi rostogolitoarei) se află pe bază în punctul diametral opus punctului O.

453. O tijă AB de lungime l se mişcă pe un plan fix astfel, încât capătul ei A alunecă pe partea interioară a unui cerc fix cu raza r $\left(r \leqslant \frac{1}{2} l\right)$, iar tija trece mereu prin punctul M al acestui cerc.



La problema 453

Să se afle traiectoriile punctelor tijei precum şi baza şi rostogolitoarea mişcării tijei.

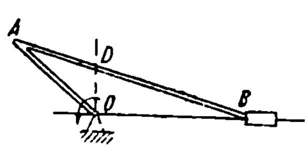
Răspuns : 1) traiectoria unui punct situat la distanţa a de capătul A, este melcul lui Pascal, cu ecuaţia polară $\rho = 2r \cos \theta - a$, polul fiind punctul M, şi axa polară trecând prin O;

2) baza este cercul dat. Rostogolitoarea este un cerc cu raza $2r$, cu centrul în A.

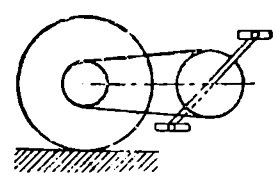
454. Dreapta AB se roteşte într'un plan în jurul unui punct oarecare O, care se află la distanţa $OC = \frac{p}{2}$ de dreaptă. Să se afle înfăşurătoarea vitezelor instantanee a tuturor punctelor dreptei.

Răspuns : Parabola $y^2 = 2px$, raportată la axele CO şi AB cu originea în C.

455. Manivela OA se roteşte în jurul punctului O cu viteza unghiulară constantă ω; prin intermediul bielei AB ea



La problema 455


La problema 456

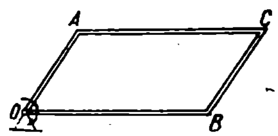
pune în mişcare culisa B. Să se arate, că viteza culisei este egală cu $\omega \cdot OD$, unde D este punctul de intersecţie dintre AB şi perpendiculara, ridicată în punctul O pe dreapta OB.

456. Viteza punctelor de pe lanțul de transmisie al unei biciclete în raport cu cadrul este egală cu u; să se afle viteza v a centrului roții dinapoi, știind că raza ei este R, iar raza pinionului r.

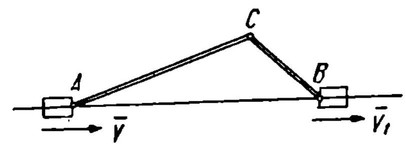
Răspuns: $v = u \frac{R}{r}$.

457. In paralelogramul articulat $OACB$ punctul O este fix, barele OA și OB se rotesc uniform în sensul acelor de ceasornic cu vitezele unghiulare ω și ω_1; $AO = a$, $OB = b$. Să se afle baza și rostogolitoarea pentru barele AC și BC.

Răspuns: Cercuri cu centrele în O, A și B.



La problema 457

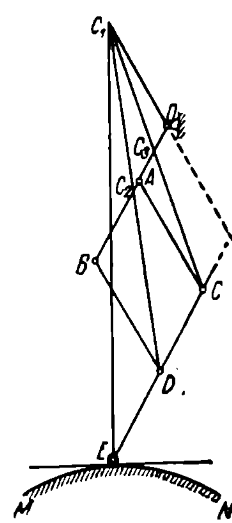


La problema 458

458. Două bare AC și BC sunt legate între ele printr'o articulație în punctul C și de două culise în punctele A și B, care se mișcă în linie dreaptă cu vitezele $\overline{v}$ și $\overline{v_1}$. Să se afle pe cale grafică viteza punctului C și centrele de rotație instantanee ale barelor AC și BC.

Răspuns: Se iau pe CB și pe prelungirea barei AC segmentele $\overline{Cb}$ și $\overline{Ca}$, respectiv egale cu proiecțiile vitezelor $\overline{v_1}$ și $\overline{v}$ pe direcțiile CB și AC; din punctele a și b se duc perpendiculare pe Aa și Bb, care se intersectează în punctul D. Segmentul CD reprezintă viteza punctului C. Perpendicularele duse pe AC și CD respectiv din punctele A și C, se intersectează în centrul de rotație căutat al barei AC.

459. Un paralelogram articulat $ABCD$ are pe prelungirea lui BA un punct fix O și pe prelungirea lui CD o rolă E, care se poate rostogoli pe profilul fix MN. Să se determine în mod grafic centrele instantanee de rotație ale tuturor laturilor paralelogramului.

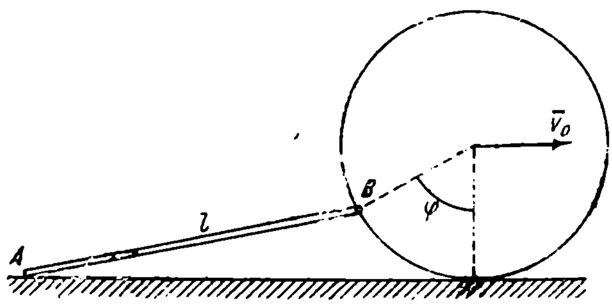


La problema 459

Rezolvare: Se află întâi centrul instantaneu de rotație al barei CD. Viteza punctului E este orientată după tangenta la curba MN. Fie încă un al doilea paralelogram articulat AOO_1C. Când rola E se deplasează, O_1 se va mai mișca pe un cerc cu centrul în O; prin urmare, direcția perpendicularei pe viteza lui coincide cu dreapta O_1O; de aici se trage concluzia, că centrul instantaneu de rotație al laturii DC se află la intersecția prelungirii dreptei O_1O cu normala EC_1. Întrucât punctele A și B aparțin zalei OB, care se rotește în jurul lui O, centrele instantanee de rotație ale laturilor BD și AC se află respectiv în punctele C_2 și C_3.

460. Un disc se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă cu viteza constantă v_0. Bara AB este fixată de disc printr'o articulație în punctul B, aflat pe periferia discului și alunecă cu capătul A pe dreapta dată. Să se afle viteza capătului A al barei în funcție de unghiul de rotație φ al discului. Lungimea barei este l, raza discului r.

Răspuns: $v = 2v_0 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} + 1\right]$.



La problema 460

461. 1) Să se afle centroida triedrului mobil al unei curbe plane date, al cărui vârf se mișcă pe această curbă. 2) Dacă θ este unghiul de contingență, se poate scrie:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \rho\omega;$$

diferențiind această expresie în raport cu timpul t, se găsește:

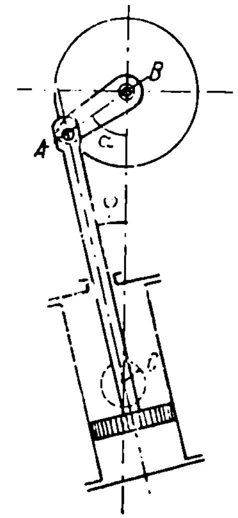
$$\frac{dv}{dt} = w_t = \rho\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{d\rho}{dt}.$$

Ce exprimă termenul al doilea din membrul doi al formulei obținute?

Răspuns: Centroidele sunt: evoluta curbei date și axa triedrului mobil, coincizând cu normala principală. Termenul al doilea din formula obținută, exprimă accelerația centrului instantaneu al vitezelor.

462. Pe figură este reprezentată schema unui mecanism de bielă manivelă cu cilindru oscilant, care se poate roti în jurul punctului fix C. Să se determine viteza unghiulară Ω a cilindrului în funcție de viteza unghiulară ω a manivelei AB și de unghiul ei de rotație φ, știind că $AB=a$ și $BC=b$.

Răspuns: $\Omega = \dfrac{a(b\cos\varphi - a)\omega}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$.

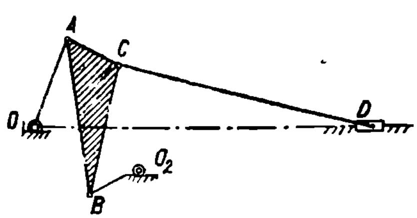


La problema 462

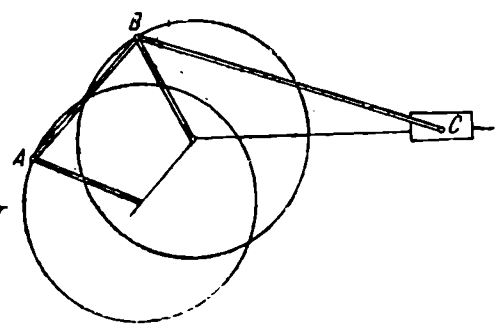
463. Pe figură este reprezentată schema mecanismului unei pompe Holst. Să se construiască centrul instantaneu de rotație al barei CD.

Răspuns: Se prelungesc liniile AO_1 și O_2B până la intersecția lor în punctul K. Centrul de rotație căutat se află la intersecția liniei KC cu perpendiculara, ridicată în punctul D pe linia O_1D.

464. Pe figură este reprezentată schema unui mecanism cu două manivele. Cunoscând viteza punctului A, să se afle în mod grafic viteza culisei C.



La problema 463



La problema 464

465. Un segment drept AB de lungime constantă alunecă cu extremitățile sale A și B, pe laturile unui unghi drept xOy. Să se afle prin construcție geometrică un cerc în planul mobil, care să se rostogolească (cu alunecare) pe dreapta fixă dată.

Răspuns: Centrul cercului căutat se află la intersecția bazei cu dreapta, dusă din O paralel cu dreapta fixă dată.

466. Parabola $y^2=2px$ se rostogolește fără frecare, pe o dreaptă fixă. Să se afle traiectoria focarului parabolei.

Indicație. Unghiul dintre axa parabolei și perpendiculara pe dreapta fixă este egal cu unghiul dintre viteza focarului și această dreaptă; în afară de aceasta, direcția vitezei este direcția tangentei la traiectoria căutată.

Răspuns: Lănțișorul $y = \frac{p}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{2x}{p}\right)$.

467. Să se inverseze problema precedentă, adică să se afle rostogolitoarea, știind că un punct din planul ei descrie lănțișorul

$$y = \frac{p}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{2x}{p}\right)$$

și că baza este dreapta $y = 0$.

Răspuns: O parabolă.

468. Spirala logaritmică $r = ae^{k\varphi}$ se rostogolește, fără alunecare, pe o dreaptă fixă. Să se afle traiectoria polului ei.

Răspuns: O linie dreaptă, înclinată cu unghiul $\alpha = \operatorname{arc\,tg} k$ față de dreapta fixă dată.

469. Să se inverseze problema precedentă, adică să se afle rostogolitoarea, dacă un punct din planul ei descrie o linie dreaptă și baza este o dreaptă.

470. O dreaptă se rostogolește, fără alunecare, pe un cerc fix de rază R. Să se afle traiectoriile punctelor, solidar legate de această dreaptă și, în particular, al punctului care coincide în momentul inițial cu centrul cercului fix.

Răspuns:
$$x = -R\alpha\cos\alpha + \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha,$$
$$y = R\alpha\sin\alpha - \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha,$$

în care x și y sunt coordonatele fixe, a căror origine se află în centrul cercului mobil, axa x este paralelă cu poziția inițială a dreptei mobile, iar α este unghiul dintre dreaptă și axa x. Axele mobile (ξ, η) coincid în momentul inițial cu cele fixe. Pentru $\xi = \eta = 0$ se obține $x = -R\alpha\cos\alpha$, $y = R\alpha\sin\alpha$, adică spirala lui Arhimede.

§ 20. Mișcarea de șurub a unui corp rigid

1. Când un corp rigid se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe fixe și pe lângă aceasta, are o mișcare de translație, a cărei viteză $\overline{v}$ este îndreptată dealungul axei de rotație, atunci corpul execută o mișcare elicoidală. In acest caz toate punctele corpului descriu elice, situate pe cilindri circulari având razele egale cu distanțele punctelor corpului la axa de rotație; această axă se numește, în cazul mișcării de șurub, axa *elicei* sau axă de *roto-translație* (fig. 27).

Un punct M, aflat la distanţa r de axa elicei, descrie o linie elicoidală, trasată pe cilindrul cu raza r. Dacă se desfăşoară acest cilindru în plan, în cazul general linia elicoidală se va prezenta în forma unei curbe oarecare; iar unghiul α, dintre această curbă şi generatoarele cilindrului, va fi variabilă. O astfel de elice se numeşte elice cu înclinaţie variabilă. Dacă unghiul α este constant, elicea este cu înclinaţie constantă; pe desfăşurata cilindrului ea este reprezentată sub forma unei linii (fig. 28). Distanţa între punctele, în care elicea intersectează consecutiv aceeaşi generatoare a cilindrului, se numeşte *pasul* şurubului. Dacă h este pasul şurubului, r raza cilindrului şi α unghiului de înclinare, atunci

Fig. 27

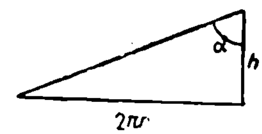


Fig. 28

$$\frac{h}{2\pi r} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Elicea este astfel perfect determinată prin două dintre mărimile amintite.

Când ω şi v sunt constante, atunci $h = 2\pi \frac{v}{\omega}\cdot$ Mărimea $p = \frac{v}{\omega}$ se numeşte parametrul elicei; prin urmare, $h = 2\pi p$.

Din ultima formulă reiese limpede, că atunci când un corp are o mişcare elicoidală, elicele descrise de punctele corpului, au acelaşi pas, prin urmare şi acelaşi parametru; înclinarea lor (unghiul α) va creşte pe măsură ce punctul se depărtează de axa elicei.

2. Orice deplasare a unui corp rigid, dintr'o poziţie în alta, este echivalentă cu o deplasare elicoidală (teorema lui Chasles). Deaceea mişcarea unui corp poate fi închipuită ca o succesiune neîntreruptă de mişcări elicoidale infinit de mici; locul geometric al axelor instantanee în spaţiu, formează o suprafaţă riglată, numită *axoidă fixă*. Locul geometric al axelor elicoidale instantanee, în corpul în mişcare, se numeşte *axoidă mobilă*.

471. Viteza punctului A al unui corp este egală cu $\bar{v}$ şi formează unghiul α cu axa de roto-translaţie. Să se afle viteza de alunecare u şi viteza unghiulară de rotaţie ω, când distanţa dela punctul A la axă este a.

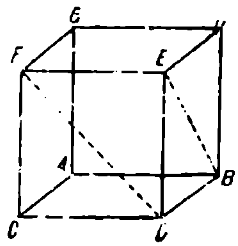
Răspuns: $u = v \cos \alpha$, $\omega = \frac{v \sin \alpha}{a}\cdot$

472. Să se demonstreze exactitatea următoarei construcţii a axei instantanee de roto-translaţie.

Dintr'un punct arbitrar O, din spaţiu, se duc trei vectori $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ şi $\overline{OC}$, egali din punct de vedere geometric cu vitezele a trei puncte oarecare M, M' şi M'' ale corpului. Axa instantanee este perpendiculară pe planul care trece prin punctele A, B şi C.

Fie m, m', ma şi $m'b$ proiecţiile punctelor M şi M' şi a vitezelor lor pe acest plan; punctul de intersecţie al perpendicularelor, ridicate în punctele m şi m' pe proiecţiile ma şi $m'b$, aparţine axei instantanee.

473. Se dă cubul $ABCDEFGH$ cu muchia de a m. Viteza punctului A este de a m/s şi orientată după AG; viteza punctului B este egală cu $a\sqrt{2}$ m/s şi orientată după BE, viteza punctului C este egală cu $a\sqrt{2}$ m/s şi paralelă cu DF. Să se determine poziţia axei instantanee de roto-translaţie, viteza de alunecare u şi viteza unghiulară de rotaţie ω.



La problema 473

Răspuns: Axa de roto-translaţie coincide cu AG; $u = a$ m/s; $\omega = 1\ s^{-1}$.

474. Pe elicea $(\bar{v}, \bar{\omega})$ $\bar{v}$ este viteza de translaţie şi $\bar{\omega}$ viteza unghiulară. Să se afle locul geometric al punctelor, a căror viteză este $v\sqrt{2}$.

Răspuns: Un cilindru circular de rază $r = \dfrac{v}{\omega} = p$ (parametrul elicei), a cărui axă coincide cu axa elicei.

475. Un şurub cu pasul h se mişcă într'o piuliţă cu viteza de translaţie v. Să se afle viteza lui unghiulară.

Răspuns: $\omega = \dfrac{2\pi v}{h}$ sau $n = \dfrac{60 v}{h}$ ture/minut.

476. Raza unui şurub este de r cm, unghiul de înclinare al filetului este α. Acest şurub se roteşte în piuliţă cu viteza unghiulară ω 1/s. Să se afle viteza lui de translaţie v.

Răspuns: $v = r\,\omega \operatorname{ctg}\alpha$ cm/s.

477. Să se determine pasul h al unui şurub, astfel ca viteza lui unghiulară ω să fie numeric egală cu viteza lui de translaţie v mm/s.

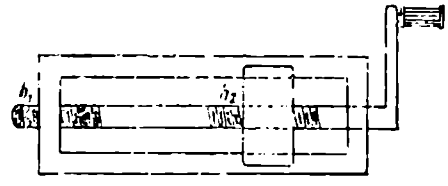
Răspuns: $h = 2\pi \approx 6{,}3$ mm.

478. Două puncte ale unui şurub, sunt situate pe acelaşi diametru la distanţele r_1 şi r_2 de axa şurubului. Ce relaţie există între distanţele r_1 şi r_2 dacă vitezele acestor puncte sunt perpendiculare între ele, iar viteza de translaţie şi cea unghiulară a şurubului sunt egale ca mărime cu v şi ω?

Răspuns: $r_1 r_2 = \left(\dfrac{v}{\omega}\right)^2 = p^2.$

479. Un şurub diferenţial are construcţia arătată în figură. Pasul primului filet este h_1, pasul celui de al doilea, care mișcă culisa este h_2. Să se afle viteza v a culisei, dacă primul filet este pe dreapta, al doilea filet pe dreapta sau pe stânga, iar mânerul se învârtește astfel încât primul filet se înșurubează, făcând n ture pe minut.

Răspuns : 1) filetul al doilea este pe dreapta : $v = \frac{h_1 - h_2}{60} n$;

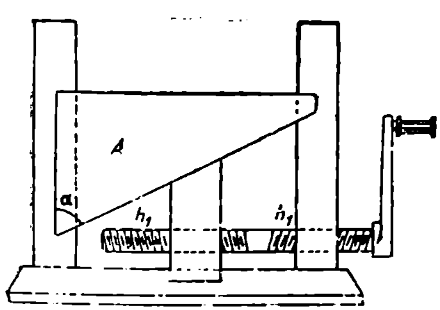


La problema 479

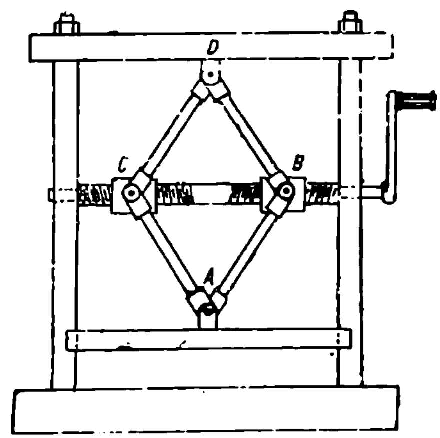
2) filetul al doilea este pe stânga : $v = \frac{h_2 + h_1}{60} n$, direcția vitezei v fiind considerată pozitivă dela dreapta la stânga.

480. Pe figură este reprezentată în mod schematic o presă. Fileturile șuruburilor au direcția arătată; pasurile lor sunt egale cu h_1 și h_2. Unghiul glisierei A este egal cu α. Să se afle viteza glisierei, dacă mânerul face n ture pe minut în sens contrar acelor de ceasornic.

Răspuns : Alunecătorul se ridică cu viteza $v = \frac{h_1 + h^2}{60} n \operatorname{ctg} \alpha$.



La problema 480



La problema 481

481. O presă cu articulații constă dintr'un romb articulat, care are două vârfuri fixate prin articulații de piulițele C și B ale unui șurub diferențial cu fileturi, având pasul egal h ; axa șurubului se poate deplasa liber prin mișcări de translație în sus și în jos, alunecând cu capetele în cadrul presei.

Să se afle viteza punctului A, dacă mânerul presei face n ture pe minut, în sensul acelor de ceasornic.

Răspuns: Punctul A coboară cu viteza $v = \frac{hn}{30} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, în care $\alpha = \sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB \left(\text{viteza axei şurubului este } \frac{v}{2}\right)$.

§ 21. Compunerea mişcărilor unui corp rigid

1. Prin compunerea unor mişcări de translaţie se obţine o mişcare de translaţie a cărei viteză este egală cu suma (geometrică) vitezelor mişcărilor componente.

2. O rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi o mişcare de translaţie cu viteza $\bar{v}$ perpendiculară pe axa de rotaţie dau o rotaţie cu aceeaşi viteză unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul unei axe, paralelă cu cea dată şi situată la distanţa $d = \frac{v}{\omega}$ de aceasta (fig. 29).

3. O rotaţie cu viteza unghulară $\bar{\omega}$ şi o mişcare de translaţie cu viteza $\bar{v}$, paralelă cu axa de rotaţie, dau o mişcare elicoidală cu parametrul $\frac{v}{\omega}$.

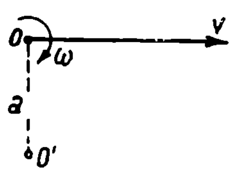


Fig. 29

7. Intrucât viteza unghiulară de rotaţie este un vector alunecător, rotaţiile ale căror axe se intersectează, se compun într'o singură rotaţie, cu viteza unghiulară egală cu suma (geometrică) vitezelor unghiulare ale rotaţiilor componente (analogie cu compunerea forţelor concurente). La compunerea rotaţiilor în jurul unor axe paralele se aplică teoreme, analoage teoremelor corespunzătoare dela compunerea forţelor paralele.

5. Un cuplu de rotaţii este totalitatea a două rotaţii în jurul unor axe paralele, cu viteze unghiulare egale, îndreptate în direcţii opuse. Un cuplu de rotaţii este echivalent cu o mişcare de translaţie cu viteza perpendiculară pe planul cuplului şi egală ca mărime cu momentul cuplului, (fig. 30) adică

$$v = \omega d;$$

deci viteza unei mişcări de translaţie este analoagă cu momentul unui cuplu de forţe.

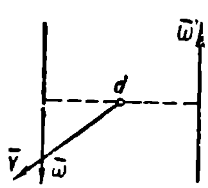


Fig. 30

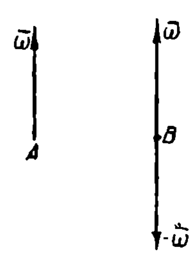


Fig. 31

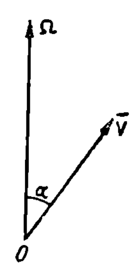


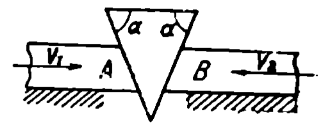
Fig. 32

6. Viteza unghiulară $\bar{\omega}$ poate fi transferată din punctul A în punctul B (fig. 31), adăugându-se cuplul de rotaţie corespunzător, adică viteza de translaţie (comp. p. 2 al acestui paragraf).

7. Când un corp execută mai multe rotaţii în jurul unei axe diferite, atunci vectorii vitezelor unghiulare $\bar{\omega}$ pot fi mutaţi într'un centru oarecare O ca şi vec-

torii forțelor în statică. Ca rezultat al acestei mutări se obține (fig. 32) viteza unghiulară rezultantă $\overline{\Omega} = \Sigma\,\overline{\omega}$ și viteza rezultantă a mișcării de translație $\overline{v} = \Sigma MOM_0\,\overline{\omega}$. Dacă se descompune viteza $\overline{v}$ după direcția vectorului $\overline{\Omega}$ și după direcția perpendiculară pe $\overline{\Omega}$, se obține o mișcare elicoidală cu axa paralelă cu $\overline{\Omega}$, situată la distanța $d = \dfrac{v \sin \alpha}{\Omega}$ de Ω și cu parametrul $p = \dfrac{v \cos \alpha}{\Omega}$, α fiind unghiul dintre $\overline{\Omega}$ și $\overline{v}$. Această axă elicoidală se numește axă elicoidală instantanee (sau axă instantanee de roto-translație). Dacă $\overline{\Omega} = 0$, se obține o mișcare de translație: dacă vectorul v este perpendicular pe $\overline{\Omega}$, o mișcare de rotație (comp. „Statica", § 5).

482. O pană triunghiulară cu fețele laterale egale, cu unghiurile la bază egale cu α, este așezată între două piese, A și B, care se mișcă în linie dreaptă pe un plan orizontal, cu viteze date v_1 și v_2. Să se determine viteza mișcării de translație a penei.



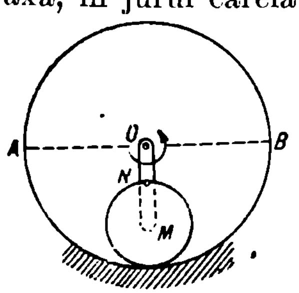
La problema 482

Răspuns: $v = \dfrac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2\,v_1 v_2 \cos 2\alpha}}{2 \cos \alpha}$.

483. O bară dreaptă AB alunecă cu capetele sale pe două drepte conducătoare Ox și Oy perpendiculare între ele, care se rotesc în jurul punctului O cu viteza unghiulară constantă ω. Unghiul de înclinare al barei față de linia Ox variază după legea $\varphi = \varphi_0 \pm \omega t$. Să se determine traiectoria absolută a unui punct oarecare M al barei.

Răspuns: In ambele cazuri traiectoria este un cerc descris cu viteza unghiulară 2ω.

484. In centrul O al unui cerc fix de rază R se află o axă, în jurul căreia se rotește bara OM (manivelă) de lungime p. La capătul barei este așezată liber o roată de rază $r = R - p$, situată în planul cercului și tangentă interior la cerc. Să se afle, pe cale grafică, punctul de pe circumferința roții mici, a cărui viteză trece prin punctul A, extremitatea diametrului perpendicular pe OM. Să se afle această viteză pe cale analitică.



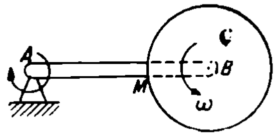
La problema 484

Răspuns: Punctul căutat se află la intersecția dreptei AN cu cercul mic, N fiind punctul de intersecție al dreptei OM cu același cerc.

$$v = \frac{2Rp\Omega}{\sqrt{R^2 + (2p - R)^2}},$$

în care Ω este viteza unghiulară a barei.

485. Bara AB de lungime $2a$ (manivelă) se rotește într'un plan fix în jurul capătului A cu viteza unghiulară constantă Ω în sensul acelor de ceasornic. La capătul B al barei este axată liber o roată de rază a, care se rotește în același plan, însă în sens contrar, cu viteza unghiulară constantă ω în raport cu bara. Să se aleagă ω astfel, încât accelerația absolută a unui punct M al roții, care se află într'un moment dat deasupra barei, să fie egală cu zero.



La problema 485

Răspuns : $\omega = (1 + \sqrt{2})\,\Omega$.

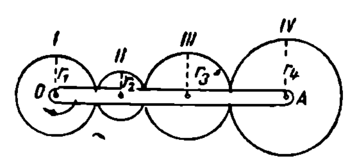
486. In condițiile problemei precedente, se cere să se afle accelerația absolută w a unui punct oarecare M, care se mișcă cu o viteză unghiulară (relativă) constantă ω_1 pe periferia roții în sensul acelor de ceasornic, în momentul când acest punct se află deasupra barei. Să se cerceteze formula obținută pentru cazurile $|\omega_1| = |\omega|$ și $\omega_1 = 0$.

Răspuns : 1) $w = a\,[(\omega_1 - \omega)^2 + 2\,(\omega_1 - \omega)\,\Omega - \Omega^2]$;

2) Primul caz particular : $w = -a\Omega^2$; al doilea caz : $w = a\,[(\Omega - \omega)^2 - 2\Omega^2]$.

Drept sens pozitiv pentru vitezele unghiulare se ia sensul acelor de ceasornic, iar pentru accelerații, sensul la dreapta lui M.

487. Roata I este fixă. Pe axa ei este axată liber bara OA, care se rotește în jurul lui O cu viteza unghiulară Ω. Pe bară sunt așezate roțile II, III și IV, angrenate între ele și cu roata I. Să se afle viteza unghiulară ω'_4 a roții IV în raport cu bara, precum și viteza ei unghiulară absolută ω_4.



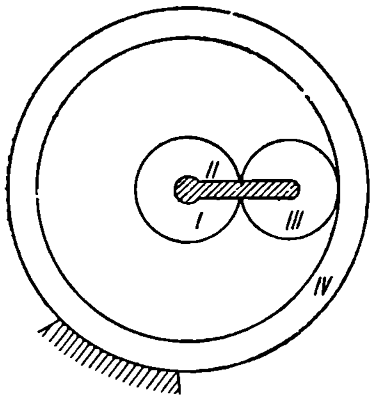
La problema 487

Răspuns : $\omega'_n = (-1)^n \cdot \frac{r_1}{r_n}\,\Omega$; $\omega_n = \frac{(-1)^n r_1 + r_n}{r_n}\,\Omega$, n fiind numărul roților. Pentru $n = 4$ se găsește :

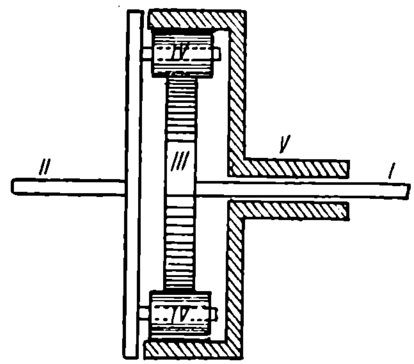
$$\omega'_4 = \frac{r_1}{r_4}\,\Omega\,;\quad \omega_4 = \frac{r_1 + r_4}{r_4}\,\Omega.$$

488. Pe o axă comună sunt axate liber roata I și bara II ; la capătul barei este așezată, deasemenea liber, roata III, care este angrenată în interior cu roata fixă IV. Cunoscând numărul dinților z_1, z_3, z_4 ai acestor roți, să se afle relația dintre vitezele unghiulare ale roții I și a barei, a cărei viteză este ω_2.

Răspuns : $\omega_1 = \left(1 + \frac{z_4}{z_1}\right) \omega_2.$



La problema 488



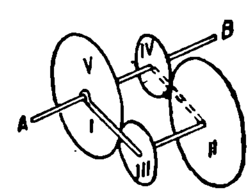
La problema 489

489. Pe arborele I este fixată cu pene, roata III, iar pe arborele II este fixat un disc pe care sunt axate liber roțile IV. Aceste roți se află în angrenare interioară cu roata de cuplaj V, axată liber pe arborele I. Cunoscând numărul dinților tuturor roților și numerele n_3 și n_2 de ture ale roții III și ale arborelui II, să se afle numărul de ture n_5 ale roții de cuplaj.

Răspuns : $n_5 = (n_3 - n_2)\frac{z_3}{z_5} + n_2.$

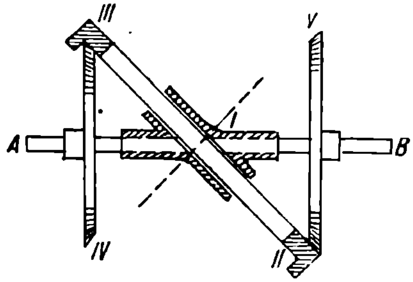
490. Pe axa AB sunt axate liber roțile IV și V, precum și cadrul I, pe care se pot învârti două roți II și III, solidar legate. Cunoscând numărul dinților $z_2 = 120$, $z_3 = 118$, $z_4 = 116$ și $z_5 = 118$ și vitezele unghiulare ω_1 și ω_4, a cadrului și a roții IV, să se afle viteza unghiulară ω_5 a roții V.

Răspuns : $\omega_5 = \frac{\omega_1 + 29\,\omega_4}{30}.$



La problema 490

491. Pe axa AB sunt axate liber două roți conice IV și V și bucșa I a unei roți paralele cu primele două (această roată nu este reprezentată în figură). Pe bucșă este montat un manșon înclinat, în care se poate roti liber o roată bilaterală II-III, angrenată cu roțile conice IV și V. Cunoscând vitezele unghiulare ω_5 și ω_1 ale roții V și ale bucșei, precum și numărul dinților tuturor roților, să se afle viteza unghiulară a roții IV.



La problema 491

Răspuns : $\omega_4 = k\omega_5 + (1-k)\omega_1$, în care $k = \dfrac{z_2 \cdot z_5}{z_3 \cdot z_4}$.

492. O roată de rază r se rostogolește, fără alunecare, pe altă roată de rază R, la exteriorul sau în interiorul ei, înconjurând-o de n ori pe minut. Să se afle vitezele unghiulare absolute ω_1 și ω_2 în ambele cazuri.

Răspuns : $\omega_1 = \dfrac{\pi}{30}\dfrac{R+r}{r} n$; $\omega_2 = \dfrac{\pi}{30}\dfrac{R-r}{r} n$.

493. Un corp se rotește simultan, în același sens, cu aceeași viteză unghiulară ω în jurul a trei axe paralele. Să se determine poziția axei și viteza unghiulară a rotației rezultante.

Răspuns : Axa trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC, în care A, B și C sunt punctele de intersecție ale axelor date cu planul perpendicular la ele; viteza unghiulară este $\Omega = 3\omega$.

494. Intrebarea din problema precedentă în ipoteza că rotația în jurul axei B este orientată în sens opus celorlalte două rotații.

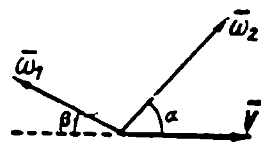
Răspuns : Axa trece prin vârful D al paralelogramului $ABCD$, în care AC este diagonala; $\Omega = \omega$.

495. Un corp se rotește în jurul unei axe orizontale OA cu accelerația unghiulară constantă 3 s^{-2}. La rândul său, axa se rotește în jurul unei axe fixe verticale OB, cu accelerația unghiulară 4 s^{-2}. Să se afle viteza unghiulară a rotației rezultante, dacă în momentul inițial corpul se află în repaus. Să se afle axoida fixă și mobilă.

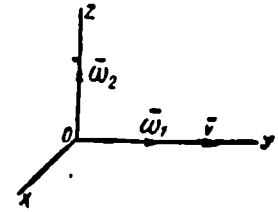
Răspuns : $\Omega = 5\,t$; axoidele sunt două conuri circulare, cu axele OA și OB.

496. Intr'un moment dat, un corp execută două rotații cu vitezele unghiulare $\omega_2 = 3$ s^{-1} și $\omega_1 = \sqrt{3}$ s^{-1} și o mișcare de translație, cu viteza $v=6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Vectorii $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ și $\overline{v}$ sunt situați în același plan. Să se determine mișcarea rezultantă a corpului, dacă $\sphericalangle\ \alpha = 60°$ și $\sphericalangle\ \beta=30°$.

Răspuns: O rotație cu viteza unghiulară $\Omega = 2\sqrt{3}\ \mathrm{s}^{-1}$ în jurul unei axe, perpendiculară pe $\overline{v}$, paralelă cu planul desenului și aflat la distanța $\sqrt{3}$ m de acest plan.



La problema 496



La problema 497

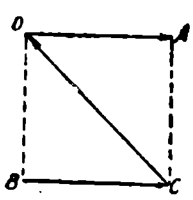
497. Un corp execută două rotații în jurul axelor Oy și Oz, cu vitezele $\overline{\omega}_1$ și $\overline{\omega}_2$ și o mișcare de translație dealungul axei Oy, cu viteza $\overline{v}$. Să se determine poziția axei de roto-translație, viteza unghiulară de rotație și viteza de alunecare.

Răspuns: Axa de roto-translație trece printr'un punct de coordonate $y=z=0$, $x = \frac{v\omega_2}{\omega_1^2+\omega_2^2}$; $\Omega = \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$; mărimea vitezei de alunecare este $u = v\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}$.

498. Să se compună două mișcări elicoidale antiparalele $(\overline{\omega}, \overline{v})$ și $(-\overline{\omega}, -\overline{v})$, ale căror axe se află la distanța d una de alta.

Răspuns: O mișcare de translație cu viteza $V = \omega d$, perpendiculară pe planul axelor elicelor date.

499. Un corp participă simultan la trei rotații în jurul a trei axe, așezate pe două laturi și o diagonală (OA, BC și CO) a pătratului $OABC$, având vitezele unghiulare corespunzătoare proporționale cu lungimile acestor segmente.

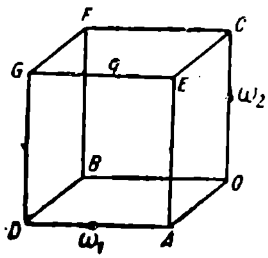


La problema 499

Să se înlocuiască acest sistem de rotații printr'o rotație în jurul unei axe, care trece prin O și o mișcare de translație corespunzătoare. Apoi să se înlocuiască sistemul printr'o singură rotație.

Răspuns: 1) o rotație în jurul unei axe, care trece prin O și este paralelă cu BA cu viteza unghiulară $\omega\sqrt{2}$; o mișcare de translație cu viteza egală numeric cu $OA \cdot \omega$, perpendiculară pe planul pătratului și orientată spre cititor; 2) o rotație în jurul axei BA cu viteza unghiulară $\omega\sqrt{2}$, unde ω este viteza unghiulară în jurul axei OA.

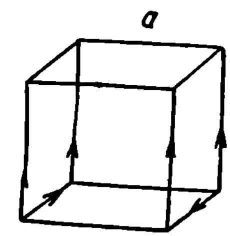
500. Un cub, cu muchia a se rotește simultan cu viteze unghiulare $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$, egale ca mărime, în jurul muchiilor sale neparalelele, care nu se intersectează, AD și OC, cum se arată în figură. Să se compună aceste rotații.



La problema 500

Răspuns: O mișcare elicoidală, care pornește din mijlocul muchiei OA spre mijlocul muchiei FG și parametrul $\frac{a}{2}$ (comp. problema 108).

501. Un corp se rotește simultan cu viteze unghiulare, egale ca mărime cu ω, în jurul a șase axe, așezate cum se arată în figură, dealungul muchiilor cubului. Să se înlocuiască acest sistem de rotații printr'o mișcare elicoidală. (Lungimea muchiei cubului este a).



La problema 501

Răspuns: O elice, a cărei axă trece prin mijlocul suprafețelor superioară și inferioară. Viteza unghiulară este $\Omega = 4\omega$ (orientată de jos în sus), viteza de translație este $V = a\omega$ și orientată de sus în jos (filet la stânga).

502. Să se compună trei rotații $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ în jurul a trei axe perpendiculare între ele, așezate cum se arată în figură, dealungul muchiilor unui paralelipiped dreptunghic, care au lungimile a, b și c.

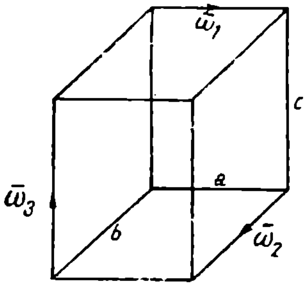
Răspuns: O elice. Viteza unghiulară $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$. Viteza de translație $V = \frac{\omega_1\omega_3 b - \omega_2\omega_1 c + \omega_3\omega_2 a}{\Omega}$.

503. Să se adauge mișcării elicoidale $(\bar{\omega}, \bar{v})$ o viteză de translație $\bar{v}'$, sub unghiul α față de axa ei.

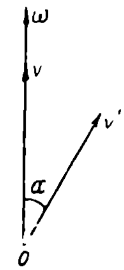
Răspuns: Axa elicei este paralelă cu axa dată și se află la distanța $d = \frac{v'}{\omega} \sin\alpha$ de ea. Viteza unghiulară rămâne cea anterioară. Viteza de translație va fi egală cu $v + v' \cos\alpha$.

504. Un corp participă simultan la șase mișcări elicoidale, ale căror axe sunt așezate pe muchiile unui cub, ca în figură.

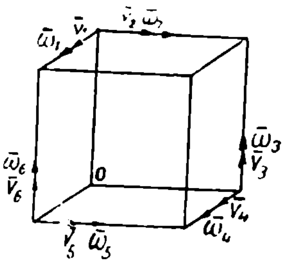
Să se afle mişcarea rezultantă, dacă vitezele unghiulare şi vitezele de translaţie, ale tuturor elicelor au module egale ω şi v.



La problema 502



La problema 503



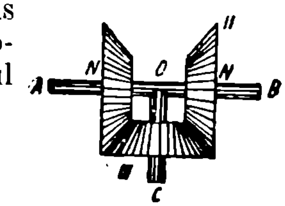
La problema 504

Răspuns : O mişcare elicoidală, având ca axă diagonala cubului, care trece prin O. Viteza unghiulară $\Omega = 2\sqrt{3}\,\omega$. Viteza de translaţie $V = 2\sqrt{3}\,v$. Parametrul este egal cu parametrul fiecărei elice componente.

505. O transmisie diferenţială are construcţia arătată în figură. Axa AB, pe care se rotesc liber două roţi dinţate conice I şi II, cu razele R, este solidară cu axa perpendiculară OC, pe care se roteşte roata III cu raza r. Roţilor I şi II li se imprimă viteza de n_1 şi n_2 ture pe minut.

Să se afle : 1) viteza unghiulară Ω a roţii III în raport cu axa AB, 2) viteza ei unghiulară ω_3 (sau numărul n_3 al turelor pe minut) în jurul axei OC, 3) axoidele ei.

Răspuns : Considerând drept sens pozitiv de rotaţie al roţilor I şi II şi al axei AB sensul de rotaţie al acelor de ceasornic văzut din punctul A şi drept sens pozitiv de rotaţie al roţii III, sensul de rotaţie al acelor de ceasornic, văzut din punctul C, se găseşte :



La problema 505

$$1)\ \Omega = \frac{\pi}{60}(n_2 + n_1) = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2};$$

$$2)\ \omega_3 = \frac{\pi}{60}(n_2 - n_1)\frac{R}{r} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\,\frac{R}{r};$$

3) axoida fixă este un con circular cu vârful în O şi înălţimea îndreptată dealungul axei AB; unghiul α dintre generatoarea şi înălţimea acestui con este dat de

$$\text{arc ctg}\,\frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\,\frac{r}{R}.$$

Axoida mobilă este deasemenea un con circular, cu axa îndreptată în direcția OC, care se rostogolește pe cea fixă.

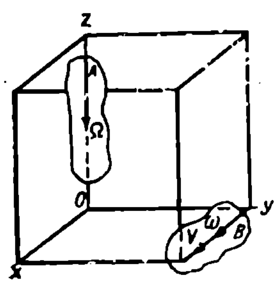
506. Un disc cu raza R având unghiul dintre planul său și verticală egal cu α, se rostogolește, fără alunecare, pe un plan orizontal, descriind pe acest plan un cerc, prin centrul căruia trece mereu axa discului.

Să se afle axoidele și viteza unghiulară absolută ω_0 a discului în jurul axei sale, viteza liniară v_0 a centrului discului, viteza liniară v_1 a punctului celui mai de sus al discului, știind că centrul discului descrie o circumferință complectă într'o mișcare uniformă în interval de T secunde.

Răspuns : Axoida fixă este planul orizontal, pe care se rostogolește discul. Axoida mobilă este un con drept, care are ca bază discul și ca vârf punctul O.

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},\quad v_1 = 2v_0,\quad \omega = \frac{2\pi}{T}\operatorname{ctg}\alpha,\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}\operatorname{cosec}\alpha.$$

507. Un corp A se rotește cu viteza unghiulară constantă $\bar{\Omega}$ în jurul unei axe, care coincide cu muchia egală cu a a unui cub. Corpul B are o mișcare elicoidală $(\bar{\omega}, \bar{v})$, a cărei axă coincide cu altă muchie a cubului, așa cum se vede pe figură. Să se afle mișcarea corpului B în raport cu corpul A.

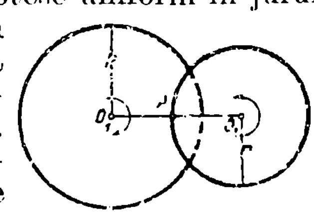


La problema 507

Răspuns : O mișcare elicoidală. Mărimea vitezei unghiulare este egală cu $\sqrt{\Omega^2+\omega^2}$, iar mărimea vitezei de translație cu $\frac{\omega}{\sqrt{\Omega^2+\omega^2}}(v-a\Omega)$. Axa elicei are ecuațiile :

$$y = \frac{v\Omega + a\omega^2}{\Omega^2+\omega^2},\qquad z = \frac{\Omega}{\omega}x.$$

508. Două roți cu razele R și r se rotesc uniform în jurul axelor lor O_1 și O_2, după cum se arată în figură, în plane paralele, independent una de cealaltă. Ele au viteze unghiulare diferite, ale căror mărimi absolute sunt Ω și ω.


La problema 508

Să se afle viteza relativă v' și accelerația relativă w' a punctului A de pe circumferința roții a doua, distanța dintre axele O_1 și O_2 fiind a.

Răspuns : $v'=r(\omega+\Omega)-a\Omega$; $w'=r(\omega+\Omega)^2 - a\Omega^2$, considerând pe figură ca sens pozitiv pentru $\bar{v}'$ sensul dela A în jos, iar ca sens pozitiv pentru $\bar{w}'$ sensul dela A spre dreapta.

DINAMICA

I. DINAMICA PUNCTULUI

§ 22. Mişcarea rectilinie a unui punct material

Dacă un punct material de masă m se mişcă în linie dreaptă pe axa x, ecuaţia diferenţială a mişcării punctului va fi

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \tag{1}$$

X fiind proiecţia pe axa X a forţei care acţionează asupra punctului. Această proiecţie X depinde în general de timp, de poziţia punctului şi de viteză, adică

$$X = X\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right).$$

Făcând unele ipoteze speciale în raport cu proiecţiile forţei X, se obţin uşor primele integrale ale ecuaţiei mişcării şi anume:

1. Dacă X depinde numai de timp, adică $X = X(t)$ se poate scrie membrul întâi al ecuaţiei (1) sub forma $m\frac{dv}{dt}$ şi se obţine, prin integrare în raport cu t, *integrala cantităţii de mişcare*

$$mv - mv_0 = \int_0^t X(t)\, dt. \tag{2}$$

Dacă $X = \text{const}$, atunci $mv - mv_0 = X \cdot t$, adică creşterea cantităţii de mişcare este egală cu impulsul forţei într'un interval de timp dat.

2. Dacă X depinde numai de poziţia punctului, adică $X = X(x)$, aducând membrul întâi al ecuaţiei (1) la forma

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$$

şi integrând după x, se obţine *integrala energiei cinetice*

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} X(x)\, dx. \tag{3}$$

Dacă $X = \text{const}$, $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = X\ (x - x_0)$, adică creşterea energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic al forţei pe drumul dat.

Dacă U (x) este o funcţie, a cărei diferenţială este egală cu lucrul elementar al unei forţe, adică

$$\mathrm{d}\,U(x) = X\,\mathrm{d}x,$$

integrala energiei cinetice poate fi scrisă sub forma

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U(x) - U(x_0). \tag{4}$$

Funcţia U (x) se numeşte *funcţie de forţă.*

3. Dacă X depinde numai de viteză, atunci

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = X\ (v),$$

de unde

$$\frac{m\,\mathrm{d}v}{X(v)} = \mathrm{d}t.$$

Integrând, se obţine

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{m\ \mathrm{d}v}{X(v)}, \tag{5}$$

adică $t = f(v)$.

4. Pentru determinarea lui x în funcţie de t, adică pentru aflarea legii mişcării punctului, trebue integrate ecuaţiile (2), (3) şi (5), înlocuind pe v prin $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ şi separând variabilele. In ceeace priveşte cazul unei forţe, care depinde de viteză, se mai poate proceda în felul următor: din egalităţile $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$ şi $\frac{m\,\mathrm{d}v}{X(v)} = \mathrm{d}t$, se obţine:

$$\frac{mv\,\mathrm{d}v}{X(v)} = \mathrm{d}x,$$

şi integrând se găseşte

$$x = x_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{mv\,\mathrm{d}v}{X(v)}$$

adică $x = \varphi\ (v)$.

Eliminând pe v din ecuaţiile $t = f(v)$, $x = \varphi(v)$ se obţine

$$X = \Phi\ (t),$$

adică se află legea mişcării.

509. Un corp în greutate de $P = 750$ kg se mişcă în linie dreaptă, sub acţiunea unei forţe constante $\overline{F}$, orientată dealungul acestei drepte, cu accelerația $w = \frac{1}{2}$ m/s². Să se afle mărimea acestei forțe.

Răspuns: $F = \frac{P}{9{,}81}\, w = 38{,}226$ kg.

510. Un corp cântărește P kg. Să se afle masa acestui corp în sistemul tehnic de unități și să se exprime greutatea lui în dine.

Răspuns: 1) $m = 0{,}102\ P$ kg s²/m, 2) 981 000 P dine.

511. Să se afle greutatea unui corp, știind că el a pornit cu viteza inițială orizontală $v_0 = 10$ m/s și a parcurs sub acțiunea forței $F = 20$ kg o porțiune de drum rectilinie orizontală $s = 200$ m în timpul $t = 5$ s.

Răspuns: $P = \frac{Fgt^2}{2(s - v_0 t)} = 16\ ^1/_3$ kg.

512. Un punct material liber, de masă $m = 2$ unități tehnice de masă, se mișcă în linie dreaptă sub acțiunea unei forțe constante $\overline{F}$, având mărimea de 10 kg. Viteza inițială a punctului este $v_0 = 10$ m/s. Să se afle viteza punctului după 8 secunde dela începutul mișcării.

Răspuns: 50 m/s.

513. Un punct material liber se mișcă în linie dreaptă, sub acțiunea unei forțe constante $\overline{F}$, în mărime de 20 kg. Viteza inițială a punctului este $v_0 = 10$ m/s. După 5 secunde dela începutul mișcării, punctul are viteza $v = 20$ m/s. Să se afle masa punctului.

Răspuns: $m = 10$ unități tehnice.

514. Asupra unui corp în greutate de 10 kg, așezat pe plan neted orizontal, acționează o forță constantă orizontală în mărime de 100 dine. Să se afle viteza corpului, după ce a parcurs 2 m, dacă viteza inițială a fost nulă.

Răspuns: 2 cm/s.

515. In cât timp o forță constantă orizontală, a cărei mărime este F kg și care acționează asupra unui corp de P kg, va mări de n ori viteza inițială v_0 m/s a corpului, dacă acesta se mișcă în linie dreaptă pe un plan neted orizontal?

Răspuns: $t = \frac{Pv_0(n-1)}{gF} \approx 0{,}102\, \frac{P}{F}\, (n-1) v_0$ sec.

516. Cu ce forță trebue frânat un automobil de P kg, pentru a reduce în interval de t secunde viteza lui dela v_0 la v m/s?

Răspuns: $F = \frac{P}{g} \frac{v_0 - v}{t}$ kg.

517. La extremitățile unui fir, trecut peste un scripete a cărui masă se neglijează, atârnă într'o parte o greutate P, iar în partea cealaltă o greutate identică și un supliment de greutate p. Să se afle mărimea accelerației cu care se va mișca sistemul acesta, dacă este lăsat liber. (Frecarea și rezistența aerului se neglijează).

Răspuns: $w = \frac{p}{2P+p} g$.

518. O greutate de P kg este atârnată de un cântar cu arc, fixat de nacela unui aerostat. Cât va indica cântarul, dacă aerostatul se mișcă vertical cu accelerația constantă w m/s^2?

Răspuns: $P_1 = P(1 \pm 0{,}102\ w)$ kg, unde semnul plus corespunde urcării, iar semnul minus coborîrii aerostatului.

519. Un corp de P kg este tras cu accelerația w m/s^2 pe un plan aspru orizontal cu ajutorul unui fir orizontal legat de el. Să se afle tensiunea T a firului, coeficientul de frecare fiind f.

Răspuns: $T = P(f + 0{,}102\ w)$ kg.

520. Un ciocan în greutate de $P = 3$ tone cade dela înălțimea $h = 1{,}5$ m pe piesa de forjat; deformația piesei se produce în $\tau = 0{,}01$ s. Să se determine mărimea medie a forței de presiune a ciocanului pe piesă.

Răspuns: $F = P\left(1 + \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = 168{,}9$ tone.

521. Un proiectil de 343 kg pornește cu viteza de 500 m/s din țeava tunului, care are lungimea de 5 m. Să se determine forța de presiune a gazelor formate de explozibil, asupra proiectilului, considerând această forță constantă.

Răspuns: 875 tone.

522. Un proiectil de 7 kg pornește cu viteza de 700 m/s rămânând timp de 0,01 s în interiorul țevii. Să se determine mărimea mijlocie a forței de presiune a gazelor asupra proiectilului.

Răspuns: 50 000 kg.

523. In momentul întreruperii acțiunii aburului, un tren are viteza de 21 m/s. Să se determine distanța pe care trenul o va parcurge până la oprire, coeficientul de frecare fiind 0,005.

Răspuns : 4,5 km.

524. O sanie este lăsată să alunece pe o suprafață orizontală de ghiață și parcurge distanța de 70 m. Să se afle viteza inițială a saniei, coeficientul de frecare fiind 0,07.

Răspuns : $v_0=9{,}8$ m/s.

525. Un proiectil de 12 kg are viteza $v_0=420$ m/s în momentul când atinge zidul unei fortărețe și pătrunde până la adâncimea de 1,5 m în zid. Să se determine mărimea medie a forței, care se opune mișcării proiectilului.

Răspuns : 72 000 kg.

526. Să se afle viteza inițială a unui glonte de armă, în greutate de $p=10$ g și cu diametrul $d=8$ mm, dacă presiunea gazelor explozibilului este de 600 kg/cm² în momentul împușcăturii și dacă glontele este supus acestei presiuni timp de 0,002 secunde.

Răspuns : $v_0 \approx 590$ m/s.

527. Să se demonstreze că pentru două corpuri, care au fost în stare de repaus și au fost puse simultan în mișcare, de forțe egale, care acționează în același timp, este valabilă relația :

$$\frac{MV^2}{2} : \frac{mv^2}{2} = \frac{V}{v} = \frac{m}{M},$$

în care M și m sunt masele, iar V și v vitezele acestor corpuri.

528. Un pilot se ridică într'un aerostat, care are viteza verticală v. Când ajunge la înălțimea h deasupra pământului, pilotul aruncă balast. In cât timp balastul va ajunge la pământ? Se neglijează rezistența aerului.

Răspuns : $t = \dfrac{v+\sqrt{v^2+2gh}}{g}$.

529. Un fir orizontal, care poate suporta o tensiune de 10 kg, fără a se rupe, este legat de o sarcină de 2 kg, așezată pe un plan orizontal. Coeficientul de frecare dintre sarcină și plan fiind 0,1, să se afle accelerația maximă, care poate fi transmisă sarcinii cu ajutorul acestui fir.

Răspuns : 48,02 m/s².

530. Să se determine ce drum s trebue să parcurgă un corp cu masa de m unități tehnice de masă, pentru ca sub influența unei forțe constante de mărime F kg, viteza lui inițială v_0 m/s să crească de n ori.

Răspuns: $s = \frac{(n^2-1)}{F} \cdot \frac{mv_0^2}{2}$ m.

531. Un berbece de greutate $P=90$ kg este ridicat la înălțimea $h=1$ m; la ultima lovitură un pilon intră în pământ la o adâncime $s=1$ cm. Ce sarcină maximă în kg/cm² va suporta acest pilon, fără a ceda, considerând că rezistența pământului, față de mișcarea pilonului, este constantă, că secțiunea transversală a pilonului este de 15 dm², iar masa pilonului poate fi neglijată?

Răspuns: 6 kg/cm².

532. Un punct de masă $m = 0{,}1$ unități tehnice de masă se mișcă în linie dreaptă după legea

$$s=t^4-12\,t^3+60\,t^2,$$

s fiind exprimat în metri, iar t în secunde. Să se afle mărimea forței, care acționează asupra acestui punct. Să se determine momentele în care această forță are valoarea maximă sau minimă.

Răspuns: $F = 1{,}2\,(t^2-6\,t+10)$ kg; $F_{\min}=12$ kg pentru $t=3$ s.

533. Un punct, de masa $m=12$ unități tehnice de masă, execută pe axa x oscilația armonică:

$$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right),$$

x fiind exprimat în metri, iar t în secunde. Să se exprime, în funcție de x, proiecția pe axa x a forței, care acționează asupra punctului.

Răspuns: $X = -3\,\pi^2\,x$ kg.

534. Să se afle legea mișcării rectilinii a unui punct liber, de masă m, sub acțiunea unei forțe periodice $F = am\cos(kt)$ fiind cunoscută abscisa inițială x_0 și viteza ei inițială v_0.

Răspuns: $x = x_0 + \frac{a}{k^2} + v_0 t - \frac{a}{k^2}\cos(kt)$.

535. Centrul fix O atrage un punct de masă m cu forța $F=\mu\, m\, r^n$, r fiind distanța dela punct la centru și μ un coeficient constant. In momentul inițial $r_0=a$ și viteza punctului $v_0=0$. In cât timp punctul va ajunge în centrul O? Să se cerceteze cazurile particulare: 1) $n=1$; 2) $n=-2$; 3) $n=-3$; 4) $n=-1$.

Răspuns: $t = \sqrt{\frac{n+1}{2\mu}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^{n+1}-x^{n+1}}}$.

Cazurile particulare:

1) $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$; 2) $t = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2\mu}}$; 3) $t = \frac{a^2}{\sqrt{\mu}}$; 4) $t = a\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}$.

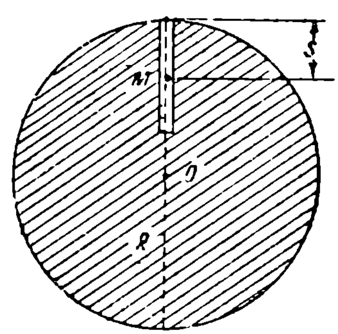
536. Un punct material de masă m, este respins de un centru fix O cu o forță a cărei mărime $F = \mu m r$, în care r este distanța punctului la acest centru. In momentul inițial $r_0 = a$ și $v_0=0$. Să se afle viteza pe care o atinge punctul, după parcurgerea drumului $s=a$.

Răspuns: $v = a\sqrt{3\mu}$.

537. Un punct material este atras de un centru fix O, cu o forță proporțională cu masa punctului și invers proporțională cu cubul distanței, coeficientul de proporționalitate fiind μ. In momentul inițial distanța punctului la O este a, și viteza egală cu zero. Să se afle legea mișcării punctului.

Răspuns: $x = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 - \mu t^2}$.

538. In timpul căderii unui corp M spre interiorul pământului într'un puț foarte adânc, accelerația este direct proporțională cu distanța corpului la centrul globului pământesc. Să se afle timpul t, în care corpul va parcurge un drum dat s, precum și viteza v la sfârșitul acestui drum, când corpul începe să cadă dela suprafața pământului fără viteză inițială, presupunând, că nu există rezistența aerului.



La problema 538

Răspuns: $t = \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \frac{R-s}{R}$;

$$v = \sqrt{2\left(1 - \frac{s}{2R}\right)gs},$$

R fiind raza pământului.

539. Un corp cade dela o înălțime mare pe suprafața pământului fără viteză inițială. Să se afle viteza lui și legea mișcării, ținând seama de faptul, că după legea lui Newton forța de atracție se modifică cu distanța, și neglijând rezistența aerului.

Răspuns: Dacă H este distanța inițială a corpului la centrul pământului, x distanța la centrul pământului într'un moment oarecare t și R raza pământului, atunci:

$$v = R\sqrt{\frac{2g}{H}\frac{(H-x)}{x}},$$

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{H}{2g}}\left(\sqrt{x(H-x)} + H \arcsin\sqrt{\frac{H-x}{H}}\right).$$

La cădere din infinit:

$$v_1 = R\sqrt{\frac{2g}{x}}.$$

La cădere dela înălțime mică (forța de atracție constantă):

$$v_2 = \sqrt{2g(H-x)}.$$

540. Un corp este aruncat vertical în sus dela suprafața pământului, cu viteza inițială v_0. Ținând seama de forța de atracție a lui Newton și neglijând rezistența aerului, să se afle la ce înălțime maximă și în cât timp se va ridica corpul, raza pământului fiind R.

Răspuns:

$$h_{\max} = R\left(\frac{v_0}{c}\right)^2; \quad T = \frac{R}{c^2}\left[v_0 + \frac{2gR}{C} \arcsin\left(\frac{v_0}{\sqrt{2gR}}\right)\right],$$

în care

$$c = \sqrt{2gR - v_0^2}.$$

541. Să se afle energia cinetică dobândită de un corp, care cade spre suprafața pământului fără viteză inițială dela o înălțime foarte mare h (ținând seama de variația forței gravitații, în funcție de înălțime, după legea lui Newton și neglijând rezistența aerului). Folosind rezultatul aflat, să se determine temperatura unui meteor cu capacitatea calorică $c=0{,}2$, greutatea $P = 1$ kg, dacă echivalentul mecanic al căldurii este de 427 kgm, raza pământului $R=6\,375\,400$ m și $h=\infty$, presupunând că, la ciocnirea cu pământul, toată energia cinetică a meteorului se transformă în căldură.

Răspuns: 1) $Ph\dfrac{R}{R+h}$ kgm. 2) $t° \approx 74\,650\,°C$.

542. O sferă de 10 g se mişcă pe verticală în jos, sub acţiunea gravităţii şi întâmpină rezistenţa aerului; legea mişcării ei este exprimată prin:

$$s=327\ t-109\ (1-e^{-3t}),$$

s fiind exprimat în centimetri. Să se determine forţa de rezistenţă a aerului în funcţie de viteza v.

Răspuns: 30 v dine.

543. O sferă, de masă m, cade vertical sub acţiunea gravităţii fără viteză iniţială, într'un mediu a cărui rezistenţă este proporţională cu puterea întâia a vitezei şi egală ca mărime cu $R=kmv$, unde k este un coeficient constant de proporţionalitate. Să se afle legea mişcării sferei.

Răspuns: $s=\dfrac{g}{k}\,t-\dfrac{g}{k^2}\,(1-e^{-kt})$.

544. O barcă are viteza iniţială $v_0=6$ m/s. După 69 s dela începutul mişcării, această viteză se reduce la jumătate. Să se afle legea mişcării bărcii, dacă rezistenţa apei este proporţională cu viteza bărcii.

Răspuns: $x=600\,(1-e^{-0{,}01\,t})$.

545. Un corp în greutate de P kg, este aruncat vertical în sus cu viteza iniţială v_0. Presupunând că rezistenţa aerului este proporţională cu patratul vitezei corpului, coeficientul de proporţionalitate fiind μ, să se afle, cu ce viteză va cădea corpul înapoi pe pământ.

Răspuns: $v=v_0\sqrt{\dfrac{P}{P+\mu v_0^2}}$.

456. O barcă are viteza iniţială v_0. In timpul mişcării i se opune rezistenţa apei, a cărei putere este proporţională cu pătratul vitezei bărcii, factorul de proporţionalitate fiind egal cu km, în care m este masa bărcii.

După cât timp viteza bărcii se va reduce la jumătatea vitezei iniţiale?

Răspuns: $t=\dfrac{1}{kv_0}$ s.

547. O sferă de masă m cade vertical sub acţiunea gravităţii fără viteză iniţială. Rezistenţa aerului are mărimea: $R=k\sigma\rho v^2$, în care k este un factor de proporţionalitate constant, σ aria unui cerc mare a sferei care cade, ρ densitatea aerului și v viteza sferei. Să se afle viteza v a sferei și drumul parcurs s, în funcție de timp. Spre ce limită tinde viteza v, când t crește nelimitat?

Răspuns: $v = c \cdot \operatorname{th}\left(\frac{gt}{c}\right)$; $s = \frac{c^2}{g} \ln \operatorname{ch}\left(\frac{gt}{c}\right)$, în care $c^2 = \frac{mg}{k\sigma\rho}$;

$\lim\limits_{t \to \infty} v = c.$

548. Un corp începe să cadă din punctul A, fără viteză inițială, într'un mediu, a cărui rezistență este $R = kmv$, în care k este un factor de proporționalitate, m masa corpului și v viteza lui. Din punctul B, situat pe aceeași verticală cu A, la a unități de lungime mai jos, se aruncă simultan alt corp cu viteza inițială v_0, îndreptată vertical în sus. Să se afle locul și momentul întâlnirii acestor corpuri. In ce condiție întâlnirea este posibilă?

Răspuns: Momentul întâlnirii: $T = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_0}{v_0 - ak}\right)$. Drumul parcurs de primul corp până la întâlnirea cu al doilea: $s_1 = \frac{g}{k}\left(T - \frac{a}{v_0}\right)$. Condiția pentru ca întâlnirea să fie posibilă: $v_0 > ak$.

549. Un punct material, de masă m kgs^2 m^{-1}, se mișcă orizontal, cu viteza inițială v_0 m/s, într'un mediu a cărui rezistență $R = k\sqrt{v}$ kg, în care v este viteza punctului și k un factor de proporționalitate. Să se afle, unde și când se va opri punctul.

Răspuns: Punctul se va opri după $t = \frac{2m}{k}\sqrt{v_0}$ s, parcurgând drumul $s = \frac{2}{3}\frac{m}{k} v_0 \sqrt{v_0}$ m.

550. Un punct material, de masă m, se mișcă în linie dreaptă, fără viteză inițială, într'un mediu rezistent, astfel încât rezultanta tuturor forțelor, aplicate acestui punct, are mărimea $a + bv - cv^2$, în care v este viteza punctului, iar a, b și c sunt numere pozitive constante. Să se exprime viteza v a punctului și drumul parcurs s, în funcție de timp. Să se determine limita spre care tinde mărimea v pentru $t \to \infty$.

Răspuns: 1) $v = \frac{\alpha\beta(1-e^{-kt})}{\beta + \alpha e^{-kt}}$, in care α şi $-\beta$ sunt rădăcinile trinomului $a + bv - cv^2$ şi $k = \frac{c(\alpha+\beta)}{m}$;

2) $\lim\limits_{t \to \infty} v = \alpha$;

3) $s = \alpha t + \frac{\alpha+\beta}{k} \ln \frac{\alpha e^{-kt} + \beta}{\alpha + \beta}$.

551. Un vagon de greutate P căruia i se imprimă viteza inițială v_0, îmtâmpină rezistența aerului, proporțională cu patratul vitezei, factorul de proporționalitate fiind k. Să se determine drumul parcurs de vagon, până se oprește, dacă coeficientul tuturor frecărilor este f.

Răspuns: $s = \frac{P}{2gk} \ln \left(1 + \frac{kv_0^2}{fP}\right)$.

552. Un avion în greutate $P = 1300$ kg, trece în picaj cu viteza inițială $v_0 = 270$ km/oră. Rezistența aerului $R = cv^2$ kg, în care $c = 0{,}08$ kg s^2/m^2. Să se afle drumul s parcurs de avion la sfârșitul căruia viteza lui atinge $v_1 = 400$ km/oră.

Răspuns: $s = \frac{P}{2cg} \ln \frac{P - cv_0^2}{P - cv_1^2} = 830$ m.

553. Să se afle drumul s al unui avion în aterisaj (drumul parcurs dela atingerea solului până la oprire), dacă greutatea avionului este $P = 1400$ kg, viteza de aterisare este $v_0 = 90$ km/oră, coeficientul de frecare $f = 0{,}1$, rezistența aerului $R = c_x v^2$ kg (rezistența frontală), forța de ridicare $F = c_y v^2$ kg şi coeficientul de calitate al avionului (adică raportul dintre coeficientul forței de ridicare și coeficientul rezistenței frontale) este $k = \frac{c_y}{c_x} = 5$.

Indicație. 1) In momentul aterisării forța de ridicare F este egală cu greutatea avionului P; 2) la calcularea drumului în aterisaj se presupune că motorul este oprit.

Răspuns: $s \approx 220$ m.

§ 23. Mișcarea oscilatorie a punctului

Dacă asupra unui punct de masă m, acționează o forță, care îl atrage spre un centru fix și este proporțională cu distanța la acest centru, ecuația mişcării acestui punct este

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

sau,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

dacă se pune $\frac{k}{m} = \omega^2$.

Soluţia generală a ecuaţiei (1) are forma

$$x = a \sin (\omega t + \varepsilon), \tag{2}$$

în care a şi ε (amplitudinea şi faza iniţială) sunt constante arbitrare. Ecuaţia (2) este ecuaţia unei *oscilaţii armonice cu frecvenţa*

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{3}$$

Constantele arbitrare a şi ε se determină din condiţiile iniţiale. Dacă în momentul iniţial (pentru $t = 0$)

$$x = x_0,\ \frac{dx}{dt} = v_0,$$

atunci

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}},\quad \varepsilon = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_0\,\omega}{v_0}\,. \tag{4}$$

Dacă se ia soluţia generală a ecuaţiei (1) sub forma

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

atunci constantele arbitrare A şi B se exprimă astfel:

$$A = x_0,\quad B = \frac{v_0}{\omega}\,.$$

Dacă oscilaţia punctului se face într'un mediu rezistent, pe lângă forţa de restabilire proporţională cu distanţa, acţionează asupra punctului şi forţa de rezistenţă $\bar{R}$, iar ecuaţia mişcării punctului capătă forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + R_x.$$

Dacă mărimea R este proporţională cu puterea întâia a vitezei adică atunci, când

$$R_x = -2b'\frac{dx}{dt},$$

putem scrie ecuaţia precedentă, punând $\frac{b'}{m} = b$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \tag{5}$$

Când $\omega > b$, soluţia generală a acestei ecuaţii va fi:

$$x = e^{-bt}(a \sin \widetilde{\omega}\, t + \varepsilon) = e^{-bt}(A \cos \widetilde{\omega}\, t + B \sin \widetilde{\omega}\, t), \tag{6}$$

în care

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - b^2} < \omega.$$

Ecuaţia (6) este ecuaţia *oscilaţiilor amortizate*. Mărimea $\frac{bT}{2}$, în care $T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}$ este *perioada oscilaţiei*, se numeşte *decrement logaritmic* de amortizare.

Dacă asupra punctului mai acţionează o forţă exterioară de excitare $\overline{F}$, în afară de forţa de restabilire şi forţa de rezistenţă, ecuaţia mişcării punctului va fi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x - k_x - 2b'\frac{dx}{dt},$$

sau, întrebuinţând aceleaşi notaţii

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_x}{m}. \tag{7}$$

Dacă $F_x = \text{const}$, soluţia generală a ecuaţiei are forma

$$x = \frac{F_x}{k} + e^{-bt}\, a \sin(\tilde{\omega} t + \varepsilon); \tag{8}$$

dacă forţa $\overline{F}$ variază periodic, adică, dacă $F_x = mP \sin(pt)$, atunci

$$x = \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2b^2}} \sin(pt + \eta) + e^{-bt}\, a \sin(\tilde{\omega} t + \varepsilon) \tag{9}$$

în care

$$\eta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2bp}{\omega^2 - p^2}\right).$$

Primul termen din membrul doi al ecuaţiei (9) reprezintă *oscilaţiile întreţinute ale punctului*, iar termenul al doilea *oscilaţiile proprii*, care se amortizează cu timpul. Mărimile a şi ε sunt constante arbitrare, care se determină din condiţiile iniţiale. Pentru p, apropiat de ω, amplitudinea oscilaţiilor întreţinute are un maximum şi se produce fenomenul de *rezonanţă*.

Când nu există rezistenţă ($b = 0$), formula (9) se transformă în

$$x = \frac{P}{\omega^2 - p^2} \sin(pt) + a \sin(\omega t + \varepsilon) \tag{10}$$

şi fenomenul de rezonanţă începe pentru $p = \omega$; în cazul acesta integrala generală capătă forma

$$x = -\frac{Pt}{2\omega}\cos(\omega t) + a \sin(\omega t + \varepsilon), \tag{11}$$

adică amplitudinea oscilaţiilor întreţinute creşte nelimitat cu timpul.

554. O sarcină de greutate P este atârnată de capătul B al unui fir elastic, care este fixat cu celălalt capăt, în punctul A. Sarcina se ridică până în punctul A şi apoi este lăsată să cadă, fără viteza iniţială. Să se afle alungirea cea mai mare a

firului, dacă mărimea lui naturală este l_0, iar alungirea statică, sub acțiunea forței P, este λ_{st}.

Răspuns : $\lambda_{max} = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_{st}(\lambda_{st} + 2l_0)}$.

555. Un punct material de masă $m = 2$ unități tehnice de masă este atras către un centru fix O cu o forță proporțională cu distanța punctului la acest centru. La distanța de 1 m mărimea forței este de 8 kg. Să se afle legea mișcării punctului, dacă în momentul inițial $x_0 = 1$ m și $v_0 = 4$ m/s.

Răspuns : $x = 2 \sin 2t + \cos 2t$.

556. Un punct execută o oscilație armonică după legea $x = 3 \sin 2t - \cos 2t$. Să se afle amplitudinea și perioada acestei oscilații.

Răspuns : $a = \sqrt{10}$; $T = 3{,}14$ s.

557. O sarcină, având greutatea $P = 2$ kg, este atârnată în punctul A de un arc, care are în stare neîntinsă lungimea $l_0 = 40$ cm. Lungirea statică a arcului, provocată de această sarcină, este de 4 cm. Sarcina este adusă în poziția M_0 și lăsată să cadă fără viteză inițială. Să se determine perioada de oscilație a sarcinei și forța maximă de întindere a arcului, dacă $AM_0 = 42$ cm.

Răspuns : $T = 0{,}4$ s; $F_{max} = 3$ kg.

558. De capătul liber al unei grinzi orizontale elastice, care are celălalt capăt fixat, este atârnată de un arc o greutate de P kg. Forța de elasticitate a grinzii este proporțională cu săgeata de încovoiere f, iar forța de întindere a arcului este proporțională cu alungirea lui. Alungirea statică a arcului, sub acțiunea forței $\overline{P}$, este λ_{st}, iar săgeata de încovoiere statică a grinzii este f_{st}. Să se determine perioada de oscilație a greutății. Masa grinzii și a arcului poate fi neglijată.

Răspuns : $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\lambda_{st} + f_{st}}{g}}$.

559. Un paralelipiped dreptunghic de 40 kg cu bază pătrată, având latura de 0,5 m, plutește în apă în poziție verticală. Aplicând legea lui Arhimede, să se afle perioada oscilației, pe care o va căpăta paralelipipedul, dacă este scos din poziția de echilibru în direcție verticală și apoi lăsat să cadă.

Răspuns : $T = 0{,}8\pi \sqrt{\dfrac{1}{9{,}81}} \approx 0{,}8$ s.

560. O sarcină de greutate P este atârnată de un arc, care este fixat cu celălalt capăt de un fir inextensibil, înfăşurat pe o şaibă. Şaiba se roteşte uniform şi sarcina este coborîtă cu viteza constantă v_0. Deodată şaiba este oprită. Să se determine alungirea maximă a arcului şi forţa lui maximă de întindere, dacă alungirea statică a arcului, sub acţiunea forţei P este λ_{st}.

Răspuns: $\lambda_{max} = \lambda_{st} + v_0\sqrt{\frac{\lambda_{st}}{g}}$; $F_{max} = P\left(1 + \frac{v_0}{\sqrt{g\lambda_{st}}}\right)$.

561. Un punct material, de masă $m=1$, se mişcă în linie dreaptă sub acţiunea unei forţe de atracţie orientată spre un centru fix O, proporţională cu distanţa punctului la acest centru. Factorul de proporţionalitate este 25. Rezistenţa mediului înconjurător este proporţională cu viteza punctului, factorul de proporţionalitate fiind 6. Să se afle legea mişcării punctului, dacă în momentul iniţial distanţa punctului la centrul O este 8 şi viteza lui este nulă.

Răspuns: $x = 2e^{-3t}(3 \sin 4t + 4 \cos 4t)$.

562. Un punct material, de masă $m = 2$, execută o oscilaţie rectilinie pe axa x, sub acţiunea unei forţe de restabilire, proporţională cu distanţa punctului la origine, factorul de proporţionalitate fiind 8 şi a unei forţe de excitare $\bar{F} = 4 \cos t\, \bar{i}$. Să se afle legea mişcării punctului, dacă în momentul iniţial $x_0=0$ şi $v_0=0$.

Răspuns: $x = \frac{3}{2}(\cos t - \cos 2t)$.

563. Un punct material, de masă m, este atras de două centre fixe O_1 şi O_2 cu o forţă proporţională cu distanţa, factorul de proporţionalitate fiind c. Să se afle perioada oscilaţiei rectilinii a punctului.

Răspuns: $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2c}}$.

564. Un tub drept OA se roteşte într'un plan vertical, în jurul unei axe orizontale O, cu viteza unghiulară constantă ω. In tub se află o sferă grea, de masă m, fixată de un arc, care este prins cu celălalt capăt în punctul O. Să se afle legea mişcării sferei în raport cu tubul, dacă forţa elastică a arcului este proporţională cu alungirea lui, factorul de proporţionalitate fiind c. In momentul inițial tubul este orizontal, viteza relativă a sferei este nulă și arcul neîntins are lungimea l_0.

Răspuns : $x = \frac{l_0}{n^2}[k^2 - \omega^2 \cos(nt)] + \frac{g}{n^2-\omega^2}\left[\sin(\omega t) - \right.$

$\left. - \frac{\omega}{n}\sin(nt)\right]$, în care $k^2 = \frac{c}{m}$ și $n^2 = k^2 - \omega^2$ cu condiția $k > \omega$.

565. In condițiile problemei precedente să se afle:

1) legea mișcării relative a sferei în cazul când $\omega = k$;

2) viteza unghiulară a tubului la care se produce fenomenul rezonanței.

Răspuns : 1) $x = l_0 + \frac{g}{\omega}t + \frac{l_0\omega^2}{2}t^2 - \frac{g}{\omega^2}\sin(\omega t)$;

2) $\omega = \sqrt{\frac{c}{2m}}$.

566. Un punct material execută oscilații rectilinii, într'un mediu rezistent, sub acțiunea unei forțe, proporțională cu distanța acestui punct la un centru fix O. Rezistența mediului este proporțională cu viteza punctului. In momentul inițial $x_0 = 0$ și $v_0 = 1$ m/s. Știind că perioada de oscilație $T = 2$ s și decrementul $D = \frac{1}{2}$, să se afle legea mișcării punctului.

Răspuns : $x = \frac{1}{\pi}2^{-t}\sin(\pi t)$.

567. Un punct material, în greutate de 10 kg, execută o oscilație rectilinie sub acțiunea unei forțe, proporțională cu distanța punctului la un centru fix O. La distanța de 1 m această forță este de 2 kg. Rezistența mediului înconjurător este proporțională cu viteza punctului. După trei oscilații complecte, amplitudinea se reduce la a zecea parte. Să se afle perioada de oscilație a punctului.

Răspuns : $T = 4{,}52$ s.

568. Un arc este fixat cu un capăt, iar de capătul celălalt sunt atârnate două sarcini identice: ca urmare lungimea arcului se mărește cu 2 cm. Să se determine amplitudinea și perioada oscilațiilor, pe care le va exercita una din aceste sarcini, dacă cealaltă sarcină se desprinde de arc.

Răspuns : $a = 1$ cm, $T = 0{,}2$ s.

569. Un corp în greutate de $P=4,9$ kg, este cufundat într'un lichid, fiind atârnat de un arc, care are o alungire statică de 1 cm, sub acțiunea forței $\overline{P}$. Extremitatea liberă A a arcului execută oscilații verticale, în jurul unui punct fix A_0, după legea $y=0,05 \sin(5\pi t)$, în care y înseamnă distanța $A_0 A$, exprimată în metri. Rezistența lichidului, la mișcarea corpului, este proporțională cu viteza lui, iar la viteza de 1 m/s această rezistență este de 1,57 kg. Să se afle amplitudinea oscilațiilor întreținute ale corpului.

Răspuns: $a=6,7$ cm.

570. O sarcină, de masă m, este atârnată, prin intermediul unui arc, de culisă B cu mișcare verticală. care face parte dintr'un mecanism bielă-manivelă. Lungimea manivelei este $OA=r$, lungimea bielei $AB=l$. Manivela se rotește în jurul punctului O cu viteză unghiulară constantă ω. Forța de întindere a arcului este proporțională cu alungirea lui, factorul de proporționalitate fiind c. In momentul inițial unghiul de rotație al manivelei este $\varphi=0$, punctul A ocupă poziția cea mai de jos și sarcina se găsește în poziție de echilibru. Să se afle legea mișcării sarcinii luând drept origine poziția inițială a sarcinii și presupunând, că raportul $\frac{r}{l}$ este unic, astfel încât termenii care conțin acest raport la o putere mai mare decât puterea a doua, pot fi neglijați.

Răspuns: $$y=r\left[\left(1+\frac{r}{4l}\right)(1-\cos kt)+\frac{k^2}{\omega^2-k^2}(\cos\omega t-\cos kt)+\right.$$
$$\left.+\frac{k^2 r}{4l(4\omega^2-k^2)}(\cos 2\omega t-\cos kt)\right] \text{ în care } k^2=\frac{c}{m}.$$

§ 24. Mișcarea curbilinie a unui punct material liber

1. Dacă asupra unui punct material liber, de masă m, acționează forța $\overline{F}$ (X, Y, Z), ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului vor fi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Aceste ecuații pot fi scrise sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=X, \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right)=Y, \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right)=Z$$

sau în formă vectorială $\frac{dQ}{dt}=\overline{F}$, în care vectorul $Q\left(m\frac{dx}{dt},\ m\frac{dy}{dt},\ m\frac{dz}{dt}\right)$

este *cantitatea de mișcare* a punctului material. Rezultă că *derivata proiecției cantității de mișcare pe o axă fixă, în raport cu timpul, este egală cu proiecția forței pe aceeași axă.*

2. Dacă se înmulțește a doua ecuație a mișcării cu x, prima ecuație cu y și se scad, se obține

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\right] = xY - yX = \mathrm{mom}_z \overline{F},$$

adică *derivata, în raport cu timpul, a momentului cantității de mișcare, față de axa z, este egală cu momentul forței față de aceeași axă*; printr'o permutare circulară a literelor se obține un rezultat analog pentru axele x și y.

Notând cu G_O, momentul cantității de mișcare față de origine, se obține expresia acestei teoreme în formă vectorială

$$\frac{\mathrm{d}G_O}{\mathrm{d}t} = \mathrm{mom}_O \overline{F}.$$

Dacă forța $\overline{F}$ se află într'un plan cu axa z, $\mathrm{mom}_z \overline{F} = 0$ și, prin urmare, se obține integrala

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C.$$

Trecând dela coordonate carteziene la coordonate polare (r, φ), se obține această integrală sub forma

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = C.$$

Mărimea $r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}\sigma_z}{\mathrm{d}t}$ reprezintă dublul vitezei areolare a proiecției punctului în mișcare pe planul (x, y), deaceea

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_z}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2}.$$

De aici rezultă teorema ariilor: *dacă momentul unei forțe față de o axă fixă oarecare este nul, viteza areolară a proiecției punctului mobil pe un plan perpendicular pe această axă, este constantă.*

Dacă direcția forței trece mereu printr'un centru fix O (forță centrală), traiectoria punctului este o curbă plană, situată în planul, care trece prin centrul O și prin viteza inițială a punctului. Mișcarea punctului în acest plan se produce după legea ariilor, adică cu viteza areolară constantă, întrucât în cazul acesta $\overline{G_O} = \mathrm{const.}$

3. Inmulțind ecuațiile diferențiale de mișcare ale punctului respectiv cu $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ și adunând se obține

$$m\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2x + \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z,$$

însă

$$v^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2},$$

deaceea

$$\mathrm{d}\left(\frac{m\,v^2}{2}\right) = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = F\cos(F,\,v)\,\mathrm{d}s,$$

adică *diferențiala energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic elementar al forței (teorema energiei cinetice).*

Dacă

$$X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}U\,(x,\,y,\,z),$$

sau

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\; Y = \frac{\partial U}{\partial y},\; Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

ecuația precedentă dă o integrală de forma

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U\,(x,\,y,\,z) - U\,(x_0,\,y_0,\,z_0).$$

Funcția $U(x,\,y,\,z)$ se numește *funcție de forță.* Prin urmare, când există o funcție de forță, creșterea energiei cinetice este egală cu creșterea funcției de forță, creștere egală cu lucrul mecanic al forței, pe drumul dintre punctele $(x,\,y,\,z)$ și $(x_0,\,y_0,\,z_0)$, cum se vede din definiția funcției de forță; astfel, în *cazul când există o funcție de forță, lucrul mecanic al forței nu depinde de drumul parcurs, ci depinde numai de poziția inițială și finală a punctului material, asupra căruia acționează această forță.*

4. In loc de a proiecta ecuația vectorială a mișcării unui punct material pe axele de coordonate fixe, ea poate fi proiectată pe axele intrinseci ale triedrului mobil (adică pe tangentă, normala principală și binormala traiectoriei punctului în mișcare). In cazul acesta se obțin ecuațiile „intrinseci", ale mișcării punctului

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_\tau,\quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n,\quad 0 = F_b$$

în care F_τ, F_n, F_b înseamnă respectiv proiecțiile forței $\overline{F}$ pe tangentă, normala principală și binormala traiectoriei.

571. Un avion sboară cu viteza orizontală constantă v la înălțimea h deasupra pământului; din avion se observă printr'o lunetă un obiectiv fix. Cât de mare trebue să fie unghiul format de lunetă cu verticala, pentru ca o bombă, aruncată din avion, în momentul observării să nimerească ținta? In calcul nu se va ține seama de rezistența aerului.

Răspuns: $\operatorname{tg}\varphi = v_0\sqrt{\dfrac{2}{gh}}$.

572. Viteza inițială a unui proiectil este $v_0=490$ m/s. Sub ce unghi față de orizont trebue să pornească proiectilul din origine, pentru ca să nimerească punctul cu coordonatele $x=700$ m, $y=680$ m?

Răspuns: 45°.

573. Dintr'un tun așezat pe un turn înalt de 50,2 m, pornește un proiectil cu viteza $v_0=500$ m/s sub un unghi

$\alpha=30°$ față de orizontală. După cât timp și la ce distanță de locul tragerii, proiectilul va cădea pe pământ? In calcul nu se va ține seama de rezistența aerului. Indicație : se va lua $g=10 m/s^2$.

Răspuns : După 50,2 s la distanța de 21 735 m.

574. Un țintaș trage într'o țintă, aflată la 40 m depărtare și ține arma astfel, încât ținta se află în prelungirea liniei țevii. In ce punct va lovi glontele ținta, dacă viteza lui este de 400 m/s?

Nu se va ține seama de rezistența aerului.

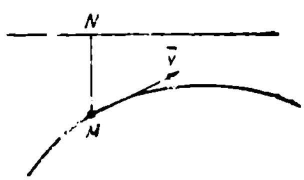
Răspuns : Intr'un punct la distanța de 4,9 cm sub țintă.

575. Sub ce unghi, față de orizontală trebue să pornească un proiectil cu viteza inițială de 500 m/s, pentru a nimeri într'o țintă aflată la 5 km de locul tragerii? Nu se va ține seama de rezistența aerului.

Răspuns : $\alpha_1=5°39'$, $\alpha_2=84°21'$.

576. Dintr'un punct dat A sunt aruncate simultan, în direcții diferite mai multe puncte materiale, cu viteze egale ca mărime cu v_0, situate în acelaşi plan vertical. Să se demonstreze, că, în cazul când mișcarea se produce în vid, toate aceste puncte se află într'un moment dat pe același cerc.

577. Un punct material M, aruncat sub un unghi oarecare față de orizontală (în vid), descrie o traiectorie parabolică. Să se demonstreze, că în orice moment punctul are o viteză egală ca mărime cu viteza unui punct, care cade liber, fără viteză inițială din punctul N al directoarei traiectoriei spre punctul M al acestei traiectorii.



La problema 577

578. Din turnul unei fortărețe se trag două lovituri astfel încât vitezele inițiale ale proiectilelor sunt egale ca mărime, se află în acelaşi plan vertical şi sunt înclinate cu unghiurile α_1 şi α_2 față de orizontală. Ambele proiectile cad în același punct pe pământ. Să se afle înălțimea h a turnului, presupunând, că suprafață pământului este plană în jurul turnului şi că nu există rezistența aerului.

Răspuns : $h = \dfrac{2v_0^2}{g} \cdot \dfrac{\mathrm{ctg}\,(\alpha_1+\alpha_2)}{\mathrm{tg}\,\alpha_1+\mathrm{tg}\,\alpha_2}$.

579. Dintr'un punct A al unui plan înclinat, care formează unghiul φ cu orizontala, pornește o vână de apă cu viteza inițială v_0 și lovește un plan vertical sub unghiul α față de orizontală și apoi cade pe planul înclinat în unghi drept. Să se afle unghiul α. (Rezistența aerului se neglijează).

Răspuns: $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi$.

580. Un punct material de masă $m=2$ unități tehnice de masă, descrie o traiectorie curbilinie. Intr'un moment dat punctul ocupă poziția M și are viteza $v=3$ m/s.

O forță de 10 kg acționează în acest moment asupra punctului și formează un unghi de 150° cu direcția vitezei. Să se afle raza de curbură a traiectoriei în punctul M.

Răspuns: $\rho=3{,}6$ m.

581. Un punct M de masă m, este tras de un centru fix O cu forța $F=k^2mr$, în care k este un coeficient constant și r distanța punctului M la O. In momentul inițial distanța $r_0=a$, iar viteza $\overline{v}_0$ formează cu direcția OM_0 unghiul α. Să se afle ecuațiile mișcării punctului M și ale traiectoriei lui, luând dreapta OM_0 ca axă x.

Răspuns: $x=a\cos(kt)+\frac{v_0\cos\alpha}{k}\sin(kt)$;

$$y=\frac{v_0\sin\alpha}{k}\sin(kt);$$

traiectoria:

$$x^2-2\operatorname{ctg}\alpha\cdot xy+\left(\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{a^2k^2}{v_0^2\sin^2\alpha}\right)y^2=a^2$$

(o elipsă cu centrul în origine).

582. Să se rezolve problema precedentă în ipoteza că punctul M este respins de centrul O.

Răspuns: $x=\frac{1}{2}a\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)+\frac{1}{2}\frac{v_0\cos\alpha}{k}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right)$;

$$y=\frac{1}{2}\frac{v_0\sin\alpha}{k}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right);$$

ecuația traiectoriei este

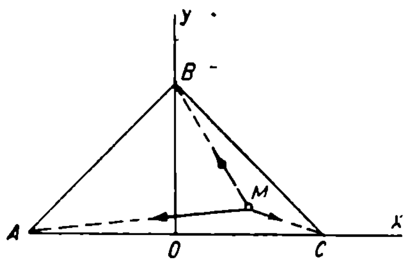
$$x^2-2\operatorname{ctg}\alpha\cdot xy+y^2\left(\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{k^2a^2}{v_0^2\sin^2\alpha}\right)=a^2$$

(o hiperbolă cu centrul în origine).

583. Un punct M, de masă m, este atras de n puncte fixe A_1, A_2, $A_3,\ldots$, A_n, având masele respectiv egale cu m_1,

$m_2, m_3, \ldots, m_n$. Mărimea forței cu care fiecare punct A atrage punctul M, este egală cu $F_i = k m_i r_i$, în care k este un coeficient constant, același pentru toate punctele, m_i masa punctului A_i și $r_i = MA_i$. Fie punctul C centrul maselor punctelor A_i. Să se arate, că punctul M se mișcă, ca și când ar fi atras după aceeași lege de punctul C, a cărui masă este egală cu $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

584. In vârful C al unui triunghi dreptunghic isoscel ABC, în care ipotenuza $AC = 2a$, se află un punct M de masă m, fără viteză inițială. Fiecare din cele trei vârfuri ale triunghiului atrage punctul M cu o forță, a cărei mărime este $F = k^2 mr$, r fiind distanța dela punctul M la vârful corespunzător al triunghiului.



La problema 584

Să se afle traiectoria punctului M și viteza lui.

Răspuns: Ecuația traiectoriei este: $x + 3y = a$;

$$v = \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot ak \sin(\sqrt{3} \cdot kt).$$

585. Un punct material liber, se mișcă pe o orbită eliptică, cu semiaxele a și b, în jurul unui centru, care atrage acest punct, cu o forță proporțională cu distanța și este situat în centrul elipsei. Factorul de proporționalitate este k. Să se afle energia totală a punctului.

Răspuns: $E = \frac{1}{2} k (a^2 + b^2)$.

586. Două centre fixe A și B atrag un punct material liber M, cu forțe proporționale cu distanța. Factorul de proporționalitate pentru ambele centre este k. Să se afle funcția de forță, liniile echipotențiale și liniile de forță.

Răspuns: $U = -\frac{1}{2} k (r^2 + r_1^2)$, în care $r = AM$ și $r_1 = BM$.

Liniile echipotențiale sunt cercuri cu centrul în mijlocul segmentului AB; liniile de forță sunt drepte, care pornesc din mijlocul lui AB.

587. Intrebarea din problema precedentă în ipoteza, că centrele A și B atrag punctul M cu forțe egale, de mărime constantă F.

Răspuns : $U = -F(r+r_1)$; liniile echipotențiale sunt elipsele cu focarele în A și B; liniile de forță sunt hiperbole confocale.

588. Un punct, de masă $m=1$, se mișcă în planul xOy sub acțiunea unei forțe, ale cărei proiecții pe axele de coordonate sunt: $X = -16x$, $Y = -4y$. In momentul inițial $x_0=1$, $y_0=0$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=2$. Să se afle traiectoria punctului.

Răspuns : $x=1-2y^2$.

589. Un punct material este atras spre centrul O_1 și respins de centrul O_2, cu forțe proporționale cu distanțele, factorii de proporționalitate fiind egali pentru ambele centre. Să se arate, că, indiferent de condițiile inițiale, punctul descrie o parabolă.

590. Să se arate, că expresia pentru lucrul mecanic al forței $\overline{F}$ are forma următoare în coordonate polare:

$$A = \int_{r_0}^{r} F_r \, dr + \int_{\varphi_0}^{\varphi} F_p r \, d\varphi,$$

în care F_r și F_p sunt proiecțiile forței pe raza vectoare și pe direcția perpendiculară pe această rază.

591. Un punct material liber, de masă m, descrie elipsa: $x=a\cos(kt)$, $y=b\sin(kt)$. Să se calculeze lucrul mecanic al forței, care acționează asupra acestui punct, în intervalul de timp dela $t_0 = 0$ la $t = \frac{\pi}{4k}$.

Răspuns : $A = \frac{mk^2}{4}(a^2 - b^2)$.

592. Un câmp de forțe are funcția de forțe $U = kr + C$, în care r este distanța unui punct al câmpului la origine. Să se afle mărimea și direcția forței.

Răspuns : O forță centrală de respingere, având mărimea constantă și centrul în origine.

593. Un punct material, de masă m, se mișcă in planul xOy sub acțiunea unei forțe, ale cărei proiecții sunt:

$$X = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Să se demonstreze, că în cazul acesta are loc relația:

$$mv_x v_y = U + \text{const.}$$

594. Proiecțiile unei forțe pe axele de coordonate au următoarele expresii:

$$X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \quad Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z;$$
$$Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

în care coeficienții lui x, y și z sunt constanți. Să se determine în ce condiții există o funcție de forțe, și, dacă aceste condiții sunt îndeplinite, să se afle această funcție.

Răspuns:

$$U = \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2) + a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}zx + C$$

cu condiția că

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{23} = a_{32} \quad \text{și} \quad a_{31} = a_{13}.$$

595. Un tub este îndoit în formă de cerc, care are ecuația $x^2 + y^2 = a^2$. O sferă, aflată în tub, se mișcă sub acțiunea unei forțe, care are proiecțiile $X = ky^2$, $Y = kxy$, în care k=const. Să se afle lucrul mecanic al acestei forțe pe porțiunea de traiectorie, cuprinsă între punctele $(0, a)$ și $(a, 0)$.

Răspuns: $A = \frac{1}{3} ka^3$.

596. Un punct material, de masă m, este atras de un centru fix O cu o forță proporțională cu distanța r a punctului de acest centru. Factorul de proporționalitate este k. Să se scrie integrala energiei.

Răspuns: $mv^2 + kr^2 = \text{const.}$

597. Un punct material descrie parabola $y^2 = 2px$, sub acțiunea a două forțe de mărime egală. Una dintre forțe este orientată spre focarul parabolei și este invers proporțională cu distanța punctului la acest focar. Forța a doua este paralelă cu axa absciselor și orientată spre partea pozitivă a acestei axe. Să se arate că punctul se mișcă uniform pe parabolă.

598. Un punct material (un proiectil), de masă m, este aruncat cu viteza inițială v_0 sub unghiul α_0 față de orizontală. Rezistența aerului este $\overline{R} = -kmg\overline{v}$, în care k este un coeficient constant și $\overline{v}$ viteza punctului. Să se afle mișcarea punctului. Să se arate că traiectoria lui are o asimptotă verticală. Să se afle deasemenea viteza limită a punctului.

Răspuns : $x = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{kg}(1 - e^{-kgt})$;

$$y = \frac{1}{k^2 g}(1 + kv_0 \sin \alpha_0)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}, \quad \lim_{t \to \infty} v = \frac{1}{k} \cdot$$

599. Un punct material se mişcă, sub acţiunea unei forţe centrale, într'un mediu rezistent. Să se arate, că oricare ar fi legea rezistenţei, punctul descrie o traiectorie plană al cărei plan trece prin centrul forţei.

600. Să se demonstreze, că la mişcarea unui proiectil, pentru oricare lege de rezistenţă a aerului, are loc următoarea relaţie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_x^2}$$

v_x fiind proiecţia vitezei pe axa orizontală.

601. Un punct material este atras spre axa x de o forţă perpendiculară pe această axă şi proporţională cu masa punctului şi cu distanţa la axă. Factorul de proporţionalitate este k^2. Să se afle traiectoria punctului, dacă în momentul iniţial $x_0 = 0$, $y_0 = h$, iar viteza iniţială a punctului este egală cu v_0 şi paralelă cu axa x. In ce loc al traiectoriei viteza punctului va atinge valoarea maximă?

Răspuns : $y = h \cos \left(\frac{kx}{v_0}\right)$; viteza are valoarea maximă în punctele de intersecţie ale traiectoriei cu axa absciselor.

602. Un punct material descrie o elipsă sub acţiunea unei forţe centrale, îndreptată spre centrul elipsei O. Să se arate, că în oricare poziţie M, viteza punctului are următoarea expresie :

$$v = \frac{2\pi}{T} ON,$$

în care ON este semidiametrul conjugat cu OM şi T perioada de rotaţie a punctului în jurul centrului O.

603. Un punct material se mişcă sub acţiunea unei forţe paralelă cu axa ordonatelor şi invers proporţională cu cubul distanţei punctului la axa absciselor. Să se arate că, pentru orice condiţii iniţiale, punctul descrie o conică.

604. Mai multe puncte materiale, de aceeaşi masă sunt atrase de un centru fix O cu o forţă proporţională cu distanţa şi încep mişcarea lor dintr'un singur punct M_0 cu viteze iniţiale diferite. Să se arate că, în cazul când extremităţile vectorilor care reprezintă aceste viteze iniţiale, se află pe aceeaşi dreaptă paralelă cu OM_0, punctele descriu elipse cu arii egale.

605. Un punct material este respins de centrul O_1 şi atras de centrul O_2 cu forţe proporţionale cu distanţa. Factorul de proporţionalitate este în primul caz k_1, iar în al doilea caz k_2. Să se arate că punctul descrie o elipsă, o hiperbolă sau o parabolă, după cum raportul $\frac{k_1}{k_2}$ este mai mic, mai mare sau egal cu 1.

§ 25. Forţe centrale

Un punct material M, care se mişcă sub acţiunea unei forţe centrale $\overline{F}$ (fig. 33), descrie o traiectorie plană cu viteza areolară constantă, adică în cazul acesta are loc ecuaţia

$$2\frac{d\sigma}{dt} = |M_O\overline{v}| = r^2\frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{1}$$

Planul traiectoriei trece prin centrul O al forţei şi direcţia vitezei iniţiale $\overline{v}_0$ a punctului. Dacă în momentul iniţial $\overline{r} = \overline{r}_0$ şi $\overline{v} = \overline{v}_0$, atunci

$$c = r_0\, v_0 \sin(\overline{r}_0, \overline{v}_0).$$

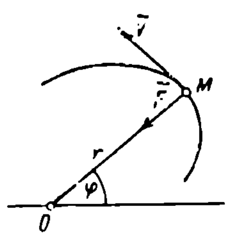


Fig. 33

Punând $\frac{1}{r} = u$, se obţine, pentru viteza punctului expresia

$$v = c\sqrt{\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2}, \tag{2}$$

de unde, cunoscând ecuaţia polară $u = f(\varphi)$ a traiectoriei, se poate determina viteza în orice poziţie a punctului mobil.

Legătura dintre forţa centrală, care acţionează asupra unui punct material şi traiectoria acestui punct se exprimă prin formula lui Binet

$$mc^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = \pm F, \tag{3}$$

în care semnul plus se referă la forţa de atracţie, iar semnul minus la forţa de respingere. Dacă forţa este dată în funcţie de coordonatele polare r şi φ, integrând ecuaţia (3), se află $u = f(\varphi)$, adică ecuaţia traiectoriei punctului şi invers, dacă se dă ecuaţia traiectoriei $u = f(\varphi)$ din ecuaţia (3), se poate determina legea după care variază mărimea forţei centrale, care acţionează asupra punctului.

606. Un punct material, de masă m, descrie o circumferinţă de rază a, fiind atras de un punct oarecare A de pe această circumferință. Să se afle forța de atracție și viteza punctului, în funcție de distanța r a punctului la punctul A:

Răspuns: $F = \frac{8ma^2c^2}{r^5}$; $v = \frac{2ac}{r^2}$, în care $\frac{c}{2}$ este viteza areolară constantă a punctului.

607. In condițiile problemei precedente să se arate că odograful vitezei este o parabolă.

608. Un punct material, de masă m, descrie o elipsă cu semiaxele a și b, sub acțiunea unei forțe de atracție orientată spre centrul ei. Când punctul se află la extremitatea semiaxei mari, viteza lui este v_0. Să se afle forța de atracție $\overline{F}$ în funcție de raza vectoare $\overline{r}$ a punctului mobil.

Răspuns: $\overline{F} = -\frac{mv_0^2}{b^2}\overline{r}$.

609. Un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale, care este o funcție a distanței r a acestui punct la centrul forței. Mărimea vitezei punctului variază invers proporțional cu această distanță, adică $v = \frac{a}{r}$. Să se afle traiectoria punctului, dacă viteza lui areolară este $\frac{c}{2}$.

Răspuns: Spirala logaritmică: $r = r_0 e^{\frac{k}{c}\varphi}$, în care $k = \sqrt{a^2 - c^2}$.

610. Sub acțiunea unei forțe centrale, un punct material descrie o lemniscată, care are ecuația polară $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, având polul în centrul forței. Să se arate, că mărimea forței este invers proporțională cu puterea a șaptea a distanței.

611. Să se afle mărimea accelerației centripete w a lunei, în mișcarea ei pe orbită, considerând orbita circulară și să se arate că această accelerație va fi egală cu accelerația g_1 a forței de atracție a pământului, dacă această forță variază în funcție de distanță, după legea lui Newton. Se dă: accelerația forței de atracție a pământului la suprafața pământului $g \approx 9{,}81$ m/s^2; raza orbitei lunei $r \approx 60R$, în care raza globului pământesc $R \approx 6\ 370\ 000$ m; timpul de rotație a lunei în jurul pământului este $T = 27$ zile 7 ore 43 min.

Răspuns: $w = g_1 \approx 0{,}0027$ m/s^2. (Pe această cale Newton s'a convins de exactitatea legii atracției universale, descoperită de el).

612. Un punct material se mişcă sub acţiunea unei forţe centrale. Sunt date, ca mărime şi direcţie, vitezele punctului în trei poziţii determinate. Să se afle prin construcţie, cu ajutorul compasului şi al liniei, centrul forţei.

613. Un punct material, de masă m, este atras de un centru fix cu forţa $F = \frac{10\,m}{r^3}$, unde r este distanţa punctului la acest centru. In momentul iniţial unghiul polar $\varphi_0 = 0$, $r_0 = 1$ şi $v_0 = 2$, pe când unghiul dintre viteza iniţială şi raza vectoare a punctului este de 45°. Să se afle ecuaţiile mişcării punctului în coordonate polare şi să se determine traiectoria lui.

Răspuns : $r = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2}$; $\varphi = \frac{1}{4} \ln \frac{1+3\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}$; $r(e^{2\varphi} + 3e^{-2\varphi}) = 4$.

614. Un punct material este atras de un centru fix sau este respins de acest centru, cu o forţă proporţională cu distanţa. Să se arate că, pentru orice condiţii iniţiale, traiectoria punctului este în primul caz o elipsă, iar în al doilea caz o hiperbolă.

615. O planetă descrie o elipsă cu excentricitatea e. Fiind cunoscută viteza v_1 a planetei la perihel, să se afle viteza ei v_2 la afel.

Răspuns : $v_2 = \frac{1 - e}{1 + e} v_1$.

616. Să se afle odograful vitezelor unei planete în mişcarea ei pe orbită.

Răspuns : Un cerc.

617. Un punct material, de masă m, descrie o elipsă, cu semiaxa mare a, sub acţiunea unei forţe de atracţie newtoniană $F = \frac{\mu m}{r^2}$, care este orientată spre focarul elipsei. Să se deducă formula $v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, în care v este viteza punctului şi r distanţa lui la centrul forţei.

618. In condiţiile problemei precedente, să se arate că viteza punctului, la extremitatea axei mici a elipsei, este egală cu $\sqrt{\frac{u}{a}}$.

619. In condiţiile problemei 617, să se arate că media geometrică a vitezelor punctului, la extremităţile fiecărui diametru al orbitei sale, are o mărime constantă, egală cu viteza punctului la extremitatea axei mici.

620. Mai multe puncte materiale, aflate sub acțiunea unei forțe de atracție newtoniană spre un centru dat, sunt aruncate dintr'un singur loc cu viteză de mărime egală, în direcții diferite situate într'un acelaşi plan cu centrul forței. Să se arate că locul geometric al centrelor orbitelor lor eliptice este o circumferință.

621. Un punct material se mişcă sub acțiunea unei forțe centrale. Să se arate, că în cazul când raza de curbură a traiectoriei variază invers proporțional cu cubul distanței dela centrul forței la tangentă, forța este proporțională cu distanța.

622. Un punct material se mişcă sub acțiunea unei forțe centrale. Să se demonstreze teorema următoare: dacă forța este proporțională cu distanța, raza vectoare $\bar{r}$, a unui punct al odografului vitezelor, descrie arii proporționale cu timpii corespunzători. Să se demonstreze deasemenea problema inversă.

623. Un punct material descrie o traiectorie curbilinie sub acțiunea unei forțe centrale. In momentul inițial raza vectoare a punctului şi viteza lui sunt respectiv egale cu r_0 şi v_0, viteza inițială fiind perpendiculară pe raza vectoare. După un interval de timp oarecare raza vectoare a punctului devine egală cu r şi unghiul dintre această rază şi direcția vitezei este egal cu α. Să se afle viteza punctului în acest moment.

Răspuns: $v = \dfrac{v_0 r_0}{r \sin \alpha}$.

624. Un punct material, de masă m, descrie spirala logaritmică $r = ae^{k\varphi}$, sub acțiunea unei forțe centrale. Să se afle mărimea forței şi odograful vitezelor.

Răspuns: 1) $F = mc^2 (1 + k^2) \cdot \dfrac{1}{r^3}$, în care $\dfrac{c}{2}$ este viteza constantă a punctului.

2) Odograful vitezelor este o spirală logaritmică.

625. Un punct material este respins de un centru fix cu o forță, care variază după legea lui Newton. Să se arate că, în cazul acesta, punctul descrie o hiperbolă, iar centrul forței se află la acel focar al hiperbolei, care este mai depărtat de punctul mobil.

626. Un punct material, de masă m, descrie cardioida $r=a(1+\cos\varphi)$, sub acțiunea unei forțe centrale. Să se afle mărimea forței și a vitezei punctului în funcție de r, dacă pentru $\varphi=0$ viteza punctului are o valoare dată v_0.

Răspuns: $F = \dfrac{12ma^3v_0^2}{r^4}$; $v^2 = \dfrac{8a^3}{r^3}v_0^2$.

627. Să se deducă următoarea formulă generală pentru mărimea unei forțe centrale: $F = \dfrac{mc^2}{2}\cdot\dfrac{dh^{-2}}{dr}$, în care m este masa punctului material, r distanța lui la centrul forței, c dublul vitezei areolare și h distanța dela centrul forței la tangenta la traiectorie.

Indicație. Se va folosi teorema ariilor și ecuația energiei cinetice.

628. Aplicând formula din problema precedentă, să se arate, că: 1) dacă punctul descrie o circumferință, centrul forței aflându-se pe această circumferință, forța este invers proporțională cu puterea a cincea a distanței; 2) dacă punctul descrie o spirală logaritmică cu polul în centrul forței, forța este invers proporțională cu cubul distanței.

629. Un punct material, de masă m, descrie o orbită oarecare, sub acțiunea unei forțe centrale de atracție $\overline{F}$. Cum trebue modificată mărimea forței $\overline{F}$, pentru ca mișcarea relativă a punctului pe orbita dată să rămână neschimbată, iar orbita să se rotească în jurul centrului forței, fără a-și schimba înfățișarea.

Răspuns: La forța dată trebue să se adauge o forță, a cărei mărime variază invers proporțional cu cubul distanței între punctul atras și centrul de atracție. (Teorema lui Newton despre orbitele rotative).

§ 26. Mișcarea unui punct material cu legături

Mișcarea unui punct material se numește mișcare cu legături, când punctul este silit să rămână în timpul mișcării pe o suprafață sau curbă dată, care reprezintă legături, ce împiedecă libertatea de mișcare a punctului. La rezolvarea unei probleme de mișcare a unui punct material cu legături, trebue adăugată la forțele, care acționează asupra punctului și reacția legăturii, iar punctul trebue considerat ca punct liber, aflat sub acțiunea tuturor acestor forțe.

Când punctul este silit să se miște pe o suprafață ideal netedă, sub acțiunea forței $\overline{F}$ (X, Y, Z), suprafața acționează asupra punctului cu o forţă N, normală pe suprafaţă, deaceea ecuaţiile diferenţiale ale mişcării punctului vor fi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos(\overline{N}, x),\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos(\overline{N}, y),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos(\overline{N}, z).$$

Dacă ecuaţia suprafeţei este $f(x, y, z) = 0$, atunci

$$\cos(\overline{N}, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta_1 f};\quad \cos(\overline{N}, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta_1 f};\quad \cos(\overline{N}, z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta_1 f}$$

în care $\Delta_1 f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$.

Se adaugă la cele trei ecuaţii ale mişcării, ecuaţia suprafeţei şi se obţin patru ecuaţii din care se scot x, y, z şi $\overline{N}$ ca funcţii de timp.

Dacă sub acţiunea forţei $\overline{F}(X, Y, Z)$ punctul trebue să se deplaseze pe o curbă dată de ecuaţiile

$$f_1(x, y, z) = 0,\quad f_2(x, y, z) = 0,$$

atunci punctul se află sub acţiunea forţei $\overline{F}$ şi a reacţiilor $\overline{N}_1$ şi $\overline{N}_2$ a acestor suprafeţe; prin urmare, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării punctului vor fi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_1\cos(\overline{N}_1, x) + N_2\cos(\overline{N}_2, x),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_1\cos(\overline{N}_1, y) + N_2\cos(\overline{N}_2, y),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_1\cos(\overline{N}_1, z) + N_2\cos(\overline{N}_2, z),$$

pe când cosinusurile reacţiilor normale ale suprafeţelor $f_1 = 0$ şi $f_2 = 0$ se determină ca şi în cazul precedent. Adăugând la cele trei ecuaţii ale mişcării şi cele două ecuaţii $f_1(x, y, z)=0$ şi $f_2(x, y, z)=0$ ale curbei, se obţin cinci ecuaţii din care se determină x, y, z, N_1 şi N_2.

Când punctul este silit să se mişte pe o curbă plană dată $y = f(x)$ sub acţiunea unei forţe situată în planul acestei curbe, reacţia $\overline{N}$ a legăturii este orientată pe normala la traiectorie. Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării vor fi în cazul acesta:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos(\overline{N}, x),\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos(\overline{N}, y)$$

iar

$$\cos(\overline{N}, x) = -\frac{dy}{ds};\quad \cos(\overline{N}, y) = \frac{dx}{ds}\quad \text{şi}\quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Adăugând ecuaţia $y = f(x)$ a curbei la cele două ecuaţii ale mişcării punctului, se obţin trei ecuaţii pentru determinarea lui x, y, N. Ecuaţiile diferenţiale

ale mişcării plane a unui punct material cu legături mai pot fi scrise în forma „intrinsecă" şi anume, în proiecţiile lui pe tangentă şi normală:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_n + N.$$

Ecuaţia mişcării unui punct material liber, în formă vectorială, are forma

$$m\bar{w} = \bar{F}.$$

Această ecuaţie mai poate fi scrisă în felul următor:

$$\bar{F} + (-m\bar{w}) = 0.$$

Vectorul $(-m\bar{w})$, care este egal cu produsul dintre masa punctului şi vectorul egal şi direct opus acceleraţiei, se numeşte *forţă de inerţie.* Prin urmare, forţa, care acţionează asupra unui punct liber este echilibrată de forţa de inerţie în orice moment al mişcării. Dacă punctul are legături, trebue adăugat la forţa activă şi reacţia $\bar{N}$ a legăturilor şi ecuaţia mişcării va fi:

$$\bar{F} + \bar{N} + (-m\bar{w}) = 0.$$

De aci rezultă că *forţa activă, reacţia legăturilor şi forţa de inerţie se echilibrează în orice moment* (principiul lui d'Alambert).

Proiecţiile forţei de inerţie $(-m\bar{w})$ pe axele de coordonate carteziene vor fi, evident, egale cu

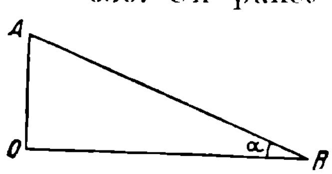
$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

iar proiecţiile acestei forţe pe axele intrinseci (pe tangentă, normala principală şi binormala traiectoriei) vor fi egale cu

$$-m\frac{dv}{dt}, \quad -m\frac{v^2}{\rho}, \quad 0.$$

In cazul unui punct cu legături ideale, care nu depind de timp în mod explicit (legături staţionare), este valabilă teorema energiei cinetice în aceeaşi formă, ca şi pentru un punct liber.

630. Un punct material coboară pe un plan înclinat, sub acţiunea gravităţii, pornind din A, fără viteză iniţială. Să se determine unghiul de înclinare α al planului astfel, încât timpul în care punctul va parcurge drumul AB, să fie minim, ştiind că $OB = a = \text{const}$.



La problema 630

Răspuns: $\alpha = 45°$.

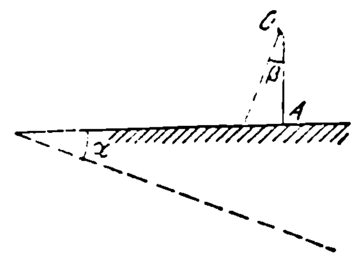
631. Un punct material porneşte din A fără viteză iniţială şi coboară sub acţiunea gravităţii, pe un plan înclinat, aspru AB, cu unghi de înclinare α şi lungimea s. Unghiul de frecare al punctului cu planul este egal cu φ. Să se afle viteza, cu care punctul ajunge în B.

Răspuns: $v = \sqrt{2gs\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}}$.

632. O sanie, pornind din punctul A fără viteză inițială, se mișcă pe planul înclinat AB, cu unghiul de înclinare α și apoi pe un plan orizontal BC până în punctul C, unde se oprește. Să se determine coeficientul de frecare f, dacă $AB = s_1$ și $BC = s_2$.

Răspuns : $f = \frac{s_1 \sin\alpha}{s_1 \cos\alpha + s_2}$.

633. In figură este reprezentat un plan înclinat, care formează cu orizontala unghiul α și un punct O situat deasupra acestui plan. Sub acțiunea gravității un punct material coboară din punctul O, fără viteză inițială, într'un jghiab neted OA. Ce unghi β trebue să formeze dreapta OA cu verticala, pentru ca punctul să ajungă la planul înclinat în timpul cel mai scurt?

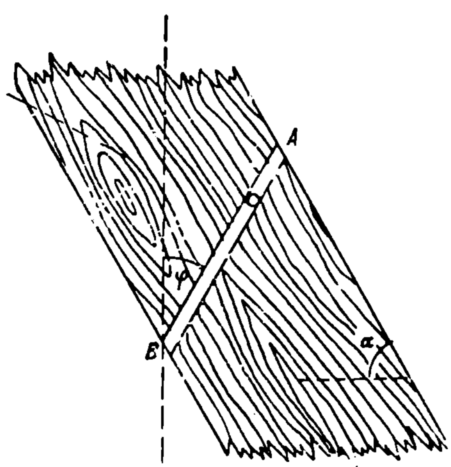


La problema 633

Răspuns : $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

634. Dintr'un punct oarecare A, în spațiu, incep să coboare simultan în direcții diferite mai multe puncte materiale sub acțiunea gravității, pe jghiaburi drepte netede. Să se afle pe ce suprafață vor fi așezate aceste puncte într'un moment anumit t, dacă vitezele lor inițiale sunt nule.

Răspuns : Pe o sferă cu raza $\frac{gt^2}{4}$, al cărei punct superior coincide cu punctul A.



La problema 635

635. Printr'o scândură, care formează unghiul α cu orizontala, urmează să se sfredelească un canal drept AB astfel, încât un punct material așezat fără viteză inițială la deschiderea lui superioară, să treacă prin scândură în timpul cel mai scurt sub acțiunea gravității. Neglijând frecarea, să se afle sub ce unghi φ față de verticală trebue executat acest canal.

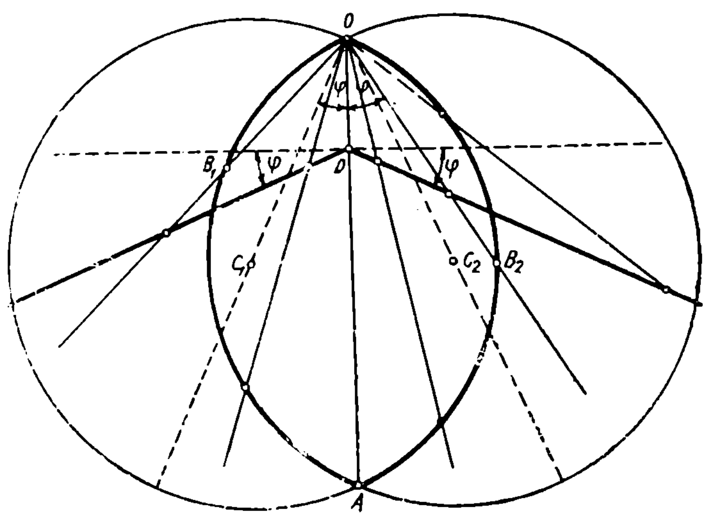
Răspuns : $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

636. Intr'un plan vertical se află un fascicol de jghiaburi drepte aspre. In centrul O al fascicolului se așează un număr de puncte materiale, care sunt lăsate să pornească în acelaşi moment, fără viteză iniţială, astfel încât pe fiecare jghiab să se mişte un singur punct.

Să se afle: 1) Locul geometric al acestor puncte după t_1 secunde dela începutul mişcării, 2) locul geometric al punctelor în care punctele mobile ating o anumită viteză v_1, singura forţă activă fiind forţa gravităţii.

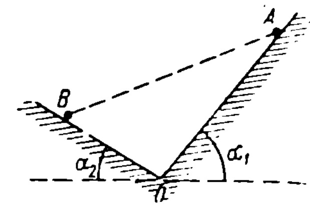
Răspuns: 1. Se duc prin centrul O al fascicolului, în planul acestuia, două cercuri cu raza $\frac{gt_1^2}{4\cos\varphi}$ astfel, încât diametrele lor care pleacă din punctul O, să formeze cu verticala unghiul φ, egal cu unghiul de frecare. Curba, formată din cele două arce OB_1A şi OB_2A ale acestor cercuri, este primul loc geometric căutat.

2. Al doilea loc geometric căutat este compus din două drepte, care formează cu orizontala un unghi egal cu unghiul de frecare şi intersectează verticala, care trece prin centrul fascicolului, la distanţa $\frac{v_1^2}{2g}$ de acesta.



La problema 636

637. Din punctul A al unui plan înclinat aspru AO, care formează unghiul α_1 cu orizontala porneşte un punct material, fără viteză iniţială şi coboară pe acest plan, sub acţiunea gravităţii, până în punctul O, unde trece pe un alt plan înclinat, aspru OB, care formează unghiul α_2 cu orizontala, se ridică pe acest plan până într'un punct B, unde se opreşte şi apoi se mişcă în sens invers. Să se afle: unghiul pe care îl formează cu orizontala dreapta AB, care uneşte punctele A şi B, dacă coeficientul de frecare este acelaşi, pentru ambele plane şi în punctul O nu se produc pierderi de viteză.



La problema 637

Răspuns: Unghiul căutat este egal cu unghiul de frecare.

638. Un punct material, care se află în câmpul forţei gravităţii, porneşte în sus cu viteza iniţială v_0, pe un plan înclinat, aspru, care formează unghiul α cu orizontala, coeficientul de frecare fiind f. In ce condiţie punctul va reveni în poziţia de plecare, cât timp se va ridica şi ce drum va parcurge în urcare?

Răspuns: Revenirea este posibilă când $\alpha > \operatorname{arctg} f$. Mişcarea punctului în sus este o mişcare uniform întârziată cu acceleraţia

$$w = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha) = -w_1.$$

Punctul se va ridica în timpul

$$t_1 = \frac{v_0}{w_1}$$

şi se va opri, parcurgând drumul

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2w_1}.$$

După aceea va coborî cu acceleraţia

$$w_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

şi va reveni în poziţia iniţială în intervalul de timp

$$T = \frac{v_0}{\sqrt{w_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1}} + \frac{1}{\sqrt{w_2}}\right)$$

dela începutul mişcării, având viteza

$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}}.$$

în care φ este unghiul de frecare.

639. Un corp porneşte în sus cu viteza iniţială v_0, pe un plan înclinat, aspru, având unghiul de înclinare α faţă de orizontală. Coeficientul de frecare este egal cu f; rezistența aerului este

$$F = kmgv^2,$$

în care m este masa corpului, v viteza lui și k un factor de proporționalitate. Cu ce viteză va trece corpul prin poziția de plecare la înapoiere?

$$\textit{Răspuns}: \ v_1 = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha + kv_0^2}}.$$

640. Un pentagon regulat $ABCDE$ cu latura a este astfel așezat într'un plan vertical, încât latura inferioară CD este orizontală. Să se afle timpii, în care un punct material va parcurge segmentele BC, AC și EC, coborînd pe ele, fără viteză inițială, sub acțiunea gravității, dacă nu există nicio rezistență împotriva mișcării.

Răspuns: Timpii căutați formează o progresie geometrică, cu primul termen

$$\sqrt{\frac{2a}{g\sin 72°}},$$

și rația $\sqrt{2\cos 36°}$.

641. O hiperbolă echilateră și un cerc, construit pe axa ei reală ca diametru, sunt astfel așezate într'un plan vertical, încât axa reală a hiperbolei este verticală. A și B fiind două puncte ale hiperbolei, așezate pe aceeași orizontală, iar M un punct oarecare al cercului precedent, să se demonstreze că suma pătratelor timpilor, în care niște puncte materiale parcurg segmentele AM și BM, coborînd pe ele, fără viteză inițială, sub acțiunea gravității, este egală cu $\frac{8h}{g}$ și nu depinde de alegerea punctului M, h fiind înălțimea orizontalei AB deasupra centrului curbelor date. (Nu există rezistență la mișcare).

642. O sârmă dreaptă trece printr'o sferă de masă m, de care este legat un fir de cauciuc de lungime l (în stare neîntinsă). Unghiul dintre sârmă și orizontală este egal cu $\alpha > \varphi$, unde φ este unghiul de frecare al sferei cu sârma. Capătul liber al firului de cauciuc se fixează pe aceeași sârmă, la distanța l, în sus de sferă și apoi sfera este lăsată să coboare. Să se afle legea mișcării sferei până la prima ei oprire, dacă forța de întindere a cauciucului este proporțională cu alungirea ei relativă, factorul de proporționalitate fiind egal cu c.

Răspuns : $x = \frac{mgl}{c} \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{c}{ml}}\, t\right)\right] \cdot$

643. O sferă M de greutate P, legată printr'un fir AM de un punct fix A, descrie o circumferință orizontală, cu viteză constantă. Cunoscând lungimea l a firului și unghiul α dintre fir și verticală, să se determine tensiunea F a firului, viteza v a sferei și timpul T, în care ea descrie o circumferință complectă.

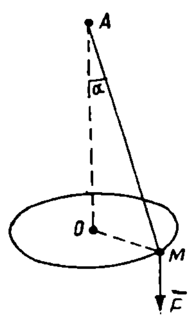
Răspuns : $F = \frac{P}{\cos \alpha}$, $v = \sin \alpha \sqrt{\frac{gl}{\cos \alpha}}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cos \alpha}$.

644. Un pendul matematic de lungime l, având greutatea P este adus în poziția M_0, formând un unghi de 90° cu verticala și apoi i se imprimă o viteză inițială verticală $\bar{v}_0$. Să se afle tensiunea F a firului pendulului în funcție de unghiul φ.

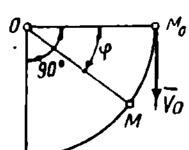
Răspuns : $F = P\left(3 \sin \varphi + \frac{v_0^2}{gl}\right) \cdot$

645. Un pendul matematic de lungimea l primește în poziția de echilibru o oarecare viteză inițială orizontală, în urma căreia s'a depărtat de verticală cu unghiul α. Să se afle viteza inițială a pendulului.

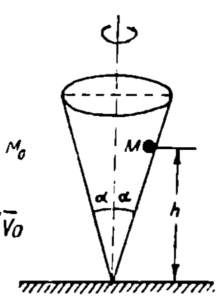
Răspuns : $v = 2\sqrt{gl} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot$



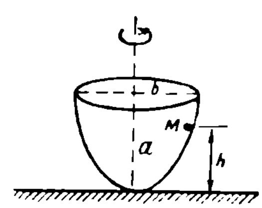
La problema 643



La problema 644



La problema 646



La problema 647

646. Intr'un con gol, cu unghiul 2α, care se rotește în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară constantă ω, este așezată o sferă M de greutate P; sfera se află în repaus în raport cu conul. Să se afle presiunea N a sferei pe con și distanța h.

Răspuns : $N = \frac{P}{\sin \alpha}$, $h = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

647. Intr'un vas, care are forma unui elipsoid de revoluție, cu semiaxele a și b și care se rotește în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară constantă ω, este așezată sfera M de greutate P; sfera se află în repaus față de elipsoid.

Să se determine distanța h.

Răspuns: $h = a - \frac{a^2 g}{b^2 \omega^2}\cdot$

648. Dintr'un puț de mină se ridică cu ajutorul unei colivii o cantitate de 112 kg cărbune. Presiunea cărbunelui pe colivie, în timpul mișcării, este de 126 kg. Să se afle accelerația.

Răspuns: $w = \frac{g}{8}$ m/s^2.

649. Să se afle forma suprafeței libere a apei dintr'o cisternă făcând parte dintr'un tren care se mișcă cu accelerația constantă w pe un drum drept orizontal.

Răspuns: Un plan, înclinat față de orizontală sub unghiul

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{w}{g}\cdot$$

650. Un pod are forma unui arc, care are punctul cel mai de jos la mijlocul podului; raza de curbură, în acest punct al arcului, este ρ. Sarcina fixă maximă pe care o poate suporta mijlocul podului, este P. Să se afle, pentru ce viteză v a unei sarcine de greutate $\frac{P}{n}$, care se mișcă pe pod, acesta se va prăbuși. Se presupune, că podul nu se deformează și că $n > 1$.

Răspuns: $v > \sqrt{g\rho\,(n-1)}$.

651. Să se determine înălțarea unei șine de cale ferată față de celelalte, pe un arc de cerc astfel, încât presiunile unei locomotive, în mișcare, pe ambele șine să fie egale, știind, că lățimea liniei este b, viteza locomotivei v și raza arcului de cerc ρ.

Răspuns: $h = \frac{bv^2}{\sqrt{v^4 + \rho^2 g^2}}\cdot$

652. Să se determine forța lui Coriolis pe o șină (și anume pe care?) exercitată de o locomotivă în greutate de $P = 100$ t, care merge dela Moscova spre Sud pe direcția meridianului, cu viteza $v = 100$ km/h, dacă latitudinea Moscovei este $\varphi = 56°$.

Răspuns: $\sim$ 34 kg.

Să se afle viteza inelului în funcție de poziția lui pe circumferință, precum și reacția N a circumferinței.

Răspuns: $v = \sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}$,

$$N = P\left(2\cos\varphi_0 + \frac{v_0^2}{rg} - 3\cos\varphi\right),$$

în care φ este unghiul dintre raza vectoare a inelului și raza verticală fixă a circumferinței, îndreptată în sus.

658. In condițiile problemei precedente să se afle ce relație există între v_0 și φ_0 și unghiurile: φ_1, pentru care punctul se oprește în mișcarea sa pe circumferință, și φ_2, pentru care presiunea pe circumferință este egală cu zero.

Răspuns: $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0 + \dfrac{v_0^2}{2gr} = \dfrac{3}{2}\cos\varphi_2$.

659. Un jghiab așezat într'un plan vertical are forma unei circumferințe cu raza r. In momentul inițial se așează o sferă în punctul cel mai de jos al jghiabului și i se imprimă viteza orizontală v_0. Să se afle, care trebue să fie această viteză inițială pentru ca: 1) sfera să înceapă o mișcare circulară, 2) pentru ca sfera să sară din jghiab și 3) pentru ca sfera să execute o mișcare oscilatorie de pendul matematic.

Indicație. Poziția sferei pe circumferință se determină prin unghiul φ dintre raza ei vectoare și raza fixă, care trece prin punctul cel mai de jos al circumferinței.

Răspuns: Când $5gr \leqslant v_0^2$, sfera înconjoară toată circumferința, mărimea vitezei sale variind între limitele v_0 și $\sqrt{v_0^2 - 4gr}$.

Când $2gr < v_0^2 < 5gr$, sfera părăsește circumferința la unghiul

$$\varphi = \arccos\frac{2}{3}\left(-\frac{v_0^2}{2gr}\right) < 180°$$

cu viteza

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gr}{3}}.$$

Când $0 < v_0^2 \leqslant 2gr$, sfera oscilează pe circumferință, iar schimbarea direcției mișcării se produce pentru

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gr}\right) < 90°.$$

653. O circumferință de sârmă, în poziție orizontală având raza r, trece printr'o sferă de masă m. Cunoscând coeficientul de frecare f, să se determine, ce viteză inițială trebue transmisă sferei, pentru ca ea să înconjoare complect circumferința.

Răspuns : $v_0^2 = rg \operatorname{sh}(4f\pi)$.

654. O sferă de 0,49 kg, așezată pe o masă orizontală, este legată printr'un fir de lungime $l = 0{,}7$ m de un punct fix O. Se imprimă sferei o viteză inițială $v_0 = 4{,}9$ m/s, perpendiculară pe direcția firului. Să se afle viteza sferei și tensiunea firului după 2s, dela începutul mișcării, coeficientul de frecare fiind 0,2.

Răspuns : 1) 0,98 m/s; 2) 0,07 kg.

655. O sferă alunecă, sub acțiunea gravității pe suprafața interioară a unei emisfere fixe, aspre, de rază r, pornind fără viteză inițială, din extremitatea unui diametru orizontal. Cunoscând coeficientul de frecare f, să se afle viteza, cu care sfera va ajunge în punctul cel mai de jos al emisferei.

Răspuns : $v^2 = \dfrac{2gr}{1 + 4f^2}(1 - 2f^2 - 3f \cdot e^{-f\pi})$.

656. Un cub mic este introdus pe un plan orizontal într'un tub, îndoit în formă de circumferință și având secțiunea transversală dreptunghiulară. Cubul are două fețe astfel curbate după forma tubului încât să se poată deplasa în interiorul lui, atingând cu fețele sale pereții tubului. Să se afle legea mișcării cubului, ținând seama de frecarea pe două fețe, cea de jos și cea laterală curbată, dacă în momentul inițial se imprimă cubului viteza v_0 dealungul tubului și dacă coeficientul de frecare pe ambele fețe este f. Să se afle deasemenea timpul T, după care cubul se oprește.

Răspuns :

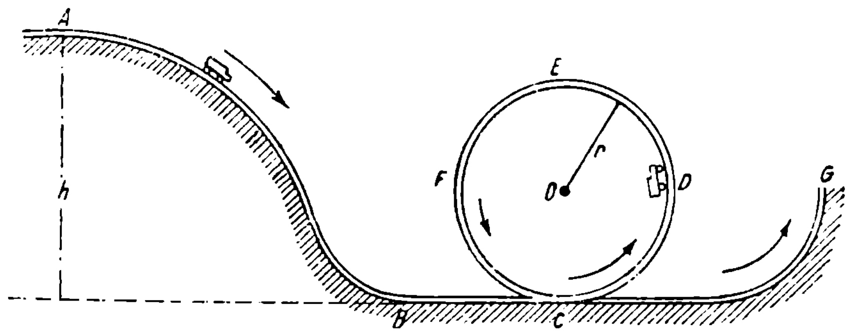
$$s = \frac{r}{f} \ln \left[\frac{\cos(\alpha - \beta t)}{\cos \alpha}\right]; \quad T = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ in care } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{rg}},$$

$\beta = \dfrac{f}{r}\sqrt{rg}$, iar r este raza circumferinței, descrisă de centrul de greutate al cubului.

657. O circumferință din sârmă netedă, de rază r, al cărei plan este vertical, trece printr'un inel de greutate P. Acesta se poate deplasa liber pe circumferință. In momentul inițial inelul capătă viteza v_0, orientată după tangenta la cirumferință.

660. Un cărucior circulă pe două șine, așezate într'un plan vertical și formând bucla circulară $CDEF$, de rază r. Mișcarea începe fără viteză inițială din punctul A, care se află la înălțimea h peste punctul cel mai de jos C al ochiului. Porțiunea AB a drumului are o formă arbitrară, porțiunea BC este orizontală. Să se afle, neglijând rezistențele, ce valoare trebue să aibă înălțimea h încât căruciorul să poată descrie circumferința $CDEF$.

Răspuns : $h \geqslant {}^5/_2\, r$. Când $r < h < {}^5/_2\, r$, căruciorul va sări de pe șine, iar când $h \leqslant r$, el se va întoarce din drum.



La problema 660

661. O cicloidă este așezată într'un plan vertical astfel, încât axa ei este verticală, iar concavitatea în vârful A este îndreptată în sus.

Un punct material M se așează într'un loc al cicloidei astfel încât $\overset{\frown}{AM} = s_0$. Se imprimă punctului viteza v_0, orientată dealungul tangentei la cicloidă în sus. Să se afle legea mișcării punctului presupunând, că asupra punctului acționează numai forța gravității.

Indicație. **Se va folosi formula, care determină lungimea arcului cicloidei : $s = \sqrt{8sry}$, în care r este raza cercului generator al cicloidei.**

Răspuns : $s = s_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4r}}\, t\right) + v_0 \sqrt{\frac{4r}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4r}}\, t\right).$

662. In condițiile problemei precedente să se demonstreze că, în cazul când viteza inițială a punctului material este zero și când acest punct este legat solidar de cercul generator al cicloidei, atunci cercul generator se rostogolește cu viteza unghiulară constantă $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$, când punctul se mișcă pe cicloidă.

663. Un punct material coboară sub acțiunea gravității, pe o curbă netedă, așezată într'un plan vertical. Este cunoscut că la această mișcare punctul se depărtează de orizontala, care trece prin poziția lui inițială, cu viteza constantă c. Să se afle această curbă.

Răspuns : $x^2 = \frac{8g}{9c^2}y^3$, o parabolă semicubică. (Originea se află în poziția inițială a punctului mobil, axa x este orizontală, iar axa y îndreptată în jos).

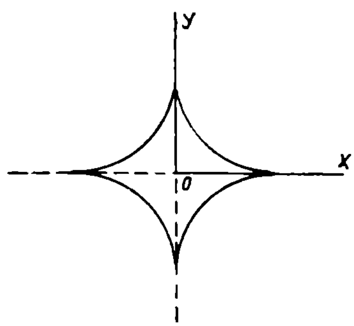
664. Un punct material se mișcă fără frecare, sub acțiunea gravității pe ramura inferioară a astroidei, care are ecuația de formă

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (2r)^{2/3}.$$

Să se afle în cât timp punctul, care pornește cu o viteză extrem de mică din poziția $(-2r, 0)$ ajunge în poziția $(0, -2r)$.

Răspuns : $T = 6\sqrt{\frac{r}{g}} = 3T_1$,

în care T_1 este durata căderii libere dela înălțimea $2r$.



La problema 664

665. Să se afle o curbă, situată într'un plan vertical, astfel încât două sfere, așezate în punctul O al acestei curbe care se mișcă fără frecare, sub acțiunea gravității, să ajungă simultan în alt punct al ei, o sferă trebuind să se rostogolească pe curbă, iar a doua pe coarda ei. Vitezele inițiale ale sferelor sunt nule.

Indicație. Se va scrie ecuația curbei în coordonate polare cu polul în punctul O. Axa polară este verticală.

Răspuns : $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$, adică o lemniscată, a cărei axă de simetrie este înclinată cu 45° față de orizontală.

666. Pe partea exterioară a unei parabole cu axa orizontală, având ecuația $y^2 = 2x$, se rostogolește, fără alunecare și fără viteză inițială, o sferă, care are ordonata inițială $y_0 = 2$. In care punct sfera va sări de pe parabolă?

Răspuns : In punctul (0,5 ; 1).

667. O sferă se rostogolește pe partea exterioară a unei parabole netezi, cu axa verticală, pornind din vârful parabolei cu o viteză inițială dată. Să se demonstreze, că presiunea sferei pe parabolă variază invers proporțional cu raza de curbură a parabolei.

668. O sferă, de greutate P, se rostogolește fără frecare pe un arc de elipsă cu semiaxele a și b, axa mică a elipsei fiind verticală. Să se determine presiunea sferei pe elipsă în punctul ei cel mai de jos, dacă sfera începe mișcarea, fără viteză inițială, din extremitatea axei mari a elipsei.

Răspuns : $P\left(1+2\,\dfrac{b^2}{a^2}\right)$.

669. Un punct material, aflat sub acțiunea forței gravității, execută oscilații cu amplitudinea mică, pe o curbă netedă, fixă, situată într'un plan vertical, în apropierea punctului cel mai de jos O al acestei curbe. Să se arate că perioada acestor oscilații mici se exprimă prin formula $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_0}{g}}$, în care ρ_0 este raza de curbură a curbei date în punctul O.

670. Să se aplice formula pentru perioada T, din problema precedentă, la cazurile de oscilație a unui punct: 1) pe o parabolă cu axa verticală și 2) pe un lănțișor cu axa verticală.

Răspuns : 1) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{p}{g}}$, în care p este parametrul parabolei;

2) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$, în care a este parametrul lănțișorului.

671. Să se arate, că oscilațiile unui pendul cicloidal într'un mediu, a cărui rezistență este proporțională cu viteza, se amortizează, rămânând isocrone.

672. Un punct material, care se află sub acțiunea gravității și este silit să rămână pe suprafața unui cilindru circular fix, neted, de rază r, cu axă verticală, are viteza inițială v_0. Să se arate că prin desfășurarea suprafeței cilindrului pe un plan, traiectoria acestui punct se va transforma într'o parabolă.

673. Un punct material a cărui greutate poate fi neglijată, obligat să rămână pe suprafața unui cilindru circular de rază r capătă o viteză inițială v_0 orientată sub unghiul v_r față de generatoarea cilindrului. Să se afle mișcarea punctului, dacă coeficientul de frecare între punct și suprafața cilindrului este f.

Răspuns : Punctul se mişcă pe o linie elicoidală după legea

$$s = \frac{r}{f\sin^2\gamma}\ln\left(1 + \frac{fv_0\sin^2\gamma}{r}t\right).$$

674. Un punct material se mişcă cu viteza iniţială v_0 pe suprafaţa unei sfere aspre, fixe, cu raza a, fiind atras de centrul ei cu o forţă $\bar{F}$, după legea lui Newton $\left(\bar{F}=\frac{km}{r^2}\right)$. Ce drum va parcurge punctul până la oprire, dacă coeficientul de frecare este egal cu f?

Răspuns : $s = \dfrac{a}{2f}\ln\dfrac{1}{1-\dfrac{av_2^0}{k}}$.

§ 27. Mişcarea relativă a unui punct material

In cazul mişcării unui punct material în raport cu un sistem de referinţă mobil, a cărui mişcare, în raport cu un sistem inerţial de referinţă este cunoscut, trebue să se adauge la forţele, aplicate direct punctului mobil, şi *forţele de inerţie purtătoare şi complimentare a lui Coriolis* (determinate din acceleraţiile purtătoare şi complimentare). Astfel, ecuaţia vectorială a mişcării punctului în raport cu un sistem mobil va avea forma

$$m\bar{w}_r = \bar{F} - m\bar{w}_p - m\bar{w}_k, \tag{1}$$

în care $\bar{w}_r$, $\bar{w}_p$, $\bar{w}_k$ înseamnă respectiv acceleraţiile relativă, purtătoare şi complimentară. In proiecţiile sale pe axele de coordonate ale sistemului mobil, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării relative a punctului se scriu în felul următor:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x - m\,w_{px} - 2m(\omega_y\dot{z} - \omega_z\dot{y}), \\ m\ddot{y} &= F_y - m\,w_{py} - 2m(\omega_z\dot{x} - \omega_x\dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z - m\,w_{pz} - 2m(\omega_x\dot{y} - \omega_y\dot{x}), \end{aligned} \tag{2}$$

în care x, y, z sunt coordonatele punctului mobil în sistemul de referinţe mobil, $\bar{w}_r = \bar{w}_k = 0$ şi ecuaţia echilibrului relativ al punctului va fi:

$$\bar{F} - m\bar{w}_p = 0. \tag{3}$$

Teorema energiei cinetice se exprimă în mişcarea relativă a punctului astfel:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\cdot d\bar{r} - m\bar{w}_p\cdot d\bar{r} \tag{4}$$

întrucât lucrul mecanic al forţei de inerţie complimentare este egal cu zero în mişcarea relativă.

675. Un vagon se mișcă în linie dreaptă cu accelerația constantă a. Să se determine traiectoria relativă a unui corp, care cade liber în vagon, în cazul când viteza inițială relativă a corpului este egală cu zero. Să se afle deasemenea deplasarea relativă orizontală a corpului în timpul căderii lui, dacă distanța inițială a corpului la podeaua vagonului este h.

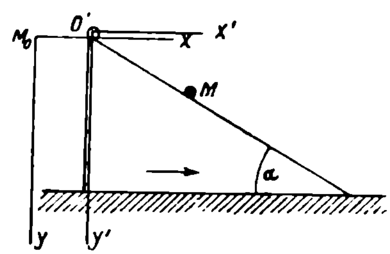
Răspuns : 1) O linie dreaptă ; 2) $-\frac{ah}{g}$ (semnul minus arată că deplasarea este îndreptată în partea opusă accelerației vagonului).

676. Un pendul matematic, de lungime l este fixat de o scândură, care are o mișcare de translație verticală în jos, cu accelerația constantă $a<g$. Să se afle perioada oscilațiilor mici ale pendulului.

Răspuns : $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$.

677. O pană dreptunghiulară netedă, cu unghiul α are o mișcare de translație în linie dreaptă pe un plan orizontal, fără viteză inițială, cu accelerația constantă a. Pe pană se așează sfera M, care începe să se rostogolească pe pană. Cunoscând greutatea P a sferei și presupunând, că viteza ei inițială relativă este nulă, să se afle traiectoria absolută, accelerațiile relativă și absolută a sferei, precum și reacțiunea N a penei. Să se analizeze cazurile particulare :

1) $a=g \operatorname{tg} \alpha$ și
2) $a=-g \operatorname{ctg} \alpha$.



La problema 677

Răspuns : 1) Traiectoria este dreapta $Ax-By=0$, în care

$A=(g \sin \alpha - a \cos \alpha) \sin \alpha,$

$B=a+(g \sin \alpha - a \cos \alpha) \cos \alpha,$

originea axelor mobile fiind luată în poziția inițială M_0 a sferei.

Accelerația relativă :

$$w_r = g \sin \alpha - a \cos \alpha.$$

Accelerația absolută :

$$w_a = \sqrt{g^2+a^2} \sin \alpha.$$

Reacțiunea penei :

$$N = P\left(\cos \alpha + \frac{a}{g} \sin \alpha\right).$$

Cazurile particulare:

1. Ecuația traiectoriei are forma $y=0$, adică pana se mișcă, ducând cu sine sfera care se află nemișcată pe ea; în cazul acesta

$$N = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

2. Ecuația traiectoriei are forma $x=0$, adică pana iese de sub sferă, care cade liber; în cazul acesta

$$N = 0.$$

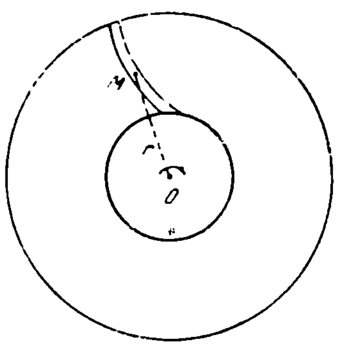
678. O circumferință netedă de sârmă, cu raza r, situată într'un plan vertical, are o mișcare verticală de translație cu accelerația constantă a. Circumferința de sârmă trece printr'un inel. Să se afle viteza relativă a inelului, precum și reacțiunea N a circumferinței, dacă greutatea inelului este P.

Răspuns: $v_r = \sqrt{v_{r_0}^2 + 2\,(g \mp a)\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\,r}.$

$$N = \frac{P}{r}\left[\left(1 \mp \frac{a}{g}\right)(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)\,r + \frac{v_{r_0}^2}{g}\right],$$

în care semnul $+$ corespunde cazului, când accelerația purtătoare este îndreptată în sus; φ este unghiul dintre raza vectoare a inelului și raza verticală a circumferinței, îndreptată în jos.

679. Un tub de formă arbitrară, a cărui linie axială se află într'un plan orizontal, se rotește cu viteza unghiulară variată Ω în jurul unei axe fixe, verticale O (perpendiculară pe figură). In tubul acesta se află sfera M de masă m. Să se afle forțele de inerție ale acestei sfere și forțele active care îi sunt aplicate, fiind cunoscute: raza de curbură ρ a tubului în orice punct al lui, distanța r a sferei la axa de rotație O într'un moment dat, viteza ei u față de tub și coeficientul de frecare f dintre sferă și tub.



La problema 679

Răspuns: **I.** *Forțele de inerție*:

1) Forța complimentară egală ca mărime cu $2mu\Omega$ și orientată dealungul normalei la tub;

2) forța centrifugă în mișcarea purtătoare, egală ca mărime cu $mr\Omega^2$ și orientată dealungul razei vectoare $\overline{r}$, îndreptată dela axa de rotație înafară;

3) forța tangențială de inerție în mișcarea purtătoare, egală ca mărime cu $mr\frac{d\Omega}{dt}$ și perpendiculară pe $\bar{r}$;

4) forța centrifugă în mișcarea relativă, egală ca mărime cu $\frac{mu^2}{\rho}$ și orientată în direcția normalei exterioare a tubului;

5) forța tangențială de inerție în mișcarea relativă egală cu $m\frac{du}{dt}$ și orientată dealungul tangentei la tub.

II. *Forțele active*:

1) greutatea sferei $P = mg$;

2) reacțiunea verticală a tubului $\bar{N}_1 = -\bar{P}$;

3) reacțiunea orizontală a tubului $\bar{N}_2$, îndreptată dealungul normalei la tub, de mărime

$$\bar{N}_2 = m\left|\frac{u^2}{\rho} \pm 2u\Omega - r\Omega^2 \cos(\rho, r) - r\frac{d\Omega}{dt}\sin(\rho, r)\right|;$$

4) forța de frecare, îndreptată dealungul tangentei la tub în sens opus vitezei relative și egală cu fN, unde N este reacțiunea totală a tubului, egală ca mărime cu $\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$.

680. Un tub neted, orizontal, drept, se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe verticale, care trece prin extremitatea tubului. In tub se află o sferă de masă m. In momentul inițial distanța sferei la axa de rotație este a, iar viteza ei în raport cu tubul, este zero. Să se afle legea mișcării relative a sferei dealungul tubului și reacțiunea orizontală N a tubului.

Răspuns: $x' = a \operatorname{ch}(\omega t)$; $N = 2am\omega^2 \operatorname{sh}(\omega t)$.

681. In condițiile problemei precedente să se afle traiectoria absolută, vitezele absolută și relativă a sferei, la ieșirea ei din tub, precum și timpul t_1, când sfera va ieși din tub dacă lungimea tubului este $2a$.

Răspuns: 1) Ecuația traiectoriei absolute în coordonate polare: $r = a \operatorname{ch} \varphi$.

2) $v_a = \sqrt{7}\, a\omega$. 3) $v_r = \sqrt{3}\, a\omega$. 4) $t_1 = \frac{1}{\omega}\ln(2 + \sqrt{3})$.

682. Un tub neted, a cărui linie axială are forma unei curbe plane oarecare, se rotește într'un plan orizontal cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unui punct fix O. In tub se află sfera M; distanța ei inițială de O este r_0, iar viteza inițială față de tub este zero. Să se arate, că viteza relativă a sferei are expresia următoare:

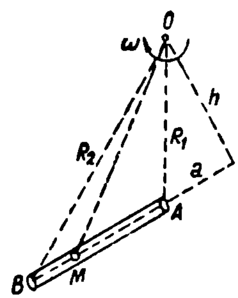
$$v_r = \omega \sqrt{r^2 - r_0^2},$$

în care r este distanța sferei la punctul O într'un moment dat.

683. O sferă intră cu viteza inițială relativă v_{r0} în capătul deschis B al unui tub drept de lungime l, care se rotește într'un plan orizontal, în jurul celuilalt capăt fix A, cu viteza unghiulară constantă ω. Să se afle, care trebue să fie valoarea minimă v_{r0} a vitezei relative inițiale, pentru ca sfera să ajungă în punctul A.

Răspuns: Viteza căutată este egală cu viteza purtătoare a sferei în momentul inițial, adică în momentul când sfera se află în punctul B.

684. Un tub drept AB, de lungime l se rotește într'un plan orizontal în jurul unui punct fix O, cu viteza unghiulară constantă ω, având $OA = R_1$ și $OB = R_2$.



La problema 684

In interiorul tubului se poate mișca fără frecare o sferă M de masă m. Să se afle mișcarea relativă a sferei, dacă în momentul inițial ea se află în punctul A și viteza ei inițială relativă este v_{r0}. Să se determine deasemenea reacțiunea orizontală N a tubului, timpul t_1, după care sfera va ieși din tub și viteza ei relativă v_{r_1} în acest moment.

Răspuns: $$AM = s = \frac{1}{2\omega}\left[(a\omega + v_{r0})\, e^{\omega t} + (a\omega - v_{r_0})\, e^{-\omega t}\right] - a;$$

$$N = m\omega\left[(a\omega + v_{r_0})\, e^{\omega t} - (a\omega - v_{r_0})\, e^{-\omega t} + \omega\sqrt{R_1^2 - a^2}\right];$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\ln\frac{\omega(a+l) + v_{r_1}}{\omega a + v_{r_0}}; \quad v_{r_1} = \sqrt{v_{r_0}^2 + \omega^2(R_2^2 - R_1^2)},$$

în care

$$a = \frac{R_2^2 - R_1^2 - l^2}{2l}.$$

685. Un tub, curbat în formă de cerc cu raza r, se rotește într'un plan orizontal cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul unuia din punctele sale A. In interiorul tubului se poate deplasa fără frecare, o sferă de masă m. Ştiind, că viteza relativă a sferei este v_{r0}, să se afle viteza ei relativă şi reacţiunea orizontală N a tubului. Să se determine deasemenea perioada T a oscilaţiilor mici ale sferei în jurul poziţiei de echilibru relativ.

Răspuns : $v_r = \sqrt{v_{r_0}^2 + 2\, r^2 \omega^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}\,;$

$$N = mr \left[\left(\omega + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \omega^2 \cos \varphi \right] : \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}\,,$$

în care φ este unghiul dintre raza vectoare a sferei, dusă din centrul O al cercului, şi diametrul AO.

686. O curbă din sârmă netedă trece printr'un inel de greutate P. Curba $y = f\,(x)$ trece prin origine şi se roteşte în jurul axei verticale Oy, cu viteza unghiulară constantă ω. Ce formă trebue să aibă această curbă, pentru ca inelul să se afle în echilibru relativ, în *orice* poziţie pe această curbă. Să se afle deasemenea reacţiunea N a curbei. (Pe principiul acestei probleme se bazează acţiunea regulatorului astatic).

Răspuns : 1) Parabola $y = \frac{\omega^2}{2g}\,x^2$; 2) $N = P\sqrt{1 + \frac{2\omega^2}{g}\,y}\,\cdot$

687. O sferă de masă m, se poate mişca fără frecare în interiorul unui tub drept orizontal, care se roteşte în jurul unei axe verticale, care trece prin capătul tubului. Cu ce viteză unghiulară trebue să se rotească tubul, pentru ca presiunea orizontală a sferei asupra tubului să rămână constantă? In momentul iniţial distanţa sferei la axa de rotaţie este r_0, viteza unghiulară ω_0 şi raportul dintre viteza relativă a sferei şi viteza ei purtătoare este $\sqrt{2}$. Să se afle deasemenea, în acest caz acceleraţia relativă w_r a sferei şi traiectoria ei absolută.

Răspuns : $\omega = \dfrac{\omega_0}{1 + \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}\,t}$; $\omega_r = r_0\,\omega_0^2 = \text{const}$; $r = r_0\,e^{\sqrt{2}\cdot\varphi}$.

688. O bară dreaptă OA alunecă pe un plan neted orizontal rotindu-se în jurul capătului fix O, cu viteza unghiulară constantă ω şi loveşte o sferă de masă m, situată pe acest plan. Să se afle legea mişcării relative a sferei dealungul barei, când coeficientul de frecare dintre sferă şi bară este f. In momentul inițial sfera se află la distanța a de punctul O și viteza ei în raport cu bara, este egală cu zero.

Răspuns : $$x = \frac{a}{2\sqrt{1+f^2}}\left[\left(\sqrt{1+f^2}+f\right)e^{\omega\left(\sqrt{1+f^2}-f\right)t} + \right.$$
$$\left. + \left(\sqrt{1+f^2}-f\right)e^{-\omega\left(\sqrt{1+f^2}+f\right)t}\right].$$

689. Ținând seama de rotația zilnică a pământului, să se determine mișcarea relativă a unui punct material, care se mișcă fără frecare, cu viteza inițială relativă v_0 într'un plan orizontal, la latitudinea $\varphi°$.

Răspuns : O mișcare uniformă pe un cerc de rază $\frac{v_0}{2\omega\sin\varphi}$, în care ω este viteza unghiulară de rotație a pământului.

690. Un punct material, de masă m, se poate mișca liber fără frecare în planul zOx, care se rotește în jurul axei verticale fixe Oz cu viteza unghiulară constantă ω. Să se afle mișcarea relativă a acestui punct, dacă el se află sub acțiunea gravității și dacă coordonatele lui inițiale sunt egale cu x_0 și z_0, iar viteza inițială relativă este egală cu zero. Să se determine deasemenea reacțiunea N a planului, care se rotește.

Răspuns : $$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right);\ z = z_0 - \frac{gt^2}{2};$$
$$N = m x_0\,\omega^2\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right).$$

691. Un punct material este așezat pe un plan neted, orizontal Oxy, care se rotește în jurul unei axe fixe Oz, cu viteza unghiulară constantă ω. Punctului i se imprimă o viteză inițială oarecare, situată în planul acesta. Să se arate, că în mișcarea relativă a punctului au loc următoarele egalități :

1) $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\omega^2(x^2+y^2)=\text{const}$; 2) $y\dot{x}-x\dot{y}-\omega(x^2+y^2)=\text{const}.$

692. Un punct material M, de masă m, se află pe un plan orizontal, neted, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe verticale fixe, ce trece printr'un punct O al planului. Punctul material M este atras spre punctul O, de o forță de mărime $F = m\omega^2 r$, în care r este distanța punctului M la O. Să se arate că în mișcarea relativă, la orice condiții inițiale, punctul M descrie un cerc, cu viteza unghiulară 2ω.

II. DINAMICA SISTEMULUI

§ 28. Principiul deplasărilor virtuale

Orice deplasare a unui sistem se numeşte *deplasare virtuală* admisă într'un moment dat de legături, iar deplasarea pe care sistemul o suferă efectiv, sub acţiunea unor forţe date, se numeşte *deplasare reală*. Dacă legăturile sistemului nu depind de timp, deplasarea reală este una din deplasările virtuale.

Când se dă sistemului o deplasare elementară virtuală, forţa P (X, Y, Z) aplicată în punctul M, efectuează un lucru mecanic elementar egal cu

$$\overline{P}\,\delta\overline{r} = P\,\delta s\,\cos(\overline{P}, \delta\overline{r}) = X\,\delta x + Y\delta y + Z\,\delta z,$$

în care $\delta\overline{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ este deplasarea elementară a punctului M. Principiul deplasărilor virtuale constă în aceea, că *pentru echilibrul unui sistem cu legături ideale este necesar şi suficient ca pentru fiecare deplasare virtuală suma lucrurilor mecanice elementare a tuturor forţelor active să fie egală cu zero (în cazul legăturilor care se menţin)*, adică în coordonate carteziene $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n)$:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0$$

şi în parametri independenţi $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$:

$$\sum_{v=1}^{k} Q_v\,\delta q_v = 0,$$

de unde

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, \quad Q_k = 0,$$

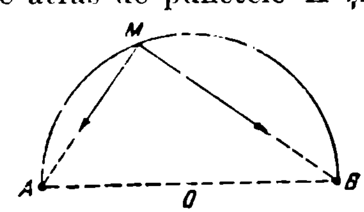
în care

$$Q_v = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_v} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_v} + Z\frac{\partial z_i}{\partial q_v}\right)$$

este forţa generalizată.

In aceste ecuaţii nu intră lucrul mecanic al reacţiunilor legăturilor ideale.

693. Printr'un punct fără greutate M, trece un semicerc din sârmă AMB. Punctul M este atras de punctele A şi B, cu forţe proporţionale cu distanţa. Factorul de proporţionalitate pentru ambele puncte este k. Să se afle poziţia de echilibru şi presiunea punctului pe sârmă, dacă raza semicercului este r.



La problema 693

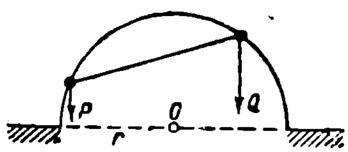
Răspuns: Echilibrul este indiferent; punctul se află în echilibru în orice loc de pe semicerc. Presiunea punctului pe sârmă este $2kr$.

694. O sferă este așezată într'un tub neted, care se află într'un plan orizontal și are forma unei elipse, cu axa mare egală cu $2\,a$. Sfera este atrasă de focarele elipsei cu o forță, invers proporțională cu pătratul distanței. Factorul de proporționalitate pentru un focar este k^2, iar pentru celălalt k_1^2. Să se determine razele-vectoare r și r_1, în poziția de echilibru a sferei.

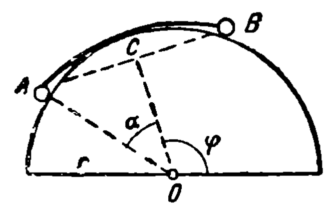
Răspuns : $r = \dfrac{2ak}{k + k_1}$, $\quad r_1 = \dfrac{2ak_1}{k + k_1}$.

695. Un semicerc vertical din sârmă, de raza r trece prin două sfere mici de greutate P și Q, legate între ele printr'un fir inextensibil, de lungime $2l$. Să se afle poziția de echilibru (unghiul α dintre fir și orizontală), dacă nu există frecare.

Răspuns : $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{l(Q - P)}{(P + Q)\sqrt{r^2 - l^2}}$.



La problema 695



La problema 696

696. Un lănțișor greu, omogen, de capetele căruia sunt fixate sferele A și B de greutatea P și Q, este așezat pe suprafața unui semicilindru neted de rază r. Să se determine unghiul dintre dreapta OC, perpendiculară pe AB, și orizontală, în poziția de echilibru. Unghiul α este dat, greutatea unității de lungime a lănțișorului este γ.

Răspuns : $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{(P + Q)\cos\alpha + 2r\gamma \sin\alpha}{(P - Q)\sin\alpha}$.

697. Vârfurile opuse ale unui paralelogram articulat $ABCD$ sunt legate prin firele AC și BD, ale căror tensiuni sunt T_1 și T_2. Să se dovedească proporția $T_1 : T_2 = AC : BD$.

698. Să se rezolve prin metoda deplasărilor virtuale problemele 117, 125, 147, 176 și 186 din capitolul „Statica".

699. Să se afle unghiul, care determină poziția de echilibru a unui sistem, care constă în două bare omogene OA și AC, reprezentat în figură. Se dau: $AC = 2a$, $AO = OB = a$. Greutatea barei AO este P, a barei AC, $2P$.

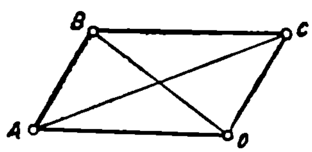
Răspuns: Unghiul căutat se determină din ecuația

$$\cos^2 \varphi - 0{,}2 \cos \varphi - 0{,}5 = 0$$

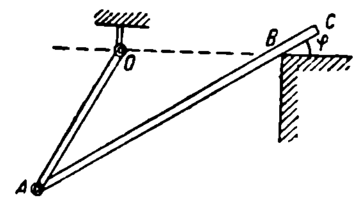
de unde

$$\cos \varphi = 0{,}1 \mp \sqrt{0{,}51}.$$

Câte soluții are problema?



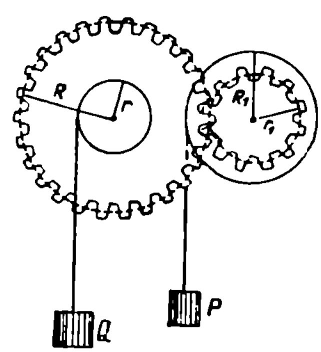
La problema 697



La problema 699

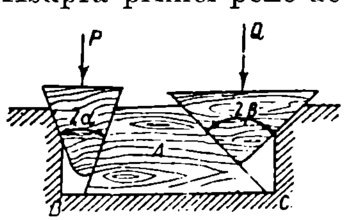
700. Asupra unei șaibe de rază r, solidar legată cu o roată dințată de rază R, acționează forța verticală $\overline{Q}$; asupra altei șaibe de rază R_1, solidar legată cu un pinion de rază r_1, acționează forța $\overline{P}$. Să se afle relația dintre forțele $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ în poziția de echilibru.

Răspuns: $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{rr_1}{RR_1}$.



La problema 700

701. Un corp A, aflat pe un plan orizontal BC, se află între două pene isoscele, cu unghiurile la vârf 2α și 2β. Asupra primei pene acționează forța verticală $\overline{P}$; asupra penei a doua forța verticală $\overline{Q}$. Să se afle relația dintre aceste forțe în poziția de echilibru.



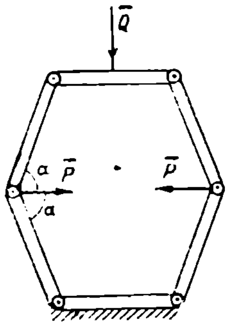
La problema 701

Răspuns: $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$.

702. Un exagon cu laturi egale, articulat, a cărui bază este fixată, se află sub acțiunea forțelor $\overline{P}, -\overline{P}$ și $\overline{Q}$, cum se arată în figură.

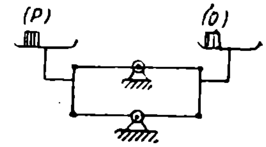
Să se afle relația dintre aceste forțe în poziția de echilibru. Unghiul α este cunoscut.

Răspuns: $Q = P \cdot \operatorname{tg} \alpha$.



La problema 702

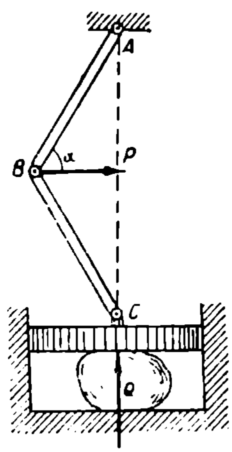
703. Să se arate că, condiția de echilibru pe cântarul Roberval este egalitatea *$P = Q$ indiferent de poziția greutăților pe talerele cântarului.*



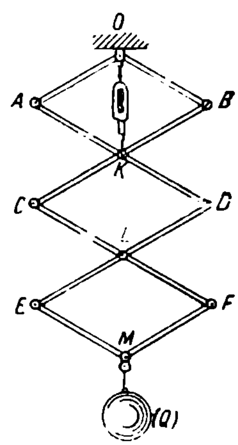
La problema 703

704. Asupra articulației din mijlocul B al unui dispozitiv de presare ABC, acționează în planul ei o forță orizontală $\overline{P}$. Ce forță $\overline{Q}$, aplicată în punctul C și orientată dealungul dreptei CA, echilibrează această forță $\overline{P}$? ($AB = BC$, $\sphericalangle ABC = 2\alpha$).

Răspuns: $Q = \frac{1}{2} P \operatorname{tg} \alpha$.



La problema 704



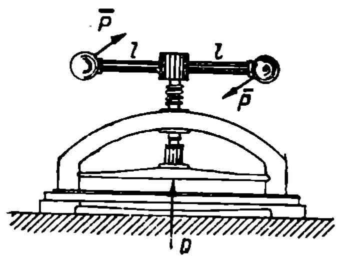
La problema 705

705. Un mecanism plan cu articulații are construcția arătată în figură. Barele OA, OB, AD, BC, ... sunt fără greutate și formează o serie de romburi. OK este un dinamometru. Să se afle cât va arăta dinamometrul, dacă se atârnă de articulația M o greutate de Q kg.

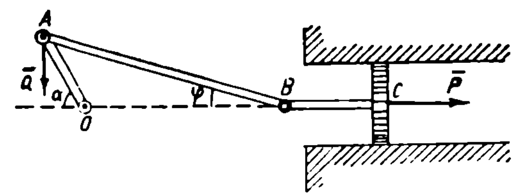
Răspuns: n fiind numărul romburilor (în cazul din figură $n = 3$) rezultatul cerut va fi nQ kg.

706. Să se afle condiția de echilibru a forțelor din presa reprezentată în figură, dacă forțele orizontale $\overline{P}$ și $-\overline{P}$ acționează perpendicular pe mâner, l fiind lungimea fiecărui mâner și h pasul șurubului.

Răspuns : $Q = 4\pi P \frac{l}{h}$.



La problema 706



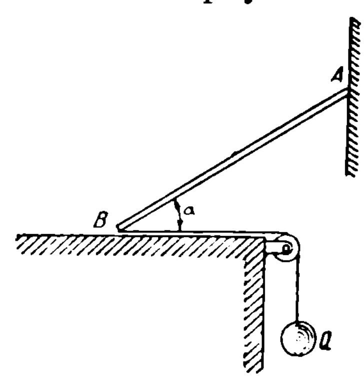
La problema 707

707. Pentru poziția de echilibru a mecanismului să se afle relația dintre forțele: $\overline{P}$, orizontală și $\overline{Q}$, verticală, care acționează asupra pistonului C și a capătului A al manivelei, cum se arată în figură. Unghiurile α și φ sunt cunoscute.

Răspuns : $\frac{Q}{P} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha \cdot \cos\varphi}$.

708. O bară omogenă de greutate P se sprijină cu capătul ei superior de un perete vertical aspru (coeficientul de frecare este f) iar cu cel inferior pe o masă orizontală netedă. Bara se menține în echilibru într'un plan vertical, cu ajutorul unui fir legat de capătul inferior și întins peste masă, fiind apoi trecut peste un scripete și purtând greutatea Q la capătul lui liber.

Să se afle pentru ce valori ale unghiului de înclinare al barei α este posibil echilibrul, precum și reacțiunile în punctele A și B.



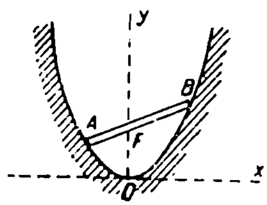
La problema 708

Răspuns : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{2Q} + k$, unde $f \geq k \geq -f$;

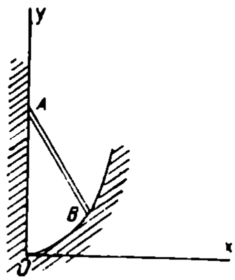
$$N_A = Q\sqrt{1 + k^2}; \quad N_B = P + kQ.$$

709. O tijă omogenă $AB=a$, de greutate P este așezată într'un vas imobil, care are forma unui paraboloid de rotație. Să se determine pozițiile de echilibru. Ecuația parabolei este $x^2=2py$.

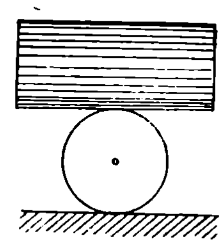
Răspuns: Dacă $a\leqslant 2p$, există numai o singură poziție de echilibru, în care tija este orizontală; dacă $a>2p$, mai există, în afară de poziția orizontală, încă o altă poziție de echilibru, în care tija trece prin focarul paraboloidului.



La problema 709



La problema 710


La problema 711

710. O bară omogenă $AB=a$, de greutate P, se sprijină cu un capăt de un perete vertical neted și cu celălalt capăt de un profil neted fix. Cum trebue să fie acest profil, pentru ca bara să rămână în echilibru, în orice poziție?

Răspuns: Elipsa $x^2+(2y-a)^2=a^2$.

711. Pe un cilindru circular fix de rază r, a cărui axă este orizontală, este așezat un cilindru circular omogen de rază r_1, a cărui axă este deasemenea orizontală și perpendiculară pe axa primului cilindru. Cum va fi echilibrul acestui sistem: indiferent, stabil sau nestabil?

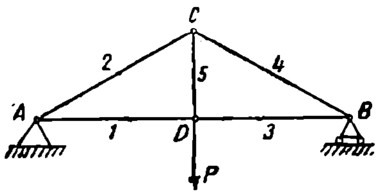
Răspuns: $r_1<r$, atunci echilibrul este stabil; dacă $r_1\geqslant r$, atunci echilibrul este nestabil.

712. Să se determine efortul din bara 3 a fermei, reprezentată în figură prin metoda deplasărilor virtuale. Se dă $AD=DB=8$ m; $DC=4$ m; $P=3$ t.

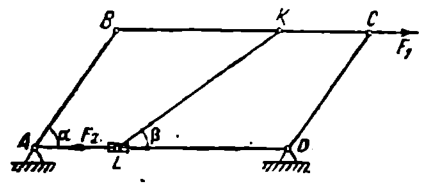
Răspuns: $S_3=3$ t.

713. In paralelogramul articulat $ABCD$, bara AD este fixă. Dealungul acestei bare poate aluneca, fără frecare, culisa L, legată printr'o articulație de bara LK, care la rândul ei este legată prin articulația K de bara BC. In punctul C este aplicată forța $\overline{F}_1$, orientată dealungul barei BC, iar pe culisă este aplicată forța $\overline{F}_2$, orientată după DA. Să se arate, că în poziția de echilibru mărimile forțelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ se află în dependența următoare:

$$\frac{F_1}{F_2} = 1 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$



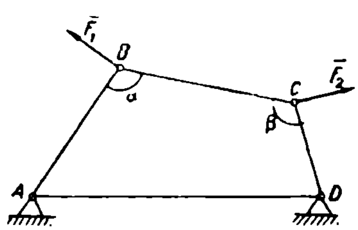
La problema 712



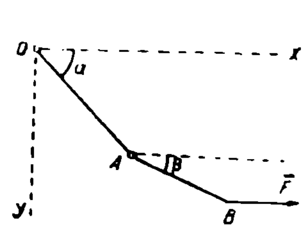
La problema 713

714. Patrulaterul articulat $ABCD$ este așezat pe bara AD. In punctul B este aplicată forța $\overline{F}_1$, perpendiculară pe bara AB, iar în punctul C forța $\overline{F}_2$, perpendiculară pe bara CD. Să se afle relația dintre $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, în poziția de echilibru, dacă unghiurile α și β sunt cunoscute.

Răspuns: $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.



La problema 714

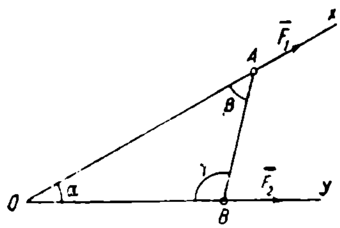


La problema 715

715. O bară omogenă OA, de greutate P_1, se poate roti într'un plan vertical în jurul articulației fixe O. Capătul A al barei este legat printr'o articulație cu altă bară omogenă AB de greutate P_2. La capătul B al barei a doua este aplicată forța orizontală $\overline{F}$. Să se afle unghiurile α și β, formate de bare cu orizontala, în poziția de echilibru.

Răspuns: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{P_1 + 2P_2}{2F}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{P_2}{2F}$.

716. Două puncte A și B, legate printr'un fir inextensibil, pot aluneca pe două drepte fixe, netede Ox și Oy, care formează între ele unghiul α. Aceste puncte sunt respinse de punctul O cu forțe, proporționale cu distanța, factorul de proporționalitate pentru punctul A fiind k_1, iar pentru punctul B, k_2. Să se afle unghiurile β și γ dintre fir și dreptele OA și OB, în poziția de echilibru.



La problema 716

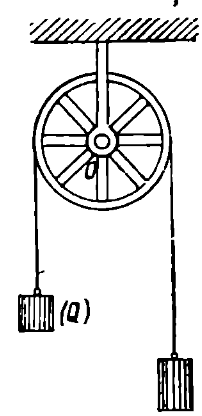
Răspuns: $\operatorname{tg} 2\beta = -\dfrac{k_1 \sin 2\alpha}{k_2 + k_1 \cos 2\alpha}$; $\operatorname{tg} 2\gamma = -\dfrac{k_2 \sin 2\alpha}{k_1 + k_2 \cos 2\alpha}$.

§ 29. Principiul lui D'Alembert

Dacă în fiecare punct material al unui sistem mobil se aplică forța de inerție a acelui punct, toate forțele active, care acționează asupra sistemului, reacțiunile legăturilor și forțelor de inerție vor fi în echilibru. In aceasta constă principiul lui d'Alembert pentru un sistem.

Se numește forță de inerție, o forță egală ca mărime cu masa punctului, înmulțită cu mărimea accelerației acestui punct și îndreptată în sens opus accelerației, adică egală $-m\bar{w}$ (vezi § 26).

717. Peste un scripete fix trece un fir, la extremitățile căruia sunt suspendate greutățile Q și P, $P > Q$. Să se afle accelerația w a greutăților, tensiunea T a firului și reacțiunea N a axei O a scripetelui, neglijând masa scripetelui:



La problema 717

Răspuns: $w = g\dfrac{P - Q}{P + Q}$, $T = \dfrac{2PQ}{P + Q}$,

$$N = \frac{4PQ}{P + Q}.$$

718. In problema precedentă să se afle accelerația greutăților, ținând seama de masa scripetelui, neglijând alunecarea firului pe scripete. Greutatea scripetelui este G, iar raza lui de inerție în raport cu axa O este egală cu k.

Răspuns: $w = \dfrac{P - Q}{P + Q + \dfrac{k^2}{r^2} G}\, g$.

719. In problema 717 să se afle viteza și accelerația greutăților în funcție de timp, presupunând că $P = 2Q$ și ținând seama de rezistența aerului care este direct proporțională cu viteza greutăților. Factorul de proporționalitate, pentru ambele greutăți, este $\mu = km$, în care m este masa greutății mai mici. In momentul inițial viteza greutăților este egală cu zero.

$$Răspuns: \quad v = \frac{g}{2k}\left(1 - e^{-\frac{2}{3}kt}\right); \quad w = \frac{1}{3}\, g e^{-\frac{2}{3}kt}.$$

720. Să se afle accelerația ε a unui troliu, a cărui masă poate fi neglijată, precum și tensiunile din cele două fire și reacțiunea axei scripetelui, dacă greutățile sunt egale cu P și p.

Răspuns: $\varepsilon = \dfrac{PR - pr}{PR^2 + pr^2}\, g$. Tensiunea firului drept este

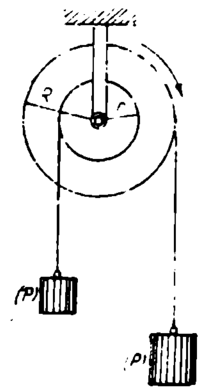
$$T_1 = \frac{(R + r)\, r}{PR^2 + pr^2}\, Pp.$$

Tensiunea firului stâng

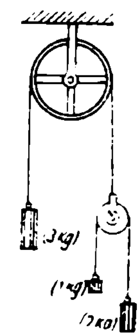
$$T_2 = \frac{(R + r)\, R}{PR^2 + pr^2}\, Pp.$$

Reacțiunea axei

$$N = \frac{(r + R)^2}{PR^2 + pr^2}\, Pp.$$



La problema 720



La problema 721

721. Peste un sripete fix, a cărui masă poate fi neglijată, trece un fir care poartă la o extremitate o greutate de 3 kg, iar la extremitatea cealaltă un alt scripete (fără greutate); peste acest al doilea scripete trece deasemenea un fir, la extremitățile căruia atârnă greutăți de 1 și 2 kg. Cu ce accelerație se va mișca greutatea de 3 kg?

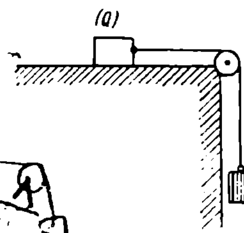
$$Răspuns: \quad w = \frac{1}{17}\, g.$$

722. Un corp de greutate Q este așezat pe un plan orizontal. De el este fixat un fir, care trece peste un scripete și poartă la capăt greutatea P. Să se afle accelerația w, cu care se va mișca corpul și tensiunea T a firului, dacă coeficientul de frecare dintre corp și plan este f.

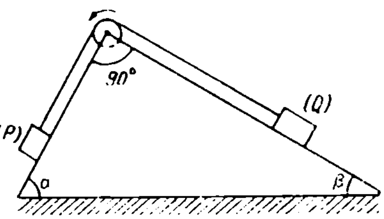
$$Răspuns: \quad w = g\,\frac{P - fQ}{P + Q}; \quad T = \frac{PQ(1 + f)}{P + Q}.$$

723. Două sarcini A și B de greutățile P și Q, legate printr'un fir, care trece peste un scripete fără greutate, pot aluneca pe fețele unei prisme fixe, coeficientul de frecare fiind f. Să se afle accelerația w, cu care se vor mișca sarcinile, dacă unghiurile α și β sunt cunoscute.

Răspuns : $w = g\dfrac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Q(\sin\beta + f\cos\beta).}{P+Q}$

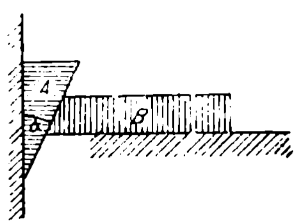


La problema 722



La problema 723

724. O pană A cu unghiul α, de greutate P, se sprijină cu o parte, pe un perete vertical neted, iar cu partea cealaltă, pe o prismă B de greutate Q, care poate aluneca fără frecare pe un plan orizontal fix. Să se afle accelerațiile w și w_1 ale penei și prismei, precum și presiunea N a penei pe prismă.



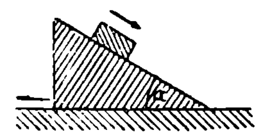
La problema 724

Răspuns :

$$w = \frac{P}{P+Q\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\,g;\quad w_1 = \frac{P\,\mathrm{tg}\,\alpha}{P+Q\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\,g;$$

$$N = \frac{PQ\sin\alpha}{P\cos^2\alpha + Q\sin^2\alpha}.$$

725. O pană în forma de triunghi dreptunghic, cu unghiul α, de greutate P, este așezată pe un plan orizontal neted. Pe pană se așează un corp de greutate Q, care poate aluneca fără frecare pe ea. Să se afle mișcarea acestui sistem, precum și presiunea pe planul orizontal și presiunea corpului pe pană.



La problema 725

Răspuns : Accelerația penei

$$w = \frac{Q\sin 2\alpha}{2(P+Q\sin^2\alpha)}\,g.$$

Accelerația corpului față de pană

$$w_r = \frac{(P+Q)\sin\alpha}{P+Q\sin^2\alpha}\,g.$$

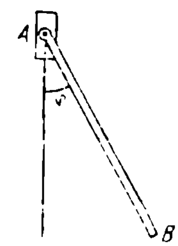
Presiunea pe planul orizontal

$$N = \frac{P(P+Q)}{P + Q\sin^2\alpha}.$$

Presiunea corpului pe pană

$$N_1 = \frac{PQ\cos\alpha}{P + Q\sin^2\alpha}.$$

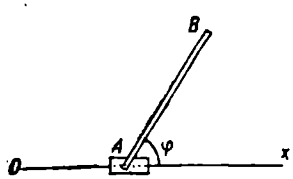
726. O bară omogenă AB, de lungime $2a$, se poate roti în jurul articulației A, care alunecă în jos, pe o dreaptă fixă verticală, cu accelerația constantă $w < g$. In momentul inițial bara se află în repaus și unghiul ei de înclinare, față de verticală, este $\varphi = \varphi_0$. Să se afle perioada oscilațiilor barei în jurul poziției verticale, dacă unghiul φ_0 este mic.



La problema 726

Răspuns: $T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{3(g-w)}}$.

727. O tijă AB de greutate P și lungime $2a$ are la capătul A o articulație, care este pusă în mișcare pe o dreaptă orizontală fixă Ox, cu ajutorul unui fir prins de ea. Cu ce viteză trebue mișcată articulația A, pentru ca tija să se rotească în jurul ei uniform cu viteza unghiulară ω în sensul acelor de ceasornic? Să se exprime viteza v în funcție de unghiul φ, dacă la momentul inițial $\varphi = \varphi_0$ și $v = 0$.

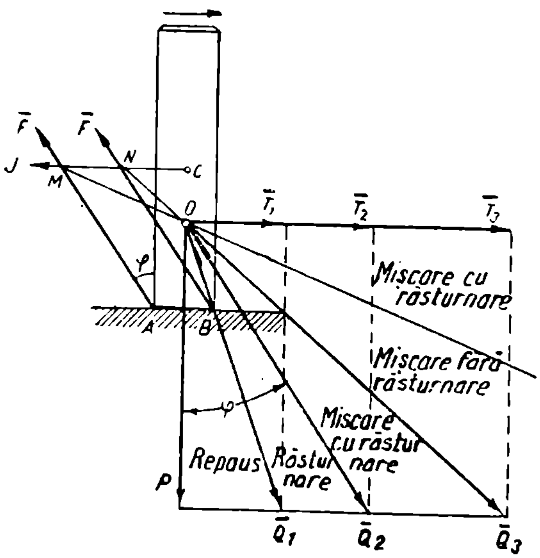


La problema 727

Răspuns: $v = \frac{g}{\omega}\ln\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}$.

728. De un paralelipiped dreptunghic omogen, de greutate P, care stă pe un plan orizontal aspru, este legat un fir mai jos de centrul lui de greutate. La extremitatea firului este aplicată o forță orizontală de mărime T. Să se analizeze pe cale grafică mișcarea acestui paralelipiped, dacă unghiul de frecare φ este dat.

Răspuns: Cele trei forțe echilibrate: forța activă $\overline{Q}$ (rezultanta forțelor $\overline{T}$ și $\overline{P}$), reacțiunea totală $\overline{F}$ a planului (rezultanta forței de frecare și a reacțiunii normale a planului), egală cu greutatea paralelipipedului și forța de inerție J, aplicată în centrul de greutate C al paralelipipedului, trebue să se intersecteze într'un punct; forța $\overline{Q}$ și forța de inerție se intersectează pe orizontala, care trece prin centrul de greutate; forța $|\overline{F}|$ se poate afla, în cazul mișcării, numai în fâșia $ABMN$; deaceea mișcarea fără răsturnare este posibilă numai când linia de acțiune a forței $\overline{Q}$ se află în interiorul unghiului OMN. In caz contrar forța $\overline{T}$ va provoca o mișcare cu răsturnare, fie în sensul acelor de ceasornic, fie în sens opus.



La problema 728

729. O bară dreaptă omogenă subțire, de greutate P și lungime l, se mișcă uniform cu viteza unghiulară ω într'un plan orizontal, în jurul capătului ei fix A. Să se afle efortul F care se produce datorit rotației, într'o secțiune transversală a barei aflată la distanța x de punctul A.

Răspuns: $F = \frac{P\omega^2}{2lg}(l^2 - x^2)$.

730. Să se afle tensiunea în cuplele dintre vagoanele unui tren, dacă forța de tracțiune a locomotivei este constantă și egală cu F, trenul merge uniform accelerat, și coeficientul frecării totale este f.

Răspuns: Tensiunea in cuplele dintre vagonul al k-lea și $k+$ 1-lea (socotit dela locomotivă) este egală cu

$$S_k = F - \frac{F}{P} P_k,$$

în care P este greutatea tuturor vagoanelor, iar P_k greutatea primelor k vagoane. Se va modifica oare acest răspuns, dacă trenul merge uniform?

731. Un lanț omogen este aruncat peste muchia orizontală O a unui unghi diedru și poate aluneca, fără frecare, într'un plan vertical, pe planele care formează unghiul. Să se afle mișcarea acestui lanț, tensiunea S într'un punct oarecare al lui, precum și tensiunea maximă în punctul O. Se dă : lungimea l a lanțului, masa m a unității de lungime a lanțului, unghiurile α și β dintre orizontală și respectiv planul stâng și cel drept al unghiului diedru.

Răspuns : Dacă se înseamnă cu x lungimea porțiunii de lanț, care se află pe planul stâng, atunci

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l}[x \sin \alpha + (x - l) \sin \beta].$$

De aci

$$x = A\, e^{ct} + B\, e^{-ct} + a,$$

în care

$$A = \frac{1}{2}\left(x_0 - a + \frac{v_0}{c}\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(x_0 - a - \frac{v_0}{c}\right),$$

$$c^2 = \frac{g}{l}(\sin \alpha + \sin \beta), \qquad a = \frac{l \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

(x_0 și v_0 sunt poziția inițială și viteza inițială a lanțului). Dacă se înseamnă cu x' distanța unui punct oarecare al lanțului de pe planul stâng la muchia O, atunci

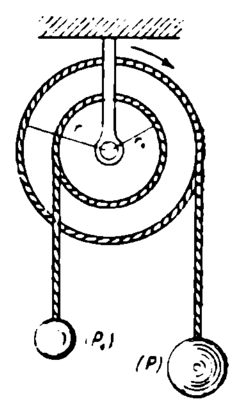
$$S = \frac{P}{l^2}(x - x')(1 - x)\ (\sin \alpha + \sin \beta).$$

Tensiunea în punctul O

$$S_0 = \frac{P}{l^2}(\sin \alpha + \sin \beta)\, x\,(l - x);$$

$$S_{0\,\max} = \frac{1}{4} P (\sin \alpha + \sin \beta), \text{ pentru } x = \frac{l}{2},$$

în care P este greutatea lanțului întreg.



La problema 732

732. Pe un arbore orizontal sunt așezate două șaibe solidar legate între ele, cu razele r și r_1 pe care sunt înfășurate cabluri care poartă la capete sarcini de greutăți p și p_1. Să se afle accelerația unghiulară ε a arborelui, tensiunile T și T_1 a cablurilor, precum și reacțiunea totală a lagărelor, în care se rotește arborele, dacă nu există frecare și dacă greutatea arborelui cu șaibe este P, iar momentul lor de inerție total J.

Răspuns : $\varepsilon = \frac{(p_1 r_1 - pr) g}{Jg + pr^2 + p_1 r_1^2}$; $T = p\left(1 + \frac{r\varepsilon}{g}\right)$,

$$T_1 = p_1\left(1 - \frac{r_1 \varepsilon}{g}\right);$$

$$N = P + p + p_1 - \frac{(pr - p_1 r_1)^2}{Jg + pr^2 + p_1 r_1^2}.$$

733. Un corp se rotește cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul unei axe fixe z. Masa corpului este M, iar distanța centrului de greutate la axa de rotație este a. Să se demonstreze, că forțele centrifuge ale punctelor materiale ale corpului se reduc la un răsucitor, al cărui parametru este

$$p = \frac{y_C E - x_C D}{Ma^2}$$

și a cărui axă intersectează axa de rotație a corpului în punctul

$$z_0 = \frac{x_C E + y_C D}{Ma^2},$$

în care x_C și y_C sunt coordonatele centrului de greutate al corpului, $E = \Sigma mzx$ și $D = \Sigma myz$ (momente de inerție centrifuge).

734. O bară verticală se rotește în pivotul B și în lagărul A. In punctul O este solidar legată de ea o altă bară CD, astfel că $OA = a$, $OB = b$ și $CO = OD = l$.

Neglijând greutatea proprie a barelor, să se afle reacțiunile lagărului și a pivotului, dacă viteza unghiulară a barei este constantă și egală cu ω, iar la capetele C și D sunt fixate sfere de greutate p fiecare, precum și dacă unghiul $AOD = \alpha$.

Răspuns : Reacțiunea lagărului este orizontală, se află în planul AOD și este egală ca mărime cu

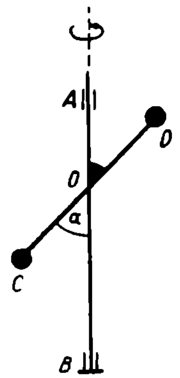
$$R_A = \omega^2 \frac{pl^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)};$$

reacțiunea în pivot este $\bar{R}_B = -(2\bar{p} + \bar{R}_A)$.

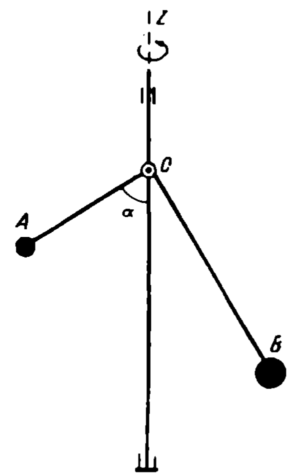
735. Unghiul drept rigid AOB, a cărui masă poate fi neglijată, este astfel fixat cu vârful O de o axă verticală z printr'o articulație, încât se poate roti în jurul punctului O, într'un plan vertical și în jurul axei z. La capetele unghiului sunt fixate sarcini, care pot fi considerate puncte materiale de greutățile P_1 și P_2. Să se afle, pentru ce viteză unghiulară

ω în jurul axei z unghiul dintre bara AO și verticală va fi egal cu unghiul dat α, dacă $AO=l_1$ și $BO=l_2$.

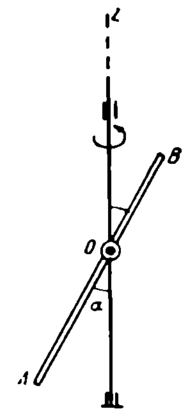
Răspuns : $\omega^2 = \dfrac{P_1 l_1 \sin\alpha - P_2 l_2 \cos\alpha}{(P_1 l_1^2 - P_2 l_2^2)\sin\alpha\cos\alpha}\, g.$



La problema 734



La problema 735



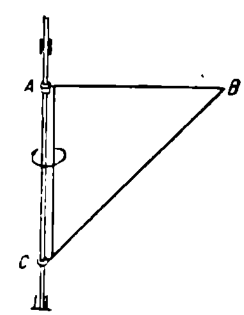
La problema 736

736. O bară dreaptă omogenă AB se poate roti într'un plan vertical în jurul unui punct fix O de pe bară. Prin acest punct trece o axă verticală z, în jurul căreia bara se rotește uniform, făcând n ture pe minut. Ce unghi α=const formează bara cu axa z, dacă $OA = a$ și $OB=b$, iar $a>b$?

Răspuns : $\cos\alpha = \dfrac{1350\, g}{\pi^2 n^2}\, \dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}.$

737. Un triunghi omogen isoscel ABC, de greutate P, este fixat în vârful A, de o axă verticală fixă printr'o articulație. Axa trece printr'un inel montat în vârful C al triunghiului. Triunghiul se rotește în jurul acestei axe în virtutea inerției cu viteza unghiulară ω.

Cât de mare trebue să fie viteza unghiulară ω pentru ca reacțiunea în punctul C să fie egală cu zero? Să se determine și reacțiunea în punctul A în această condiție.



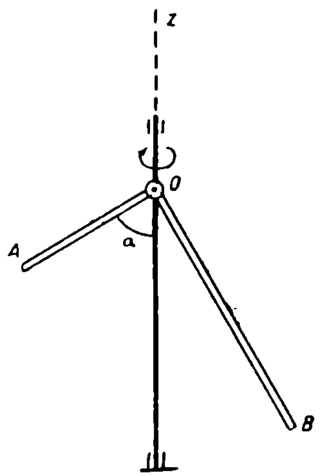
La problema 737

Răspuns :

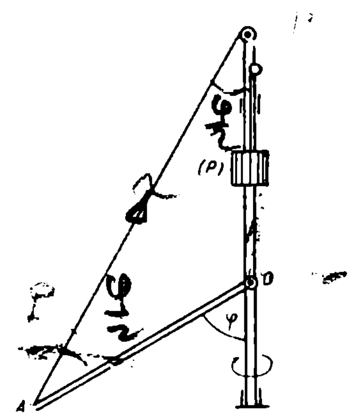
$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{a}}\ (a = AB = AC), \quad R_A = \frac{5}{3} P.$$

738. O bară omogenă AOB este îndoită în formă de unghi drept și este fixată în vârful O de o bară verticală printr'o articulație, în jurul căreia ea se poate roti într'un plan vertical. Bara verticală se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei sale z. Să se afle mărimea ω, dacă unghiul constant de înclinare dintre latura AO și verticală este α, și dacă $AO=a$ și $OB=b$.

Răspuns : $$\omega^2 = \frac{3}{2}\,\frac{a^2 \sin\alpha - b^2 \cos\alpha}{(a^3 - b^3)\sin\alpha\cos\alpha}\,g.$$



La problema 738



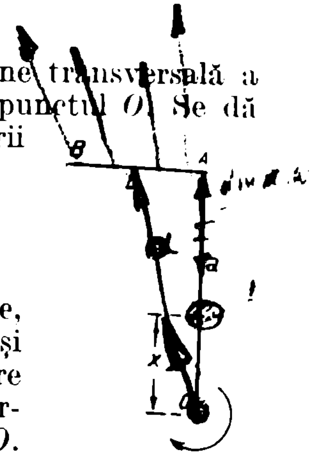
La problema 739

739. De o bară verticală OB este fixată printr'o articulație tija omogenă OA, de lungime $2a$ și greutate Q, care se poate roti în jurul punctului O, în plan vertical. La capătul A al tijei este legat un fir flexibil, care trece peste un scripete mic, fixat pe bară și poartă la capătul său liber o greutate P. Ce unghi constant φ poate forma tija cu verticala, dacă i se imprimă o viteză unghiulară constantă ω în jurul axei OB și dacă $OA=OB$?

Răspuns : Unghiul căutat se determină din ecuația

$$2Q\omega^2 a \sin 2\varphi - 3gQ \sin\varphi + 6Pg \sin\frac{\varphi}{2} = 0.$$

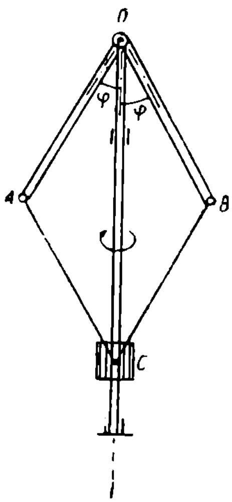
740. O bară omogenă este îndoită în formă de unghi drept și se rotește cu viteza unghiulară constantă ω, în planul său, în jurul capătului său fix O. Să se afle momentul de încovoiere al forțelor de inerție, pentru o secțiune transversală a barei, luată pe latura OA la distanța x de punctul O. Se dă lungimea a a laturii OA, lungimea b a laturii AB și greutatea ei P.



La problema 740

Răspuns : $M = \dfrac{P}{2g}\,\omega^2\,bx.$

741. De o bară verticală OC sunt fixate, prin articulația O, două bare identice AO și BO, de lungime $2a$ și greutate P fiecare și care se pot roti într'un plan vertical, în jurul punctului O. La capetele A și B ale acestor bare sunt legate fire de lungime $2a$ fiecare și care susțin o culisă de greutate Q, așezată liber pe axa CO. Să se afle unghiul φ de înclinație a barelor față de verticală și tensiunea T a firelor, dacă viteza unghiulară de rotație a acestui sistem în jurul axei CO este constantă și egală cu ω.



La problema 741

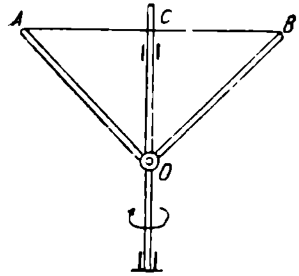
$$\textit{Răspuns} : \cos\varphi = \frac{3g}{4a\omega^2}\left(1 + \frac{2Q}{P}\right);$$

$$T = \frac{2a\omega^2\,PQ}{3\,g(P + 2Q)}.$$

742. Un lanț omogen, cu capetele împreunate, având lungimea l și greutatea P, este așezat pe un disc aspru, orizontal și are forma unei circumferințe de rază r. Apoi discul începe să se rotească uniform în jurul unei axe verticale, care trece prin centrul acestei circumferințe. Pentru ce viteză unghiulară ω a discului se va rupe lanțul, dacă el poate suporta o forță de tracțiune până la F kg?

Răspuns : $\omega > \sqrt{\dfrac{glF}{r^2P}}.$

743. Două bare omogene OA și OB, de greutate P fiecare, sunt fixate cu capetele lor de o bară verticală OC prin articulația O, iar extremitățile lor A și B sunt prinse de punctul C al acestei bare prin fire inextensibile, orizontale. Triunghiul OAB începe să se miște cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei OC. Să se afle tensiunea T a firelor, dacă : $OA = OB = a$ şi $AC = CB = l$.



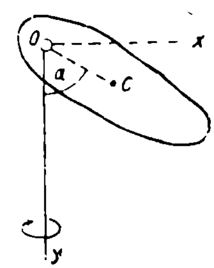
La problema 743

Răspuns : $T = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - l^2}} + \frac{2\omega^2}{3g}\right)$.

744. Condiţiile şi întrebarea din problema precedentă sunt aceleaşi, cu deosebirea că triunghiul AOB este îndreptat cu vârful O (articulaţia) în jos. Să se afle pentru ce viteză unghiulară tensiunea firelor va fi egală cu zero.

Răspuns : $T = \frac{Pl}{2}\left(\frac{2\omega^2}{3g} - \frac{1}{\sqrt{a^2 - l^2}}\right)$.

745. Intr'un plan vertical se află o placă subţire de greutate P, al cărei punct O este fixat printr'o articulaţie. Prin punctul acesta se duce o axă verticală Oy şi placa începe să se rotească în jurul acestei axe, cu viteza unghiulară constantă ω. Să se afle cu ce unghi α se înclină placa faţă de axa Oy şi care va fi reacţiunea în articulaţia O, dacă distanţa centrului de greutate C al plăcii, la punctul O, este egală cu a.



La problema 745

Răspuns :

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2}{a}\frac{J_{xy}}{P}; \quad X_0 = -\frac{\omega^4}{g}J_{xy}; \quad Y_0 = -P,$$

în care J_{xy} este momentul centrifugal de inerţie al plăcii.

746. O placă plană, de greutate P se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe orizontale, perpendiculară pe planul ei. Să se afle presiunea pe lagărele axei, dacă centrul de greutate al plăcii se află la distanţa a de axa de rotaţie şi dacă lagărele se află la distanţe egale de placă.

Aplicaţie pentru valorile numerice : $P = 1000$ kg, $a = 1$ mm, $\omega = 3000$ ture pe minut.

Răspuns : Considerând $\pi^2 \approx g$, vom afla că presiunea pe fiecare lagăr variază între limitele

$$\text{dela}\left(\frac{an^2}{900} - 1\right)\frac{P}{2} \text{ la } \left(\frac{an^2}{900} + 1\right)\frac{P}{2},$$

adică aproximativ între limitele 4500 şi 5500 kg.

§ 30. Teorema cantităţii de mişcare a unui sistem şi teorema mişcării centrului de masă al unui sistem

Forţele aplicate într'un punct M (x, y, z), de masă m al unui sistem pot fi împărţite în două grupe: 1) forţele, cu care acţionează toate celelalte puncte ale sistemului asupra acestui punct, adică forţele *interioare*; rezultanta lor se va nota cu $\overline{R}_i$ (X_i, Y_i, Z_i) şi 2) forţele *exterioare*, a căror rezultantă se va nota cu $\overline{R}_e$ (X_e, Y_e, Z_e). Ecuaţiile mişcării punctului M vor fi:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X_e + X_i, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y_e + Y_i, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z_e + Z_i. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Adunând ecuaţiile, care se referă la axa x pentru toate punctele sistemului, se obţine

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_e + \sum X_i,$$

însă $\Sigma X_i = 0$, întrucât forţele de acţiune reciprocă ale punctelor sistemului sunt două câte două egale şi direct opuse după legea a treia a lui Newton; deaceea

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_e,$$

şi în mod analog pentru celelalte axe

$$\sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y_e,$$

$$\sum m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z_e, \qquad (2)$$

suma fiind extinsă la toate punctele sistemului.

a) Aceste ecuaţii pot fi scrise sub forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\sum m\frac{dx}{dt}\right) &= \sum X_e, \\ \frac{d}{dt}\left(\sum m\frac{dy}{dt}\right) &= \sum Y_e, \\ \frac{d}{dt}\left(\sum m\frac{dz}{dt}\right) &= \sum Z_e, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

adică *derivata, în raport cu timpul a sumei proiecţiilor cantităţilor de mişcare pe o axă oarecare, este egală cu suma proiecţiilor tuturor forţelor exterioare pe această axă.*

Dacă suma proiecţiilor forţelor exterioare pe axă este egală cu zero, atunci suma proiecţiilor cantităţilor de mişcare pe această axă este constantă.

b) Având în vedere, că

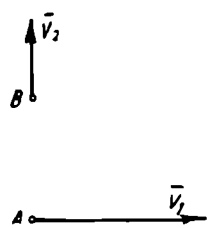
$$\sum mx = Mx_C, \quad \sum my = My_C, \quad \sum mz = Mz_C,$$

ecuaţiile (2) pot fi scrise astfel :

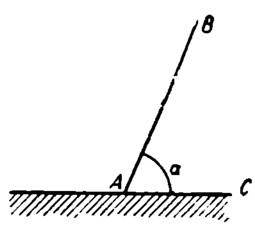
$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_C}{dt^2} &= \sum X_e, \\ M\frac{d^2y_C}{dt^2} &= \sum Y_e, \\ M\frac{d^2z_C}{dt^2} &= \sum Z_e, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

de unde urmează teorema mişcării centrului de mase: *centrul de mase al unu sistem, se mişcă ca un punct material liber, în care sunt concentrate masele întregului sistem şi la care sunt aplicate forţe egale cu forţele exterioare, care acţionează asupra sistemului.*

747. Două puncte materiale libere A şi B, de mase m_1 şi m_2 se atrag între ele după legea lui Newton. In momentul iniţial punctul B are viteza $\bar{v}_2$ îndreptată după AB, iar punctul A viteza $\bar{v}_1$, perpendiculară pe AB. Să se determine traiectoria şi viteza centrului de mase al acestor puncte.



La problema 747



La problema 749

Răspuns : Centrul de mase se mişcă în linie dreaptă cu viteza

$$v = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}.$$

748. Dintr'un tun de 125 t, aşezat pe o platformă netedă orizontală, porneşte un proiectil de 350 kg cu viteza orizontală de 550 m/s. Neglijând masa gazelor de explozibil, să se determine mărimea şi direcţia vitezei, care se transmite tunului cu această ocazie.

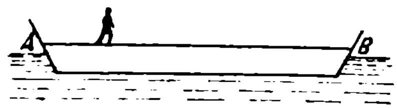
Răspuns : Viteza tunului este de 1,54 m/s şi este orientată în sens opus mişcării proiectilului.

749. O bară omogenă AB, care se spirjină cu capătul A pe o podea netedă orizontală, se află la început în repaus; unghiul dintre bară şi podea este egal cu α; apoi bara începe să cadă sub acţiunea gravităţii. Să se determine traiectoria punctului B.

Răspuns : Dacă se ia orizontala AC ca axă x, iar verticala, care trece prin centrul de greutate al barei, ca axă y, ecuația traiectoriei căutate va fi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4a^2}=1 \text{ (elipsă).}$$

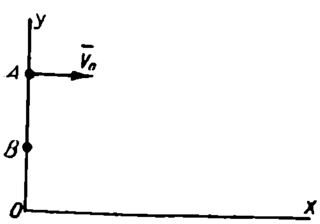
750. La un capăt al unei bărci, care se află în repaus, stă un om în punctul A; el trece apoi la capătul celălalt, în punctul B. Neglijând rezistența apei, să se determine cu ce distanță se va deplasa barca spre stânga, dacă greutatea ei este P, greutatea omului p și $AB=2a$.



La problema 750

Răspuns : $2a\frac{p}{P+p}$.

751. Două puncte grele libere A și B cu mase egale se află în momentul inițial pe aceeași verticală. Punctul A are viteza inițială orizontală $\overline{v}_0$; viteza inițială a punctului B este egală cu zero. Să se determine traiectoria centrului de mase a acestor puncte și proiecțiile v_x și v_y ale vitezei lui.



La problema 751

Răspuns : $v_x=\frac{1}{2}v_0$, $v_y=-gt$; traiectoria este o parabolă.

752. Trei puncte libere A, B și C de mase egale, se atrag între ele după legea lui Newton. Viteza inițială a punctului A este $k\cdot AB$, orientată după AB; viteza inițială a punctului B este $k\cdot BC$, orientată după BC. Să se determine mărimea și orientarea vitezei, care trebue imprimată punctului C, pentru ca centrul de masă al celor trei puncte să rămână în repaus.

Răspuns : Viteza căutată este $k\cdot CA$, orientată după CA.

753. Pe capătul unei scânduri omogene, care este așezată pe un plan perfect neted, stă un om, care într'un anumit moment, începe să meargă dealungul scândurii cu viteza relativă constantă u. Să se afle viteza absolută v și deplasarea x a omului precum și viteza absolută v_1 și deplasarea x_1 a scândurii în timpul t dacă masa ei este M, iar masa omului este m.

Răspuns: $v = \frac{M}{m+M} u$, $x = \frac{M}{m+M} ut$, $v_1 = -\frac{M}{m+M} u$,

$$x_1 = -\frac{m}{m+M} ut.$$

754. Pe un plan orizontal perfect neted este așezat un cerc de rază a și masă M, dealungul căruia începe într'un moment dat să se târască un gândac, de masă m cu viteza relativă constantă u. Să se afle traiectoriile centrului cercului și ale gândacului.

Răspuns: Centrul cercului şi al gândacului descriu circumferințe concentrce cu razele

$$r = \frac{m}{M+m} a, \quad R = \frac{M}{m+M} a,$$

cu centrul in punctul care imparte distanța lor inițială proporțional cu masele.

755. Un om, de greutate P care poartă în mâini greutatea p, sare sub unghiul α față de orizontală cu viteza v_0 și atingând înălțimea maximă, aruncă greutatea înapoi cu viteza relativă orizontală u. Cu cât se mărește distanța săriturii datorită acestui fapt?

Răspuns: Cu $\frac{p}{gP} uv_0 \sin \alpha$.

756. Să se rezolve problema 729 cu ajutorul teoremei relative la mișcarea centrului de inerție al sistemului.

757. O locomotivă este suspendată în aer (pentru încercarea echilibrării maselor care au o mişcare de translație) și apoi se pornește mașina locomotivei. Să se afle amplitudinea oscilațiilor, pe care le va executa locomotiva, datorită mișcării de translație a organelor ei. Se dă: greutatea p a organelor în mișcare de translație, greutatea P a celorlalte organe, lungimea s a cursei pistoanelor, α unghiul dintre manivelele din dreapta și din stânga locomotivei.

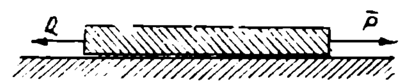
Răspuns: $a = \frac{p}{P} s \cos \frac{\alpha}{2}$. Să se aplice la valorile numerice: $P=90$ t, $p=600$ kg, $l=60$ cm, $\alpha=90°$.

758. Un ceas cu pendul este așezat pe un cărucior mic, care se poate mișca, fără frecare, pe două șine drepte, orizontale, în direcție paralelă cu planul oscilației pendulului. La un moment dat ceasul este pus în mișcare. Să se afle traiectoria absolută a extremității pendulului, dacă lungimea lui este l, greutatea discului p, greutatea ceasului fără pendul P, greutatea căruciorului Q și centrul de greutate al întregului sistem coincide cu punctul de suspensie a pendulului; discul pendulului poate fi considerat drept un punct material, iar greutatea tijei poate fi neglijată.

Răspuns: O elipsă, a cărei semiaxă mare este verticală și egală cu l, iar cea mică este $\frac{P+Q}{P+Q+p}\, l$.

Centrul elipsei coincide cu proiecția centrului de greutate al întregului sistem pe orizontala, care trece prin punctul de suspensie.

759. La capetele unei grinzi drepte, omogene, de lungime l și masă M, care se mișcă pe un plan orizontal, neted, acționează dealungul axei sale două forțe $\bar{P}$ și $\bar{Q}$. Să se afle accelerația grinzii, precum și tensiunea într'o secțiune transversală oarecare, dacă $P>Q$.



La problema 759

Răspuns: Accelerația grinzii este $\frac{P-Q}{M}$.

Tensiunea în secțiunea aflată la distanța x de punctul de aplicare al forței $\bar{Q}$, este

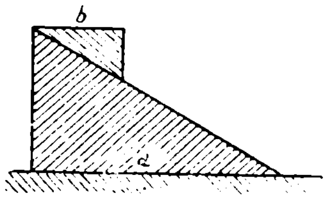
$$T = \frac{x}{l}\,(R-Q) + Q.$$

760. Pe o pană dreptunghiulară de greutate P, așezată pe un plan orizontal perfect neted, se află o pană asemenea, însă mai mică, de greutate p, cum se arată în figură. Să se afle cu cât se va deplasa pana mare, când pana mică alunecă în jos, cateta orizontală a penei mari fiind a, iar cateta orizontală a penei mici b.

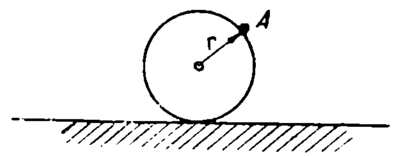
Răspuns: Pana mare se va deplasa spre stânga cu $\frac{p}{P+p}(a-b)$.

761. Să se afle traiectoria absolută a sferei A, de masă m, care se rostogolește pe suprafața unui cilindru perfect neted, de masă M şi rază r, aşezat pe un plan orizontal perfect neted.

Răspuns : O elipsă cu semiaxele $\frac{M}{M+m}$ r şi r.



La problema 760



La problema 761

762. Două puncte, de masă identică, pot aluneca fără frecare, primul pe o dreaptă fixă Ox, al doilea pe o dreaptă fixă Oy, perpendiculară pe Ox. Aceste puncte se atrag între ele după legea lui Newton. Să se arate, că centrul maselor acestor puncte descrie o secţiune conică, cu focarul în punctul O.

§ 31. Teorema momentului cantităţii de mişcare a sistemului

Inmulţind prima din ecuaţiile (1) § 30 cu $-y$, iar pe a doua cu x, adunând şi făcând suma pentru toate punctele sistemului se obţine

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(xY_e-yX_e)+\sum(xY_i-yX_i).$$

Termenul $\Sigma(xY_i-yX_i)$ este suma momentelor forţelor interioare în raport cu axa z; el este egal cu zero, întrucât forţele interioare sunt egale şi opuse două câte două; prin urmare:

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(xY_e-yX_e),$$

sau

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum(xY_e-yX_e).$$

Astfel se obţine pentru cele trei axe ecuaţiile

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\sum(yZ_e-zY_e),$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\sum(zX_e-xZ_e);\ \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum(xY_e-yX_e).$$

Aceste ecuaţii exprimă teorema momentelor cantităţii de mişcare şi anume: *derivata, în raport cu timpul, a sumei momentelor cantităţii de mişcare, faţă de o* *axă fixă, este egală cu suma momentelor forțelor exterioare, față de aceeași axă* Dacă suma momentelor forțelor exterioare față de o axă oarecare, de exemplu x, este egală cu zero, atunci

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = A.$$

în care A este o constantă, adică $\sum \text{mom}_x(\overline{mv}) = A$.

Cum

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = 2\frac{d\sigma_x}{dt},$$

în care $\frac{d\sigma_x}{dt}$ este viteza areolară a proiecției punctului mobil pe planul (yz), urmează

$$\sum m\frac{d\sigma_x}{dt} = \frac{A}{2},$$

adică suma produselor dintre masele punctelor sistemului și vitezele areolare ale proiecțiilor lor pe planul (yz) este în cazul acesta o mărime constantă.

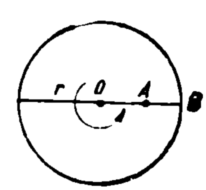
763. Peste un scripete cu axă orizontală, trece o funie. Doi oameni, de mase m și m' apucă de capetele funiei la distanțele a și a' de planul orizontal, care trece prin axa scripetelui și încep să se cațere, ajungând în același timp la scripete. In cât timp vor ajunge oamenii la scripete, când masa scripetelui poate fi neglijată și nu se opune mișcării nicio rezistență?

Răspuns: După $T = \sqrt{\frac{2(ma - m'a')}{g(m' - m)}}$ dela începutul mișcării.

764. Condițiile problemei precedente, cu deosebirea că masele oamenilor sunt egale și viteza relativă a unui om este egală cu zero, iar celălalt se cațără cu viteza relativă u. Să se afle cum se va mișca (odată cu funia) primul om.

Răspuns: El se va ridica cu viteza $\frac{1}{2}u$.

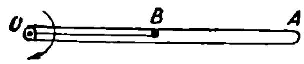
765. Unei platforme orizontale de rază r și greutate P, cu axă verticală, care trece prin centrul platformei O, i se imprimă viteza unghiulară inițială ω_0. Un om A, de greutate p, care se află în momentul inițial, în centrul platformei, merge dealungul razei OB. Să se afle viteza unghiulară a rotației platformei ω în funcție de distanța $OA = x$, considerând platforma ca un disc omogen.



La problema 765

Răspuns: $\omega = \omega_0\frac{Pr^2}{Pr^2 + 2px^2}$.

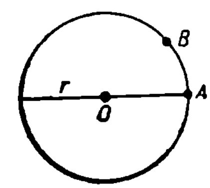
766. Un tub orizontal OA, de greutate P și lungime $2a$, se rotește dela început, în virtutea inerției, în jurul unei axe verticale, care trece prin punctul O, cu viteza unghiulară constantă ω_0. Odată cu tubul, se rotește și o sferă, care se află în interiorul tubului, la distanța a de capătul O și este legată de acest capăt printr'un fir. Apoi se taie firul. Să se determine viteza unghiulară de rotație a tubului în momentul, când sfera iese din tub, dacă greutatea ei este p.



La problema 766

Răspuns : $\omega = \omega_0 \dfrac{4P + 3p}{4(P + 3p)}$.

767. Un disc omogen, orizontal, de rază r și greutate P, se poate roti în jurul unei axe verticale, care trece prin centrul O al discului. Pe marginea discului merge un gândac B de greutate p, legea mișcării fiind arc $AB = s = \frac{1}{2} a\, t^2$. In momentul inițial discul se află în repaus. Să se afle viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε a discului.



La problema 767

Răspuns : $\omega = \dfrac{2apt}{r(P + 2p)}$, $\quad \varepsilon = \dfrac{2ap}{r(P+2p)}$.

768. O platformă orizontală se rotește în jurul unei axe verticale, care trece prin centrul ei. Un om merge pe platformă descriind o circumferință cu raza r și cu centrul pe aceeași axă. Să se afle viteza unghiulară a platformei, dacă viteza unghiulară relativă a omului este ω, greutatea platformei P, greutatea omului p, iar J momentul de inerție al platformei față de axa de rotație. In momentul inițial întreg sistemul se află în repaus.

Răspuns : $\Omega = -\dfrac{p\omega r^2}{pr^2 + gJ}$.

769. In condițiile problemei precedente, să se afle deplasarea absolută unghiulară a omului, în timpul când face un tur pe platformă, presupunând că momentul de inerție al platformei este egal cu $\dfrac{P}{2g} R^2$ și că $P = p$, $R = r$.

Răspuns : $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$.

770. Pe un corp solid, așezat pe o axă fixă verticală, se află un gândac. Intr'un moment dat, el începe să se miște astfel, încât proiecția lui pe un plan orizontal P, solidar legat de corp, se mişcă după o lege determinată, pe o traiectorie dată. Să se demonstreze, că viteza unghiulară a corpului se exprimă astfel:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)m}{J + m(\xi^2 + \eta^2)}, \quad \text{sau} \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\rho^2\frac{d\varphi}{dt}m}{J + m\rho^2},$$

unde ξ și η sunt coordonatele gândacului în raport cu un sistem de axe, situat în planul P, cu originea pe axa de rotație. J este momentul de inerție al corpului în raport cu această axă, m masa gândacului; ρ și φ sunt coordonatele polare în acest plan, astfel încât axa polară coincide cu axa ξ, iar polul se află pe axa de rotație.

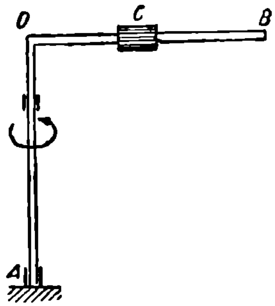
✓ **771**. Dealungul generatoarei unui con circular, omogen, de masă M, cu axa verticală și vârful îndreptat în sus, s'a tăiat un canal subțire. Se imprimă conului viteza unghiulară ω_0, în jurul axei sale și totodată se introduce în deschiderea superioară a canalului o sferă, de masă m, fără a i se da o viteză inițială. Care va fi viteza unghiulară a conului, în momentul când sfera sare din canal?

Răspuns: $\omega = \dfrac{\omega_0}{1 + \dfrac{10m}{3M}}.$

772. Condițiile problemei 768, cu deosebirea că platforma are forma unui pătrat cu latura $2a$, greutatea omului este egală cu greutatea platformei, axa de rotație a platformei trece prin centrul ei. Omul merge pe latura pătratului cu viteza relativă u=const, pornind dintr'un vârf al pătratului. Să se exprime unghiul de rotație θ al platformei în funcție de t.

Răspuns: $\theta = \sqrt{\dfrac{3}{5}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{15}\,ut}{8a - 3ut}\right).$

773. O bară AOB, în formă de unghi drept, se poate roti în jurul laturii sale verticale AO. Pe latura ei orizontală este așezată o sarcină C, de masă m. In momentul inițial, sarcina se află la distanța a de punctul O și se imprimă sistemului viteza unghiulară ω_0, în jurul axei OA. Să se afle relația dintre viteza unghiulară ω a barei și distanța $OC=x$, dacă momentul de inerție al barei față de AO este J.



La problema 773

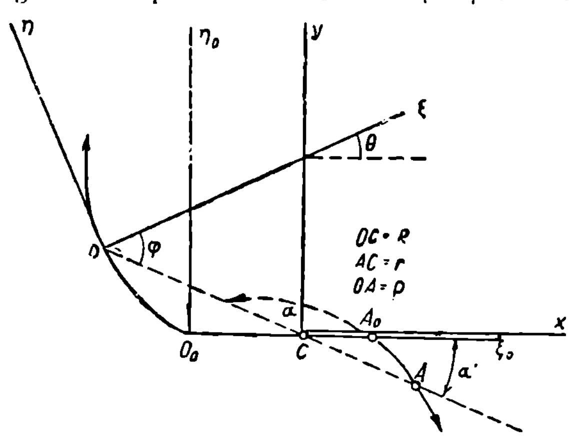
Răspuns : $\omega = \omega_0 \dfrac{J + ma^2}{J + mx^2}$.

774. Trei puncte M_1, M_2 și M_3, de mase egale, se atrag între ele după o lege oarecare; în momentul inițial punctele sunt fixe. Intr'un moment oarecare ulterior se cunosc: 1) pozițiile celor trei puncte, 2) mărimea și direcția vitezei punctului M_1 și 3) orientarea vitezei punctului M_2. Să se afle (pe cale grafică) mărimea vitezei punctului M_2 și orientarea și mărimea vitezei punctului M_3 în acest moment.

775. Pe un plan orizontal, perfect neted, este așezată o placă de formă arbitrară, de masă M și raza centrală de inerție k; pe placă stă un gândac de masă m. Intr'un moment dat, gândacul începe să se miște pe placă cu o viteză (relativă) cunoscută, descriind o traiectorie cunoscută. Să se afle mișcarea plăcii și a gândacului, aplicând teoremele cantităților de mișcare și a momentelor.

Indicație. Fie C centrul de greutate, absolut fix, al sistemului (al plăcii și gândacului) O_0 și O centrul de greutate al plăcii în momentul inițial și într'un alt moment; A_0 și A pozițiile gândacului în aceste momente.

Fie două sisteme de coordonate: unul fix (x, y) cu originea în centrul de greutate C al sistemului și axa x, trecând prin poziția inițială a gândacului și altul mobil (ξ, η), solidar legat de placă, față de care mișcarea gândacului este cunoscută; se ia originea acestui sistem în centrul de greutate O al plăcii: în momentul inițial, axa ξ trece prin A_0. Se notează cu θ unghiul dintre axele ξ și x, socotit contrar mersului acelor de ceasornic.



La problemă 775

Se consideră mișcarea plăcii, ca o mișcare compusă din mișcarea centrului ei de greutate, determinată în coordonatele polare R și α, corespunzătoare coordonatelor carteziene (x, y) şi din rotaţia în jurul centrulu de greutate. Fie

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt}$$

viteza unghiulară a plăcii.

Coordonatele gândacului vor fi : coordonatele polare absolute r şi α', corespunzătoare celor carteziene x, y si cele polare relative ρ, φ, corespunzătoare celor carteziene ξ, η. Se înseamnă viteza unghiulară relativă a gândacului cu

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} .$$

Curba $A_0 A$ este traiectoria absolută a gândacului, $O_0 O$ traiectoria absolută a centrului de greutate al plăcii.

Răspuns :

1) $\dfrac{d\theta}{dt} = \Omega = -\dfrac{m}{m(k^2+\rho^2)+Mk^2}\rho^2\omega$; $\theta = -m\displaystyle\int_0^{\varphi}\dfrac{\rho^2 d\varphi}{m(k^2+\rho^2)+Mk^2}$,

2) $R = -q\rho = -q\sqrt{\xi^2+\eta^2}$; $\alpha = \theta + \varphi + \pi$;

3) $r = (1-q)\rho = (1-q)\sqrt{\xi^2+\eta^2}$; $\alpha' = \theta+\varphi$, unde $q = \dfrac{m}{M+m}$.

Unghiurile dispuse contrar acelor de ceasornic sunt pozitive, iar cele în sensul mişcării acelor de ceasornic, negative.

776. Să se rezolve problema următoare, folosind rezultatele din problema precedentă sau independent de ele.

Pe un plan orizontal, perfect neted, se află o placă de masă M şi rază de inerţie centrală k. Pe placă se află un gândac de masă m, la distanţa l de centrul ei de greutate O. Intr'un moment dat, gândacul începe să se mişte, cu viteza unghiulară relativă constantă ω, dealungul unei circumferinţe, desemnată pe placă, cu raza l şi centrul în acelaşi punct O. Să se afle mişcarea plăcii şi a gândacului.

Răspuns : Centrul de greutate O al plăcii descrie o circumferinţă de rază

$$l\frac{m}{m+M}$$

cu centrul în centrul de greutate total fix C al sistemului (plăcii şi gândacului), cu viteza unghiulară constantă

$$\omega_1 = \frac{(m+M)k^2}{ml^2+(m+M)k^2}\omega,$$

iar placa însăși se rotește, în același timp, în jurul punctului O, în sens invers, cu viteza unghiulară constantă

$$\Omega = -\frac{ml^2}{ml^2 + (m+M)k^2}\,\omega.$$

Gândacul descrie o circumferință cu raza

$$l\,\frac{M}{m+M}$$

cu centrul în punctul C, cu aceeași viteză unghiulară absolută ω_1.

777. Un caz particular al problemei precedente. Gândacul așezat pe un plan perfect neted, se mișcă cu viteza unghiulară relativă constantă ω pe un cerc de rază l, a cărui masă este egală cu masa gândacului. Să se afle mișcarea cercului și a gândacului; să se determine deasemenea, cu ce unghi se va roti cercul în jurul centrului său, în timp ce gândacul înconjoară cercul și care este deplasarea unghiulară absolută a cercului.

Răspuns: Centrul cercului și gândacul descriu aceeași circumferință de rază $\frac{1}{2}l$, cu centrul în centrul de greutate absolut fix al sistemului, mișcându-se cu aceeași viteză unghiulară absolută $\frac{2}{3}\,\omega$, pe când cercul se rotește în acest timp, în jurul centrului său, cu viteza unghiulară $\frac{1}{3}\,\omega$. Baza este o circumferință cu raza $\frac{1}{2}l$, cu centrul în centrul de greutate al sistemului. Rostogolitoarea este chiar cercul. Rostogolirea lor se produce în sens opus mișcării gândacului. Deplasările unghiulare căutate sunt $-120°$ și $+240°$.

§ 32. Lucrul mecanic și puterea

778. Un lucrător transportă 25 cărămizi în greutate de 3 kg fiecare, la o înălțime de 10 m. Greutatea proprie a lucrătorului este de 65 kg. Să se determine lucrul mecanic efectuat de el.

Răspuns: 1400 kgm.

779. Un om de 65 kg merge pe un drum orizontal. La fiecare pas de 75 cm, centrul de greutate al corpului său se ridică cu 20 mm. Să se determine lucrul mecanic efectuat de el pe un drum de 3000 m.

Răspuns : 5200 kgm.

780. Un berbece pentru bătut piloni, în greutate de 500 kg, trebue să se ridice de 14 ori pe minut, la înălțimea de 1,5 m. De câți muncitori ar fi nevoie pentru acest lucru, dacă puterea fiecărui muncitor este în medie de 7 kgm/s?

Răspuns : 25 muncitori.

781. O cădere de apă dă în fiecare secundă 10 m^3 de apă, care cade dela 6 m înălțime. Să se determine puterea acestei căderi de apă.

Răspuns : 800 CP (cai putere).

782. O pompă cu abur, lucrând fără întrerupere, ridică în timp de 24 ore 3240 t apă, la înălțimea de 30 m. Puterea mașinii, care pune în mișcare pompa, este de 30 CP. Să se afle randamentul ei.

Răspuns : 0,5.

783. Pe roata unei mori de apă, cu un randament de 0,6 cade apă dela o înălțime de 3 m. Ce cantitate de apă trebue să cadă pe roată, într'o secundă, ca să i se transmită o putere de 15 CP?

Răspuns : $\frac{5}{8}$ m^3.

784. Un vapor merge uniform cu viteza de 10 noduri. Puterea mașinii sale este de 5000 CP, iar randamentul ei este 0,6. Să se determine rezistența apei față de mișcarea vaporului; 1 nod $\approx$ 1,85 km/h.

Răspuns : aproximativ 44 t.

785. Un automobil având (împreună cu încărcătura) greutatea de 2 t, parcurge distanța de 30 km cu viteza de 15 km/h, pe un drum, care urcă cu 50 m. Coeficientul de frecare al drumului este 0,05. Să se determine puterea motorului automobilului, dacă randamentul lui este 0,6.

Răspuns : 9,6 CP.

786. Un motor, cu puterea de 100 CP și randamentul 0,6 trebue să ridice o sarcină, cu viteza de 1 m/min. Să se determine mărimea maximă a sarcinii, care poate fi ridicată cu ajutorul acestui motor.

Răspuns : 270 t.

787. O mașină cu abur ridică un ciocan de 300 kg la înălțimea de 1 m de 120 ori pe minut. Puterea mașinii este de 10 CP. Să se afle randamentul ei.

Răspuns : 0,8.

788. Pe o linie de tramvai circulă 300 vagoane cu viteza medie de 15 km/h. Greutatea fiecărui vagon este de 12 t. Rezistența frecării la mișcare a vagonului este 0,02 din greutatea sa. Să se determine puterea mașinilor centralei de forță a tramvaielor.

Răspuns : 4000 CP.

789. O pompă, cu puterea de 5 CP și randamentul 0,6, trebue să ridice 900 m^3 apă la înălțimea de 9 m. Cât timp este nevoie pentru aceasta?

Răspuns : 10 h.

790. O mașină cu puterea de 5 CP și randamentul 0,8 ridică o sarcină de 10 t pe un plan înclinat lung de 10 m, cu unghiul de înclinare de 15°. Cât timp durează această ridicare, dacă unghiul de frecare dintre sarcină și plan $\varphi = 1^0 30'$?

Răspuns : 1 min 35 s.

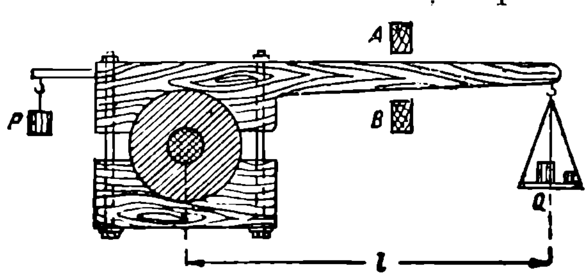
791. Presiunea aburului pe pistonul unei mașini cu abur, este de 5 kg/cm^2. Diametrul pistonului este de 20 cm, lungimea cursei lui este 40 cm. Să se determine puterea mașinii, dacă pistonul face 100 de curse pe minut.

Răspuns : 14 CP.

792. Cât de mare trebue să fie diametrul pistonului unei mașini cu abur cu un cilindru, la presiunea aburului de 4 at asupra pistonului, viteza pistonului de 2 m/s și puterea mașinii de 75 CP (1 at=1 kg/cm^2)?

Răspuns : d=30 cm.

793. Puterea unei mașini poate fi determinată în felul următor : pe arborele mașinii se așează o șaibă din fontă, care este apoi centrată și fixată cu șuruburi. Peste șaibă se montează saboții unei frâne care se pot strânge cu buloane. Unul din saboți are o cumpănă, cu un taler pentru greutăți. Contragreutatea *P*



La problema 793

se alege astfel, încât dispozitivul de strângere așezat liber pe arbore, să se afle în echilibru, în poziție orizontală fără greutăți pe taler, adică astfel încât cumpăna să treacă printre două repere fixe A și B. Proba începe prin strângerea buloanelor, până când mașina ajunge la numărul de ture cerut. Cumpăna apasă, cu această ocazie, pe reperul fix A. Apoi se așează pe taler greutăți până ce brațul se depărtează de A și ocupă o poziție orizontală între A și B.

Să se determine puterea mașinii, dacă pe taler se așează greutăți de Q kg, lungimea brațului fiind de l m, iar arborele are n ture pe minut.

Răspuns: $N = 0{,}0014\ Qln$ CP.

§ 33. Teorema energiei cinetice

Aplicând teorema energiei cinetice punctului M (x, y, z) al unui sistem, se obține:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = (X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz) + (X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz).$$

Insumând aceste ecuații pentru toate punctele sistemului, se obține

$$d\sum\frac{mv^2}{2} = \sum(X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz) + \sum(X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz).$$

Suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor unui sistem se numește *energia cinetică a sistemului*. De aici teorema: *diferențiala energiei cinetice a unui sistem este egală cu suma lucrului mecanic elementar al forțelor exterioare și interioare.* Suma lucrului mecanic elementar al forțelor exterioare ale sistemului este în general diferită de zero, întrucât distanțele dintre punctele sistemului variază și, prin urmare, forțele interioare efectuează un lucru mecanic; însă pentru un corp perfect rigid această sumă este egală cu zero, întrucât între toate punctele unui astfel de corp distanțele sunt invariabile conform definiției. Deaceea, *pentru un corp rigid*:

$$d\sum\frac{mv^2}{2} = \sum(X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz).$$

Integrând ultima ecuație între două poziții A și B ale sistemului, se obține pentru un corp perfect rigid

$$\left(\sum\frac{mv^2}{2}\right)_B - \left(\sum\frac{mv^2}{2}\right)_A = \int_{(A)}^{(B)}\sum(X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dx),$$

adică, creșterea energiei cinetice a unui corp rigid, ca urmare a deplasării din poziția A în poziția B, este egală cu suma lucrului mecanic, efectuat de forțele exterioare cu ocazia acestei deplasări.

Teorema lui König. Energia cinetică a unui sistem este egală cu energia cinetică a masei sistemului întreg, concentrată în centrul lui de mase, adunată cu energia cinetică a mişcării sistemului în raport cu centrul de mase.

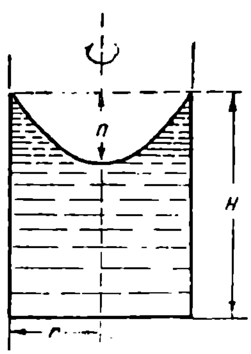
Prin urmare, dacă M este masa întregului sistem, V viteza centrului de mase, v, vitezele punctelor sistemului în mişcarea absolută, v' vitezele punctelor sistemului în mişcarea relativă faţă de centrul de mase, atunci

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{M\,V^2}{2} + \sum \frac{mv'^2}{2}.$$

794. Două discuri identice se rotesc cu aceeaşi viteză unghiulară: unul în jurul unei axe, care trece prin centrul discului, şi este perpendiculară pe planul lui; al doilea în jurul unui diametru al său. Care disc dispune de energie cinetică mai mare şi de câte ori?

Răspuns: Energia cinetică a primului disc este de două ori mai mare.

795. Un vas cilindric circular cu raza bazei r se roteşte împreună cu lichidul aflat în el în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară ω. Suprafaţa liberă a lichidului capătă prin rotaţie forma unui paraboloid de rotaţie. Cunoscând distanţele h şi H şi densitatea ρ a lichidului să se determine energia cinetică a lichidului, care se roteşte.



La problema 795

Răspuns: $\frac{1}{4}\pi\rho\,\omega^2 r^4\left(H - \frac{1}{3}\,h\right)$.

796. Să se calculeze în kgm energia cinetică a coroanei unui volan, care face 100 ture pe minut, dacă se dă raza exterioară a coroanei $R = 26$ dm, raza interioară $r = 24$ dm, lăţimea ei 3 dm şi greutatea specifică a fontei 7,2.

Răspuns: 237 300 kgm.

797. O sanie cântăreşte P kg, iar o trăsură $\frac{3}{4}$ P kg, din care două treimi se referă la caroserie, iar o treime la roţi. In ce raport sunt valorile lucrului mecanic, care trebue cheltuit, pentru a imprima saniei şi trăsurei aceeaşi viteză, dacă nu există rezistenţă la mişcare; roţile se rostogolesc fără alunecare şi pot fi considerate inele (adică spiţele şi bucşele pot fi considerate fără greutate)?

Răspuns: Lucrul mecanic este acelaşi.

798. Să se afle lucrul mecanic, necesar pentru a ridica oblonul unei ferestre, de P kg, format din n șipci, despărțite prin intervale de a cm fiecare. Să se afle deasemenea lucrul mecanic în cazul unui oblon continuu de aceeași greutate și în lungime de l cm.

Răspuns: 1) $A = 0{,}005\,Pa(n-l)$ kgm.
2) $A_1 = 0{,}005\,Pl$ kgm.

799. Să se afle energia cinetică a unui proiectil de diametru $d=30{,}5$ cm, în greutate $P=400$ kg, care părăsește tunul cu viteza $v=800$ m/s, dacă pasul ghintului este $h=10{,}675$ m. (Proiectilul poate fi considerat drept un cilindru masiv).

Răspuns: $T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2\left[1+2\left(\frac{\pi r}{h}\right)^2\right] \approx 12\,851\,200$ kgm.

800. In problema 753 să se afle lucrul mecanic, cheltuit de un om pentru a pune sistemul în mișcare.

Răspuns: $A = \frac{mM}{2\,(m+M)}\,u^2.$

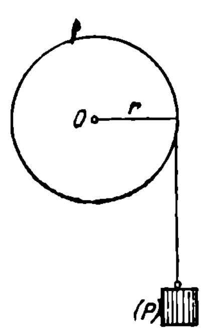
801. Un lănțișor de lungime l este astfel așezat pe o masă orizontală, încât jumătate atârnă de pe masă. La început lănțișorul este în repaus. Să se determine viteza v a lănțișorului în momentul când capătul lui se află la marginea mesei.

Răspuns: $v = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}.$

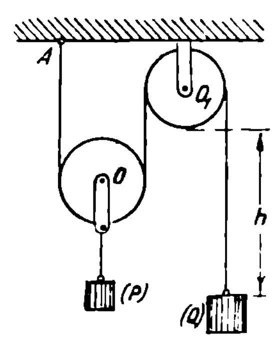
802. Pe o șaibă de rază r și greutate Q, care se rotește în jurul unei axe orizontale O, este înfășurat un fir, la capătul căruia este legată greutatea P. La început sistemul se află în repaus. Să se afle viteza unghiulară a șaibei în momentul când greutatea se lasă în jos cu distanța h.

Răspuns:

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{P}{2P+Q}gh}.$$



La problema 802



La problema 804

803. La problema 765 să se afle lucrul mecanic, efectuat de un om, pentru modificarea energiei cinetice a sistemului, dacă viteza relativă u a omului este cunoscută.

Răspuns: $A = \frac{p}{2g}\left(u^2 - \frac{Pr^2x^2}{Pr^2+2px^2}\,\omega_0^2\right).$

804. Un fir, având un capăt final în punctul A, înfăşoară un scripete mobil O, de care este atârnată greutatea P, şi un scripete fix O_1. La celălalt capăt al firului este legată o greutate $Q > \frac{1}{2} P$. Să se determine viteza greutăţii Q în funcţie de distanţa h, precum şi acceleraţia ei ω, neglijând masa scripeţilor. In momentul iniţial sistemul se află în repaus şi $h=0$.

Răspuns : $v = 2\sqrt{gh\frac{2Q-P}{4Q+P}}$, $w = 2g\frac{2Q-P}{4Q-P}$.

805. Un şurub, cu axa verticală. se mişcă sub acţiunea greutăţii sale fără frecare. Pasul şurubului este h; raza de inerţie a şurubului în raport cu axa lui este k. Să se afle acceleraţia w a mişcării de translaţie a şurubului şi acceleraţia unghiulară ε a mişcării lui de rotaţie.

Răspuns : $w = \frac{h^2 g}{h^2 + 4\pi^2 k^2}$, $\varepsilon = \frac{2\pi hg}{h^2 + 4\pi^2 k^2}$.

806. Unei şaibe de rază r i se imprimă o viteză unghiulară iniţială corespunzătoare la n ture pe minut. Câte ture va face şaiba până la oprire, coeficientul de frecare în lagăr fiind f?

Răspuns : $\frac{\pi r n^2}{7200\, fg}$ ture.

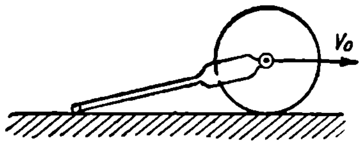
807. Un tăvălug, de rază r, se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal. Viteza iniţială a centrului său este v_0. Ce distanţă s va parcurge centrul tăvălugului până la oprire, coeficientul de frecare la rostogolire fiind δ?

Răspuns : $s = \frac{3}{4}\frac{r v_0^2}{\delta g}$.

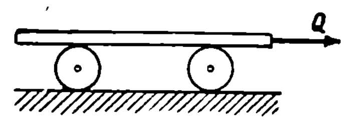
808. Un tăvălug de grădină, având forma unui cilindru circular de rază r, este aşezat pe pământ astfel, încât mânerul său, care are aceeaşi greutate ca şi tăvălugul, se sprijină pe pământ. Centrului tăvălugului i se imprimă viteza iniţială v_0. Să se afle la ce distanţă se va opri tăvălugul, coeficientul de frecare la rostogolire fiind δ, iar coeficientul de frecare dintre mâner şi pământ fiind f (centrul de greutate al mânerului se află în mijlocul lui).

Răspuns : $s = \frac{5 v_0^2}{2g\left(f + 3\frac{\delta}{r}\right)}$.

809. O scândură de greutate P este așezată pe două valțuri, fiecare având greutatea p. Asupra scândurii acționează forța orizontală Q. Să se determine accelerația ω, pe care o va atinge scândura.



La problema 808

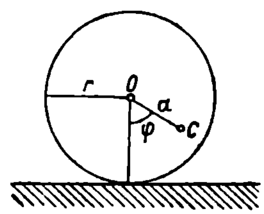


La problema 809

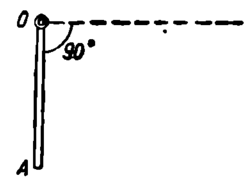
Răspuns : $w = \dfrac{4Q}{4P+3p}\, g.$

810. Un cilindru de rază r se poate rostogoli, fără alunecare, pe un plan orizontal. Centrul de greutate al cilindrului se află în punctul C, distanța $OC=a$.

Raza de inerție a cilindrului, în raport cu o axă perpendiculară pe planul desenului și trecând prin C, este egală cu k. Să se afle viteza unghiulară a cilindrului în funcție de unghiul φ dintre dreapta OC și verticală. In momentul inițial cilindrul se află în repaus și $\varphi = \varphi_0$.



La problema 810



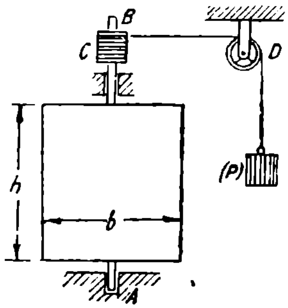
La problema 811

Răspuns : $\omega^2 = \dfrac{2ag\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{r^2+a^2+k^2-2ar\cos\varphi}$.

811. O bară omogenă OA, de lungime $2a$, se rotește într'un plan vertical în jurul articulației O. Ce viteză unghiulară ω trebue transmisă barei în poziția inițială verticală, pentru ca unghiul de înclinare maximă față de verticală să fie de 90° ?

Răspuns : $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2a}}$.

812. O placă dreptunghiulară cu lățimea b și înălțimea h, se poate roti fără frecare în jurul unei axe verticale AB, situată în planul ei și trecând prin mijlocul ei, paralel cu înălțimea h. La capătul B al axei este așezată o șaibă C de rază r, pe care este înfășurat un fir flexibil, inextensibil; extremitatea cealaltă a firului trece peste scripetele D, situat la nivelul şaibei şi poartă greutatea P, care pune în mişcare placa. Să se afle legea mişcării greutăţii P, dacă greutatea plăcii este Q, vitezele iniţiale nule şi nu există nicio rezistenţă împotriva mişcării.



La problema 812

Răspuns: Mişcarea greutăţii P este uniform accelerată cu acceleraţia $w = \frac{Pr^2}{Pr^2 + Qk^2} g$, în care $k^2 = \frac{b^2}{12}$ este raza de inerţie a plăcii, în raport cu axa de rotaţie AB.

813. O tijă omogenă, de greutate P şi lungime a, se poate roti liber în spaţiu, în jurul capătului fix. In momentul iniţial tija este adusă în poziţie orizontală şi capătă viteza unghiulară ω_0, într'un plan orizontal. Să se afle unghiul minim pe care tija îl formează cu verticala în timpul mişcării?

Indicaţie. Când unghiul faţă de verticală este minim, toate punctele tijei au numai viteze orizontale.

Răspuns: $\cos \varphi = \sqrt{1 + n^2} - n$, în care $n = \frac{a\omega_0^2}{6g}$.

814. Pe un plan înclinat coboară doi cilindri (sau sfere) perfect identici, primul alunecând fără rostogolire, iar al doilea se rostogoleşte fără alunecare. Să se afle raportul înălţimilor cu care coboară ambii cilindri (sau sfera) într'un interval de timp dat, dacă amândoi încep mişcarea simultan fără viteză iniţială.

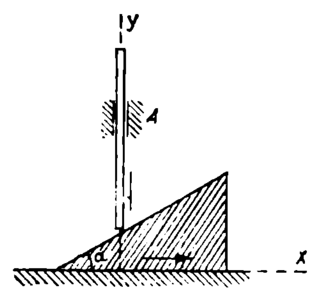
Răspuns: Raportul căutat este $n = \frac{r^2 + k^2}{r^2}$, r fiind raza cilindrului (sferei), iar k raza de inerţie în raport cu axa corespunzătoare (pentru cilindrul în raport cu axa longitudinală de simetrie, pentru sfere în raport cu diametrul). Pentru cilindri $n = \frac{3}{2}$, pentru sfere $n = \frac{7}{5}$.

815. Pentru determinarea momentului de inerţie a rotorului unui dinam (fără a scoate rotorul şi ţinând totodată seama de frecare) se poate proceda în felul următor: se înfăşoară un cablu peste arborele rotorului, de capătul liber se atârnă o greutate p_1 şi se determină timpul t_1, în care greutatea coboară cu o înălţime oarecare h (cablul poate fi trecut peste un scripete). Apoi se face acelaşi lucru cu altă greutate p_2, observând timpul t_2, în care ea coboară cu aceeaşi înălţime h.

Să se afle momentul de inerție al rotorului, ținând seama de frecarea în lagăre și cunoscând raza R a arborelui lui. (Momentul de frecare este considerat constant fără a depinde de greutatea atârnată).

$$\textit{Răspuns}: \; J = R^2 \frac{g\,(p_1 - p) - 2h\left(\frac{p_1}{t_1^2} - \frac{p_2}{t_2^2}\right)}{2hg\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right)}.$$

816. O bară, de masă m se poate deplasa liber într'un ghidaj vertical fix A. Capătul inferior al barei se sprijină pe ipotenuza unei pene perfect netede, de masă M, care este așezată pe un plan orizontal perfect neted. In urma presiunii exercitată de bară, pana se mișcă orizontal, iar bara se lasă în jos. Să se afle accelerațiile ambelor corpuri.



La problema 816

Răspuns: Accelerația barei

$$w = \frac{mg}{m+M\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha}.$$

Accelerația penei $w_1 = w\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

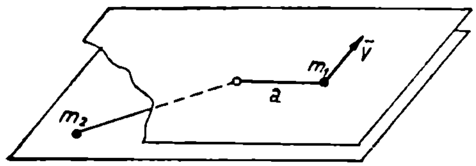
817. Să se demonstreze, că un om care se dă în leagăn, poate mări amplitudinea oscilațiilor astfel: parcurge îndoit (sau șezând) drumul în jos, din punctul cel mai înalt până în momentul trecerii prin poziția de echilibru, iar în momentul trecerii prin această poziție se îndreaptă deodată și în această poziție execută ridicarea.

Răspuns: Se înseamnă cu α unghiul de înclinare al leagănului față de verticală, în poziția inițială, iar cu β unghiul format cu verticală la sfârșitul oscilației. Aplicând teorema energiei cinetice și teorema momentelor (la trecerea sistemului prin poziția de echilibru, unde se produce un salt în viteza unghiulară a leagănului), se obține

$$\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{J_1\,l_1}{J_2\,l_2},$$

în care J_1 și l_1 înseamnă momentul de inerție a sistemului în raport cu axa de rotație, respectiv distanța centrului de greutate al sistemului la această axă, pentru prima poziție a omului, iar J_2 și l_2 înseamnă aceleași mărimi pentru poziția a doua a omului. De aici rezultă, că $\beta > \alpha$.

818. Intre două plane paralele, foarte apropiate, netede și orizontale, este așezată o sferă foarte mică, de masă m_2. De ea este legată, cu un capăt, un fir ideal, care trece printr'o gaură foarte mică, făcută în planul superior și se fixează cu celălalt capăt de o sferă foarte mică, de masă m_1, așezată pe planul superior. In momentul inițial firul este



La problema 818

întins, sfera de masă m_1 se află la distanța $r_0 = a$ de gaură și i se transmite viteza $\bar{u}$, perpendiculară pe direcția firului. Considerând sferele drept puncte materiale și neglijând toate rezistențele, să se afle: 1) ecuațiile mișcării punctului m_1 în coordonate polare, 2) tensiunea firului în timpul mișcării.

Răspuns: 1) $r = \sqrt{a^2 + n^2t^2}$; $\varphi = \frac{u}{n}$ arc tg$\left(\frac{n}{a}t\right)$ în care

$$n = u\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}},$$

$$2)\ S = \frac{a^2 n^2 m_2}{r^3}.$$

819. Două puncte materiale libere, de mase m_1 și m_2, se atrag între ele cu o forță, proporțională cu masele și invers proporțională cu pătratul distanței, factorul de proporționalitate fiind k. La început punctele se află în repaus și distanța între ele este a. Să se afle vitezele acestor puncte, în momentul când distanța între ele se va reduce la jumătate.

Răspuns: $v_1 = m_2\sqrt{\frac{2k}{a(m_1 + m_2)}}$; $v_2 = m_1\sqrt{\frac{2k}{a(m_1 + m_2)}}$.

820. O bară subțire, dreaptă, a cărei masă poate fi neglijată, se poate roti într'un plan orizontal, în jurul punctului fix, O, aflat pe bară, la distanța a de capătul ei A. La acest capăt este fixat solidar un punct material, de masă M, iar de cealaltă parte a punctului O, bara trece printr'un inel B, de masă m, care poate aluneca pe bară fără frecare. In momentul inițial, inelul B se află în repaus, la distanța r_0 de O și se imprimă barei viteza unghiulară ω_0. Să se afle viteza v a inelului B față de bară și să se scrie ecuația diferențială a traiectoriei în coordonate polare.

Răspuns: $u = \omega_0 \sqrt{\dfrac{Ma^2 + mr_0^2}{Ma^2 + mr^2}\left(r^2 - r_0^2\right)}$,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{Ma^2 + mr^2}{Ma^2 + mr_0^2}\left(r^2 - r_0^2\right)}.$$

821. O tijă dreaptă, omogenă, de lungime l, se rotește într'un plan orizontal în jurul unui capăt și gonește în fața ei o sferă de masă egală. In momentul inițial, sfera se află în repaus, foarte aproape de capătul fix al tijei, iar tijei i se imprimă o viteză unghiulară oarecare. Să se afle unghiul dintre viteza absolută a sferei și direcția tijei în momentul când sfera se află chiar la capătul tijei (trece mai departe de tijă).

Răspuns: $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{2} \approx 26°33'54''$.

822. Pe un cilindru circular drept, a cărui axă este verticală și servește ca axă de rotație, este răsucită o țeavă în formă de elice. In această țeavă pornește de sus o sferă grea, care, mișcându-se în jos, dealungul țevii, o pune în mișcare de rotație. Să se afle viteza unghiulară Ω a țevii, precum și viteza absolută v a sferei, în momentul când ea iese prin capătul de jos al țevii. Se dă: M masa țevii, m masa sferei, r raza cilindrului, h pasul elicei, n numărul spirelor țevii; masa cilindrului și rezistențele la mișcare pot fi neglijate.

Răspuns: $\Omega = \dfrac{\mu \cos\alpha}{r} u$, $v = u\sqrt{1 - \mu(2-\mu)\cos^2\alpha}$

în care

$$u = \sqrt{\frac{2gnh}{1 - \mu\cos^2\alpha}},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r},\quad \mu = \frac{m}{m+M}.$$

§ 34. Rotația unui corp rigid în jurul unei axe fixe

Când un corp rigid se rotește în jurul unei axe fixe, suma momentelor cantităților de mișcare a punctelor sale, în raport cu axa de rotație, este egală cu (fig. 34):

$$\sum mv \cdot r = \sum m r^2\omega = J\omega,$$

în care J este momentul de inerție al corpului în raport cu axa de rotație.

Pe baza teoremei despre momentul cantității de mișcare a sistemului, ecuația diferențială a mișcării corpului va fi în cazul acesta

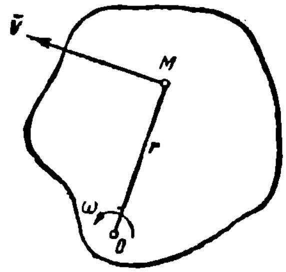


Fig. 34

$$J\frac{d\omega}{dt} = \sum \text{mom}_0(\overline{P}),$$

sau, întrucât $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum \text{mom}_0(\overline{P}).$$

In membrul doi al acestei ecuații este suma momentelor tuturor forțelor în raport cu axa de rotație.

Presiunea corpului pe axă se află aplicând principiul lui d'Alembert, descompunând forțele de inerție în componente tangențiale și radiale.

Energia cinetică a unui corp rigid, care se rotește în jurul unei axe fixe cu viteza unghiulară $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, va fi

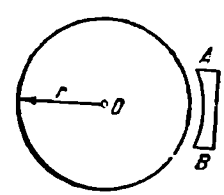
$$T = \sum \frac{1}{2} mv^2 = \sum \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

în care J este momentul de inerție al corpului în raport cu axa de rotație.

823. Să se afle momentul forței de frecare în lagăre, dacă o roată pornită cu viteza de n_0 ture pe minut, s'a oprit după T s.

Răspuns: $\frac{J\pi n_0}{30T}$, în care J este momentul de inerție al roții în raport cu axa de rotație.

824. O roată de rază r, care se rotește cu viteza unghiulară ω_0 în jurul axei O, este apăsată de un sabot de frână AB cu forța radială $\overline{N}$. După t s roata se oprește, ca urmare a frecării. Să se determine valoarea coeficientului de frecare f. Momentul de inerție al roții în raport cu axa de rotație este J.



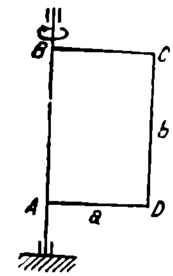
La problema 824

Răspuns: $f = \frac{J\omega_0}{Nrt}$.

825. Pe un volan în greutate de P kg și cu raza R m nemișcat la început, acționează un cuplu cu momentul L kgm și având planul perpendicular pe axa roții. După cât timp va atinge roata viteza de n ture pe minut, dacă raza de inerție a roții, în raport cu axa ei este de k m?

Răspuns: $t = \frac{Pk^2\pi n}{30gL}$ s.

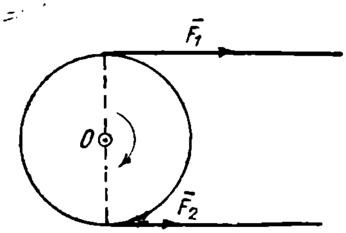
826. O placă dreptunghiulară $ABCD$, cu laturile a și b, de greutate P, se rotește în jurul unei axe verticale AB cu viteza unghiulară inițială ω_0. Fiecare element al plăcii suportă, cu această ocazie, rezistența aerului, a cărei direcție este perpendiculară pe planul plăcii, iar mărimea ei direct proporțională cu aria elementului și pătratul vitezei sale. Factorul de proporționalitate este k. După cât timp se va reduce la jumătate viteza unghiulară a plăcii?



La problema 826

Răspuns: $t = \frac{4P}{3ka^2bg\omega_0}$.

827. Greutatea unui volan $P=4{,}9$ t, raza lui $R=2$ m, iar raza de inerție $k=1$ m. Forțele de tensiune ale curelii $F_1 = 400$ kg și $F_2=200$ kg. Să se determine accelerația unghiulară a roții. Să se afle deasemenea energia ei cinetică T după 10 s dela începutul mișcării.



La problema 827

Răspuns: 1) $\varepsilon = 0{,}8$ $1/s^2$;
2) $T=16\,000$ kgm.

828. Două șaibe O_1 și O_2, cu razele r_1 și r_2 de greutățile P_1 și P_2, sunt legate printr'o curea fără sfârșit. Șaibei conducătoare O_1 i se aplică momentul de rotație L_1; șaibei O_2 i se aplică momentul de rezistență L_2. Să se determine accelerațiile unghiulare a celor două șaibe, dacă razele lor de inerție sunt egale respectiv cu k_1 și k_2.

Răspuns: $\varepsilon_1 = \frac{r_2(L_1r_2 - L_2r_1)g}{P_1k_1^2r_2^2 + P_2k_2^2r_1^2}$, $\varepsilon_2 = \frac{r_1(L_1r_2 - L_2r_1)g}{P_1k_1^2r_2^2 + P_2^2k_2^2r_1^2}$.

829. Un cilindru circular drept, omogen, ale cărui dimensiuni și greutate sunt cunoscute, este atârnat de tavan cu ajutorul unei sârme elastice, fixată în centrul bazei sale superioare. Apoi cilindrul este răsucit cu un unghi φ_0, în jurul axei sale și i se dă drumul. Datorită elasticității sârmei răsucite cilindrul începe să execute oscilații de răsucire. Să se afle legea acestor oscilații, știind, că pentru răsucirea sârmei cu un unghi φ față de cilindru, trebue aplicat un cuplu, așezat într'un plan perpendicular pe axa lui, cuplu al cărui moment este $k^2\varphi$, unde k^2 este un factor de proporționalitate.

Răspuns: $\varphi = \varphi_0 \cos\left(\frac{k}{\sqrt{J}}t\right)$, J fiind momentul de inerție al cilindrului în raport cu axa de rotație.

830. O bară subțire, omogenă în poziție verticală este atârnată cu capătul ei superior de un punct fix. Să se afle ce viteză unghiulară minimă trebue imprimată barei, pentru ca ea să poată executa o întoarcere complectă în jurul punctului de suspensie în planul vertical, dacă lungimea barei este $2l$.

Răspuns : $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.

831. O bară dreaptă omogenă AB, de greutate P, este suspendată cu capătul A de un punct fix. In momentul inițial se dă barei o poziție verticală, astfel încât capătul B să se afle deasupra punctului de suspensie. Apoi i se dă drumul fără viteză inițială. Să se afle presiunea pe punctul de suspensie în momentul trecerii barei prin poziția verticală inferioară.

Răspuns : $4P$.

832. Să se afle rezultanta forțelor de inerție ale punctelor unei figuri plane, care se rotește cu viteză unghiulară variabilă, în jurul unei axe fixe, perpendiculară pe planul ei.

Răspuns : Rezultanta trece prin centrul de oscilație al figurii și este geometric egală cu forța de inerție a centrului de greutate al figurii, în care este concentrată toată masa ei.

833. O bară omogenă dreaptă, oscilează într'un plan vertical în jurul capătului ei superior O. Să se afle mărimea momentului de încovoiere într'o secțiune oarecare A a barei, aflată la distanța x de punctul O, în momentul, când bara formează cu verticala unghiul φ, cunoscând lungimea $2l$ a barei și greutatea ei P. Să se afle deasemenea secțiunea barei în care momentul de încovoiere are, într'un moment dat, valoarea maximă (secțiune periculoasă).

Indicație. Momentul căutat este egal cu suma momentelor, în raport cu punctul A, a forțelor gravității și forțelor de inerție, aplicate porțiunii barei, situată pe aceeași parte față de punctul A (mai jos de acest punct).

Răspuns : Momentul căutat este egal cu $\frac{P \sin \varphi}{16\, l^2}(2l - x)^2\, x$; pentru secțiunea periculoasă distanța $x = \frac{2l}{2}$.

834. Să se afle proiecția orizontală (R_x) și cea verticală (R_y) a reacțiunii axei unui pendul matematic, lăsat să oscileze fără viteză inițială din poziția determinată de unghiul φ_0 dintre pendul și poziția de echilibru. Să se afle apoi proiecțiile acestei reacțiuni pe dreapta, care unește punctul de suspensie cu centrul de greutate al pendulului (R_r) și pe perpendiculara la această dreaptă, situată în același plan vertical (R_p).

Răspuns : $R_x = \frac{Pa^2}{k^2}(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)\sin\varphi$;

$$R_y = \frac{Pa^2}{k^2}[(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)\cos\varphi - 1] + P;$$

$$R_r = \frac{P}{k^2}[(2a^2 + k^2)\cos\varphi - 2a^2\cos\varphi_0];$$

$$R_p = P\frac{a^2 - k^2}{a^2}\sin\varphi,$$

în care a este depărtarea centrului de greutate al pendulului la axa de rotație, k raza de inerție a pendulului față de această axă, P greutatea lui.

835. Un pendul în formă de bară subțire, dreaptă, de lungime l, este adus în poziție orizontală și apoi i se dă drumul fără viteză inițială. Să se afle unghiul α dintre reacțiunea totală a axei fixe de rotație a barei și această bară.

Răspuns : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{10}\operatorname{tg}\varphi$, în care φ este unghiul dintre bară și verticală.

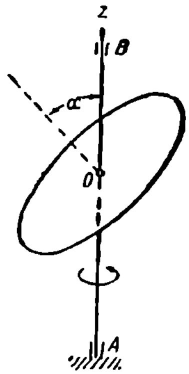
836. O roată se poate roti într'un plan vertical în jurul unei axe orizontale. Greutatea roții este P, distanța dela centrul de greutate la axa de rotație este a. Intr'un moment oarecare roata începe să fie rotită cu accelerația unghiulară constantă ε, fiind scoasă astfel din starea de repaos. Să se afle proiecțiile orizontală și verticală a reacțiunii dinamice a axei, în momentul când roata a executat n ture dela începutul mișcării.

Răspuns : $R_x = \frac{Pa}{g}\varepsilon[4\pi n\sin(2\pi n) - \cos(2\pi n)]$.

$$R_y = \frac{Pa}{g}\varepsilon[4\pi n\cos(2\pi n) + \sin(2\pi n)].$$

Reacțiunea totală $R = \varepsilon\frac{Pa}{g}\sqrt{16\pi^2 n^2 + 1}$.

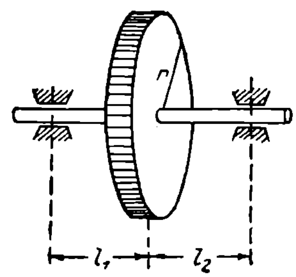
837. Un disc de rază R și greutate P se rotește în jurul unei axe verticale z, cu viteza unghiulară constantă ω. Axa de rotație trece prin centrul de greutate al discului, care coincide cu centrul lui O și formează unghiul α cu normala pe planul discului. Să se afle reacțiunile orizontale în punctele A și B, dacă $AB=l$.



La problema 837

Răspuns: $N_A = N_B = \frac{PR^2\omega^2}{8lg} \sin 2\alpha$.

838. Să se calculeze presiunea pe lagărele unei turbine cu abur cu axa orizontală, care se rotește cu viteza de $n=30\,000$ ture pe minut și cântărește P kg, știind că raza ei $r=20$ cm, distanța dintre lagăre $l_1+l_2 = 35$ cm și că discul turbinei este așezat puțin înclinat pe axă, formând cu ea un unghi de 88°, centrul lui de greutate se află însă pe axa de rotație.



La problema 838

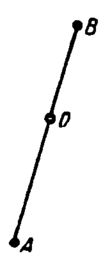
Răspuns: Presiunea dinamică este egală aproximativ cu 1000 P kg.

839. La ce distanță x de centrul de greutate al unui pendul trebue să se afle axa lui de rotație, pentru ca perioada oscilației să fie minimă?

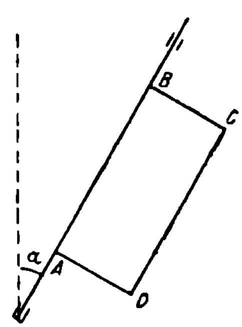
Răspuns: $x=k$, k fiind raza de inerție a pendulului în raport cu o axă, care trece prin centrul lui de greutate și este paralelă cu axa de rotație.

840. Două sfere A și B, de greutate egală, sunt legate printr'o bară subțire, care se rotește într'un plan vertical în jurul punctului fix O. Să se afle perioada de oscilație a acestui pendul, neglijând greutatea barei; $AO=a$, $OB=b$.

Răspuns: $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a-b)\,g}}$.



La problema 840



La problema 841

841. O placă subțire, omogenă, în formă de dreptunghi $ABCD$, execută oscilații în jurul axei fixe AB, care formează cu verticala unghiul $\alpha=30°$. Lățimea plăcii $AD = a = 0{,}5$ m. Să se determine perioada micilor oscilații ale plăcii.

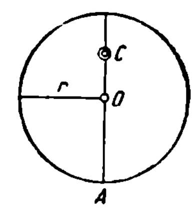
Răspuns: $T = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g \sin \alpha}} \approx 1{,}6$ s.

842. Un sector de cerc, cu raza r, oscilează în jurul unei axe orizontale, normală pe planul său și trecând prin vârful unghiului său la centru. Să se afle acest unghi, știind că lungimea redusă a pendulului simplu sincron este egală cu jumătatea arcului sectorului.

Răspuns: $\sin \frac{\alpha}{2} = 0{,}75$; $\alpha = 97°10'53''$.

843. Un disc omogen cu raza $r = 15$ cm execută oscilații în jurul unei axe orizontale, perpendiculară pe planul discului și trecând prin punctul C, OC fiind egal cu $\frac{1}{2} r$. Să se afle perioada oscilațiilor mici ale discului și poziția centrului oscilațiilor.

Răspuns: $T \approx 1$ s. Centrul oscilațiilor este punctul A.



La problema 843

844. Un pendul constă dintr'o bară dreaptă și o sferă goală fixată de capătul ei, ale căror mase pot fi neglijate. Interiorul sferei se umple odată cu un lichid, iar a doua oară cu o substanță solidă, cu aceeași densitate ca și a lichidului.

Să se afle lungimile pendulului simplu sincron în ambele cazuri, dacă raza de inerție a volumului gol în raport cu diametrul său este k, iar distanța dela centrul lui la axa pendulului este a.

(Se presupune, că între lichid și pereții sferei nu există frecare și că substanța, care umple golul în cazul al doilea, nu se poate mișca în interiorul lui).

Răspuns: In primul caz $l_1 = a$, în cazul al doilea $l_2 = \frac{a^2 + k^2}{a}$.

845. Un pendul constă dintr'o bară dreaptă, fără greutate, pe care sunt fixate două sfere omogene de aceeași densitate. Razele sferelor sunt a și b, iar distanțele centrelor lor la punctele de suspensie sunt c și x. Ce valoare trebue să aibă x, pentru ca lungimea pendulului simplu sincron să aibă valoarea cea mai mică posibilă?

Răspuns: x se determină din ecuația

$$5b^3 x^2 + 10a^3 cx - (5a^3 c^2 + 2a^5 + 2b^5) = 0.$$

846. Un pendul constă din două bare omogene, drepte, de lungime $2a$ respectiv $2b$, legate solidar la capete sub un unghi drept. Axa orizontală de rotație a pendulului trece prin vârful acestui unghi. Poziția pendulului în planul vertical este determinată de unghiul φ, format de bara mai mică cu orizontala. Să se afle valoarea maximă a acestui unghi, dacă în momentul inițial $\varphi=0$ și pendulul începe să oscileze fără viteză inițială.

Răspuns : $\varphi_{max}=2\varphi^*$, unde φ^* este valoarea unghiului φ, care corespunde poziției de echilibru a pendulului.

847. Condițiile problemei precedente. Să se afle lungimea l a pendulului simplu sincron.

Răspuns : $l = \frac{4}{3}\frac{a^3+b^3}{\sqrt{a^4+b^4}}$.

848. Să se afle perioada oscilațiilor mici ale unui pendul, care constă dintr'un arc de cerc din sârmă, suspendat de o axă orizontală, normală pe planul arcului și trecând prin mijlocul lui. Unghiul la centru al arcului este 2α, iar raza arcului este r.

Răspuns : $T=2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$ (nu depinde de α).

849. Un disc circular omogen oscilează, la început, în jurul tangentei sale orizontale, apoi același disc oscilează în jurul unei axe orizontale, normală pe planul său și trecând printr'un punct oarecare al circumferinței sale. Să se afle raportul lungimilor pendulelor simple sincron din cazul întâi și din cazul al doilea.

Răspuns : $\frac{l_1}{l_2}=\frac{5}{6}$.

850. Care va fi lungimea l a unui pendul, format dintr'un cilindru circular omogen, care oscilează în jurul unui diametru al bazei, cu raza r, care bate secundele?

Răspuns : Lungimea căutată se determină din ecuația

$$4\pi^2l^2-6gl+3\pi^2r^2=0.$$

Dacă r este mic, atunci

$$l=\frac{6g}{4\pi^2}\approx\frac{3}{2}\,\mathrm{m}.$$

851. Să se demonstreze, că perioada oscilațiilor unui pendul nu se schimbă, dacă fixăm un punct material de greutate arbitrară în centrul de oscilație al unui pendul fizic.

§ 35. Mişcarea plană paralelă a unui corp rigid

Poziţia unui corp rigid, care se mişcă paralel cu un plan, poate fi determinată prin coordonatele centrului de greutate ($\xi\eta$) în raport cu axele fixe ($\xi\eta$) şi prin unghiul φ, care (fig. 35) determină poziţia corpului, în raport cu axele (x, y), paralele cu cele fixe ($\xi\eta$) şi având originea în centrul de greutate. Intrucât se poate considera că orice mişcare a unui sistem se compune dintr'o mişcare de translaţie, împreună cu centrul de greutate şi o mişcare în raport cu centrul de greutate (în cazul nostru mişcarea în raport cu centrul de greutate, este o rotaţie în jurul unei axe, care trece prin centrul de greutate şi este perpendiculară pe planul $\xi O\eta$), ecuaţiile diferenţiale ale mişcării corpului vor fi:

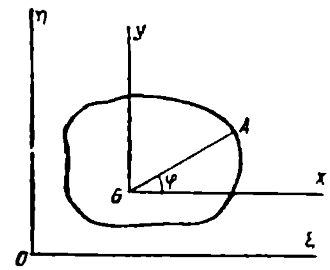


Fig. 35

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y, \quad J_C\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum \mathrm{mom}_C P = \sum (xY - yX),$$

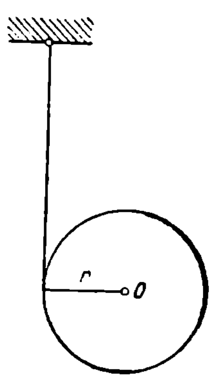
în care P (X, Y) sunt forţele, care acţionează asupra corpului, iar J_C momentul de inerţie al corpului faţă de axa, care trece prin centrul de greutate şi este perpendiculară pe planul $\xi O\eta$.

Energia cinetică, pe baza teoremei lui König, este în cazul acesta

$$T = \frac{1}{2}\left[M\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right\} + J_C\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right].$$

852. O şaibă de rază r şi greutate P este înfăşurată de un fir, a cărui extremitate este fixată de tavan. Să se afle acceleraţia w, cu care se mişcă centrul şaibei în timpul căderii, acceleraţia unghiulară ε a şaibei şi tensiunea T a firului.

Răspuns: $w = \frac{2}{3}g$, $\varepsilon = \frac{2g}{3r}$, $T = \frac{1}{3}P$.



La problema 852

853. Un cilindru de greutate P, sub acţiunea greutăţii sale se rostogoleşte fără alunecare, pe un plan înclinat cu unghiul α. Să se determine acceleraţia w a centrului O, presiunea N a cilindrului pe un plan şi forţa de frecare F, care împiedică alunecarea cilindrului.

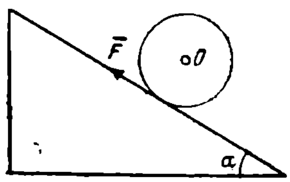
Răspuns: $w = \frac{2}{3}g\sin\alpha$, $N = P\cos\alpha$, $F = \frac{1}{3}P\sin\alpha$.

854. Să se rezolve problema precedentă, presupunând, că nu există frecare între cilindru şi plan.

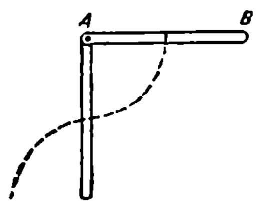
Răspuns: $w = g\sin\alpha$, $N = P\cos\alpha$.

855. O bară omogenă AB, de lungime $2a$, este fixată în punctul A printr'o articulație; la început ea este fixă și ocupă poziția orizontală. In momentul în care bara trece prin poziția verticală, articulația A se liberează și bara devine liberă. Continuând mișcarea, centrul de greutate descrie o parabolă, iar bara însăși se rotește în jurul centrului de greutate. Câte învârtituri va executa bara în timp ce centrul ei de greutate va coborî cu distanța h?

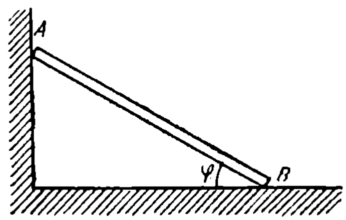
Răspuns: $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3h}{a}}$.



La problema 853



La problema 855



La problema 856

856. O bară omogenă AB, de lungime $2a$ și greutate P, se mișcă sub acțiunea greutății sale, alunecând cu capetele A și B pe un perete vertical, neted și pe podeaua orizontală netedă. Să se determine viteza unghiulară ω a barei și presiunile N și N_1, exercitate pe perete, respectiv podea, în funcție de unghiul φ, dacă în momentul inițial bara este fixă și $\varphi = \varphi_0$. Pentru care valoare a lui φ, bara se va depărta de perete?

Răspuns: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$,

$$N = \frac{3}{4} P (3 \sin\varphi - 2 \sin\varphi_0) \cos\varphi,$$

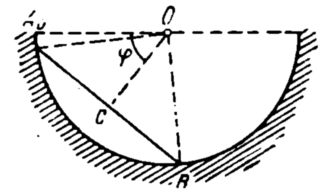
$$N_1 = \frac{1}{4} P (1 - 6 \sin\varphi_0 \sin\varphi + 9 \sin^2\varphi).$$

Bara se va depărta de perete pentru φ dat de relația

$$\sin\varphi = \frac{2}{3} \sin\varphi_0.$$

Observație. Dacă, în momentul inițial, se atârnă în punctul din perete, unde se află capătul superior A al barei, un pendul, care constă dintr'o bară rigidă, fără greutate, de lungime $^4/_3\, a$, cu un punct greu la capăt, apoi se aduce pendulul într'o poziție, așa încât să fie în prelungirea barei și, în sfârșit se dă drumul simultan pendulului și barei, ambele corpuri vor rămâne paralele între ele în timpul mișcării, până în momentul când bara se desparte de perete, iar reacțiunea în punctul de suspensie al pendulului devine egală cu zero.

857. O tijă omogenă AB, de lungime $2a$ și greutate P este așezată într'o cupă semisferică fixă, netedă cu centrul O, $\sphericalangle\ AOB = 90°$. Tija se mișcă sub acțiunea greutății sale. Să se determine viteza unghiulară ω a tijei și reacțiunile N_A și N_B în punctele A și B. In momentul inițial tija se află în repaus și unghiul $\varphi = \sphericalangle A_0OC = 45°$. Punctul C este centrul de greutate al tijei.



La problema 857

Răspuns: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)}$.

$$N_A = \frac{1}{8}\ P\ [\sqrt{2}\ (10 \sin\varphi - \cos\varphi) - 6\ ].$$

$$N_B = \frac{1}{8}\ P \sqrt{2}\ [(10 \sin\varphi + \cos\varphi) - 6].$$

858. Discul unui pendul se poate roti liber, fără frecare, în jurul centrului său. Să se afle, fără calcul, traiectoriile punctelor discului, când pendulul se mișcă. In momentul inițial sistemul se află în repaus.

Răspuns: Traiectoria oricărui punct A al discului este o circumferință, cu raza egală cu distanța dela punctul de suspensie O, al pendulului, la centrul O_1 al discului. Centrul C al acestei circumferințe este vârful al patrulea C al paralelogramului OO_1AC.

859. Un corp dat, pus în condiții inițiale cunoscute, execută o mișcare plană paralelă, sub acțiunea unui sistem de forțe determinat. Să se aleagă un sistem format din două puncte materiale, solidar legate între ele (situate pe o dreaptă, care trece prin centrul de mase al corpului în planul mișcării lui), care să fie echivalent din punct de vedere dinamic cu sistemul dat (adică fiind pus în aceleași condiții ca și corpul, să execute aceeași mișcare plană). Aceeași întrebare, însă cu trei puncte așezate toate pe o singură dreaptă, cel din mijloc coincizând cu centrul de mase al corpului.

Răspuns: Distanța a_1, dela unul din punctele înlocuitoare la centrul de mase al corpului, este arbitrară. Insemnând cu M, m_1, m_2 masa corpului și masele ambelor puncte, cu k_0 raza centrală de inerție a corpului, cu a_2 distanța punctului al doilea la centrul lor de mase, care coincide cu centrul de mase al corpului, se obține

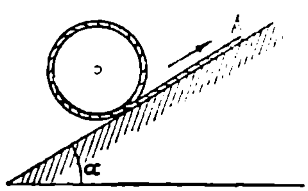
$$1)\ a_2 = \frac{k_0^2}{a_1}, \quad m_1 = \frac{M k_0^2}{a_1^2 + k_0^2}, \quad m_2 = \frac{M a_1^2}{a_1^2 + k_0^2};$$

$$2)\ m_1 = \frac{M k_0^2}{a_1 (a_1 + a_2)}, \quad m_2 = \frac{M k_0^2}{a_2 (a_1 + a_2)}, \quad m_3 = M\left(1 - \frac{k_0^2}{a_1 a_2}\right).$$

860. O sferă goală cu raza interioară r și cea exterioară R, este umplută cu un lichid de densitate egală cu cea a pereților. Sfera este așezată pe un plan înclinat aspru, pe care ea se rostogolește fără alunecare, parcurgând drumul x în timpul t. Să se compare acest timp cu timpul t_1, în care o sferă plină, de aceeași densitate și cu aceeași rază R, ca prima, rostogolindu-se pe același plan înclinat, va parcurge același drum x. Să se compare deasemenea drumurile x și x_1, parcurse de ambele sfere în același interval de timp t.

Răspuns: $\frac{t}{t_1} = \sqrt{1 - \frac{2}{7n^5}}, \quad \frac{x}{x_1} = \frac{7n^5}{7n^5 - 2} = \frac{t_1^2}{t^2}$ în care $n = \frac{R}{r}$.

861. Un cilindru circular, omogen, de masă M și rază r, se rostogolește, fără alunecare, pe un plan înclinat, care formează cu orizontala unghiul α. In jurul cilindrului este înfășurat un fir, al cărui capăt A este tras în sus, pe planul înclinat, cu accelerația a.



La problema 861

Să se afle accelerația w a centrului de greutate al cilindrului și tensiunea T a firului. Să se cerceteze cazurile $\alpha = 0$ și $\alpha = 90°$.

Răspuns: $w = \frac{2}{3}\left(g \sin\alpha - \frac{a}{2}\right),$

$$T = \frac{Mg}{3}\left(\sin\alpha + \frac{a}{g}\right).$$

862. Condițiile problemei precedente. Să se afle cu ce accelerație trebue tras firul în sus pentru ca cilindrul să se rotească pe loc. Să se afle tensiunea firului în acest caz. Să se cerceteze cazul $\alpha = 90°$.

Răspuns: $a = 2g \sin\alpha, \quad T = Mg \sin\alpha.$

863. Să se afle condiția în care este posibilă o rostogolire pură (fără alunecare) a unui cilindru circular de rază r, așezat, fără viteză inițială, pe un plan înclinat, aspru, care formează unghiul α cu orizontala, coeficientul de frecare fiind f. Raza de inerție a cilindrului, în raport cu axa de rotație este k.

Răspuns : $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{k^2 + r^2}{k^2} f.$

864. Un cilindru circular, de rază r, este așezat pe un plan înclinat, care formează unghiul α cu orizontala, coeficientul de frecare fiind f. Să se afle mișcarea cilindrului, când nu este respectată condiția rostogolirii pure, adică în cazul când $\operatorname{tg} \alpha > \frac{k^2 + r^2}{k^2} f$, unde k este raza de inerție a cilindrului în raport cu axa lui de rotație. La început cilindrul se află în repaus.

Răspuns : Cilindrul va aluneca și se va rostogoli.

1. Accelerația centrului de greutate sau accelerația mișcării de translație

$$w = g \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi},$$

în care $\varphi = \operatorname{arctg} f$ (unghiul de frecare).

2. Accelerația unghiulară a cilindrului

$$\varepsilon = gf \frac{r}{k^2} \cos \alpha.$$

865. Un cilindru circular, de masă M și rază r, având raza de inerție k, este așezat pe un plan înclinat perfect neted, cu unghiul de înclinare α. Pe cilindru este înfășurat un fir flexibil, fără greutate, întins în sus dealungul planului, trecut peste un scripete fix, a cărui masă poate fi neglijată și purtând la extremitatea sa o sarcină de masă m. Să se afle: 1) mișcarea cilindrului și a sarcinii și tensiunea firului; 2) condițiile, în care este posibilă numai o mișcare de rotație a cilindrului; 3) condiția, în care sarcina va rămâne nemișcată și tensiunea firului în cazul acesta.

Răspuns : 1) Accelerația centrului de greutate al cilindrului

$$w = A\,[mr^2 \sin \alpha + (M \sin \alpha - m)\,k^2]\,g.$$

Accelerația unghiulară a cilindrului

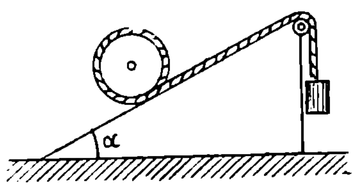
$$\varepsilon = 2Amgr\cos^2\left(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right).$$

Tensiunea firului

$$T = 2AMgk^2\cos^2\left(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right).$$

Accelerația sarcinii

$w_1 = A\,[mr^2 - (M\sin\alpha - m)\,k^2]\,g$, în care $A = \dfrac{1}{(m+M)\,k^2 + mr^2}$.



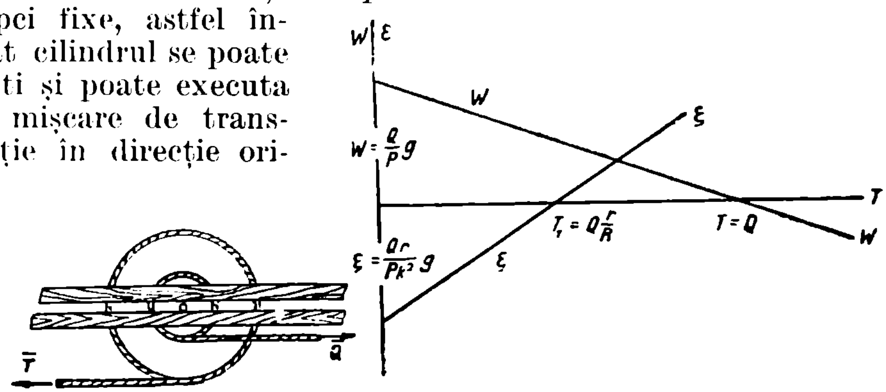
La problema 865

2) $\dfrac{m}{M} = \dfrac{k^2\sin\alpha}{k^2 - r^2\sin\alpha}$ (prin urmare, $k^2 > r^2\sin\alpha$, ceeace dă $\alpha < 30^\circ$ în cazul unui cilindru omogen).

3) $\dfrac{m}{M} = \dfrac{k^2}{k^2 + r^2}\sin\alpha$, $T = mg$.

866. Condițiile problemei precedente, cu deosebirea că masa scripetelui este μ, iar planul este vertical ($\alpha = 90^\circ$). Să se afle mișcarea acestui sistem și tensiunea firului. Exactitatea rezultatului obținut poate fi verificată, punând $\mu = 0$, iar în răspunsul la problema precedentă $\alpha = 90^\circ$. Rezultatele acestor substituiri trebue să fie identice.

867. Un cilindru circular, de greutate P și rază R, cu raza de inerție k în raport cu axa geometrică, este montat pe o axă orizontală, care poate aluneca fără frecare între două șipci fixe, astfel încât cilindrul se poate roti și poate executa o mișcare de translație în direcție ori-



La problema 867

zontală. La mijlocul cilindrului se află o prelungire de rază r, peste care este înfășurat un fir, iar alt fir este înfășurat pe cilindru. La extremitățile firelor se aplică forțele orizontale $\overline{Q}$ și $\overline{T}$. Să se afle mișcarea cilindrului și să se analizeze în funcție de mărimea forței $\overline{T}$. (Se va reprezenta grafic dependența dintre accelerațiile de translație și de rotație ale cilindrului și mărimea forței $\overline{T}$).

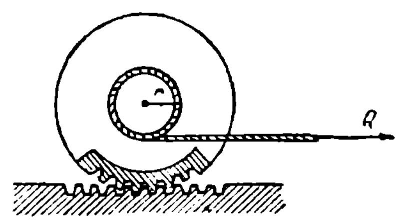
Răspuns : Accelerația mișcării de translație

$$w = \frac{Q - T}{P} g$$

accelerația unghiulară de rotație

$$\varepsilon = \frac{TR - Qr}{Pk^2} g.$$

868. Un cilindru circular, de greutate P și rază R, având raza de inerție k în raport cu axa geometrică, este prevăzut cu dinți longitudinali și se poate rostogoli fără frecare pe o cremalieră orizontală. La mijloc, cilindrul are o prelungire de rază r, pe care este înfășurat un fir, cum se arată în figură. La extremitatea acestui fir este aplicată forța orizontală $\overline{Q}$, perpendiculară pe axa cilindrului. Să se afle mișcarea cilindrului și reacțiunea (orizontală) $\overline{F}$ a cremalierei.



La problema 868

Răspuns : Accelerația unghiulară $\varepsilon = \frac{Q}{P} \cdot \frac{R-r}{R^2+k^2} g$. Accelerația mișcării de translație $w = \frac{Q}{P} \frac{R(R-r)}{R^2+k^2} g$. Reacțiunea șinei

$$F = Q \frac{k^2 + Rr}{k^2 + R^2} < Q.$$

869. Condițiile problemei precedente, cu deosebirea că nu există dinți, iar planul este aspru (coeficientul de frecare f). Să se studieze mișcarea cilindrului în funcție de mărimea forței Q, coeficientul de frecare fiind același, atât în repaus cât și în mișcare.

Răspuns : Dacă (vezi graficul pag. 272.

$$Q \leq fP \frac{k^2 + R^2}{k^2 + rR} = Q_1,$$

mișcarea este o rostogolire pură (fără alunecare) la dreapta, cu accelerația

$$w = \varepsilon R = \frac{Q}{P} \cdot \frac{R-r}{R^2+k^2}\, gR.$$

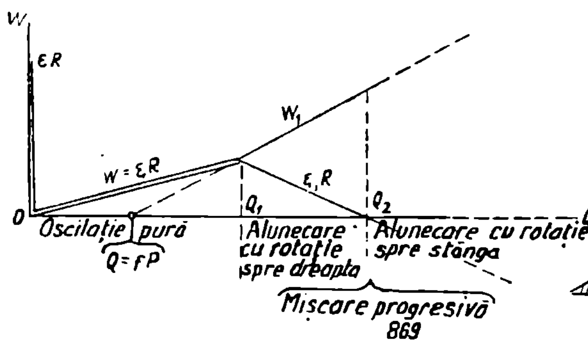
Dacă $Q > Q_1$ și prin urmare, $Q > fP$

$$w_1 = \frac{Q-fP}{P}\, g > 0, \quad \varepsilon_1 R = \frac{fPR - Qr}{Pk^2}\, gR,$$

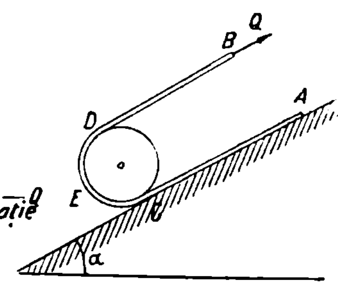
adică mișcarea se prelungește spre dreapta, însă nu mai este rostogolire pură, ci o rostogolire, combinată cu alunecarea punctului de contact spre dreapta. Accelerația unghiulară pozitivă ε_1 (rotație în sensul acelor de ceasornic) scade când Q crește, se anulează pentru

$$Q = Q_2 = fP\,\frac{R}{r},$$

apoi devine negativă (rotație în sens contrar acelor de ceasornic) și rămâne astfel, crescând în valoarea absolută.



La problema 869



La problema 870

870. Un cilindru circular, omogen, de greutate P, este așezat pe un plan înclinat, care formează unghiul α cu orizontala. Cilindrul se menține în echilibru cu ajutorul unui fir, care îl înfășoară și are extremitățile fixate în punctele A și B, astfel încât porțiunea AC este întinsă dealungul planului, iar porțiunea DB este paralelă cu planul. Să se afle accelerația centrului de greutate al cilindrului, precum și tensiunile în cele două porțiuni ale firului, dacă extremitatea B a firului se desprinde și i se aplică o forță dată Q paralelă cu planul și orientată în sus.

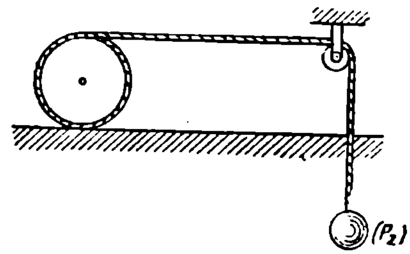
Răspuns : Accelerația centrului de greutate al cilindrului:

$$w = \frac{2\,(2Q - P\sin\alpha)}{3P}\, g.$$

Tensiunea firului BD este Q. Tensiunea firului AC este egală cu

$$\frac{1}{3}(P \sin \alpha + Q).$$

871. Un cilindru circular omogen, de greutate P_1, este înfășurat cu un fir și așezat pe un plan aspru orizontal. Extremitatea liberă a firului este întinsă orizontal, cum se vede în figură, trecut peste un scripete fix (fără masă și frecare) și poartă o sarcină de greutate P_2.



La problema 871

Presupunând, că cilindrul se rostogolește fără alunecare, să se afle accelerația w_1 a centrului de greutate al cilindrului, accelerația w_2 a sarcinii și tensiunea T a firului.

Răspuns : $w_1 = \frac{4P_2}{3P_1 + 8P_2} g$; $w_2 = 2w_1$; $T = \frac{3P_1P_2}{3P_1 + 8P_2}$.

872. Un cilindru de rază r (sau o sferă cu aceeași rază), de greutate P, se rostogolește, sub acțiunea gravității, în interiorul unui cilindru fix, de rază mai mare R, ale cărui generatoare sunt orizontale, începând mișcarea din starea de repaus. Să se afle mișcarea cilindrului în cazul rostogolirii pure și reacțiunea normală a cilindrului fix N, când coeficientul de frecare, la alunecare, este f și raza de inerție a cilindrului (sau sferei) este k (în raport cu o axă, care trece prin centrul de greutate și este paralelă cu generatoarele cilindrului fix).

Răspuns : Notând cu φ unghiul dintre raza cilindrului mai mare, care trece prin centrul de greutate al cilindrului mic și verticala, și cu φ_0 valoarea inițială a acestui unghi, se găsește, că cilindrul se va rostogoli fără alunecare, în condiția

$$\operatorname{tg} \varphi_0 \leq \frac{k^2 + r^2}{k^2} f = 3f \left(\text{pentru sferă } \operatorname{tg} \varphi_0 \leq \frac{7}{2} f \right).$$

În acest caz centrul de greutate al cilindrului se va mișca ca pendul matematic de lungime

$$l = \frac{(R-r)\,(k^2+r^2)}{r^2} = \frac{3}{2}(R-r) \left[\text{pentru sferă } l = \frac{7}{5}(R-r) \right].$$

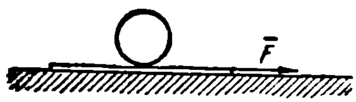
In cazul cilindrului reacţiunea este:

$$N = \frac{P}{3}(7 \cos \varphi - 4 \cos \varphi_0).$$

In cazul sferei

$$N = \frac{P}{7}(17 \cos \varphi - 10 \cos \varphi_0).$$

873. O scândură de greutate P_1 se mişcă pe un plan orizontal aspru, sub acţiunea unei forţe orizontale $\overline{F}$. Coeficientul de frecare între scândură şi plan este f. Pe scândură se află un cilindru circular, omogen, compact, de greutate P_2, care se poate rostogoli pe scândură, fără alunecare. Să se determine acceleraţia scândurii.



La problema 873

Răspuns: $w = \dfrac{F - f(P_1 + P_2)}{P_1 + \dfrac{P_2}{3}} g.$

874. O bară dreaptă, omogenă, de greutate P, se sprijină cu un capăt pe o podea orizontală netedă, unghiul dintre bară şi podea fiind de 60°; bara începe să cadă, pornind din poziţia de repaus. Să se determine presiunea iniţială a barei pe podea.

Răspuns: $\dfrac{4}{7} P.$

875. O bară dreaptă, omogenă, de greutate P, este suspendată în poziţie orizontală de două fire paralele, fixate la extremităţile ei. Să se afle tensiunea într'unul din fire în momentul, când celălalt fir este tăiat.

Răspuns: $\dfrac{P}{4}$.

§ 36. Mişcarea unui corp rigid cu un punct fix

La mişcarea în jurul unui punct fix corpul are în fiecare moment o viteză unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ şi momentul cinetic $\overline{G} = \Sigma m_i \overline{r_i} \times \overline{v_i}$. Conform teoremei momentului cinetic (fig. 36):

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = \overline{L}, \tag{1}$$

în care L este suma momentelor forțelor exterioare în raport cu punctul fix. Dacă se raportează ecuația (1) la un sistem mobil de coordonate (xyz), legat solidar de corp atunci

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\bar{G}}{\mathrm{d}t} + (\bar{\omega} \times \bar{G}) = \bar{L}. \tag{2}$$

1. Dacă un corp rigid, care are o axă de simetrie, se mișcă în jurul unui punct fix O, rotindu-se în jurul axei de simetrie z, cu viteza unghiulară ω_1, suficient de mare (giroscop), atunci el mai execută, sub acțiunea momentului forțelor exterioare $\bar{L}$, o rotație în jurul axei fixe z' (precesie), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$. Presupunând viteza unghiulară de precesie suficient de mică, se poate considera *prin aproximație*, că momentul cinetic $\bar{G}$ este îndreptat mereu după axa de simetrie a corpului z (fig. 37) și este egal cu $J\omega_1$, J fiind momentul de inerție al corpului în raport cu axa de simetrie. Dacă $\omega_1 = \text{const.}$ din ecuație (2) se scoate

$$\bar{L} + (J\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}) = 0, \tag{3}$$

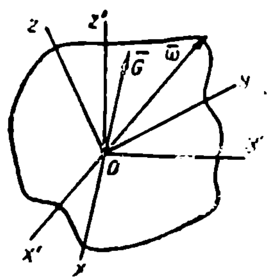


Fig. 36

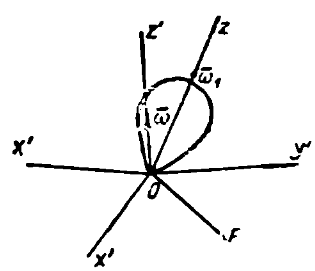


Fig. 37

adică momentul forțelor exterioare $\bar{L}$ este echilibrat de momentul forțelor de inerție $J\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega} = \bar{K}$, care se numește *moment giroscopic* și este îndreptat perpendicular pe planul, care trece prin axa de simetrie a giroscopului și axa de precesie. Evident, $K = J\omega_1\omega \sin \widehat{(\omega_1, \omega)}$. Dacă axa z a giroscopului este prinsă în lagăre, precesia, transmisă giroscopului, dinafară, provoacă efectul giroscopic sub forma unui cuplu cu momentul $\bar{K}$, care acționează asupra lagărelor.

2. Dacă se iau axele principale de inerție ca axe ale sistemului de coordonate mobil (xyz), legate de corp, ecuația (2) capătă în proiecțiile sale pe axele mobile, forma (ecuațiile lui Euler):

$$\left.\begin{aligned} J_x \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z &= L_x, \\ J_y \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (J_x - J_z)\,\omega_z\omega_x &= L_y, \\ J_z \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + (J_y - J_x)\,\omega_x\omega_y &= L_z. \end{aligned}\right| \tag{4}$$

în care

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi,\\
\omega_y &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi,\\
\omega_z &= \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi + \frac{d\varphi}{dt},
\end{aligned}\right| \tag{5}$$

φ, ψ, θ fiind unghiurile lui Euler (vezi Cinematica, § 18).

Fie, de exemplu un corp rigid care se rotește în jurul axei fixe z', cu viteza unghiulară constantă ω : centrul de greutate O al corpului, fiind pe această axă și $J_x = J_y \neq J_z$. Intrucât în cazul acesta $J_x = J_y$, se pot alege ca axe de coordonate x și y orice axe perpendiculare între ele într'un plan, perpendicular pe axa z. In acest caz luând axa x în planul $z'Oz$ (fig. 38) se obține

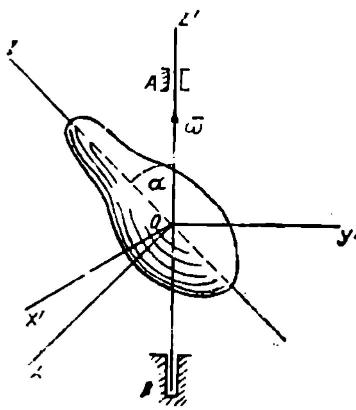


Fig. 38

$$\omega_x = -\omega\sin\alpha,\quad \omega_y = 0,\quad \omega_z = \omega\cos\alpha.$$

Inlocuind aceste valori în ecuațiile (4), se găsește :

$$L_x = 0,\quad L_y = -(J_x - J_z)\,\omega^2\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= \frac{J_z - J_x}{2}\,\omega^2\sin 2\alpha,\quad L_z = 0.$$

Prin urmare, momentul forțelor de inerție va fi orientat după axa y, adică perpendicular pe planul $z'Oz$ și va provoca în lagărele A și B reacțiuni egale și orientate în sens opus, de mărime (cu condiția $AO = OB$) :

$$\frac{J_z - J_x}{2d}\,\omega^2\sin 2\alpha$$

în care $d = AB$.

876. O turbină, având arborele paralel cu axa longitudinală a vaporului, face 250 ture pe minut. Greutatea rotorului este de 18 t, raza de inerție 1,43 m. Să se determine presiunea giroscopică pe lagăre, distanța între ele fiind 5,55 m la întoarcerea vaporului cu viteza unghiulară de 10° pe secundă.

Răspuns : $\sim 3t$.

877. Un giroscop, la care $A = B = 2C$, se rotește în virtutea inerției, în jurul centrului de greutate, executând o precesie regulată. Cunoscând viteza unghiulară ω_1 a rotației proprii a giroscopului și unghiul dintre axa giroscopului și axa de precesie $\theta = 60°$, să se afle viteza unghiulară de precesie ω_2.

Răspuns : $\omega_2 = 2\omega_1$.

878. Un disc circular omogen se rotește în virtutea inerției în jurul centrului său de greutate. In momentul inițial, discul a primit viteza unghiulară ω_1 în jurul unei axe oarecare, care formează cu planul discului, unghiul α. Să se determine viteza unghiulară de precesie și unghiul β, dintre axa de precesie și planul discului.

Răspuns: $\omega_2 = \omega_1 \sqrt{1+3 \sin^2 \alpha}$; $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

879. Unui corp rigid, cu un punct fix, care se află la început în repaus, i se aplică un sistem de forțe, al cărui moment principal, în raport cu punctul fix, este $\bar{L}$.

Să se arate, că sub acțiunea acestor forțe corpul începe să se rotească în jurul acelui diametru al elipsoidului de inerție (referitor la punctul fix), la capătul căruia planul tangent la elipsoid, este perpendicular pe vectorul $\bar{L}$.

880. Să se demonstreze, că în cazul când momentul cinetic al unui corp rigid, care se mişcă în jurul unui punct fix, este mereu perpendicular pe accelerația unghiulară instantanee a corpului, energia cinetică a corpului este constantă.

881. Să se arate că în cazul mișcării unui corp în jurul unui punct fix în virtutea inerției: 1) dreapta, după care este îndreptat momentul cinetic al corpului descrie în corp conul

$$\left(1-\frac{G^2}{2TA}\right)x^2+\left(1-\frac{G^2}{2TB}\right)y^2+\left(1-\frac{G^2}{2TC}\right)z^2=0$$

(în care T este energia cinetică a corpului, A, B și C momentele lui principale de inerție, G modulul momentului cinetic). 2) dreapta, perpendiculară pe viteza unghiulară instantanee a corpului descrie conul

$$\frac{x^2}{1-\frac{G^2}{2TA}}+\frac{y^2}{1-\frac{G^2}{2TB}}+\frac{z^2}{1-\frac{G^2}{2TC}}=0$$

(axele x, y, z coincid cu axele principale de inerție ale corpului în punctul fix).

882. Centrul D al unui disc omogen de rază r, care se rostogolește, fără alunecare, pe un plan înclinat, este legat solidar de un punct fix E. Să se arate, că presiunea dinamică în punctul H se exprimă astfel:

$$N=\frac{ab+hr}{arR^4}\left[C\,(ab+hr)\,b-A\,(hb-ar)\,r\right]\Omega^2.$$

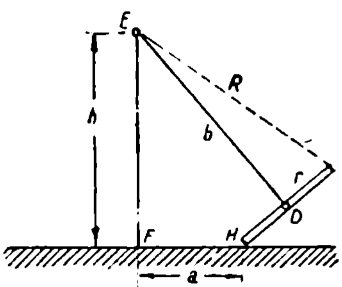
în care Ω este viteza unghiulară, cu care dreapta ED se rotește în jurul axei verticale FE, $b=ED$, iar a și h distanțele arătate în figură, A și C fiind momentele principale de inerție ale discului, referitoare la punctul E; $R^2=b^2+r^2$.

883. Să se demonstreze că, la mișcarea unui corp rigid în jurul unui punct fix, în virtutea inerției, unghiul dintre generatoare și axa axoidului fix nu poate fi mai mare decât $19°28'$, în cazul când $A=B<C$.

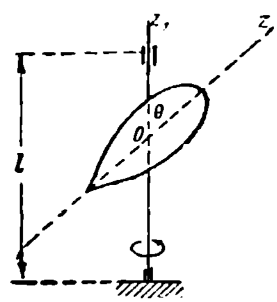
884. Să se deducă formula pentru momentul principal, în raport cu un punct fix al forțelor exterioare capabile să producă o precesie regulată:

$$L_0 = C\,(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)\left(1 + \frac{C-A}{C}\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right),$$

aplicând teorema lui Résal.



La problema 882



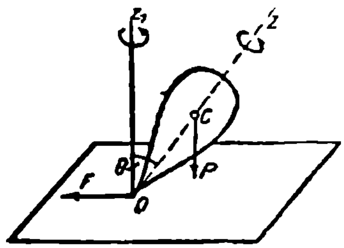
La problema 885

885. Un corp de rotație, cu axa de simetrie Oz, se rotește în jurul unei axe fixe Oz_1, care trece prin centrul de greutate O al corpului. Să se afle presiunile dinamice ale corpului pe lagăre, aplicând teorema lui Résal dacă se cunoaște: viteza unghiulară ω a corpului, unghiul θ dintre axele Oz și Oz_1, momentele de inerție ale corpului C (în raport cu axa Oz) și A (ecvatorial), precum și distanța l dintre lagăre.

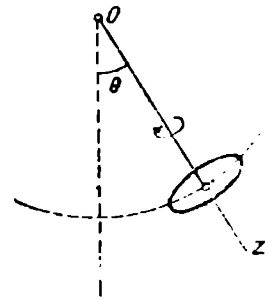
Răspuns: $\frac{C-A}{2l}\,\omega^2 \sin 2\theta$.

886. Un giroscop greu, simetric execută o precesie regulată în jurul unei axe verticale Oz_1. Viteza unghiulară a rotației proprii în jurul axei Oz este foarte mare, în comparație cu viteza unghiulară de precesie. Să se afle o expresie aproximată pentru forța orizontală de reacțiune în punctul fix O, dacă se cunoaşte : greutatea P a corpului, distanţa z_C dela punctul O la centrul de greutate al corpului, momentul lui de inerţie C în raport cu axa z şi unghiul θ dintre axele z_1 şi z.

Răspuns : $F = \dfrac{P^3 z_C^3}{C^2 g \omega^2} \sin \theta$.



La problema 886



La problema 887

887. Un disc omogen, greu se roteşte în jurul axei Oz, cu viteza unghiulară constantă ω şi, în afară de acestea, oscilează, ca un pendul, în jurul unei axe orizontale O, perpendiculară pe planul figurii. Să se demonstreze, că rotaţia proprie a discului nu influenţează asupra perioadei lui de oscilaţie ca pendul.

§ 37. Ciocnire

1. In cazul ciocnirii a două corpuri, care au avut înainte de ciocnire vitezele $\bar{v}_1$, respectiv $\bar{v}_2$ orientate după axa centrelor de greutate ale acestor corpuri perpendiculară pe planul tangent comun în punctul de ciocnire, corpurile îşi schimbă vitezele după ciocnire. Dacă se notează vitezele corpurilor după ciocnire cu $\bar{u}_1$ şi $\bar{u}_2$ atunci

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2, \tag{1}$$

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = - e\,(\bar{v}_1 - \bar{v}_2), \tag{2}$$

în care m_1, m_2 sunt masele corpurilor, care se ciocnesc, iar e este o mărime, care depinde de proprietăţile elastice ale corpurilor, numită coeficient de restabilire (elasticitate). Dacă $e = 0$, ciocnirea se numeşte total neelastică ; dacă $e = 1$, perfect elastică ; în general $0 \leq e \leq 1$. Din ecuaţia (1) şi (2) se deduc expresiile vitezelor după ciocnire

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)(1 + e)}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}} ; \quad \bar{u}_2 = \bar{v}_2 + \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)(1 + e)}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} . \tag{3}$$

La ciocnire se produce o micşorare a energiei cinetice cu valoarea

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)^2. \qquad (4$$

2. Cantitatea de mişcare, dobândită de sistem la ciocnire, este egală cu suma tuturor impulsurilor de ciocnire exterioare, aplicate sistemului, adică

$$\Delta \overline{Q} = M \Delta \overline{v}_C = \sum \overline{S}^{(e)} \qquad (5)$$

M fiind masa întregului sistem.

Modificarea momentului cinetic, faţă de un centru fix, este egală cu suma momentelor impulsurilor de ciocnire exterioare faţă de acelaşi centru, adică

$$\Delta \overline{G}_O = \sum \mathrm{mom}_O \overline{S}^{(e)}. \qquad (6)$$

In cazul unui corp perfect rigid, cu un punct fix, când se proiectează ecuaţia (6) pe axele principale de inerţie (x, y, z) ale corpului în punctul fix, se obţine:

$$\left.\begin{aligned} J_x (\omega_{x1} - \omega_{x0}) &= \sum \mathrm{mom}_x \overline{S}, \\ J_y (\omega_{y1} - \omega_{y0}) &= \sum \mathrm{mom}_y \overline{S}, \\ J_z (\omega_{z1} - \omega_{z0}) &= \sum \mathrm{mom}_z \overline{S}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Dacă un corp rigid are o axă fixă, de exemplu axa z,

$$J_z \cdot (\omega_1 - \omega_0) = \sum \mathrm{mom}_z \overline{S}, \qquad (8)$$

în care ω_0 şi ω_1 sunt vitezele unghiulare ale corpului înainte şi după ciocnire.

888. Un vagonet, care cântăreşte 1600 kg, împreună cu încărcătura, se îndreaptă cu viteza de 1,9 m/s spre un vagonet gol de 1200 kg, care stă nemişcat. Să se determine viteza ambelor vagonete după ciocnire, dacă coeficientul de elasticitate $e=0,5$.

Răspuns: 0,68 m/s şi 1,6 m/s.

889. Un vagonet în greutate de 1600 kg se îndreaptă cu o viteză oarecare spre un alt vagonet, care cântăreşte 1200 kg şi stă nemişcat. După ciocnire ambele vagonete parcurg aceeaşi distanţă de $2^1/_8$ m, primul în timpul $t_1=3,1$ s al doilea în timpul $t_2=1,3$ s. Considerând mişcarea vagonetelor după ciocnire uniformă, să se determine coeficientul de elasticitate.

Răspuns: $e=0,47$.

890. O bilă cade dela o înălţime h pe un plan orizontal nemişcat. După o a doua ciocnire cu planul, bila sărind în sus atinge înălțimea $\frac{h}{2}$. Să se determine coeficientul de elasticitate.

Răspuns : $e = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

891. Un berbece, în greutate de $Q=350$ kg cade dela înălțimea $h = 2$ m. După ultimele $n = 25$ lovituri, un pilon de greutate $q=50$ kg, intră în sol cu $s=5$ cm.

Considerând ciocnirea neelastică, să se determine sarcina maximă, pe care o poate suporta pilonul, fără a ceda.

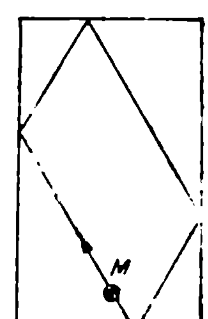
Răspuns : $R = Q + q + n \frac{hQ^2}{s\,(Q+q)} \approx 306$ t.

892. Un ciocan cu abur, de greutate $Q_1=1$ t, lovește o bucată de metal, care cântărește $Q_2 = 15$ t împreună cu nicovala. Să se determine randamentul ciocanului, dacă coeficientul de elasticitate este $e=0{,}6$.

Răspuns : $\eta = (1 - e^2)\frac{Q_2}{Q_1+Q_2} = 0{,}6$.

893. Asupra unui punct material, care are viteza $\bar{v}$, acționează forța de ciocnire $\bar{F}$, în urma căreia viteza punctului devine egală cu $\bar{u}$. Să se arate, că lucrul mecanic al forței $\bar{F}$, în timpul ciocnirii, este $Sv^* \cos \varphi$, în care S este mărimea impulsului, transmis punctului, $\bar{v}^* = \frac{\bar{v}+\bar{u}}{2}$ și φ unghiul dintre vectorii $\bar{S}$ și $\bar{v}^*$.

894. O bilă de biliard, pornind din M, este reflectată de patru ori de margini și revine din nou în M. Considerând ciocnirea perfect elastică, să se demonstreze, că bila descrie astfel un paralelogram, ale cărui laturi sunt paralele cu diagonalele biliardului.



La problema 894

895. Două sfere de 20 respectiv 36 kg, se îndreaptă una spre cealaltă. Viteza primei sfere înainte de ciocnire, este de 8 m/s. Să se determine viteza sferei a doua în cazul când ambele sfere se opresc după ciocnire. Ciocnirea este neelastică.

Răspuns : 4,44 m/s.

896. Energia pierdută prin ciocnirea a două sfere, de mase egale, reprezintă $^1/_3$ din energia inițială a sferelor. Să se arate că în acest caz $e^2 < 1/3$, e fiind coeficientul de elasticitate.

897. Trei sfere perfect elastice, cu masele m_1, m_2 și m_3, se află în repaus, pe aceeași dreaptă. Primei sfere i se imprimă o viteză oarecare v_1, orientată după această dreaptă. Fiind date mărimile m_1 m_3 și v_1, să se determine, care trebue să fie masa m_2 a sferei a doua, pentru ca viteza obținută de sfera a treia după ciocnire, să fie maximă:

Răspuns: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

898. n sfere, cu masele $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, se află în repaus pe aceeași dreaptă. Primei sfere i se imprimă viteza $\bar{v}_1$, orientată după această dreaptă. Să se afle viteza dobândită de ultima sferă, după ciocnire, coeficientul de elasticitate pentru toate sferele fiind e.

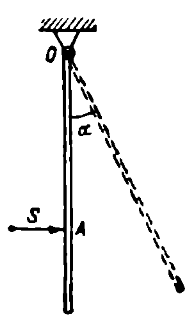
Răspuns: $u_n = (1 + e)^{n-1} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_2}{m_2 + m_3} \cdots \frac{m_{n-1}}{m_{n-1} + m_n} v_1$.

899. O placă plană se mișcă astfel în planul său, încât punctul O al plăcii are viteza $\bar{v}_0$, iar viteza unghiulară de rotație a plăcii, în jurul lui O este ω_0. Raza de inerție a plăcii în raport cu O este k. Distanța dela O la centrul de greutate C al plăcii este l. Unghiul dintre direcția OC și viteza $\bar{v}_0$ este α. Punctul O se fixează brusc. Să se afle viteza unghiulară a plăcii după fixarea acestui punct.

Răspuns: $\omega = \omega_0 + \frac{v_0 l \sin \alpha}{k^2}$.

900. Unei bare drepte, omogene, de greutate P și lungime l, fixată în articulația O și aflată în repaus, i se dă în punctul A (prin lovire) un impuls $\bar{S}$, în direcția perpendiculară pe bară. Ca urmare bara se depărtează de verticală cu unghiul α. Să se afle mărimea S, dacă distanța $OA = h$.

Răspuns: $s = P \frac{l}{h} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2l}{3g}}$.



La problema 900

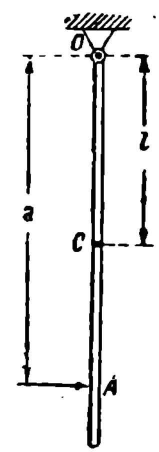
901. O placă plană se află în repaus; raza de inerție a plăcii, în raport cu centrul ei de greutate C, este k. Se aplică plăcii impulsul $\bar{S}$, distanța CK dela linia de lovire la centrul de greutate fiind h. Să se afle poziția centrului instantaneu de rotație al plăcii, imediat după lovire.

Răspuns : Centrul de rotație căutat O se află pe prelungirea liniei KC, distanța CO fiind egală cu $\frac{k^2}{h}$ (punctul K este centrul de lovire al plăcii, în raport cu punctul O).

902. Să se arate în condițiile problemei precedente, că punctele O și K posedă proprietatea de reciprocitate, adică punctul O este centrul de lovire al plăcii în raport cu punctul K.

903. Două puncte materiale, cu mase egale, se mișcă în același plan, cu viteze date, ca mărime și direcție. Să se ***construiască*** centrul instantaneu, în jurul căruia vor începe să se rotească punctele după ce ele se leagă brusc printr'o bară rigidă fără greutate.

904. Trei puncte materiale libere A, B și C, de mase egale, formează, într'un moment dat un triunghi echilateral și se mișcă cu viteze egale, îndreptate respectiv în direcțiile AB, BC și CA. Aceste puncte se leagă brusc prin bare rigide fără greutate. Să se arate, că în acest caz, energia pierdută reprezintă $\frac{3}{4}$ din energia inițială a sistemului.



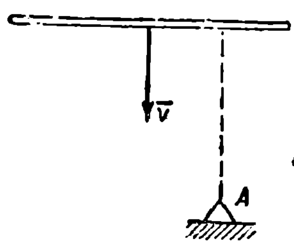
La problema 905

905. O scândură de greutate P, care se poate roti în jurul unei axe orizontale O și se află la început în repaus, este lovită în punctul A de un glonte de greutate p, viteza glontelui, fiind perpendiculară pe planul scândurii. După lovire glontele rămâne în scândură, iar scândura se depărtează de verticală cu unghiul α. Cunoscând unghiul α, să se afle viteza glontelui înainte de lovire, dacă raza de inerție a scândurii, în raport cu axa O, este k, iar distanțele centrului de greutate al scândurii și al punctului A, la această axă, sunt respectiv l și a.

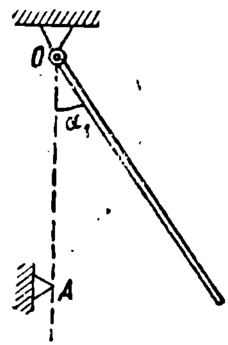
$$\textit{Răspuns}: v = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g\left(\frac{P}{p} \cdot l + a\right)\left(\frac{P}{p} \cdot \frac{k^2}{a^2} + 1\right)}.$$

906. O bară omogenă, de lungime $2l$, are in planul figurii o mișcare de translație de viteză $\bar{v}$, perpendiculară pe bară și se lovește de piedeca A, care se află la distanța $\frac{l}{2}$ de capătul barei. Să se determine viteza unghiulară a barei și viteza centrului de greutate, după ciocnire, considerând ciocnirea neelastică.

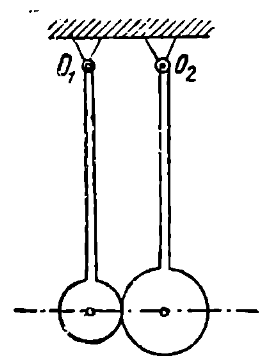
Răspuns : $\omega = \frac{6v}{7l}$; $u = \frac{3}{7}v$.



La problema 906



La problema 907



La problema 908

907. O bară omogenă, care se poate roti în articulația O, se depărtează de verticală cu unghiul α_1 și este lăsată liber fără viteză inițială. După ce se lovește de piedica A, bara se depărtează de verticală cu unghiul $\alpha_2 < \alpha_1$. Să se determine coeficientul de elasticitate.

$$\textit{Răspuns}: \quad e = \frac{\sin\frac{\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}}.$$

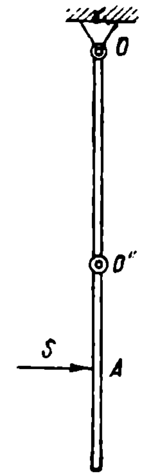
908. Două pendule se pot roti în jurul axelor orizontale O_1 și O_2, perpendiculare pe planul figurii. Momentele de inerție ale pendulelor în raport cu aceste axe sunt J_1 și J_2. Pendulul stâng se depărtează de verticală cu un unghi oarecare și apoi i se dă drumul. In momentul ciocnirii, viteza lui unghiulară este ω_0. Să se determine vitezele unghiulare ale ambelor pendule, după ciocnire, coeficientul de elasticitate fiind e, iar distanțele dela punctele O_1 și O_2 la linia de ciocnire, fiind egale între ele.

$$\textit{Răspuns}: \quad \omega_1 = \frac{J_1 - eJ_2}{J_1 + J_2}\,\omega_0; \quad \omega_1 = \frac{J_1(1+e)}{J_1 + J_2}\,\omega_0.$$

909. O placă de formă oarecare se mişcă în planul său. Intr'un moment dat se fixează un punct oarecare al plăcii. Cum trebue ales punctul pentru ca placa să se oprească?

Răspuns: Punctul căutat coincide cu centrul de ciocnire al plăcii, în raport cu centrul instantaneu, în jurul căruia s'a rotit placa, în preajma fixării punctului.

910. O bară dreaptă, omogenă, de lungime $2l$ şi masă M, se poate roti într'un plan vertical în jurul articulaţiei O. La capătul ei inferior este fixată o a doua bară identică prin articulaţia O'. Când ambele bare se află în repaus, se transmite barei inferioare un impuls $\overline{S}$, aplicat în mijlocul barei A şi orientat perpendicular pe bară. Să se determine vitezele unghiulare ale ambelor bare şi viteza punctului A după ciocnire.



La problema 910

Răspuns: $\omega_1 = \frac{3}{14}\cdot\frac{S}{Ml}$; $\omega_2 = \frac{3}{7}\cdot\frac{S}{Ml}$; $v_A = \frac{6}{7}\cdot\frac{S}{M}$.

§ 38. Ecuaţiile lui Lagrange (de ordinul al doilea)

Fie determinată poziţia unui sistem prin coordonatele independente q_1, $q_2, \ldots, q_n$; dacă aceste coordonate sunt cunoscute ca funcţii de timp, mişcarea sistemului este perfect determinată.

Trecând dela coordonatele carteziene la coordonatele independente q_1, $q_2, \ldots, q_n$, energia cinetică a sistemului

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)$$

se exprimă ca o funcţie omogenă de gradul al doilea al vitezelor generalizate $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, dacă legăturile sistemului nu depind în mod explicit de timp.

Ecuaţiile de mişcare ale sistemului, în coordonate independente, au forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

şi reprezintă un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul al doilea, în raport cu funcţiile necunoscute $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Integrând sistemul acesta, se găsesc coordonatele independente $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ca funcţii ale timpului t şi a $2n$ constante arbitrare care se determină prin condiţiile iniţiale. Astfel pentru a scrie ecuaţiile lui Lagrange (1) este mai întâi necesar să se exprime energia cinetică a sistemului T în funcţie de coordonatele $q_1, q_2, \ldots q_n$ şi de derivatele lor în raport cu timpul, apoi să se afle derivatele parțiale $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ (*impulsurile generalizate*) și $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ și să se determine *forțele generalizate* Q_i care acționează asupra sistemului.

Pentru a determina forța generalizată Q_i, corespunzătoare coordonatei q_i, trebue imprimat sistemului o deplasare elementară, prin care să se modifice *numai* coordonata q_i și să se calculeze suma lucrului mecanic elementar al tuturor forțelor active δA, care acționează asupra sistemului la această deplasare.

In acest caz

$$\Sigma\, \delta A = Q_i \delta q_i \tag{2}$$

de unde se determină Q_i.

Când forțele active, care acționează asupra sistemului, au potențialul comun $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$,

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i, = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

și ecuațiile (1) capătă forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Dacă se introduce funcția

$$L = T + U,$$

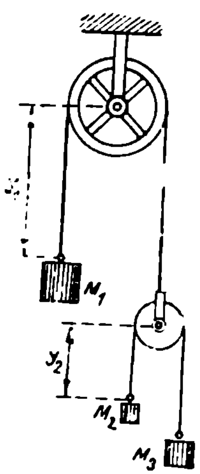
care se numește funcția lui Lagrange sau potențial cinetic, ecuațiile (4) pot fi scrise în forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Funcția L a lui Lagrange, cum se vede din expresia ei, reprezintă diferența dintre energia cinetică și cea potențială a sistemului și depinde de coordonatele $q_1, q_2, \ldots, q_n$ și de derivatele lor în raport cu timpul $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ (vitezele generalizate).

911. Peste un scripete, a cărui masă poate fi neglijată trece un fir. La un capăt al firului atârnă sarcina M_1, de masă m_1, iar la capătul celălalt un scripete mic (fără greutate), peste care trece alt fir, care poartă la capetele sale sarcinile M_2 și M_3 de mase m_2 respectiv m_3. Să se afle mișcarea acestui sistem, dacă în momentul inițial

$$y_1 = y_{10},\ y_2 = y_{20},\ \dot{y}_1 = \dot{y}_{10} \text{ și } \dot{y}_2 = \dot{y}_{20}.$$



La problema 911

Răspuns:

$$y_1 = y_{10} + \dot{y}_{10} t + \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \cdot \frac{gt^2}{2},$$

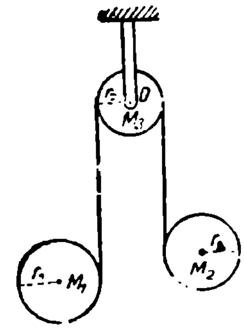
$$y_2 = y_{20} + \dot{y}_{20} t + \frac{2m_1(m_2 - m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \cdot \frac{gt^2}{2}.$$

912. Două șaibe M_1 și M_2, de mase m_1 și m_2, cu raze r_1 și r_2, sunt înfășurate de un fir, care trece peste un scripete M_3, de masă m_3 cu raza r_3, care se rotește fără frecare, în jurul unei axe fixe O. Să se afle accelerația unghiulară $\ddot{\varphi}_3$ a scripetelui și accelerațiile centrelor celor două șaibe, presupunând, că firul nu alunecă pe scripete și că centrele șaibelor se mișcă pe drepte verticale (φ_3 este unghiul de rotație al scripetelui M_3).

Răspuns : $\ddot{\varphi}_3 = \dfrac{(m_1 - m_2)\, g}{\left(m_1 + m_2 + \dfrac{3}{2} m_3\right) r_3}$;

$$w_1 = \frac{3\,(m_1 + m_3) + m_2}{3\left(m_1 + m_2 + \dfrac{3}{2} m_3\right)}\, g \,;$$

$$w_2 = \frac{3\,(m_2 + m_3) + m_1}{3\left(m_1 + m_2 + \dfrac{3}{2} m_3\right)}\, g .$$



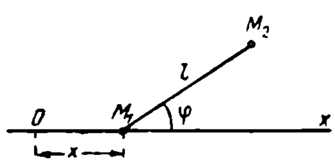
La problema 912

913. Un punct material liber se mișcă sub acțiunea unei forțe oarecare. Să se arate că forțele generalizate, în coordonate sferice, sunt : 1) proiecția forței active pe raza vectoare ; 2) momentul acestei forțe în raport cu axa z și 3) momentul forței active în raport cu dreapta, care trece prin origine și este perpendiculară pe planul meridian, în care se află punctul mobil.

914. Aplicând metoda lui Lagrange, să se scrie ecuațiile de mișcare ale unui punct liber în coordonate cilindrice.

Răspuns : $m\,(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r$; $m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_p$; $m\ddot{z} = F_z$. F_r fiind proiecția forței active pe raza vectoare $\bar{r}$, F_p, proiecția forței pe direcția perpendiculară pe $\bar{r}$ și F_z proiecția forței pe axa z.

915. Punctul M_1, de masă m_1 este silit să alunece, fără frecare, pe o dreaptă orizontală fixă Ox ; punctul M_2 de masă m_2 este legat de primul punct printr'o bară de lungime l, a cărei masă se poate neglija și se poate mișca numai într'un plan vertical, care trece prin această dreaptă. Să se afle funcția L a lui Lagrange pentru acest sistem de două puncte, dacă asupra lor acționează numai forța gravității.



La problema 915

Răspuns : $L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_2^{\,2} +$

$$+ \frac{m_2}{2}(l\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi)l - m_2 gl\sin\varphi,$$

în care x este abscisa punctului M_1, iar φ unghiul dintre dreapta $M_1\ M_2$ și axa x.

916. Să se scrie funcția lui Lagrange (potențialul cinetic) pentru: 1) un pendul fizic; 2) o sfârlează simetrică, care se sprijină pe un reazim fix și se află numai sub acțiunea forței gravitații, luând drept parametri: unghiul φ de rotație proprie a sfârlezei (rotația în jurul axei de simetrie), unghiul de nutație θ (unghiul dintre axa de simetrie a sfârlezei și verticală) și unghiul de precesie ψ. (Punctul de contact O dintre sfârlează și reazim se află pe axa de simetrie a sfârlezei și rămâne fix; 3) pentru două puncte materiale libere M_1 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ și M_2, $(x_2\, y_2,\ z_2)$, care se atrag după legea lui Newton.

Răspuns : 1) $L = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 + Mga\cos\varphi$, φ fiind unghiul dintre pendul și poziția de echilibru, J momentul de inerție al pendulului în raport cu axa de rotație și a distanța dela centrul de greutate al pendulului la această axă.

$$2)\ L = \frac{1}{2}[J(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + J_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta]^2 - Mga\cos\theta,$$

J_z fiind momentul de inerție al sfârlezei, în raport cu axa de simetrie; J momentul lui de inerție în raport cu o axă, care trece prin punctul fix O și este perpendiculară pe axa de simetrie și a distanța dela centrul de greutate al sfârlezei la punctul O.

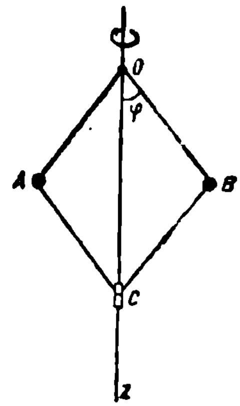
$$3)\ L = \frac{1}{2}\Big[m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) +$$

$$+ \frac{k\, m_1\, m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}.$$

917. Să se rezolve problemele 721, 725, 816, 852, 871 prin metoda lui Lagrange.

918. Să se deducă din ecuațiile lui Lagrange ecuațiile de mișcare ale unei plăci plane, care se mișcă în planul său, sub acțiunea unui sistem de forțe, așezate în același plan.

919. Un regulator Watt constă din patru bare identice OA, OB, AC și BC, fiecare de lungime l, două bile A și B, fiecare de masă m și culisa C, de masă M, care poate aluneca pe o axă verticală Oz. Legăturile barelor în punctele O, A, B și C sunt articulate. Punctul O este fix. Întreg sistemul se poate roti fără frecare, în jurul axei fixe Oz.



La problema 919

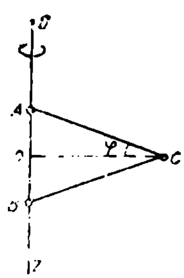
Neglijând masa barelor și luând drept parametri unghiul $\varphi = \sphericalangle BOC$ și unghiul de rotație θ al sistemului, în jurul axei Oz, să se scrie ecuațiile lui Lagrange și să se obțină din ele integralele ariilor și energiei.

Răspuns :

1) $l^2\left[(2M\sin^2\varphi+m)\dot{\varphi}^2+m\sin m^2\varphi\,\dot{\theta}^2\right]=$ $=2l(M+m)g\cos\varphi+h$ (integrala energiei).

2) $2ml^2\sin^2\varphi\theta=C$ (integrala ariilor).

920. Două bare identice AC și BC, de lungime l și masă m fiecare, pot aluneca, fără frecare, cu capetele A și B pe o dreaptă fixă verticală Oz și se pot roti în jurul acestei drepte; în punctul C ele sunt legate printr'o articulație. Să se afle mișcarea acestui sistem, luând drept parametri unghiul $\varphi=\sphericalangle ACD$, unghiul de rotație θ al sistemului în jurul axei Oz și distanța $z = OD$, D fiind mijlocul segmentului AB. In momentul inițial


La problema 920

$$\varphi=\varphi_0,\ \theta=0,\ z=z_0,\ \dot{\varphi}=0,\ \dot{\theta}=\dot{\theta}_0 \text{ și } \dot{z}=0.$$

Răspuns : $\sin\varphi = \sin\varphi_0\cdot\cos(\dot{\theta}_0\cos\varphi_0 t)$;

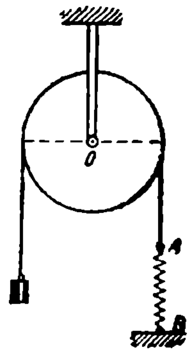
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\cos\varphi_0}\operatorname{tg}(\dot{\theta}_0\cos\varphi_0 t);\ z = z_0 + \frac{gt^2}{2}.$$

921. Condițiile problemei 919, cu deosebire că regulatorul se rotește în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă ω. Să se afle, în ce condiție este posibil echilibrul relativ al regulatorului și să se determine perioada oscilațiilor mici în jurul poziției de echilibru.

Răspuns : $T = \dfrac{2\pi}{\omega\sin\varphi_0}\sqrt{1+2\dfrac{M}{m}\sin^2\varphi_0}$, φ_0 fiind unghiul corespunzător poziției de echilibru relativ al regulatorului; echilibrul este posibil cu condiția ca

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\frac{M}{m}\right)}.$$

922. Peste un scripete, care se rotește în jurul axei orizontale O, trece un fir inextensibil, care poartă la un capăt o sarcină de masă m; capătul al doilea A al firului este prins de un arc vertical, a cărui extremitate B este fixată. Forța de tensiune a arcului este proporțională cu lungirea lui, factorul de proporționalitate fiind c. Să se determine perioada oscilațiilor sarcinii, știind că masa scripetelui, redusă la circumferința lui, este egală cu M și că firul nu poate aluneca pe scripete.



La problema 922

Răspuns: $T = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{c}}$.

923. Să se deducă, prin metoda lui Lagrange, a treia ecuație a lui Euler pentru un corp rigid care se rotește în jurul unui punct fix: $C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = L_z$ luând ca parametru unghiul φ al rotației proprii a corpului (în jurul axei z).

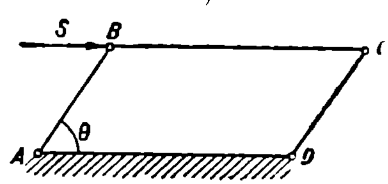
Indicație. Trebue folosită expresia pentru energia cinetică a corpului $T = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2)$ și formulele cinematice, care exprimă pe ω_x, ω_y și ω_z în funcție de unghiurile lui Euler și derivatele lor în raport cu timpul.

924. Momentele de inerție a două roți dințate angrenate cu razele r_1 și r_2 în raport cu axele de rotație, sunt egale cu J_1 și J_2. Primei roți aflate în repaus i se aplică cuplul $\overline{\mathfrak{M}}$ îndreptat dealungul axei de rotație. Aplicând ecuația lui Lagrange, să se afle vitezele unghiulare ale celor două roți.

Indicație. Pentru rezolvarea problemei trebue să se înmulțească ecuația lui Lagrange cu dt și să se integreze între limitele 0 și τ, τ fiind durata acțiunii cuplului aplicat.

Răspuns: $\omega_1 = \frac{\mathfrak{M} \cdot r_2^2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$; $\omega_2 = \frac{\mathfrak{M} \cdot r_1 r_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$.

925. Intr'un paralelogram articulat $ABCD$, barele AB și DC sunt fiecare de masă m_1, bara BC de masă m_2. Unghiul BAD este egal cu θ. Bara AD este fixă. In punctul B se aplică paralelogramului impulsul $\overline{S}$, îndreptat în direcția liniei BC. Să se afle viteza punctului B și energia cinetică dobândită în sistemul întreg.



La problema 925

Răspuns: 1) $v_B = \dfrac{S \sin\theta}{\dfrac{2}{3} m_1 + m_2}$;

$$2)\ T = \frac{S^2 \sin^2\theta}{2\left(\dfrac{2}{3}m_1 + m_2\right)}.$$

926. Un corp, de masă M, se poate mişca, fără frecare, într'o piuliţă fixă cu filet spre dreapta, având pasul h. Se aplică corpului un impuls $\overline{S}$. Impulsul şi momentul lui $\overline{\mathfrak{M}}$ sunt orientate dealungul axei şurubului, în sensuri opuse. Să se determine viteza unghiulară dobândită de corp, dacă raza de inerţie a corpului, în raport cu axa şurubului, este k.

Răspuns: $\omega = \dfrac{Sp + \mathfrak{M}}{M(k^2 + p^2)}$, în care $p = \dfrac{h}{2\pi}$ (parametrul şurubului).

927. Un sistem cu un grad de libertate se mişcă într'un câmp potenţial de forţe. Să se deducă ecuaţia mişcării acestui sistem în forma Lagrange din principiul conservării energiei.

928. Pentru un sistem cu un grad de libertate, a cărui poziţie este determinată de parametrul q, expresiile energiilor cinetice şi potenţiale sunt de forma $T = \dfrac{1}{2} A\dot{q}^2$, unde $A = f_1(q)$ şi $\pi = f_2(q)$. Să se arate că ecuaţia mişcării sistemului poate fi scrisă în forma următoare:

$$f_1(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} f_1'(q)\cdot\dot{q}^2 + f_2' = f_2'(q) = 0.$$

Să se aplice această ecuaţie pentru cazul mişcării unui punct greu pe o cicloidă, luând ca parametru arcul s al cicloidei şi să se arate că pendulul cicloidal este perfect isocron.

929. Pentru un sistem dat, cu două grade de libertate, expresiile pentru energiile cinetică şi potenţială sunt:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{a + b q_2^2} + \dot{q}_2^2\right), \qquad \pi = a_1 + b_1 q_2^2,$$

în care a, b, a_1 şi b_1 sunt constante pozitive. Să se afle mişcarea acestui sistem.

Răspuns:

$$q_2 = A \sin(kt + \alpha); \quad q_1 = c_1\left(a + \frac{bA^2}{2}\right)t - \frac{bcA^2}{4k}\sin 2(kt + \alpha) + C,$$

in care $k = \sqrt{a\,c_1^2 + 2\,b_1}$ și A, α, c_1 și C sunt constante, care se determină din condițiile inițiale ale mișcării.

930. Pentru un sistem dat, cu două grade de libertate, expresiile pentru energia cinetică și potențială sunt:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{a + b\,q_2} + q_2^2\dot{q}_2^2\right); \qquad \pi = a_1 + b_1\,q_2,$$

in care a, b, a_1 și b_1 sunt constante. Să se arate, că dependența dintre q_2 și t poate fi exprimată prin relația:

$$(q_2 - k)\ (q_2 + 2\,k)^2 = h\,(t - t_0)^2,$$

in care k, h și t_0 sunt constante oarecare.

931. Să se arate că, în cazul când funcția lui Lagrange (potențialul cinetic) are forma $L = L_1 + \mathrm{F}\,(t)$, în care L_1 *nu depinde explicit de timp*, are loc integrala următoare:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i = L_1 + \text{const.}$$

932. Să se demonstreze că, in cazul când $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \psi_i\ (i = 1, 2, \ldots, k)$, in care Φ și ψ_i sunt funcții ale variabilelor q_i, $\dot{q}_i$ și t, are loc următoarea relație:

$$d\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \Phi\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,dt = \sum_{i=1}^{k} \psi_i\, d\,q_i.$$

§ 39. Oscilațiile mici ale unui sistem în jurul poziției de echilibru stabil

1. Când un sistem mecanic se află în echilibru sub acțiunea unor forțe, care au funcția potențială $U\,(q_1, q_2, \ldots q_n)$ și când pentru o configurație oarecare U are un maxim (și prin urmare, energia potențială $V = -U$ un minim), sistemul in această configurație se află în stare de echilibru stabil. Pentru studierea oscilațiilor mici ale sistemului, în jurul poziției de echilibru stabil, se presupune, că pentru această poziție $U = 0$ și $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ și că, în afară de aceasta, în apropierea acestei poziții, coordonatele q_i și derivatele lor $\dot{q}_i$ în raport cu timpul sunt suficient de mici (mișcări mici); desvoltând funcția U în serie MacLaurin și ținând seama, că pentru poziția de echilibru

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

se obține

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k + \text{termeni de ordin superior.}$$

Pentru mișcările mici se reține numai primul termen al desvoltării

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k, \tag{1}$$

U fiind precis o formă pătrată negativă (întrucât descompunerea s'a făcut în vecinătatea maximului U). Descompunând tot așa energia cinetică

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

și limitând-o la termenii de ordinul al doilea, se obține:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{2}$$

unde a_{ik} este valoarea lui A_{ik} pentru $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$.

Se obțin ecuațiile mișcărilor mici, înlocuind în ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

valorile pentru U și T din (1) și (2), și anume

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Sistemul (3) se integrează prin substituția

$$q_k = \alpha_k \sin(\omega t + \varepsilon)\ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Inlocuind (4) în sistemul (3), se obține

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(-a_{ik}\,\omega^2 + c_{ik}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Eliminând α_k din sistemul de ecuații liniare omogene (3), se obține pentru determinarea lui ω^2 ecuația de gradul n sub formă de determinant (ecuația frecvențelor)

$$\begin{vmatrix} -a_{11}\,\omega^2 + c_{11}, & -a_{12}\,\omega^2 + c_{12}, \ldots, & -a_{1n}\,\omega^2 + c_{1n} \\ -a_{21}\,\omega^2 + c_{21}, & -a_{22}\,\omega^2 + c_{22}, \ldots, & -a_{2n}\,\omega^2 + c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1}\,\omega^2 + c_{n1}, & -a_{n2}\,\omega^2 + c_{n2}, \ldots, & -a_{nn}\,\omega^2 + c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Se poate dovedi că, în ipotezele făcute, toate rădăcinile ecuației (6) vor fi pozitive și, prin urmare, toți ω reali; în felul acesta, mișcările mici ale sistemului vor reprezenta o suprapunere de oscilații armonice cu perioadele

$$\frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\omega_n}.$$

2. *Cazuri particulare.* a) Fie un sistem cu un grad de libertate. Energia cinetică a unui astfel de sistem are forma

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^2 f(q),$$

în care q este coordonata sistemului. Pentru poziţia de echilibru se pune $q = 0$. Desvoltând pe $f(q)$ în serie Mac-Laurin şi limitând la termenul de ordinul al doilea, se obţine

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2$$

în care $a = f(0)$ şi, desigur, $f(0) > 0$. Tot astfel se descompune funcţia $U(q)$

$$U(q) = U(0) + qU'(0) + \frac{1}{2} U''(0)\, q^2 + \ldots \approx -\frac{1}{2} cq^2$$

în care

$$-c = U''(0),$$

întrucât

$$U(0) = U'(0) = 0.$$

Inlocuind în ecuaţia Lagrange, se găseşte

$$a\ddot{q} + cq = 0,$$

de unde

$$q = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\, t + \varepsilon\right),$$

adică va avea loc o oscilaţie armonică, cu perioada $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}$.

b) Dacă sistemul are două grade de libertate, energia cinetică a sistemului are forma

$$T = \frac{1}{2}\left(A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{22}\dot{q}_2^2\right),$$

coeficienţii A_{11}, A_{12}, A_{22} fiind funcţii ale coordonatelor q_1 şi q_2. Descompunând aceşti coeficienţi în serie Mac-Laurin şi însemnând valorile lor pentru $q_1 = q_2 = 0$ (adică primii termeni ai desvoltării) cu a_{11}, a_{12}, a_{22}, obţinem pentru mişcări mici

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right), \tag{7}$$

în timp ce

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0,$$

deoarece T este pozitiv.

Descompunând funcţia potenţială $U(q_1, q_2)$ se obţine

$$U(q_1, q_2) = U(0, 0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right] + \text{termenii de ordin superior.}$$

Ținând seama, că pentru poziția de echilibru

$$U(0,0) = \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 = 0$$

și notând valorile derivatelor a doua, pentru $q_1 = q_2 = 0$, respectiv cu c_{11}, c_{12} și c_{22}, se obține pentru mișcările mici expresia

$$U = -\frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right), \tag{8}$$

în care $c_{11} > 0$, $c_{22} > 0$, $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0$, întrucât în poziția de echilibru stabil, U are un maximum. Inlocuind valorile T și U din (7) și (8) în ecuațiile lui Lagrange, se găsește

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Pentru integrarea acestui sistem se pune

$$q_1 = \alpha_1 \sin(\omega t + \varepsilon), \quad q_2 = \alpha_2 \sin(\omega t + \varepsilon)$$

și înlocuind în (9), se obține

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1(-a_{11}\omega^2 + c_{11}) + \alpha_2(-a_{12}\omega^2 + c_{12}) = 0, \\ \alpha_2(-a_{21}\omega^2 + c_{21}) + \alpha_2(-a_{22}\omega^2 \quad c_{22}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Eliminând pe α_1 și α_2 din sistemul (10), se găsește ecuația

$$\begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11}, & -q_{12}\omega^2 + c_{12} \\ -a_{21}\omega^2 + c_{21}, & -a_{22}\omega^2 \quad c_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

sau

$$(a_{11}\omega^2 - c_{11})(a_{22}\omega^2 - c_{22}) - (a_{12}\omega^2 - c_{12})^2 = 0.$$

Aceasta este o ecuație de gradul al doilea, în raport cu ω^2 și va da pentru ω^2 două valori reale și pozitive; prin urmare, pentru frecvențele ω rezultă patru valori $\pm\omega_1$ și $\pm\omega_2$.

Astfel, mișcările mici ale sistemului reprezintă suprapunerea a două oscilații armonice simple, cu perioadele

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \text{ și } T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

933. Punctul M_1 de masă m_1 este legat printr'un fir de lungime l_1 de un punct fix O. De punctul M_1 este legat un al doilea punct M_2 de masă m_2, printr'un fir de lungime l_2. Să se afle ecuațiile oscilațiilor mici ale sistemului într'un plan vertical, luând ca parametri unghiurile θ_1 și θ_2 dintre fire și verticală. Să se afle deasemenea perioadele oscilațiilor normale ale sistemului în cazul particular, când $l_2 = l_1$ și $m_2 = m_1$.

Răspuns :

1) $\theta_1 = C_1(g - l_2 n_1^2) \sin(n_1 t + \alpha_1) + C_2(g - l_2 n_2^2) \sin(n_2 t + \alpha_2)$;

$\theta_2 = C_1 l_1 n_1^2 \sin(n_1 t + \alpha_1) + C_2 l_1 n_2^2 \sin(n_2 t + \alpha_2)$,

în care n_1 și n_2 sunt rădăcinile pozitive ale ecuației

$$n^4 - \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) g n^2 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g^2}{l_1 l_2} = 0.$$

2) $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g(2+\sqrt{2})}}$; $\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g(2-\sqrt{2})}}$.

934. O bară subțire omogenă OA, de lungime l_1 și masa m_1, se poate roti într'un plan vertical, în jurul punctului fix O. La capătul liber A al barei este legat, printr'o articulație o altă bară AB de lungime l_2 și masă m_2. Să se afle dependența dintre unghiurile θ_1 și θ_2 formate de bare cu verticala și timpul t la oscilațiile mici ale sistemului în planul vertical.

Răspuns : $\theta_1 = C_1\left(g - \frac{2}{3} l_2 n_1^2\right) \sin(n_1 t + \alpha_1) +$

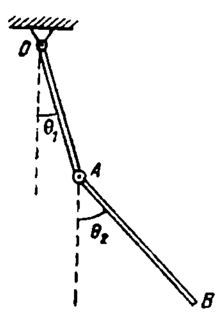
$$+ C_2\left(g - \frac{2}{3} l_2 n_2^2\right) \sin(n_2 t + \alpha_2),$$

$$\theta_2 = C_1 l_1 n_1^2 \sin(n_1 t + \alpha_1) + C_2 l_1 n_2^2 \sin(n_2 t + \alpha_2),$$

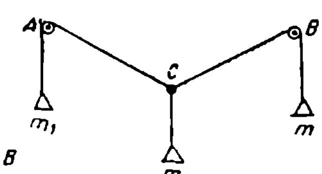
n_1 și n_2 fiind rădăcinile pozitive ale ecuației

$$(4 + 3\mu)\, n^4 - 6g\left(\frac{1 + 3\mu}{l_2} + \frac{1 + 2\mu}{l_1}\right) n^2 + 9g^2 \frac{1 + 2\mu}{l_1 l_2} = 0$$

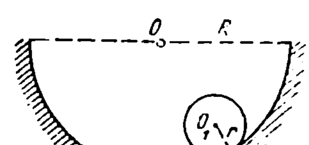
în care $\mu = \dfrac{m_2}{m_1}$.



La problema 934



La problema 935



La problema 936

935. Trei fire sunt legate în punctul C : două din ele trec peste scripeții mici A și B și poartă la extremități sarcini egale de masă m_1; la extremitatea firului al treilea este suspendată o sarcină de masă m_2 cu condiția $m_2 < 2m_1$. Să se afle perioada oscilațiilor mici ale sistemului, în jurul poziției de echilibru, dacă $CA = CB = a$.

Răspuns: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{g(2\mu-1)\sin\alpha_0}}$, în care $\mu = \dfrac{m_1}{m_2}$ și α_0 unghiul dintre firul AC și verticală, în poziția de echilibru a sistemului.

936. O sferă omogenă plină de rază r, se poate rostogoli fără alunecare, pe suprafața interioară a unui cilindru fix de rază R, cu axa orizontală. Să se afle lungimea pendulului matematic, a cărui perioadă a oscilațiilor este egală cu perioada oscilațiilor mici ale sferei, în jurul poziției de echilibru.

Răspuns: $l = 1,4\ (R-r)$.

937. In condițiile problemei precedente să se afle perioada oscilațiilor mici ale sferei, presupunând că nu există frecare între sferă și cilindru.

Răspuns: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R-r}{g}}$.

938. Un cilindru circular, neomogen, de rază r, se poate rostogoli, fără alunecare, pe un plan orizontal fix. Distanța dela centrul de greutate al cilindrului la axa geometrică este a. Raza de inerție a cilindrului în raport cu o axă, care trece prin centrul de greutate, paralelă cu generatoarele cilindrului, este k. Să se afle perioada oscilațiilor mici ale cilindrului, în jurul poziției de echilibru stabil.

Răspuns: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(r-a)^2 + k^2}{ag}}$.

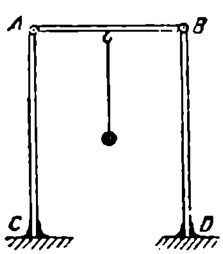
939. O bară subțire, orizontală, omogenă AB, de lungime $2a$, este suspendată la capete de două fire verticale de aceeași lungime l (suspensiune bifilară). Să se determine perioada oscilațiilor, pe care le va executa bara, dacă este răsucită cu un unghi mic, în jurul unei axe verticale, care trece prin mijlocul ei și apoi i se dă drumul.

Răspuns: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{3g}}$.

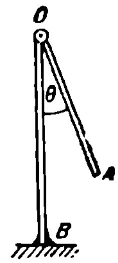
940. Două bare identice AC și BD, de lungime l și masă m_1 fiecare, se pot roti într'un plan vertical în jurul punctelor A și B, situate pe aceeași orizontală. Ele sunt legate prin articulații cu o a treia bară orizontală CD, de masă m_2 și de lungime egală cu distanța AB. Să se afle perioada oscilațiilor mici ale sistemului în jurul poziției de echilibru.

$$\textit{Răspuns}: \; T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3}\mu}{1+\mu}}, \text{ unde } \mu = \frac{m_1}{m_2}.$$

941. O grindă orizontală AB, de masă M, este fixată la capete de doi stâlpi verticali CA și DB. De mijlocul grinzii este atârnată o sarcină de masă m printr'un fir de lungime l. In cazul unei deplasări mici a capătului superior al stâlpului, reacțiunea orizontală a stâlpului deplasat acționând asupra grinzii, este proporțională cu această înclinare, factorul de proporționalitate fiind c. Să se arate, că frecvențele celor două oscilații normale ale sistemului, în jurul poziției de echilibru, se determină din ecuația



La problema 941



La problema 942

$$Mln^4 - [(M+m)g + 2cl]n^2 + 2cg = 0.$$

942. O bară dreaptă, omogenă OA, de lungime l și greutate P, se poate roti în articulația O, în jurul capătului superior al unui stâlp vertical elastic OB, al cărui capăt inferior B este fixat. In cazul unei deplasări mici a capătului superior al stâlpului, forța elastică orizontală, care acționează asupra barei este proporțională cu această deplasare, factorul de proporționalitate fiind c. Să se afle oscilațiile mici ale barei în jurul poziției de echilibru, luând ca parametri înclinarea orizontală x a capătului superior al stâlpului și unghiul θ dintre bară și verticală. In momentul inițial $x = 0$, $\theta = \theta_0$, $\dot{x} = \dot{\theta} = 0$.

$$\textit{Răspuns}: \; x = \frac{\theta_0 \left(g - \frac{2}{3} ln_1^2\right)\left(g - \frac{2}{3} ln_2^2\right)}{g(n_1^2 - n_2^2)} [\cos(n_1 t) - \cos(n_2 t)],$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{g(n_1^2 - n_2^2)} \left[\left(g - \frac{2}{3} ln_2^2\right) n_1^2 \cos(n_1 t) - \left(g - \frac{2}{3} ln_1^2\right) n_2^2 \cos(n_2 t)\right],$$

n_1 și n_2 fiind rădăcinile pozitive ale ecuației

$$n^4 - 2g\left(\frac{2c}{P} + \frac{3}{l}\right)n^2 + 6\frac{cg^2}{Pl} = 0.$$

943. In condițiile problemei precedente să se arate, că pentru o valoare mare a factorului c, perioadele a două oscilații normale se exprimă cu aproximație $\left(\right.$până la mărimi de ordinul $\left.\frac{1}{c}\right)$ astfel:

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{P}{cg}},\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}\left(1 + \frac{9P}{16cl}\right).$$

944. Pentru oscilațiile mici ale unui sistem cu trei grade de libertate, a cărui poziție este determinată cu ajutorul parametrilor q_1, q_2, q_3, expresiile pentru energia cinetică și pentru funcția de putere sunt:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2);\quad U = q_1q_2 + q_2q_3 - 2q_1^2 - \frac{5}{2}q_2^2 - 2q_3^2.$$

Să se afle mișcarea sistemului, știind, că în momentul inițial

$$q_1 = q_{10},\ q_2 = q_{20},\ q_3 = q_{30} \text{ și } \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0.$$

Răspuns:

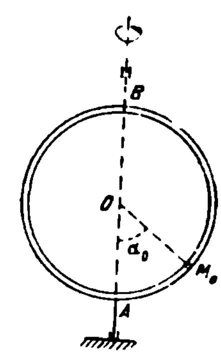
$$q_1 = \frac{1}{6}\left[3(q_{10} - q_{30})\cos 2t + (q_{10} - 2q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{6}\,t + \right.$$
$$\left. + 2(q_{10} + q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{3}\,t\right],$$

$$q_2 = \frac{1}{3}\left[-(q_{10} - 2q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{6}\,t + (q_{10} + q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{3}\,t\right],$$

$$q_3 = \frac{1}{6}\left[-3(q_{10} - q_{30})\cos 2t + (q_{10} - 2q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{6}\,t + \right.$$
$$\left. + 2(q_{10} + q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{3}\,t\right].$$

945. Un tub, în formă de cerc cu raza a, se poate roti fără frecare, în jurul unui diametru vertical AB. Momentul de inerție al tubului, în raport cu diametrul, este J.

In interiorul tubului se poate deplasa, fără frecare, un punct material de masă m. Când tubul se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0, punctul se află în poziția de echilibru relativ M_0, $\sphericalangle AOM_0$ fiind egal cu α_0. Să se afle perioada oscilațiilor mici în jurul poziției M_0, pe care le va executa punctul, dacă i se transmite o viteză relativă mică, orientată după tangenta la tub.



La problema 945

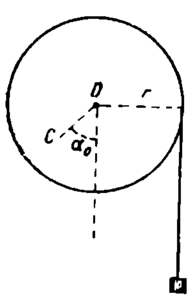
Răspuns : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0 \sin \alpha_0} \sqrt{\dfrac{J + ma^2 \sin^2 \alpha_0}{J + ma^2 (1 - 3 \cos^2 \alpha_0)}}.$

946. Un tub drept OA se poate roti, fără frecare, într'un plan orizontal, în jurul unei axe verticale fixe, care trece prin punctul O. In tub se află o bilă de masă m, legată printr'un arc de punctul O. Forța elastică a arcului este proporțională cu alungirea ei, factorul de proporționalitate fiind c. Când tubul se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0, bila se află în poziția de echilibru relativ M_0. Momentul de inerție al tubului, în raport cu axa de rotație, este J. Să se afle perioada oscilațiilor mici, pe care le va executa bila în jurul poziției M_0, dacă i se imprimă o viteză relativă mică dealungul tubului.

Răspuns : $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J + mr_0^2}{J\,(k^2 - \omega_0^2) + mr_0^2(k^2 + 3\omega_0^2)}}$, în care

$k^2 = \dfrac{c}{m}$ și $r_0 = OM_0$, cu condiția $k > \omega_0$.

947. O șaibă, de rază r și masă M, se rotește în jurul unei axe orizontale O. Șaiba este înfășurată de un fir, care poartă la capătul liber o sarcină de masă m. Distanța dela centrul de greutate C al șaibei la axa O este a, astfel că $\dfrac{a}{r} > \dfrac{m}{M}$. Momentul de inerție al șaibei în raport cu axa de rotație este J_0. Să se afle perioada oscilațiilor mici ale sistemului, în jurul poziției de echilibru.



La problema 947

Răspuns : $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J_0 + mr^2}{Mga \cos \alpha_0}}$,

în care α_0 este unghiul dintre dreapta OC și verticala, care corespunde poziției de echilibru a sistemului.

§ 40. Momente de inerție

1. Se numește moment de inerție al unui sistem de puncte materiale în **raport cu o axă, suma produselor** dintre masa m a fiecărui punct și pătratul **distanței** r **a punctului la** această axă, adică mărimea $\Sigma\, m r^2$ (moment de inerție axial).

Moment de inerție în raport cu un pol se numește suma produselor dintre masa fiecărui punct și pătratul distanței lui de pol (moment de inerție polar).

Pentru determinarea momentelor de inerţie ale corpurilor pline, corpul se descompune în volume elementare; în acest caz masa elementului unui corp va fi egală cu ρdv, ρ fiind densitatea de volum şi momentul de inerţie este egal cu

$$\iiint \rho r^2 \, dv,$$

integrarea fiind extinsă pe întreg volumul corpului.

In acelaşi mod momentele de inerţie ale unei suprafeţe sau curbe materiale se exprimă prin integralele de suprafaţă sau curbilinii

$$\iint \rho' \, r^2 \, ds \quad \text{şi} \quad \int \rho'' \, r^2 \, dl.$$

extinse respectiv pe întreaga suprafaţă sau curbă, ρ' şi ρ'' fiind densităţile de suprafaţă respectiv liniară, iar ds şi dl elementele de suprafaţă şi de linie. Dimensiunea momentului de inerţie este

$$(\text{masa}) \times (\text{lungimea})^2.$$

La determinarea momentelor de inerţie ale corpurilor geometrice, „masele" elementelor se consideră egale cu aceste elemente; astfel, momentele de inerţie ale unui volum, suprafeţe sau curbe se exprimă respectiv prin integralele:

$$\iiint r^2 \, dv, \quad \iint r^2 \, ds, \quad \int r^2 \, dl,$$

iar dimensiunile lor vor fi $(\text{lungimea})^5$, $(\text{lungimea})^4$ şi $(\text{lungimea})^3$.

Momentul de inerţie $\Sigma\, mr^2$ poate fi exprimat prin produsul Mk^2 în care M este masa întregului sistem, iar k aşa numita *rază de inerţie*; prin urmare momentul de inerţie al unui sistem dat se determină prin masa lui şi raza lui de inerţie.

Fie un punct arbitrar al sistemului prin care se duc axele de coordonate rectangulare; momentele de inerţie ale sistemului în raport cu axele x, y, z sunt respectiv egale cu

$$J_x = \sum m\,(y^2 + z^2), \quad J_y = \sum m\,(z^2 + x^2), \quad J_z = \sum m\,(x^2 + y^2),$$

iar momentul de inerţie în raport cu originea O este

$$J_O \sum m\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

Pentru corpurile pline aceste sume se transformă în integrale de volum, în care

$$m = \rho \, dx \, dy \, dz.$$

2. Momentul de inerţie în raport cu o axă oarecare este egal cu momentul de inerţie în raport cu o axă paralelă, care trece prin centrul de greutate, plus produsul dintre masa întregului sistem şi pătratul distanţei între cele două axe, adică

$$J = J_C + Ma^2,$$

J_C fiind momentul de inerţie în raport cu axa, care trece prin centrul de greutate, a distanţa între axele paralele.

3. Momentele de inerție ale unei figuri geometrice plane în raport cu axele x și y vor fi respectiv egale cu (fig. 39).

$$J_x = \sum y^2\,ds, \quad J_y = \sum x^2\,ds \quad \text{sau} \quad J_x = \iint y^2\,dx\,dy, \quad J_y = \iint x^2\,dx\,dy.$$

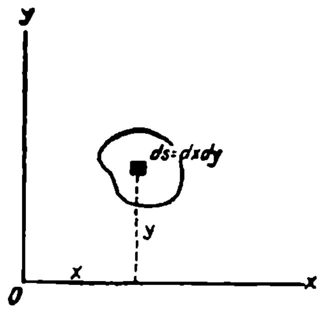


Fig. 39

Momentul polar de inerție în raport cu originea O va fi

$$J_O = \sum (x^2 + y^2)\,ds$$

sau

$$J_O = \iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Evident, că

$$J_O = J_x + J_y.$$

4. Momentul de inerție al unui corp prismatic în raport cu o axă oarecare, paralelă cu generatoarea (perpendiculară pe bază), este egal cu momentul de inerție al suprafeței bazei în raport cu punctul de intersecție al axei cu planul bazei, densitatea superficială fiind $\rho' = \rho h$, în care ρ este densitatea de volum a corpului, h înălțimea lui.

Prin urmare, momentul de inerție va fi egal cu

$$J = \sum \rho h\, r^2\,ds.$$

Dacă corpul este omogen

$$J = \rho h \sum r^2\,ds = \rho h\, J',$$

J' fiind momentul de inerție corespunzător al ariei bazei.

948. Să se afle momentul de inerție al unei bare drepte subțiri AB, de lungime l, în raport cu o axă, perpendiculară pe planul figurii, care trece prin punctul O. Lungimea perpendicularei, coborîtă din O pe AB este h, iar distanța dela piciorul acestei perpendiculare la mijlocul barei C este a.

Răspuns: $J_O = M\left(\frac{1}{12}\,l^2 + a^2 + h^2\right)$, M fiind masa barei.

949. Să se afle momentul de inerție al suprafeței unui triunghi în raport cu una din laturile sale.

Răspuns: $J = \frac{1}{6}\,h^2 M$, în care M este masa triunghiului, iar h înălțimea coborîtă pe latura respectivă, în raport cu care se calculează momentul de inerție.

950. Să se afle momentul de inerție al suprafeței unui trapez cu laturile paralele a și b și înălțimea h, în raport cu latura de lungime a.

Răspuns: $J = \frac{1}{6}\,M\,h^2\,\frac{a+3b}{a+b}$.

951. Să se afle momentul de inerție al suprafeței t
unghi isoscel cu baza a și înălțimea h în raport cu vâr
bazei.

Răspuns : $J = \frac{1}{24} M (a^2 + 12 h^2)$.

952. Să se afle momentele de inerție ale unei plăci elip-
cu semiaxele a și b, în raport cu axele și cu centrul ei O.

Răspuns : $J_a = \frac{1}{4} Mb^2$; $J_b = \frac{1}{4} Ma^2$; $J_O = \frac{1}{4} M(a^2+b^2)$.

953. Să se afle momentele de inerție ale volumului unui
ralelipiped dreptunghic cu laturile a, b și c în raport cu latu-
le sale și cu centrul de greutate O.

Răspuns :

$$J_a = \frac{1}{3} M (b^2+c^2),\ J_b = \frac{1}{3} M (c^2+a^2).$$

$$J_c = \frac{1}{3} M (a^2+b^2),\ J_O = \frac{1}{12} M (a^2+b^2+c^2).$$

954. Să se afle momentul de inerție al volumului unui
dru circular cu raza bazei r și înălțimea h în raport cu
oarecare, care trece prin centrul de greutate al cilindrului
paralelă cu baza lui.

Răspuns : $J = \frac{1}{12} M (3r^2 + h^2)$.

955. Să se afle momentele de inerție (J_1) ale volumului unui
rcular cu raza bazei r și înălțimea h, în raport cu axa de
și (J_2) în raport cu un diametru oarecare al bazei lui.

Răspuns : $J_1 = \frac{3}{10} Mr^2$, $J_2 = \frac{1}{20} M (3r^2 + 2h^2)$.

956. Să se afle momentul de inerție al volumului unui
hi de con circular cu razele bazei R și r și înălțimea h
port cu axa de rotație.

Răspuns : $J = 0{,}3\ M \frac{R^4 + R^3r + R^2r^2 + Rr^3 + r^4}{R^2 + Rr + r^2}$.

957. Să se afle momentul de inerție al unui paraboloid
tație cu raza bazei r și înălțimea h, în raport cu axa de
ție.

Răspuns : $J = \frac{1}{3} Mr^2$.

958. Să se afle momentul de inerție al volumului unui elipsoid cu semiaxele a, b și c în raport cu axele sale și cu centrul O.

Răspuns: $J_a = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2)$, $J_b = \frac{1}{5} M (c^2 + a^2)$,

$$J_c = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2), \quad J_0 = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2 + c^2).$$

959. Un cerc de rază r se rotește în jurul unei axe fixe y, care se află în planul acestui cerc, la distanța $R > r$ de centrul său. Să se afle momentul de inerție al corpului de rotație rezultat (tor) în raport cu axa y, dacă masa acestui corp este M.

Răspuns: $J_y = M\left(R^2 + \frac{3}{4} r^2\right)$.

960. Să se demonstreze teorema: momentul de inerție al unui corp, în raport cu un punct O este egal cu momentul de inerție în raport cu centrul de greutate al corpului C, plus produsul dintre masa corpului și pătratul distanței OC.

961. Pentru a reprezenta geometric dependența între momentele de inerție ale unui corp, în raport cu axe paralele de direcții date, se face următoarea construcție: se duce un plan perpendicular pe direcția axelor și din punctele de intersecție a fiecărei axe cu acest plan, se așează dealungul axei, un segment proporțional cu momentul de inerție al corpului în raport cu această axă. Să se afle locul geometric al extremităților acestor segmente.

Răspuns: Un paraboloid de rotație.

962. Să se demonstreze că într'un elipsoid de inerție, semiaxa cea mai mică nu poate fi mai mică decât distanța dela centrul elipsoidului la dreapta care unește capetele celorlalte două axe.

963. Baza (de formă oarecare) a unui cilindru omogen se află în planul xOy, iar generatoarele lui sunt paralele cu axa z. Să se demonstreze că

$$J_0 - J_z = \frac{MH^2}{3},$$

M fiind masa cilindrului și H înălțimea lui.

964. Densitatea unei sfere neomogene de rază R, la distanța r de centrul ei, se exprimă prin formula

$$\rho = \rho_0\left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Să se determine raza de inerție a sferei în raport cu diametrul ei.

Răspuns : $k = R\sqrt{\dfrac{14 - 10\,\alpha}{35 - 21\,\alpha}}$.

965. Să se afle dependența dintre raza bazei R și înălțimea H a unui con circular omogen, cu condiția, ca elipsoidul de inerție, în raport cu vârful lui, să se transforme într'o sferă.

Răspuns : $R = 2\,H$.

TABLA DE MATERII

II. Dinamica sistemului

Redactor de carte: Moscovici M.
Tehnoredactor: Klein S.
Corector resp.: Mateio Cl.

Dat la cules 24.VII.1952. Bun de tipar 20.X.1952. Hârtie semivelină 61×86/16, 65 g/m². Coli editoriale 21. Coli tipar 19,25. Preţul unui exemplar broşat Lei 11,35, legat ½ pânză Lei 14,60. Comanda 1.863. — A. 4.532/1952.

Pentru bibliotecile mici indicele de clasificare 531.
Pentru bibliotecile mari, indicele de clasificare 531/534 (076).

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Nr. 3, Bucureşti.

ERATA

Pagina	Rândul	In loc de	Se va citi
20	4	S_3	S_4
63	1 de jos	plane	plane netede
64	9	$3\sqrt{a + 2al - 2l^2}$	$3\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}$
65	Fig. 189 (scripetele)	P	F
120	8	w_0	ω_0
	8 de jos	$= \frac{a}{\cos\omega}\ (a > 0)$	$= \frac{a}{\cos\varphi}\ (a > 0)$
155	9	linii (fig. 28)	drepte (fig. 28)
157	16	$v = \frac{h_1 + h^2}{60} n \operatorname{ctg}\alpha$	$v = \frac{h_1 + h_2}{60} n \operatorname{ctg}\alpha$
209	3 do jos	v_r	γ
210	9	$-\frac{a v_2^0}{k}$	$-\frac{a v_0^2}{k}$
249	13 de jos	exterioare	interioare
	4 de jos	$+ Z_e\, dx$	$Z_e\, dz$
286	5 de jos	$y_1 = y_{10}\, y_{10}'^{\,t} +$	$y_1 = y_{10} + y_{10}'\, t + \ldots$
289	12 de jos	$\Theta = \dot{\Theta}_0$	$\dot{\Theta} = \dot{\Theta}_0$
291	11 de jos	$f_1(q)\, q +$	$f_1(q)\, \ddot{q} +$
292	4 de jos	lor q_i	lor $\dot{q}_i$
302	5	$J_0 \Sigma (x^2 + y^2)\, ds$	$J_0 = \Sigma (x^2 + y^2)\, ds$

CĂRŢI APĂRUTE:

Prof. A. C. Vlasov
„Curs de matematică superioară"
(trad. din limba rusă
Vol. I Pag. 448 Lei 25,50
„ II Pag. 470 Lei 26,90

★

I. N. Veselovschi
„Mecanica şi rezistenţa materialelor"
(trad. din limba rusă)
Pag. 674, Lei 20,42

★

M. V. Pentcovschi
„Nomografia"
(trad. din limba rusă)
Pag. 304, Lei 17,51

★

I. S. Bezicovici
„Calcule aproximative"
(trad. din limba rusă)
Pag. 440, Lei, 21,46

★

I. C. Snitco
„Culegere de probleme de rezistenţa materialelor"
(trad. din limbă rusă)
Pag. 168, Lei 5,74

★

I. G. Petrovschi
„Prelegeri asupra teoriei ecuaţiilor diferenţiale ordinare"
(trad. din limba rusă)
Pag. 204, Lei 8,70

Lei 11