ANDREI ȚUGULEA
MIHAI VASILIU
GHEORGHE FRĂȚILOIU
MARIA CATANĂ

X

ELECTROTEHNICA

Manual pentru licee industriale
cu profil de electrotehnică, clasa a X-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1983

Prof. dr. doc. ing. ANDREI ȚUGULEA
Șef de lucrări dr. ing. MIHAI VASILIU
Șef de lucrări ing. GHEORGHE FRĂȚILOIU
Ing. prof. MARIA CATANĂ

ELECTROTEHNICA

Manual pentru licee industriale cu profil de electrotehnică, clasa a X-a

Editura didactică și pedagogică, București – 1983

Capitolul 1

ELECTROTEHNICA REGIMULUI ELECTROSTATIC

A. SARCINA ELECTRICĂ ŞI FORŢA LUI COULOMB

1. Sarcina electrică

Corpurile sînt alcătuite din atomi. Fiecare **atom** este un ansamblu de particule microscopice, avînd un *nucleu central* în jurul căruia se rotesc una sau mai multe particule identice numite *electroni*. Nucleul este cu mult mai greu decît electronii, concentrînd practic întreaga masă a atomului. Această imagine a atomului este numită „model planetar"*, datorită asemănării ei cu sistemul nostru planetar. În timp ce rotaţia în jurul soarelui se datorează însă forţelor gravitaţionale de atracţie universală, rotaţia electronilor în jurul nucleului se datorează *forţelor electrice.* Acestea se exercită deoarece atît nucleul cît şi electronii au *sarcină electrică.*

Despre orice corp care are sarcină electrică se mai spune că este încărcat cu *sarcină electrică.* Aceasta este o mărime fizică ce se determină prin analiza forţelor electrice. Simbolurile consacrate ale sarcinii electrice sînt q sau Q.

2. Forţa lui Coulomb

Cel mai simplu caz în care apar forţe electrice este acela a două mici corpuri încărcate cu sarcină electrică şi situate în vid. Aceste forţe aufost cercetate experimental de fizicianul francez *Charles Coulomb* (1736—1806) şi se numesc **forţe coulombiene.** Rezultatele cercetărilor experimentale ale lui Coulomb pot fi sintetizate astfel : *dacă două mici corpuri încărcate cu sarcinile q şi q' sînt aşezate în vid la distanţa reciprocă R* (fig. 1.1, *a* şi *b*), *asupra lor*

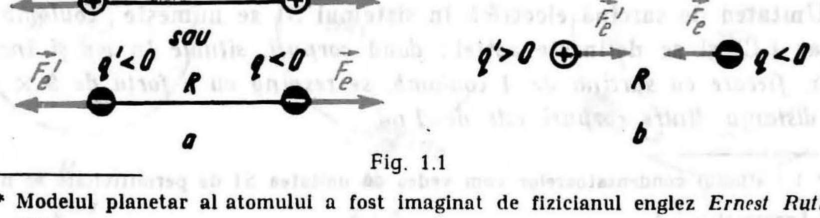

Fig. 1.1

---

* **Modelul planetar al atomului a fost imaginat de fizicianul englez *Ernest Rutherford* (1871—1937).**

se exercită forțele electrice $\vec{F}_e$ *și* $\vec{F}'_e$ (indicele „*e*" înseamnă electric), *care au următoarele proprietăți :*

— *forțele sînt egale și de sensuri opuse și se exercită pe direcția dreptei care unește cele două corpuri* (se mai spune că sînt „forțe centrale") :

$$\vec{F}'_e = -\vec{F}_e \text{ sau } \vec{F}'_e + \vec{F}_e = 0 ;$$

— *mărimile forțelor sînt direct proporționale cu produsul sarcinilor și invers proporționale cu pătratul distanței :*

$$F'_e = F_e \sim \frac{|qq'|}{R^2} ; \tag{1.1}$$

— *sarcinile electrice pot fi pozitive sau negative ;* corpurile încărcate cu sarcini de același semn ($qq' > 0$) se resping, iar corpurile încărcate cu sarcini de semne opuse ($qq' < 0$) se atrag ;

— *factorul de proporționalitate din relația (1.1) este o constantă universală,* adică o mărime care nu depinde decît de sistemul de unități, fiind independent de natura micilor corpuri sau de modul în care s-au încărcat. În sistemul de unități SI acest factor se scrie :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ unități SI.}$$

Forța lui Coulomb este deci dată de relația :

$$\boxed{F_e = F'_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qq'|}{R^2}} \tag{1.2}$$

Mărimea :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} = 8{,}85 \times 10^{-12} \text{ unități SI*} \tag{1.3}$$

este de asemenea o constantă universală, care se numește *permitivitate absolută a vidului* sau *constanta electrică absolută a vidului.*

3. Unitatea de sarcină electrică

Unitatea de sarcină electrică în sistemul SI se numește *coulomb* (prescurtat 1 C) și se definește astfel : *două corpuri, situate în vid și încărcate identic, fiecare cu sarcina de 1 coulomb, se resping cu o forță de* 9×10^9 *N cînd distanța dintre corpuri este de 1 m.*

* La studiul condensatoarelor vom vedea că unitatea SI de permitivitate se numește $\frac{\text{farad}}{\text{metru}}\left(\text{prescurtat } \frac{\text{F}}{\text{m}}\right)$.

În adevăr, dacă $q = q' = 1$ C și $R = 1$ m, din expresia (1.2) a forței lui Coulomb rezultă :

$$F_e = F'_e = 9 \times 10^9 \text{ (u·SI)} \frac{(1 \text{ C})^2}{(1 \text{ m})^2} = 9 \times 10^9 \text{ N}.$$

Coulombul este o unitate foarte mare. În practică se folosesc mai frecvent următorii submultipli zecimali ai coulombului :

1 *microcoulomb* $= 1\ \mu\text{C} = 10^{-6}$ C;
1 *nanocoulomb* $= 1$ nC $= 10^{-9}$ C ;
1 *picocoulomb* $= 1$ pC $= 10^{-12}$ C.

4. Electrizarea corpurilor

Oricare ar fi atomul unei substanțe, electronii săi sînt identici și la fel încărcați, cu sarcina negativă

$$q_e = -q_0 = -1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

Sarcina q_0 reprezintă cea mai mică valoare a sarcinii cunoscute în natură pînă în prezent.

Sarcina q_n a nucleului este pozitivă și egală cu Zq_0, unde Z este numărul de electroni ce compun atomul considerat. De exemplu, pentru hidrogen $Z = 1$, pentru heliu $Z = 2$, pentru litiu $Z = 3$ ș.a.m.d. (fig. 1.2).

Deoarece *sarcina nucleului este egală și de semn contrar cu suma sarcinilor electronilor din același atom*, atomul apare în ansamblu neîncărcat electric, adică *neutru*.

Dacă un atom pierde sau cîștigă unul sau mai mulți electroni, el se încarcă în ansamblu pozitiv sau negativ și se numește *ion*.

Orice corp care pierde sau cîștigă electroni apare la scară macroscopică încărcat cu sarcină electrică.

De exemplu, dacă o baghetă de sticlă se freacă cu o pînză de mătase, bagheta se încarcă pozitiv (pierde electroni), iar pînza – negativ (cîștigă electroni).

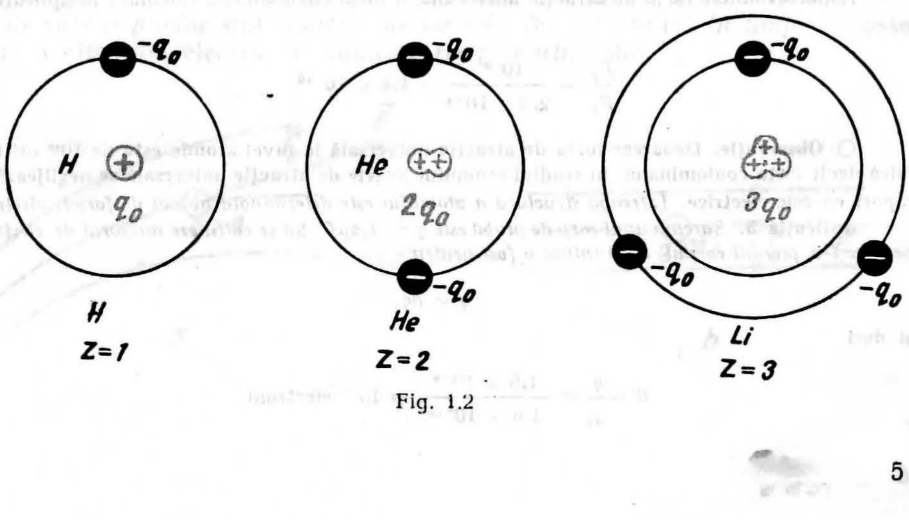

Fig. 1.2

Între corpurile încărcate cu sarcină electrică se exercită forțe electrice. Pentru a studia aceste forțe se folosesc mici corpuri metalice sau metalizate (de regulă de formă sferică) încărcate cu sarcină electrică. Ele se numesc corpuri de probă.

Aplicația 1. *Două corpuri de probă avînd sarcinile $q_1 = q_2 = 1\ \mu C$ sînt așezate în vid la distanța $R = 2$ m. Să se calculeze forțele electrice ce se exercită asupra lor.*

Aplicînd formula lui Coulomb (rel 1.2) obținem:

$$F_{e1} = F_{e2} = 9 \times 10^9 \frac{(10^{-6})^2}{2^2} = 2{,}25 \times 10^{-3}\ \mathrm{N}.$$

Aplicația 2. *Să se calculeze forța coulombiană ce se exercită între nucleul și electronul unui atom de hidrogen, știind că raza orbitei circulare a electronului este $R = 10^{-10}$ m; $q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C și $q_n = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.*

$$F_e = F_n = 9 \times 10^9 \frac{(1{,}6 \times 10^{-19})^2}{10^{-20}} = 2{,}3 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}.$$

Aplicația 3. *Să se calculeze viteza de mișcare a electronului unui atom de hidrogen pe orbită (v. aplicația 2), știind că masa electronului este $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.*

Egalînd forța centrifugă cu forța de atracție coulombiană, obținem:

$$\frac{m_e v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0^2}{R^2},$$

adică

$$v = q_0 \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot R}} = 1{,}59 \times 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Aplicația 4. *Să se calculeze forța de atracție universală F_g dintre electronul și nucleul atomului de hidrogen, știind că $m_n = 1\,840\ m_e$; valoarea constantei de atracție universală este $\gamma_0 = 6{,}68 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.*

$$F_g = \gamma_0 \frac{m_e m_n}{R^2} = 6{,}68 \times 10^{-11} \frac{1\,840 \times (9{,}1 \times 10^{-31})^2}{10^{-20}} \cong 10^{-47}\ \mathrm{N}.$$

Raportul dintre forța de atracție universală și forța coulombiană calculată în aplicația 2 este:

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{10^{-47}}{2{,}3 \times 10^{-8}} = 4{,}4 \times 10^{-40}$$

○ **Observație.** Deoarece forța de atracție universală la nivel atomic este de 10^{40} ori mai mică decît forța coulombiană, în studiul atomului forțele de atracție universală se neglijează în raport cu cele electrice. *Întreaga structură a atomului este determinată numai de forțele electrice.*

Aplicația 5. *Sarcina unui corp de probă este $q = 1{,}6\mu C$. Să se calculeze numărul de electroni pe care i-a pierdut corpul, dacă inițial a fost neutru.*

$$q = nq_0$$

și deci

$$n = \frac{q}{q_0} = \frac{1{,}6 \times 10^{-6}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 10^{13}\ \text{electroni}.$$

B. CÎMPUL ELECTRIC ȘI CARACTERIZAREA LUI

1. Intensitatea cîmpului electric

● În fizica modernă, existența forțelor electrice se explică prin intermediul **cîmpului electric**.

Orice corp electrizat produce în jurul lui, chiar și în vid, o stare fizică numită cîmp electric care se manifestă prin forțe electrice ; cu alte cuvinte, ori de cîte ori se aduce în cîmp electric un corp încărcat cu sarcină electrică, asupra acestuia se exercită o forță electrică.

● Cîmpul electric este caracterizat printr-o mărime fizică numită **intensitatea cîmpului electric**, a cărei definiție este următoarea : *intensitatea cîmpului electric dintr-un punct M este o mărime vectorială $\vec{E}$ egală cu raportul dintre forța electrică ce se exercită asupra unui corp de probă încărcat și sarcina q a acestuia* :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}} \tag{1.4}$$

Din definiție rezultă relația echivalentă

$$\vec{F}_e = q\vec{E}. \tag{1.5}$$

● Deoarece nu avem simțuri speciale pentru a percepe cîmpul electric, ni-l reprezentăm intuitiv prin **linii de cîmp**. O linie de cîmp este o *curbă care este mereu tangentă la vectorul $\vec{E}$ în punctele prin care trece* (fig. 1.3, *a*). Un mic corp de probă, de masă foarte mică, pornind din repaus și mișcîndu-se numai sub acțiunea forței electrice, s-ar mișca cu bună aproximație chiar în lungul unei linii de cîmp.

Un *cîmp electric* se numește *omogen* sau *uniform* dacă vectorul $\vec{E}$ este același peste tot, adică are în fiecare punct aceeași mărime, direcție și sens (fig. 1.3, *b*). Un cîmp electric omogen se reprezintă prin linii de cîmp paralele și echidistante.

Cîmpul electric se numește *cîmp electrostatic atunci cînd corpurile electrizate care îl produc sînt imobile, iar sarcinile lor nu variază în timp.* Această stare a cîmpului electric se numește *regim electrostatic*.

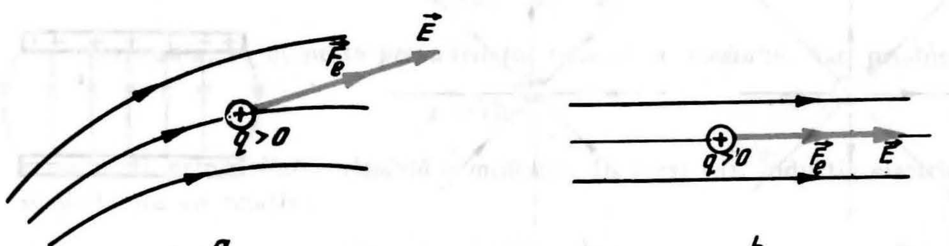

Fig. 1.3

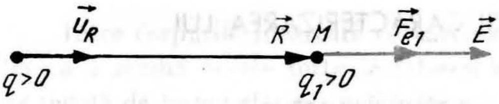

Fig. 1.4

2. Cîmpul electric coulombian

Formula lui Coulomb ne permite să calculăm intensitatea cîmpului electric produs de un mic corp încărcat cu sarcina q (fig. 1.4).

Fie M punctul în care dorim să-l determinăm pe $\vec{E}$. În acest scop, aducem în punctul M un corp de probă cu sarcina q_1 și măsurăm forța $\vec{F}_{e1}$. Conform relației (1.5):

$$\vec{F}_{e_1} = q_1\vec{E}. \tag{1.6}$$

Dar $\vec{F}_{e_1}$ poate fi calculată și cu formula lui Coulomb:

$$\vec{F}_{e_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qq_1|}{R^2}\cdot\vec{u}_F, \tag{1.7}$$

unde $\vec{u}_F$ este versorul (vectorul unitar) forței.

Dacă $q_1q > 0$, atunci forța $\vec{F}_{e1}$ este de respingere și din figura 1.4 rezultă

$$\vec{u}_F = \vec{u}_R = \frac{\vec{R}}{R}$$

și

$$\vec{F}_{e_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}. \tag{1.7'}$$

Egalînd expresiile (1.6) și (1.7') obținem:

$$q_1\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q}{R^2}\cdot\frac{\vec{R}}{R}$$

Simplificînd cu $q_1 \neq 0$, obținem intensitatea cîmpului electric coulombian:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\cdot\frac{\vec{R}}{R}} \tag{1.8}$$

Dacă $q > 0$ vectorii $\vec{E}$ și $\vec{R}$ sînt paraleli și liniile de cîmp ies din sarcina q dispersîndu-se radial spre infinit (fig. 1.5, a). Dacă $q < 0$ vectorii

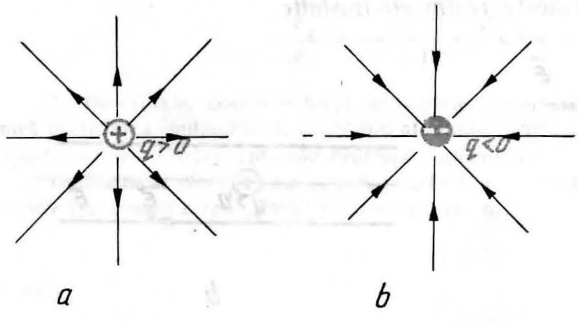

Fig. 1.5

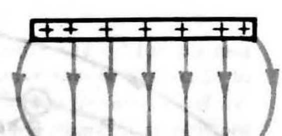

Fig. 1.6

$\vec{E}$ şi $\vec{R}$ sînt antiparaleli, iar liniile de cîmp converg dinspre infinit spre sarcina q (fig. 1.5, *b*). Proprietatea liniilor de cîmp electric de a izvorî din sarcinile pozitive şi de a se scurge în sarcinile negative este generală (fig. 1.6). Observăm de asemenea că *mărimea intensităţii cîmpului electric,* adică :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q|}{R^2}$$

este direct proporţională cu valoarea absolută a sarcinii care produce cîmpul şi invers proporţională cu pătratul distanţei (fig. 1.7).

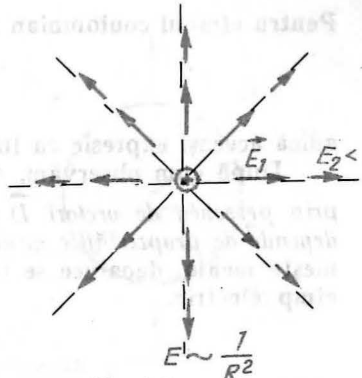

Fig. 1.7

3. Inducţia electrică

● Mărimea

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}} \tag{1.9}$$

se numeşte **inducţie electrică în vid.** Din relaţia (1.8) rezultă că inducţia electrică a cîmpului coulombian este :

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}.$$

● **Inducţia electrică într-un mediu oarecare.** Experienţa arată că dacă se introduce corpul de probă cu sarcina q într-un mediu omogen (de exemplu în ulei), intensitatea cîmpului electric se schimbă faţă de vid, micşorîndu-se de ε_r ori ($\varepsilon_r > 1$). Din (1.8) rezultă :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \tag{1.10}$$

Mărimea ε_r se numeşte *permitivitatea relativă a mediului,* iar produsul

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

se numeşte *permitivitatea absolută a mediului.* În acest caz, inducţia electrică se defineşte cu relaţia :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}} \tag{1.11}$$

Pentru cîmpul coulombian rezultă din (1.10)

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R},$$

adică aceeaşi expresie ca în vid.

După cum observăm, *cîmpul electric în fiecare punct poate fi caracterizat prin perechea de vectori $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ al căror factor de proporţionalitate $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ depinde de proprietăţile mediului.* O astfel de **caracterizare a cîmpului** se numeşte **locală**, deoarece se referă la fiecare punct din regiunea în care există cîmp electric.

4. Fluxul electric. Legea fluxului electric

● **Fluxul electric.** Considerăm un mediu omogen, în care ε_r este peste tot acelaşi, iar în acest mediu — un cîmp electric uniform. În acest caz, vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ vor fi peste tot aceiaşi, iar liniile lor de cîmp se vor suprapune. Considerăm de asemenea o suprafaţă plană de arie A înclinată faţă de liniile de cîmp ; această înclinare poate fi definită de unghiul α pe care-l face un vector unitar $\vec{n}$ normal pe suprafaţă cu linia de cîmp (fig. 1.8).

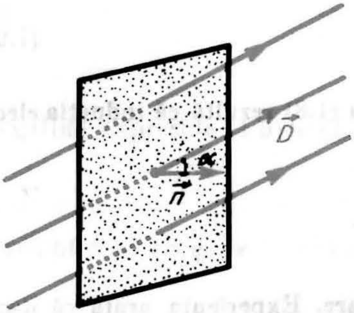

Fig. 1.8

Se numeşte *flux electric prin suprafaţa respectivă* mărimea

$$\boxed{\Psi_s = DA\cos\alpha} \tag{1.12}$$

Se observă că (fig. 1.9, *a*, *b*, *c*) :

$$\Psi_s = DA\cos\alpha = \begin{cases} DA, & (\alpha = 0, \quad \cos 0 = 1) \\ 0, & \left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0\right) \\ -DA, & (\alpha = \pi, \quad \cos\pi = -1) \end{cases}$$

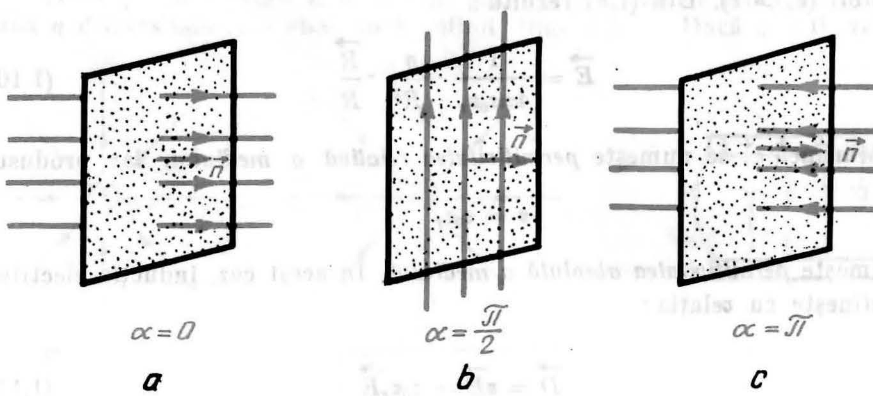

Fig. 1.9

Fluxul electric este diferit de zero și pozitiv cînd liniile de cîmp străbat suprafața în sensul versorului normal $\vec{n}$ (fig. 1.9, *a*), este negativ cînd o străbat în sens contrar (fig. 1.9, *c*) și nul cînd nu străbat (nu înțeapă sau nu traversează) suprafața (fig. 1.9, *b*).

● **Legea fluxului electric.** Dacă se consideră un corp de probă încărcat cu sarcina q și o suprafață sferică Σ de rază R și concentrică cu el (fig. 1.10), atunci în fiecare punct al sferei

$$D \cos \alpha = D \cos 0 = D = \frac{q}{4\pi R^2} = const.$$

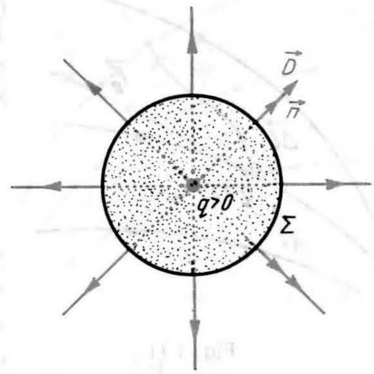

Fig. 1.10

Fluxul electric prin suprafața sferei va fi :

$$\Psi_\Sigma = D \cdot A_\Sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = q.$$

Relația :

$$\boxed{\Psi_\Sigma = q_\Sigma} \qquad (1.13)$$

este generală, se numește **legea fluxului electric** și se enunță astfel : *fluxul electric prin orice suprafață închisă este egal cu sarcina electrică din interiorul suprafeței.*

● **Unitatea de flux și de inducție electrică.** Din legea fluxului electric rezultă :

$$\langle \Psi \rangle = \langle q \rangle = 1 \text{ C}.$$

Deci, unitatea SI de flux electric este chiar *unitatea SI a sarcinii.*

Din definiția fluxului rezultă unitatea inducției electrice :

$$\langle D \rangle = \frac{\langle \Psi \rangle}{\langle A \rangle} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Deci 1 u.SI de inducție electrică $= 1 \text{ C/m}^2$.

5. Tensiunea electrică. Potențialul electrostatic

● **Tensiunea electrică.** Dacă deplasăm într-un cîmp electric, între două puncte A și B, un mic corp de probă încărcat cu sarcina q, forța electrică $\vec{F_e}$ ce se exercită asupra corpului de probă va efectua un lucru mecanic L_{AB}

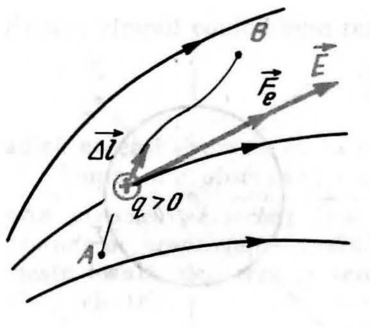

Fig. 1.11

(fig. 1.11). Prin definiție, **tensiunea electrică** U_{AB} *este raportul dintre lucrul mecanic efectuat de forța electrică ce se exercită asupra corpului și sarcina sa* :

$$\boxed{U_{AB} = \frac{L_{AB}}{q}} \qquad (1.14)$$

Se observă că tensiunea electrică *este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat de forța electrică ce se exercită asupra unui corp de probă încărcat cu unitatea de sarcină* (1 C). Pentru un cîmp uniform și o traiectorie rectilinie (fig. 1.12, *a*) :

$$U_{AB} = \frac{F_e l_{AB} \cos\alpha}{q} = \frac{qEl_{AB} \cos\alpha}{q} = El_{AB} \cos \qquad (1.15)$$

sau, ca produs scalar :

$$U_{AB} = \vec{E} \cdot \vec{l}_{AB} \qquad (1.15')$$

Dacă $\alpha = 0$ sau π (fig. 1.12, *b*), atunci :

$$U_{AB} = \pm El_{AB}.$$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (fig. 1.12, *c*), atunci :

$$U_{AB} = El_{AB} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

● **Potențialul electrostatic.** În cîmp electrostatic, respectiv în cîmpul electric produs de corpuri imobile încărcate cu sarcini constante, lucrul mecanic efectuat de forța electrică la deplasarea unui corp de probă între două

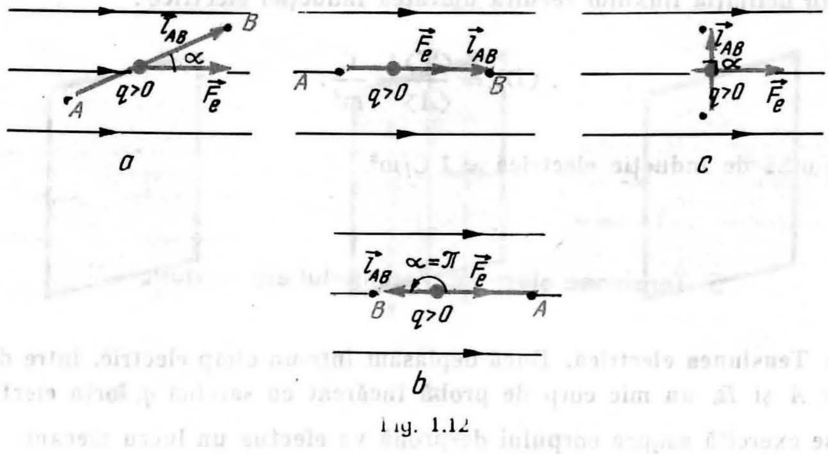

Fig. 1.12

puncte A și B nu depinde de traiectoria (drumul) după care se face deplasarea și este egal cu diferența energiilor potențiale W_p ale corpului în cele două puncte (fig. 1.13):

$$L_{AB} = W_{pA} - W_{pB}. \qquad (1.16)$$

Mărimile:

$$\boxed{V_A = \frac{W_{pA}}{q}} \quad \text{și} \quad \boxed{V_B = \frac{W_{pB}}{q}} \qquad (1.17)$$

se numesc *potențialele electrostatice din punctele A și B.* Din definiția tensiunii (1.14) rezultă:

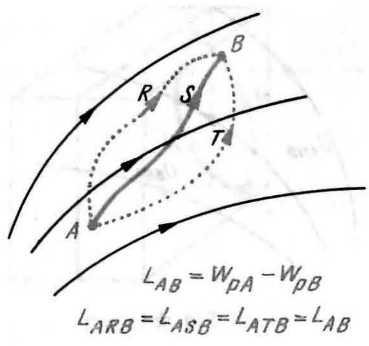

Fig. 1.13

$$U_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} = \frac{W_{pA} - W_{pB}}{q} = \frac{W_{pA}}{q} - \frac{W_{pA}}{q} = V_A - V_B.$$

Așadar, *în cîmp electrostatic tensiunea electrică dintre două puncte nu depinde de drum și este egală cu diferența potențialelor (sau „diferența de potențial") dintre cele două puncte:*

$$\boxed{U_{AB} = V_A - V_B} \qquad (1.18)$$

Ilustrăm această proprietate cu totul remarcabilă în cazul unui cîmp uniform (fig. 1.14). Între punctele A și B alegem două drumuri: unul direct, definit de segmentul l_{AB}, și altul ocolit, definit de linia frîntă ACB de segmente l_{AC} și l_{CB}. Vom putea scrie:

$$L_{AB} = qU_{AB} = qEl_{AB} \cos \alpha;$$

$$L_{ACB} = L_{AC} + L_{CB} = qEl_{AC} \cos 0 + q\,El_{CB} \cos \frac{\pi}{2} = q\,El_{AC}.$$

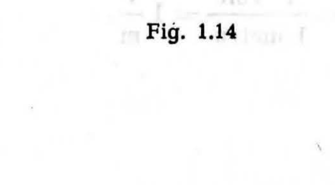

Fig. 1.14

Dar $l_{AC} = l_{AB} \cos \alpha$ (vezi triunghiul dreptunghic ABC) și deci:

$$L_{AB} = L_{ACB}, \text{ adică } U_{AB} = U_{ACB} = V_A - V_B.$$

O consecință imediată a faptului că tensiunea electrică nu depinde de drum îl constituie **teorema potențialului electrostatic**, care se enunță astfel: *tensiunea electrică pe un drum închis este nulă.* În adevăr, considerînd între

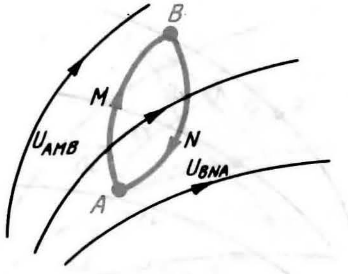

Fig. 1.15

punctele A şi B (fig. 1.15) un drum închis care merge de la A la B prin M şi se întoarce prin N avem :

$$U_{AMB} + U_{BNA} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0. \quad (1.19)$$

Aceasta înseamnă că un mic corp de probă care este deplasat pe o traiectorie închisă într-un cîmp electrostatic nu primeşte energie de la cîmpul electrostatic, lucrul mecanic al forţei electrice fiind nul *(cîmpul electrostatic este un cîmp potenţial* sau *conservativ).*

6. Unitate de tensiune electrică, de potenţial electric şi de intensitate a cîmpului electric

Din definiţia tensiunii electrice rezultă :

$$\langle U_{AB} \rangle = \frac{\langle L_{AB} \rangle}{\langle q \rangle}.$$

Deci :

$$1 \text{ u.SI de tensiune} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ coulomb}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}.$$

În sistemul SI această unitate se numeşte *volt* :

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}.$$

Multiplii şi submultiplii cei mai uzuali ai voltului sînt :

1 *kilovolt* $= 1$ kV $= 10^3$ V ;
1 *megavolt* $= 1$ MV $= 10^6$ V ;
1 *milivolt* $= 1$ mV $= 10^{-3}$ V ;
1 *microvolt* $= 1$ μV $= 10^{-6}$ V.

Deoarece tensiunea electrică este egală cu diferenţa de potenţial, rezultă că şi *potenţialul electrostatic se măsoară în volţi.*

○ **Observaţie.** Deşi se măsoară în aceleaşi unităţi, tensiunea şi potenţialul sînt mărimi fizice cu semnificaţii diferite ca şi lucrul mecanic şi energia potenţială cu ajutorul cărora s-au definit.

Din relaţia (1.15) rezultă

$$\langle E \rangle = \frac{\langle U_{AB} \rangle}{\langle l_{AB} \rangle}.$$

Deci :

$$1 \text{ u.SI de intensitate de cîmp electric} = \frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ metru}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Aplicația 1. *Să determinăm inducția electrică și intensitatea cîmpului electric de o parte și de alta a unei suprafețe plane de arie A încărcate cu sarcina $q > 0$ (fig. 1.16).*

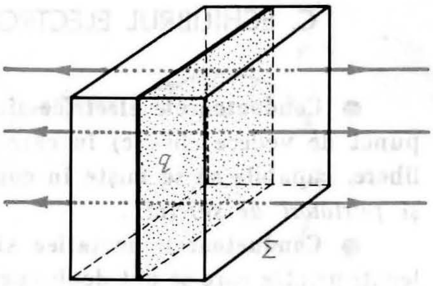

Fig. 1.16

Din motive de simetrie, liniile de cîmp vor fi normale pe plan și, deoarece sarcina este pozitivă, vor izvorî din acesta. Considerăm o suprafață închisă paralelipipedică Σ care îmbracă simetric planul. Deoarece liniile de cîmp înțeapă numai bazele acestei suprafețe, conform legii fluxului electric (1.13) se poate scrie:

$$\Psi_\Sigma = 2\,DA = q.$$

Rezultă $D = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{A} = \frac{1}{2}\rho_s$, **$\rho_s$ fiind sarcina ce revine unității de arie sau** *densitatea superficială a sarcinii* **(C/m²). Deci,** *de o parte și de alta a planului se formează cîmpuri uniforme.*

Aplicația 2. *Considerăm două suprafețe plane paralele de arii egale A, încărcate cu sarcini egale și de semne opuse, q și $-q$* **(fig. 1.17).** *Să determinăm cîmpul electric compunînd vectorial cîmpurile celor două plane.*

Se observă că în regiunea din afara planelor cîmpurile sînt de sensuri opuse și se anulează reciproc. În regiunea dintre plane cîmpurile au aceeași orientare, iar cîmpul rezultant este:

$$D = D_+ + D_- = \frac{1}{2}\frac{q}{A} + \frac{1}{2}\frac{q}{A} = \frac{q}{A} = \rho_s.$$

Deci *cîmpul electric dintre plane este uniform și are inducția egală cu densitatea superficială a sarcinii electrice pe cele două plane.*

Aplicație numerică: **$A = 1\ \mathrm{m}^2$, $q = 1\,\mu\mathrm{C}$, $d = 10$ cm (distanța între plane), $\varepsilon_r = 10$. Vom găsi:**

$$D = \frac{q}{A} = 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2};$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{10^{-6}}{8{,}85\times10^{-12}\times10} = 1{,}13\times10^{4}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}};$$

$$U_{AB} = Ed = 1{,}13\times10^{4}\times10^{-1} = 1{,}13\ \mathrm{kV}.$$

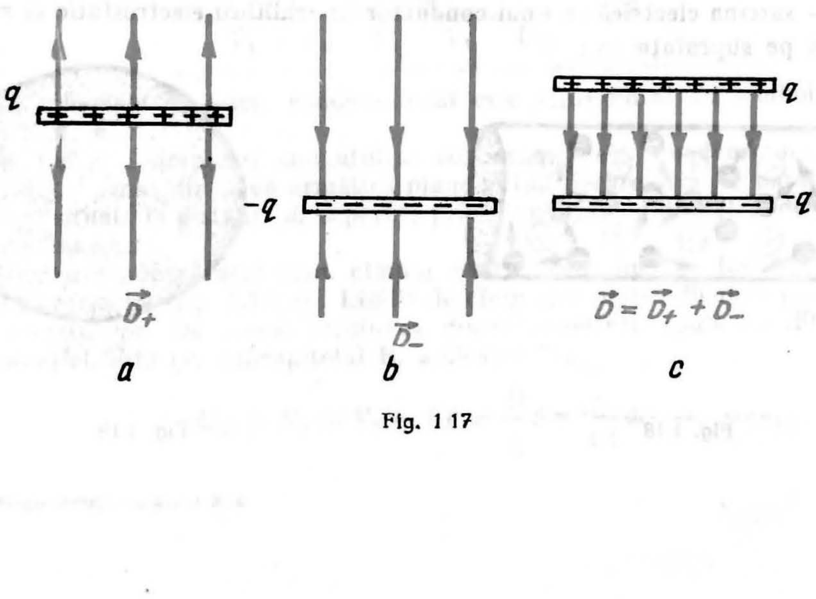

Fig. 1.17

C. ECHILIBRUL ELECTROSTATIC AL CONDUCTOARELOR

● **Conductoarele electrice** sînt corpuri (substanţe pure sau compuse din punct de vedere chimic) în care se găsesc particule microscopice încărcate libere, capabile să se mişte în cuprinsul lor. Aceste particule se mai numesc şi *purtători de sarcini.*

● **Conductoarele metalice** sînt formate dintr-o reţea de ioni pozitivi legaţi printre care se pot deplasa electronii cei mai depărtaţi de nucleee, care se numesc *electroni de conducţie* (fig. 1.18). Într-un model simplificat, aceşti electroni pot fi consideraţi liberi în interiorul conductorului, mişcîndu-se haotic sub efectul agitaţiei termice, ca particulele unui „gaz electronic".

Dacă în conductor se stabileşte un cîmp electric, acesta imprimă o mişcare ordonată electronilor liberi şi produce un curent electric.

● Pentru ca să nu existe curent electric, care ar perturba regimul electrostatic, trebuie ca forţa electrică ce se exercită asupra electronilor şi, ca urmare, intensitatea cîmpului electric din conductor să fie nule :

$$\vec{F}_e = -q_0\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0. \qquad (1.20)$$

Această relaţie constituie **condiţia de echilibru electrostatic al unui conductor** şi are două consecinţe importante :

— orice conductor în echilibru electrostatic este echipotenţial (fig. 1.19):

În adevăr, considerînd două puncte arbitrare A şi B se obţine :

$$L_{AB} = -q_0U_{AB} = -q_0(V_A - V_B) = 0 \Rightarrow V_A = V_B \qquad (1.21)$$

deoarece forţa electrică este nulă şi nu se produce lucru mecanic. Deci toate punctele conductorului au acelaşi potenţial (conductorul este echipotenţial).

— sarcina electrică a unui conductor în echilibru electrostatic se repartizează pe suprafaţa sa ;

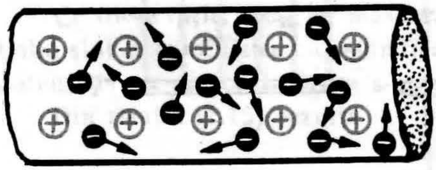

Fig. 1.18

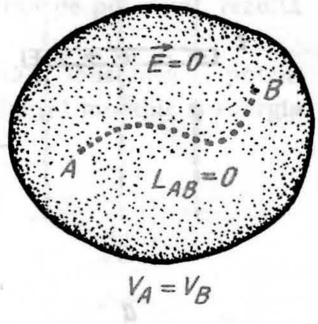

Fig. 1.19

În adevăr, deoarece $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = 0$ în orice punct din interiorul conductorului, fluxul electric prin orice suprafaţă închisă Σ_i conţinută în conductor (fig. 1.20) este nul.

Conform legii fluxului electric se obţine:

$$\Psi_{\Sigma_i} = q_{\Sigma_i} = 0 \Rightarrow q_{\Sigma_i} = 0, (\forall)\Sigma_i$$

Deci, nu există sarcină electrică în interiorul suprafeţei Σ_i.

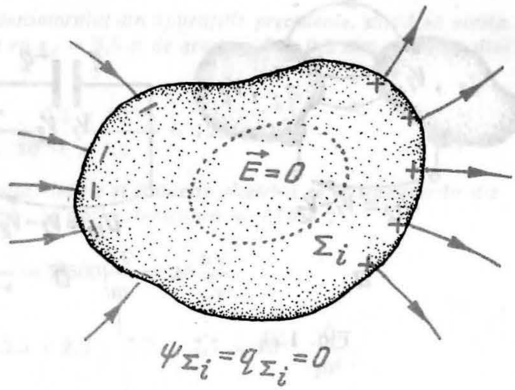

Fig. 1.20

Aceasta înseamnă că dacă un conductor este încărcat negativ, adică are un surplus de electroni, aceştia se repartizează numai în vecinătatea suprafeţei sale exterioare; tot astfel, pentru un conductor încărcat pozitiv, lipsesc electroni numai la limita suprafeţei exterioare.

D. CONDENSATORUL ELECTRIC. REŢELE DE CONDENSATOARE

1. Capacitatea electrică

● Se numeşte **condensator electric** *un sistem de două conductoare separate printr-un izolant (dielectric)* (fig. 1.21, *a*).

Dacă între conductoarele condensatorului, numite *armături*, echipotenţiale în regim electrostatic, se aplică o diferenţă de potenţial $V_1 - V_2$, acestea se încarcă cu sarcini egale şi de semne opuse $q_1 = q$ şi $q_2 = -q$. Se numeşte *capacitate electrică* raportul:

$$\boxed{C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{-q}{V_2 - V_1} = \frac{q}{U_{12}} = \frac{-q}{U_{21}}} \qquad (1.22)$$

În schemele electrice, condensatorul este reprezentat cu simbolul din figura 1.21, *b*.

● Cel mai simplu şi mai utilizat condensator este **condensatorul plan** (fig. 1.22), format din două armături plane avînd fiecare aria A, paralele între ele şi situate la distanţa d, separate printr-un strat de dielectric de permitivitate $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.

Pentru condensatorul plan, cîmpul electric este omogen între armături şi nul în afara lor (fig. 1.17, *c*). Liniile de cîmp sînt perpendiculare pe suprafaţa armăturilor. De aceea, tensiunea dintre armături, egală cu diferenţa de potenţial, este (v. subcapitolul B, aplicaţia 2):

$$U_{12} = V_1 - V_2 = Ed = \frac{D}{\varepsilon} d = \frac{q_1}{\varepsilon A} d.$$

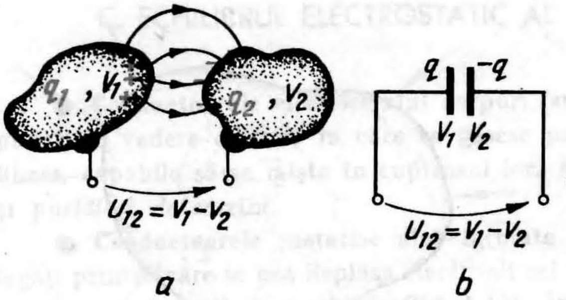

Fig. 1.21

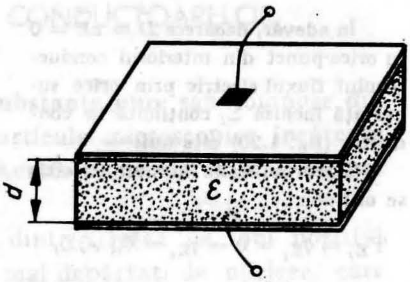

Fig. 1.22

Rezultă astfel *capacitatea condensatorului plan :*

$$C = \frac{q_1}{U_{12}} = \frac{\varepsilon A q_1}{q_1 d}; \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon A}{d}} \tag{1.23}$$

Capacitatea nu depinde de sarcinile armăturilor și nici de diferența de potențial dintre acestea, fiind direct proporțională cu aria unei armături și invers proporțională cu distanța dintre ele.

○ **Observație.** Dacă între armături în loc de dielectric este vid, atunci capacitatea este :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

Din raportul :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

se poate determina permitivitatea relativă a dielectricilor, prin măsurarea capacității unui condensator cu și fără dielectric.

● **Unitatea de capacitate** se numește *farad* (F) : $1\ \text{F} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{V}}$.

Din expresiile capacității condensatorului rezultă unitățile de permitivitate a vidului și de permitivitate absolută a unui corp :

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{\langle C \rangle \langle d \rangle}{\langle A \rangle} = 1 \frac{\text{F}}{\text{m}}.$$

Aplicația 1. *Să se calculeze capacitatea unui condensator știind că se încarcă cu 440 μC atunci cînd i se aplică tensiunea de 220 V.*

$$C = \frac{q}{U} = \frac{440 \times 10^{-6}}{220} = 2 \times 10^{-6}\ \text{F} = 2\ \mu\text{F}.$$

Aplicația 2. *Ce tensiune trebuie aplicată condensatorului din aplicația precedentă pentru ca acesta să se încarce cu 80 μC ?*

$$U = \frac{q}{C} = \frac{80 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6}} = 40\ \text{V}.$$

Aplicația 3. *Care este aria armăturii condensatorului din aplicațiile precedente, știind că acesta este plan și are drept dielectric o foaie de hîrtie cu $\varepsilon_r = 3{,}5$ și de grosime $d = 0{,}2$ mm egală cu distanța între armături ?*

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{2 \times 10^{-6} \times 0{,}2 \times 10^{-3}}{8{,}85 \times 10^{-12} \times 3{,}5} = 12{,}9 \text{ m}^2.$$

Aplicația 4. *Care este intensitatea cîmpului electric și inducția electrică ce se stabilesc în dielectricul condensatorului de mai sus, atunci cînd i se aplică tensiunea de 500 V ?*

$$E = \frac{U}{d} = \frac{500}{0{,}2 \times 10^{-3}} = 2\,500 \frac{\text{kV}}{\text{m}} = 25 \frac{\text{kV}}{\text{cm}};$$

$$D = \varepsilon_0\varepsilon_r E = 8{,}85 \times 10^{-12} \times 3{,}5 \times 2{,}5 \times 10^6 = 7{,}7 \times 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Aplicația 5. *Ce tensiune maximă se poate aplica condensatorului știind că intensitatea cîmpului electric care produce străpungerea dielectricului (rigiditatea dielectrică) este* $E_{str} = 2\,500 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$?

$$U_{max} = U_{str} = E_{str} \cdot d = 2\,500 \times 0{,}02 = 50 \text{ kV}.$$

2. Legarea condensatoarelor în serie

● În figura 1.23 sînt reprezentate **două condensatoare de capacități C_1 și C_2 legate în serie.** Dacă la bornele ansamblului se aplică diferența de potențial $V_1 - V_2$, armătura pozitivă a primului condensator se încarcă cu sarcina q, iar armătura negativă a celui de-al doilea condensator se încarcă cu sarcina $-q$.

Pe armăturile interioare se vor separa corespunzător sarcinile $-q$ și q. *Ansamblul se comportă ca un singur condensator echivalent a cărui capacitate se definește prin raportul :*

$$C_e = \frac{q}{V_1 - V_2}.$$

Deoarece :

$$V_1 - V_2 = (V_1 - V_{1'}) + (V_{2'} - V_2), \text{ (cu } V_{1'} = V_{2'}\text{)},$$

iar :

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_{1'}} \text{ și } C_2 = \frac{q}{V_{2'} - V_2},$$

rezultă :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{V_1 - V_2}{q} = \frac{V_1 - V_{1'}}{q} + \frac{V_{2'} - V_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

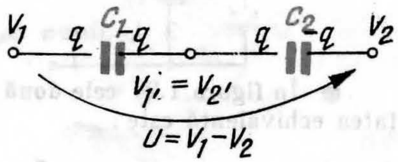

Fig. 1.23

sau

$$\boxed{C_e = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}} \tag{1.24}$$

● **Pentru n condensatoare legate în serie, se obţine similar :**

$$\boxed{\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.}$$

Deoarece :

$$\frac{1}{C_e} > \frac{1}{C_1};\ \frac{1}{C_2};\ \ldots;\ \frac{1}{C_n},$$

rezultă :

$$C_e < min\ (C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Pentru cazul particular în care $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = C$, se obţine :

$$\boxed{C_e = \frac{C}{n}} \tag{1.25}$$

Aplicaţie. *Condensatoarele $C_1 = 2\mu F$ şi $C_2 = 4\mu F$ sînt legate în serie. Să se calculeze capacitatea echivalentă şi tensiunile ce se stabilesc la bornele fiecăruia atunci cînd i se aplică ansamblului tensiunea $U = 300$ V*

$$C_e = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \times 4}{2 + 4} = \frac{4}{3}\,\mu\text{F};$$

$$q = C_eU = \frac{4}{3} \times 300 \times 10^{-6}\text{C} = 400\,\mu\text{C};$$

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{400 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6}} = 200\ \text{V};$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{400 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} = 100\ \text{V}.$$

○ **Se observă că $\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$, adică tensiunile sînt invers proporţionale cu capacităţile.**

3. Legarea condensatoarelor în paralel

● În figura 1.24 cele **două condensatoare sînt legate în paralel.** Capacitatea echivalentă este :

$$C_e = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q_1}{V_1 - V_2} + \frac{q_2}{V_1 - V_2},$$

deci:

$$\boxed{C_e = C_1 + C_2} \qquad (1.26)$$

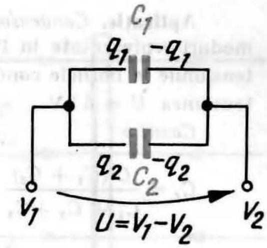

Fig. 1.24

Pentru n condensatoare legate în paralel se obține similar:

$$\boxed{C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,}$$

iar dacă $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = C$ rezultă:

$$\boxed{C_e = nC} \qquad (1.27)$$

În acest caz:

$$C_e > max\ (C_1,\ C_2, \ldots, C_n).$$

Aplicație. *Condensatoarele $C_1 = 2\mu F$ și $C_2 = 4\mu F$ sînt legate în paralel. Să se calculeze capacitatea echivalentă și sarcinile cu care se încarcă fiecare atunci cînd ansamblului i se aplică tensiunea $U = 1\ 000$ V.*

$$C_e = C_1 + C_2 = 2 + 4 = 6\ \mu\text{F};$$

$$q = C_e U = 6 \times 10^{-6} \times 10^3 = 6\ 000\ \mu\text{C};$$

$$q_1 = C_1 U = 2 \times 10^{-6} \times 10^3 = 2\ 000\ \mu\text{C};$$

$$q_2 = C_2 U = 4 \times 10^{-6} \times 10^3 = 4\ 000\ \mu\text{C}.$$

○ **Observație.** $q = q_1 + q_2$. Sarcinile q_1 și q_2 sînt deci direct proporționale cu capacitățile.

4. Legarea mixtă a condensatoarelor

În figurile 1.25, *a*, *b* sînt date două exemple de legături mixte. Aplicînd succesiv relațiile deduse mai sus, se obține:

$$C_e = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}; \qquad (1.28,\ a)$$

și

$$C_e = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}. \qquad (1.28,\ b)$$

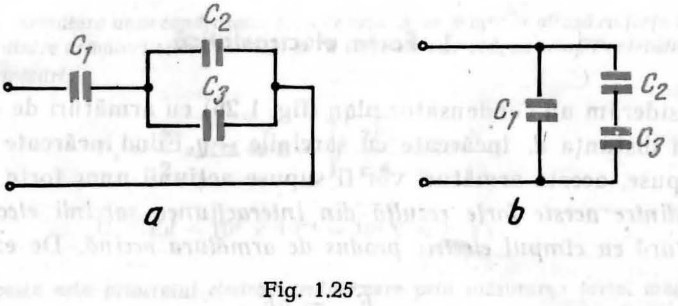

Fig. 1.25

Aplicație. *Condensatoarele* $C_1 = 2\mu F$, $C_2 = 4\mu F$ și $C_3 = 6\mu F$ sînt legate mixt în cele două moduri reprezentate în figura 1.25, *a, b*. Să se calculeze capacitățile echivalente, sarcinile și tensiunile la bornele condensatoarelor în cele două cazuri, atunci cînd ansamblului i se aplică tensiunea $U = 6$ kV.

Cazul a:

$$C_e = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{2(4+6) \times 10^{-12}}{(2+4+6) \times 10^{-6}} = \frac{5}{3}\ \mu F;$$

$$q = q_1 = C_e U = \frac{5}{3} \times 10^{-6} \times 6 \times 10^3 = 10^4\ \mu C;$$

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{10^4 \mu C}{2\mu F} = 5\,000\ V = 5\ kV;$$

$$U_2 = U_3 = U - U_1 = 6\,000 - 5\,000 = 1\,000\ V = 1\ kV;$$

$$q_2 = C_2 U_2 = 4 \times 10^{-6} \times 10^3 = 4\,000\ \mu C;$$

$$q_3 = C_3 U_3 = 6 \times 10^{-6} \times 10^3 = 6\,000\ \mu C.$$

Cazul b:

$$C_e = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 2 \times 10^{-6} + \frac{4 \times 6 \times 10^{-12}}{(4+6) \times 10^{-6}} = 4{,}4\ \mu F;$$

$$q = C_e U = 4{,}4 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^3 = 2{,}64 \times 10^4\ \mu C;$$

$$q_1 = C_1 U = 2 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^3 = 1{,}2 \times 10^4\ \mu C;$$

$$q_2 = q_3 = q - q_1 = 2{,}64 \times 10^4 - 1{,}2 \times 10^4 = 1{,}44 \times 10^4\ \mu C;$$

$$U_1 = U = 6\ kV;$$

$$U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{1{,}44 \times 10^4 \mu C}{4\mu F} = 3{,}6\ kV;$$

$$U_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{1{,}44 \times 10^4 \mu C}{6\mu F} = 2{,}4\ kV;$$

$$U_2 + U_3 = U.$$

E. FORȚELE ELECTROSTATICE. ENERGIA ELECTROSTATICĂ

1. Forța electrostatică

Considerăm un condensator plan (fig. 1.26) cu armături de arie A situate în vid la distanța d, încărcate cu sarcinile $\pm q$. Fiind încărcate cu sarcini de semne opuse, aceste armături vor fi supuse acțiunii unor forțe de atracție. *Fiecare dintre aceste forțe rezultă din interacțiunea sarcinii electrice purtate de armătură cu cîmpul electric produs de armătura vecină.* De exemplu

$$\vec{F}_{e+} = q\vec{E}_-,$$

E_- fiind cîmpul produs de armătura negativă. Aşa cum am văzut (aplicaţia 2, subcapitolul B), o armătură plană încărcată cu sarcina $-q$ produce cîmpul

$$E_- = \frac{q}{2\varepsilon_0 A},$$

orientat ca în figura 1.17, *c*. Deci:

$$\boxed{F_{e+} = qE_- = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}} \quad (1.29,\ a)$$

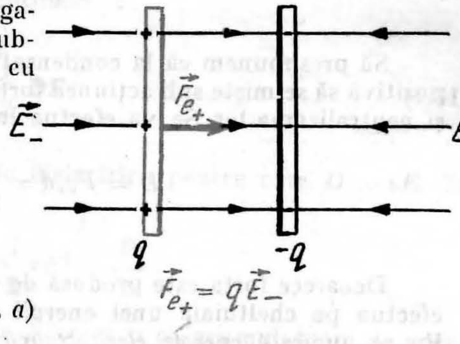

Fig. 1.26

La fel rezultă:

$$\boxed{F_{e-} = |-q|\, E_+ = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}} \quad (1.29,\ b)$$

Se observă că *forţa nu depinde de distanţa dintre armături.*
Forţa pe unitatea de arie se numeşte *presiune electrostatică* şi are expresia:

$$p_e = \frac{F_e}{A} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A^2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2,$$

deoarece $DA = q$ conform legii fluxului electric (v. aplicaţia 2, subcapitolul B).

Aplicaţia 1. *Să se calculeze presiunea electrostatică pentru $E = 30$ kV/cm în vid.*

$$p_e = 0{,}5 \times 8{,}85 \times 10^{-12} \left(\frac{3 \times 10^4}{10^{-2}}\right)^2 = 41 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Aplicaţia 2. *Să se calculeze forţa cu care este atrasă armătura unui condensator plan la presiunea p_e de mai sus, aria armăturii fiind $A = 10$ m².*

$$F_e = p_e A \cong 41 \times 10 = 410\ \text{N}.$$

Aplicaţia 3. *Armătura unui condensator plan de aria $A = 2$ m² este atrasă cu forţa de 8,85 N. Ştiind că distanţa dintre armături este $d = 1$ cm şi că între ele este vid, să se afle ce tensiune trebuie aplicată între armături.*

$$F_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A \Rightarrow E = \sqrt{\frac{2F_e}{\varepsilon_0 A}} = 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}};$$

$$U = Ed = 10^6 \times 10^{-2} = 10^4\ \text{V} = 10\ \text{kV}.$$

○ **Notă. Acesta este *principiul electrometrului*, care prin măsurarea forţei măsoară tensiunea.**

2. Energia electrostatică

Să presupunem că la condensatorul plan din figura 1.27 lăsăm *armătura* pozitivă să se mişte sub acţiunea forţei F_{e+} pînă la alipirea celor două armături şi neutralizarea lor. Se va efectua lucrul mecanic :

$$L = F_{e+}d = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}d = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

Deoarece forţa este produsă de cîmpul electric, *acest lucru mecanic se va* efectua pe cheltuiala unei energii care trebuie atribuită cîmpului electric. Ea se numeşte *energie electrostatică* sau, mai general, *energie electrică*. Dacă W_e este valoarea iniţială a acestei energii, cînd armăturile se găsesc la distanţa d, valoarea ei finală va fi nulă deoarece prin alipirea armăturilor sarcinile se neutralizează şi cîmpul electric se anulează. Aplicînd primul principiu al termodinamicii, vom putea scrie :

$$W_e^{in} - W_e^{fin} = L$$

(în acest proces nu se dezvoltă căldură). Deoarece $W_e^{in} = W_e$ şi $W_e^{fin} = 0$, obţinem

$$W_e = L = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\frac{\varepsilon_0 A}{d}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

(ştim că $\frac{\varepsilon_0 A}{d} = C$ este capacitatea iniţială a condensatorului).

Ţinînd seama că $q = CU$, obţinem următoarele expresii echivalente ale *energiei electrostatice acumulate în cîmpul electric al unui condensator.*

$$\boxed{W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}} \qquad (1.30)$$

Din aceste expresii rezultă că energia electrostatică a unui condensator creşte odată cu creşterea sarcinii (deci a încărcării) acestuia. Energia electrostatică este acumulată între armături, adică în spaţiul în care se află cîmpul.

Se numeşte *densitate de volum a energiei* energia acumulată în unitatea de volum :

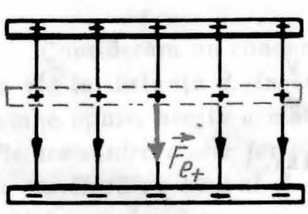

Fig. 1.27

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{qU}{2Ad}\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right),$$

Deoarece într-un condensator plan

$$D = \frac{q}{A} \text{ şi } E = \frac{U}{d}$$

se poate scrie

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2} DE} \tag{1.31}$$

Această expresie este valabilă și în dielectrici, pentru care $D = \varepsilon E$. Se mai obțin expresiile echivalente.

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}}$$

În electrotehnică condensatoarele se folosesc și ca acumulatoare de energie electrică, pe care o acumulează prin încărcare și o retrocedează prin descărcare.

Aplicația 1. *Să se calculeze energia electrostatică dintr-un condensator avînd $C = 1\ \mu F$ și $U = 10\ kV$.*

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = 0{,}5 \times 10^{-6} \times (10^4)^2 = 50\ \mathrm{J}.$$

Aplicația 2. *Să se determine densitatea de volum a energiei electrostatice din condensatorul de mai sus, știind că dielectricul său are $\varepsilon_r = 2{,}5$ și $d = 0{,}2$ mm.*

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = 0{,}5 \times 2{,}5 \times 8{,}85 \times 10^{-12} \left(\frac{10^4}{0{,}2 \times 10^{-3}} \right)^2 = 2{,}77 \times 10^4 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}.$$

Aplicația 3. *Să se determine volumul de dielectric din condensatorul de mai sus.*

$$V = \frac{W_e}{w_e} = \frac{50}{2{,}77 \times 10^4} = 18{,}1 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3.$$

Aplicația 4. *Știind că rigiditatea dielectrică a izolației este $E_d = 2\ 500\ kV/cm$, să se determine ce energie maximă poate fi stocată în condensatorul considerat.*

$$W_e \leqslant \frac{1}{2} CU_{str}^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \left(\frac{2\,500 \times 10^3}{10^{-2}} \right)^2 \times (0{,}2 \times 10^{-3})^2 = 1\,250\ \mathrm{J}.$$

Probleme

1.1. Se consideră trei condensatoare de capacități $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $C_3 = 6\ \mu F$. Știind că tensiunea maximă pe care o poate suporta fiecare dintre ele este $U_{str} = 500$ V, se cere :

a) tensiunea maximă ce poate fi aplicată cînd sînt legate în serie ;

b) tensiunea maximă ce poate fi aplicată cînd sînt legate în paralel ;

c) sarcinile condensatoarelor, tensiunile la bornele lor și energiile acumulate în cazurile *a* și *b* ;

d) în cîte moduri distincte pot fi conectate cele trei condensatoare (serie, paralel și mixt) pentru a se obține capacități echivalente distincte ; care sînt valorile acestor capacități ?

1.2. În circuitul cu condensatoare din figura P.1.2 se dau $C_1 = C_3 = 4\ \mu F$, $C_2 = 6 \mu F$, $C_4 = 1{,}6\ \mu F$ și sarcina $q_3 = 2\ \mu C$.

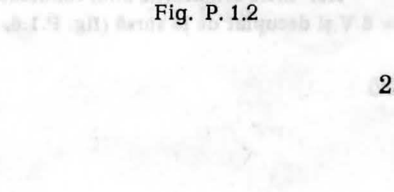

Fig. P.1.2

Să se determine :

a) tensiunile şi sarcinile tuturor condensatoarelor ;

b) tensiunea de alimentare U_b ;

c) capacitatea echivalentă ;

d) energia electrostatică totală şi repartizarea ei pe condensatoare.

1.3. În circuitul din figura P.1.3 se cunosc $C_1 = 2\ \mu F$ şi $C_2 = 1\ \mu F$. Se cere să se calculeze :

a) capacitatea echivalentă ;

b) sarcinile, tensiunile şi energiile condensatoarelor atunci cînd $U_b = 10$ kV.

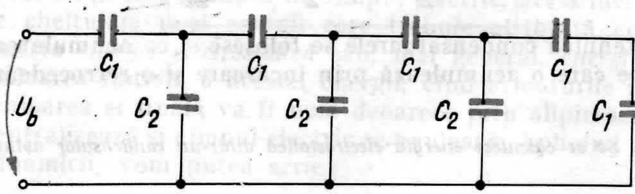

Fig. P. 1.3

1.4. Două condensatoare de capacităţi $C_1 = 10\ \mu F$ şi $C_2 = 20\ \mu F$ se alimentează legate în serie de la o sursă avînd $U_b = 3\,000$ V. După încărcare se deconectează de la sursă şi încărcate fiind se leagă în paralel.

a) Ce tensiune se va stabili la bornele lor legate în paralel ?

b) Ce sarcină vor avea în acest caz ?

c) Ce se întîmplă dacă după conectarea lor în paralel se mai adaugă, de asemenea în paralel, un condensator $C_3 = 20\ \mu F$ neîncărcat ?

1.5. Se consideră circuitele în stea şi triunghi formate din condensatoare cu capacităţi egale respectiv cu C_λ şi C_Δ (fig. P.1.5, *a*, *b*). Ce relaţie trebuie să existe între C_λ şi C_Δ pentru ca faţă de orice pereche de borne capacitatea echivalentă a stelei să fie egală cu capacitatea triunghiului ? Aplicaţie : $C_\lambda = 30\ \mu F$.

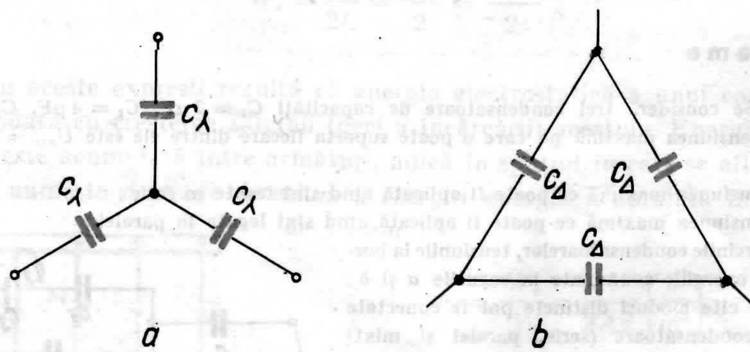

Fig.P. 1.5

1.6. Între armăturile unui condesator plan încărcat cu sarcina $q = 24\ \mu C$ la tensiunea $U_b = 6$ V şi decuplat de la sursă (fig. P.1.6, *a*) se introduce un dielectric cu grosimea egală cu jumătate din distanța între armături. Cunoscînd distanța între armături $d = 6$ mm și permitivitatea relativă a dielectricului $\varepsilon_r = 4$ să se determine:

a) intensitatea cîmpului electric produs de sarcina q în starea inițială;

b) intensitatea cîmpului electric după introducerea dielectricului și tensiunea U'_b dintre armături (fig. P.1.6, b);

c) capacitatea condensatorului după introducerea dielectricului. Să se argumenteze răspunsul.

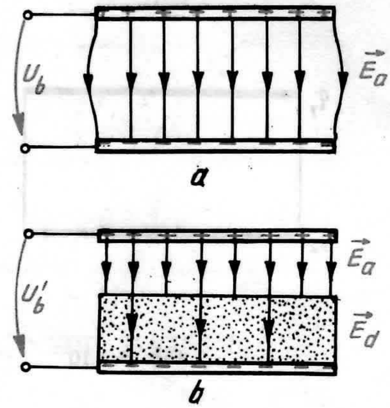

Fig. P. 1.6

1.7. Între armăturile unui condensator plan conectate la bornele unei surse cu t.e.m. de 6 V se introduce un bloc dielectric cu grosimea egală cu jumătate din distanța dintre armături (fig. P.1.7); condensatorul rămîne tot timpul cuplat la sursă. În starea inițială sarcina pe armături este de 24 μC. Cunoscînd distanța între armături $d = 6$ mm și permitivitatea relativă a dielectricului $\varepsilon_r = 4$ să se determine:

a) capacitatea condensatorului în starea inițială și intensitatea cîmpului electric între armături;

b) intensitatea cîmpului electric după introducerea dielectricului și sarcina electrică pe armături;

c) capacitatea condensatorului cu dielectric; să se argumenteze răspunsul.

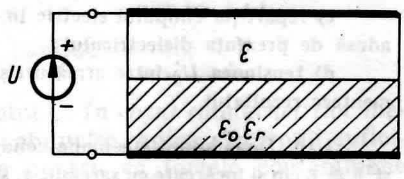

Fig. P. 1.7

1.8. Armăturile unui condensator plan cu capacitatea $C = 4$ μF sînt conectate la bornele unui generator cu t.e.m. $U_b = 6$ V. Condensatorul rămîne tot timpul cuplat la sursă. Între armături se introduce un dielectric de forma unui paralelipiped (fig. P.1.8) cu grosimea $d = 6$ mm egală cu distanța între armături, ce ocupă jumătate din volumul condensatorului. Se cere să se determine:

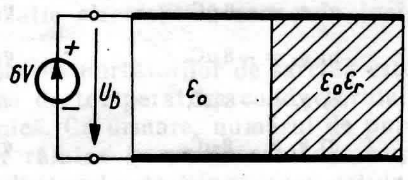

Fig. P. 1.8

a) sarcina electrică pe armăturile condensatorului în starea inițială;

b) intensitatea cîmpului electric produs de această sarcină, în starea inițială și după introducerea dielectricului;

c) repartiția sarcinii pe suprafața armăturii în starea inițială și după introducerea dielectricului;

d) sarcina totală a armăturilor în prezența dielectricului;

e) capacitatea echivalentă a condensatorului cu dielectric; să se argumenteze rezultatul (permitivitatea relativă a dielectricului este $\varepsilon_r = 2$).

1.9. Armăturile unui condensator plan cu aria $A = 8$ cm² sînt încărcate cu sarcina $q = 24$ μC sub o tensiune $U_b = 6$ V; condensatorul se decuplează apoi de la sursă. În spațiul dintre armături se introduce un dielectric ($\varepsilon_r = 4$) cu grosimea $d = 6$ mm, egală cu distanța între armăturile condensatorului (fig. P.1. 9) ce ocupă jumătate din volumul condensatorului. Se cere să se determine:

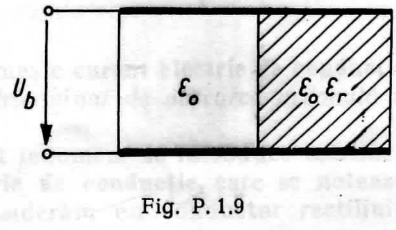

Fig. P. 1.9

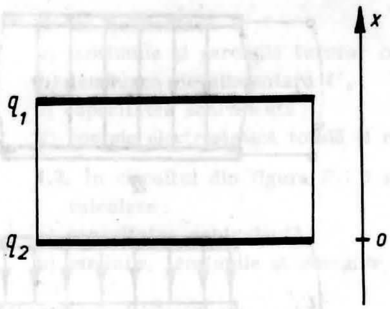

Fig. P. 1.10

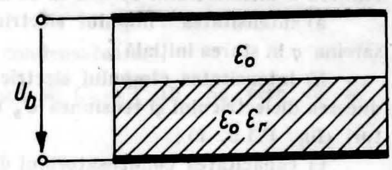

Fig. P. 1.11

a) densitatea superficială a sarcinii electrice pe armături ;

b) repartiţia densităţii superficiale a sarcinii în prezenţa dielectricului ;

c) repartiţia cîmpului electric în spaţiul dintre armături în starea iniţială şi modificarea adusă de prezenţa dielectricului ;

d) tensiunea U_b' între armături şi capacitatea condensatorului cu dielectric ; să se argumenteze rezultatul.

1.10. Două suprafeţe plane conductoare, în formă de dreptunghi, cu laturile $a = 4$ cm şi $b = 6$ cm şi încărcate cu sarcinile q_1 şi q_2 sînt plasate în aer ca în figura P.1.10.

Să se afle proiecţia cîmpului electric pe axa ox şi să se reprezinte grafic, pentru cazurile :

a) $q_1 = 6\ \mu C$, $q_2 = 8\ \mu C$;

b) $q_1 = -8\ \mu C$, $q_2 = 6\ \mu C$;

c) $q_1 = -8\ \mu C$, $q_2 = -6\ \mu C$;

d) $q_1 = 8\ \mu C$, $q_2 = -6\ \mu C$.

1.1. Între armăturile unui condensator plan cu aria $A = 48\ cm^2$ şi distanţa $d = 6$ mm se introduce un dielectric cu grosimea egală cu jumătate din distanţa între armături (fig. P.1.11). Se cere să se determine :

a) capacitatea condensatorului cu dielectric dacă $\varepsilon_r = 2$;

b) tensiunea maximă ce se poate aplica între armături dacă rigiditatea dielectrică a substanţei este $E_d = 400$ kV/cm (rigiditatea aerului este de 30 kV/cm) ;

c) sarcina electrică maximă cu care poate fi încărcat condensatorul.

Capitolul 2

ELECTROTEHNICA REGIMULUI ELECTROCINETIC STAȚIONAR

A. STAREA ELECTROCINETICĂ ȘI CARACTERIZAREA EI

1. Starea electrocinetică a conductoarelor

Așa cum am arătat în cap. 1, subcapitolul C, *în cazul conductoarelor metalice* purtătorii de sarcini sînt electronii de conducție, adică electronii suficient de depărtați de nucleele atomice fixe pentru ca forțele coulombiene exercitate de nuclee asupra lor să fie neglijabile.

În cazul conductoarelor electrolitice sau gazoase, purtătorii de sarcină sînt ionii pozitivi și negativi obținuți prin disociație electrolitică sau prin ionizarea moleculelor gazoase.

La echilibru termic și electrostatic, mișcarea purtătorilor de sarcină este dezordonată (sau haotică), fiind determinată de temperatura conductorului. Ea se mai numește mișcare de agitație termică. Ca urmare, numărul de purtători dintr-un anumit volum de conductor rămîne în medie constant, ca și sarcina pe care aceștia o poartă. Dacă conductorul este supus unor acțiuni externe care se manifestă prin forțe exercitate asupra purtătorilor de sarcină într-un sens bine determinat, aceștia capătă o mișcare ordonată (adică efectuată numai în anumite direcții și sensuri) care se suprapune peste mișcarea de agitație termică. Această mișcare ordonată a purtătorilor determină un transport de sarcină electrică. În aceste condiții se spune despre conductor că se află în *stare electrocinetică* sau că este parcurs de un curent electric de conducție.

2. Curentul electric de conducție. Intensitatea curentului electric de conducție

● Așa cum am precizat mai sus, se numește **curent electric de conducție** *fenomenul de transport al sarcinii electrice determinat de mișcarea ordonată a purtătorilor de sarcină.*

● Pentru a caracteriza cantitativ acest fenomen, se introduce mărimea fizică numită **intensitatea curentului electric de conducție,** care se notează cu I. Pentru definirea acestei mărimi considerăm un conductor rectiliniu

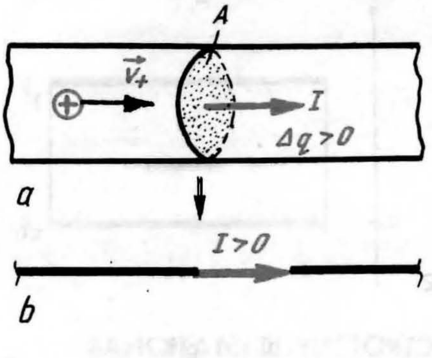

Fig. 2.1

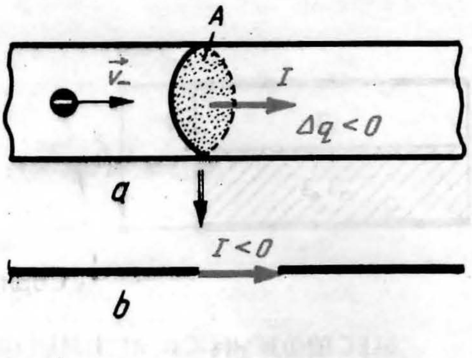

Fig. 2.2

şi o secţiune transversală S prin acesta de arie A (fig. 2.1, *a*). Orice trecere a unui purtător de sarcină prin această secţiune reprezintă un transport de sarcină dintr-o parte în alta a secţiunii. Deoarece purtătorii se pot mişca în ambele sensuri, pentru a urmări sistematic fenomenul este necesar să ne alegem un sens de referinţă, pe care-l indicăm printr-o săgeată pe conductor. Acest sens se numeşte *sensul de referinţă al intensităţii curentului* şi se indică în schemele circuitelor electrice ca în figura 2.1, *b*.

Orice purtător de sarcină care traversează secţiunea în sensul de referinţă determină o creştere a sarcinii în partea secţiunii indicată de sens dacă este pozitiv (fig. 2.1, *a*) şi o scădere a sarcinii dacă este negativ (fig. 2.2, *a*). Dimpotrivă, orice purtător care traversează secţiunea în sens contrar sensului de referinţă determină o scădere a sarcinii dacă este pozitiv (fig. 2.3, *a*) şi o creştere a ei dacă este negativ (fig. 2.4, *a*). În concluzie, din punctul de vedere al transportului de sarcină *mişcarea particulelor pozitive într-un sens este echivalentă cu mişcarea particulelor negative în sens contrar.*

Ne fixăm acum atenţia asupra fenomenului de transport al sarcinii electrice în sensul de referinţă ales, între două momente de timp t_1 şi t_2 care determină un interval $\Delta t = t_2 - t_1$. Fie Δq sarcina electrică (ca valoare şi semn) care străbate în acest interval de timp, în sensul de referinţă considerat, secţiunea S (fig. 2.1).

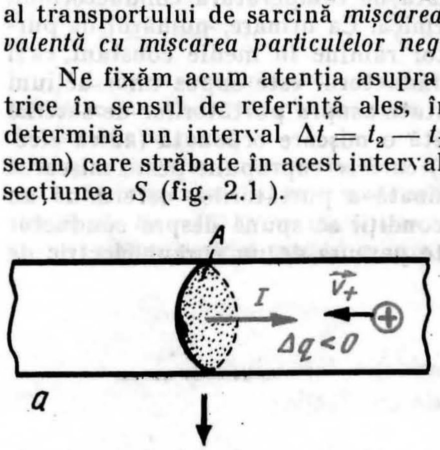

Fig. 2.3

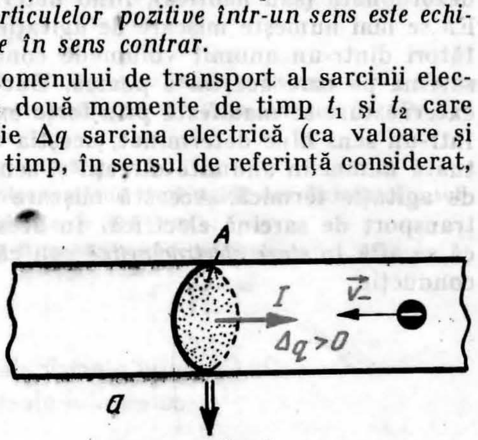

Fig. 2.4

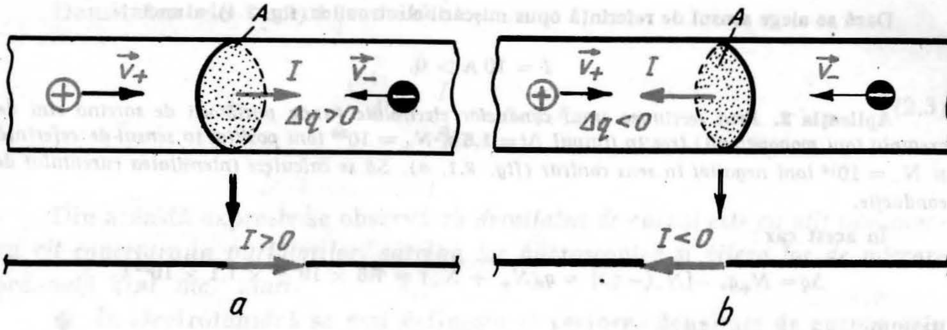

Fig. 2.5

Prin definiţie se numeşte intensitate a curentului electric de conducţie mărimea

$$\boxed{i=\frac{\Delta q}{\Delta t}} \tag{2.1}$$

După cum se vede, **intensitatea curentului electric** nu este altceva decît *sarcina electrică transportată în unitatea de timp prin secţiunea S*, adică este *viteza de transport a sarcinii*. Deoarece Δq poate fi pozitivă sau negativă, iar Δt este pozitiv, rezultă că intensitatea curentului este de asemenea o mărime algebrică. Dacă se schimbă sensul de referinţă în opusul său (fig. 2.5), intensitatea curentului îşi schimbă semnul.

● **Unitatea de intensitate de curent** în sistemul SI se numeşte *amper* şi are simbolul A. Din definiţie rezultă :

$$1\,\mathrm{A}=\frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{s}}=1\,\mathrm{Cs}^{-1}.$$

În electrotehnică se mai utilizează multiplii şi submultiplii următori :

megaamperul: $1\ \mathrm{MA}=10^6\ \mathrm{A}$;
kiloamperul : $1\ \mathrm{kA}=10^3\ \mathrm{A}$;
miliamperul : $1\ \mathrm{mA}=10^{-3}\ \mathrm{A}$;
microamperul : $1\ \mu\mathrm{A}=10^{-6}\ \mathrm{A}$;
picoamperul : $1\ \mathrm{pA}=10^{-12}\ \mathrm{A}$.

Aplicaţia 1. *Prin secţiunea unui conductor metalic (unde purtătorii de sarcină sînt numai electroni) trec în timpul $\Delta t=1{,}6$ s, $N=10^{20}$ electroni în sensul de referinţă (fig. 2.2). Să se calculeze intensitatea curentului electric de conducţie.*

În acest caz :

$$\Delta q=-Nq_0=-10^{20}\times 1{,}6\times 10^{-19}=-16\ \mathrm{C}$$

şi intensitatea curentului de conducţie va fi :

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=-10\ \mathrm{A}<0.$$

Dacă se alege sensul de referință opus mișcării electronilor (fig. 2.4), atunci:

$$I = 10\ \text{A} > 0.$$

Aplicația 2. *Prin secțiunea unui conductor electrolitic (unde purtătorii de sarcină sînt de exemplu ioni monovalenți) trec în timpul $\Delta t = 1{,}6$ s, $N_+ = 10^{20}$ ioni pozitivi în sensul de referință și $N_- = 10^{19}$ ioni negativi în sens contrar (fig. 2.1, a). Să se calculeze intensitatea curentului de conducție.*

În acest caz:

$$\Delta q = N_+q_0 - [N_-(-q_0)] = q_0(N_+ + N_-) = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1{,}1 \times 10^{20}\ \text{C}.$$

Rezultă:

$$I = \frac{17{,}6}{1{,}6} = 11\ \text{A} > 0.$$

3. Densitatea curentului electric de conducție

● Se numește **densitate a curentului electric de conducție** *raportul dintre intensitatea curentului și aria secțiunii prin care trece acest curent:*

$$\boxed{J = \frac{I}{A}\quad (I > 0).} \tag{2.2}$$

Densitatea de curent este deci numeric egală cu intensitatea curentului care străbate unitatea de arie a secțiunii transversale.

Dacă presupunem că toți purtătorii de același semn au viteze ordonate egale, putem obține o expresie importantă a densității de curent. Considerăm un conductor cu purtători pozitivi care se mișcă în sensul de referință al intensității curentului cu viteza ordonată $\vec{v}_+$ (fig. 2.6). Fie q_+ sarcina lor și n_+ concentrația lor (adică numărul de purtători pe unitatea de volum). În aceste condiții, purtătorii care vor traversa secțiunea S de arie A a conductorului în intervalul de timp Δt (fig. 2.6) vor ocupa volumul:

$$\Delta V = Av_+\Delta t.$$

Numărul lor va fi:

$$\Delta N = n_+\Delta V = n_+Av_+\Delta t,$$

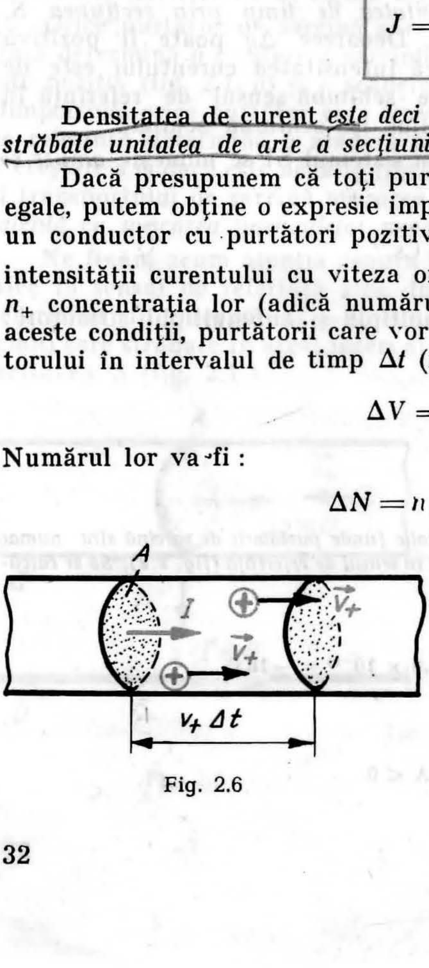

Fig. 2.6

iar sarcina pozitivă transportată în sensul de referință va fi:

$$\Delta q = q_+n_+Av_+\Delta t.$$

Intensitatea curentului va fi:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_+n_+Av_+\Delta t}{\Delta t} = n_+q_+v_+A.$$

Densitatea de curent rezultă :

$$J = \frac{I}{A} = n_+ q_+ v_+ \qquad (2.3)$$

Din această expresie se observă că *densitatea de curent este cu atît mai mare cu cît concentrația purtătorilor, sarcina lor microscopică și viteza lor de mișcare ordonată sînt mai mari.*

● În electrotehnică se mai definește și **vectorul densitate de curent prin** relația :

$$\boxed{\vec{J} = nq\vec{v}} \qquad (2.4)$$

Dacă purtătorii sînt pozitivi ($q = q_+ > 0$), atunci :

$$\boxed{\vec{J} = n_+ q_+ \vec{v}_+}$$

și este orientată în sensul vitezei de mișcare (fig. 2.7). Dacă purtătorii sînt negativi ($q = q_- < 0$), atunci :

$$\boxed{\vec{J} = n_- q_- \vec{v}_-}$$

și este orientat în sensul opus vitezei de mișcare (fig. 2.8). Dacă la producerea curentului participă purtători de ambele semne, atunci suprapunînd efectele se obține :

$$\boxed{\vec{J} = n_+ q_+ \vec{v}_+ + n_- q_- \vec{v}_-} \qquad (2.5)$$

● **Unitatea de măsură a densității curentului electric.** Din definiție rezultă :

$$<J> = \frac{<I>}{<A>} = \frac{1\ \text{A}}{1\ \text{m}^2} = 1\ \text{Am}^{-2}$$

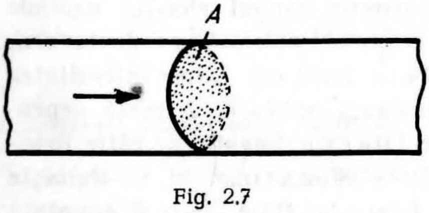

Fig. 2.7

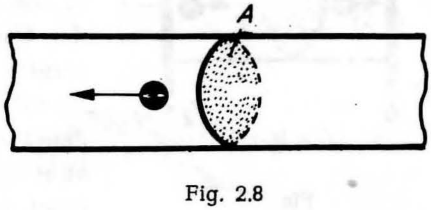

Fig. 2.8

În electrotehnică se foloseşte mai ales multiplul acestei unităţi, numit A/mm²:

$$1\ A/mm^2 = 10^6\ A/m^2$$

Aplicaţia 1. *Ştiind că concentraţia de electroni liberi dintr-un conductor de cupru este $n = 10^{29}$ electroni/m³, se cere să se determine viteza de mişcare ordonată pentru o densitate de curent de 10 A/mm².*

$$J = n_-\,|q_-|\,v_- \Rightarrow v_- = \frac{J}{n\,|q|} = \frac{10 \times 10^6}{10^{29} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 0{,}625\ \frac{mm}{s}.$$

Aplicaţia 2. *Ştiind că conductorul de cupru din aplicaţia 1 are temperatura de 20°C, să se determine viteza medie de agitaţie termică a electronilor liberi.*

Asimilînd comportarea electronilor cu aceea a moleculelor unui gaz perfect, energia cinetică medie este dată de:

$$\frac{m_e\tilde{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT\ \left(k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \frac{J}{K},\ m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg\right).$$

De aici:

$$\tilde{v} \cong \sqrt{\tilde{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = 11{,}5 \times 10^4\ \frac{m}{s} = 0{,}115 \times 10^9\ \frac{mm}{s}.$$

○ **Observaţie.** *Viteza de agitaţie termică este de aproximativ 10^9 ori mai mare decît viteza în mişcarea ordonată.*

B. LEGILE ELECTROCINETICII

1. Legea lui Ohm

● **Legea lui Ohm.** Dintre toate forţele care pot imprima o mişcare ordonată purtătorilor de sarcină dintr-un conductor determinînd astfel apariţia unui curent electric, cele mai importante şi mai frecvent întîlnite sînt forţele electrice. Pentru a putea produce aceste forţe, este necesar să creăm un cîmp electric în cuprinsul conductorului. Acest lucru se realizează, de exemplu, introducînd conductorul între armăturile unui condensator, între care diferenţa de potenţial se menţine constantă (fig. 2.9). Se spune că în acest mod aplicăm conductorului o tensiune sau o diferenţă de potenţial. Sub acţiunea cîmpului electric, în conductor apare un curent electric de intensitate *I*. Deoarece cîmpul electric depinde de tensiunea electrică aplicată conductorului, rezultă că există o legătură între intensitatea curentului şi tensiunea aplicată. Această dependenţă a fost cercetată experimental de către fizicianul german *Georg Simon Ohm* şi se numeşte legea lui Ohm. **Legea lui Ohm** poate fi enunţată

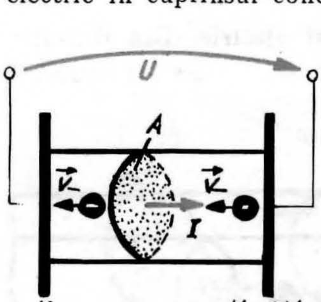

Fig. 2.9

astfel: *tensiunea electrică aplicată unui conductor este direct proporțională cu intensitatea curentului care-l străbate:*

$$\boxed{U = RI} \qquad R = \frac{U}{I} \qquad I = \frac{U}{R} \tag{2.6}$$

● **Rezistență și rezistivitate electrică.** Factorul de proporționalitate R depinde de natura și de dimensiunile conductorului și se numește *rezistență electrică*. Cercetările experimentale ale lui *Ohm* au arătat că rezistența electrică a unui conductor omogen de lungime l și cu secțiunea transversală constantă de aria A poate fi exprimată prin relația:

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{A}} \tag{2.7}$$

care arată că rezistența electrică este direct proporțională cu lungimea conductorului și invers proporțională cu aria secțiunii sale transversale. Factorul de proporționalitate ρ se numește *rezistivitate electrică* și depinde de natura conductorului, adică are o valoare pentru cupru, alta pentru argint, alta pentru aluminiu etc.

● **Variația rezistivității cu temperatura.** Experiența arată că rezistivitatea conductoarelor metalice depinde de temperatură și de regulă crește odată cu temperatura. Pentru temperaturi nu prea mari (față de temperatura ambiantă) este valabilă următoarea lege de variație:

$$\boxed{\rho = \rho_0(1 + \alpha\theta)} \tag{2.8}$$

sau:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)],$$

unde ρ_0 este rezistivitatea la temperatura $T_0 = 273$ K, iar α este *coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura.*

● **Conductanță și conductivitate electrică.** Legea lui Ohm mai poate fi scrisă și sub forma:

$$\boxed{I = \frac{U}{R} = GU,}$$

unde:

$$\boxed{G = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho l} = \frac{\sigma A}{l}} \tag{2.9}$$

se numește *conductanță electrică.*

Mărimea $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ se numește *conductivitate electrică.*

Din legea lui Ohm rezultă :

$$\langle R\rangle = \frac{\langle U\rangle}{\langle I\rangle},$$

adică

$$1\ u.\ SI\ de\ rezisten\c{t}\breve{a} = \frac{1\ \mathrm{V}}{1\ \mathrm{A}} = 1\ \Omega\ (ohm).$$

Din expresia rezistenţei rezultă :

$$\langle \rho\rangle = \frac{\langle R\rangle\langle A\rangle}{\langle l\rangle},$$

adică :

$$1\ unitate\ SI\ de\ rezistivitate = \frac{1\ \Omega\ 1\ \mathrm{m}^2}{1\ \mathrm{m}} = 1\ \Omega\mathrm{m}.$$

Unitatea de conductanţă va fi :

$$1\ unitate\ SI\ de\ conductan\c{t}\breve{a} = \frac{1}{\Omega} = 1\ \Omega^{-1} = 1\ \mathrm{S}\ (siemens).$$

Unitatea de conductivitate va fi :

$$1\ unitate\ SI\ de\ conductivitate = \frac{1}{1\ \Omega\ \mathrm{m}} = 1\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} = 1\ \mathrm{S\ m}^{-1}.$$

În electrotehnică se folosesc frecvent şi următorii multipli ai ohm-ului :
1 *kiloohm* $= 1\ \mathrm{k}\Omega = 10^3\ \Omega$;
1 *megohm* $= 1\ \mathrm{M}\Omega = 10^6\ \Omega$.
Pentru rezistivitate se mai foloseşte unitatea :

$$1\,\Omega\frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} = 10^{-6}\ \Omega\mathrm{m},$$

care este deosebit de comodă cînd se măsoară lungimea conductorului în metri, iar aria secţiunii sale în mm^2.

Aplicaţia 1. *Printr-un conductor avînd rezistenţa $R = 10\ \Omega$ circulă un curent de intensitate $I = 5$ A. Să se afle tensiunea aplicată.*

$$U = RI = 10 \times 5 = 50\ \mathrm{V}.$$

Aplicaţia 2. *Ce curent va străbate conductorul de mai sus dacă i se aplică tensiunea $U = 500$ V?*

$$I = \frac{U}{R} = \frac{500}{10} = 50\ \mathrm{A}.$$

Aplicaţia 3. *Ştiind că în aplicaţiile precedente conductorul este din cupru cu* $\rho = 1{,}75 \times 10^{-8}\ \Omega m$, *să se afle lungimea sa dacă aria secţiunii lui este* $A = 1\ mm^2$.

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow l = \frac{RA}{\rho} = 571\ \text{m}.$$

Aplicaţia 4. *Ştiind că rezistivitatea din aplicaţia 3 a fost dată pentru* $20°C$ *şi că* $\alpha = 4 \times 10^{-3}\frac{1}{°C}$, *să se afle rezistivitatea cuprului la* $0°C$.

Din:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\theta) \Rightarrow \rho_0 = \frac{\rho}{1 + \alpha\theta} = \frac{1{,}75 \times 10^{-8}}{1 + 4 \times 10^{-3} \times 20} = 1{,}62 \times 10^{-8}\ \Omega\ \text{m}.$$

Aplicaţia 5. *Rezistenţa unui conductor de aluminiu la* $0°C$ *este* $R_0 = 10\ \Omega$. *Ştiind că prin încălzire rezistenţa lui a crescut la* $10{,}5\ \Omega$, *să se afle temperatura la care s-a încălzit.*

$$\alpha_{Al} = 4 \times 10^{-3}\frac{1}{°C};$$

$$R_0 = \rho_0\frac{l}{A};$$

$$R_\theta = \rho_\theta\frac{l}{A} \Rightarrow \frac{R_0}{R_\theta} = \frac{\rho_0}{\rho_\theta}.$$

Deci:

$$\rho_\theta = \frac{R_\theta}{R_0}\cdot\rho_0 = \rho_0(1 + \alpha\theta);$$

$$\theta = \frac{\frac{R_\theta}{R_0} - 1}{\alpha} = \frac{\frac{10{,}5}{10} - 1}{4 \times 10^{-3}} = 12{,}5°C;$$

$$T = 12{,}5 + 273 = 285{,}5\ \text{K}.$$

Pentru a înţelege mai bine legea lui Ohm, vom analiza aspectele microscopice ale apariţiei curentului electric. În adevăr, să considerăm un conductor rectiliniu cu secţiunea constantă de arie A şi de lungime l, căruia i se aplică tensiunea U. Intensitatea cîmpului electric care se stabileşte în conductor va fi (fig. 2.10):

$$\boxed{E = \frac{U}{l}}.$$

Dacă q_m este sarcina unui purtător (pentru simplitate presupunem că există un singur tip de purtător, de sarcină $q_m < 0$), atunci asupra fiecărui purtător se va exercita forţa electrică:

$$\vec{F}_e = q_m\vec{E};$$

ca urmare, toţi purtătorii vor căpăta o mişcare ordonată în sensul forţei $\vec{F}_e$.

Fig. 2.10

Dacă mişcarea s-ar desfăşura fără obstacole, purtătorii ar fi uniform acceleraţi, iar viteza lor ordonată ar creşte mereu. În realitate, purtătorii se mişcă prin interstiţiile reţelei ionice a conductorului şi, datorită agitaţiei termice, se ciocnesc frecvent de aceşti ioni pierzîndu-şi mişcarea ordonată. Acest mecanism foarte complicat poate fi asimilat cu o forţă de frecare vîscoasă (adică dependentă de viteză) care se opune accelerării nelimitate a purtătorilor. Ca urmare, putem presupune că asupra fiecărui purtător se exercită, în afară de forţa electrică $\vec{F}_e$, şi o forţă de frecare $\vec{F}_f$ opusă vitezei ordonate $\vec{v}$. Atunci cînd forţa de frecare echilibrează forţa electrică

$$\vec{F}_e + \vec{F}_f = 0,$$

purtătorii continuă să se mişte ordonat uniform. Forţa de frecare fiind opusă vitezei, se poate exprima astfel :

$$\vec{F}_f = -k_f\vec{v},$$

unde k_f este un coeficient de frecare. Din relaţia de echilibru al forţelor rezultă :

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_f = k_f\vec{v}$$

sau

$$|q_m|E = k_f v.$$

Înmulţind şi împărţind membrul drept al acestei egalităţi cu $n|q_m|$, obţinem :

$$E = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot nq_m v = \frac{k_f}{nq_m^2} J = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot \frac{I}{A}.$$

Înmulţind această relaţie cu l (lungimea conductorului), obţinem :

$$U = El = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot \frac{l}{A} \cdot I.$$

Dar conform legii lui Ohm, $U = RI$, deci coeficientul de proporţionalitate între tensiune şi curent este :

$$R = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot \frac{l}{A} = \rho\frac{l}{A}$$

cu

$$\rho = \frac{k_f}{nq_m^2}.$$

Observăm aşadar că rezistivitatea este direct proporţională cu coeficientul de frecare şi invers proporţională cu concentraţia purtătorilor şi cu pătratul sarcinii electrice ; rezistivitatea nu depinde deci de semnul sarcinii purtătorilor.

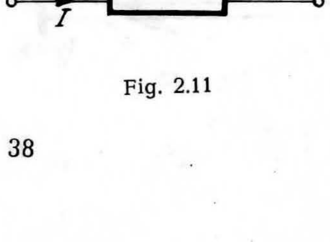

Fig. 2.11

În circuitele electrice, conductoarele care au o rezistenţă R şi la bornele cărora se aplică tensiunea U se reprezintă ca în figura 2.11.

4. Legea lui Joule

Experienţa arată că un conductor parcurs de curent se încălzeşte (fenomenul se numeşte *efect Joule*). Fizicianul englez *James Joule* a arătat că *prin trecerea unui curent electric de intensitate I printr-un conductor electric de rezistenţă R, într-un interval de timp* Δt, *se dezvoltă o cantitate de căldură*

$$\boxed{Q_{\Delta t} = RI^2\Delta t.} \tag{2.10}$$

Aceasta este **legea lui Joule.**

Căldura dezvoltată în unitatea de timp, care se mai numeşte şi *putere Joule*, va fi:

$$\boxed{P_J = \frac{Q_{\Delta t}}{\Delta t} = RI^2} \tag{2.11}$$

Deoarece conform legii lui Ohm $U = RI$ şi $I = GU$, puterea Joule se mai poate exprima şi astfel:

$$\boxed{P_J = RI^2 = (RI)I = UI = R\left(\frac{U}{R}\right)^2 = \frac{U^2}{R} = GU^2.}$$

Unitatea SI de putere este *wattul* (1 W):

$$1\ \text{W} = 1\ \Omega \cdot 1\ \text{A}^2.$$

Aplicaţia 1. *Care este căldura degajată în unitatea de timp de un conductor cu rezistenţa* $R = 10\ \Omega$ *parcurs de un curent cu intensitatea de 5 A?*

$$P_J = RI^2 = 10 \times 5^2 = 250\ \text{W}.$$

Aplicaţia 2. *Ce rezistenţă are un bec de 100 W alimentat la 220 V?*

$$P_J = \frac{U^2}{R};\ R = \frac{U^2}{P_J} = \frac{220^2}{100} = 484\ \Omega.$$

Aplicaţia 3. *Ce căldură degajă în timp de 24 ore un radiator funcţionînd la tensiunea de 220 V, dacă absoarbe un curent* $I = 5$ *A?*

$$Q_{\Delta t} = RI^2\Delta t = UI\Delta t = 220 \times 5 \times 24 \times 3\,600 = 9{,}5 \times 10^7\ \text{J};$$

$$Q_{\Delta t} = 95\,000\ \text{kJ}.$$

Aplicaţia 4. *Ştiind că 1 kilowattoră (1 kWh) este căldura dezvoltată într-o oră de un conductor care la tensiunea de 1 kV absoarbe 1 A, să se afle această căldură, exprimată în joule.*

$$Q_{\Delta t} = UI\Delta t = 10^3 \times 1 \times 3\,600 = 3{,}6 \times 10^6\ J = 1\ \text{kWh}.$$

5. Interpretarea microscopică a legii lui Joule

Din punct de vedere microscopic, orice creştere de temperatură este rezultatul intensificării agitaţiei termice a particulelor microscopice ale substanţei.

Aşa cum am arătat în subcapitolul B.3, ciocnirile între purtătorii de sarcină aflaţi în mişcare ordonată şi reţeaua ionică a conductorului sînt inevita-

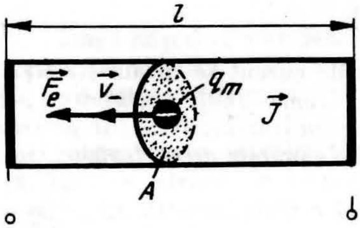

Fig. 2.12

bile. Purtătorii de sarcină care suferă ciocniri își pierd mișcarea ordonată, respectiv componenta vitezei în mișcarea ordonată se anulează. Energia cinetică corespunzătoare mișcării ordonate este transferată mișcării termice. Deoarece mișcarea ordonată este determinată de forțele electrice, pînă la urmă lucrul mecanic al acestor forțe se regăsește în creșterea energiei de agitație termică a particulelor substanței, care se manifestă prin creșterea de temperatură.

În adevăr, puterea mecanică a forțelor electrice dintr-un conductor de lungime l și cu secțiunea de arie A (fig. 2.12) este :

$$P_{mec} = (nF_e v)Al = n(|q_m| Ev)Al,$$

unde :

$|q_m| Ev$ este puterea pentru un singur purtător ;
n — concentrația purtătorilor ;
Al — volumul conductorului.

Aranjînd altfel ordinea factorilor, mai scriem și

$$P_{mec} = (n |q_m| v)A(El) = JAU = IU.$$

Deoarece $U = RI$, obținem :

$$P_{mec} = RI^2 = P_J.$$

Efectul Joule deci nu este altceva decît *transformarea lucrului mecanic efectuat de cîmpul electric asupra purtătorilor de sarcină în energie de agitație termică.*

Considerăm un conductor închis pe care îl introducem într-un cîmp electric. Constatăm că în conductor nu va apărea curent și nici o transformare de energie. În adevăr, așa cum am văzut la regimul electrostatic, lucrul mecanic al forțelor electrice pe orice drum închis este nul și deci mișcarea purtătorilor de sarcină numai sub acțiunea forțelor electrice pe drumuri închise nu este posibilă.

Experiența arată că printr-un circuit închis poate circula curent electric numai dacă, pe lîngă forțele electrice asupra purtătorilor de sarcină acționează forțe de altă natură (neelectrică), care pot efectua lucru mecanic nenul pe drumuri închise (se numesc *forțe neconservative*).

Se numește **generator electric** sau **sursă electrică** *orice ansamblu de conductoare în care asupra purtătorilor de sarcină se exercită forțe neelectrice capabile să efectueze un lucru mecanic.*

a. *Generatorul în gol și tensiunea electromotoare a sursei*

Să ne imaginăm o porțiune de conductor (deschisă) în care, pe lîngă forța electrică $\vec{F}_e$, asupra purtătorilor de sarcină acționează și forța neelectrică $\vec{F}_{ne}$. Să presupunem un moment inițial în care cîmpul electric este nul și asupra purtătorilor (presupuși pozitivi) acționează numai forțele neelectrice. Sub acțiunea acestor forțe, purtătorii de sarcină vor fi aglomerați la unul dintre capetele conductorului (fig. 2.13), care se va încărca astfel pozitiv ; celălalt capăt, avînd lipsă de purtători, se va încărca negativ. Această separare de sarcină va produce însă un cîmp electric orientat dinspre sarcinile pozitive spre cele negative. El va produce forțe electrice $\vec{F}_e$ orientate în sens invers față de forțele $\vec{F}_{ne}$, care vor acționa asupra purtătorilor. Procesul de separare a sarcinilor încetează în momentul în care forțele electrice echilibrează forțele neelectrice. Ecuația de echilibru al forțelor se scrie :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{ne} = 0$$

sau, scalar :

$$F_e = F_{ne}.$$

Deoarece $F_e = q_m E \neq 0$, observăm că în conductor se stabilește un cîmp electric chiar cînd purtătorii nu se mișcă ordonat și deci nu există curent electric, deci cînd generatorul „funcționează în gol".

Existînd cîmp electric, între capetele conductorului apare o diferență de potențial

$$V_A - V_B = El = \frac{F_e}{q_m} l = \frac{F_{ne}}{q_m} l = E_i l$$

Mărimea

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_{ne}}{q_m} \tag{2.12}$$

se numește *cîmp electric imprimat*, iar produsul :

$$E_i l = e \tag{2.13}$$

se numește *tensiune electromotoare (t.e.m.) imprimată* sau *tensiune electromotoare a sursei.*

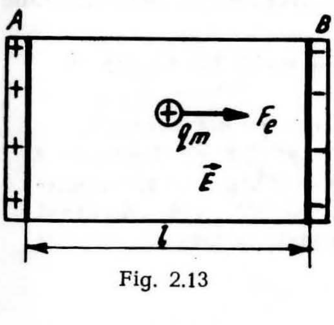

Fig. 2.13

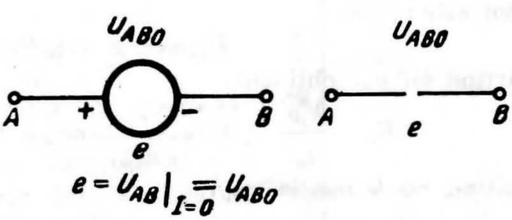

Fig. 2.14

Deoarece diferența de potențial $V_A - V_B$ este egală și cu tensiunea U_{AB} din lungul conductorului cînd curentul este nul, folosind notația:

$$V_A - V_B = U_{AB}|_{I=0} = U_{ABO}$$

putem scrie:

$$\boxed{e = U_{ABO}}$$

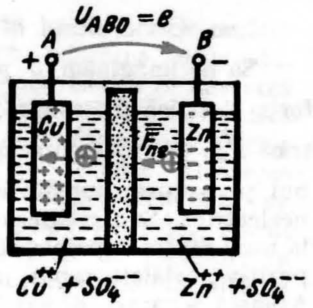

Fig. 2.15

Rezultă așadar că *t.e.m. a unei surse este egală cu tensiunea electrică* (diferența de potențial) *de mers în gol.*

În schemele electrice, generatoarele se reprezintă ca în figura 2.14, t.e.m. fiind orientată în sensul forțelor neelectrice, adică dinspre minus spre plus, iar tensiunea U_{AB} — în sensul forțelor electrice, adică de la plus la minus.

Cele mai vechi și mai cunoscute surse de t.e.m. sînt sursele electrochimice (pilele electrice), în care forțele neelectrice se manifestă pe suprafața de contact dintre electrozi și electrolit (fig. 2.15). Particulele încărcate pozitiv asupra cărora se exercită forțele neelectrice sînt ionii de cupru și de zinc : Cu^{++} și, respectiv, Z^{++}.

b. *Generatorul în sarcină*

Dacă între bornele unui generator se conectează un conductor, se formează un circuit închis, iar forțele neelectrice fac ca purtătorii de sarcină să aibă, pe traiectorii închise, o mișcare continuă (fig. 2.16). Pentru purtătorii aflați în generator, mișcarea este determinată de acțiunea simultană a forțelor neelectrice, electrice și a forțelor de frecare. Mișcarea purtătorilor în conductorul exterior este determinată de forța de natură electrică și de cea de frecare.

În mișcare staționară (cînd purtătorii au viteze constante)forțele sînt în echilibru :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{ne} + \vec{F}_f = 0$$

pentru purtătorii din generator ;

$$\vec{F}_e + \vec{F}_f = 0$$

pentru cei din conductorul exterior.

Purtătorii se mișcă în sensul forței neelectrice și deci relația între mărimile forțelor este :

$$F_{ne} = k_f v + q_m E.$$

Împărțind cu q_m, obținem :

$$E_i = \frac{k_f v}{q_m} + E = \frac{k_f}{n q_m^2} \cdot n q_m v + E = \rho \frac{I}{A} + E.$$

Înmulțind cu l, relația devine :

$$E_i l = \rho \frac{l}{A} I + El.$$

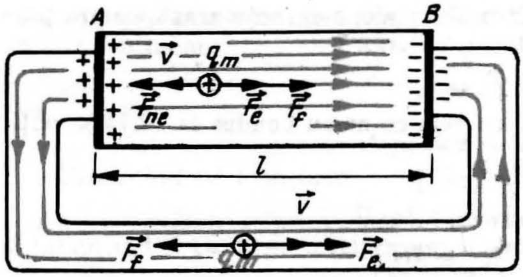

Fig. 2.16

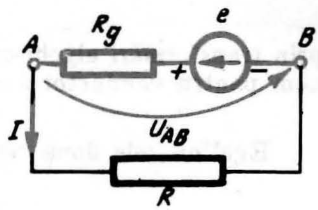

Fig. 2.17

Dar: $El = U_{AB}$, $E_i l = e$ şi $\frac{\rho l}{A} = R_g$ (rezistenţa internă a generatorului) şi obţinem:

$$\boxed{e = R_g I + U_{AB}} \qquad (2.14)$$

Aceasta este *ecuaţia generatorului în sarcină.*

Circuitul echivalent este prezentat în figura 2.17.

Dacă $I = 0$, se obţine aşa cum am văzut,

$$e = U_{AB0}.$$

Relaţia (2.14) se mai poate scrie:

$$\boxed{U_{AB} = e - R_g I.} \qquad (2.14')$$

Ea arată că *tensiunea la bornele generatorului este mai mică decît t.e.m., scăzînd pe măsură ce intensitatea curentului creşte* (fig. 2.18). Mărimea $R_g I$ care se scade din t.e.m. se numeşte *cădere de tensiune internă a generatorului.*

Explicitînd relaţia (2.14) în raport cu curentul obţinem:

$$\boxed{I = \frac{e - U_{AB}}{R_g},}$$

de unde se vede că valoarea maximă a curentului este acëea la care se anulează tensiunea la borne. Acest lucru se poate realiza legînd bornele A şi B între ele (punîndu-le în scurtcircuit). Intensitatea curentului care rezultă se numeşte *curent de scurtcircuit* şi se notează cu I_{sc}:

$$e = R_g I_{sc} \Rightarrow \boxed{I_{sc} = \frac{e}{R_g}} \qquad (2.15)$$

c. Legea lui Ohm în circuite cu generator

Considerăm un generator (fig. 2.17) de t.e.m. e şi cu rezistenţa internă R_g, care alimentează un conductor (pe care îl vom numi *receptor*) de rezistenţă R. Fie A, B bornele lor de legătură. Pentru generator putem scrie ecuaţia:

$$U_{AB} = e - R_g I.$$

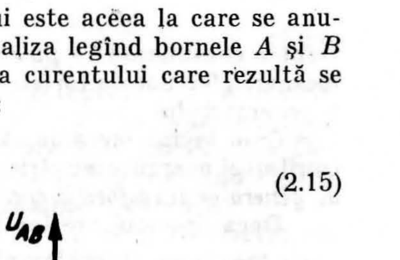

Fig. 2.18

Pornind de la ecuaţia de echilibru al forţelor care acţionează asupra purtătorilor în mişcare prin conductorul exterior:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_f = 0,$$

prin transformări algebrice similare cu cele ce ne-au condus la (2.14'), obţinem pentru conductorul receptor:

$$U_{AB} = RI.$$

Egalînd cele două relaţii obţinem:

$$e - R_g I = RI$$

sau

$$I = \frac{e}{R + R_g} \tag{2.16}$$

Această relaţie se mai numeşte şi *legea lui Ohm pentru un circuit închis cu sursă de t.e.m. şi receptor exterior.*

În cazul generatorului în gol neexistînd curent, nu există transformare de energie. *Un generator în gol este un sistem de conductoare în stare de echilibru electrostatic.*

● **Sursa în regim de generator.** Scriind ecuaţia unui generator în sarcină:

$$e = RI + R_g I$$

şi înmulţind cu I, obţinem o relaţie între puteri:

$$eI = RI^2 + R_g I^2 = P_J + P_{Jg}.$$

Se observă că puterea Joule dezvoltată în conductor şi în generator este acoperită de termenul eI. De aceea:

$$eI = P_g \tag{2.17}$$

trebuie considerată ca *putere dezvoltată de generator.* Ea se datorează lucrului mecanic efectuat de forţele neelectrice, deoarece ele determină apariţia t.e.m. a generatorului.

Cum lucrul mecanic al forţelor neelectrice se efectuează pe seama cheltuirii unei energii neelectrice (de exemplu chimice), spunem că *o sursă în regim de generator transformă energia sa internă (neelectrică) în energie electrică.*

Dacă procesul are loc într-un interval de timp Δt, obţinem:

$$eI\Delta t = P_J \Delta t + P_{Jg} \Delta t$$

sau

$$\Delta W_g = \Delta W_J + \Delta W_{Jg} \tag{2.18}$$

adică *energia dezvoltată de sursă în timpul Δt se transformă în căldură prin efect Joule parţial în sursă, datorită rezistenţei ei interne, şi parţial în conductorul exterior.*

● **Sursă în regim de acumulator.** Dacă unei surse i se aplică din exterior o tensiune la borne mai mare decît tensiunea sa la mers în gol, atunci curentul va circula în sens contrar t.e.m. Schimbînd în ecuaţia $e = U_{AB} + R_g I$ pe I cu $-I$, obţinem :

$$e = U_{AB} - R_g I$$

sau

$$U_{AB} = e + R_g I.$$

Înmulţind cu I obţinem o relaţie între puteri:

$$U_{AB} I = eI + R_g I^2$$

şi înmulţind şi cu Δt — o relaţie între energii :

$$U_{AB} I \Delta t = eI\Delta t + R_g I^2 \Delta t,$$

adică

$$\Delta W_{AB} = \Delta W_g + \Delta W_{Jg} \qquad (2.19)$$

În acest caz *sursa primeşte din exterior energia electrică* ΔW_{AB} (pe la borne), *din care o parte o transformă în energie internă neelectrică (o acumulează), iar restul o transformă în căldură prin efect Joule.*

○ **Observaţie.** Un astfel de proces se numeşte „încărcare" şi este posibil numai la anumite surse, care se numesc *acumulatoare*. Spunem că în acest caz *încărcăm acumulatorul.*

○ **De reţinut!** *Subliniem că ori de cîte ori t.e.m. şi intensitatea curentului au acelaşi sens, generatorul cedează energie electrică şi ori de cîte ori sînt de sensuri opuse, generatorul primeşte energie electrică.*

● Un sistem de corpuri se consideră izolat din punct de vedere electric dacă în jurul său se poate delimita o suprafaţă închisă prin care nu trece curent electric. Experienţa arată că sarcina electrică totală a unui astfel de sistem este invariabilă în timp. Acest rezultat constituie **legea conservării sarcinii electrice** şi se enunţă astfel : *sarcina electrică a unui sistem izolat de corpuri este constantă* :

$$\boxed{q_\Sigma = const} \qquad (2.20)$$

Conservarea sarcinii electrice este o consecinţă a faptului că particulele elementare care intră în constituţia atomilor au sarcina constantă şi invariabilă, egală cu un multiplu al sarcinii elementare $q_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Deoarece un sistem de corpuri este izolat atunci cînd nu pierde şi nici nu cîştigă electroni sau ioni, rezultă evident că sarcina sa rămîne constantă.

● **Forma generală a legii conservării sarcinii.** Un corp conductor nu este izolat dacă există o suprafaţă care-l înconjoară străbătută de curent electric (fig. 2.19). Fie I_Σ intensitatea acestui curent şi $q_\Sigma(t)$ sarcina acestui conductor la momentul t. Într-un interval de timp Δt cuprins între momentele t şi $t + \Delta t$, datorită circulaţiei curentului prin conductorul de legătură, la exteriorul suprafeţei se va scurge sarcina :

$$\Delta q = I_\Sigma \Delta t.$$

Ca urmare, a acestei pierderi de sarcină, sarcina conductorului din interiorul suprafeţei Σ va scădea, astfel încît :

$$q_\Sigma(t + \Delta t) = q_\Sigma(t) - \Delta q.$$

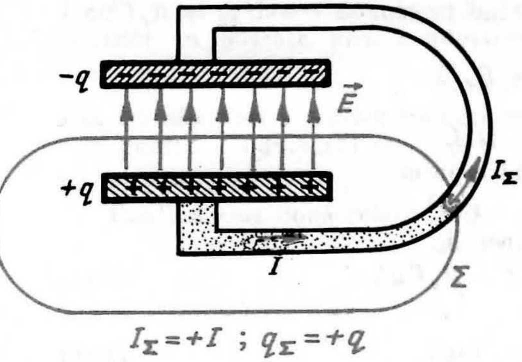

Fig. 2.19

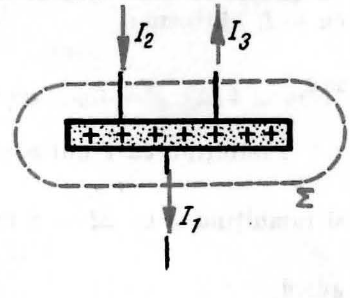

Fig. 2.20

Notînd cu :

$$\Delta q_\Sigma = q_\Sigma(t + \Delta t) - q_\Sigma(t)$$

variaţia sarcinii din interiorul suprafeţei, obţinem :

$$\Delta q_\Sigma = -\Delta q = -I_\Sigma \Delta t.$$

De aici rezultă :

$$\boxed{I_\Sigma = -\frac{\Delta q_\Sigma}{\Delta t}} \tag{2.21}$$

care constituie **expresia cea mai generală a legii conservării sarcinii** şi se enunţă astfel : *viteza de scădere a sarcinii electrice q_Σ din interiorul unei suprafeţe Σ este egală cu intensitatea totală I_Σ a curentului electric care iese din suprafaţă.*

○ **Notă.** În general, prin I_Σ trebuie să înţelegem suma algebrică a curenţilor care străbat suprafaţa Σ (pozitivi cînd ies şi negativi cînd intră).

Aplicaţia 1. *Un corp conductor avînd la momentul t sarcina $q = 100\mu C$ este legat cu alte corpuri prin trei conductoare prin care circulă curenţii $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A şi $I_3 = 5$ A cu sensurile din figura 2.20. Care va fi sarcina electrică a corpului după 5 μs.*

Scriem :

$$I_\Sigma = I_1 - I_2 + I_3 = 4\ \text{A} ;\ \Delta t = 5 \times 10^{-6}\ \text{s} ;$$

$$\Delta q_\Sigma = -I_\Sigma \Delta t = -4 \times 5 \times 10^{-6} = -20\ \mu\text{C}.$$

Deci :

$$q_\Sigma(t + \Delta t) = q_\Sigma(t) + \Delta q_\Sigma = 100\ \mu\text{C} - 20\ \mu\text{C} = 80\ \mu\text{C}.$$

Aplicaţia 2. *Armăturile unui condensator încărcat iniţial cu sarcinile $\pm q = \pm 50\mu C$ se leagă între ele printr-un conductor (v. fig. 2.19). Să se determine intensitatea curentului din conductor ştiind că în primele 2 μs de la efectuarea legăturii armăturile se descarcă cu 1% din sarcina iniţială.*

Înconjurînd armătura pozitivă cu o suprafaţă Σ, putem scrie :

$$I_\Sigma = -\frac{\Delta q_\Sigma}{\Delta t} = -\frac{\frac{-50}{100}\ \mu\text{C}}{2\mu\text{s}} = 0{,}25\ \text{A} = 250\ \text{mA}.$$

Capitolul 3

ELECTROTEHNICA CIRCUITELOR DE CURENT CONTINUU

A. ELEMENTE DE CIRCUIT

1. Caracterizarea elementelor de circuit

Prin **circuite electrice de curent continuu** înțelegem *circuitele în care curenții și tensiunile au valori invariabile în timp.* De regulă, aceste mărimi se notează cu litere mari : I, E*, U etc.

Componentele unui circuit electric se numesc **elemente de circuit.** De exemplu, circuitul simplu de curent continuu cuprinzînd o sursă cu t.e.m. E și rezistența internă R_i, care alimentează un rezistor avînd rezistența R (fig. 3.1), are două elemente : sursa și rezistorul.

Elementele de circuit cu două borne (terminale) de acces se numesc **elemente dipolare.**

Atunci *cînd un element dipolar poate fi caracterizat printr-o singură mărime,* el se numește **element ideal de circuit** (de exemplu, rezistorul ideal este caracterizat numai de rezistența sa, R).

● **Elemente de circuit pasive și active.** Un *element de circuit* de curent continuu se numește *pasiv* dacă nu poate ceda energie electrică în circuit oricare ar fi sensul curentului prin element (de regulă, un astfel de element absoarbe energie electrică). Rezistorul este un element pasiv de circuit.

Un *element de circuit* se numește *activ* dacă poate genera energie de natură electrică în anumite regimuri de funcționare (în alte regimuri de funcționare, un astfel de element poate, eventual, primi energie electrică, fiind un receptor de energie). Sursele sînt elemente active de circuit.

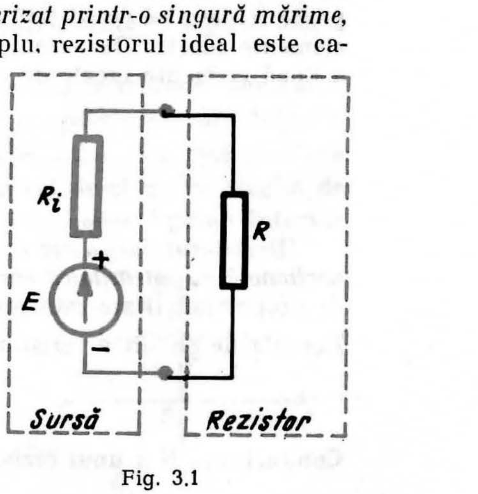

Fig. 3.1

* *În regim electrostatic* s-a utilizat notația E pentru intensitatea cîmpului electric.

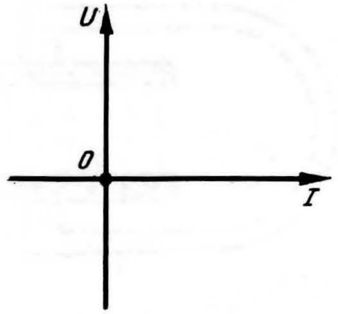

Fig. 3.2

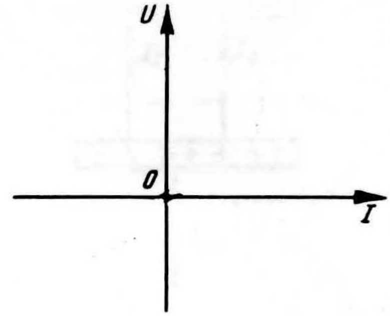

Fig. 3.3

Un circuit electric format numai din elemente pasive se numeşte *circuit pasiv*. Un circuit electric care pe lîngă elemente pasive are cel puţin un element activ se numeşte *circuit activ*.

● Un element dipolar de circuit este complet caracterizat prin relaţia între tensiunea U la borne şi intensitatea I a curentului prin element. Graficul acestei relaţii într-un plan de coordonate $U—I$ se numeşte **caracteristică tensiune-curent a elementului de circuit.** *Elementele de circuit* se numesc *liniare* dacă caracteristica tensiune-curent este o dreaptă (fig. 3.2). *Elementele de circuit* se numesc *neliniare* cînd caracteristica tensiune-curent este o curbă (fig. 3.3).

Elementele reale de circuit sînt, de regulă, neliniare, dar multe dintre ele pot fi considerate în limite suficient de largi ale curentului şi tensiunii ca fiind liniare.

Teoria simplificată a circuitelor electrice de c.c. se referă la circuite alcătuite din elemente ideale de circuit : rezistorul ideal şi sursa ideală. Utilitatea elementelor de circuit ideale constă în faptul că permit o formulare simplă a teoriei circuitelor, iar comportarea oricărui element real de circuit poate fi descrisă (modelată) printr-o schemă echivalentă alcătuită numai din elemente ideale. De aceea vom începe studiul circuitelor de c.c. cu studiul a două elemente ideale de circuit.

Rezistorul ideal *este elementul de circuit care are tensiunea la borne proporţională cu intensitatea curentului, oricare ar fi valoarea curentului.* Factorul de proporţionalitate este rezistenţa R a rezistorului.

Ecuaţia de circuit a rezistorului este :

$$U = RI \quad \text{pentru orice } I$$

Conductanţa G a unui rezistor este mărimea inversă rezistenţei :

$$G = \frac{1}{R}.$$

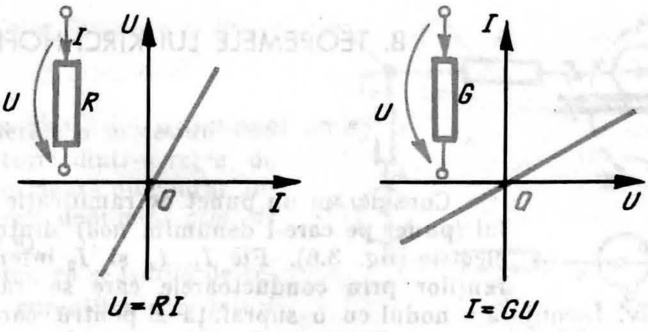

Fig. 3.4

Simbolul grafic al rezistorului ideal și caracteristica tensiune-curent (o dreaptă care trece prin originea axelor) sînt prezentate în figura 3.4.

Rezistorul ideal este un element pasiv : puterea $P_R = UI = RI^2 = GU^2 = \frac{U^2}{R}$ este totdeauna pozitivă, fiind efectiv primită pe la borne. Rezistorul ideal *nu funcționează decît ca receptor de energie electrică*. Puterea primită pe la borne se regăsește sub formă de căldură dezvoltată în unitatea de timp, prin efect Joule.

3. Sursa ideală de tensiune

Sursa ideală de tensiune *este un element de circuit care are tensiunea la borne independentă de curentul care trece prin sursă.*

Caracteristica U—I a sursei ideale de tensiune se exprimă prin relația :

$$\boxed{U = E,} \text{ pentru orice } I.$$

Simbolul grafic și caracteristica U—I sînt reprezentate în figurile 3.5, *a* și *b*.

În raport cu sensurile precizate, sursa funcționează în regim de generator cînd curentul prin sursă este pozitiv și în regim de receptor cînd curentul prin sursă este negativ. Puterea la bornele sursei, $P_b = UI = EI$, este pozitivă în primul caz (regim de generator) și negativă în cel de-al doilea (regim de receptor). Energia electrică schimbată de sursă prin borne într-un interval de timp $(t, t + \Delta t)$ este $\Delta W = P_b \Delta t$. Energia electrică este pozitivă ($\Delta W > 0$) cînd este efectiv cedată de sursă și negativă cînd este efectiv primită de sursă.

Intensitatea I a curentului prin sursă este dependentă de elementele de circuit conectate la bornele sale.

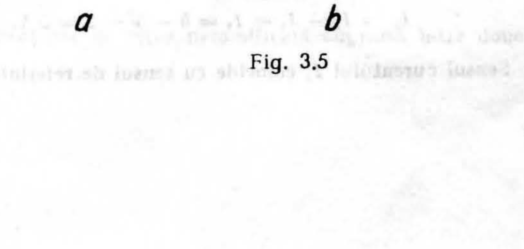

Fig. 3.5

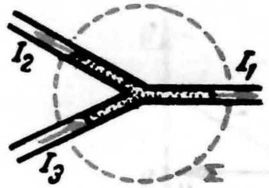

Fig. 3.6

B. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF

1. Prima teoremă a lui Kirchhoff

Considerăm un punct de ramificaţie a curentului (punct pe care-l denumim *nod*) dintr-un circuit electric (fig. 3.6). Fie I_1, I_2 şi I_3 intensităţile curenţilor prin conductoarele care se ramifică din nodul respectiv. Înconjurăm nodul cu o suprafaţă Σ pentru care, conform legii conservării sarcinii putem scrie:

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 - I_3$$

şi

$$\Delta q_\Sigma = 0$$

(sarcina electrică existentă pe suprafeţele conductoarelor parcurse de curent continuu este invariabilă în timp). Înlocuind în enunţul legii $I_\Sigma = \frac{\Delta q_\Sigma}{\Delta t}$, obţinem:

$$\boxed{I_1 + I_2 - I_3 = 0} \tag{3.1}$$

Această relaţie reprezintă **prima teoremă a lui Kirchhoff** referitoare la nodul considerat. Ea se generalizează şi se enunţă astfel: *suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile care se ramifică dintr-un nod al unui circuit de curent continuu* (reţea de c.c.) *este nulă*:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \pm I_k = 0} \tag{3.2}$$

○ **Precizare.** După convenţia adoptată în formularea legii conservării sarcinii, intensităţile curenţilor care pleacă din nod se iau cu semnul plus, iar cele ale curenţilor care vin în nod — cu semnul minus.

Aplicaţie. *Din nodul (a) al unei reţele de c.c. se ramifică patru conductoare. Ştiind că $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A şi $I_3 = 5$ A, să se determine curentul I_4.*

Alegem pentru I_4 un sens de referinţă arbitrar, ca în figura 3.7, şi aplicăm prima teoremă a lui Kirchhoff. Obţinem:

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0,$$

de unde rezultă:

$$I_4 = I_3 - I_1 - I_2 = 5 - 1 - 2 = 2 \text{ A}.$$

Sensul curentului I_4 coincide cu sensul de referinţă ales arbitrar.

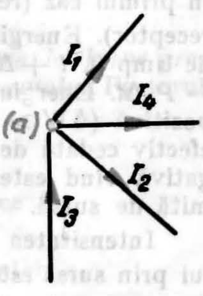

Fig. 3.7

2. A doua teoremă a lui Kirchhoff

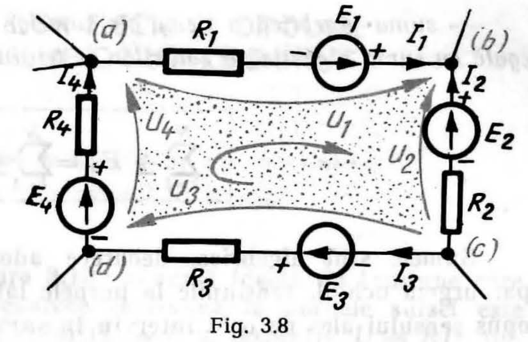

Fig. 3.8

Considerăm o succesiune (un lanţ) de laturi* dintr-o reţea de c.c., care formează un contur închis pe care-l denumim *ochi de reţea* (fig. 3.8).

Admiţînd că sensurile de referinţă ale curenţilor din laturi (fig. 3.8) coincid cu sensurile de referinţă ale t.e.m. şi considerînd tensiunile de la bornele laturilor cu sensurile de referinţă din figura 3.8, vom putea scrie:

$$\begin{cases} U_1 + E_1 = R_1 I_1 \\ U_2 + E_2 = R_2 I_2 \\ U_3 + E_3 = R_3 I_3 \\ U_4 + E_4 = R_4 I_4 \end{cases} \tag{3.3}$$

Scriem şi relaţiile de legătură între tensiunile la bornele laturilor şi potenţialele bornelor, respectiv:

$$\begin{cases} U_1 = V_a - V_b \\ U_2 = V_c - V_b \\ U_3 = V_c - V_d \\ U_4 = V_d - V_a \end{cases} \tag{3.4}$$

Înmulţind cu (—1) relaţia a doua şi adunînd parte cu parte se obţine:

$$\boxed{U_1 - U_2 + U_3 + U_4 = 0} \tag{3.5}$$

Procedînd la fel cu sistemul de ecuaţii (3.3) şi ţinînd cont de rezultatul stabilit prin (3.5), obţinem şi relaţia:

$$\boxed{E_1 - E_2 + E_3 + E_4 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4} \tag{3.5'}$$

Am obţinut astfel două formulări diferite pentru teorema a doua a lui Kirchhoff (echivalente numai pentru circuite ce conţin în exclusivitate elemente liniare de circuit). Avem deci pentru **teorema a doua a lui Kirchhoff** următoarele enunţuri:

— *suma algebrică a tensiunilor la bornele laturilor ce alcătuiesc un ochi de reţea este nulă*:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \pm U_k = 0} \tag{3.6}$$

---

* Prin *latură* se înţelege orice porţiune de reţea neramificată cuprinsă între două noduri.

— *suma algebrică a t.e.m. ale surselor din laturile unui ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune pe rezistoarele laturilor* :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \pm E_k = \sum_{k=1}^{N} \pm R_k I_k} \qquad (3.7)$$

Sumele sînt algebrice, deoarece adoptînd un sens arbitrar în care parcurgem ochiul, tensiunile la bornele laturilor care au sensul de referință opus sensului ales pe ochi intervin în sume cu semnul minus. Aceeași regulă de stabilire a semnelor se aplică și pentru t.e.m. și căderile de tensiune pe rezistoarele din laturile ochiului.

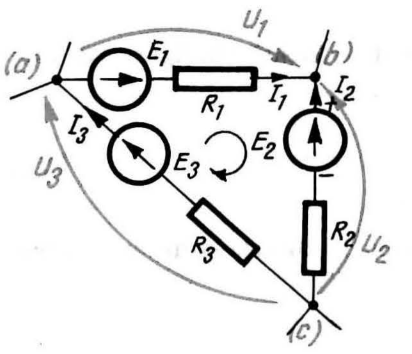

Fig. 3.9

Aplicația 1. *Să se aplice teorema a doua a lui Kirchhoff pentru rețeaua din figura 3.9.*

Conform primului enunț vom scrie :

$$U_1 - U_2 + U_3 = 0,$$

iar după al doilea :

$$E_1 - E_2 + E_3 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3.$$

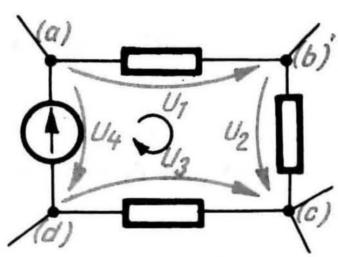

Fig. 3.10

Aplicația 2. *În ochiul de rețea din figura 3.10 se dau $U_1 = 200$ V, $U_2 = 50$ V și $U_3 = 400$ V. Se cere tensiunea U_4, cu sensul de referință din figură.*

Aplicînd prima formă a teoremei a doua a lui Kirchhoff, obținem :

$$U_1 + U_2 - U_3 - U_4 = 0,$$

de unde rezultă :

$$U_4 = U_3 - U_1 - U_2 = 400 - 200 - 50 = 150 \text{ V}.$$

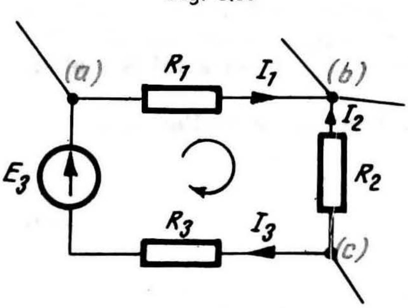

Fig. 3.11

Aplicația 3. *În ochiul de rețea din figura 3.11 se dau : $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$ și curenții $I_1 = 5$ A, $I_2 = 1$ A și $I_3 = 10$ A. Se cere t.e.m. E_3.*

Scriind a doua formă a teoremei a doua a lui Kirchhoff obținem :

$$E_3 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 50 - 20 + 10 = 40 \text{ V}.$$

C. STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DIPOLARE CU AJUTORUL TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

1. Reguli de asociere a sensurilor de referință ale curentului și tensiunii la borne

Să analizăm circuitul din figura 3.12 : o sursă ideală de tensiune care alimentează un rezistor liniar. Deoarece tensiunea la bornele sursei este aceeași cu cea de la bornele rezistorului ($U = E$ și respectiv $U = RI$), putem deduce curentul prin circuit :

$$I = \frac{E}{R}.$$

Puterea electrică dezvoltată de sursă

$$P_g = EI$$

este cedată rezistorului, unde energia se transformă în căldură prin efect Joule. Deci :

$$P_g = EI = RI^2 = P_R.$$

Față de bornele A, B, curentul prin borne și tensiunea între borne au sensurile asociate în moduri diferite, după cum ne referim la partea din stînga unde este sursa de energie sau la partea din dreapta unde este receptorul de energie.

Pentru un circuit dipolar se spune că *sensurile tensiunii și curentului sînt asociate după regula utilizată pentru generatoare dacă sensurile lor sînt cele pentru sursa electrică în regim de generator* (fig. 3.13). *Tensiunea și curentul au sensurile de referință asociate după regula utilizată pentru receptoare dacă sensurile lor sînt cele utilizate pentru un rezistor* (fig. 3.14).

○ **Important !** Precizarea regulii de asociere a sensurilor de referință ale tensiunii și curentului la bornele unui element dipolar este obligatorie. Numai în raport cu aceste sensuri au semnificație valorile numerice ale acestor mărimi, care pot fi pozitive sau negative.

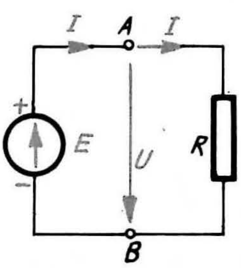

Fig. 3.12

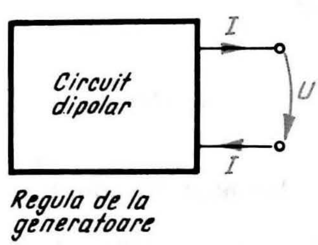

Fig. 3.13

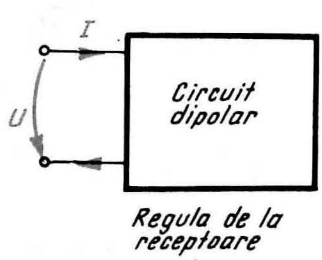

Fig. 3.14

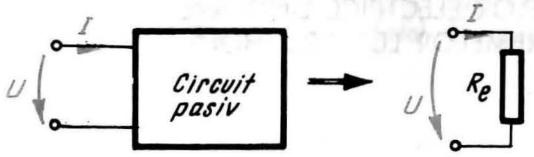

Fig. 3.15

2. Conexiunile rezistoarelor

Rezistența echivalentă a unui circuit dipolar liniar și pasiv este raportul dintre tensiunea aplicată la borne și intensitatea curentului prin circuit (fig. 3.15).

Relația de calcul este:

$$R_e = \frac{U}{I}.$$

Să analizăm, pe această bază, asocierea în serie și în paralel a rezistoarelor.

a. *Asocierea în serie*

Pentru început să considerăm două rezistoare legate în serie (fig. 3.16) Deoarece $U = U_1 + U_2$, unde $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$, iar $U = R_e I$, obținem:

$$R_e I = R_1 I + R_2 I$$

de unde, simplificînd cu $I \neq 0$, se obține:

$$\boxed{R_e = R_1 + R_2} \qquad (3.8)$$

Deoarece $R_e = \frac{1}{G_e}$; $R_1 = \frac{1}{G_1}$ și $R_2 = \frac{1}{G_2}$, obținem:

$$\boxed{\frac{1}{G_e} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} \qquad (3.9)$$

sau:

$$\boxed{G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}}. \qquad (3.10)$$

Dacă elementele sînt identice, $R_e = 2R$ *și* $G_e = \frac{G}{2}$.

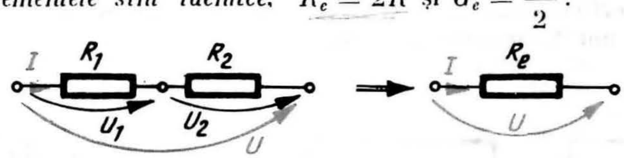

Fig. 3.16

b. *Asocierea în paralel*

Dacă cele două rezistoare sînt conectate în paralel, atunci rezistența echivalentă se determină punînd condiția ca pentru aceeași tensiune între borne curentul prin borne în cele două variante să fie același (fig. 3.17).

Curentul prin rezistența echivalentă este $I = \frac{U}{R_e}$ și, conform primei teoreme a lui Kirchhoff, este dat de:

$$I = I_1 + I_2$$

unde $I_1 = \frac{U}{R_1}$ și $U_2 = \frac{U}{R_2}$.

Făcînd înlocuirile și simplificînd cu $U \neq 0$, obținem:

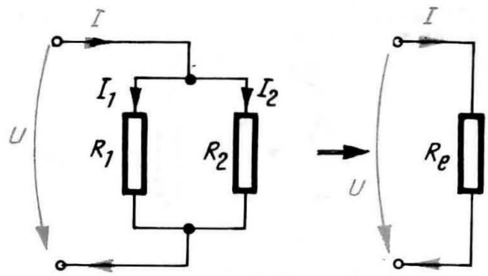

Fig. 3.17

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{3.11}$$

sau sub altă formă:

$$\boxed{R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \tag{3.12}$$

Mai obținem, evident,

$$\boxed{G_e = G_1 + G_2.} \tag{3.13}$$

Dacă elementele sînt identice, atunci $G_e = 2G$ și $R_e = \frac{R}{2}$.

c. *Generalizarea relațiilor de calcul al rezistențelor echivalente*

Procedînd la fel putem stabili relațiile de calcul pentru cazul în care sînt asociate în serie sau paralel un număr n de rezistoare diferite.

● Astfel, **pentru n rezistoare în serie** (fig. 3.18) teorema a doua a lui Kirchhoff ne dă:

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n,$$

unde $U = R_e I$ și $U_k = IR_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Făcînd înlocuirile se obține, după împărțire prin I, relația

$$\boxed{R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n,}$$

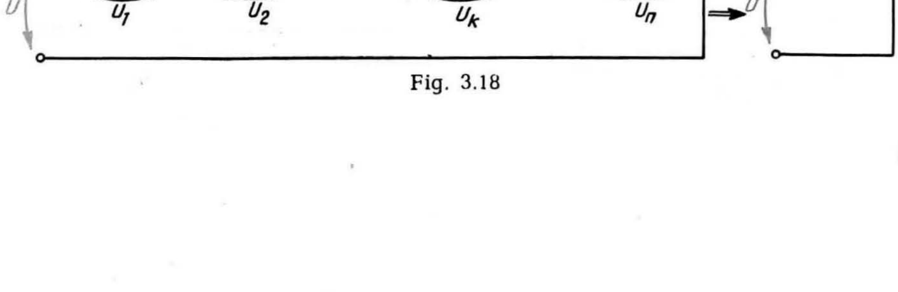

Fig. 3.18

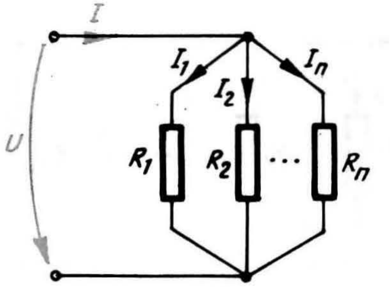

Fig. 3.19

pe care o mai scriem

$$\boxed{R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k}$$

sau

$$\boxed{\frac{1}{G_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k}.} \tag{3.14}$$

Dacă rezistoarele sînt identice, $R_e = nR$ și $G_e = \frac{G}{n}$.

● Dacă vom considera **aceleași elemente legate în paralel** (fig. 3.19), atunci prima teoremă a lui Kirchhoff ne dă :

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$

unde $I = \frac{U}{R_e}$ și $I_k = \frac{U}{R_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Înlocuind curenții și împărțind prin tensiunea U obținem :

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n},}$$

relație care se mai scrie :

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} \tag{3.15}$$

sau

$$\boxed{G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k.}$$

Dacă rezistoarele sînt identice, $G_e = nG$ și $R_e = \frac{R}{n}$.

Aplicația 1. *Rezistențele rezistoarelor din figura 3.20 au valorile $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$. Să se afle rezistența echivalentă.*

În cazul de față întîlnim o asociere mixtă : R_1 cu R_2 în serie și, împreună, în paralel cu R_3. Utilizînd relațiile (3.8) și (3.12), aflăm :

$$R_e = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2\ \Omega.$$

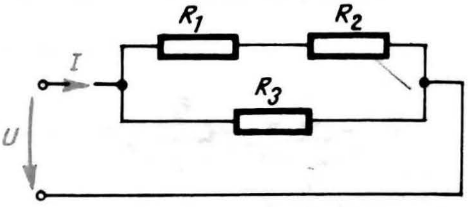

Fig. 3.20

Aplicaţia 2. *Rezistenţele rezistoarelor din figura 3.21 au valorile $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$. Să se afle rezistenţa echivalentă.*

Şi aici se identifică asocierea mixtă ; R_1 în serie cu R_2 şi R_3 în paralel. Utilizînd relaţiile de asociere aflăm :

$$R_e = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4 + \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 6\ \Omega.$$

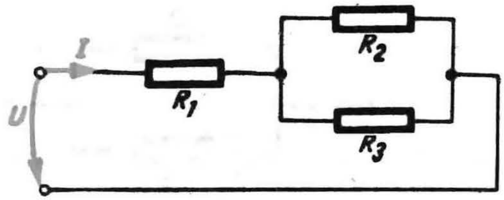

Fig. 3.21

3. Divizoarele de tensiune şi curent

a. Divizorul de tensiune

Prin **divizor de tensiune** se înţelege *circuitul alcătuit din două rezistoare în serie în scopul de a obţine o tensiune mai mică decît tensiunea U de la bornele sistemului* (fig. 3.22).

Curentul care trece prin divizor este :

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

iar tensiunea care ne interesează, să zicem U_2, este

$$U_2 = R_2 I = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2},$$

respectiv :

$$\boxed{U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \qquad (3.16)$$

adică o fracţiune din tensiunea la borne.

Aplicaţie. *Imaginaţi un dispozitiv care să permită obţinerea unei tensiuni ajustabile între zero şi o valoare limită U.*

Putem utiliza un reostat cu un singur sul de rezistenţă R, prevăzut cu un cursor mobil. Simbolul grafic al dispozitivului este cel din figura 3.23. Tensiunea dintre cursor şi borna O, presupusă de potenţial nul, este $U_x = U \frac{x}{R}$, unde x este rezistenţa reostatului între cursor şi borna de masă. La deplasarea cursorului de jos în sus, tensiunea U_x creşte de la zero la U.

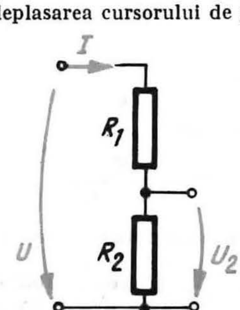

Fig. 3.22

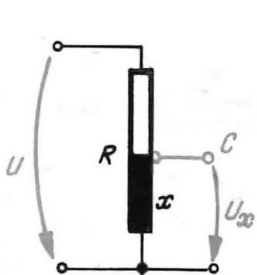

Fig. 3.23

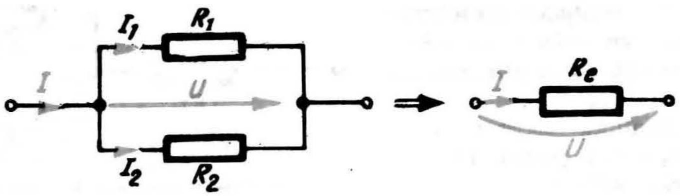

Fig. 3.24

b. *Divizorul de curent*

Prin **divizor de curent** se înțelege *circuitul format din două rezistoare în paralel plasat într-o latură a unui circuit cu scopul de a obține prin unul dintre elemente un curent mai mic decît curentul principal* I (fig. 3.24).

Cele două elemente asociate în paralel prezintă o rezistență echivalentă $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ și deci tensiunea comună la bornele lor este :

$$U = IR_e.$$

Curenții prin fiecare dintre elementele divizorului sînt :

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{IR_e}{R_1}; \quad \boxed{I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \qquad (3.17)$$

și

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{IR_e}{R_2}; \quad \boxed{I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Aplicația 1. *Un galvanometru cu rezistența de 9,9 Ω indică 1 mA pe diviziune. Scala aparatului posedă 50 div. Să se determine rezistența șuntului dacă dorim ca instrumentul să poată fi folosit pentru a măsura curenți pînă la 1 A (fig. 3.25).*

Din formula divizorului de curent

$$I_g = I\frac{R_s}{R_g + R_s}$$

deducem :

$$R_s = \frac{R_g}{n_A - 1};$$

unde $n_A = \frac{I}{I_g}$ este raportul în care se demultiplică curentul prin galvanometru în prezența șuntului. Deoarece $I_{g\,max} = 50 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-2}$ A, rezultă :

$$n_A = \frac{1}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^2}{5} = 20$$

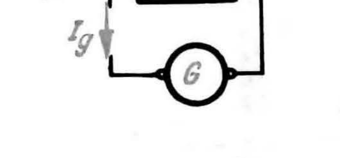

Fig. 3.25

şi deci:

$$R_s = \frac{9,9}{20-1} = 0,521\ \Omega.$$

Aplicaţia 2. *Să se determine rezistența ampermetrului din problema precedentă.*

Rezistența ampermetrului este rezistența echivalentă a celor două elemente conectate în paralel: galvanometrul şi şuntul.

$$R_A = \frac{R_g R_s}{R_g + R_s} = \frac{0,521 \times 9,9}{0,521 + 9,9} = 0,495\ \Omega.$$

Aplicaţia 3. *Să se determine tensiunea la bornele ampermetrului dacă acul deviază la jumătatea scalei.*

Curentul prin ampermetru este jumătate din curentul maxim pe care-l poate indica şi deci tensiunea la borne este:

$$U_A = 0,5 \times 0,495 = 0,247\ \text{V}.$$

Aplicaţia 4. *Ce rezistență trebuie conectată în serie cu un galvanometru avînd rezistența de* 9,9 Ω *pentru a dispune de un voltmetru capabil să măsoare tensiuni pînă la 30 V (fig. 3.26)? (la capătul scalei curentul este de 50 mA).*

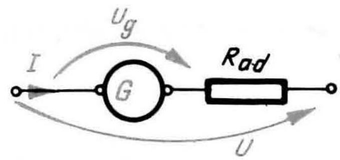

Fig. 3.26

Cînd acul deviază la capătul scalei, tensiunea la bornele galvanometrului este $U_g = 50 \times 10^{-3} \times 9,9 = 0,495$V. Utilizînd formula divizorului de tensiune, scriem:

$$U_g = U\frac{R_g}{R_g + R_{ad}},$$

de unde se obține rezistența adițională:

$$R_{ad} = R_g(n_v - 1),$$

$n_v = \dfrac{U}{U_g}$ este raportul de demultiplicare al divizorului de tensiune format cu R_g şi R_{ad}. Pentru $n_v = \dfrac{30}{0,495} = 60,61$ rezultă:

$$R_{ad} = 9,9 \times (60,61 - 1) = 590,1\ \Omega.$$

Aplicaţia 5. *Să se determine rezistența voltmetrului din aplicația precedentă.*

$$R_v = R_g + R_{ad} = 590,1 + 9,9 = 600\ \Omega,$$

sau, după legea lui Ohm:

$$R_v = \frac{U}{I_g} = \frac{30}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{3 \times 10^3}{5} = 600\ \Omega.$$

4. Sursa reală de tensiune

O **sursă reală de tensiune** *este un generator care are rezistență internă.* Am văzut că un astfel de generator funcționînd în sarcină este caracterizat de ecuația:

$$U_{AB} = e - R_g I,$$

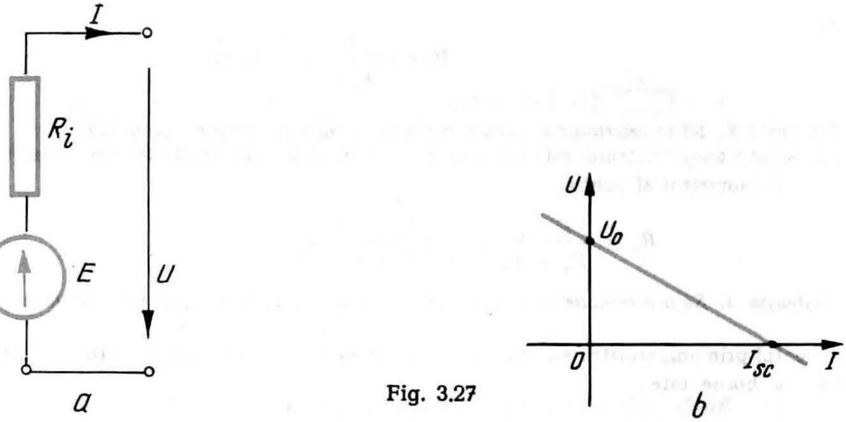

Fig. 3.27

sau, cu notațiile adoptate pentru circuitele de c.c. :

$$\boxed{U = E - R_i I} \tag{3.18}$$

unde $R_i = R_g$ este *rezistența internă a generatorului.*

Teorema a doua a lui Kirchhoff ne permite să stabilim schema echivalentă cu elemente ideale care este descrisă de această ecuație (fig. 3.27, *a*). Observăm că spre deosebire de sursa ideală de tensiune, pentru care U nu depinde de I, *în cazul sursei reale tensiunea la borne scade cînd curentul crește.*

La funcționarea în gol $(I = 0)$:

$$U|_{I=0} = U_0 = E.$$

La funcționarea în scurtcircuit $(U = 0)$:

$$I|_{U=0} = I_{sc} = \frac{E}{R_i} = \frac{U_0}{R_i}.$$

Caracteristica tensiune-curent este o dreaptă (fig. 3.27, *b*).

Aplicația 1. *O sursă reală de tensiune are $U_0 = 12$ V și $I_{sc} = 120$ A. Se cere schema echivalentă cu elemente ideale.*

Elementele ideale sînt :

$$E = U_0 = 12\ \text{V}\ ;\ R_i = \frac{U_0}{I_{sc}} = \frac{12}{120} = 0{,}1\Omega.$$

Aplicația 2. *O sursă reală de tensiune debitează $I_1 = 10$ A la $U_1 = 100$ V și $I_2 = 20$ A la $U_2 = 50$ V. Se cere schema ei echivalentă, tensiunea de mers în gol și intensitatea curentului de scurtcircuit.*

Din ecuațiile $U_1 = E - R_i I_1$ și $U_2 = E - R_i I_2$ obținem :

$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{100 - 50}{20 - 10} = 5\ \Omega.$$

Din prima ecuație rezultă :

$$E = U_1 + R_i I_1 = 100 + 5 \times 10 = 150\ \text{V} = U_0.$$

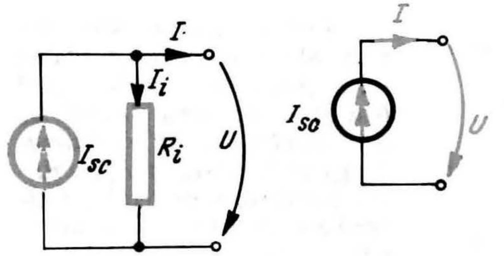

Fig. 3.28

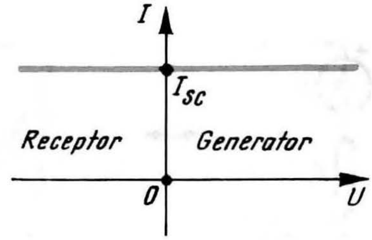

Fig. 3.29

Obținem de asemenea:

$$I_{sc} = \frac{E}{R_i} = \frac{150}{5} = 30\ \text{A}.$$

5. Sursa reală de curent

Împărțind ecuația (3.18) cu R_i, obținem:

$$\frac{U}{R_i} = \frac{E}{R_i} - I = I_{sc} - I$$

sau

$$I_{sc} = \frac{U}{R_i} + I = I_i + I.$$

Prima teoremă a lui Kirchhoff ne permite să stabilim o schemă echivalentă (fig. 3.28), în care elementul ideal care debitează curentul I_{sc} se numește sursă ideală de curent. Pentru o sursă ideală de curent $R_i = \infty$, ($I_i = 0$) și $I = I_{sc}$ pentru orice U (fig. 3.29). De regulă I_{sc} se mai notează și cu I_g.

Ansamblul format din sursa ideală de curent în paralel cu rezistența internă a generatorului se numește **sursă reală de curent.**

Caracteristica curent-tensiune a sursei reale de curent este reprezentată în figura 3.30. Se observă că pe măsură ce tensiunea crește, intensitatea curentului debitat de sursă scade pînă la valoarea $I = 0$ cînd $U = U_0 = R_i I_{sc}$.

Aplicația 1. *Un generator are t.e.m. $E = 100$ V și rezistența internă $R_i = 0,5\ \Omega$. Să se determine sursa echivalentă reală de curent.*

$$I_{sc} = \frac{E}{R_i} = \frac{100}{0,5} = 200\ \text{A};\ R_i = 0,5\ \Omega.$$

Aplicația 2. *Un generator are $U_0 = 200$ V și $I_{sc} = 200$ A. Să se determine sursa reală echivalentă de curent.*

$$I_g = I_{sc} = 200\ \text{A};\ R_i = \frac{U_0}{I_g} = \frac{200}{200} = 1\ \Omega.$$

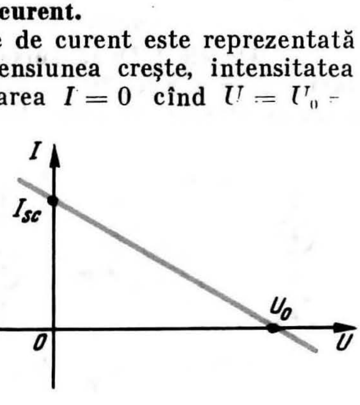

Fig. 3.30

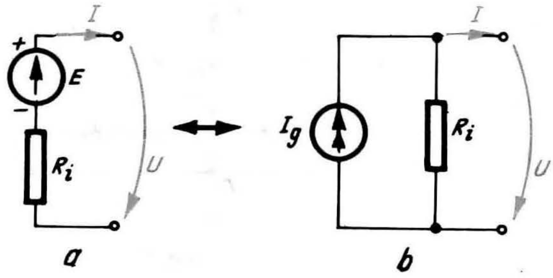

Fig. 3.31

Putem rezuma astfel rezultatele obţinute mai înainte: *orice generator electric avînd tensiunea de mers în gol U_0 şi curentul de scurtcircuit I_{sc} poate fi reprezentat fie printr-o sursă reală de tensiune ale cărei elemente ideale se determină prin:*

$$\boxed{E = U_0} \text{ şi } \boxed{R_i = R_g = \frac{U_0}{I_{sc}}}$$

(fig. 3.31, *a*),

fie printr-o sursă reală de curent ale cărei elemente ideale se determină prin:

$$\boxed{I_g = I_{sc}} \text{ şi } \boxed{R_i = \frac{U_0}{I_{sc}}}$$

(fig. 3.31, *b*).

6. Asocierile surselor ideale

a. Asocierea surselor de tensiune

Două surse de tensiune ideale şi *asociate în serie* în montaj adiţional (fig. 3.32, *a*) admit o sursă echivalentă cu t.e.m. $E_e = E_1 + E_2$.

Dacă sursele sînt în opoziţie (montaj diferenţial) ca în figura 3.32, *b*, t.e.m. a sursei echivalente este $E_e = E_1 - E_2$. Prin urmare, *un sistem de surse ideale de tensiune asociate în serie admit o sursă echivalentă cu t.e.m. egală cu suma algebrică a t.e.m. a surselor componente*:

$$\boxed{E_e = \sum_{k=1}^{n} \pm E_k} \tag{3.19}$$

○ **Atenţie!** Două surse ideale de tensiune se pot conecta *în paralel* numai dacă tensiunile lor electromotoare sînt egale ($E_1 = E_2 = E$). T.e.m. a sursei echivalente este atunci, $E_e = E$.

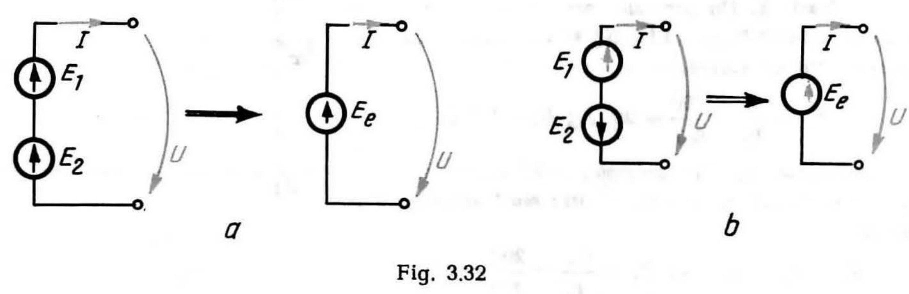

Fig. 3.32

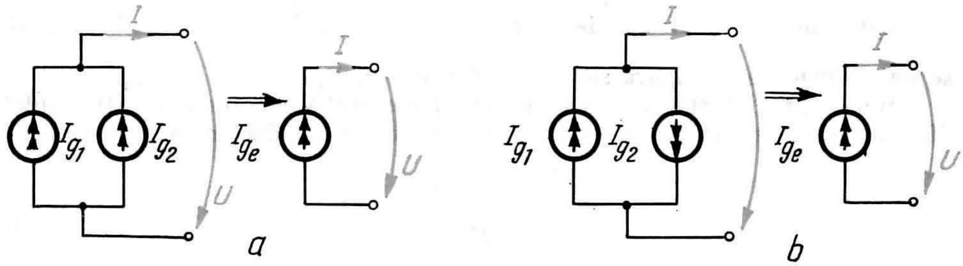

Fig. 3.33

b. *Asocierea surselor de curent*

Două surse ideale de curent *asociate în paralel* admit o sursă echivalentă de curent cu curentul $I_{ge} = I_{g1} + I_{g2}$ cînd sursele sînt conectate în montaj adițional (fig. 3.33, *a*).

Dacă sursele sînt în opoziție (montaj diferențial) (fig. 3.33, *b*) curentul sursei echivalente este $I_{ge} = I_{g1} - I_{g2}$.

Prin urmare : *un sistem de surse ideale de curent asociate în paralel admit o sursă de curent echivalentă avînd curentul egal cu suma algebrică a curenților surselor componente* :

$$\boxed{I_{ge} = \sum_{k=1}^{n} \pm I_{gk}} \tag{3.20}$$

○ **Atenție !** Două surse ideale de curent se pot conecta *în serie* numai dacă au curenții egali ($I_{g1} = I_{g2} = I_g$). Curentul sursei de curent echivalente cu sursele în serie este curentul lor comun, $I_{ge} = I_g$.

7. Asocierea surselor reale

a. *Asocierea în paralel a surselor de tensiune*

Fie circuitul din figura 3.34 pentru care căutăm elementele E_e și R_e ale unei surse echivalente.

Determinarea elementelor se face pe o cale simplă, *transformînd sursele de tensiune în surse de curent* (fig. 3.35).

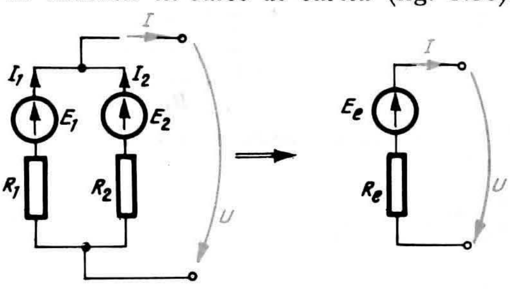

Fig. 3.34

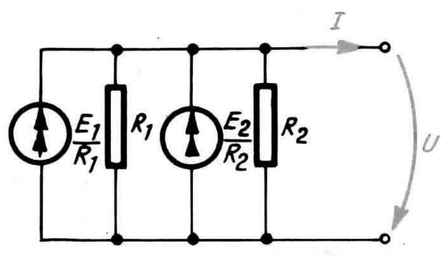

Fig. 3.35

Cele două surse ideale de curent, cu curenţii $\frac{E_1}{R_1} = E_1G_1$ şi $\frac{E_2}{R_2} = E_2G_2$ se pot înlocui cu o singură sursă avînd curentul $E_1G_1 + E_2G_2 = I_{ge}$.

Rezistenţa internă a sursei de curent (respectiv conductanţa ei) rezultă din asocierea în paralel a celor două rezistenţe (conductanţe). Scriem deci :

$$\boxed{R_e = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} \tag{3.21}$$

sau

$$\boxed{G_e = G_1 + G_2.}$$

Revenim acum la o sursă de tensiune, care va avea rezistenţa internă R_e şi t.e.m. echivalentă :

$$\boxed{E_e = R_eI_{ge} = \frac{1}{G_e}\,I_{ge} = \frac{E_1G_1 + E_2G_2}{G_1 + G_2} = \frac{E_1\frac{1}{R_1} + E_2\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \tag{3.22}$$

○ **Concluzie.** *T.e.m. a sursei echivalente este valoarea medie ponderată a t.e.m. ale surselor componente, ponderile fiind conductanţele interne. Rezistenţa internă a sursei echivalente se determină ca şi cînd rezistenţele surselor ar fi în paralel.*

Aplicaţia 1. *Să se determine elementele sursei de tensiune echivalente cu două surse identice în paralel.*

Conform relaţiilor stabilite :

$$E_e = \frac{2EG}{2G} = E \text{ şi } R_e = \frac{R}{2}.$$

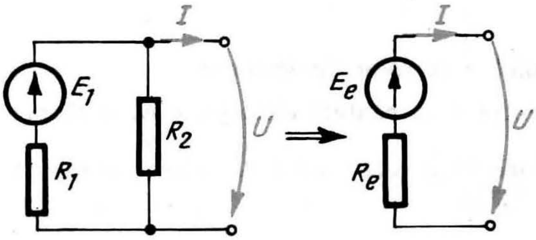

Fig. 3.36

Aplicaţia 2. *În circuitul din figura 3.36 putem considera că sînt figurate două surse în paralel, una dintre ele avînd t.e.m. nulă ($E_2 = 0$). Să se determine elementele sursei echivalente de tensiune.*

Aplicăm relaţia :

$$E_e = \frac{E_1\frac{1}{R_1} + E_2\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}},$$

în care se înlocuieşte $E_2 = 0$,

Obţinem :

$$E_e = \frac{E_1}{R_1} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = E_1\frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Rezistenţa internă este :

$$R_e = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

b. *Asocierea în serie a surselor de tensiune*

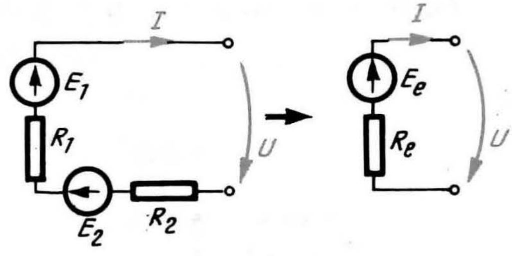

Fig. 3.37

Două surse de tensiune asociate în serie admit o sursă echivalentă cu E_e și R_e (fig. 3.37) care se determină punînd condiția ca pentru aceeași tensiune la borne bornele să fie traversate de același curent. Putem scrie relațiile evidente :

$$U = E_e - R_e I \text{ și } U = E_1 + E_2 - (R_1 + R_2)I,$$

din care obținem identificînd termenii :

$$E_e = E_1 + E_2$$

și

$$R_e = R_1 + R_2.$$

Pentru n surse, relațiile de asociere rezultă imediat :

$$\boxed{E_e = \sum_{k=1}^{n} \pm E_k} \tag{3.23}$$

$$\boxed{R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k} \tag{3.24}$$

Dacă cele n surse sînt identice atunci :

$$E_e = nE\ ;$$

și

$$R_e = nR.$$

c. *Asocierea în paralel a surselor de curent*

Putem interpreta sistemul format din n surse reale de curent conectate în paralel ca fiind alcătuit din n surse ideale de curent și n rezistoare în paralel. Elementele sursei echivalente rezultă atunci imediat

$$\boxed{I_{ge} = \sum_{k=1}^{n} \pm I_{gk}} \tag{3.25}$$

și

$$\boxed{G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k} \tag{3.26}$$

Pentru n surse identice relațiile devin:

$$I_{ge} = nI_g$$

și

$$G_e = nG.$$

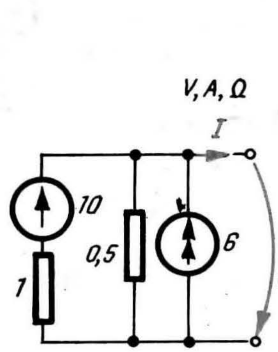

Fig. 3.38

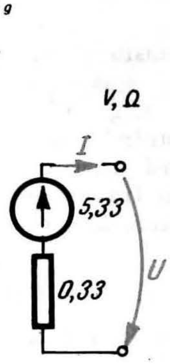

Fig. 3.39

Aplicație. *Să se afle sursa de tensiune echivalentă cu sistemul de surse din figura 3.38.*

Se transformă sursa de tensiune în sursă de curent, după care se aplică regulile de asociere în paralel a surselor reale de curent. Obținem:

$$I_{ge} = \frac{E}{R} + I_g = \frac{10}{1} + 6 = 16 \text{ A};$$

$$R_e = \frac{1 \times 0,5}{1 + 0,5} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}\ \Omega.$$

Sursa de tensiune echivalentă (fig. 3.39) are deci elementele:

$$E_e = I_{ge}R_e = 16 \times \frac{1}{3} = 5,33 \text{ V};$$

$$R_e = 0,33\ \Omega.$$

D. ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRICE CU AJUTORUL TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

1. Diagrame orientate de curenți și tensiuni

Tensiunile la bornele laturilor și curenții prin laturile unei rețele electrice satisfac teoremele lui Kirchhoff. Prima teoremă a lui Kirchhoff se referă la curenții prin laturile care se ramifică dintr-un nod. A doua teoremă se referă la tensiunile la bornele laturilor ce alcătuiesc un ochi.

Să urmărim modul de aplicare a teoremelor lui Kirchhoff la analiza circuitelor de c.c.

a. Aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff

După cum ştim, prima teoremă stabileşte că suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile care se ramifică dintr-un nod este nulă :

$$\boxed{\sum_{k \in B} \pm I_k = 0,}$$

unde cu B s-a notat mulţimea indicilor laturilor care se ramifică în nodul (b).

Aplicaţia 1. *Într-un circuit cu trei noduri şi şase laturi ($N = 3$, $L = 6$) se cunosc valorile curenţilor aşa cum se indică în figura 3.40. Să se verifice prima teoremă a lui Kirchhoff.*

Aplicînd teorema pentru fiecare nod scriem identităţile :

(a) $4 + 8 - 11 - 1 = 0$;

(b) $5 + 7 - 4 - 8 = 0$;

(c) $11 + 1 - 5 - 7 = 0$.

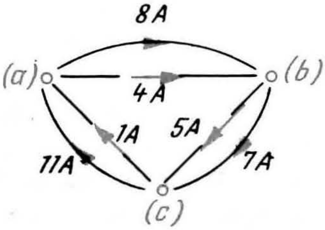

Fig. 3.40

ceea ce dovedeşte că intensităţile curenţilor sînt în acord cu enunţul primei teoreme a lui Kirchhoff.

○ **Observaţie.** Pentru verificarea primei teoreme a lui Kirchhoff nu este necesar să se reprezinte circuitul cu toate detaliile sale. Este suficient să se figureze numai nodurile şi laturile circuitului cu sensurile curenţilor figuraţi pe laturi. O asemenea reprezentare simplificată a circuitului se numeşte *diagramă orientată de curenţi*.

Aplicaţia 2. *Se dă diagrama de curenţi din figura 3.41. Se cere să se determine curenţii necunoscuţi.*

Scriind prima teoremă în nodurile (a), (b) şi (c) obţinem :

(a) $I_1 + 2 - 1 - 3 = 0$;

(b) $I_2 + 1 + 1 - I_1 - 2 = 0$;

(c) $I_3 + 1 + 3 = 0$.

Rezolvînd sistemul, rezultă :

$$I_1 = 2\ \text{A}, \quad I_2 = 2\ \text{A}, \quad I_3 = -4\ \text{A}.$$

Deoarece $I_3 < 0$, sensul real al curentului prin latura respectivă este opus sensului de referinţă ales arbitrar.

În figura 3.42 se indică diagrama completă a curenţilor (toate valorile sînt indicate în amperi).

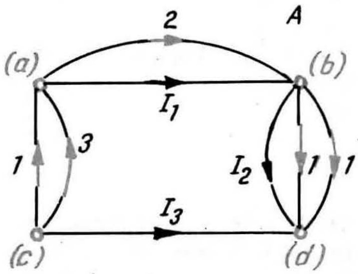

Fig. 3.41

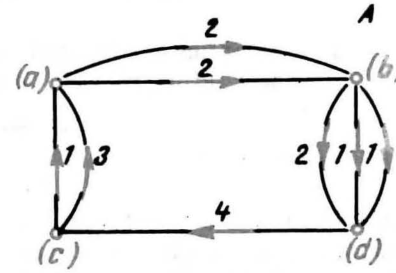

Fig. 3.42

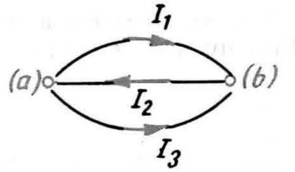

Fig. 3.43

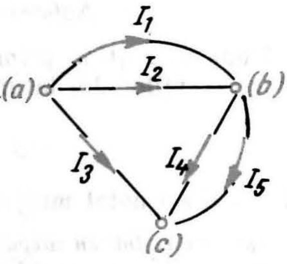

Fig. 3.44

În vederea rezolvării unui circuit este necesar să cunoaştem numărul ecuaţiilor independente ce se obţin prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff. Pentru a găsi acest număr să analizăm două circuite simple, ale căror diagrame de curenţi sînt prezentate în continuare.

Se verifică imediat că *pentru circuitul cu două noduri* din figura 3.43 se obţine, în ambele noduri, aceeaşi ecuaţie: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ sau, ceea ce este acelaşi lucru $-I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

Pentru circuitul cu trei noduri din figura 3.44 se pot scrie ecuaţiile:

$$(a)\ I_1 + I_2 + I_3 = 0;$$

$$(b)\ I_4 + I_5 - I_1 - I_2 = 0;$$

$$(c)\ -I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Dintre cele trei ecuaţii, numai două sînt independente (de exemplu, a treia ecuaţie se obţine înmulţind primele două ecuaţii cu (— 1) şi adunîndu-le). Rezultă, prin generalizare: *într-o reţea electrică cu N noduri se obţin, aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff, N—1 ecuaţii independente.* Deci:

$$\sum_{k \in B} \pm I_k = 0 \quad (b = 1, 2, \ldots, N-1).$$

b. *Aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff*

● Reamintim aici **enunţul sub prima formă:** suma algebrică a tensiunilor la bornele laturilor unui ochi este nulă. Scriem deci:

$$\boxed{\sum_{k \in P} \pm U_k = 0,}$$

unde prin P s-a notat mulţimea indicilor laturilor ce intră în componenţa ochiului (p). În suma respectivă semnul este plus dacă sensul de referinţă al tensiunii coincide cu sensul în care parcurgem ochiul. În caz contrar, semnul tensiunii este minus.

Aplicația 1. *Să se verifice teorema a doua a lui Kirchhoff pentru ochiurile specificate pe diagrama de tensiuni din figura 3.45 Toate tensiunile sînt indicate în volți.*

Pentru ochiurile (*1*), (*2*), (*3*) se obțin identitățile:

(*1*) $8 + 17 - 25 = 0$;

(*2*) $15 + 10 - 25 = 0$;

(*3*) $17 - 10 - 7 = 0$.

○ **Observație.** Pentru aplicarea celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff conform primului enunț, nu este necesar să se figureze circuitul electric în amănunțime. Este suficient să se figureze numai nodurile și laturile cu sensul tensiunilor la borne marcat pe acestea (fig. 3.45). O asemenea reprezentare se numește *diagramă orientată de tensiuni.*

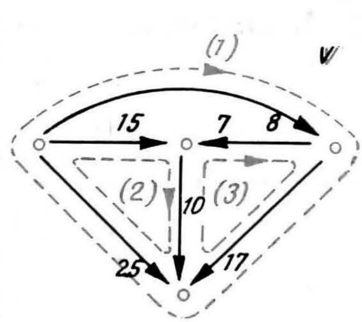

Fig. 3.45

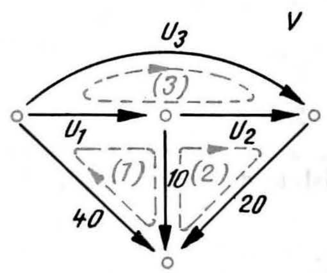

Fig. 3.46

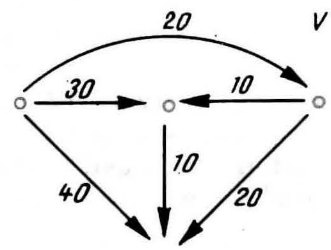

Fig. 3.47

Aplicația 2. *Într-un circuit cu $L = 6$ laturi și $N = 4$ noduri (fig. 3.46) se cunosc trei tensiuni la borne. Să se determine tensiunile necunoscute și să se întocmească diagrama de tensiuni.*

Să construim direct diagrama de tensiuni (fig. 3.47). Reprezentăm mai întîi tensiunile cunoscute. Din ochiul 1 rezultă apoi $U_1 = 40 - 10 = 30$ V, Similar se obține $U_2 = 10$ V și $U_3 = U_1 - U_2 = 30 - 10 = 20$ V.

Numărul ecuațiilor independente de tensiuni pe ochiuri este egal cu numărul ochiurilor independente.

Un ochi se numește independent în raport cu alte ochiuri dacă nu poate fi constituit din laturile acestora. De exemplu, în figura 3.48 ochiurile formate din laturile *1, 3, 6*; *6, 2, 4* și *3, 4, 5* sînt independente deoarece fiecare dintre ele are cel puțin o latură pe care celelalte nu o au. În schimb ochiul format din laturile *1, 2, 5* nu mai este independent în raport cu primele trei deoarece este constituit din cîte o latură a fiecăruia dintre aceste ochiuri. Deci dacă *L* este numărul total de laturi ale unei rețele și *N* — numărul total de noduri, conform *teoremei lui Euler* numărul de ochiuri independente este:

$$\boxed{\mathcal{O} = L - N + 1} \qquad (3.27)$$

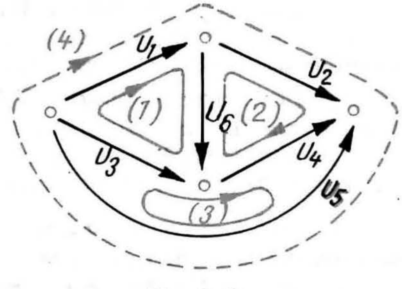

Fig. 3.48

În cazul rețelei din figura 3.47 ($L = 6$, $N = 4$):

$$\mathcal{O} = 6 - 4 + 1 = 3.$$

Așa cum un ochi oarecare rezultă din ochiurile independente, ecuația pe un ochi neindependent rezultă printr-o sumă algebrică a ecuațiilor ochiurilor independente. Să verificăm această proprietate pe circuitul din figura 3.48 cu $L = 6$, $N = 4$, $\mathcal{O} = 3$, pentru care ecuațiile pe ochiurile independente sînt:

$U_1 + U_6 - U_3 = 0$, pentru ochiul *1*;

$U_2 - U_4 - U_6 = 0$, pentru ochiul *2*;

$U_3 + U_4 - U_5 = 0$, pentru ochiul *3*.

Pentru alte ochiuri, de exemplu ochiul *4*, obținem

$$U_1 + U_2 - U_5 = 0$$

Ultima ecuație rezultă adunînd ecuațiile 1, 2 și 3.

Prin aplicarea celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff într-un circuit cu L laturi și N noduri se obține deci un sistem de $\mathcal{O} = L - N + 1$ ecuații independente de tensiuni pe ochiuri:

$$\sum_{m \in P} \pm U_m = 0 \ (p = 1, 2, \ldots, \mathcal{O}).$$

● **Utilizarea teoremei a doua a lui Kirchhoff în cea de-a doua formulare.** Adesea circuitele de c.c. conțin numai rezistoare și surse de tensiune. După echivalarea elementelor reale de circuit cu elemente ideale, o latură oarecare m a unui astfel de circuit poate fi compusă, cel mult, dintr-un rezistor ideal și o sursă ideală de tensiune legate în serie.

Putem atunci utiliza teorema a doua a lui Kirchhoff sub forma: suma algebrică a t.e.m. din laturile unui ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune pe rezistențele laturilor ochiului. Putem deci scrie:

$$\boxed{\sum_{m \in P} \pm E_m = \sum_{m \in P} \pm R_m I_m} \quad (p = 1, 2, \ldots, \mathcal{O}).$$

La aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff sub această formă, ochiul de rețea se parcurge de două ori: odată pentru t.e.m., a doua oară pentru căderile de tensiune pe rezistoare.

○ **Precizare.** *Semnul unui t.e.m. este plus dacă sensul ei coincide cu sensul ales pe ochi (în caz contrar semnul este minus). Semnul unei căderi de tensiune $R_m I_m$ este plus dacă sensul curentului prin rezistor coincide cu sensul ales pe ochi (în caz contrar semnul este minus).*

Aplicația 1. *Să se deducă ecuațiile satisfăcute de intensitățile curenților prin cele trei laturi ale circuitului de c.c. din figura 3.49.*

Circuitul are $L = 3$ laturi și $N = 2$ noduri. Rezultă $\mathcal{O} = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ ochiuri independente. Cei trei curenți I_1, I_2, I_3 au sensurile precizate în figură. Ecuațiile obținute prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff sînt următoarele :

(*a*) $I_1 + I_2 - I_3 = 0$;

(*1*) $E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$;

(*2*) $E_2 + E_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3$.

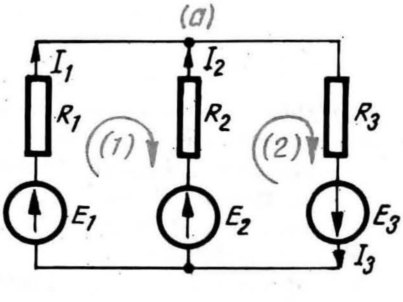

Fig. 3.49

Să detaliem *modul de aplicare a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff*, de exemplu, pentru primul ochi. La prima parcurgere a ochiului se constată că sursa E_1 are același sens al t.e.m. cu cel ales pe ochi, pe cînd sursa E_2 are sensul contrar. În membrul stîng al ecuației, t.e.m. E_1 va fi cu semnul plus, iar t.e.m. E_2 — cu semnul minus. La rezistoare, căderile de tensiune au același sens cu cel al curenților. Prin urmare tensiunea $R_1 I_1$ are semnul plus deoarece sensul curentului I_1 coincide cu cel al ochiului, în timp ce tensiunea $R_2 I_2$ are semnul minus deoarece sensul lui I_2 este opus sensului ochiului. Astfel, la a doua parcurgere completă a ochiului se obține suma algebrică a celor două căderi de tensiune pe rezistoare, cu semnele respective, sumă care reprezintă membrul drept al ecuației.

○ **Observație.** Forma particulară obținută pentru cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff este valabilă și pentru circuite liniare care au surse de curent. În acest caz, pentru ochiurile care conțin și surse de curent se aplică forma generală a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff, în care se înlocuiesc în funcție de curenți numai tensiunile la bornele rezistoarelor și se păstrează ca necunoscute tensiunile la bornele surselor de curent.

Aplicația 2. *Să se obțină ecuațiile circuitului din figura 3.50 aplicînd, acolo unde este posibil, forma particulară a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff.*

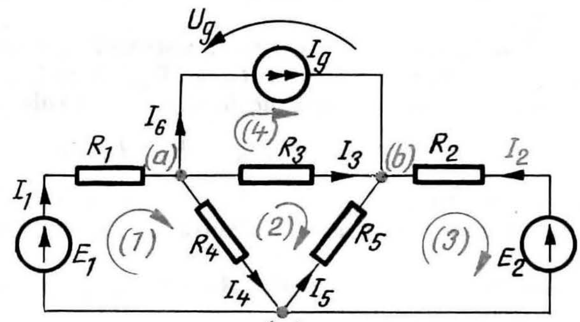

Fig. 3.50

Ecuațiile care rezultă folosind prima teoremă a lui Kirchhoff rămîn nemodificate. Deci :

(*a*) $I_1 = I_3 + I_4 + I_g$;

(*b*) $-I_2 + I_3 + I_5 + I_g = 0$.

În ecuații s-a efectuat substituția $I_6 = I_g$, unde I_g este curentul debitat de sursa ideală de curent. Deoarece laturile care formează primele trei ochiuri nu conțin surse de curent, a doua teoremă a lui Kirchhoff poate fi aplicată direct în forma sa particulară. Se obține :

(*1*) $E_1 = R_1 I_1 + R_4 I_4$;

(*2*) $0 = R_3 I_3 - R_5 I_5 - R_4 I_4$;

(*3*) $-E_2 = R_5 I_5 - R_2 I_2$.

Ultima ecuație, pentru ochiul *4*, rezultă pe baza formei generale și este :

$$- R_3 I_3 - U_g = 0.$$

2. Rezolvarea circuitelor cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff

Obținerea valorilor numerice ale intensităților curenților și tensiunilor dintr-un circuit de c.c. cuprinde **trei etape** și anume:

— *stabilirea sistemului de ecuații al circuitului;*

— *rezolvarea sistemului de ecuații;*

— *verificarea soluției.*

Pentru stabilirea sistemului de ecuații, rezumînd cunoștințele însușite din subcapitolul D.1, desprindem următoarele concluzii:

— *pentru un circuit de c.c. cu L laturi și N noduri se pot scrie:*

— *N—1 ecuații între cele L intensități ale curenților prin laturi;*

— *L—N+1 ecuații între cele L tensiuni la bornele laturilor;*

Se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \sum\limits_{m\in A} \pm I_m = 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, (N-1)); \\ \sum\limits_{m\in P} \pm U_m = 0 \; (p = 1, 2, \ldots, (L-N+1)), \end{cases}$$

format din L ecuații cu un număr dublu, $2L$, de necunoscute, și anume:

I_m $(m = 1, 2, \ldots, L)$ — intensitățile curenților prin laturi;

U_m $(m = 1, 2, \ldots, L)$ — tensiunile la bornele laturilor;

— *sistemul de ecuații trebuie completat cu încă L ecuații pentru a putea fi rezolvat.*

Dacă circuitul este liniar, sistemul se completează cu L ecuații liniare între perechile de mărimi I_m și U_m. Astfel, de exemplu, *dacă circuitul are numai rezistoare și surse de tensiune*, ecuațiile de legătură sînt:

$$E_m + U_m = R_m \, I_m \, (m = 1, 2, \ldots, L),$$

scrise pentru toate cele L laturi. Aceste ecuații includ și situațiile particulare în care latura este alcătuită numai dintr-un rezistor (cînd se va considera $E_m = 0$) sau numai dintr-o sursă de t.e.m. (cînd se va considera $R_m = 0$). Pentru un astfel de circuit, prin aplicarea teoremelor Kirchhoff se obține sistemul:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\in A} \pm I_k = 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, (N-1)); \\ \sum\limits_{m\in P} \pm E_m = \sum\limits_{m\in P} \pm R_m I_m \; (p = 1, 2, \ldots, (L-N+1)), \end{cases} \tag{3.28}$$

alcătuit din L ecuații, cu tot atîtea necunoscute: curenții $I_1, I_2, \ldots, I_L$ prin cele L laturi.

Dacă circuitul are și surse de curent, atunci:

— fiecare sursă de curent determină curentul prin latura respectivă, adică reduce numărul curenților necunoscuți cu o unitate, dar adaugă o nouă necunoscută, tensiunea la bornele sursei;

— numărul de ochiuri pe care se poate scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff în forma sa particulară se reduce, dar, pentru ochiurile rămase se poate aplica a doua teoremă a lui Kirchhoff în forma sa generală. Prin urmare, şi în acest caz rezultă un sistem de L ecuaţii cu L necunoscute, care sînt toate tensiunile la bornele generatoarelor de curent şi toate intensităţile curenţilor prin laturile de circuit care nu conţin surse de curent.

Să urmărim parcurgerea acestor etape prin analiza a două circuite de curent continuu.

Aplicaţia 1. *Să se determine intensităţile curenţilor debitaţi de cele două surse de t.e.m. ale circuitului din figura 3.51, în care* $E_1 = 19$ V, $E_2 = 7$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.

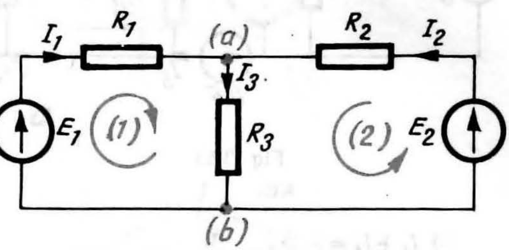

Fig. 3.51

Stabilirea sistemului de ecuaţii. Circuitul are $L = 3$ laturi, $N = 2$ noduri şi deci $O = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ ochiuri independente. Alegem sensurile celor trei curenţi. Alegem ochiurile şi precizăm sensurile lor de parcurgere. Putem acum trece la aplicarea teoremelor lui Kirchhoff. Se obţin trei ecuaţii:

$(a)\ I_1 + I_2 = I_3;$

$(1)\ E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3;$

$(2)\ E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3.$

Efectuînd înlocuirile numerice se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3; \\ 19 = 2I_1 + 3I_3; \\ 7 = I_2 + 3I_3. \end{cases}$$

S-a încheiat astfel prima etapă, prin obţinerea unui sistem de trei ecuaţii necunoscute: cei trei curenţi.

Să rezolvăm acest sistem. Se elimină intensitatea I_3, substituind expresia acesteia din prima ecuaţie în celelalte două ecuaţii:

Se obţine sistemul:

$$\begin{cases} 19 = 2I_1 + 3(I_1 + I_2) = 5I_1 + 3I_2; \\ 7 = I_2 + 3(I_1 + I_2) = 3I_1 + 4I_2, \end{cases}$$

care are două ecuaţii cu două necunoscute. Să rezolvăm acest ultim sistem (de exemplu, prin metoda reducerii). Vom obţine:

$$I_1 = 5\ \text{A},\ I_2 = -2\ \text{A}.$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (a doua etapă) se încheie cu determinarea curentului I_3, din prima ecuaţie.

Rezultă:

$$I_3 = 5 - 2 = 3\text{A}.$$

Cu valorile cunoscute ale intensităţilor curenţilor se pot întocmi diagramele orientate de curenţi şi, respectiv, de tensiuni (fig. 3.52).

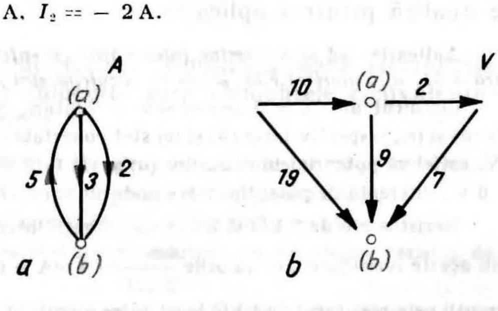

Fig. 3.52

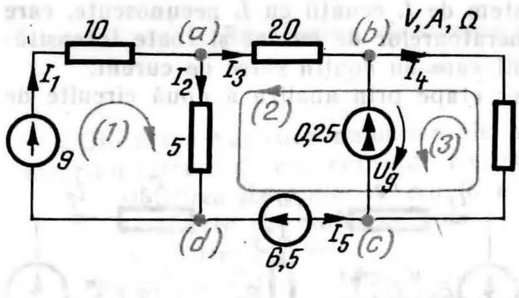

Fig. 3.53

Aplicația 2. *În circuitul din figura 3.53 valorile tensiunilor electromotoare ale surselor de tensiune, intensității curentului sursei de curent și valorile rezistențelor sînt indicate direct în dreptul elementelor respective. Să se efectueze analiza circuitului.*

Deoarece $L = 6$ și $N = 4$ se vor scrie trei ecuații de curenți și trei ecuații de tensiuni. Se obține sistemul:

(a) $I_1 = I_2 + I_3$;

(b) $I_3 + 0{,}25 = I_4$;

(c) $I_4 + I_5 = 0{,}25$;

(1) $9 = 10\,I_1 + 5I_2$;

(2) $-6{,}5 = 5I_2 - 15I_4 - 20I_3$

(3) $U_g - 15I_4 = 0$.

Diagramele de curenți și tensiuni sînt reprezentate în figurile 3.54, *a*, *b*, avînd soluțiile marcate pe figuri în amperi și respectiv în volți.

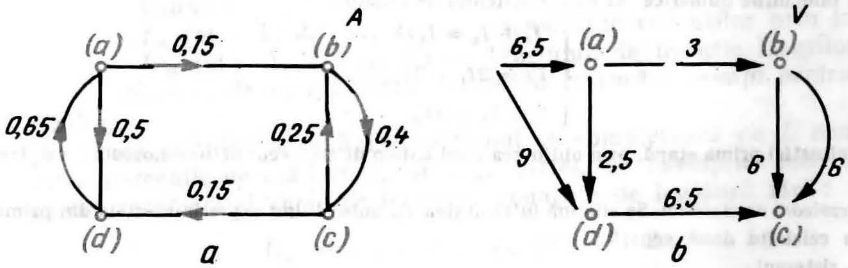

Fig. 3.54

O serie de circuite liniare pot fi analizate direct, întocmind concomitent cele două diagrame, de curenți și de tensiune. Să urmărim acest mod de analiză printr-o aplicație.

Aplicație. *Să se determine intensitățile curenților prin laturile circuitului reprezentat în figura 3.55, a. Valorile t.e.m. și ale rezistențelor sînt notate direct pe schemă.*

Circuitul are $N = 3$ noduri și $L = 7$ laturi. Nodul (*c*) este conectat la masă. Între nodurile (*a*) și (*c*), respectiv între (*b*) și (*c*) sînt conectate cele două surse cu t.e.m., de 12 V și respectiv 6 V, astfel că potențialele nodurilor (*a*) și (*b*) față de masă sînt cunoscute : $V_a = 12$ V și $V_b = 6$ V ; diferența de potențial între nodurile (*a*) și (*b*) este $V_a - V_b = 6$ V (fig. 3.55, *b*).

Rezistoarele de 3 kΩ și 6 kΩ sînt legate între nodul (*a*) și masă. Intensitățile curenților prin aceste rezistoare au valorile $\frac{12\ \text{V}}{3\ \text{k}\Omega} = 4$ mA și respectiv $\frac{12\ \text{V}}{6\ \text{k}\Omega} = 2$ mA. Similar se calculează curenții prin rezistorul de 1 kΩ legat între nodul (*b*) și masă, precum și prin rezistoarele de 2 kΩ și 6 kΩ legate între nodurile (*a*) și (*b*) (fig. 3.55, *c*). Curenții debitați de sursele de t.e.m. rezultă

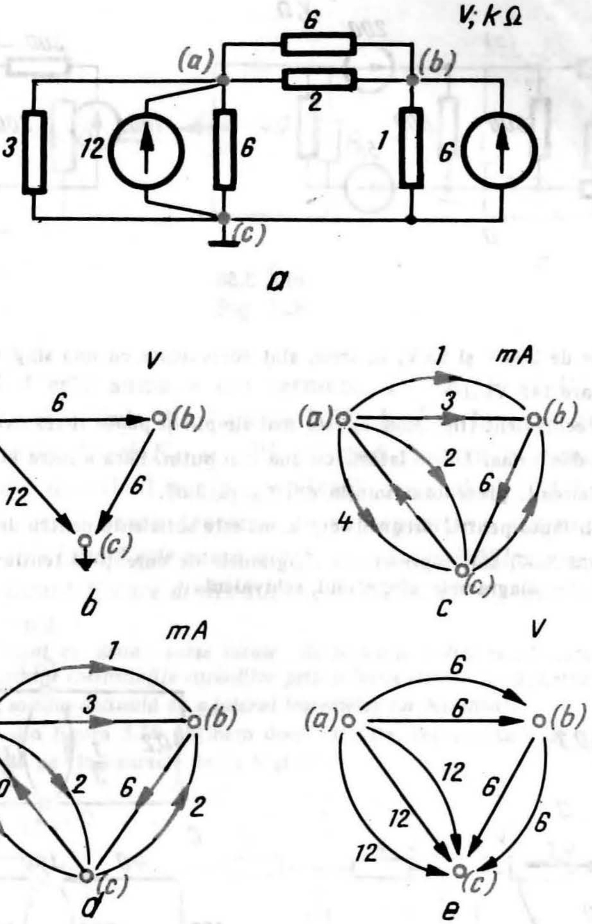

Fig. 3.55

prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff pentru nodurile *a* și *b* ; astfel că diagrama de curenți este completă (fig. 3.55, *d*). Diagrama de tensiuni completă (dig. 3.55, *e*) justifică valorile curenților obținuți în diagrama de curenți.

Adesea, rezolvarea unui circuit de c.c. se simplifică dacă elementele conectate în serie sau în paralel sînt înlocuite prin elementele echivalente. Să exemplificăm aceasta pe un exemplu.

Aplicație. *Să se determine căderea de tensiune la bornele rezistorului de 150 Ω și intensitatea curentului prin rezistorul de 300 Ω din circuitul de c.c. reprezentat în figura 3.56, a.*

Circuitul dat poate fi echivalat cu cel din figura 3.56, *b* dacă se ține cont că :

— rezistoarele de 100 Ω și 200 Ω sînt în serie și sînt echivalente cu un singur rezistor de 300 Ω ;

— rezistoarele de 300 Ω și 600 Ω sînt legate în paralel și sînt echivalente cu un rezistor de 200 Ω ;

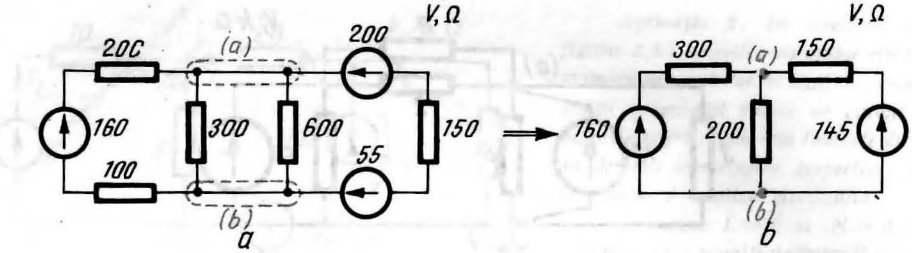

Fig. 3.56

— sursele de 200 V şi 55 V, în serie, sînt echivalente cu una singură, cu sensul celei de 200 V, de valoare 145 V.

Circuitul echivalent (fig. 3.56, *b*) este mai simplu şi poate fi rezolvat mai uşor. Are tot $N = 2$ noduri, dar numai $L = 3$ laturi, cu una mai puţin. Fără a intra în detaliile de rezolvare a acestui nou circuit, prezentăm soluţia din figura 3.57.

Soluţia obţinută pentru circuitul echivalent este suficientă pentru determinarea mărimilor cerute. În figura 3.57, sînt reprezentate diagramele de curenţi şi tensiuni ale circuitului dat, deduse direct din diagramele circuitului echivalent.

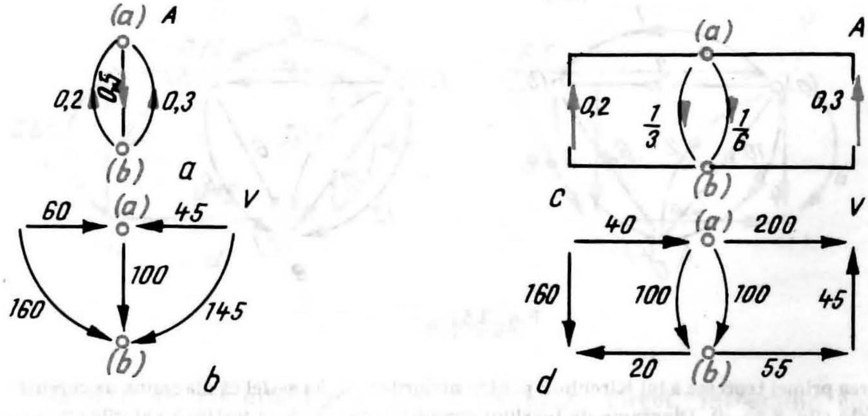

Fig. 3.57

3. Metode şi teoreme de rezolvare a circuitelor liniare de curent continuu

a. Metoda superpoziţiei

Considerăm circuitul din figura 3.58, *a*. Intensitatea curentului prin circuit este:

$$I = \frac{E_1}{R} + \frac{E_2}{R}.$$

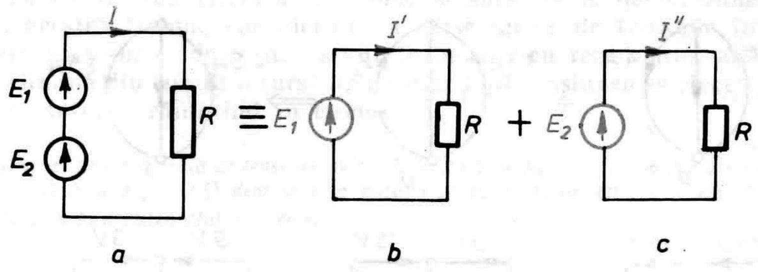

Fig. 3.58

Observăm că I este suma a doi termeni, $I' = E_1/R$ şi $I'' = E_2/R$, ce pot fi calculaţi din circuitele din figurile 3.58, *b* şi *c*, în care fiecare dintre cele două surse ideale, E_1 şi E_2, se află pe rînd singură în circuit.

Această metodă de calcul poate fi aplicată oricărui circuit liniar, pentru care este valabilă următoarea **teoremă de superpoziţie** : *intensitatea curentului electric prin orice latură este suma algebrică a intensităţilor curenţilor pe care i-ar stabili în acea latură fiecare dintre sursele de t.e.m. ale circuitului, dacă s-ar afla singură în circuit.*

Aplicaţie. *Un circuit cu două surse ideale de tensiune şi trei rezistoare are schema din figura 3.59. Să se determine intensităţile curenţilor prin laturile circuitului aplicînd teorema superpoziţiei şi să se verifice soluţia obţinută cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff.*

Pentru circuitul din figura 3.59 obţinem două circuite, reprezentate de asemenea în figura 3.59, în care se află pe rînd sursele de 24 V şi 18 V.

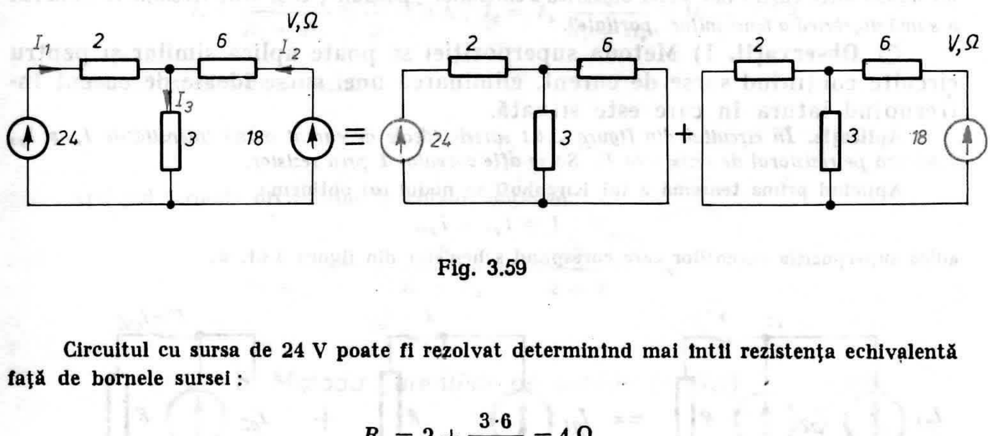

Fig. 3.59

Circuitul cu sursa de 24 V poate fi rezolvat determinînd mai întîi rezistenţa echivalentă faţă de bornele sursei :

$$R_e = 2 + \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 4\ \Omega.$$

Curentul debitat de sursă are intensitatea 24 V/4 Ω = 6 A. Faţă de acest curent, rezistoarele de 3 Ω şi 6 Ω formează un divizor, astfel că 3/(3 + 6) = 1/3 din curent, adică 2 A trece prin rezistorul de 6 Ω, restul de 4 A închizîndu-se prin rezistorul de 3 Ω. Aceste rezultate sînt cuprinse în diagramele din figura 3.60, *a*. Un calcul similar conduce la valorile reprezentate în figura 3,60, *b*, pentru circuitul cu sursa de 18 V.

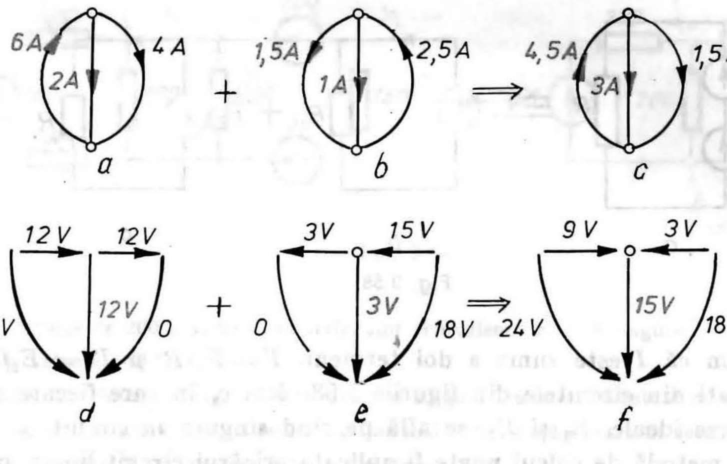

Fig. 3.60

Curenţii reali pot fi acum calculaţi efectuînd sumarea algebrică a curenţilor corespunzători din cele două circuite. Astfel, curenţii „parţiali" de 2 A şi 1 A, stabiliţi prin rezistorul de 3 Ω de sursa de 24 V, respectiv de cea de 18 V, au acelaşi sens prin rezistor şi deci curentul real, cu acelaşi sens, este efectiv suma lor, $2 + 1 = 3$ A. Curenţii „parţiali" prin rezistorul de 2 Ω au însă sensuri opuse. În consecinţă, curentul real este dat de diferenţa lor, $6 - 1{,}5 = 4{,}5$ A şi va avea sensul curentului mai mare, adică al celui de 6 A. Soluţia corespunzătoare circuitului dat prin enunţ este reprezentată în figura 3.60, *c*.

Compararea diagramelor de tensiuni pentru cele trei circuite (fig. 3.60, *d, e, f*) arată că *nu numai orice curent este suma algebrică a curenţilor „parţiali", ci şi orice tensiune la borne este o sumă algebrică a tensiunilor „parţiale".*

○ **Observaţii.** 1) Metoda superpoziţiei se poate aplica similar şi pentru circuite conţinînd surse de curent, eliminarea unei surse ideale de curent întrerupînd latura în care este situată.

Aplicaţie. *În circuitul din figura 3.61 sursele ideale de curent avînd intensităţile I_{g1} şi I_{g2} debitează pe rezistorul de rezistenţă R. Să se afle curentul I prin rezistor.*

Aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul (*a*) obţinem:

$$I = I_{g1} + I_{g2},$$

adică superpoziţia curenţilor care corespund schemelor din figura 3.61, *b*.

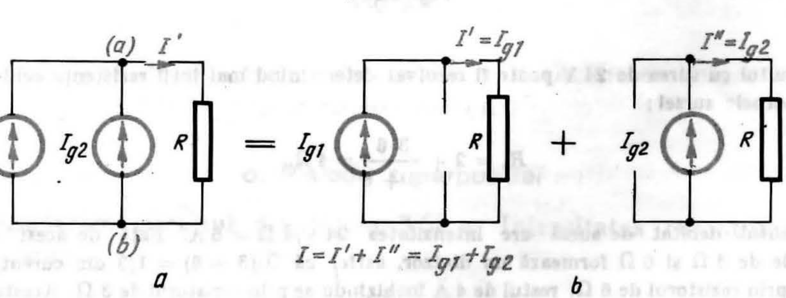

Fig. 3.61

2) În cazul cînd circuitul cuprinde şi surse reale de tensiune (sau de curent), acestea trebuie considerate ca surse ideale de tensiune în serie cu rezistoare (sau surse ideale de curent în paralel cu rezistoare), astfel încît, cînd se elimină din circuit o sursă anulăm de fapt tensiunea sa electromotoare, rezistenţa internă rămînînd în circuit.

Aplicaţie. *O sursă reală de tensiune avînd $E = 10$ V şi $R_i = 1\ \Omega$ şi o sursă reală de curent avînd $I_g = 10$ A şi $R_g = 2\ \Omega$ debitează în paralel pe un receptor cu rezistenţa $R = 2\ \Omega$. Se cere intensitatea I_R a curentului din receptor.*

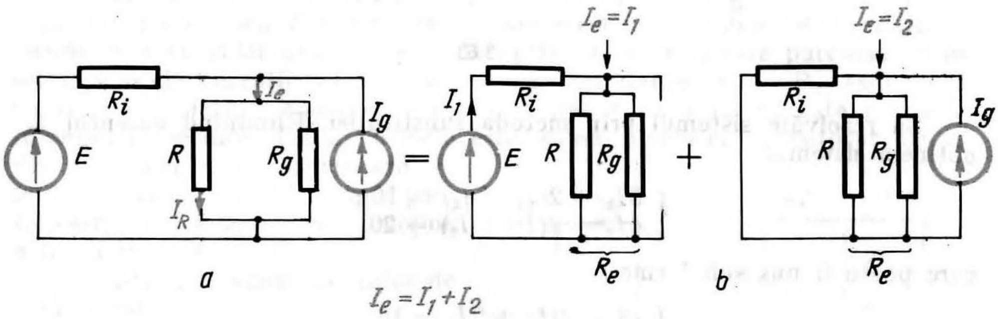

Fig. 3.62

În figura 3.62 se prezintă schema circuitului şi cele două circuite cu cîte o singură sursă, aşa cum cere teorema superpoziţiei. Obţinem mai întîi :

$$I_1 = \frac{E}{R_i + R_e} = \frac{10}{2} = 5\ \text{A}\ ;\ I_2 = I_g \frac{R_i}{R_i + R_e} = 10\frac{1}{2} = 5\ \text{A}.$$

Aplicînd superpoziţia rezultă :

$$I_e = I_1 + I_2 = 10\ \text{A}.$$

Aplicînd formula divizorului de curent, obţinem :

$$I_R = I_e \frac{R_g}{R_i + R_g} = 10\frac{2}{2+2} = 5\ \text{A}.$$

b. *Metoda curenţilor de ochiuri (ciclici)*

Considerăm circuitul din figura 3.63, *a*. Prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff obţinem sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3\ ; \\ 8I_1 + 2I_3 = 16\ ; \\ 4I_2 + 2I_3 = 20 \end{cases}$$

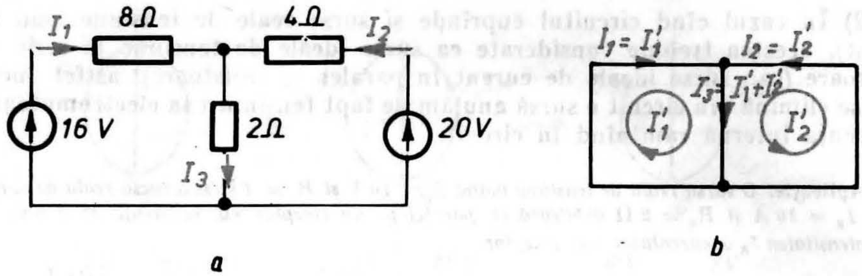

Fig. 3.63

Să rezolvăm sistemul prin metoda substituţiei. Eliminînd curentul I_3 obţinem sistemul

$$\begin{cases} 8I_1 + 2(I_1 + I_2) = 16\,; \\ 4I_2 + 2(I_1 + I_2) + 20, \end{cases}$$

care poate fi pus sub forma :

$$\begin{cases} (8 + 2)I_1 + 2I_2 = 16\,; \\ 2I_1 + (4 + 2)I_2 = 20. \end{cases}$$

Din a doua ecuaţie deducem :

$$I_1 = \frac{20 - 6\,I_2}{2} = 10 - 3I_2,$$

care, înlocuit în prima ecuaţie, dă :

$$10(10 - 3I_2) + 2I_2 = 16\,; \quad I_2 = \frac{84}{28} = 3 \text{ A}.$$

Calculînd şi ceilalţi curenţi, obţinem :

$$I_1 = 1 \text{ A şi } I_3 = 4 \text{ A}.$$

Reducerea numărului de ecuaţii, obţinută prin metoda substituţiei, poate fi realizată direct prin alegerea unor noi necunoscute, astfel încît prima teoremă a lui Kirchhoff să fie automat satisfăcută. Noile necunoscute sînt curenţi fictivi, numiţi *curenţi de ochiuri* sau *curenţi ciclici* ; fiecare parcurge toate laturile ce alcătuiesc un ochi independent.

Să admitem că prin cele două ochiuri ale circuitului din figura 3.63, *b* circulă curenţii de ochiuri I_1' şi I_2' ,cu sensurile din figură. Curenţii reali prin laturile circuitului pot fi exprimaţi în funcţie de aceşti curenţi fictivi. Astfel $I_1 = I_1'$, $I_2 = I_2'$, iar $I_3 = I_1' + I_2'$, deoarece prin latura a treia trec în acelaşi sens ambii curenţi de ochiuri.

Aplicînd a doua teoremă a lui Kirchhoff pe cele două ochiuri, obţinem :

$$\begin{cases} 8I_1' + 2(I_1' + I_2') = 16\,; \\ 4I_2 + 2(I_1' + I_2') = 20, \end{cases}$$

adică :

$$\begin{cases} (8 + 2)I_1' + 2I_2' = 16\,; \\ 2I_1' + (4 + 2)I_2' = 20. \end{cases}$$

Acest sistem este identic cu cel obținut mai sus, prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, după substituirea curentului I_3. Sistemul admite însă o interpretare diferită. Astfel observăm că ecuațiile curenților de ochiuri au forma :

$$\begin{cases} R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 = E'_1 ; \\ R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 = E'_2, \end{cases} \tag{3.29}$$

unde R_{11} și R_{22} se numesc *rezistențele proprii ale ochiurilor*, $R_{12} = R_{21}$ este *rezistența comună a ochiurilor*, iar E'_1 și E'_2 sînt *t.e.m. de ochiuri*.

Rezistența proprie a unui ochi, întotdeauna pozitivă, este suma rezistențelor laturilor ochiului. Rezistența comună a două ochiuri este rezistența laturii comune celor două ochiuri dacă latura comună este parcursă în același sens de curenții celor două ochiuri. Rezistența $R_{12} = R_{21}$ este egală cu rezistența laturii comune cu semn schimbat dacă latura este parcursă în sensuri contrare. T.e.m. de ochi este suma algebrică a tuturor t.e.m. din acel ochi și se calculează la fel ca în cazul scrierii formei particulare a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff.

Soluția sistemului ecuațiilor de ochiuri este :

$$I'_1 = 1 \text{ A} ; \; I'_2 = 3 \text{ A}$$

și poate fi verificată întocmind diagramele de tensiuni și curenți (fig. 3.64).

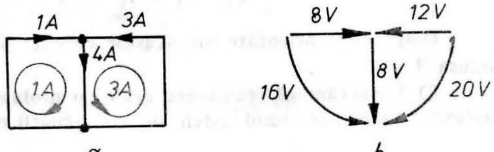

Fig. 3.64

Aplicație. *Considerăm circuitul în punte din figura 3.65, avînd valorile mărimilor marcate pe circuit. Să determinăm curenții aplicînd metoda curenților de ochiuri.*

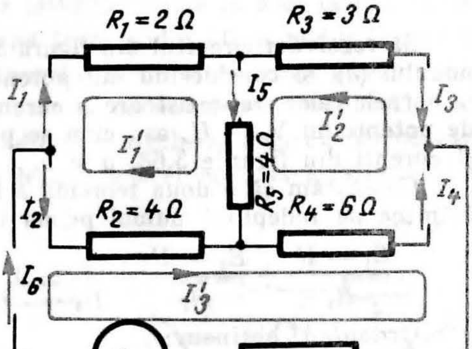

Fig. 3.65

Circuitul are $L = 6$, $N = 4$ deci $O = L - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ ochiuri independente. Fie I'_1, I'_2 și I'_3 curenții ciclici asociați acestor ochiuri alese ca în figură.

Ecuațiile generale pentru trei ochiuri se vor scrie :

$$\begin{cases} R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 + R_{13}I'_3 = E'_1 ; \\ R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 + R_{23}I'_3 = E'_2 ; \\ R_{31}I'_1 + R_{32}I'_2 + R_{33}I'_3 = E'_3, \end{cases}$$

în care, în conformitate cu regulile stabilite mai sus, vom avea

$R_{11} = R_1 + R_5 + R_2 = 10\,\Omega$; $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 = 13\,\Omega$; $R_{33} = R_2 + R_4 + R_6 = 12\,\Omega$;

$R_{12} = R_{21} = R_5 = 4\Omega$; $R_{13} = R_{31} = -R_2 = -4\,\Omega$; $R_{23} = R_{32} = R_4 = 6\,\Omega$;

$E'_1 = 0$; $E'_2 = 0$; $E'_3 = E = 80$ V.

○ **Observație.** $R_{13} = R_{31} = -R_2 < 0$ deoarece latura 2 este parcursă în sens opus de I'_1 și I'_3.

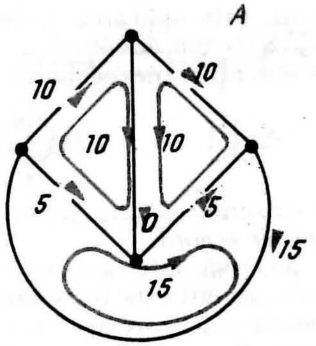

Fig. 3.66

Substituind în ecuații obținem :

$$10I_1' + 4I_2' - 4I_3' = 0;$$

$$4I_1' + 13I_2' + 6I_3' = 0;$$

$$-4I_1' + 6I_2' + 12I_3' = 80.$$

Rezultă :

$$I_1' = 10\,\text{A} = -I_2';\ I_3' = 15\,\text{A}.$$

Intensitățile curenților din laturi rezultă din superpoziția curenților ciclici care parcurg laturile :

$$I_1 = I_1' = 10\,\text{A}.$$

$$I_2 = -I_1' + I_3' = -10 + 15 = 5\,\text{A};\ I_3 = -I_2' = 10\,\text{A};$$

$$I_4 = I_2' + I_3' = -10 + 15 = 5\,\text{A};$$

$$I_5 = I_1' + I_2' = 10 - 10 = 0;\ I_6 = I_3' = 15\,\text{A}.$$

Diagramele orientate ale acestor curenți și ale curenților de ochiuri sînt prezentate în figura 3.66.

○ **Observăm** că rezolvarea aceleiași probleme cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff ar fi necesitat rezolvarea unui sistem de ecuații cu șase necunoscute.

c. *Metoda potențialelor nodurilor*

Să rezolvăm circuitul din figura 3.67 alegînd ca necunoscută potențialul nodului (a), și considerînd nul potențialul nodului (b) ($V_b = 0$). Tensiunile la bornele celor trei rezistoare și curenții prin ele pot fi exprimați în funcție de potențialul $V_a = U$, așa cum se poate urmări pe diagramele de tensiuni și curenți din figurile 3.68, *a* și *b*.

Constatăm că a doua teoremă a lui Kirchhoff este automat satisfăcută. Rămîne de îndeplinit numai prima teoremă a lui Kirchhoff, adică :

$$\frac{E_1 - U}{R_1} + \frac{E_2 - U}{R_2} - \frac{U}{R_3} = 0.$$

Ordonînd, obținem :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) U = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}.$$

Cu valorile numerice date (fig. 3.67.):

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) U = \frac{16}{8} + \frac{20}{4},$$

de unde rezultă :

$$U = 8\ \text{V}.$$

Notînd nodul cu indicele *1*, ecuația obținută se poate pune sub forma :

$$G_{11} U_1 = I_{sc\,1}.$$

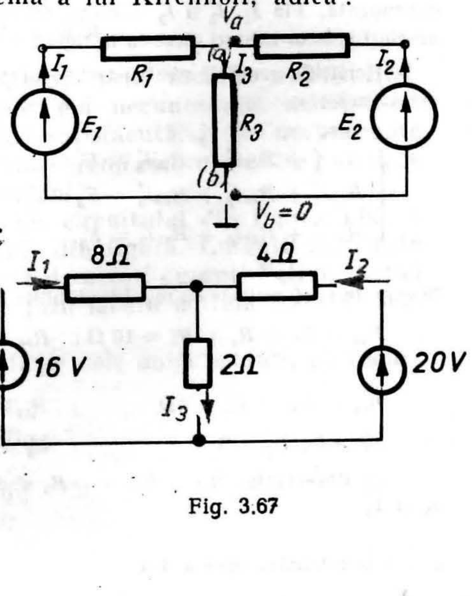

Fig. 3.67

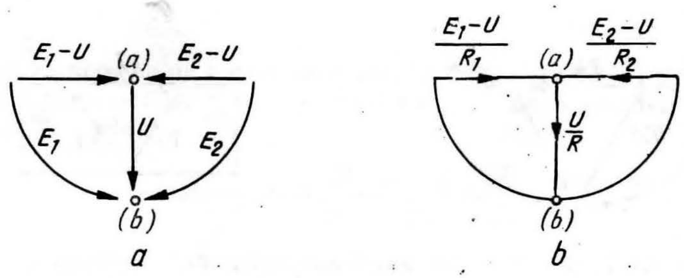

Fig. 3.68

Dacă circuitul ar fi avut trei noduri, atunci notînd cu V_1 şi V_2 potenţialele nodurilor (*1*) şi (*2*), şi alegînd $V_3 = 0$, s-ar fi obţinut similar un sistem de două ecuaţii :

$$\begin{cases} G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = I_{sc\,1}\,; \\ G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = I_{sc\,2}, \end{cases}$$

unde tensiunile U_1 şi U_2 sînt respectiv egale cu potenţialele V_1 şi V_2 ($U_1 = V_1 - V_3$; $U_2 = V_2 - V_3$).

Conductanţele G_{11} şi G_{22} se numesc *conductanţele proprii ale nodurilor.* Ca şi mai sus, o conductanţă proprie a unui nod, întotdeauna pozitivă, se calculează făcînd suma conductanţelor laturilor legate la acel nod. Conductanţa $G_{12} = G_{21}$ este *conductanţa comună* între nodul (*1*) şi nodul (*2*), egală cu suma cu semn schimbat a conductanţelor laturilor ce leagă direct nodurile (*1*) şi (*2*). Curenţii $I_{sc\,1}$ şi $I_{sc\,2}$ se numesc *curenţi de scurtcircuit.* Un curent de scurtcircuit se calculează prin adunarea algebrică a curenţilor pe care i-ar injecta în nod sursele din laturile legate la acel nod, dacă laturile ar fi scurtcircuitate la borne.

Aplicaţie. *Să se rezolve circuitul din figura 3.69 cu ajutorul metodei tensiunilor la noduri.*

Ecuaţiile tensiunilor la noduri sînt :

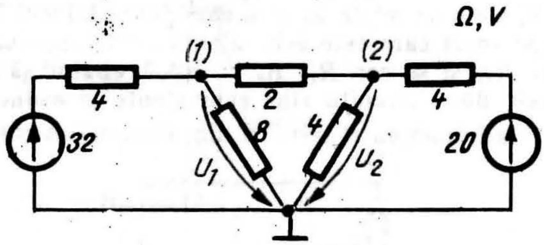

Fig. 3.69

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) U_1 - \frac{1}{2} U_2 = \frac{32}{4}\,;$$

$$-\frac{1}{2}U_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) U_2 = \frac{20}{4},$$

adică :

$$\frac{7}{8} U_1 - \frac{1}{2} U_2 = 8\,;$$

$$-\frac{1}{2} U_1 + U_2 = 5.$$

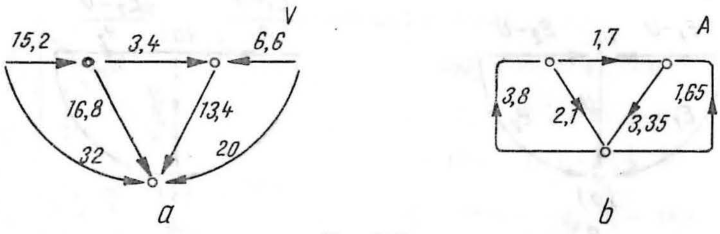

Fig. 3.70

Rezolvînd sisteı obţinem:

$$U_1 = 16{,}8\ \text{V} \quad \text{şi} \quad U_2 = 5 + \frac{U_1}{2} = 13{,}4\ \text{V}.$$

Calculăm curenţii şi întocmim diagramele din figura 3.70, mai întîi cea de tensiuni şi apoi cea de curenţi.

Deoarece teoremele lui Kirchhoff sînt verificate identic, soluţia obţinută este cea corectă.

d. *Metode de transfigurare*

A transfigura un circuit înseamnă a-l transforma într-un circuit echivalent cu el. De exemplu, un lanţ de rezistoare legate în serie poate fi substituit printr-un singur rezistor avînd rezistenţa egală cu suma rezistenţelor rezistoarelor; un generator real de tensiune se poate echivala cu un generator real de curent ş.a.m.d. În electrotehnică, metodele de transfigurare se utilizează pentru simplificarea circuitelor şi uşurarea studiului lor.

● **Transfigurarea triunghi-stea şi stea-triunghi.** Circuitul din figura 3.71, *a*, se numeşte *circuit în stea*, iar cel din figura 3.71, *b* se numeşte *circuit în triunghi*. Elementele lor sînt R_1, R_2, R_3 (pentru stea) şi R_{12}, R_{23} şi R_{31} (pentru triunghi).

A transfigura triunghiul în stea înseamnă a găsi elementele R_1, R_2 şi R_3 ale unei reţele în stea care poate înlocui în orice condiţii reţeaua în triunghi (deci care este echivalentă cu triunghiul). Prin urmare, se dau R_{12}, R_{23} şi R_{31} şi se cer R_1, R_2 şi R_3. Trebuind să fie echivalente în orice condiţii, cele două circuite sînt echivalente şi atunci cînd se alimentează numai la

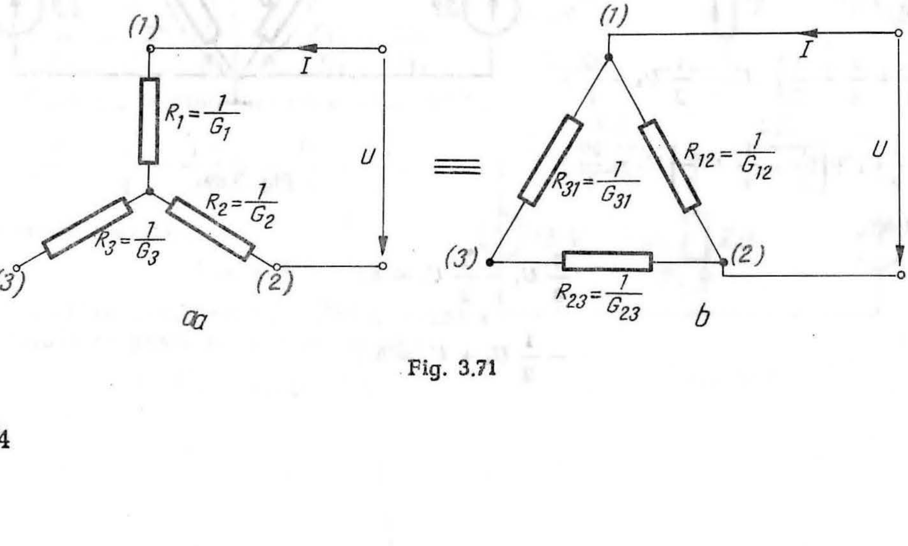

Fig. 3.71

cîte o singură pereche de borne, de exemplu între bornele (*1*) și (*2*), borna (*3*) fiind în gol (liberă) (fig. 3.71). În acest caz cele două rezistențe echivalente trebuie să fie egale:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

În mod analog, alimentînd pe la bornele (*2*), (*3*) și (*3*, (*1*) se obțin:

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Adunînd cele trei ecuații obținem:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{23}R_{31} + R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Scăzînd pe rînd din această relație cîte una dintre ecuațiile precedente, obținem:

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}};$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}}; \qquad (3.30)$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}}.$$

Pentru cazul particular în care rezistențele din laturile triunghiului sînt egale:

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta,$$

se obține:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_\curlywedge = \frac{R_\Delta}{3}.$$

Aplicație. *Se dă triunghiul cu* $R_{12} = 2\ \Omega$, $R_{23} = 3\ \Omega$ *și* $R_{31} = 5\ \Omega$; *se cer rezistențele stelei echivalente.*

Obținem, cu relațiile de mai sus:

$$R_1 = 1\ \Omega;$$

$$R_2 = 0{,}6\ \Omega;$$

$$R_3 = 1{,}5\ \Omega.$$

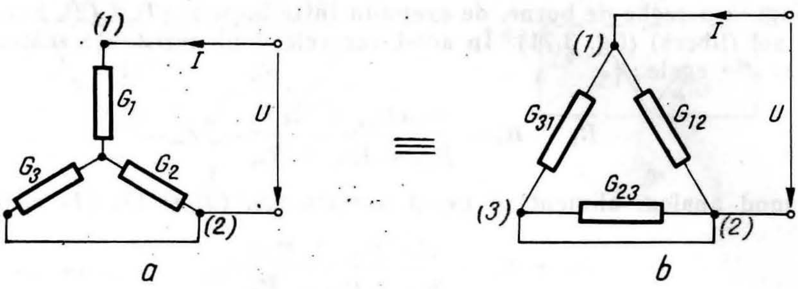

Fig. 3.72

Pentru a transfigura steaua în triunghi, alimentăm pe rînd cele două rețele ca în figura 3.72, de exemplu pe la bornele (*1*) și (*2*) cu bornele (*2*) și (*3*) în scurtcircuit. Calculăm conductanțele echivalente, care trebuie să fie egale ; obținem succesiv :

$$G_{12} + G_{31} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3};$$

$$G_{23} + G_{12} = \frac{G_2(G_3 + G_1)}{G_1 + G_2 + G_3};$$

$$G_{31} + G_{23} = \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații ca și în cazul precedent, obținem :

$$\boxed{G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3}};$$

$$\boxed{G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}; \tag{3.31}$$

$$\boxed{G_{31} = \frac{G_3G_1}{G_1 + G_2 + G_3}}.$$

Pentru cazul particular în care conductanțele circuitului în stea sînt egale :

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_\lambda = \frac{1}{R_\lambda},$$

obținem :

$$G_{12} = G_{23} = G_{31} = \frac{1}{R_\Delta} = \frac{G_\lambda}{3} = \frac{1}{3R_\lambda},$$

de unde rezultă $R_\lambda = \dfrac{R_\Delta}{3}$, ca și în aplicația anterioară.

Aplicația 1. *Se dă steaua cu $G_1 = 0,2$ S, $G_2 = 0,3$ S și $G_3 = 0,5$ S ; se cer elementele triunghiului echivalent.*

$$G_{12} = \frac{0,2 \times 0,3}{0,2 + 0,3 + 1,5} = 0,06 \text{ S}; \quad G_{23} = \frac{0,15}{1} = 0,15 \text{ S}; \quad G_{31} = \frac{0,1}{1} = 0,2 \text{ S}.$$

Rezultă și :

$$R_{12} = \frac{50}{3}\ \Omega; \quad R_{23} = \frac{20}{3}\ \Omega; \quad R_{31} = 5\ \Omega.$$

Aplicația 2. *Se dă rețeaua în punte din figura 3.73, în care valorile rezistențelor sînt indicate pe figură. Se cere să se calculeze curentul debitat de sursă.*

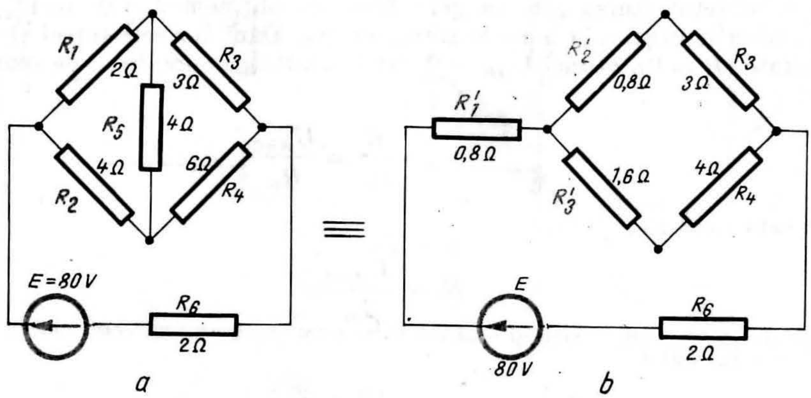

Fig. 3.73

Transfigurăm triunghiul format din rezistoarele R_1 ; R_2 și R_5 în stea și obținem rețeaua din figură, în care :

$$R_1' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \times 4}{10} = 0,8\ \Omega;$$

$$R_2' = \frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{2 \times 4}{10} = 0,8\ \Omega;$$

$$R_3' = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{4 \times 4}{10} = 1,6\ \Omega.$$

Rezistența echivalentă a circuitului astfel obținut este simplu de calculat :

$$R_e = R_6 + R_1' + \frac{(R_2' + R_3)(R_3' + R_4)}{R_2' + R_3 + R_3' + R_4} = 2 + 0,8 + \frac{(0,8 + 3)(1,6 + 6)}{0,8 + 3 + 1,6 + 6} = \frac{16}{3}\ \Omega;$$

$$I = I_6 = \frac{E}{R_e} = \frac{80}{\frac{16}{3}} = 15 \text{ A}.$$

Se obține același rezultat ca la aplicația privind curenții de ochiuri, dar mult mai rapid.

● **Transfigurarea rețelelor în generatoare echivalente.**

Generatorul echivalent de tensiune ; teorema Helmholtz-Thévenin. Considerăm o sursă avînd t.e.m. E și rezistența internă R_i, care alimentează un receptor de rezistență R.

Conform legii lui Ohm, intensitatea curentului va fi :

$$I = \frac{E}{R + R_i}.$$

Ne punem următoarea întrebare : dacă nu se cunosc parametrii sursei, ce încercări (măsurări) ar trebui să facem pentru a putea calcula intensitatea curentului pentru orice receptor R dat ? Observăm că dacă receptorul este deconectat (sursa este în gol : $R = \infty$) obținem $I = 0$, iar $U_{ABO} = E$, U_{ABO} fiind tensiunea la bornele sursei în gol. Dacă bornele sursei sînt scurtcircuitate ($R = 0$), atunci $U_{AB} = 0$, iar intensitatea curentului de scurtcircuit va fi

$$I_{sc} = \frac{E}{R_i} = \frac{U_{ABO}}{R_i}.$$

Deducem deci că :

$$R_i = \frac{U_{ABO}}{I_{sc}}.$$

Obținem așadar :

$$I = \frac{U_{ABO}}{R + \frac{U_{ABO}}{I_{sc}}}$$

adică este suficient să măsurăm tensiunea de mers în gol U_{ABO} și intensitatea curentului de scurtcircuit. Observăm însă că R_i este rezistența sursei pasivizate, adică rezistența ce se obține anulînd t.e.m. (păstrînd numai rezistența internă). Această rezistență o notăm cu R_{ABO}. Obținem deci :

$$I = \frac{U_{ABO}}{R + R_{ABO}}.$$

Această relație exprimă **teorema lui Helmholtz și Thévenin** și este foarte generală în sensul următor : *dacă la două borne A, B ale unei rețele liniare active conectăm un receptor R, atunci intensitatea curentului din latura AB se calculează cu relația :*

$$\boxed{I_{AB} = \frac{U_{ABO}}{R + R_{ABO}}} \qquad (3.52)$$

unde :

U_{ABO} este tensiunea ce se stabilește la bornele A, B cînd se scoate din circuit rezistența R (funcționare în gol) ;

R_{ABO} — rezistenţa reţelei pasivizate faţă de bornele A, B, adică rezistenţa reţelei (mai puţin latura AB) cînd se anulează t.e.m. ale surselor, păstrînd rezistenţele lor interne.

Aplicaţie. *Considerăm două generatoare reale (fig. 3.74, a) legate în paralel şi debitînd pe un rezistor de rezistenţă R. Se cere intensitatea curentului* I_{AB}.

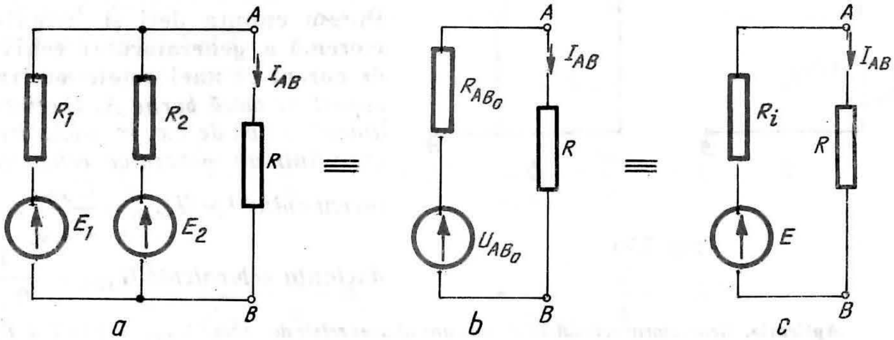

Fig. 3.74

Aplicînd transfigurarea generatoarelor de tensiune în paralel (fig. 3.74, *b*) obţinem:

$$U_{ABO} = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1 + R_2} \text{ şi } R_{ABO} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Rezultă:

$$I_{AB} = \frac{\dfrac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1 + R_2}}{R + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}.$$

Aplicaţie numerică: $E_1 = E_2 = 10$ V ; $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$; $R = 9{,}5\ \Omega$.
Se obţine:

$$I_{AB} = \frac{10}{9{,}5 + 0{,}5} = 1 \text{ A}.$$

Formula lui Helmholtz şi Thèvenin sugerează schema echivalentă din figura 3.74, *c*, în care $E = U_{ABO}$ şi $R_i = R_{ABO}$. Această schemă echivalentă activă se numeşte *generatorul echivalent de tensiune al circuitului în raport cu bornele A,B.*

Putem enunţa deci următoarea **teoremă a generatorului echivalent de tensiune al unei reţele active**; *în raport cu două borne A,B, orice reţea liniară activă de curent continuu se poate transfigura într-un generator echivalent de tensiune avînd t.e.m.* $E = U_{ABO}$ *şi rezistenţa internă* $R_i = R_{ABO}$.

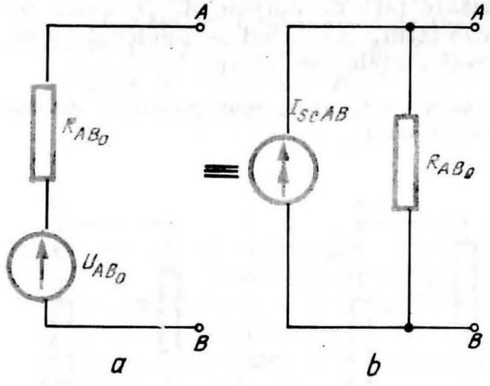

Fig. 3.75

Generatorul echivalent de curent ; teorema lui Norton. Transfigurînd generatorul echivalent de tensiune în generator echivalent de curent (fig. 3.75), obținem generatorul echivalent de curent al rețelei în raport cu bornele A, B. Putem enunța deci și următoarea **teoremă a generatorului echivalent de curent al unei rețele active:** *în raport cu două borne A, B orice rețea liniară activă de c.c. se poate transfigura într-un generator echivalent de curent avînd* $I_g = I_{scAB} = \frac{U_{ABO}}{R_{ABO}}$ *și conductanța echivalentă* $G_{ABO} = \frac{1}{R_{ABO}}$.

Aplicație. *Generatorul echivalent de tensiune al unei rețele de c.c. are* $U_{ABO} = 100$ *V și* $R_{ABO} = 10\ \Omega$. *Să se determine generatorul echivalent de curent.*

$$I_g = \frac{U_{ABO}}{R_{ALO}} = \frac{100}{10} = 10\ \mathrm{A}\ ;\ G_{ABO} = \frac{1}{R_{ABO}} = \frac{1}{10} = 0{,}1\ \mathrm{S}.$$

Considerăm generatorul echivalent de curent al unei rețele care debitează pe un receptor de conductanță $G = \frac{1}{R}$. Să calculăm tensiunea U_{AB} la bornele receptorului.

$$U_{AB} = RI_{AB} = \frac{1}{G} \cdot I_{AB}.$$

Folosind teorema divizorului de curent, obținem :

$$I_{AB} = I_{AB\,sc} \frac{R_{ABO}}{R + R_{ABO}} = I_{AB\,sc} \frac{G}{G_{ABO} + G}.$$

Înlocuind în expresia tensiunii, obținem :

$$\boxed{U_{AB} = \frac{I_{AB\,sc}}{G + G_{ABO}}}. \tag{3.33}$$

Această relație exprimă matematic **teorema lui Norton,** care se enunță astfel : *tensiunea la bornele unei laturi pasive de conductanță G conectate între bornele A, B ale unei rețele liniare active de c.c. este egală cu raportul dintre intensitate curentului care se stabilește la scurtcircuitarea bornelor și suma dintre conductanța G a laturii și conductanța* G_{ABO} *a rețelei pasivizate față de bornele A, B.*

Aplicaţia 1. *Două reţele avînd $U'_{ABO} = 100$ V, $R'_{ABO} = 2\ \Omega$ şi $U''_{ABO} = 200$ V şi $R''_{ABO} = 4\Omega$ debitează în paralel pe latura AB de rezistenţă $R = 4\ \Omega$ (fig. 3.76). Să se determine tensiunea U_{AB} şi intensitatea curentului din latură.*

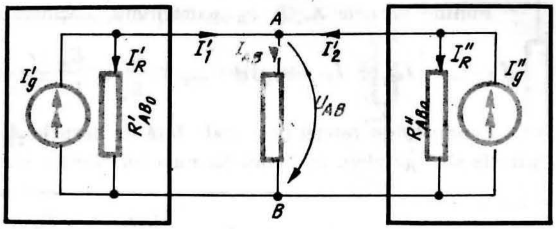

Fig. 3.76

Considerăm generatoarele echivalente de curent avînd parametrii :

$$I'_g = \frac{U'_{ABO}}{R'_{ABO}} = \frac{100}{2} = 50 \text{ A şi } I''_g = \frac{U''_{ABO}}{R''_{ABO}} = \frac{200}{4} = 50 \text{ A}.$$

Conductanţele lor vor fi :

$$G'_{ABO} = \frac{1}{R'_{ABO}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ S şi } G''_{ABO} = \frac{1}{R''_{ABO}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ S}.$$

Intensitatea curentului de scurtcircuit (fig. 3.76) va fi :

$$I_{sc\,AB} = I'_g + I''_g = 50 + 50 = 100 \text{ A},$$

conductanţa reţelei pasivizate va fi :

$$G_{ABO} = G'_{ABO} + G''_{ABO} = 0{,}75 \text{ S},$$

iar conductanţa laturii AB **va fi :**

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ S}.$$

Aplicînd formula lui Norton obţinem :

$$U_{AB} = \frac{100}{0{,}25 + 0{,}75} = 100 \text{ V şi } I_{AB} = GU_{AB} = 0{,}25 \times 100 = 25 \text{ A}.$$

○ **Observaţie.** Din schema din figura 3.76 mai rezultă :

$$I'_R = \frac{U_{AB}}{R'_{ABO}} = \frac{100}{2} = 50 \text{ A şi } I''_R = \frac{U_{AB}}{R''_{ABO}} = \frac{100}{4} = 25 \text{ A},$$

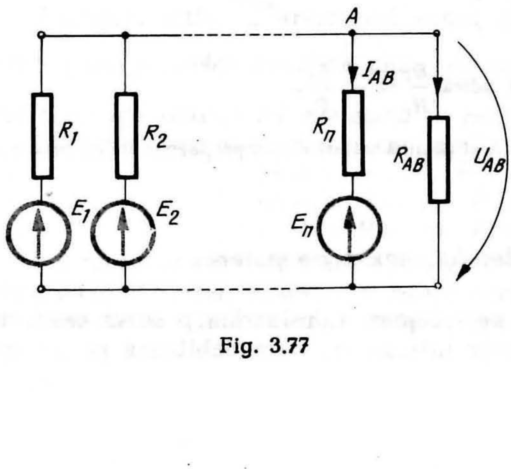

Fig. 3.77

deci prima reţea nu debitează curent în receptor.

Aplicaţia 2. *În reţeaua din figura 3.77, n generatoare reale de tensiune diferită avînd t.e.m. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ şi rezistenţele interne $R_1, R_2, \ldots R_n$ debitează în comun pe latura AB de rezistenţă R_{AB}.* **Se cere tensiunea la bornele laturii.**

Rezolvăm problema cu formula lui Norton.

Punînd bornele A, B în scurtcircuit, obţinem evident:

$$I_{AB\,sc} = I_{sc_1} + I_{sc_2} + \ldots + I_{sc_n} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \ldots + \frac{E_n}{R_n} = E_1G_1 + E_2G_2 + \ldots + E_nG_n.$$

Conductanţa reţelei pasivizate faţă de bornele A, B în gol va fi $G_{ABO} = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$ (laturile sînt paralel). Aplicînd formula lui Norton obţinem:

$$\boxed{U_{AB} = \frac{G_1E_1 + G_2E_2 + \ldots + G_nE_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n + G_{AB}}}. \tag{3.34}$$

Această relaţie mai este cunoscută şi sub denumirea de *formula lui Millmann*.

Pentru cazul particular în care

$$E_1 = E_2 = \ldots = E_n, G_1 = G_2 = \ldots = G_n = G = \frac{1}{R},$$

se obţine:

$$U_{AB} = \frac{nGE}{nG + G_{AB}} = \frac{GE}{G + \frac{G_{AB}}{n}} = \frac{R_{AB}E}{R_{AB} + \frac{R}{n}}$$

şi deci:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{E}{R_{AB} + \frac{R}{n}},$$

relaţie cunoscută de la legarea surselor de tensiune identice în paralel.

Aplicaţia 3. *Două surse reale funcţionînd în paralel alimentează un receptor de rezistenţă R. Ce relaţie trebuie să existe între t.e.m. ale surselor şi rezistenţele lor interne pentru ca prin receptor să nu treacă curent?*

Deoarece:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R} = 0 \Rightarrow U_{AB} = 0.$$

Din formula lui Millmann rezultă:

$$U_{AB} = \frac{G_1E_1 + G_2E_2}{G_1 + G_2 + G} = 0 \Rightarrow G_1E_1 + G_2E_2 = 0$$

sau

$$\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = 0, \text{ adică } \frac{E_1}{R_1} = -\frac{E_2}{R_2}.$$

T.e.m. trebuie să fie orientate în opoziţie şi să aibă valori direct proporţionale cu rezistenţele lor interne.

e. Teorema transferului maxim de putere

● **Puterea maximă absorbită de receptor.** Considerăm o sursă reală de tensiune, avînd t.e.m. E şi rezistenţa internă R_i, care debitează pe un receptor de rezistență R (fig. 3.78). Presupunînd că sursa este dată, se pune întrebarea în ce situație puterea absorbită de receptor va fi maximă.

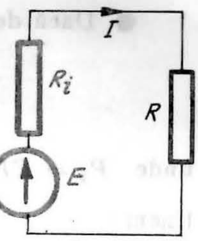

Fig. 3.78

Pentru a răspunde la întrebare, considerăm puterea absorbită de receptor:

$$P = RI^2.$$

Conform legii lui Ohm:

$$I = \frac{E}{R + R_i},$$

astfel că puterea se exprimă prin:

$$P = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2} = \frac{E^2}{\left(\frac{R_i}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\right)^2}.$$

T.e.m. E fiind dată, puterea va fi maximă cînd numitorul va fi minim. Pentru a găsi minimul numitorului, observăm că produsul termenilor este constant:

$$\frac{R_i}{\sqrt{R}} \cdot \sqrt{R} = R_i.$$

Din matematică se știe că dintre toate perechile de numere al căror produs este constant, suma numerelor e minimă cînd ele sînt egale: (de ex. $1 \times 16 = 2 \times 8 = 4 \times 4 \rightarrow 4 + 4 < 2 + 8 < 1 + 16$). Prin urmare, deoarece produsul termenilor din paranteza de la numitor este constant, suma lor va fi minimă cînd ei sînt egali:

$$\frac{R_i}{\sqrt{R}} = \sqrt{R} \rightarrow \boxed{R = R_i}$$

În acest caz puterea maximă va fi:

$$\boxed{P_{max} = \frac{E^2}{4R_i}} \tag{3.35}$$

Ajungem astfel la următorul enunț al **teoremei transferului maxim de putere**: *un generator transferă unui rezistor o putere maximă* $\frac{E^2}{4R_i}$ *atunci cînd rezistența rezistorului este egală cu rezistența internă a generatorului.*

Putem reprezenta puterea ca funcție de R, (fig. 3.79), observînd că:

pentru $R = 0$, $P = 0$;
pentru $R = R_i$, $P = P_{max}$;
pentru $R = \infty$, $P = 0$.

Un receptor care satisface condiția de transfer maxim de putere se numește *adaptat* sursei. Adaptarea receptoarelor se utilizează de obicei în tehnica semnalelor (radiotehnică, televiziune etc.).

● Dacă definim **randamentul transferului energiei** ca :

$$\eta = \frac{P\Delta t}{P_g \Delta t} = \frac{P}{P_g},$$

unde $P_g = EI = \dfrac{E^2}{R + R_i}$ este puterea totală dezvoltată de sursă, obținem :

$$\eta = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2} \Big/ \frac{E^2}{R + R_i} = \frac{R}{(R + R_i)}.$$

Se observă că *randamentul este cu atît mai mare cu cît* $R_i \ll R$. Pentru $P = P_{max}$, $R = R_i$ și se obține randamentul

$$\eta(P)|_{P_{max}} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%.$$

Acest rezultat este natural deoarece atunci cînd rezistența receptorului este egală cu rezistența internă a sursei, acestea fiind străbătute de același curent disipă puteri egale $RI^2 = R_i I^2$ și deci puterea dezvoltată de sursă se consumă jumătate în sursă și jumătate în receptor.

În tehnica energiei electrice (centrale, rețele etc.) randamentul de 50% este total nesatisfăcător și deci receptoarele nu se adaptează surselor.

Aplicația 1. *O sursă avînd t.e.m. $E = 50$ V și $R_i = 0,5\ \Omega$ debitează pe un receptor adaptat de rezistență R.* Să se determine R și P_{max}.

$$R = R_i = 0,5\ \Omega\ ;\ P_{max} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{2\,500}{4 \times 0,5} = 1\,250\ \text{W}.$$

Aplicația 2. *Două surse reale de tensiune avînd $E_1 = 50$ V ; $E_2 = 100$ V ; $R_{i1} = 1\ \Omega$ și $R_{i2} = 2\ \Omega$ debitează pe un receptor adaptat. Să se determine R și P_{max}.*

Generatorul echivalent va avea :

$$E = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{\frac{50}{1} + \frac{100}{2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{100}{1,5}\ \text{V}\ ;$$

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}\ \Omega.$$

Deci :

$$R = R_i = \frac{2}{3}\ \Omega\ ;$$

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{\left(\frac{100}{1,5}\right)^2}{\frac{8}{3}} = 1\,667\ \text{W}.$$

Aplicația 3. *O sursă avînd $E = 100$ V și $R_i = 1\ \Omega$ debitează pe un receptor puterea $P = 1\,000$ W. Să se determine rezistența receptorului și randamentul transferului.*

Scriem:

$$P = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2}.$$

Din această relație rezultă ecuația de gradul 2

$$PR^2 + (2PR_i - E^2)R + PR_i^2 = 0,$$

avînd soluțiile:

$$R = -\frac{2PR_i - E^2}{2P} \pm \sqrt{\left(\frac{2PR_i - E^2}{2P}\right)^2 - R_i^2}.$$

Ecuația are soluții reale numai dacă discriminantul este nenegativ, adică dacă este îndeplinită condiția:

$$(2PR_i - E^2)^2 - 4P^2R_i^2 \geqslant 0.$$

Dezvoltînd și simplificînd cu $E^2 > 0$ obținem:

$$\frac{E^2}{4R_i} = P_{max} \geqslant P > 0.$$

În cazul nostru,

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{100^2}{4} = 2\,500 > 1\,000 = P.$$

Deci problema are două soluții:

$$R' = 7,87\ \Omega;\ R'' = 0,127\ \Omega.$$

Cele două randamente vor fi:

$$\eta' = \frac{7,87}{1 + 7,87} = 0,88\ (88\%);\ \eta'' = \frac{0,127}{1 + 0,127} = 0,11\ (11\%).$$

Aceste două soluții sînt evidențiate clar în figura 3.79, unde dreapta $P = const$ taie curba $P = f(R)$ în două puncte, A' și A'', cărora le corespund $R' = 0,127\ \Omega$ și $R'' = 7,87\ \Omega$.

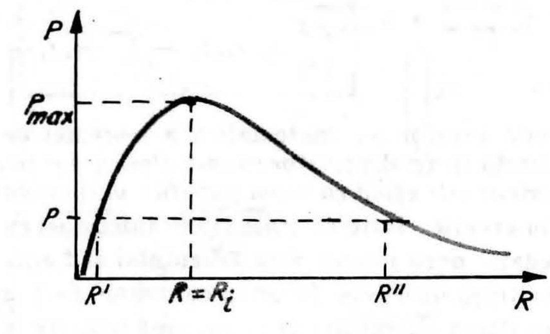

Fig. 3.79

f. Teorema conservării puterilor

Considerăm o sursă de tensiune avînd t.e.m. E și rezistența internă R_i, care debitează pe un receptor de rezistență R. Conform legii lui Ohm vom putea scrie:

$$E = R_iI + RI.$$

Înmulţind cu I obţinem :

$$EI = R_i I^2 + RI^2,$$

sau

$$P_g = P_i + P,$$

unde :

P_g este puterea dezvoltată de sursă ;
P_i — puterea disipată în rezistenţă internă a sursei ;
P — puterea absorbită de receptor.

Mai luăm în considerare exemplul din figura 3.80 pentru care, aplicînd a doua teoremă a lui Kirchhoff, obţinem :

$$E_1 - E_2 = R_1 I + R_2 I$$

sau, înmulţind cu I :

$$E_1 I - E_2 I = R_1 I^2 + R_2 I_2^2,$$

respectiv

$$P_{1g} - P_{2g} = P_1 + P_2$$

sau

$$P_{1g} = P_{2g} + P_1 + P_2.$$

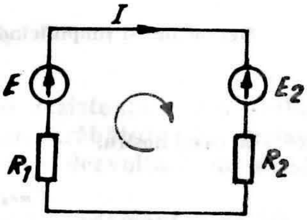

Fig. 3.80

Observăm că în primul caz puterea dezvoltată de generator este disipată în rezistenţa sa internă şi în receptor. În cel de-al doilea caz, puterea dezvoltată de primul generator acoperă puterile disipate în rezistoare şi puterea primită de cel de-al doilea generator.

Aceste relaţii se numesc *relaţii de conservare a puterilor* sau *relaţii de bilanţ de puteri*. Ele se pot generaliza pentru o reţea cu L laturi active :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{L} \pm E_k I_k = \sum_{k=1}^{L} R_k I_k^2} \qquad (3.36)$$

şi reprezintă exprimarea matematică a **teoremei de conservare a puterilor**, care se enunţă în felul următor : *suma algebrică a puterilor dezvoltate de sursele de tensiune este egală cu suma puterilor disipate în rezistenţele reţelei.*

○ **Observaţie.** Puterea unei surse intervine cu semnul (+), adică este efectiv cedată, dacă intensitatea curentului şi t.e.m. sînt pozitive şi coincid ca sens ; puterea unei surse intervin cu semnul (—), adică este efectiv primită, dacă intensitatea curentului şi t.e.m. sînt pozitive şi opuse ca sens ; puterile disipate în rezistenţe (inclusiv în rezistenţele interne ale surselor) sînt întotdeauna pozitive.

De regulă, pentru a verifica corectitudinea rezolvării unui circuit electric se alcătuieşte relaţia de bilanţ de puteri. Neverificarea bilanţului arată cu siguranţă că rezolvarea este incorectă.

Aplicație. *În rețeaua din figura 3.81, prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff s-au obținut $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A și $I_3 = 3$ A cu sensurile din figură. Să aplicăm teorema conservării puterilor.*

$$E_1I_1 + E_2I_2 - E_3I_3 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2.$$

Făcînd înlocuirile, obținem:

$$20 \times 1 + 10 \times 2 - 2 \times 3 = 12 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 3^2,$$

adică

$$34 \text{ W} = 34 \text{ W}.$$

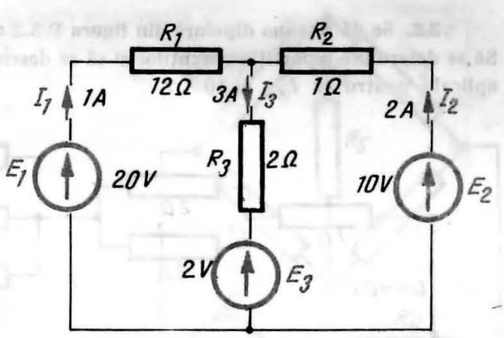

Fig. 3.81

Bilanțul de puteri se verifică. Observăm că numai sursele E_1 și E_2 dezvoltă energie, în timp ce E_3 consumă energie.

Probleme

3.1. Să se calculeze rezistențele echivalente ale rețelelor dipolare din figura P.3.1.

R: *a)* 2 Ω; *b)* 2 Ω; *c)* 10 Ω;

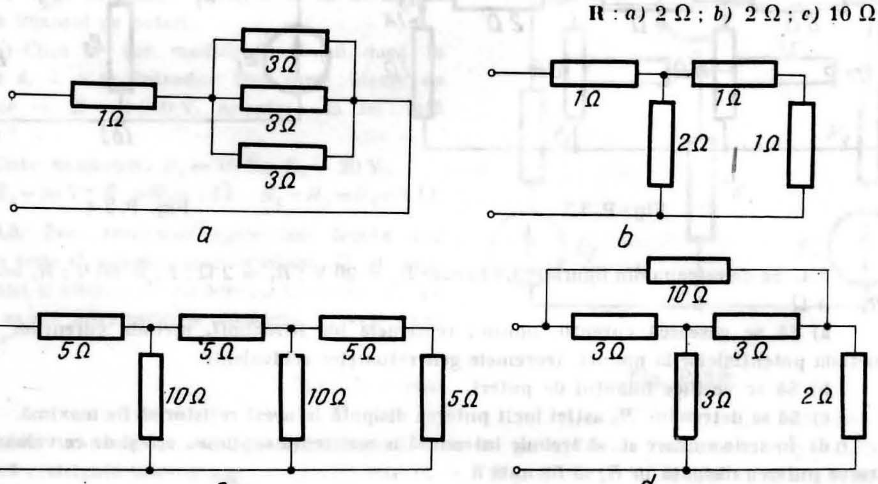

Fig. P.3.1

3.2. Se dă rețeaua dipolară din figura P.3.2 căreia i se aplică la borne tensiunea $U = 40$ V. Să se determine repartiția curenților și să se deseneze diagrama orientată. Ce tensiune ar trebui aplicată pentru ca $I_{AB} = 10$ A?

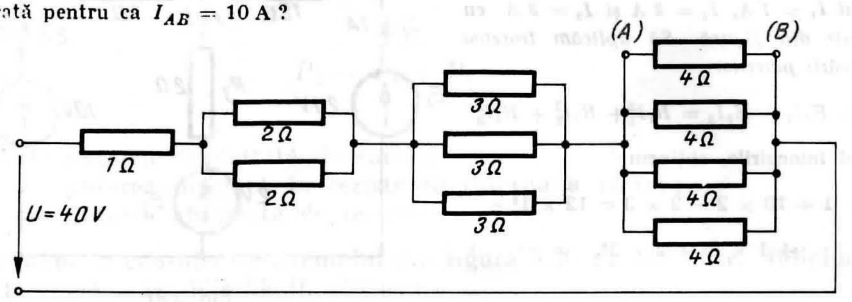

Fig. P. 3.2

3.3. Se dă rețeaua din figura P.3.3 în care $I_5 = 1$ A. Se cer ceilalți curenți și tensiunea ce trebuie aplicată la borne.

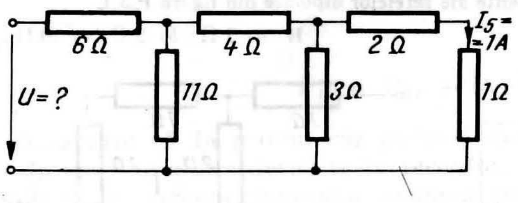

Fig. P. 3.3

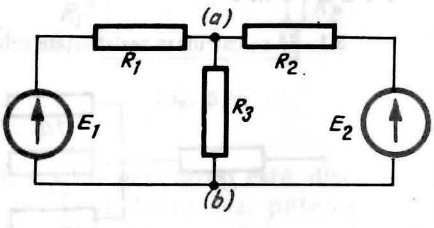

Fig. P. 3.4

3.4. Se dă rețeaua din figura P.3.4 în care $E_1 = 20$ V ; $R_1 = 2\ \Omega$; $E_2 = 60$ V ; $R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 1\ \Omega$.

a) Să se găsească curenții folosind teoremele lui Kirchhoff, metoda curenților ciclici, metoda potențialelor la noduri, teoremele generatoarelor echivalente.

b) Să se verifice bilanțul de puteri.

c) Să se determine R_3 astfel încît puterea disipată în acest rezistor să fie maximă.

d) În serie cu care sursă trebuie introdusă o rezistență suplimentară și de ce valoare pentru ca puterea disipată în R_3 să fie nulă ?

3.5. Se dă rețeaua din figura P.3.5.

a) Să se rezolve rețeaua utilizînd metoda potențialelor la noduri.

b) Să se verifice bilanțul puterilor.

c) Să se verifice I_{ab} cu teorema lui Helmholtz și Thévenin.

Date numerice : $E_1 = E_2 = 20$ V ; $E_3 = 30$ V ; $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_4 = R_5 = R_6 = 12\ \Omega$.

3.6. Se dă rețeaua din figura P.3.6. Să se determine expresia curentului I_5. Să se găsească condiția pe care trebuie să o îndeplinească rezistențele R_1, R_2, R_3 și R_4 pentru ca $I_5 = 0$ (echilibrul punții Wheatstone).

R : $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$.

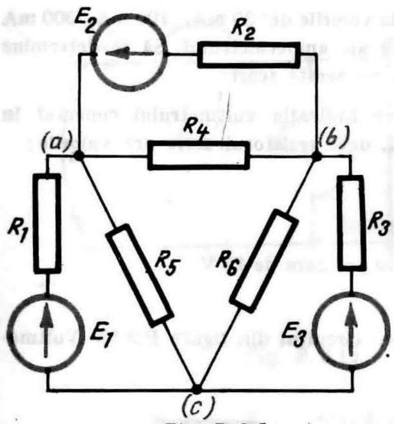

Fig. P.3.5

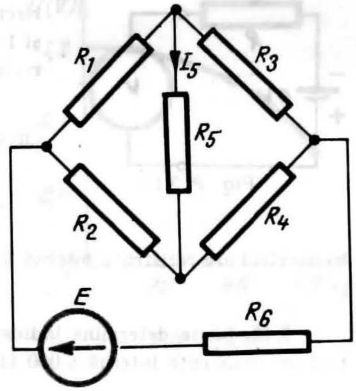

Fig. P.3.6

3.7. Știind că $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $R_3 = 30\ \Omega$; $E = 40$ V și că puntea este în echilibru, să se determine R_4 și intensitățile curenților ; să se verifice teorema conservării puterilor.

3.8. Se dă rețeaua din figura P.3.8.

a) Să se determine curenții și să se întocmească bilanțul de puteri.

b) Cum se vor modifica curenții dacă în laturile *4*, *5*, *6* se introduc trei surse ideale de tensiune cu $E = 1\,000$ V, orientate la fel față de nod ?

Date numerice : $E_1 = 10$ V ; $E_2 = 20$ V ; $E_3 = 30$ V ; $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$; $R_4 = R_5 = R_6 = 6\ \Omega$.

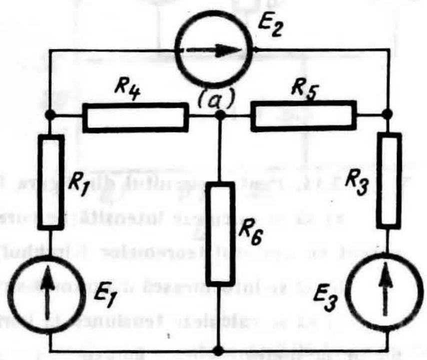

Fig. P.3.8

3.9. Zece rezistoare egale sînt legate mai întîi în serie și supuse unei tensiuni U și apoi în paralel și alimentate cu aceeași tensiune U. Ce raport există între puterile absorbite în cele două cazuri ?

R : $\frac{P_s}{P_p} = 100$.

3.10. Randamentul de transfer al puterii de la un generator de tensiune este $\eta = 0{,}75$. Știind că rezistența internă a generatorului este $R_i = 1\ \Omega$ și $E = 100$ V, se cere să se afle rezistența receptorului și să se verifice teorema conservării puterilor.

R : $R = 3\ \Omega$; $P = 1\,875$ W ; $P_g = 2\,500$ W.

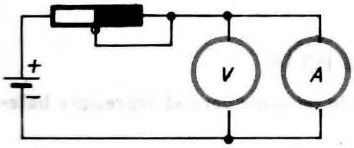

Fig. P. 3.11

3.11. În circuitul din figura P.3.11 voltmetrul indică 300 mV atunci cînd curentul prin circuit este fixat la 10 mA (indicația maximă a ampermetrului pe scara de 10 mA).

a) Să se calculeze rezistența ampermetrului pe scara de 10 mA.

b) Dacă tensiunea la bornele ampermetrului rămîne constantă și egală cu 300 mV, atunci cînd curentul prin

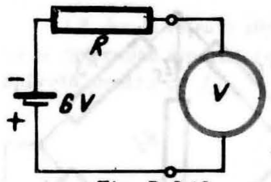

Fig. P. 3.12

circuit este fixat pe rînd la valorile de 30 mA, 100 mA, 300 mA şi 1 A pe scările respective ale ampermetrului. Să se determine rezistenţa ampermetrului pe aceste scări.

3.12. Să se determine indicaţia voltmetrului conectat în circuitul din figura P.3.12, dacă rezistorul serie are valorile:

a) $R = 0{,}06\ \Omega$;

b) $R = 60\ \Omega$;

c) $R = 60\ \text{k}\Omega$.

Voltmetrul are rezistenţa internă 5 000 Ω/V şi este utilizat pe scara de 12 V.

3.13. Să se determine indicaţia voltmetrului pentru circuitul din figura P.3.13. Voltmetrul are rezistenţa internă 5 000 Ω/V.

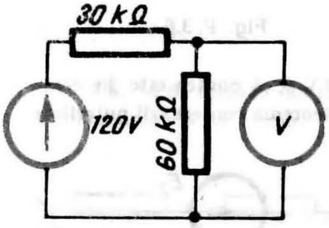

Fig. P.13

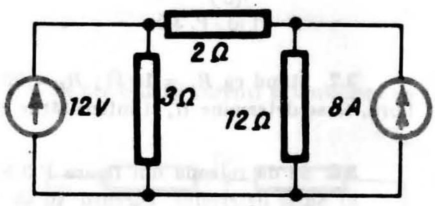

Fig. P. 3.14

3.14. Pentru circuitul din figura P.3.14 se cere:

a) să se calculeze intensităţile curenţilor în laturi şi tensiunea la bornele generatorului de curent cu ajutorul teoremelor Kirchhoff:

b) să se întocmească diagramele orientate de curenţi şi tensiuni;

c) să se calculeze tensiunea la bornele rezistorului de 12 Ω cu ajutorul teoremei potenţialelor la noduri.

3.15. Un voltmetru V şi un ampermetru A conectate ca în figura P.3.15 măsoară tensiunea la borne şi intensitatea curentului printr-un dispozitiv electronic de circuit. Să se specifice dacă puterea este primită sau cedată de dispozitiv atunci cînd:

a) indicaţiile instrumentelor sînt pozitive;

b) ampermetrul indică o valoare negativă, iar voltmetrul o valoare pozitivă;

c) ampermetrul indică o valoare pozitivă, iar voltmetrul o valoare negativă

d) indicaţiile instrumentelor sînt negative.

3.16. O baterie solară are caracteristica dată în figura P.3.16:

a) să se determine un model liniar de dipol generator de tensiune care să reprezinte bateria pentru curenţi pînă la 40 mA;

b) dacă bateria va alimenta un rezistor de 25 Ω să se calculeze curentul debitat.

Soluţia obţinută cu ajutorul modelului va fi verificată pe grafic.

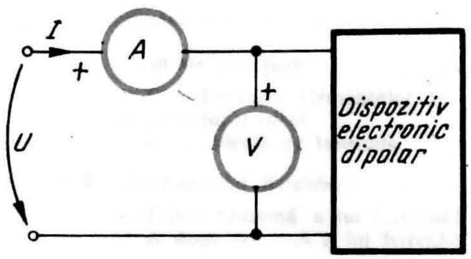

Fig. P. 3.15

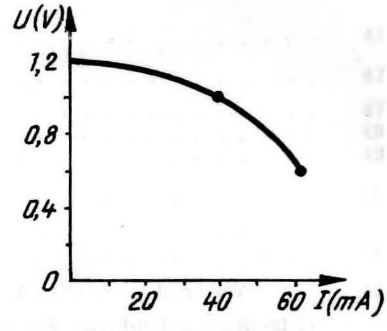

Fig. P. 3.16

3.17. O sursă electronică stabilizată cu protecție la scurtcircuit are caracteristica tensiune-curent reprezentată în figura P.3.17, *b*. Ce model de circuit se poate adopta dacă:

a) $100\ \Omega < R < 300\ \Omega$;

b) $10\ \Omega < R <, 40\ \Omega$.

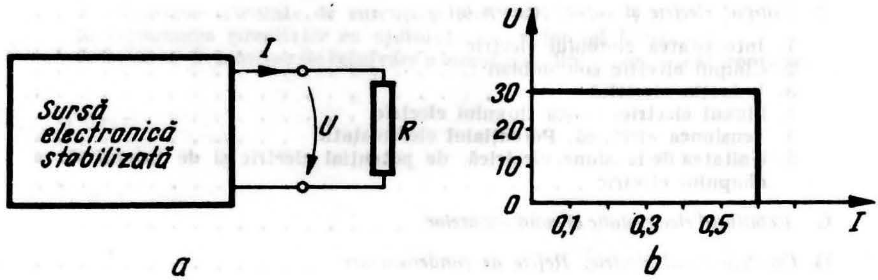

Fig. P. 3.17

3.18. O bobină, alimentată de la o sursă de c.c. consumă o putere de 0,25 W la un curent cu intensitatea de 10 mA. Să se calculeze rezistența bobinei.

Se va ține seama că în curent continuu puterea primită prin borne de o bobină este chiar puterea disipată în rezistența firului bobinei.

CUPRINS

Lei 6,35