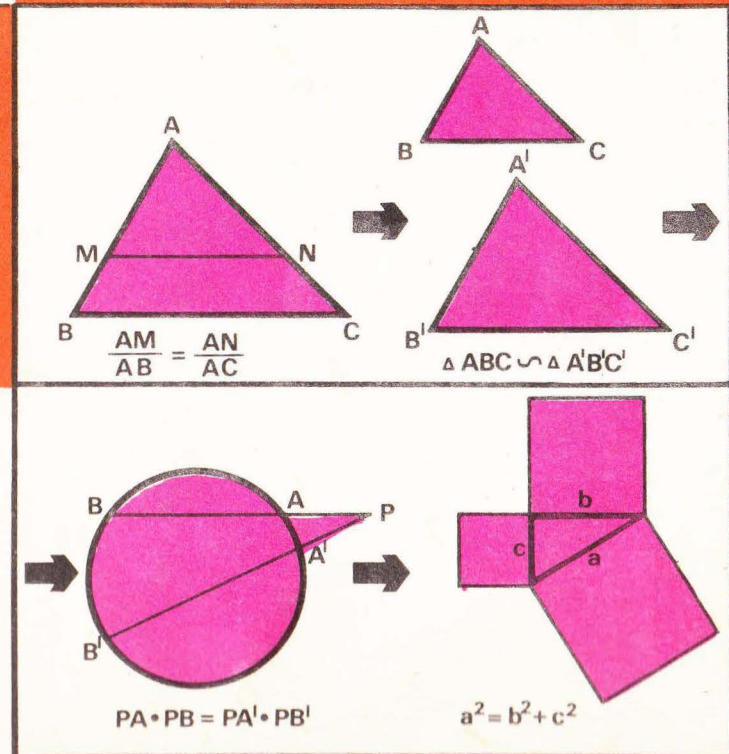


# VII

# Matematică

## Geometrie

Manual pentru clasa a VII-a



univ. ION CUCULESCU

Prof. CONSTANTIN OTTESCU

# Matematică

## Geometrie

Manual pentru clasa a VII-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat pe baza programei școlare aprobate de  
Ministerul Educației și Învățământului cu nr. 39489/79

Referenți: Prof. univ. dr. Dan Papuc  
Prof. Ioan Mitrache  
Prof. Theodor Emil Popescu  
Prof. Lucia Ericka Suhay

La definitivarea manualului s-a ținut seama și de propunerile  
unor cadre didactice din București și Constanța.

ISBN 973—30—0051—5

Redactor: prof. Ioan Șt. Mușat  
Tehnoredactor: Condopol Viorica  
Coperta: Nicolae Sîrbu

## PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A 6-a

(Notăm cu asterisc pe cele pe care le considerăm mai dificile)

1. Dându-se dreptunghiul  $ABCD$  ( $AB > BC$ ) construim în interiorul său triunghiul echilateral  $EBC$  și în exteriorul său triunghiul echilateral  $GAB$ . Să se demonstreze că  $GE$  este congruentă cu diagonala dreptunghiului.

2\*. În triunghiul  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $BB'$  și  $CC'$  sint înălțimi ( $B'$  și  $C'$  sint respectiv pe  $AC$  și  $AB$ ). Fie  $H$  ortocentrul triunghiului (punctul de intersecție al înălțimilor). Demonstrați că:

a) Dacă  $T$  este simetricul lui  $H$  față de  $AC$ ,  $\triangle HTC$  este echilateral.

b) Dacă bisectoarea unghiului  $BHC$  taie cercul circumscris triunghiului  $ABC$  în  $I$  și  $IB \equiv IC$ , atunci  $\triangle BIH$  și  $\triangle CIH$  sint echilaterale.

3. Dacă  $ABCD$  este un paralelogram și dacă înălțimea din  $A$  pe  $DC$  este congruentă cu cea dusă din  $A$  pe  $BC$ , paralelogramul este romb.

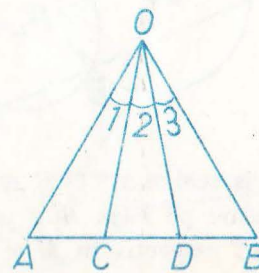
4. Într-un patrulater convex diagonalele sint și bisectoare. Precizați natura lui! (Cu ce fel de patrulater avem de-a face?)

5. Pe laturile  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  ale unui triunghi luăm respectiv punctele  $C'$ ,  $A'$ ,  $B'$ . Demonstrați că perimetrul triunghiului  $A'B'C'$  este mai mic decît cel al triunghiului  $ABC$ .

6. În triunghiul  $ABC$ , unghiurile  $B$  și  $C$  au măsurile de  $70^\circ$ , respectiv  $60^\circ$ . Fie  $BB'$ ,  $CC'$  înălțimi și  $BD$  bisectoare în triunghiul  $ABC$ . Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului determinat de dreptele  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $BD$ .

7. În triunghiul  $AOB$  din figura 0.1, care este isoscel ( $OA \equiv OB$ ), segmentele  $AC \equiv CD \equiv DB$ . Să se demonstreze că unghiurile  $\sphericalangle O_1$ ,  $\sphericalangle O_2$ ,  $\sphericalangle O_3$  nu pot fi toate trei congruente între ele.

Fig. 0.1



1. Două cercuri de centre  $O$  și  $O'$  sunt tangente exterioare în punctul  $A$ . Fie  $T, T'$  punctele în care o tangentă comună exterioară „atinge” respectiv cercurile. Linia centrelor  $OO'$  taie a doua oară cercurile în  $M$  și  $M'$ . Demonstrați că  $TMM'T'$  este patrulater inscriptibil.

9. Cercurile de centre  $O$  respectiv  $O'$  și de diametre  $AA'$  și  $AA''$  au comune punctele  $A$  și  $B$  (fig. 0.2). Să se demonstreze că:

a) Punctele  $A', B$  și  $A''$  sint coliniare.

b) Unghiurile triunghiurilor variabile  $AMN$  (unde  $M$  este pe cercul  $O$  și  $N$  pe cercul  $O'$ ) au măsuri constante.

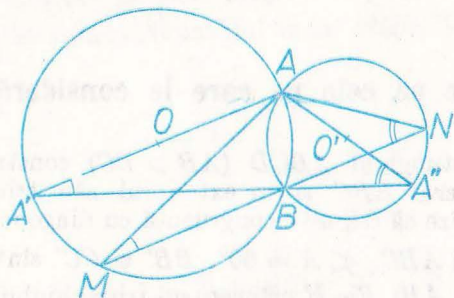


Fig. 0.2

10. Triunghiul  $ABC$ , înscris în cercul de centru  $O$ , are punctele  $B$  și  $C$  fixe și  $A$  descrie „arcul mare”  $BC$ . Să se arate că bisectoarea unghiului  $A$  trece printr-un punct fix. Are vreo importanță faptul că  $A$  descrie „arcul mic” sau putem formula o problemă analogă privind „arcul mare”?

11\*. Dându-se 4 puncte fixe, să se ducă prin fiecare din ele câte o dreaptă, astfel încât aceste drepte să formeze un pătrat.

12. În triunghiul  $ABC$ ,  $I$  este centrul cercului înscris și dreapta  $AI$  intersectează cercul circumscris triunghiului  $ABC$  a doua oară în  $L$ . Demonstrați că  $LI \equiv LB \equiv LC$ .

13. Două cercuri secante de centre  $O$  și  $O'$  (fig. 0.3) se taie în  $A$  și  $B$ . Prin  $A$  și  $B$  ducem două drepte paralele care taie a doua oară cercurile în  $M$  și  $M'$  și  $N$  și  $N'$ . Demonstrați că  $MNN'M'$  este paralelogram.

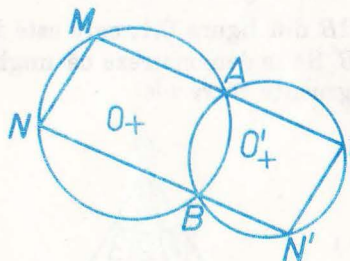


Fig. 0.3

14. Se dă triunghiul isoscel  $ABC$  ( $AB \equiv AC$ ) și fie  $AH$  înălțimea sa din  $A$  și  $P$  un punct oarecare pe baza  $BC$ ; perpendiculara din  $P$  pe bază întâlnește dreptele  $AB$  și  $AC$  respectiv în  $M$  și  $N$ . Se cere să se arate că:

a) triunghiul  $AMN$  este isoscel;

b)  $AH = \frac{MP + NP}{2}$ . Să se deducă de aici că suma  $MP + NP$  este constantă când  $P$  descrie segmentul  $BC$ ;

c\*) care este locul geometric al mijlocului segmentului  $MN$ , când  $P$  descrie segmentul  $BC$ .

15. În triunghiul  $ABC$ ,  $A_1$  este piciorul înălțimii coborâte din  $A$  pe  $BC$  și  $A', B', C'$  sint mijloacele laturilor  $BC, AC$ , respectiv  $AB$ . Să se arate că  $A'B'C'A_1$  este un trapez isoscel.

16. În triunghiul  $ABC$ ,  $H$  este ortocentrul și  $A', B', C'$  sint mijloacele laturilor opuse respectiv vîrfurilor  $A, B$  și  $C$ . Dacă  $A_2$  este mijlocul segmentului  $HA$ , să se demonstreze că:

a)  $\sphericalangle A_2C'A' = 90^\circ$ ;

b) patrulaterul  $A'B'A_2C'$  este inscriptibil.

17\*. Cercul celor 9 puncte (cercul lui Euler)

Folosind problemele 15 și 16 să se demonstreze că:

18. Într-un triunghi, picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vîrfuri sint conciclice (se găsesc pe un același cerc).

18. Dacă într-un triunghi  $ABC$ ,  $\sphericalangle B = 60^\circ$ ,  $AB = 2BC$ , demonstrați că triunghiul este dreptunghic.

19\*. Pe latura  $AB$  a triunghiului echilateral  $ABC$  se ia punctul  $E$ , astfel încît  $2BE = EA$ . La fel, pe latura  $AC$  se ia punctul  $D$  astfel încît  $CD = 2AD$ . Demonstrați că  $\sphericalangle AFC = 90^\circ$ , unde  $F$  este punctul de întîlnire a segmentelor  $BD$  și  $EC$ .

20. Să se construiască un triunghi cunoscînd lungimile a două laturi ( $AB$  și  $AC$ ) și lungimea înălțimii corespunzătoare laturii a treia ( $AA'$ ).

21\*\*. În figura 0.4 patrulaterul  $ABCD$  este înscris în cercul dat,  $AE \parallel BC$ ,  $AE \equiv AD$ ,  $CF \parallel AB$ ,  $CF \equiv CD$ . Demonstrați că  $DF \perp DE$ .

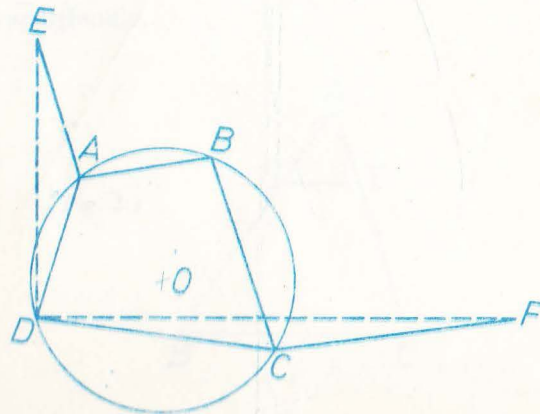


Fig. 0.4

22. Construiți un triunghi  $ABC$  în care se cunosc lungimea laturii  $BC$ , măsura unghiului  $A$  și lungimea înălțimii  $BB'$ .

23\*. Să se construiască triunghiul  $ABC$  în care se cunosc: lungimea laturii  $BC$ , a medianei  $AM$  și mărimea unghiului  $A$ . Discuție.

24. Pe laturile triunghiului  $ABC$  se construiesc: „în afară“ trei triunghiuri echilaterale:  $A'BC$ ,  $B'AC$ ,  $C'AB$ . Demonstrați că:

a)  $BB' \equiv CC' \equiv AA'$ ;

b) cercurile circumscrise celor trei triunghiuri echilaterale au un punct comun.

25\*. Să se construiască triunghiul  $ABC$  în care se cunosc lungimile laturii  $BC$  și ale medianelor  $BB'$  și  $CC'$ .

26. În triunghiul  $ABC$  se cunosc: lungimile laturii  $BC$  și ale înălțimilor  $BB'$  și  $CC'$ . Să se construiască triunghiul.

27. Să se construiască un triunghi cunoscând lungimile a două laturi și a mediane laturii a treia.

28\*. Să se construiască un triunghi  $ABC$  când se cunosc lungimile înălțimii, bisectoarei și mediane care pornesc din  $A$  (luate ca segmente).

29\*. Două cercuri ( $O$ ) și ( $O'$ ) sînt tangente exterioare într-un punct  $A$ . Fie  $TT'$  una din tangentele comune exterioare și  $M, M'$  intersecțiunile celor două cercuri cu o dreaptă variabilă ce trece prin  $A$ . Să se afle locul geometric al punctului  $P$  de intersecție a lui  $MT$  cu  $M'T'$ .

30. Să se construiască un triunghi  $ABC$  în care se cunosc lungimile înălțimii  $BB'$ , a laturii  $BC$  și a razei cercului circumscris lui  $ABC$ .

31. Dîndu-se trei semidrepte  $OX, OY$  și  $OZ$  ( $OZ$  interioară unghiului  $XOY$ ), fie  $M$  un punct pe  $OZ$ . Să se ducă prin  $M$  o dreaptă care să intersecteze pe  $OX$  în  $A$  și pe  $OY$  în  $B$ , astfel încît  $M$  să fie mijlocul segmentului  $AB$ .

32. Pe cercul circumscris triunghiului echilateral  $ABC$  se ia, pe arcul mic  $BC$ , punctul variabil  $M$ . Bisectoarea unghiului  $BMC$  taie coarda  $BC$  în  $T$ . Din  $T$  ducem  $TQ \perp MB$  și  $TS \perp MC$ . ( $Q \in MB, S \in MC$ ).

a) Demonstrați că  $\triangle TQS$  este echilateral;

b) Demonstrați că punctele  $M, T, A$  sînt coliniare.

## CAPITOLUL 1

# RELAȚII METRICE

## INTRODUCERE

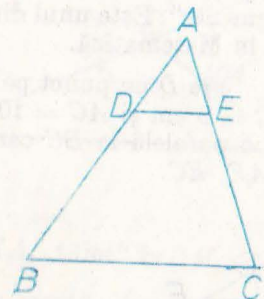
În acest manual vom prezenta, ca și în cel pentru clasa a 6-a, teoreme de geometrie în plan. Stilul va fi același.

În acest capitol urmăm să demonstrăm teoreme pe baza cărora să putem calcula lungimile unor segmente și mărimile unor unghiuri ce apar în diferite construcții geometrice. Astfel ni se va deschide și perspectiva, de exemplu, de a demonstra congruența a două segmente calculînd lungimile lor și constatînd că acestea sînt egale. Bineînțeles că, datorită scopului descris mai sus, vor fi multe probleme în care concluzia va fi „incompletă“, de tipul „ $AB = \dots$ “ (în care în loc de punctele de suspensie urmează să punem, abia la sfîrșitul sau în cursul raționamentului, expresia corespunzătoare).

## TEOREMA LUI THALES

O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.

Fig. I.1



Ipoteza:

$$DE \parallel BC.$$

Concluzia:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Demonstrația o vom face deocamdată, în acest paragraf, numai în cazul cînd unul din cele două rapoarte este un număr rațional.

Să presupunem, de exemplu, că  $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{7}$ . Să împărțim segmentul  $AB$

în 7 părți congruente prin punctele  $D_1, D_2, \dots, D_6$ . Vom avea deci  $AD_1 \equiv D_1D_2 \equiv \dots \equiv D_5D_6 \equiv D_6B$ . Să ducem prin punctele  $D_1, \dots, D_6$  paralele la  $BC$ ; ele vor tăia latura  $AC$  respectiv în  $E_1, \dots, E_6$ . Deci, în figura I.2, vom avea  $D_1E_1 \parallel D_2E_2 \parallel \dots \parallel D_6E_6 \parallel BC$ .

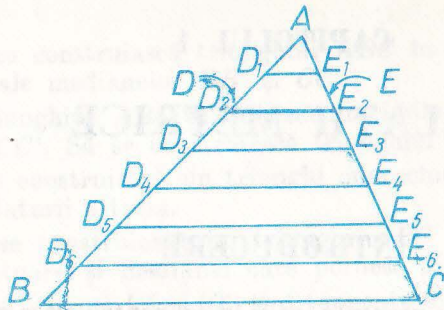


Fig. I.2

Aplicând teorema asupra liniei mijlocii în triunghiul  $AD_2E_2$ , precum și în trapezele  $D_1E_1E_3D_3, D_2E_2E_4D_4, \dots, D_4E_4E_6D_6, D_5E_5CB$ , obținem  $AE_1 \equiv E_1E_2 \equiv \dots \equiv E_5E_6 = E_6C$ .

Să observăm acum că  $\frac{AD_2}{AB} = \frac{2}{7} = \frac{AD}{AB}$ ; deci  $AD_2 = AD$ , adică  $D = D_2$ .

Deducem acum că  $E = E_2$  și, în sfârșit, este vizibil că  $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{7}$ .

**Observația 1.** La fel se dovedește că, în notațiile figurii I.2, avem  $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ .

Împărțind relația din concluzia teoremei cu cea scrisă aici, obținem și  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ . Deci, oricum am scrie concluzia teoremei lui Thales (determinând segmente proporționale), obținem un enunț adevărat.

**Observația 2.** Lungimea unui segment depinde de unitatea de măsură aleasă pentru segmente, în schimb cîtu lungimilor a două segmente nu depinde. Acest cît se numește, după cum s-a învățat la Aritmetică, și „raportul unghiurilor celor două segmente“. Este unul din primele locuri în care noțiunea de raport, „spune ceva“ în Matematică.

Fie  $D$  un punct pe latura  $AB$  a unui triunghi  $ABC$  în care  $AB = 5$  cm,  $BC = 8$  cm și  $AC = 10$  cm (fig. I.3). Se știe că  $AD = 2$  cm. Prin  $D$  ducem o paralelă la  $BC$  care taie  $AC$  în  $E$ . Să se calculeze lungimile segmentelor  $AE, EC$ .

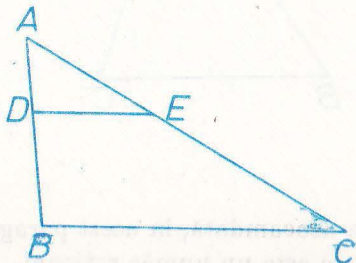


Fig. I.3

Ipoteza

$AB = 5, BC = 8, AC = 10, AD = 2.$

Concluzia:

$AE = \dots, EC = \dots$

$DE \parallel BC$

**Rezolvare\*.** Triunghiul despre care este vorba există deoarece  $0 = 5 < 10 < 8 + 5$ . Teorema lui Thales dă  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ , deci  $\frac{2}{5} = \frac{AE}{10}$ , de unde obținem  $AE = 4$  și apoi  $EC = AC - AE = 6$ . Deci concluzia simplă este:  $AE = 4, EC = 6$ .

**Observație.** Dacă scriam teorema lui Thales sub forma  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ , atunci, notînd  $AE = x$ , deci  $EC = 10 - x$ , obținem  $\frac{2}{3} = \frac{x}{10 - x}$  și, rezolvînd ecuația, găsim  $x = 4$  etc.

2. Pe laturile unui unghi cu vîrfurile în  $O$  se dau punctele  $A, B$  respectiv  $C, D$  (fig. I.4). Să se precizeze poziția punctului  $M$  de intersecție a dreptelor  $AC$  și  $BD$  calculînd raportul  $\frac{MA}{MC}$ .

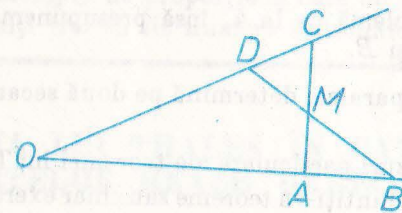


Fig. I.4

**Rezolvare.** Pentru a putea aplica teorema lui Thales, să ducem prin  $A$  paralela la  $BD$  și să notăm cu  $X$  punctul în care ea intersecționează pe  $OC$  ( $AX \parallel BD$ ) (fig. I.5).

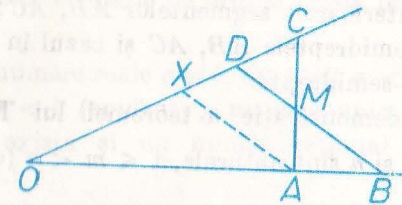


Fig. I.5

Teorema lui Thales în  $\triangle CXA$ , „tăiat“ de  $DM$ , dă  $\frac{MA}{MC} = \frac{DX}{DC}$ . Lungimea segmentului  $DX$  este încă necunoscută, dar teorema lui Thales în  $\triangle OBD$  tăiat de  $AX$  dă  $\frac{DX}{DO} = \frac{BA}{BO}$ . Acum este ușor de obținut concluzia dorită (ipoteza fiind formată din figura I.4):  $\frac{MA}{MC} = \frac{DO}{DC} \cdot \frac{BA}{BO}$ .

\* Aceasta este tot o demonstrație, dar nu „demonstrăm“ ci „rezolvăm“ o problemă.

Putem trece acum la *demonstrația teoremei lui Thales în cazul general* (bazându-se pe valabilitatea acestei teoreme în cazul când unul din rapoartele ce apar este rațional).

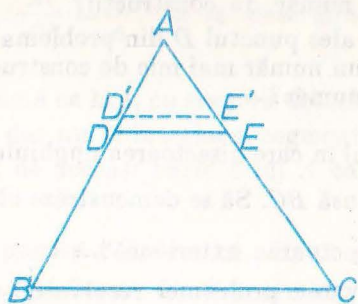


Fig. I.6

Fie  $r$  un număr rațional astfel ca  $r < \frac{AD}{AB}$ , deci  $r \cdot AB < AD$ . Să construim un punct  $D'$  situat în interiorul segmentului  $AD$  (fig. I.6), astfel încât  $AD' = r \cdot AB$ . Paralela prin  $D'$  la  $BC$  va tăia  $AC$  într-un punct  $E'$  situat în interiorul segmentului  $AE$ . Conform teoremei lui Thales pentru raport rațional, vom avea  $\frac{AE'}{AC} = r$ , deci  $r < \frac{AE}{AC}$ .

Am arătat astfel că, pentru  $r$  rațional avem  $\left(r < \frac{AD}{AB}\right) \rightarrow \left(r < \frac{AE}{AC}\right)$ .

La fel se arată că pentru  $r$  rațional avem  $\left(r < \frac{AE}{AC}\right) \rightarrow \left(r < \frac{AD}{AB}\right)$ .

Pe baza proprietății c) de mai sus, teorema lui Thales este complet demonstrată.

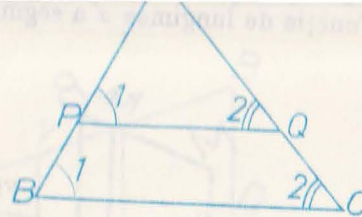
*Observație.* Vom vedea în cele ce urmează că, efectuând construcții geometrice asupra unor segmente cu lungimi raționale (chiar naturale), obținem foarte ușor segmente de lungimi iraționale. De exemplu, lungimea diagonală a unui pătrat de latură 1 este un număr irațional. De aceea este important să știm că teorema lui Thales este adevărată în cazul când rapoartele ce apar în ea sînt numere reale oarecare.

## TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII\*

**Teoremă.** O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte laturi un alt triunghi care are toate unghiurile respectiv congruente și toate laturile respectiv proporționale cu ale celui inițial.

Deci în triunghiul  $ABC$  ducem  $PQ$  paralelă cu  $BC$  ( $P \in AB$ ,  $Q \in AC$ ), notațiile fiind cele din figura I.7.

Fig. I.7



*Ipotaza*  
 $PQ \parallel BC$ .

*Concluzia*

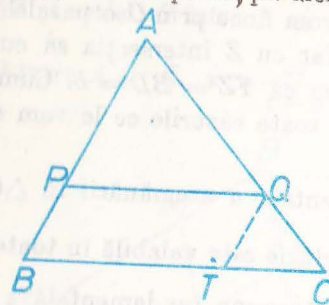
1)  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$ , 2)  $\sphericalangle P_1 \equiv \sphericalangle B_1$ ,

3)  $\sphericalangle Q_2 \equiv \sphericalangle C_2$ , 4)  $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ .

*Demonstrație*

Relația 1) este evidentă. Congruențele 2), 3) se referă la unghiuri corespunzătoare. Prima proporție din 4) rezultă direct din teorema lui Thales. Rămâne de demonstrat că  $\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ . Pentru aceasta ducem  $QT \parallel AB$  ( $T \in BC$ ), (fig. I.8). Se formează astfel, pe de o parte, paralelogramul  $PQTB$  și deci

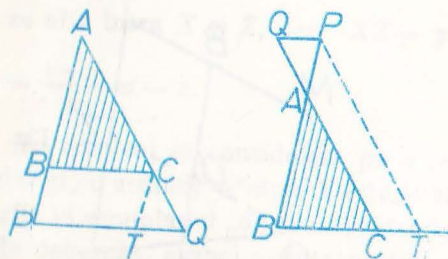
Fig. I.8



$PQ \equiv BT$ , pe de altă parte se poate aplica teorema lui Thales ( $QT \parallel AB$ ) și se obține:  $\frac{AQ}{AC} = \frac{BT}{BC}$ . În ultima proporție înlocuind pe  $BT$  cu  $PQ$ , obținem și ultima relație căutată.

*Observație.* Putem să considerăm că paralela  $PQ$  întâlnește prelungirile laturilor triunghiului  $ABC$ ; demonstrația rămîne în esență aceeași (fig. I.9).

Fig. I.9



*Problemă rezolvată.* Se consideră un trapez  $OABM$ , de baze  $OM = b$  și  $AB = a$ , în care  $OA = a$ . Se alege un punct  $X$  pe dreapta  $OA$ ; paralela prin  $X$

\* Această formulare își va găsi semnificația mai târziu.

## Probleme

1. În interiorul unui segment  $AB$  cu lungimea de 55 cm se consideră un punct  $C$  astfel ca  $\frac{AC}{CB} = \frac{5}{6}$ . Să se determine lungimile segmentelor  $AC$  și  $CB$ .

2. Aceeași problemă ca la 1, cu singura deosebire că se presupune  $C$  situat pe dreapta  $AB$  dar nu în interiorul segmentului  $AB$ .

Unde rezultă  $C$ : de aceeași parte a lui  $A$  ca și  $B$  sau de cealaltă parte?

3. Se dau trei puncte coliniare  $A, B, C$  astfel încât  $C$  să fie situat între  $A$  și  $B$ . Să se exprime fiecare din rapoartele  $x = \frac{CA}{CB}$ ,  $y = \frac{CA}{AB}$  și  $z = \frac{CB}{AB}$  în funcție de fiecare din celelalte două.

4. Dacă  $A, B, C, D$  sînt puncte coliniare, dacă  $C$  și  $D$  sînt situate între  $A$  și  $B$  și dacă  $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ , să se demonstreze că  $C = D$ .

5. Aceeași problemă ca la 4, însă presupunem că nici  $C$  și nici  $D$  nu este situat între  $A$  și  $B$ .

6. Trei drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale.

7. Enunțați cazuri particulare ale teoremei lui Thales; și ale teoremei din problema 6 (amintiți-vă teoreme sau chiar exerciții de anul trecut!)

8. Care este reciproca teoremei lui Thales? Este ea adevărată?

9. Fie  $M$  și  $N$  puncte pe laturile  $AB, AC$  ale unui triunghi  $ABC$ , astfel ca  $MN \parallel BC$ . Dacă  $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{11}$ , să se calculeze  $\frac{AN}{AC}$ .

10. Demonstrați teorema lui Thales în cazul în care punctele  $M$  și  $N$  nu se află în interioarele segmentelor  $AB, AC$ ; deosebiți cazul în care ele se află pe semidreptele  $AB, AC$  și cazul în care ele se află pe prelungirile acestor semidrepte.

11. Scrieți o demonstrație a teoremei lui Thales, considerînd  $\frac{AD}{AB} = \frac{m}{n}$  în care  $m$  și  $n$  sînt naturale,  $1 \leq m < n$  (deci fără a particulariza pe  $m$  și  $n$ ).

12. Fiind date trei segmente de lungimi  $u, v, w$ , să se construiască un segment de lungime  $x$ , astfel ca  $x = \frac{uv}{w}$ . Caz particular:  $u = 6$  cm,  $v = 10$  cm,  $w = 15$  cm.

13. (Întrebare.) Puteți folosi teorema lui Thales pentru a construi un segment cu lungimea  $x = \sqrt{uv}$ ,  $u$  și  $v$  fiind lungimile unor segmente date?

14. Se consideră trei semidrepte  $Ox, Oy, Oz$ , punctele  $A, A_1$  pe  $Ox$ , punctul  $B$  pe  $Oy$  și punctul  $C$  pe  $Oz$ . Paralela prin  $A_1$  la  $AB$  taie  $Oy$  în  $B_1$ , iar paralela la  $BC$  prin  $B_1$  taie  $Oz$  în  $C_1$ . Să se demonstreze că  $C_1A_1 \parallel CA$ .

15. Se consideră un punct  $D$  pe latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ . Paralela prin  $D$  la  $AB$  taie  $AC$  în  $E$ , paralela la  $BC$  prin  $E$  taie  $AB$  în  $F$  etc. Să se arate că după un anumit număr de astfel de construcții „ne întoarcem” în  $D$ . Care este acel număr de construcții?

16. Cum trebuie ales punctul  $D$  din problema 15, pentru ca întoarcerea în  $D$  să aibă loc după un număr mai mic de construcții decît în cazul general? Care este acel nou număr?

17. Fie  $D$  punctul în care bisectoarea unghiului  $A$  al unui triunghi intersectează latura opusă  $BC$ . Să se demonstreze că  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ . Aceeași problemă pentru „bisectoarea exterioară”...

18. Scrieți rezolvarea problemei rezolvate 2 în cazul în care punctul  $C$  este între  $O$  și  $D$ . Ce constatați cu privire la rezultat?

19. Pe dreapta  $Ox$  se consideră punctele  $A, B, C$ , iar pe dreapta  $Oy$  punctele  $A', B', C'$ . Dacă  $AB' \parallel BA'$  și  $BC' \parallel CB'$ , să se demonstreze că  $AC' \parallel CA'$ .

20. Dați un exemplu de proporție în care un termen să fie număr întreg, iar toți ceilalți trei să fie numere iraționale.

## TEOREMA LUI THALES ÎN CAZUL RAPOARTELOR REALE OARECARE

Înainte de a demonstra teorema în acest caz, să amintim cîteva fapte relativ la numerele reale.

a) Fiind date două numere reale  $a$  și  $b$ , este adevărată una și numai una din relațiile  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ .

Cu alte cuvinte,  $<$  este o relație de ordine totală pe mulțimea numerelor reale.

b) Fiind date două numere reale  $a$  și  $b$ , așa încît  $a < b$ , există un număr rațional  $r$  astfel ca  $a < r < b$  (evident,  $r$  nu este unic, deoarece, conform aceleiași proprietăți, va exista și un număr rațional  $s$  cu proprietatea  $a < s < r$ , deci  $s < b$  etc.).

Exemplificăm această proprietate astfel. Dacă  $a = 2,738...$  și  $b = 3,069...$  putem lua  $r = 2,9$ ; dacă  $a = 2,839997...$  și  $b = 2,8400002...$  putem lua  $r = 2,839998$ .

c) Dacă avem două numere reale  $a$  și  $b$  așa încît, pentru  $r$  rațional, este adevărat că  $(r < a) \leftrightarrow (r < b)$  atunci  $a = b$ .

Aceasta este o consecință a proprietăților a), b). Într-adevăr, dacă, de exemplu, am avea  $a < b$ , atunci alegem un  $r$  rațional cu proprietatea  $a < r < b$  și avem  $r < b$  adevărat dar  $r < a$  fals, deci  $\leftarrow$  ar fi neadevărată, contrar ipotezei.



la bazele taie  $MB$  în  $Y$ . Presupunind  $c > b$ , să se exprime lungimea  $y$  a segmentului  $XY$  în funcție de lungimea  $x$  a segmentului  $OX$ .

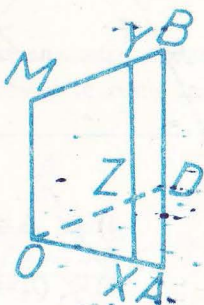


Fig. I.10

Ipoteza

$$OM \parallel XY \parallel AB,$$

$$OA = a, OM = b, AB = c,$$

$$OX = x, XY = y.$$

Concluzia :

$$XY = \dots$$

**Rezolvare.** Va trebui să deosebim mai multe cazuri, după poziția lui  $X$  pe dreapta  $OA$ .

În toate cazurile vom duce prin  $O$  o paralelă la  $BM$  și vom nota cu  $Y$  intersecția sa cu  $AB$ , iar cu  $Z$  intersecția sa cu  $XY$ . Din paralelogramele  $OMYZ$ ,  $OMBD$  deducem că  $YZ = BD = b$ . Cum  $b < c$ , rezultă că punctul  $D$ , care va fi același în toate cazurile ce le vom deosebi, este situat între  $A$  și  $B$ , iar  $AD = c - b$ .

Teorema fundamentală a asemănării în  $\triangle OAD$  tăiat de  $XZ$  dă  $\frac{x}{a} = \frac{XZ}{c - b}$ . Această concluzie este valabilă în toate cazurile, dacă ținem seamă

de observația de după teorema fundamentală a asemănării.

**Cazul 1** (fig. I.10):  $X$  se află între  $O$  și  $A$ .

În cazul 1,  $Z$  va fi între  $X$  și  $Y$ , deci  $\frac{x}{a} = \frac{y - b}{c - b}$ ; în acest caz rezultatul este  $y = b + \frac{c - b}{a} x$ .

**Cazul 2** (fig. I.11):  $A$  se află între  $O$  și  $X$

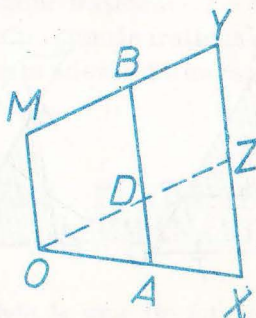
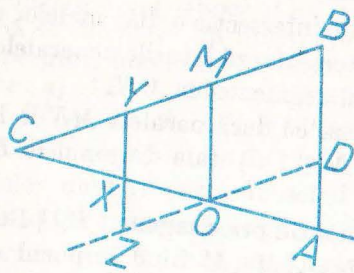


Fig. I.11

corespunde tot situației „ $Z$  între  $X$  și  $Y$ “, deci raționamentul și rezultatul sunt aceleași ca și în cazul 1.

**Cazul 3** (fig. I.12):  $X$  se află între  $O$  și intersecția  $C$  a dreptelor  $OA$  și  $MB$ .

Fig. I.12

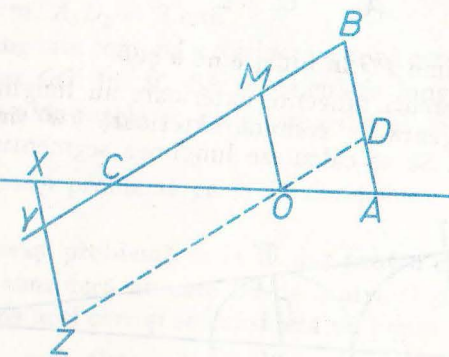


În acest caz,  $X$  se află între  $Y$  și  $Z$ , deci  $XZ = b - y$  și obținem  $\frac{x}{a} = \frac{b - y}{c - b}$ , iar rezultatul este  $y = b - \frac{c - b}{a} x$ .

Alegând  $X = C$  obținem  $\frac{OC}{a} = \frac{b}{c - b}$ , deci  $OC = \frac{ab}{c - b}$ , ceea ce ne permite să descriem cazul 3 și astfel:  $O$  între  $A$  și  $X$ ,  $x < \frac{ab}{c - b}$ .

**Cazul 4** (fig. I.13):  $O$  între  $A$  și  $X$ ,  $x > \frac{ab}{c - b}$  (cu alte cuvinte  $C$  între  $O$  și  $X$ ).

Fig. I.13



În acest caz,  $Y$  se află între  $X$  și  $Z$ , deci  $XZ = y + b$ ,  $\frac{x}{a} = \frac{y + b}{c - b}$ , iar rezultatul este  $y = \frac{c - b}{a} x - b$ .

**Observație.** Dacă am conveni să considerăm pe  $x$  „cu semnul +“ când  $X$  este „la dreapta“ lui  $O$  și „cu semnul -“ când  $X$  este „la stânga“ lui  $O$ , pe  $y$  cu semnul + când  $Y$  se află în semiplanul „de deasupra“ lui  $OA$  și cu semnul - când  $Y$  se află în cel de dedesubt, atunci rezultatul din cazul 1 ar fi valabil în toate celelalte cazuri.

Această observație ne arată că se apropie momentul când vom învăța să considerăm și „lungimi negative“.

1. Prin punctul  $P$  de intersecție a diagonalelor unui trapez, se duce o paralelă la baze. Ea intersectează laturile neoparalele în  $M$  și  $N$ . Demonstrați că  $P$  este mijlocul segmentului  $MN$ .

2. Să se demonstreze că dacă paralela  $MN$  la bazele  $AD$  și  $BC$  ale unui trapez ( $M \in AB$ ,  $N \in DC$ ) taie diagonalele  $BD$  în  $T$  și  $AC$  în  $S$ , atunci  $MT \equiv SN$ .

3. Într-un triunghi  $ABC$  orice segment  $PQ \parallel BC$  ( $P \in AB$ ,  $Q \in AC$ ) este împărțit de mediana  $AM$  ( $M$  fiind mijlocul segmentului  $BC$ ) în două segmente congruente.

4. Să se construiască o paralelă la bazele unui trapez oarecare care să fie împărțită de diagonale în trei părți congruente.

5. În figura de mai jos  $AD = a$  și  $BC = b$  sînt două segmente paralele.  $DB$  și  $AC$  se taie în  $P$ . Segmentul  $PQ$  este paralel cu  $AD$  ( $Q \in AB$ ).

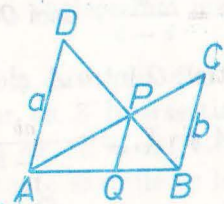


Fig. 1.14

Să se exprime  $PQ$  în funcție de  $a$  și  $b$ .

6. Două cercuri tangente exterioare au lungimile razelor  $R$  și  $r$  (fig. 1.15). Tangenta lor comună exterioară  $TT'$  întâlnește linia centrelor  $OO'$  în  $S$ . Să se calculeze lungimea segmentului  $O'S$  în funcție de  $R$  și  $r$ .

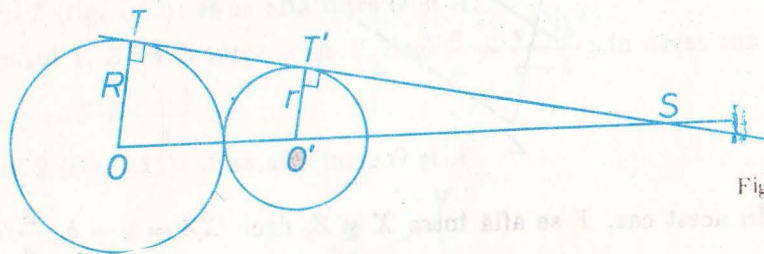


Fig. 1.15

7. Un triunghi  $ABC$  are laturile  $AB = 9$  cm,  $BC = 15$  cm și  $AC = 18$  cm. Se ia pe latura  $AB$  un punct  $D$ , astfel ca  $AD = 6$  cm; paralela prin  $D$  la  $BC$  taie  $AC$  în  $E$ . Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului  $ADE$ .

8. Laturile neoparalele  $BC$ ,  $AD$  ale unui trapez  $ABCD$  se intersectează în  $M$ . Să se calculeze lungimile segmentelor  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ ,  $MD$  în funcție de laturile trapezului (se va presupune că baza mare este  $AB$ ). Aplicații numerice: a)  $AB = 20$  cm,  $BC = 6$  cm,  $CD = 15$  cm,  $DA = 8$  cm, b)  $AB = 20$  cm,  $BC = 3$  cm,  $CD = 15$  cm,  $DA = 9$  cm.

9. Diagonalele unui trapez  $ABCD$  de baze  $AB$ ,  $CD$  se intersectează în  $N$ . Să se calculeze, în funcție de lungimile bazelor și ale diagonalelor trapezului, lungimile segmentelor  $NA$ ,  $NB$ ,  $NC$ ,  $ND$ . Aplicații numerice: a)  $AB = 20$  cm,  $CD = 10$  cm,  $AC = 21$  cm,  $BD = 12$  cm; b)  $AB = 20$  cm,  $CD = 10$  cm,  $AC = 15$  cm,  $BD = 9$  cm.

Observație. Cu cunoștințele de până acum, nu putem calcula lungimile diagonalelor unui trapez, cunoscând laturile sale. Vom ajunge să rezolvăm o astfel de problemă la pagina 53. Din acest motiv nu putem unifica problemele 8 și 9 într-una singură.

10. Se consideră o dreaptă  $d$  și pe ea punctele  $A_0, A_1, A_2, \dots$  așa încât  $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = 1$  cm. Se duc perpendicularele  $a_0, a_1, a_2, \dots$  pe  $d$  în punctele  $A_0, A_1, A_2, \dots$

a. Se consideră punctele  $B_1$  și  $C_1$  pe  $a_1$  și punctele  $B_2, C_2$  pe  $a_2$ , toate în același semiplan determinat de  $d$ , astfel ca  $A_1B_1 = 2$  cm,  $A_1C_1 = 7$  cm,  $A_2B_2 = 6$  cm,  $A_2C_2 = 3$  cm. Să se precizeze poziția punctului  $M$  de intersecție al dreptelor  $B_1B_2, C_1C_2$ , calculând  $A_0M$  și  $NM$ , unde  $N$  este piciorul perpendicularei din  $M$  pe  $d$ .

b. Aceeași problemă pentru punctul de intersecție al dreptelor  $D_1D_2, D_1D_3$ , în care  $D_1$  este situat pe  $a_1$ ,  $D_2$  pe  $a_2$ ,  $D_3$  pe  $a_3$ , toate în același semiplan determinat de  $d$ , iar  $A_1D_1 = 1$  cm,  $A_2D_2 = 5$  cm,  $A_3D_3 = 10$  cm,  $A_5D_5 = 3$  cm.

11. Tangenta comună exterioară a două cercuri exterioare întâlnește linia centrelor  $OO'$  în  $M$ . Să se calculeze lungimile segmentelor  $MO, MO'$  în funcție de razele  $R, r$  ale cercurilor și de distanța  $d = OO'$  între centrele lor.

12. Aceeași problemă ca la 11 dar pentru tangenta comună interioară.

13. Aceeași problemă ca la 11 dar pentru cercuri secante.

14. Se consideră un cerc fix de centru  $O$  și un punct fix  $A$ . Se ia un punct  $M$  pe acel cerc și se consideră un punct  $N$  pe semidreapta  $AM$  astfel ca  $\frac{AN}{AM} = k$ . Care este locul geometric al lui  $N$  când  $M$  parcurge cercul dat,  $k$  rămânând și el fix.

15. Aceeași problemă ca la 14, însă alegând punctul  $N$  pe dreapta  $AM$  astfel ca  $A$  să fie între  $M$  și  $N$ .

16. Se consideră două cercuri neconcentrice, de raze neegale.

a) Găsiți un punct  $A$  și un număr  $k$  astfel încât locul geometric din problema 14, relativ la unul din cercuri, la  $A$  și la  $k$ , să fie tocmai celălalt cerc.

b) Aceeași problemă în ceea ce privește locul geometric din problema 15.

c) Ce se întâmplă dacă razele cercurilor ar fi egale?

d) În cazurile în care cercurile ar fi exterioare, tangente exterioare, precizați poziția punctelor de la a și b, iar în cazurile în care cercurile ar fi secante, tangente interioare, precizați poziția punctului de la a).

17. Se consideră un patrulater convex  $ABCD$  și un punct  $M$  interior segmentului  $AC$ . Paralela prin  $M$  la  $AB$  taie  $BC$  în  $N$ , iar paralela prin  $M$  la  $CD$  taie  $AD$  în  $P$ . Să se demonstreze că  $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$ .

18. În paralelogramul  $ABCD$  unim  $A$  cu mijlocul lui  $BC$  și  $B$  cu mijlocul lui  $CD$ ; cele două drepte se taie în  $X$ . Care este valoarea raportului  $\frac{XA}{XM}$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $BC$ ?

19. Locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi nealungit pentru care raportul distanțelor la laturile unghiului este egal cu un număr dat, este o semidreaptă cu originea în vârful unghiului.

**Aplicație.** Problema 11 ne permite să analizăm ceva mai de aproape fenomenul eclipselor de Soare. Știți, desigur, că o eclipsă de Soare are loc în situația în care Pământul, Soarele și Luna sînt coliniare, iar Luna se află între Pământ și Soare (fig. I.16).

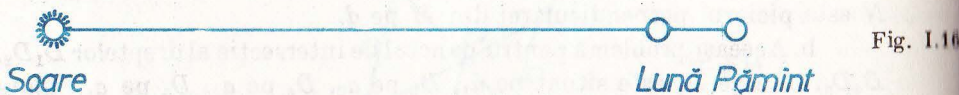


Fig. I.16

Aceste corpuri cerești nu sînt puncte, așa încît pentru a înțelege mai bine fenomenul este preferabil să privim figura I.17 (unde Pământul n-a fost figurat).

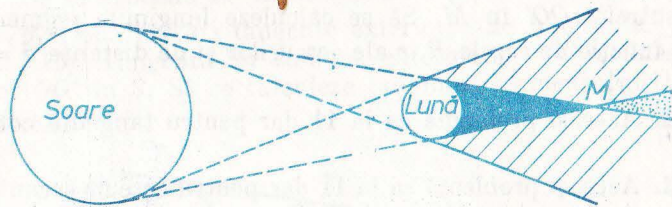


Fig. I.17

Eclipsa de Soare se vede de orice observator de pe suprafața Pământului, cînd acesta este plasat în una din cele trei zone, însă ceea ce vede el pe cer diferă de la zonă la zonă:



Fig. I.18

Întrebarea care se pune este: de pe Pământ vedem eclipsa totală, parțială sau inelară? Adică: distanța de la Lună la punctul  $M$  (cea din figura I.17) este mai mare, egală sau mai mică decît distanța de la Lună la Pământ?

Rezolvarea problemei 11 de la pagina 17 ne permite să calculăm distanța de la Lună la punctul  $M$  prin formula  $\frac{dr}{R-r}$ , unde  $R$  este raza Soarelui,  $r$  este raza Lunii, iar  $d$  este distanța între Soare și Lună în situația corespunzătoare eclipselor, deci diferența dintre distanța de la Soare la Pământ și distanța de la Pământ la Lună.

Datele numerice astronomice sînt: raza Soarelui = 695 300 km, raza Lunii = 1 738 km, distanța Pământ-Soare = 149 450 000 km, distanța Pământ-Lună = 384 000 km.

Efectuînd calculele, conform formulei de mai sus, obținem, pentru distanța de la Lună la punctul  $M$ , o valoare de aproximativ 373 000 km. Valoarea obținută este foarte apropiată de distanța Pământ-Lună. Datele numerice de mai sus sînt „medii“: Pământul se mișcă în jurul Soarelui, și Luna în jurul Pământului nu pe cercuri, ci pe elipse și distanțele de mai sus variază. Calculele de mai sus sînt cel mai mult influențate de variațiile distanței Lună-Pământ, distanța ce poate lua valori între 356 000 km și 407 000 km.

Putem afirma deci: de pe Pământ se pot observa eclipse totale, eclipse parțiale și eclipse inelare de Soare. Cum punctul  $M$  este totdeauna aproape de Pământ cînd are loc o astfel de eclipsă, rezultă că zona de pe Pământ din care putem observa, la un moment dat, o eclipsă de Soare totală sau inelară este foarte mică în comparație cu întreg Pământul. Într-un punct dat de pe Pământ, eclipsele de Soare totale, parțiale sau inelare se pot observa, în medie, o dată la 400 de ani. Ultima eclipsă de soare, vizibilă de pe teritoriul țării noastre (de fapt, numai din sudul țării) a fost eclipsa totală din 15 februarie 1961; următoarea eclipsă, de asemenea totală, va avea loc la 11 august 1999.

## TRIUNghiURI ASEMENEA. CAZURILE DE ASEMĂNARE

Faptul pus în evidență în teorema fundamentală a asemănării ne conduce la următoarea:

**Definiție.** Fie  $A, B, C$  trei puncte necoliniare și  $A', B', C'$  alte trei puncte necoliniare. Spunem că  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  (și citim aceasta: triunghiul  $ABC$  este asemenea cu triunghiul  $A'B'C'$ ) dacă  $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ ,  $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ ,  $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$  și  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ .

Cu alte cuvinte, două triunghiuri se numesc asemenea dacă unghiurile unuia sînt respectiv congruente cu unghiurile celuilalt și laturile ce se opun unghiurilor congruente sînt proporționale.

\* Valoarea comună a acestor rapoarte se numește „raportul de asemănare“ al triunghiurilor.

Care sînt exemplele de triunghiuri asemenea? Să observăm întîi că două triunghiuri congruente sînt asemenea; dar nu pentru a considera astfel de exemple am introdus definiția. Teorema fundamentală a asemănării ne arată un mod de a construi un triunghi asemenea cu un triunghi dat, dar necongruent cu acesta.

*Observație.* La noțiunea de asemănare a triunghiurilor se ajunge și pe cale intuitivă, considerînd două desene, al doilea (fig. I.20) fiind obținut „mărind” pe primul (fig. I.19).



Fig. I.20

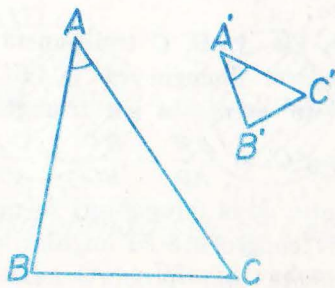
Ele „seamănă”, dar nu pot fi făcute să coincidă prin suprapunere. Un segment din primul desen nu este congruent cu segmentul corespunzător din al doilea, însă raportul lungimilor lor este același pentru toate segmentele ce le putem considera în modul de mai sus în cele două desene. Unghiul a două direcții din primul desen este congruent cu unghiul corespunzător din cel de-al doilea (aceasta și dă senzația de asemănare). Considerînd cea mai simplă figură — triunghiul — ajungem la definiția de mai sus.

La fel putem să gîndim privind două hărți ale aceleiași regiuni făcute la scări diferite.

Există trei teoreme ce se numesc cazuri de asemănare ale triunghiurilor ale căror enunțuri sînt analoage cu cele trei cazuri de congruență. Înainte de a le enunța și demonstra, să observăm că dacă  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  și  $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$ , atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$  cu alte cuvinte un triunghi asemenea cu un triunghi dat este asemenea cu orice triunghi congruent cu triunghiul dat.

*Cazul 1 de asemănare. Două triunghiuri ce au un unghi congruent și laturile ce-l formează proporționale sînt asemenea (fig. I.21).*

Fig. I.21



*Ipoteza*

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

*Concluzia*

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

*Cazul 2 de asemănare. Două triunghiuri ce au două unghiuri respectiv congruente sînt asemenea (fig. I.22).*

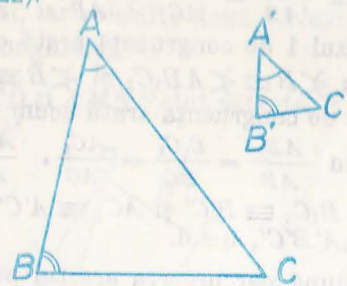


Fig. I.22

*Ipoteza*

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$$

*Concluzia*

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

*Cazul 3 de asemănare. Două triunghiuri ce au cele trei laturi proporționale sînt asemenea (fig. I.23).*

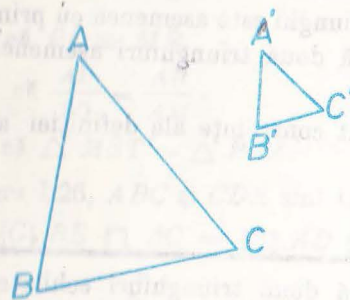


Fig. I.23

*Ipoteza*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

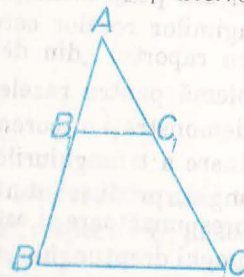
*Concluzia*

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Demonstrațiile celor trei teoreme au o parte comună. Anume:

Considerăm pe semidreapta  $AB$  un punct  $B_1$  astfel ca  $AB_1 \equiv A'B'$ , ducem prin  $B_1$  paralela la  $BC$  și notăm cu  $C_1$  intersecția ei cu  $AC$  (fig. I.24).

Fig. I.24



Conform teoremei fundamentale a asemănării avem  $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ .

$$\text{Dacă } \sphericalangle B \equiv \sphericalangle AB_1C_1, \quad \frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$$

Rămîne de demonstrat că  $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$  (și observația dinaintea enunțurilor va încheia demonstrația). Aceasta se va face în mod diferit pentru fiecare din cele trei teoreme, folosind cazul de congruență corespunzător.

**Cazul 1.** Din  $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ ,  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$  și  $A'B' \equiv AB_1$  deducem

$C_1 \equiv A'C'$  și cazul 1 de congruență arată că  $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$ .

**Cazul 2.** Din  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle AB_1C_1$  și  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$  deducem că  $\sphericalangle AB_1C_1 \equiv \sphericalangle B'$  și cazul 2 de congruență arată acum că  $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$ .

**Cazul 3.** Din  $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$ ,  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$  și  $AB_1 \equiv A'B'$  deducem  $B_1C_1 \equiv B'C'$  și  $AC_1 \equiv A'C'$  și cazul 3 de congruență arată  $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$ , q.e.d.

Credem că după parcurgerea acestui paragraf este clar de ce teorema de la pagina 12 a fost numită „teorema fundamentală a asemănării“.

**Observație.** Relația de asemănare între două triunghiuri are următoarele proprietăți:

- Este reflexivă; adică orice triunghi este asemenea cu el însuși.
- Este simetrică; adică dacă un triunghi este asemenea cu un al doilea, atunci și al doilea triunghi este asemenea cu primul.
- Este tranzitivă; adică două triunghiuri asemenea cu al treilea sunt asemenea.

Proprietățile *a*, *b*, *c* sînt consecințe ale definiției sau, mai simplu, ale cazului 2 de asemănare.

## Probleme

- Demonstrați că două triunghiuri echilaterale sînt asemenea.
- Două triunghiuri dreptunghice isoscele sînt asemenea.
- Dacă  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  și dacă *D* și *D'* sînt intersecțiunile lui *BC* respectiv *B'C'* cu bisectoarele unghiurilor din *A* respectiv *A'* atunci  $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ .
- Aceași problemă ca la 3 pentru mediane în loc de bisectoare.
- Aceași problemă pentru înălțimi.
- Raportul lungimilor razelor cercurilor înscrise în două triunghiuri asemenea este egal cu raportul „din definiția asemănării“.
- Aceași problemă pentru razele cercurilor circumscrise.
- Enunțați și demonstrați o teoremă ce ar trebui să poarte numele de „cazul 2 de asemănare a triunghiurilor dreptunghice“.
- Într-un triunghi, produsul dintre lungimea unei laturi ale sale și lungimea înălțimii corespunzătoare ei este același pentru toate cele trei laturi.
- Într-un triunghi dreptunghic *ABC* se duce înălțimea *AD* corespunzătoare ipotenuzei. Să se demonstreze că  $AB^2 = BD \cdot BC$  și că  $AD^2 = BD \cdot DC$ .
- Se consideră un segment *AB* și un punct *M* în interiorul său. Se construiesc, de aceeași parte a dreptei *AB*, pătratele *AMNP* și *BMDC*. Să se demonstreze că  $\frac{PC}{NB}$  este același, oricare ar fi poziția lui *M* în interiorul segmentului *AB*.

19. Să se construiască un pătrat care să aibă două vîrfuri alăturate pe latura *BC* a unui triunghi, iar celelalte două vîrfuri pe câte una din celelalte două laturi ale triunghiului.

18. În figura 1.25, *ABCD* și *AMNP* sînt pătrate, *E* este mijlocul lui *BC* și *Q* este mijlocul lui *MN*.

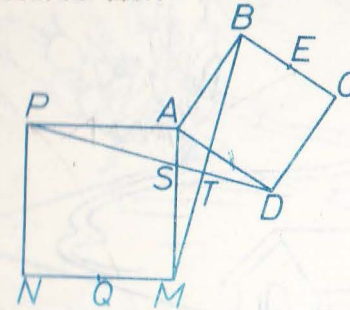
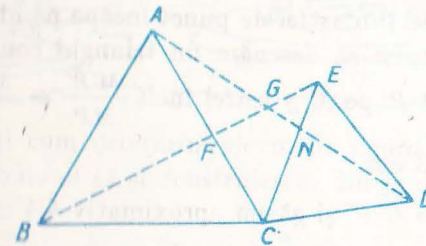


Fig. 1.25

- Arătați că  $PD \equiv MB$ .
- Arătați că  $\frac{AE}{PQ} = \frac{AB}{AM}$ .
- Arătați că  $\triangle MST \sim \triangle PSA$ .

14. În figura 1.26, *ABC* și *CDE* sînt triunghiuri echilaterale.  $BE \cap AD = \{G\}$ ,  $BE \cap AC = \{F\}$ ,  $AD \cap CE = \{N\}$ .

Fig. 1.26



Să se demonstreze că:

- $BE \equiv AD$ .
  - $\triangle AGF \sim \triangle BCF$ .
  - $\triangle EGN \sim \triangle DCN$ .
15. Din mijlocul *D* al laturii *BC* a unui triunghi *ABC* ducem perpendiculară pe *AB*, *AC*; fie *P*, respectiv *Q*, picioarele acestor perpendiculare. Să se demonstreze că  $\frac{DP}{DQ} = \frac{AC}{AB}$ .
16. Triunghiurile *ABC* și *MNP* au  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 37^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 53^\circ$ . Să se demonstreze că sînt asemenea.
17. Se știe că  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ,  $AB = 9$  cm,  $BC = 5$  cm,  $AC = 10$  cm,  $DE = 99$  cm. Să se calculeze *EF* și *DF*. (Vîrfurile *A* corespund lui *D*, *B* lui *E* și *C* lui *F*).

Aplicație practică. Determinați, prin măsurători, distanța dintre casa și pomul din figura I.27.



Fig. 1.27

Ar fi greu să o măsurăm direct, din cauza lacului. Procedăm astfel: alegem un punct  $M$  (și-l marcăm, de exemplu, cu un țărșuș). Măsurăm distanțele  $CM$  și  $MP$  și găsim, de exemplu,  $CM = 250$  m,  $MP = 150$  m. Măsurăm și unghiul  $CMP$  și găsim, de exemplu,  $\sphericalangle CMP = 60^\circ$ .

Desenăm apoi pe hirtie un triunghi  $C'M'P'$  asemenea cu  $\triangle CMP$  astfel: alegem un unghi  $xM'y$  de  $60^\circ$ , alegem un punct  $C'$  pe  $M'x$  oarecare, de exemplu astfel încât  $M'C' = 5$  cm (un astfel de punct încapă pe hirtie, ceea ce nu s-ar întâmpla dacă încercăm să desenăm un triunghi congruent cu  $\triangle CMP$ ), și apoi alegem un punct  $P'$  pe  $M'y$  astfel încât  $\frac{M'P'}{MP} = \frac{M'C'}{MC}$ , deci  $\frac{M'P'}{150} =$

$$= \frac{5}{250} \text{ adică } M'P' = 3 \text{ cm.}$$

Măsurăm distanța  $C'P'$  și găsim aproximativ 4,4 cm.

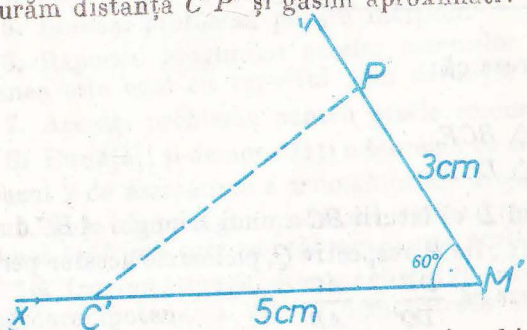


Fig. 1.28

Triunghiul  $C'M'P'$  este asemenea cu triunghiul  $CMP$ , conform cazului I de asemănare. Rezultă că  $\frac{C'P'}{CP} = \frac{M'C'}{MC}$ , deci  $\frac{C'P'}{4,4} = \frac{5}{250}$ , de unde deducem că distanța  $CP$  dintre casă și pom este de aproximativ 220 m.

Observație. Vom învăța mai târziu să calculăm  $CP$ , cunoscând  $MC$ ,  $MP$  și  $\sphericalangle CMP$ .

## I. Exerciții

I. Determinați, prin măsurători, distanța de la  $A$  la  $B$ , unde  $B$  este inaccesibil (fig. I.29).

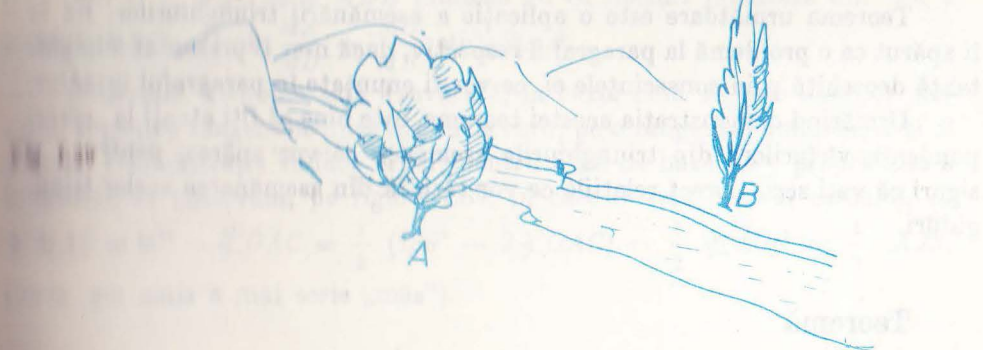


Fig. 1.29

II. Determinați, prin măsurători, distanța între punctele  $A$  și  $B$ , fără a „vizita” insulele (fig. I.30).

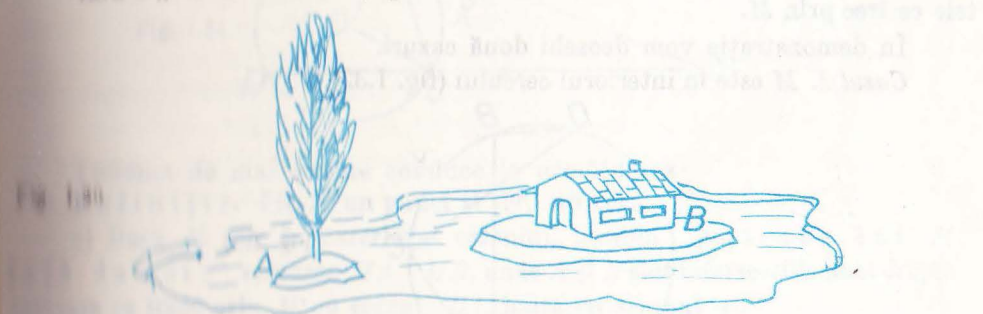


Fig. 1.30

III. Explicați cum determină elevul din figura I.31 înălțimea copacului și cum trebuie el să-și construiască, din punct de vedere geometric, instalația.

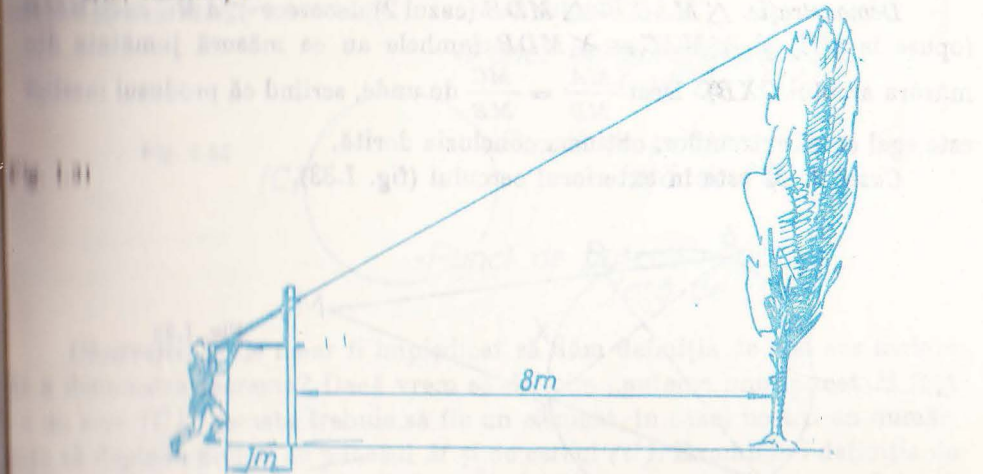


Fig. 1.31

## PUTEREA UNUI PUNCT FAȚĂ DE UN CERC

Teorema următoare este o aplicație a asemănării triunghiurilor. Ea ar fi apărut ca o problemă la paragraful respectiv, dacă n-ar fi prezentat o importanță deosebită prin consecințele ei, ce vor fi enunțate în paragraful următor.

Urmărind demonstrația acestei teoreme, este bine să fiți atenți la „corespondența vîrfurilor“ din triunghiurile asemenea ce vor apărea, pentru a fi siguri că veți scrie corect relațiile ce vor rezulta din asemănarea acelor triunghiuri.

### Teoremă

Dacă printr-un punct fix  $M$ , nesituat pe un cerc dat, ducem o secantă ce taie cercul în  $A, B$ , atunci produsul  $MA \cdot MB$  este același pentru toate secantele ce trec prin  $M$ .

În demonstrație vom deosebi două cazuri.

**Cazul 1.**  $M$  este în interiorul cercului (fig. I.32).

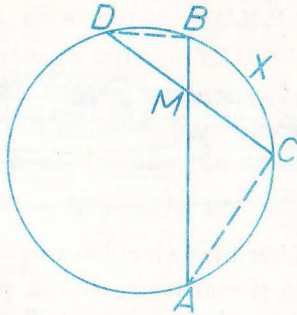


Fig. I.32

*Concluzia*

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

*Demonstrație.*  $\triangle MAC \sim \triangle MDB$  (cazul 2) deoarece  $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle DMB$  (opuse la vîrf) și  $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MDB$  (ambele au ca măsură jumătate din măsura arcului  $CXB$ ). Deci  $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$  de unde, scriind că produsul mezilor este egal cu al extremilor, obținem concluzia dorită.

**Cazul 2.**  $M$  este în exteriorul cercului (fig. I.33).

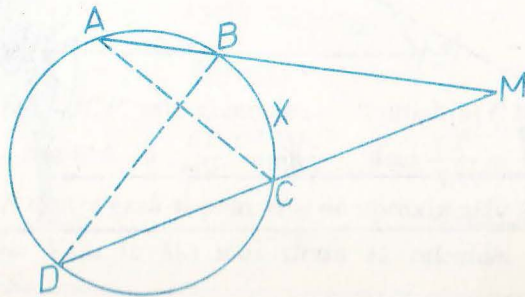


Fig. I.33

*Concluzia*

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

*Demonstrație.*  $\triangle MAC \sim \triangle MDB$  (cazul 2) deoarece  $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle DMB$  (identice) și  $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MDB$  (ambele au ca măsuri jumătate din cea a arcului  $CXB$ ). Deci  $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$  etc., q.e.d.

*Observație.* Teorema este adevărată, în cazul cînd  $M$  este exterior cercului și pentru tangentele duse din  $M$  la cerc; pe o tangentă, punctele  $A$  și  $B$  coincid. Demonstrația se face la fel; pentru a nu ne baza pe o proprietate a tangentei, să observăm, pe figura I.34, în care  $O$  este centrul cercului, că  $\sphericalangle MAC = 90^\circ - \sphericalangle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle OAC) = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC = \frac{1}{2}\sphericalangle AXC$  unde am omis a mai scrie „măș“).

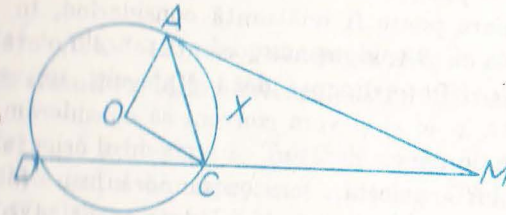


Fig. I.34

Teorema de mai sus ne conduce la următoarea:

**Definiție.** Fie  $M$  un punct și  $(C)$  un cerc.

- a) Dacă  $M$  este în exteriorul cercului, numim „puterea lui  $M$  față de cerc“ valoarea  $MA \cdot MB$ , unde  $A$  și  $B$  sînt intersecțiile unei drepte oarecare ce trece prin  $M$  cu cercul  $(C)$ , luată cu semnul  $+$ .
- b) Dacă  $M$  este pe cerc, spunem că puterea lui față de cerc este 0.
- c) Dacă  $M$  este în interiorul cercului, numim „puterea lui  $M$  față de cerc“ valoarea  $MA \cdot MB$ , unde  $A$  și  $B$  sînt intersecțiile unei drepte oarecare ce trece prin  $M$  cu cercul  $(C)$ , luată cu semnul  $-$ .

\*Punct de putere pozitivă  
față de  $(C)$

Fig. I.35

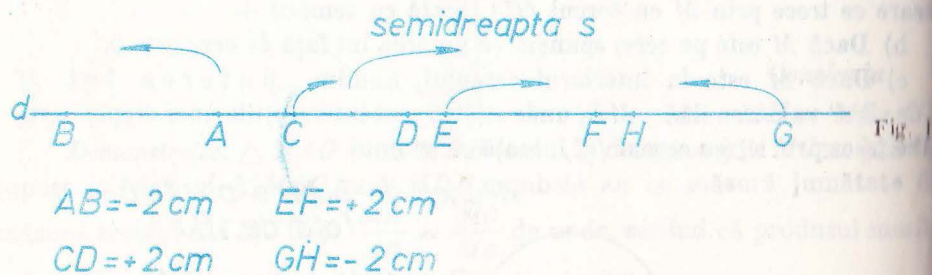
(C) \*Punct de putere nulă  
față de  $(C)$

\*Punct de putere negativă  
față de  $(C)$

*Observație. 1.* Ce ne-ar fi împiedicat să dăm definiția de mai sus înainte de a demonstra teorema? Dacă vrem să definim „puterea unui punct  $M$  față de un cerc  $(C)$ “ aceasta trebuie să fie un element, în cazul nostru un număr, care să depindă numai de punctul  $M$  și de cercul  $(C)$ . Examinînd definiția de mai sus, vedem că numărul  $MA \cdot MB$  definit în ea poate în principiu să

depindă nu numai de  $M$  și de cercul  $(C)$  ci și de „direcția“ secantei  $MAB$ , cu alte cuvinte, încercând să calculăm puterea lui  $M$  față de cercul  $(C)$  există „pericolul“ de a obține rezultate diferite dacă folosim secante diferite. Dacă într-adevăr așa ceva s-ar întâmpla, am spune că „definiția este incorectă“. Teorema de mai sus arată că așa ceva nu se întâmplă, deci că definiția „este corectă“, adică, oricum am alege secanta  $MAB$ , obținem aceeași valoare pentru  $MA \cdot MB$ .\*

2. De ce considerăm puterea unui punct față de un cerc ca având semnul  $+$  sau  $-$ , după cum punctul este în exteriorul sau în interiorul cercului. Este primul pas pe calea „folosirii numerelor negative în geometrie“ în acest manual. Știm că dacă spunem: fiind dat un punct  $A$  pe o dreaptă  $d$ , alegem pe  $d$  un punct  $B$  astfel încât segmentul  $AB$  să aibă lungimea de 2 cm, problema are două soluții, deci poziția lui  $B$  nu este precizată prin fraza de mai sus. Această nedeterminare poate fi înlăturată considerând, în loc de segmentul  $AB$ , care sînt tot una cu  $BA$ , segmente „orientate“  $AB$ , care nu vor fi socotite drept tot una cu  $BA$ . Pe o dreaptă dată  $d$  alegem „un sens“ (materializat printr-o semidreaptă a ei  $s$ ) și vom conveni să considerăm, dacă segmentul  $AB$  are, de exemplu, lungimea de 2 cm, că segmentul orientat  $AB$  are  $+2$  cm, dacă semidreapta  $AB$  are același sens cu semidreapta  $s$  (deci dacă este conținută în  $s$  sau conține pe  $s$ ) și că segmentul orientat  $AB$  are  $-2$  cm, dacă semidreapta  $AB$  este de sens contrar cu semidreapta  $s$  (deci dacă n-are punct comun cu  $s$  sau dacă intersecția lor este interiorul unui segment).



După această convenție, dacă avem o dreaptă  $d$ , o semidreaptă  $s$ , un punct  $A$  pe  $d$  și un număr  $a$  pozitiv sau negativ, putem găsi un punct  $B$  pe  $d$  și numai unul astfel încât lungimea segmentului orientat  $AB$  să fie  $a$ .

\* În cazul de față am fi putut ocoli discuția de mai sus, definind puterea punctului cu ajutorul unei secante precizate (cea mai naturală alegere ar fi fost: secanta ce trece prin centrul cercului, față de cerc). Pe de o parte o astfel de definiție ar fi fost artificială, iar pe de altă parte nu în toate cazurile în care se dau definiții în situații cum este cea descrisă mai sus se pot alege astfel de „obiecte privilegiate“ ca să fie a fost aici secanta ce trece prin centru.

Dacă acceptăm și segmente orientate de forma  $AA$ , de lungimea nulă, atunci valoarea sînt valabile și în cazul  $a = 0$ . Vom reveni la această problemă la pagina 88.

În cazul puterii punctului față de cerc, în definiția de mai sus, este clar că, oricum am alege sensul pe secanta  $MAB$ , segmentele orientate  $MA$  și  $MB$  vor avea același sens, deci același semn, cînd  $M$  va fi în exteriorul cercului și vor avea sensuri contrare, deci semne contrare, cînd  $M$  va fi în interior. Cînd  $M$  este pe cerc, unul din aceste segmente este nul. Deci produsul  $MA \cdot MB$  al lungimii segmentelor orientate  $MA, MB$  va fi pozitiv cînd  $M$  va fi în exterior, nul cînd  $M$  va fi pe cerc și negativ cînd  $M$  va fi în interior. În acest mod se explică definiția de mai sus.

### Problemă rezolvată

Tudorică, cînd în clasa a 7-a, și pune problema: la ce distanță trebuie el să se așeze în fața statuii lui Mihai Viteazul, astfel încît ea să-i apară cît mai mare?

Evident astfel pusă problema de Tudorică ea nu poate fi rezolvată pentru că este formulată destul de imprecis. Ce înțelege Tudorică prin „cît mai mare“? E vorba de înălțimea statuii? Nu, mi-a precizat Tudorică, este vorba de unghiul  $\alpha$  pe care îl „mătură“ privirea mea, de la copita calului pînă la vârful securii (fig. I.37). Îi atragem atenția lui Tudorică asupra faptului că,

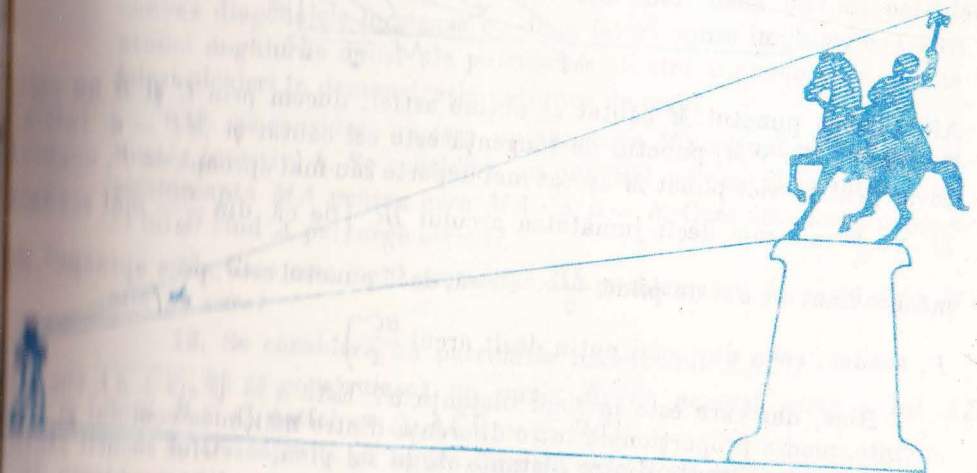


Fig. I.37

Dacă stă foarte aproape, s-ar putea să nu mai vadă nici copita calului ci numai socul și nici vârful securii, ci numai creștetul și urechile calului. Din punct de vedere al unghiului  $\alpha$  statuia are „relief“! Și atunci Tudorică a acceptat să simplifice pro-



blema. A formulat-o astfel: segmentul  $AC$  este perpendicular pe dreapta  $Ax$  (fig. I.38),  $B$  este un punct fix interior segmentului  $AC$ . Unde trebuie să

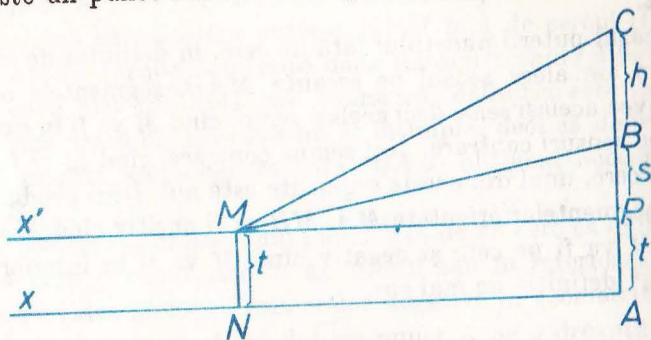


Fig. I.38

plaseze un segment  $MN$  ( $N \in Ax$  și  $MN \perp Ax$ ) astfel încât  $\sphericalangle BMC$  să fie maxim.

Vom simplifica și mai mult problema. Este evident că segmentul  $MN$  reprezintă înălțimea  $t$  de la tâlpile lui Tudorică pînă la nivelul ochilor săi. Diferența dintre înălțimea  $AB$  a soclului și  $t$ , iar  $h$  înălțimea statuii. Se cere distanța  $d = NA$ . Mai desenăm o dată figura (fig. I.39).

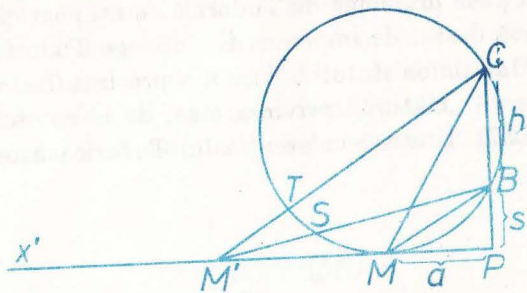


Fig. I.39

Afirmăm că punctul  $M$  căutat se obține astfel: ducem prin  $C$  și  $B$  un cerc tangent la  $Px' \cdot M$ , punctul de tangență este cel căutat și  $MP = a$ . Interesant devine pentru orice punct  $M$  așezat mai departe sau mai aproape de  $P$ , unghiul  $\sphericalangle BMC$  va fi mai mic decât jumătatea arcului  $BC$  (fie că din  $\frac{BC}{2}$  mai scădem măsura unui arc dat de pildă  $\frac{ST}{2}$ , fie că, dacă punctul este „prea aproape” de  $P$ , scădem ceva din „mai puțin decât arcul  $\frac{BC}{2}$ ”).

Bine, dar care este în fond distanța  $a$ ? Este  $a = \sqrt{s(s+h)}$ . Cu alte cuvinte, media proporțională între diferența dintre înălțimea soclului și înălțimea lui Tudorică, cu diferența dintre distanța de la sol pînă la virful securii și înălțimea lui Tudorică. Evident apare mai ușor de rezolvat problema de formulat nematematic soluția ei.

În multe din explicațiile care se dau cu ajutorul ei, matematica devine o formă de exprimare mai simplă. Numai că trebuie să ne obișnuim cu ea...

## 8. Probleme

1. Să se arate că puterea unui punct exterior unui cerc față de acel cerc este egală cu pătratul distanței de la acel punct la punctul de contact al tangentei dusă din el la cerc.

2. Tangentele duse la două cercuri secante dintr-un punct situat pe dreapta ce trece prin cele două puncte comune celor două cercuri (și în exteriorul celor două cercuri) au lungimi egale.

3. Dacă un punct are puteri egale față de două cercuri secante, atunci el este situat pe dreapta ce unește cele două puncte comune celor două cercuri.

4. Care este locul geometric al punctelor ce au puteri egale față de două cercuri tangente?

5. Trei cercuri cu centre necoliniare sînt secante două câte două. Să se arate că cele trei coarde comune sînt concurente.

6. Se dau două segmente  $u, v$ . Construiți un segment de lungime  $\sqrt{uv}$ .

7. Se dau două puncte  $A, B$  și o dreaptă  $d$ . Să se construiască un cerc ce trece prin  $A, B$  și este tangent dreptei  $d$  ( $A, B$  sînt în același semiplan față de dreapta  $d$ ). Cîte soluții are în general problema? Care este cazul de excepție?

8. Dați o nouă demonstrație teoremei de la pagina 26, în cazul cînd  $M$  este exterior cercului, arătînd asemănarea altei perechi de triunghiuri decât cea considerată în demonstrația dată acolo.

9. Dați o nouă demonstrație teoremei: dacă într-un patrulater convex diagonalele formează cu două laturi opuse unghiuri congruente, atunci unghiurile opuse ale patrulaterului sînt suplementare. Nu se va folosi nicăieri în demonstrație noțiunea de cerc!

10. Se consideră un cerc, un punct fix  $M$  nesituat pe acel cerc și un număr (pozitiv)  $k$ . Se consideră un punct  $A$  pe cerc și punctul  $B$  de pe semidreapta  $MA$  pentru care  $MA \cdot MB = k$ . Care este locul geometric al lui  $B$  cînd  $A$  parcurge cercul?

11. Care este locul geometric din problema 10, în cazul cînd  $M$  se află pe cerc?

12. Se consideră un patrulater inscriptibil  $ABCD$ .

a. Să se construiască un punct  $E$ , de aceeași parte a lui  $AD$  ca și  $B$  și  $C$ , astfel ca  $\triangle AED \sim \triangle BCD$ .

b. Descoperiți pe figura formată alte două triunghiuri asemenea.

c. Demonstrați că  $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$ .

13. Reluați construcția din problema precedentă în cazul unui patrulater convex oarecare  $ABCD$  și demonstrați că, dacă  $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$ , atunci patrulaterul este inscriptibil.

14. Ce devine enunțul problemei 5 dacă două din cercuri sînt tangente, iar al treilea este secant cu fiecare din ele? Folosiți rezultatul pentru a construi un cerc ce trece prin două puncte date și este tangent la un cerc dat.

## RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL DREPTUNGHIC

Pentru a deduce o primă consecință a teoremei din paragraful precedent (teoremă care se va numi „teorema asupra puterii punctului față de cerc”), să considerăm un triunghi dreptunghic  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ , să ducem cercul de centru  $B$  și rază  $AB$  și să considerăm intersecțiile sale  $D$  și  $E$  cu  $BC$ .

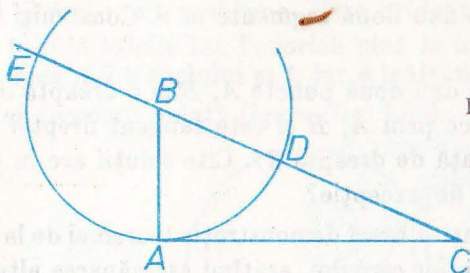


Fig. 1.40

Cercul va fi tangent în  $A$  la  $AC$ , iar  $BE = BD = BA$ . Teorema asupra puterii punctului  $C$  față de acest cerc ne spune că  $AC^2 = CE \cdot CD = (CB + AB)(CB - AB) = CB^2 - AB^2$ . Obținem, ca primă consecință a teoremei asupra puterii punctului față de cerc:

**Teorema lui Pitagora.** Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

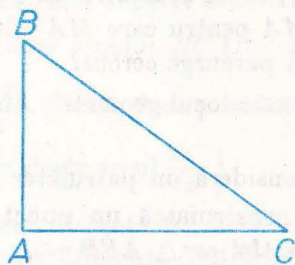


Fig. 1.41

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Importanța acestei teoreme este foarte mare. Ea reprezintă soluția unei probleme de tipul: se cunosc lungimile a două laturi ale unui triunghi și măsura unghiului cuprins între ele, să se calculeze lungimea celei de-a treia laturi (unghiul cuprins avînd o valoare particulară, de  $90^\circ$ ).

Altă consecință a teoremei puterii punctului față de cerc se obține ducînd un diametru  $AD$  al unui cerc, alegînd un punct  $C$  pe tangenta în  $A$  la cerc și considerînd celălalt punct comun  $D$  al dreptei  $CB$  și al cercului (fig. 1.42).

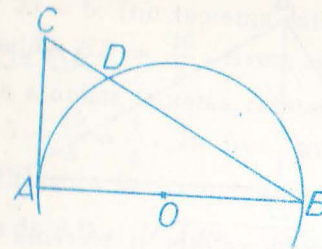


Fig. 1.42

Avem aici  $AB \perp AC$ ,  $AD \perp BC$  și  $AC^2 = CB \cdot CD$ .

Cum orice triunghi dreptunghic se poate considera în situația triunghiului  $ABC$  din figură, obținem:

**Teorema catetei.** Într-un triunghi dreptunghic, o catetă este micșorată proporțională între ipotenuză și proiecția acestei catete pe ipotenuză\*.

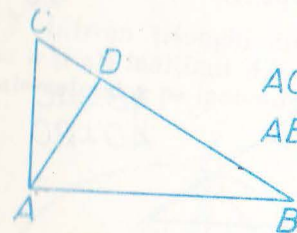


Fig. 1.43

$$AC^2 = CB \cdot CD$$

$$AB^2 = BC \cdot BD$$

În fine, să considerăm un punct  $D$  în interiorul unui cerc și să ducem diametrul  $BC$  și coarda  $AA'$  perpendiculară pe acest diametru, ce trec prin  $D$  (fig. 1.44).

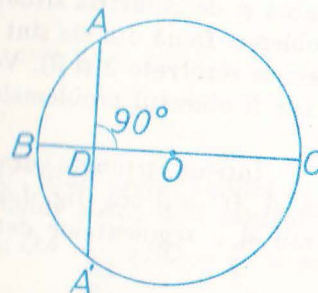


Fig. 1.44

Avem  $AD = DA'$ ,  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ , iar  $DB \cdot DC = DA \cdot DA' = DA^2$ .

\* Prin proiecția a unui punct pe o dreaptă înțelegem piciorul perpendicularei duse de acel punct pe acea dreaptă. Proiecția unui segment este segmentul determinat de proiecțiile capetelor sale; se poate evident întîmpla ca proiecția unui segment să se „reducă” la un punct.

**Teorema înălțimii.** Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea lăsată din vârful unghiului drept este medie proporțională între cele două segmente determinate de ea pe ipotenuză.

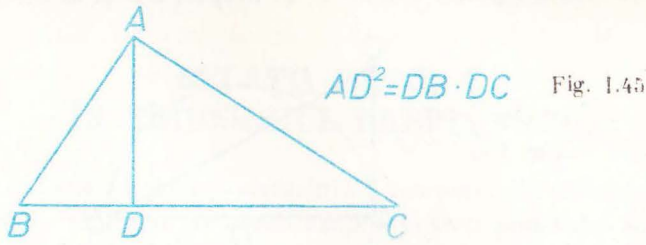


Fig. 1.45

**Observație.** Teorema catetei și teorema înălțimii se pot demonstra și observând că  $\triangle ABC \sim \triangle DAC$  și că  $\triangle ABD \sim \triangle CAD$  și alegând, din relațiile de proporționalitate ale laturilor, cite două rapoarte egale, relativ la care se scrie egalitatea dintre produsul mezilor și cel al extremilor.

Cele trei teoreme de mai sus ne permit să „stăpânim situația” din figura 1.46, în care este desenat un triunghi dreptunghic  $ABC$  și înălțimea sa  $AD$  dusă din vârful unghiului drept  $A$ .

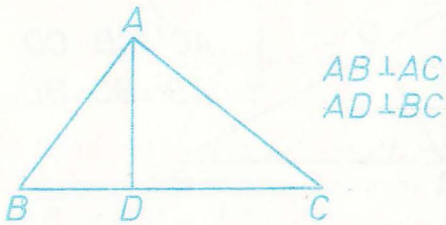


Fig. 1.46

Mai precis, aceste teoreme ne permit, cunoscând lungimile a două din cele șase segmente ce apar în figura 1.46 — două catete, ipotenuza, înălțimea, cele două proiecții ale catetelor pe ipotenuză — să calculăm lungimile celorlalte patru. Ținând seamă și de „simetria situației” (nu a figurii!), se pot formula nouă astfel de probleme. Două din ele sînt mai dificile și vor fi rezolvate în continuare (problemele rezolvate 2 și 3). Vom începe cu una din cele simple, iar celelalte șase vor fi obiectul problemelor 1–6 ce le veți avea de rezolvat.

**Problemă rezolvată 1.** Într-un triunghi dreptunghic  $ABC$ , lungimile catetelor sînt  $AB = 4$  cm și  $AC = 3$  cm (fig. 1.47). Să se determine lungimile ipotenuzei, a înălțimii și a segmentelor determinate pe ipotenuză de piciorul înălțimii.

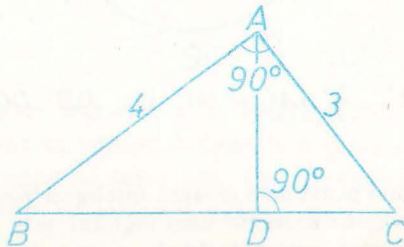


Fig. 1.47

**Ipoteza**

$AB \perp AC, AD \perp BC,$   
 $AB = 4, AC = 3.$

**Concluzia**

$BC = \dots, AD = \dots,$   
 $BD = \dots, CD = \dots$

**Rezolvare.** Din teorema lui Pitagora deducem  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ , deci  $BC = \sqrt{25} = 5$ . Din teorema catetei deducem  $AB^2 = BD \cdot BC$ , deci  $BD = \frac{AB^2}{BC}$  adică  $BD = \frac{16}{5}$ . Avem acum două posibilități de a calcula  $CD$ : una constă în a aplica teorema catetei pentru  $AC$ , cealaltă în a scrie  $CD = BC - BD = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$ . În fine, avem trei posibilități de a calcula  $AD$ : teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice  $ABD$ ,  $ACD$  și teorema înălțimii. Prima dă  $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{12}{5}$ .

**Observație.** Din  $\triangle ABC \sim \triangle DAC$  deducem și  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AC}$ , sau  $AB \cdot AC = AD \cdot BC$ , relație care oferă o a patra posibilitate de calcul al lui  $AD$ . Această relație nu reprezintă altceva decît „aria lui  $ABC$ , calculată în două moduri” (vezi și pag. 59–60).

**Problemă rezolvată 2.** Într-un triunghi dreptunghic  $ABC$  cunoaștem lungimile ipotenuzei  $BC = a$  și ale înălțimii  $AD = h$ . Să se determine lungimile proiecțiilor  $BD, DC$  ale catetelor pe ipotenuză (fig. 1.48).

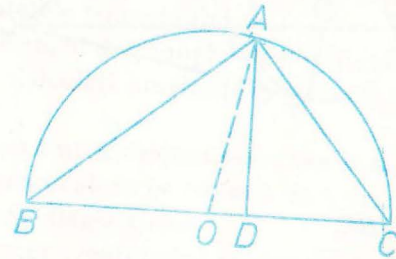


Fig. 1.48

**Ipoteza**

$AB \perp AC, AD \perp BC,$   
 $BC = a, AD = h.$

**Concluzia**

$BD = \dots, CD = \dots$

**Rezolvare.** Unghiul  $BAC$  fiind drept, rezultă că  $BC$  este un diametru al cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , deci centrul  $O$  al acestui cerc se află la mijlocul lui  $BC$ . Deducem  $OA = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$  și acum este simplu de continuat: teorema lui Pitagora în  $\triangle OAD$  dă  $OD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2}$  și obținem ca rezultat  $BD = BO + OD = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2}$ ,  $CD = CO - OD = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2}$ . Evident că acest rezultat corespunde modului de arita astfel figura încît  $D$  să fie între  $O$  și  $C$ .

$a$  și  $h$  fiind date, condiția necesară și suficientă de existență a triunghiului din enunț este  $h \leq \frac{a}{2}$  (aceasta este condiția necesară și suficientă pentru a putea construi  $\triangle OAD\dots$ ).

Odată determinate  $BD, CD$ , putem calcula  $AB, AC$  aplicând teorema lui Pitagora în  $\triangle ABD, \triangle ACD$ .

**Observație.** Ținând seamă de teorema înălțimii, formulele obținute rezolvă și problema: cunoscând suma  $a$  și produsul  $h^2$  a două numere (lungimile  $BD, CD$ ), să se afle cele două numere. Verificați și cu ajutorul calculului algebric aceasta.

**Problemă rezolvată 3.** Într-un triunghi dreptunghic  $ABC$  se cunosc lungimile unei catete  $AC$  și a proiecției  $BD$  a celeilalte catete pe ipotenuză. Să se afle lungimile ipotenuzei  $BC$  și a proiecției  $CD$  a celeilalte catete pe ipotenuză (fig. 1.49).

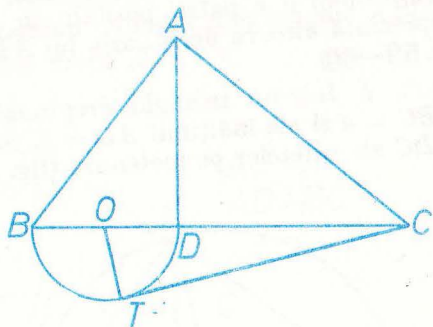


Fig. 1.49

**Ipoteza**

$$AB \perp AC, AD \perp BC.$$

$$AC = b, BD = d.$$

**Rezolvare.** Să considerăm cercul de diametru  $BD$  și să ducem o tangență  $CT$  la acest cerc. Fie  $O$  centrul cercului. Teorema catetei spune că  $AC^2 = CD \cdot CB$ , iar teorema asupra puterii punctului că  $CT^2 = CD \cdot CB$ . Deducem că  $CT = AC = b$ . Avem  $OT \perp CT$  și teorema lui Pitagora în  $\triangle CTO$  dă  $CO =$

$$= \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b^2}; \text{ obținem } BC = CO + OB = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b^2} \text{ iar } CD =$$

$$= CO - OD = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{d}{2}.$$

Oricum am alege două numere  $b, d$ , există un triunghi ce îndeplinește condițiile din enunț (se construiește  $\triangle COT$  cu  $\sphericalangle T = 90^\circ$  etc.).

Formulele obținute rezolvă și problema: cunoscând diferența  $d$  și produsul  $b^2$  a două numere (lungimile  $CB, CD$ ) să se afle cele două numere (verificați aceasta și prin algebră).

**Concluzia**

$$BC = \dots, CD = \dots$$

## 6. Probleme

1. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 13 cm, iar una din catete este de 5 cm. Aflați cealaltă catetă, înălțimea și proiecțiile catetelor pe ipotenuză.
2. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 10 cm, iar înălțimea de 8 cm. Aflați celelalte elemente ale triunghiului.
3. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 15 cm, iar proiecția sa pe ipotenuză de 9 cm. Aflați celelalte elemente.
4. Înălțimea unui triunghi dreptunghic este de 24 cm, iar proiecția unei catete pe ipotenuză de 10 cm. Aflați celelalte elemente.
5. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 50 cm, iar proiecția unei catete pe ea este de 5 cm. Aflați celelalte elemente.
6. Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză sînt de 7 cm și 63 cm. Aflați celelalte elemente.
7. Enunțați și demonstrați o reciprocă a teoremei lui Pitagora.
8. Deduceți teorema lui Pitagora din teorema catetei.
9. Redactați o demonstrație a teoremei lui Pitagora fără a folosi cercuri, și nici teorema catetei (însă reconstituind figura 1.40).
10. Care este lungimea diagonalei unui pătrat de latură  $a$ ?
11. Care este lungimea înălțimii unui triunghi echilateral de latură 4 cm?
12. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel este de 4 cm. Să se calculeze catetele triunghiului.
13. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 5 cm, iar unghiul opus ei este de  $30^\circ$ . Calculați lungimile ipotenuzei, a celeilalte catete, a înălțimii etc.
14. Într-un trapez dreptunghic, bazele au 10 cm și 7 cm, iar latura neparalelă perpendiculară pe ele este de 4 cm. Calculați lungimile celeilalte laturi și ale diagonalelor.
15. Un trapez dreptunghic are bazele de 11 cm și 7 cm, iar una din diagonale de 15 cm. Să se calculeze lungimile laturilor neparalele și a celeilalte diagonale.
16. Un triunghi isoscel are laturile congruente de 10 cm iar baza de 8 cm. Calculați înălțimea corespunzătoare bazei.
17. În problema precedentă calculați și celelalte înălțimi ale triunghiului.
18. O coardă a unui cerc de rază 15 cm are lungimea de 8 cm. Calculați distanța de la centrul cercului la acea coardă.
19. Care este cea mai mică putere ce o poate avea un punct față de un cerc de rază  $R$ ? Care este punctul de putere minimă?
20. Care este lungimea tangentei dusă dintr-un punct la un cerc de rază 3 cm, dacă distanța de la acel punct la centrul cercului este de 8 cm?

21. Calculați lungimea tangentei comune a două cercuri tangente exterioare de raze  $R$  și  $r$ .

22. Calculați lungimile tangentei comune exterioare și interioare a două cercuri de raze 8 cm și 5 cm, dacă distanța dintre centrele lor este de 20 cm.

23. Dați diferite metode de a construi un segment de lungime  $\sqrt{uv}$ ,  $u$  și  $v$  fiind lungimile unor segmente date.

24. Găsiți un triunghi dreptunghic astfel încât lungimile laturilor, a înălțimii și a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză să fie toate numere naturale.

25. Latura unui romb este de 11 cm, iar lungimea unei diagonale de 15 cm. Este această diagonală mai mare sau mai mică decât cealaltă diagonală?

26. Diagonala unui dreptunghi este 10 cm iar una din laturi este de 7 cm. Este acea latură „lungimea“ sau „lățimea“?

27. Un patrulater  $ABCD$  înscris într-un cerc de rază 25 cm are diagonalele perpendiculare, depărtate de centrul cercului la 7 cm respectiv 15 cm. Să se calculeze lungimile laturilor patrulaterului. Să se calculeze și lungimile diagonalelor și să se verifice relația din problema 12 de la pag. 31, adică  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .

28. Enunțați o reciprocă a teoremei înălțimii care să fie incorectă!

29. Într-un triunghi  $ABC$ , unghiul  $A$  este ascuțit dacă și numai dacă  $BC^2 < AB^2 + AC^2$ .

**Observație.** Desigur că ați rezolvat cu ușurință problema 10, aflând astfel că lungimea diagonalei unui pătrat de latură 1 cm este  $\sqrt{2}$  cm. Deci construcții simple aplicate unor segmente cu lungimi raționale (chiar întregi) conduc la segmente de lungimi iraționale. Descoperirea acestui fapt a produs o mare surpriză în lumea matematicienilor greci, înaintea erei noastre.

Există totuși triunghiuri dreptunghice ale căror laturi au toate trei lungimi întregi. Unul din ele este cel de catete 3 și 4 și de ipotenuză 5.

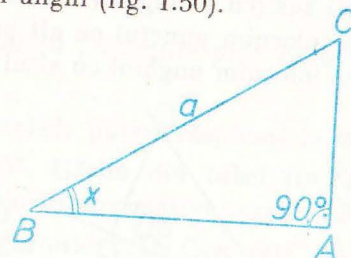
Existând probleme ați întâlnit probabil și altele. Se cunoaște forma generală a tripletelor de numere naturale  $\neq 0$   $(x, y, z)$  pentru care  $x^2 + y^2 = z^2$ , anume  $x = k(p^2 - q^2)$ ,  $y = 2kpq$ ,  $z = k(p^2 + q^2)$  sau același cu  $x$  permutat cu  $y$ , în care  $k, p, q$  sînt numere naturale,  $p > q$  și, pentru a evita repetițiile, se presupune că  $p$  și  $q$  sînt prime între ele și sînt unul par și celălalt impar. Prezența factorului  $k$  este ușor de înțeles dacă avem în vedere noțiunea de triunghiuri asemenea. Să dăm cîteva exemple, (toate cu  $k = 1$ )  $p = 2, q = 1$  dă  $(3, 4, 5)$ ,  $p = 3, q = 2$  dă  $(5, 12, 13)$ ,  $p = 4, q = 1$  dă  $(15, 8, 17)$ ,  $p = 4, q = 3$  dă  $(7, 24, 25)$ ,  $p = 5, q = 2$  dă  $(21, 20, 29)$ ,  $p = 5, q = 4$  dă  $(9, 40, 41)$  etc. Puteți folosi aceste triplete pentru a compune voi înșiși probleme în care să nu „apară radicali“ în cursul rezolvării lor. Puteți verifica ușor că  $x, y, z$  definiți prin formulele de mai sus verifică relația  $x^2 + y^2 = z^2$ .

Mai greu, dar nu dincolo de posibilitățile voastre de înțelegere, este de a dovedi că orice triplet de numere întregi  $(x, y, z)$  pentru care  $x^2 + y^2 = z^2$  se obține prin formulele de mai sus cu  $k, p, q$  întregi.

## SINUSUL ȘI COSINUSUL UNUI UNGHII

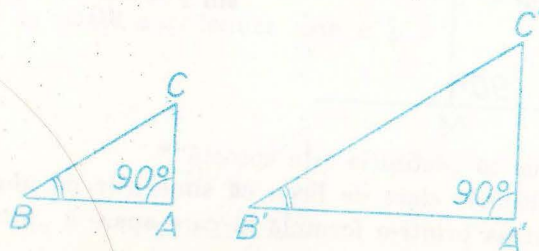
După ce în ultimul paragraf am învățat să calculăm, cunoscînd lungimile a două laturi ale unui triunghi dreptunghic, lungimea celei de-a treia laturi, ne vom pune aici problema de a determina, cunoscînd lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic și măsura unuia din unghiurile sale ascuțite, lungimea laturii opuse aceluia unghi (fig. I.50).

Fig. I.50



Răspunsul la această problemă nu se poate da cu ajutorul unei formule care să conțină numai operații cu numere cunoscute pînă acum. Situația nu este însă atît de „gravă“ încît să fim obligați să rezolvăm de fiecare dată o astfel de problemă printr-o măsurătoare. Anume, să observăm că dacă în două triunghiuri dreptunghice cu  $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90^\circ$  unghiurile din  $B$  și  $B'$  sînt congruente atunci triunghiurile sînt asemenea (cazul 2) și deci  $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ , deci cunoscînd ipotenuzele lor și cateta  $AC$  din primul determinăm cu ușurință cateta  $A'C'$  din celălalt (fig. I.51).

Fig. I.51

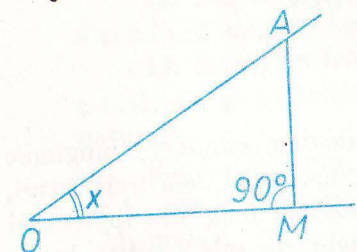


$$A'C' = B'C' \cdot \frac{AC}{BC}$$

Cu alte cuvinte este suficient să cunoaștem raportul  $\frac{AC}{BC}$  într-un triunghi dreptunghic care are măsura unghiului  $B$  egală cu  $x$ , pentru a putea calcula

cateta opusă unui unghi de măsură  $x$  în orice triunghi dreptunghic căruia se cunoaște ipotenuza.

Ajungem la concluzia că este preferabil să caracterizăm mărimea unui unghi ascuțit nu prin numărul său de grade, ci prin raportul dintre distanța de la un punct de pe una din laturile sale la cealaltă latură și distanța de la acel punct la vârful unghiului (fig. 1.52).

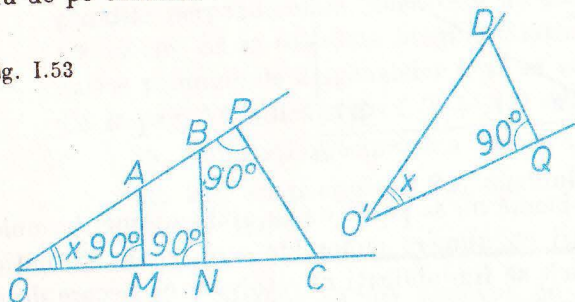


Nu  $x$  ci  $\frac{AM}{AO}$

Fig. 1.52

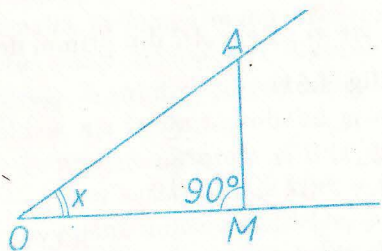
Raționamentul de mai sus (cu triunghiuri asemenea) ne arată că acest raport nu se schimbă dacă înlocuim punctul cu alt punct de pe aceea latură sau de pe cealaltă sau dacă înlocuim unghiul cu altul congruent.

Fig. 1.53



$$\frac{AM}{AO} = \frac{BN}{BO} = \frac{CP}{CO} = \frac{DQ}{DO'}$$

**Definiție.** Dacă  $0^\circ < x < 90^\circ$ , se numește  $\sin x$ , și se citește „sinus de  $x$ ”, raportul dintre cateta opusă unghiului  $x$  și ipotenuză într-un triunghi dreptunghic care are unul din unghiurile sale ascuțite de măsură  $x$ .



$\sin x = \frac{AM}{AO}$  Fig. 1.54

Am văzut mai sus că „definiția este corectă”\*

Veți vedea în ultimele clase de liceu că sinusurile de unghiuri nu se măsoară, ci se pot calcula printr-o formulă în care apare o „sumă infinită”, formulă ce „incepe” astfel:

$$\sin x = \frac{\pi x}{180} - \frac{1}{6} \left( \frac{\pi x}{180} \right)^3 + \frac{1}{120} \left( \frac{\pi x}{180} \right)^5 - \dots$$

\* Vezi la pag. 28 sensul acestei expresii.

Dăm mai jos o tabelă (calculată, de exemplu, pe baza formulei de mai sus), în care figurează valorile lui  $\sin x$ , cu trei zecimale exacte, pentru toți  $x$  exprimați printr-un număr întreg de grade, cuprins între  $0^\circ$  și  $90^\circ$ .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$0^\circ$		0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,139	0,156
$10^\circ$	0,174	0,191	0,208	0,225	0,242	0,259	0,276	0,292	0,309	0,326
$20^\circ$	0,342	0,358	0,375	0,391	0,407	0,423	0,438	0,454	0,469	0,485
$30^\circ$	0,500	0,515	0,530	0,545	0,559	0,574	0,588	0,602	0,616	0,629
$40^\circ$	0,643	0,656	0,669	0,682	0,695	0,707	0,719	0,731	0,743	0,755
$50^\circ$	0,766	0,777	0,788	0,799	0,809	0,819	0,829	0,839	0,848	0,857
$60^\circ$	0,866	0,875	0,883	0,891	0,899	0,906	0,914	0,921	0,927	0,934
$70^\circ$	0,940	0,946	0,951	0,956	0,961	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982
$80^\circ$	0,985	0,988	0,990	0,993	0,995	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000

(ultima valoare este 1,000 cu „rotunjire prin adaos“)

Cu ajutorul acestei tabele putem răspunde la două tipuri de întrebări:

1) Să se afle  $\sin 23^\circ$ . Găsim din tabel  $\sin 23^\circ = 0,391$ ; mai precis, deoarece tabelul conține valori aproximative numai:  $0,3905 < \sin 23^\circ < 0,3915$ .

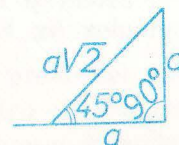
2) Sinusul unui unghi este 0,32. Care este măsura  $x$  a celui unghi? Din tabel găsim că  $\sin 18^\circ = 0,309 < 0,32 < 0,326 = \sin 19^\circ$ , deci  $x$  este cuprins între  $18^\circ$  și  $19^\circ$ .

Există și tabele mai precise, cu mai multe zecimale, și din „minut în minut” etc.

**Observația 1.** Putem determina măsura  $x$  a unui unghi și dacă știm de exemplu că  $\sin \frac{x}{2} = 0,16$ . Din tabel obținem  $9^\circ < \frac{x}{2} < 10^\circ$ , deci  $18^\circ < x < 20^\circ$ .

2. Din cele cunoscute pînă acum putem deduce valoarea exactă a sinusurilor a trei unghiuri. Știm (teorema lui Pitagora) că într-un triunghi dreptunghic isoscel de catetă  $a$  ipotenuza este  $a\sqrt{2}$ .

Fig. 1.55



Deci  $\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Știm că într-un triunghi dreptunghic de ipotenuză  $a$  ce are un unghi ascuțit de  $30^\circ$  cateta opusă aceluși unghi este  $\frac{a}{2}$  (deoarece „completând” triunghiul se obține un triunghi echilateral, fig. I.56).

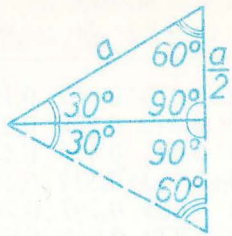


Fig. I.56

Deci  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ .

În același triunghi lungimea celeilalte catete este  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  (teorema lui

Pitagora), deci  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Problemă rezolvată 1.** Cunoscind ipotenuza și un unghi ascuțit ale unui triunghi dreptunghic, să se afle catetele (fig. I.57).

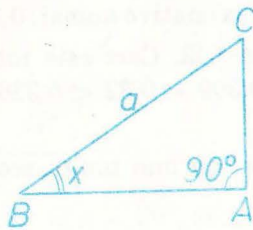


Fig. I.57

**Ipoteza**  
 $BC = a$ ,  $\sphericalangle B = x$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ .

**Concluzia**  
 $AB = \dots$ ,  $AC = \dots$

**Rezolvare.** Avem, prin definiție,  $\frac{AC}{a} = \sin x$ , deci  $AC = a \sin x$ . Teorema lui Pitagora dă  $AB = \sqrt{a^2 - AC^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 x} = a \sqrt{1 - \sin^2 x}$ .

Mai putem scrie, deoarece  $\sphericalangle C = 90^\circ - x$ , și  $AB = a \sin C = a \sin(90^\circ - x)$ .

**Observație.** Să remarcăm că am scris  $\sin^2 x$  în loc de  $(\sin x)^2$ ; această este o convenție de scriere.

Cunoscind o catetă și ipotenuza unui triunghi dreptunghic, să se afle unghiurile triunghiului (fig. I.58).

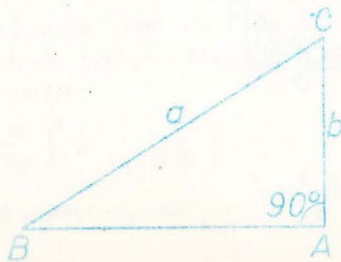


Fig. I.58

**Ipoteza**

$\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,

**Concluzia**

$\sphericalangle B = \dots$ ,  $\sphericalangle C = \dots$

**Rezolvare.** Conform definiției avem  $\sin B = \frac{b}{a}$  și această relație constituie un răspuns la întrebarea „care este măsura  $\sphericalangle B$ ?”

Măsura  $\sphericalangle C$  se determină fie din  $\sphericalangle C = 90^\circ - \sphericalangle B$ , fie din  $\sin C = \frac{AB}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  (teorema lui Pitagora,  $\sin C = \frac{AB}{a}$ ).

Ținând seamă de rezultatul din problema rezolvată 1, se dă:

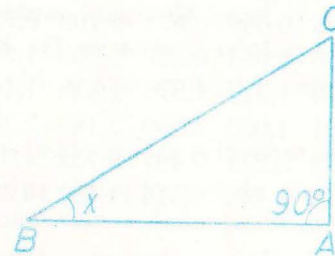
**Definiție.** Dacă  $0^\circ < x < 90^\circ$  se numește **cos  $x$**  și se citește „cosinus de  $x$ ” numărul  $\sin(90^\circ - x)$ .

Sinusul și cosinusul unui unghi se numesc și „funcții trigonometrice ale aceluși unghi”.

**CE ȘTIM DESPRE SINUS ȘI COSINUS?**

a. Într-un triunghi dreptunghic  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  avem  $AC = BC \sin B$ ,  $AB = BC \cos B$

Fig. I.59



b.  $0 < \sin x < 1$ ;  $0 < \cos x < 1$ .

c.  $\cos x = \sin(90^\circ - x)$ . Aceasta ne permite să folosim tabelul de la pagina 41 și la calculul cosinusului unui unghi dat și la determinarea unui unghi când i se cunoaște cosinusul.

d. Din rezolvarea problemei 1 am văzut că  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  deci  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  pentru orice  $x$  (cuprins între  $0^\circ$  și  $90^\circ$ ).

Aceasta este o expresie „trigonometrică” a teoremei lui Pitagora.

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; deci:  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

## TANGENTA UNUI UNGHII

Dacă într-un triunghi dreptunghic  $ABC$  cu  $A = 90^\circ$  cunoaștem  $AC = b$  și  $C = x$ , atunci ipotenuza  $BC = \frac{b}{\cos x}$ , iar cealaltă catetă  $AB = BC \sin x = b \frac{\sin x}{\cos x}$ . Cu aceasta am rezolvat problema: cunoscând lungimea unei catete și unghiul alăturat dintr-un triunghi dreptunghic, să se determine lungimea celeilalte catete.

În rezolvarea numerică a acestei probleme, sîntem în situația de a face o împărțire a două numere ( $\sin x$  și  $\cos x$ ) pe care le luăm din tabelul de la pag. 41. Să introducem:

**Definiție.** Se numește **tangentă a unui unghi  $x$ , pentru care  $0^\circ < x < 90^\circ$ , cîtlul dintre sinusul acelu unghi și cosinusul său.**

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Tabela de valori a tangentei ușurează calculul de mai sus.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$0^\circ$		0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,123	0,141	0,158
$10^\circ$	0,176	0,194	0,213	0,231	0,249	0,268	0,287	0,306	0,325	0,344
$20^\circ$	0,364	0,384	0,404	0,424	0,445	0,466	0,488	0,510	0,532	0,555
$30^\circ$	0,577	0,601	0,625	0,649	0,675	0,700	0,727	0,754	0,781	0,810
$40^\circ$	0,839	0,869	0,900	0,933	0,966	1,000	1,036	1,072	1,111	1,150
$50^\circ$	1,192	1,235	1,280	1,327	1,376	1,428	1,483	1,540	1,600	1,660
$60^\circ$	1,732	1,804	1,881	1,963	2,050	2,145	2,246	2,356	2,475	2,600
$70^\circ$	2,747	2,904	3,078	3,271	3,487	3,732	4,011	4,331	4,705	5,144
$80^\circ$	5,671	6,314	7,115	8,144	9,514	11,430	14,301	19,081	28,636	57,290

Se introduce și:

**Definiție.** Se numește **cotangentă a unghiului  $x$  pentru  $0^\circ < x < 90^\circ$  cîtlul dintre cosinusul acelu unghi și sinusul său,  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .**

### 7. Probleme

1. Examinați tabelul de valori al sinusului și răspundeți la întrebarea: dacă  $x < y$  atunci avem  $\sin x < \sin y$ ,  $\sin x > \sin y$  sau  $\sin x = \sin y$ ?

Demonstrați apoi răspunsul (evident că tabelul, ce nu conține decât valorile lui  $\sin x$  pentru  $x$  întreg, nu ne poate ajuta în această demonstrație); amintiți-vă teoremele de la „inegalități“ (Geometria cl. a VI-a).

2. Aceeași întrebare pentru cosinus.

3. Examinați diferențele dintre valorile succesive ale sinusului din tabelul de la pagina 41; mai precis examinați valorile expresiei  $\sin(x + 1^\circ) - \sin x$  pentru  $x$  întreg. Unde crește sinusul mai repede, în zona valorilor mici sau a celor mari ale lui  $x$ ?

4. Care sînt valorile lui  $x$  pentru care  $\sin x = \cos x$ ?

5. Ce puteți spune despre măsura  $x$  a unui unghi ascuțit pentru care  $\sin x = 0,8$ ? Dar dacă știm că  $\cos y = 0,55$ ?

6. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea  $a$ , iar unul din unghiurile ascuțite măsura  $x$ . Să se exprime lungimile catetelor, ale înălțimii, ale proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.\*

7. Înălțimea unui triunghi dreptunghic corespunzătoare unghiului drept are lungimea  $h$ , iar unul din unghiurile ascuțite ale triunghiului are măsura  $x$ . Exprimați lungimile ipotenuzei, ale catetelor etc.

8. Baza mică a unui trapez dreptunghic are lungimea  $b$ , latura „oblică“ are lungimea  $c$ , iar unghiul ascuțit măsura  $x$ . Să se exprime baza mare, latura perpendiculară și diagonalele.

9. Într-un cerc de rază  $R$  se consideră un unghi la centru de măsură  $x$ . Care este lungimea coardei „corespunzătoare“?

10. Un triunghi isoscel are unghiurile de la bază de măsură  $x$ , iar laturile congruente de lungime  $a$ . Să se calculeze baza, înălțimea corespunzătoare bazei și înălțimile corespunzătoare laturilor congruente.

11. Se cunosc lungimile bazei și a laturilor congruente dintr-un triunghi isoscel. Să se scrie o relație din care să se poată determina unghiul de la vîrf al triunghiului (relația va conține, evident, „sinus“ sau „cosinus“).

12. Cunoscînd lungimea și lățimea unui dreptunghi, să se determine măsura unghiului obtuz format de diagonalele sale.

13. Un punct este la distanța de 15 m de centrul unui cerc de rază 2 m. Sub ce unghi „se vede cercul“ din acel punct (cu alte cuvinte, care este unghiul format de tangentele duse din acel punct la cerc)?

14. Două cercuri de raze  $R$  și  $r$  au distanța  $d$  între centre. Sub ce unghi se văd cercurile din punctul de intersecție al tangentelor comune exterioare? Dar din cel al tangentelor comune interioare?

15. O dreaptă este la distanța  $d$  de centrul unui cerc de rază  $R$ . Care este unghiul format de dreaptă cu tangenta la cerc într-un punct de intersecție al dreptei cu cercul?

16. În  $\triangle ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  ducem  $AD \perp BC$ ,  $DE \perp AB$ ,  $EF \perp BC$ . Exprimați  $BF$  și  $AF$  cunoscînd  $BC = a$  și  $\sphericalangle B = x$ .

17. Arătați că  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ .

18. Arătați că  $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90^\circ - x)$ .

19. Calculați  $\operatorname{tg} 29^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 44^\circ$  etc.

\* La această problemă ca și la cele ce urmează se vor considera și exemple numerice.



20. Ce puteți spune despre unghiurile  $x, y$ , dacă  $\operatorname{tg} x = 2,1$  și  $\operatorname{ctg} y = 0,5$ ?

21. Arătați că dacă  $x < y$  atunci  $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} y$  iar  $\operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} y$ .

22. Determinați tangenta și cotangenta unghiurilor de  $30^\circ, 45^\circ$  și  $60^\circ$ .

## Rezolvarea triunghiurilor oarecare

În acest paragraf vom rezolva cele trei probleme puse încă de anul trecut, la lecția despre construcția triunghiurilor.

**Problema rezolvată 1.** Într-un triunghi se cunosc lungimile a două laturi și măsura unghiului cuprins. Să se determine lungimea celei de-a treia laturi și măsurile celorlalte două unghiuri.

Să considerăm întâi un caz concret, în care să presupunem că „unghiul cuprins” este dat nu prin măsura sa ci prin cosinusul său (fig. I.60).

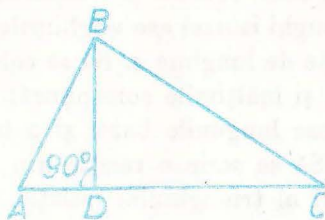


Fig. I.60

*Ipoteza*

$AB = 5, AC = 7, \angle A < 90^\circ, \cos A = 0,4.$

*Concluzia*

$BC = \dots, \angle C = \dots,$   
 $\angle B = \dots$

**Rezolvare.** Pentru a putea aplica relațiile din triunghiul dreptunghic ce le cunoaștem, să ducem înălțimea  $BD$ . Vom avea din  $\triangle ABD$ ,  $AD = AB \cos A = 5 \cdot 0,4 = 2$ ,  $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{21}$ , apoi  $DC = 7 - 2 = 5$  și din  $\triangle BDC$ ,  $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{46}$ ,  $\sin C = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{46}} = \sqrt{\frac{21}{46}} \simeq \sqrt{0,4565} \simeq 0,67 \dots$ ,  $C \simeq 42^\circ \dots$  iar  $\angle ABC = 180^\circ - (\angle A + \angle C) \simeq 180^\circ - (66^\circ + 42^\circ) \simeq 71^\circ$  (unghiurile din paranteză sînt ambele puțin mai mari decît valorile scrise...)\*.

Vom rezolva însă prima parte a problemei și în cazul general, cu date literale; se va vedea cum rezultatul ce-l vom obține va fi esențial în special pentru problema 3.

\* Putem determina pe  $BD$  și ca  $AB \sin A$ , iar pe  $C$  și din  $\cos C = \frac{CD}{CB} = \frac{5}{\sqrt{46}}$ .

Va trebui să deosebim două cazuri.

**Cazul 1.** Unghiul cuprins este ascuțit (fig. I.61).

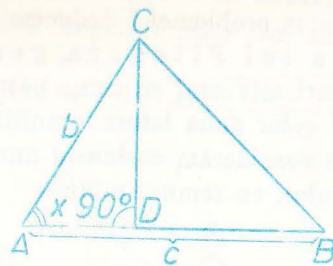


Fig. I.61

*Ipoteza*

$AB = c, AC = b, b \leq c, \angle A = x.$

*Concluzia*

$BC = \dots$

**Rezolvare.** Rolurile ce le joacă  $\angle B$  și  $\angle C$  în enunț sînt simetrice, de aceea am precizat că  $b \leq c$ , pentru a ști că  $\angle B \leq \angle C$ , deci că  $\angle B$  este ascuțit și că figura arată așa cum a fost desenată. Vom proceda la fel ca în cazul concret de mai sus: vom considera piciorul  $D$  al perpendicularei din  $C$  pe  $AB$ , care, datorită ipotezelor, se va afla între  $A$  și  $B$ .

În  $\triangle ACD$  avem  $CD = b \sin x$ ,  $AD = b \cos x$ ; apoi  $BD = c - b \cos x$ . Teorema lui Pitagora în  $\triangle BDC$  dă  $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{b^2 \sin^2 x + (c - b \cos x)^2} = \sqrt{b^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + c^2 - 2bc \cos x} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos x}$ .

**Cazul 2.** Unghiul cuprins este obtuz.

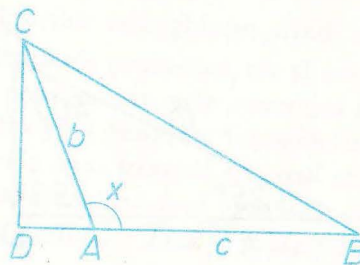


Fig. I.62

*Ipoteza*

$AB = c, AC = b, \angle A = x.$

*Concluzia*

$BC = \dots$

**Rezolvare.** În acest caz  $\angle B$  este sigur ascuțit. Avem  $\angle CAD = 180^\circ - x$  și în continuare procedăm în același mod ca în cazul 1:  $AD = b \cos(180^\circ - x)$ ,  $CD = b \sin(180^\circ - x)$ ,  $BD = c + b \cos(180^\circ - x)$ ,  $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{b^2 \sin^2(180^\circ - x) + (c + b \cos(180^\circ - x))^2} = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos(180^\circ - x)}$  și apoi  $\sin B = \frac{CD}{CB}$ .

**Observație.** Dacă examinăm cele două formule obținute în cele două cazuri pentru lungimea lui  $BC$  observăm că, dacă definim, pentru  $90^\circ < x < 180^\circ$ ,  $\cos x$  drept  $-\cos(180^\circ - x)$ , atunci formula de la cazul 1 este vala-

la piciorul înălțimii prin formula de mai sus și am găsi  $AD = \frac{5}{2}$ , iar apoi din teorema lui Pitagora am deduce  $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

## 8. Probleme

1. Care sînt toate valorile ce le ia  $\cos x$ , cînd  $x$  variază de la  $0^\circ$  la  $180^\circ$ ? De cîte ori este luată fiecare din aceste valori?
2. Aceleași întrebări ca la problema 1 pentru  $\sin x$ .
3. „Rezolvați ecuațiile“  $\cos x = 0,75$ ,  $\cos x = -0,39$ ,  $\cos x = 1$ , precum și  $\sin x = 0,4$ ,  $\sin x = -0,34$ ,  $\sin x = 2$ .
4. Să se arate că relația  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  este adevărată pentru orice  $x$  cuprins între  $0^\circ$  și  $180^\circ$ .
5. Exprimați, pentru  $0^\circ < x < 90^\circ$ ,  $\sin(90^\circ + x)$  și  $\cos(90^\circ + x)$  în funcție de  $\sin x$ ,  $\cos x$ .
6. Este adevărat că  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  pentru orice  $x$  între  $0^\circ$  și  $180^\circ$ ? Dar  $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ?
7. În problema rezolvată 2, figura I.64, determinați lungimea  $AD$  fără a mai duce perpendiculara din  $B$  pe  $AC$ .
8. Un triunghi are unghiurile de  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  și  $75^\circ$  iar latura dintre unghiurile de  $75^\circ$  și  $45^\circ$  de 4 cm.
  - a. Determinați lungimile celorlalte laturi.
  - b. Folosind și metoda găsită în problema 7, deduceți o expresie exactă pentru  $\sin 75^\circ$  și  $\cos 75^\circ$ .
9. Cele trei laturi ale unui triunghi au lungimile de 10, 12 și 14.
  - a. Calculați lungimile medianelor acestui triunghi.
  - b. Calculați unghiurile dintre mediane și laturile corespunzătoare.
10. Un triunghi are două laturi de 8 și 11, iar unghiul cuprins între ele de  $60^\circ$ . Calculați lungimea celei de a treia laturi și măsurile celorlalte două unghiuri.
11. Un triunghi isoscel are laturile congruente de 8, iar unghiul din vîrf de  $45^\circ$ . Calculați baza sa, înălțimea corespunzătoare bazelor. Deduceți valorile exacte ale lui  $\sin 22^\circ 30'$  și  $\cos 22^\circ 30'$  (în expresii care nu vor apărea, bineînțeles, radicali).
12. Rezolvați problema 11 cu un unghi oarecare  $x$  în loc de  $45^\circ$ .
13. Laturile unui triunghi  $ABC$  au lungimile de  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $CA = 8$ . Pe latura  $BC$  se alege un punct  $D$  astfel ca  $BD = 3$ . Determinați lungimea  $AD$ .
14. Un triunghi are o latură de 12, unghiul opus de  $56^\circ$ , iar unul din celelalte unghiuri de  $62^\circ$ . Determinați raza cercului circumscris acestui triunghi.
15. În problema precedentă, determinați și raza cercului înscris în acest triunghi.

16. Două laturi ale unui triunghi au lungimile de 80 și 14, unghiul cuprins între ele este de  $60^\circ$ . Calculați lungimea bisectoarei corespunzătoare laturii de 80.

17. Laturile unui paralelogram au lungimile de 5 și 8, iar unul din unghiurile sale are  $50^\circ$ .

- a. Calculați lungimile diagonalelor.
- b. Calculați unghiurile dintre diagonale și laturi.
- c. Calculați unghiul dintre diagonale.

18. Distanța dintre centrele a două cercuri de raze 9 și 13 este de 20.

- a. Calculați lungimea coardei lor comune.
- b. Calculați unghiul dintre tangentele la cele două cercuri într-unul din punctele lor de intersecție.

19. Aceeași problemă, distanța dintre centre fiind de 5.

20. Bazele unui trapez au 15 respectiv 9 ca lungimi iar laturile neparalele au 11 și 13.

- a. Cum arată trapezul, așa



(Cu alte cuvinte: unghiurile ascuțite ale trapezului sînt alăturate sau opuse?)

- b. Calculați lungimile diagonalelor trapezului.
- c. Calculați unghiurile trapezului.
- d. Calculați unghiurile dintre diagonale și laturi.
- e. Calculați unghiul dintre diagonale.

Încercați să rezolvați fiecare din puncte bazîndu-vă pe cît mai puține din rezultatele punctelor precedente.

21. Bazele unui trapez sînt lungi de 16 și 4, una din laturile neparalele are 6, iar una din diagonale 12. Rezolvați pentru acest trapez punctele a-e din problema precedentă.

22. Din două puncte ale unei drepte depărtate între ele cu 4, ducem două segmente perpendiculare pe acea dreaptă, de lungimi 5 și 7. Care este distanța dintre celelalte capete ale acestor segmente?

23. Într-un patrulater convex  $ABCD$  avem  $AB = 13$ ,  $BC = 25$ ,  $CD = 20$ ,  $DA = 12\sqrt{2}$ , iar  $BD = 17$ . Calculați lungimea diagonalei  $AC$ .

24. În problema 23 calculați și unghiurile patrulaterului, unghiurile dintre diagonale și laturi, unghiul dintre diagonale.

25. În problemele 23–24, punctul  $D$  este în interiorul, în exteriorul sau chiar pe cercul ce trece prin  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ?

## Aplicații practice

Reamintiți-vă aplicația practică de la pag. 24 și rezolvați din nou problemele respective, fără a mai măsura nimic pe hîrtie.

*Intrebări.* Cu ce se ușurează munca elevului din figura I.31 dacă el are la dispoziție tabelul de la pagina 44?  
 Cum puteți afla, fără a trece riul, dacă aparatul meteorologic din figura I.67 este văzut de observatorul din punctul  $O$ ?

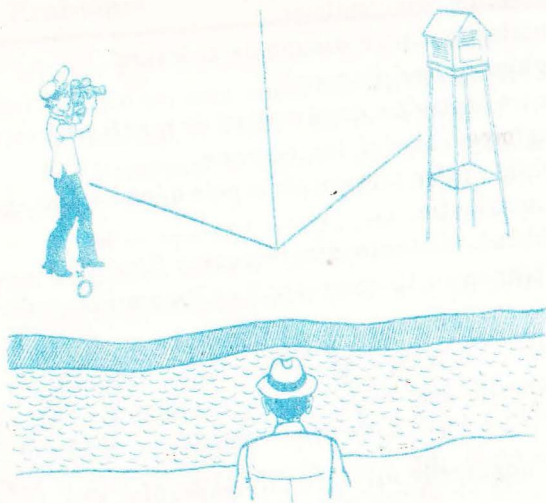


Fig. I.67

### CÎTEVA TEOREME ÎN PLUS (FACULTATIV)

În problema 17 de la pagina 11 s-a cerut să se demonstreze:

**Teorema bisectoarei.** Bisectoarea interioară și exterioară, alături de unghi dintr-un triunghi, împart latura opusă într-un raport, egal cu raportul laturilor ce formează unghiul (fig. I.68).

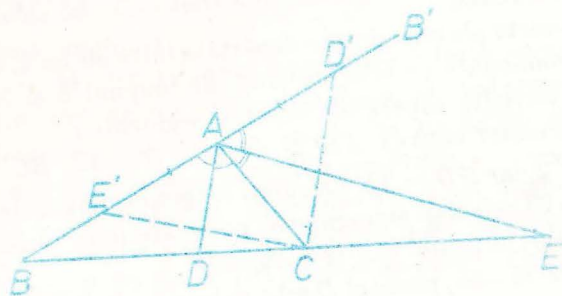


Fig. I.68

*Ipoteza*

$$\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DAC, \sphericalangle EAB' \equiv \sphericalangle EAC.$$

*Concluzia*

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Demonstrația o vom schița numeși. Alegem pe dreapta  $AB$  punctele  $D'$ ,  $E'$  așa încît  $AD' \equiv AE' \equiv AC$ ,  $D'$  fiind pe semidreapta  $AB'$  iar  $E'$

pe semidreapta  $AB$ . Se arată că  $CD' \parallel AD$ ,  $CE' \parallel AE$  și se aplică teorema lui Thales în  $\triangle BDC'$  tăiat de  $AD$  și în  $\triangle BAE'$  tăiat de  $CE'$  etc.

Pe baza teoremei bisectoarei vom rezolva:

*Problemă.* Fiind date două puncte  $A$ ,  $B$  și un număr  $k$  diferit de 1, să se afle locul geometric al tuturor punctelor  $M$  pentru care  $\frac{MA}{MB} = k$  (fig. I.69).

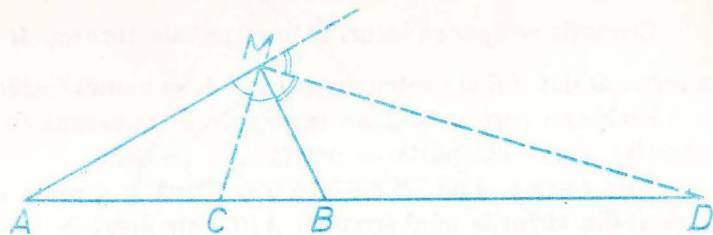


Fig. I.69

*Ipoteza*

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

*Rezolvare.* Să ducem bisectoarea interioară și cea exterioară a  $\sphericalangle AMB$ . Ele vor tăia dreapta  $AB$  în două puncte  $C$  și  $D$  astfel încît, conform teoremei bisectoarei,  $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$ . Deci punctele  $C$  și  $D$  sînt fixe, nu depind de  $M$ , ci doar de  $A$ ,  $B$  și  $k$  (vezi problemele 4 și 5 de la pag. 10). Avem și  $MC \perp MD$ , deci  $M$  se află pe cercul de diametru  $CD$ .

Pentru a rezolva complet problema, urmează să demonstrăm că orice punct  $M$  de pe cercul de diametru  $CD$  are proprietatea  $\frac{MA}{MB} = k$  (scrieți ipoteza și concluzia acestei părți a rezolvării). Această demonstrație întîmpină reușite mai mari decît ne așteptăm. Vom proceda prin următoarea metodă. Vom alege un punct  $M$  pe cercul de diametru  $CD$ , vom considera dreapta  $CM$  și simetricul  $B'$  al lui  $B$  față de  $CM$  (fig. I.70).

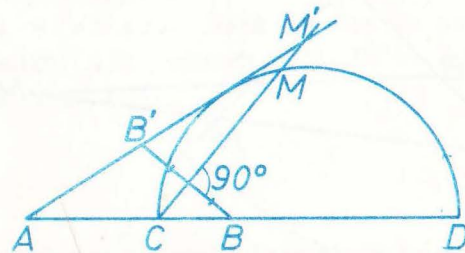


Fig. I.70

Despre punctele  $C$  și  $D$  știm că au proprietatea ce trebuie stabilită, deci presupunem că  $M$  este diferit de aceste puncte. Rezultă că  $CM$  nu este perpendiculară pe  $AB$ , deci  $B'$  nu se află pe  $AB$  și dreapta  $AB'$  taie dreapta  $AB$  într-un punct  $M'$  (acest ultim fapt rezultă din  $BC \neq CA$ , deci  $AB' \neq CM$ ).

Rezultă ușor că  $M'C$  este bisectoarea  $\sphericalangle AM'B$ , deci (teorema bisectoarei)

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{CA}{CB} = k.$$

Conform primei părți a rezolvării,  $M'$  se va afla pe cercul de diametru  $CD$ . Dar dreapta  $CM$  nu poate avea mai mult de două puncte comune cu acest cerc, deci  $M' = M$  și  $\frac{MA}{MB} = k$ , q.e.d.

*Observație.* Pentru  $k = 1$ , locul geometric din problemă este media toarea segmentului  $AB$ .

Cercurile ce apar ca locuri geometrice ale tuturor  $M$  cu  $\frac{MA}{MB} = k$ , pentru un segment dat  $AB$  și pentru diverși  $k \neq 1$ , se numesc cercurile lui Apollonios.

Problema rezolvată 2 de la pagina 9, împreună cu problema 18 de la pagina 11 arată valabilitatea următoarei teoreme.

**Teorema lui Menelaos.** Dacă o dreaptă  $d$  ce nu trece prin nici unul din vîrfurile unui triunghi  $ABC$  taie dreptele  $BC, CA, AB$  respectiv în  $M, N, P$ , atunci  $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = +1$ .

Convenim, la fel ca în cazul puterii unui punct față de un cerc, să considerăm că  $\frac{MB}{MC}$  este negativ dacă  $M$  se află în interiorul segmentului  $BC$  și pozitiv dacă  $M$  se află pe dreapta  $BC$ , dar nu în interiorul segmentului  $BC$ . Valoarea  $+1$  din enunțul teoremei spune că sînt două posibilități: două din punctele  $M, N, P$  sînt în interioarele segmentelor respective iar al treilea nu (fig. I.71) sau nici unul dintre cele trei puncte nu se află în interiorul segmentului respectiv (fig. I.72).

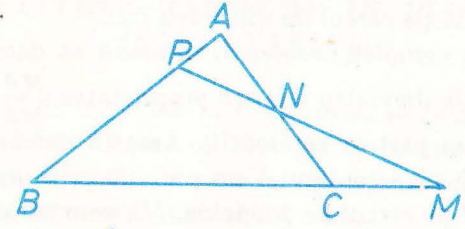


Fig. I.71

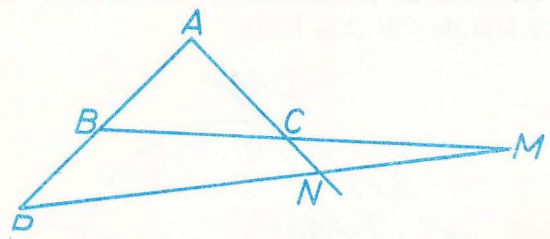


Fig. I.72

Această teoremă ne dă posibilitatea să imaginăm o metodă de a demonstra că trei puncte sînt coliniare.

Următoarea teoremă ne oferă o metodă de a demonstra că trei drepte sînt concurente.

**Teorema lui Ceva.** Dacă  $D$  este un punct nesituat pe nici una din dreptele  $AB, BC, CA$ , unde  $ABC$  este un triunghi, și dacă  $M, N, P$  sînt punctele de intersecție respective ale lui  $AD$  cu  $BC$ , lui  $BD$  cu  $CA$  și  $CD$  cu

$AB$ , atunci avem  $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = -1$  (unde facem convenția de mai sus cu privire la semnele rapoartelor ce apar) (fig. I.73).

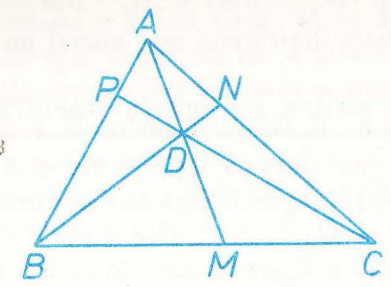


Fig. I.73

(Se poate întîmpla ca figura să arate altfel: numai unul din punctele  $M, N, P$  să se afle în interiorul segmentului respectiv)

*Demonstrație.* Teorema lui Menelaos în  $\triangle ABM$  tăiat de  $PDC$  dă  $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \frac{DM}{DA} = +1$ , iar aceeași teoremă în  $\triangle ACM$  tăiat de  $NDB$  dă  $\frac{NC}{NA} \cdot \frac{DA}{DM} \cdot \frac{BM}{BC} = +1$ .

Să înmulțim, membru cu membru, cele două egalități. În dreapta obținem evident  $+1$ , iar în stînga  $\frac{DM}{DA} \cdot \frac{DA}{DM}$  este  $+1$ ,  $\frac{BM}{CM} = \frac{BM}{MC}$ , iar  $\frac{CB}{BC} = -1$ .

Se ajunge imediat la relația dorită; mai mult, modul de redactare al demonstrației nu este influențat cu nimic de înlocuirea figurii I.73 cu o figură descrisă „în paranteza de după figura I.73“ q.e.d.

*Observație.* Dacă vom considera segmentele neorientate, atunci semnul „-“ (minus) din membrul doi al relației demonstrate dispare.

Să dăm și „rezultatul“ problemei 13 de la pagina 50 rezolvată cu date literale împreună cu demonstrația sa.

**Teorema lui Stewart.** Dacă  $M$  este un punct în interiorul laturii  $BC$  a unui triunghi  $ABC$ , atunci  $AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot MC$  (fig. I.74).

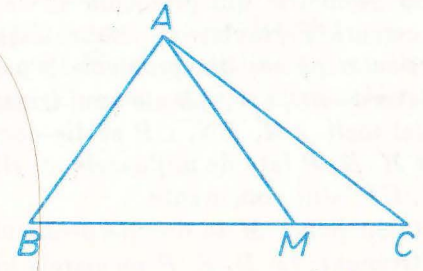


Fig. I.74

*Demonstrație.* Teorema lui Pitagora generalizată în  $\triangle ABM, \triangle ABC$ , dă  $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B$ ,  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$ .

Eliminăm pe  $\cos B$  înmulțind prima relație cu  $BC$ , și scăzând din ea pe a doua, înmulțită în prealabil cu  $BM$ . Relația ce se obține se scrie, după ce trecem termenul  $AC^2 \cdot BM$  în membrul doi:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2(BC - BM) + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM(BC - BM)$$

de unde până la relația dorită mai este numai un pas:  $BC - BM = MC$ .

## 9. Probleme pentru paragraful facultativ

1. Ce devine teorema lui Stewart cind  $M$  este mijlocul lui  $BC$ ?
2. Calculați lungimile bisectoarelor unui triunghi cunoscând lungimile laturilor sale.
3. Desenați o figură în care, în același triunghi, să se poată aplica și teorema lui Menelaos și teorema lui Ceva, două din cele trei puncte fiind aceleași în ambele aplicații. Enunțați rezultatul obținut.
4. Enunțați și demonstrați reciproca teoremei lui Menelaos.
5. Aceeași problemă pentru teorema lui Ceva.
6. Se consideră trei cercuri, ce n-au centre coliniare, și astfel încât printre ele să nu existe două care să fie interioare sau tangente interioare,  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$ . Tangentele comune exterioare ale lui  $(C_1)$  și  $(C_2)$  se întâlnesc în  $A_{12}$ ; definim asemănător punctele  $A_{23}$ ,  $A_{31}$ . Să se arate că cele trei puncte sînt coliniare.
7. Enunțați o problemă asemănătoare cu problema 6, în care să fie vorba și de tangente comune interioare.
8. Cercul înscris în triunghiul  $ABC$  atinge laturile  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  în  $M$ ,  $N$ ,  $P$  respectiv. Demonstrați că  $AM$ ,  $BN$ ,  $CP$  sînt concurente.
9. Enunțați o problemă asemănătoare cu problema 8 în care să fie vorba de un cerc tangent celor trei laturi ale unui triunghi, altul decît cel înscris.
10. Care este locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte date să fie constantă?
11. Care este locul geometric al punctelor ce au puteri egale față de două cercuri date?
12. Locul geometric din problema 11 se numește „axa radicală” a celor două cercuri. Formulați și demonstrați o teoremă care să aibă drept caz particular pe cea din problema 5 pagina 31.
13. Pe laturile  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  ale unui triunghi se consideră punctele  $M$ ,  $N$ ,  $P$  astfel încît  $AM$ ,  $BN$ ,  $CP$  să fie concurente. Fie  $M'$ ,  $N'$ ,  $P'$  simetricile lui  $M$ ,  $N$ ,  $P$  față de mijloacele lui  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Demonstrați că  $AM'$ ,  $BN'$ ,  $CP'$  sînt concurente.
14. Dintr-un punct  $M$  se duc perpendiculare pe laturile  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  ale unui triunghi; fie  $D$ ,  $E$ ,  $F$  picioarele lor. Să se demonstreze că  $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$ . Enunțați și demonstrați o reciprocă.

\* Rezultatul se numește „teorema medianelor”.

15. Determinați locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor la două puncte date  $A$  și  $B$  este constantă.

16. Se consideră un punct  $A$  și o dreaptă  $d$  ce nu trece prin el. Fie  $d'$  paralela la  $d$  ce trece prin mijlocul segmentului cu capetele în  $A$  și în piciorul perpendicularei  $a$  din  $A$  pe  $d$ . Să se demonstreze că locul geometric al punctelor egal depărtate de  $A$  și  $d$  este tot una cu locul geometric al punctelor pentru care distanța la  $a$  este medie proporțională între distanța la  $d'$  și dublul distanței de la  $A$  la  $d$ .

17. Într-un triunghi se cunosc două laturi  $a$ ,  $b$  și unghiul  $B$  opus uneia din ele. Determinați cea de a treia latură și celelalte două unghiuri. *Discuție:* în ce cazuri avem o soluție, în ce cazuri două și în ce cazuri nici una?

*Observație.* În paragraful dinainte am învățat să rezolvăm toate cele trei probleme ce ni le-am pus anul trecut cu ocazia construirii triunghiurilor. Anume: cunoscînd trei din elementele unui triunghi (nu toate unghiuri), să calculăm celelalte trei. Din problemele ce le-ați rezolvat, ați învățat să calculați lungimi și unghiuri ce apar în paralelograme, trapeze, patrulatere oarecare, cercuri.

Aplicațiile practice ale geometriei ne pun tocmai astfel de probleme. În acest paragraf ați luat cunoștință de posibilități de a continua dezvoltarea geometriei în stilul în care v-am prezentat-o. Ați văzut că se mai pot demonstra teoreme interesante, frumoase, asupra figurilor ce le cunoaștem; astfel de teoreme sînt încă multe. Enunțurile lor nu se complică mereu. Ce simplu este enunțul problemei 8, și ce dificilă, dacă nu imposibilă, apare soluția ei dacă n-am cunoaște teorema lui Ceva. Avem astfel o idee asupra resurselor de care dispune mintea noastră în acțiunea ei de cunoaștere a lumii.

În clasa a IX-a, la „Geometria în plan”, veți relua cunoștințele căpătate în clasele VI—VII la un nivel mai înalt de rigurozitate și veți face cunoștință și cu alte teoreme de geometrie.

Atunci veți stăpîni mai bine decît acum calculul algebric și veți putea rezolva ecuații de gradul 2, ceea ce vă va permite să tratați multe din problemele ce le-ați rezolvat pînă acum cu date literale.

În clasa a VIII-a veți folosi cunoștințele din clasele VI—VII pentru studiul figurilor în spațiu și pentru calculul elementelor lor.

## CAPITOLUL 2

# ARII

### INTRODUCERE

Noțiunea de arie era bine cunoscută, încă dinainte de a fi început, în clasa a VI-a, studiul geometriei. Astfel, în figura II.1, intuiția ne îndeamnă să spunem că aria  $ABC$  este mai mare decât aria  $DEF$ , în ciuda faptului că  $DEF$  este mai „lungă” decât  $ABC$ . Există o situație geometrică în care ariile se adună, asemănătoare cu cele în care se adună lungimile segmentelor sau măsurile unghiurilor: în fig. II.1 avem aria  $GHIJK = \text{aria } GHI + \text{aria } GIK + \text{aria } IJK$ .

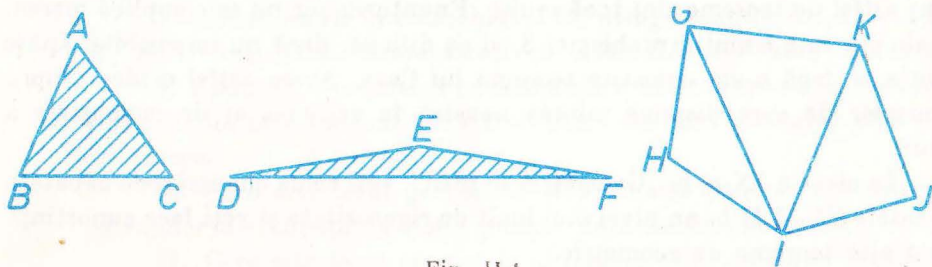


Fig. II.1

Dar noi nu am luat în considerare noțiunea de arie când am descris, în partea 1 a manualului pentru clasa a VI-a, noțiunile de bază ale geometriei plane. Este cazul să privim aceasta ca o lipsă? Nu, deoarece, astfel de noțiuni, sugerate de experiența noastră și nu de logica dezvoltării geometriei, mai pot apărea și chiar vor apărea în capitolul 3.

Ne aflăm deci în fața unei situații noi. Intuiția noastră pune în evidență o noțiune nouă și unele proprietăți ale ei. Noi „simțim” că aceasta este o noțiune de geometrie. Se pune problema să exprimăm toate acestea în limbajul geometriei noastre, cu alte cuvinte să definim această noțiune și să demonstrăm proprietățile descoperite de noi înainte.

Cum în clasele precedente ați mai învățat cum se calculează ariile, noi vom merge aci „drept la țintă”, fără a ignora cunoștințele de până acum asupra ariilor (evident însă, fără a ne baza pe ele în demonstrații).

*Observație.* Când vorbim de aria unui triunghi, ne gândim de fapt nu la aria figurii formată de virfurile triunghiului, ci la aria „interiorului triunghiului”, înțeles drept mulțime a tuturor punctelor care se află de aceeași parte a oricăreia din laturile triunghiului ca și virful opus (fig. II.2).

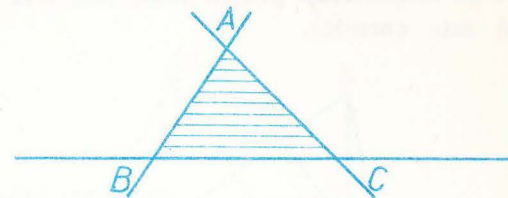


Fig. II. 2

Dacă privim schema triunghi  $\rightarrow$  interiorul său  $\rightarrow$  aria, observăm că fiecărui triunghi, chiar gândit ca o figură formată numai din trei puncte (virfurile) îi corespunde o arie. Un astfel de mod de a gândi scurtează explicația, evitând repetarea inutilă a cuvântului „interior”.

### Aria unui triunghi

**Definiție.** Prin aria unui triunghi înțelegem jumătate din produsul dintre o latură a triunghiului și înălțimea corespunzătoare acelei laturi. Cu alte cuvinte aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul dintre „bază” și „înălțime”.

Aria triunghiului  $ABC$  o vom nota  $S_{ABC}$ .

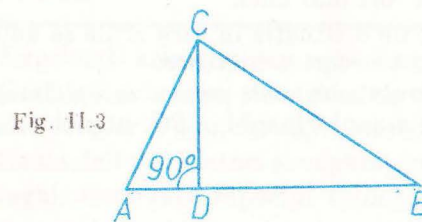


Fig. II.3

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2}$$

Avem trei posibilități de a calcula aria unui triunghi dat, corespunzătoare celor trei laturi ale sale, și nu știm dinainte că toate trei conduc la același rezultat. Ar fi trebuit deci să demonstrăm, înainte de a da definiția de mai sus, o teoremă, al cărei enunț îl puteți ușor deduce (vezi chiar problema 9, pag. 22).

Teorema asupra puterii punctului apăruse ca o teoremă importantă; din ea am dedus teorema lui Pitagora. Teorema ce va trebui s-o demonstrăm aici, deși „de neînlocuit” în acest paragraf, nu apare ca o teoremă atât de importantă în alte capitole încât să merite să fie pusă în rînd cu teorema

lui Thales, cu cea a lui Pitagora etc... O astfel de teoremă se numește „lemă“, deci prin leună vom înțelege tot o teoremă, însă care are numai un rol ajutător.

Istoria matematicii cunoaște însă exemple în care o „umilă leună“ a sfârșit prin a deveni mai celebră decât teoreme demonstrate pe baza ei. Un astfel de exemplu îl oferă leună următoare:

**L e m ă.** Într-un triunghi, produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare ei este același pentru toate cele trei laturi (altfel spus, definiția precedentă este corectă).

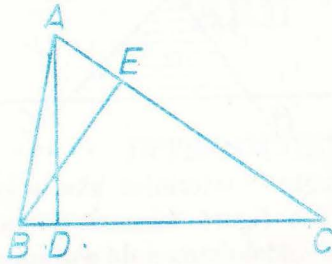


Fig. II.4

*Ipoteza*

$AD \perp BC, BE \perp AC$  (fig. II.4).

*Demonstrație.*  $\triangle ADC \sim \triangle BCE$ , conform cazului 2 de asemănare,

deoarece  $\sphericalangle ADC = 90^\circ = \sphericalangle BEC$  și  $\sphericalangle C = \sphericalangle C$ . Rezultă  $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}$ , de unde obținem, scriind că produsul mezilor este egal cu al extremilor, relația din concluzie.

*Observație.* Aria unui triunghi depinde de unitatea de măsură aleasă pentru lungimi. Dacă înlocuim această unitate cu alta, de  $k$  ori mai lungă decât prima, atunci lungimile tuturor segmentelor se împart cu  $k$ , iar toate ariile triunghiurilor devin de  $k^2$  ori mai mici.

În introducerea am vorbit de o situație în care ariile se adună. Un prim fapt de acest fel este stabilit în teorema următoare:

**T e o r e m ă** (proprietate de aditivitate pentru arii). Dacă  $D$  este un punct din interiorul laturii  $BC$  a unui triunghi  $ABC$ , atunci  $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$  (fig. II.5).

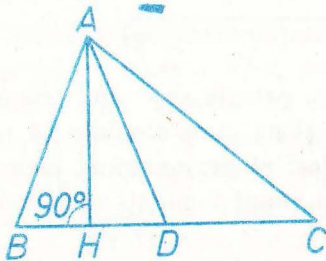


Fig. II.5

*Demonstrație.* Să considerăm înălțimea  $AH$ . Avem  $S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{(BD + DC)AH}{2} = \frac{BD \cdot AH}{2} + \frac{DC \cdot AH}{2} = S_{ABD} + S_{ACD}$ , q.e.d.

*Observație.* Enunțul „proprietății generale de aditivitate“ este complicat și nu-l vom da. În problemele 6, 7 de mai jos, vom indica alte expresii ale acestei proprietăți; în paragraful următor vor apărea, de asemenea, alte proprietăți cărora li s'e potrivește acest titlu.

În încheierea acestui paragraf, să arătăm cum teoremele demonstrate aici, deși simple, permit scurtarea rezolvărilor unor probleme.

**Problema rezolvată.** Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct din interiorul bazei unui triunghi isoscel la cele două laturi congruente este constantă.

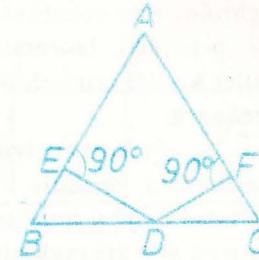


Fig. II.6

*Ipoteza*

$DE \perp AB, DF \perp AC, AB \equiv AC, DE + DF = \dots$  (constant).

*Concluzia*

*Demonstrație.* Aceasta este una din problemele „de cl. a VI-a“. Acum putem face demonstrația astfel. Să scriem, conform teoremei de aditivitate,  $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$ , deci  $S_{ABC} = \frac{AB \cdot DE}{2} + \frac{AC \cdot DF}{2} = \frac{AB(DE + DF)}{2}$ . Obținem  $DE + DF = \frac{2S_{ABC}}{AB}$ , deci este aceeași pentru toate pozițiile lui  $D$  în interiorul segmentului  $BC$ .

## 10. Probleme\*

1. Exprimați aria unui triunghi dreptunghic.
2. Calculați aria unui triunghi dreptunghic isoscel de catetă  $a$ .
3. Calculați aria unui triunghi echilateral de latură  $a$ .
4. Cunoscând două laturi și unghiul cuprins între ele, exprimați aria unui triunghi. Care este raportul ariilor a două triunghiuri ce au un unghi congruent.
5. Calculați aria unui triunghi ale cărui laturi au lungimile sale 13, 20 și 21.
6. Pe laturile  $AB, AC$  ale unui triunghi se consideră punctele  $D, E$ . Arătați că  $S_{ABC} = S_{ADE} + S_{BDE} + S_{BCE}$ .
7. În interiorul unui triunghi  $ABC$  se consideră un punct  $M$ . Arătați că  $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{BCM} + S_{CAM}$ .
8. Într-un paralelogram  $ABCD$  avem  $S_{ABC} = S_{DBC}$ .

\* Problemele 12 și 14 sînt facultative.

9. Raportul distanțelor de la mijlocul unei laturi a unui triunghi la celelalte două laturi este egal cu inversul raportului laturilor respective.
10. Demonstrați, prin arii, teorema bisectoarei (pag. 52).
11. Într-un triunghi  $ABC$ , simetrica mediane  $AD$  față de bisectoarea  $AE$  taie  $BC$  în  $F$ . Determinați raportul  $\frac{FB}{FC}$ .
12. Simetricile medianelor unui triunghi față de bisectoarele vîrfurilor respective sînt concurente.
13. Suma distanțelor unui punct din interiorul unui triunghi echilateral la laturile triunghiului este constantă.
14. Demonstrați, prin arii, teorema lui Ceva (pag. 54-55).
15. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.
16. Raza cîrcului înscris într-un triunghi este cîtul dintre dublul ariei triunghiului și perimetrul acestuia.
17. O paralelă la latura  $BC$  a unui triunghi  $ABC$  taie laturile  $AB$ ,  $AC$  în  $M$ ,  $N$ . Să se arate că aria triunghiului  $AMN$  este medie proporțională între ariile triunghiurilor  $ABC$  și  $AMN$ .
18. Ariile a două triunghiuri congruente sînt egale.
19. Care este locul geometric al vîrfului  $A$  al unui triunghi  $ABC$ , ce are vîrfurile  $B$ ,  $C$  fixe iar aria constantă?

## ARIA UNUI PATRULATER

Înainte de a o defini, avem nevoie de o lemă, la fel ca în paragraful precedent. Anume:

**Lemă.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Atunci  $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{BCD} + S_{ABD}$  (fig. II.7).

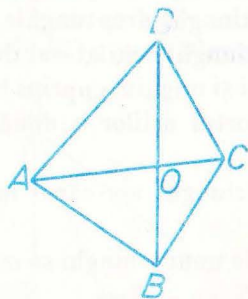


Fig. II.7

**Demonstrație.** Să notăm cu  $O$  intersecția diagonalelor patrulaterului. Conform proprietății de aditivitate avem  $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{DOA} + S_{COD} = (S_{BOC} + S_{COD}) + (S_{AOB} + S_{DOA}) = S_{BCD} + S_{ABD}$ , q.e.d.

**Definiție.** Prin aria unui patrulater convex  $ABCD$  înțelegem numărul  $S_{ABC} + S_{ADC}$  (vezi fig. II. 7), notat cu  $S_{ABCD}$ .

**Observație.** Problema corectitudinii acestei definiții, rezolvată prin lema precedentă, apare datorită faptului că am convenit să considerăm patrulaterul  $ABCD$  drept, tot una cu  $BCDA$  etc.

Înainte de a enunța teorema privind aria unui paralelogram, să reamintim că dacă avem două drepte paralele  $a$  și  $b$  (fig. II.8), atunci distanța de la un punct  $A$  de pe  $a$  la dreapta  $b$  este aceeași pentru toate punctele  $A \in a$ ; ea se numește „distanța de la  $a$  la  $b$ ” și este tot una cu distanța de la  $b$  la  $a$ .

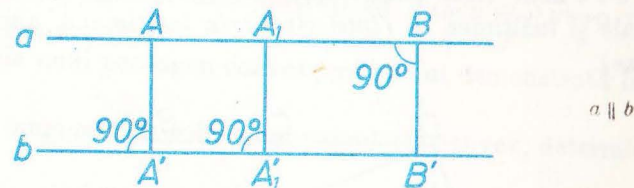


Fig. II.8

Vom numi înălțime corespunzătoare unei laturi a unui paralelogram distanța între acea latură și latura opusă.

**Teoremă.** Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre o latură a sa și înălțimea corespunzătoare.

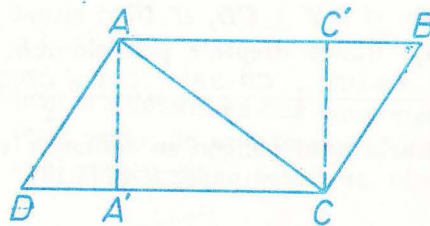


Fig. II.9

**Ipoteza**

$AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  
 $AA' \perp CD$ ,  $CC' \perp AB$ .

**Concluzia**

$$S_{ABCD} = CD \cdot AA'$$

**Demonstrație.** Avem  $AA' \equiv CC'$  conform proprietăților distanței între drepte paralele  $AB$ ,  $CD$  menționate mai sus și  $AB \equiv CD$  (opuse în paralelogram). Obținem  $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{AB \cdot CC'}{2} + \frac{CD \cdot AA'}{2} = CD \cdot AA'$ .

**Consecința 1.** Aria unui dreptunghi este egală cu produsul dintre lungimea și lățimea sa.

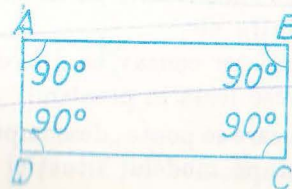
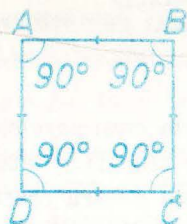


Fig. II.10

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD$$



**Consecința 2.** Aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii sale.



$$S_{ABCD} = AB^2. \text{ Fig. II.11}$$

**Teoremă.** Aria unui trapez este egală cu produsul dintre semisuma bazelor sale și înălțimea sa (înțelegând prin înălțime a unui trapez distanța dintre baze).

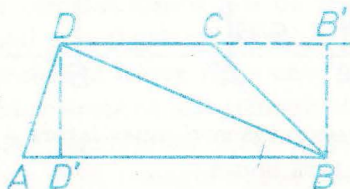


Fig. II.12

*Ipoteza*

$$AB \parallel CD, DD' \perp AB.$$

*Concluzia*

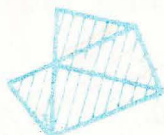
$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DD'.$$

*Demonstrație.* Să ducem și  $BB' \perp CD$ ,  $B'$  fiind situat pe dreapta  $CD$ . Avem  $BB' \equiv DD'$  (distanța dintre dreptele paralele  $AB, CD$ ). Obținem

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{AB \cdot DD'}{2} + \frac{CD \cdot BB'}{2} = \frac{(AB + CD)DD'}{2} \text{ etc.}$$

*Observație.* În general aria unui poligon se definește ca suma ariilor unor triunghiuri în care acesta „se descompune“ (fig. II.13).

Fig. II.13



## 11. Probleme

1. Aria unui pătrat este de  $5 \text{ cm}^2$ . Care este lungimea laturii sale?
2. Exprimați aria unui romb în funcție de lungimile diagonalelor sale.
3. Cunoscând lungimile celor două diagonale ale unui patrulater convex cu diagonalele perpendiculare, să se afle aria sa.
4. Exprimați aria unui patrulater convex în funcție de lungimile diagonalelor și de unghiul dintre ele.
5. Definiți aria unui patrulater concav ca diferența ariilor a două triunghiuri. Aveți nevoie de vreo lemă în prealabil?
6. Indicați trei moduri în care se poate „descompune“ un patrulater concav în două triunghiuri, după modelul situației din definiția ariei

unui patrulater convex și demonstrați că în fiecare din aceste cazuri suma ariilor celor două triunghiuri este egală cu aria patrulaterului definită în problema 5.

7. Fie  $ABCD$  un patrulater convex,  $E$  un punct interior laturii  $AB$ . Arătați că  $S_{ABCD} = S_{ADE} + S_{EBCD}$ .

8. Fie  $ABCD$  un patrulater convex,  $M$  și  $N$  două puncte interioare respectiv laturilor  $AB, CD$ . Arătați că  $S_{ABCD} = S_{AMND} + S_{BMNC}$ .

9. Fie  $M, N, P, Q$  puncte interioare laturilor  $AB, BC, CD, DA$  ale unui patrulater convex  $ABCD$ . Demonstrați că  $S_{ABCD} = S_{MNPQ} + S_{DMN} + S_{CNP} + S_{DPQ} + S_{AQM}$ .

10. Definiți aria unui pentagon convex; va trebui demonstrată în prealabil o lemă.

11. Cunoscând lungimile laturilor unui patrulater convex, determinați aria sa.

12. Aplicație practică. Ce trebuie măsurat pentru a determina ariile din figura II.14?

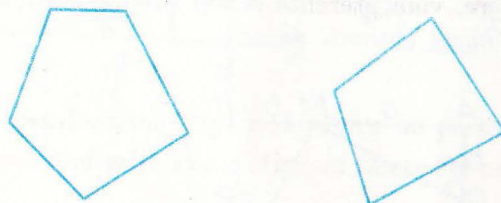


Fig. II.14

13. Cum faceți pentru a determina aria unui teren care are în interiorul său o clădire (este vorba de aria terenului „inclusiv“ clădirea), clădire de o formă mai complicată?

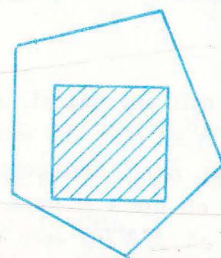


Fig. II.15

14. Cum faceți pentru a determina aria unui teren în care un vîrf este inaccesibil?

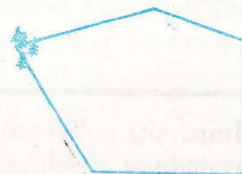


Fig. II.16

Arătați să rezolvați problemele de tipul 12–14 efectiv pe teren.

15. Se consideră mijloacele  $M, N, P, Q$  ale laturilor  $AB, BC, CD, DA$  ale unui paralelogram. Dreptele  $AN, BP, CQ, DM$  determină un paralelogram. Care este raportul dintre aria acestui paralelogram și cea a celui inițial?

16. Raportul dintre baza mare și baza mică a unui trapez este  $k$ . Se duc diagonalele și se prelungesc cele două laturi neparalele pînă cînd se întîlnesc. Să se afle raportul dintre aria fiecărui triunghi format și aria trapezului. Puneți în evidență cele două triunghiuri de aceeași arie.

17. Aflați unghiurile unui romb a cărui latură este medie proporțională între diagonalele sale.

18. Se dă un patrulater  $ABCD$  și se cere să se construiască un triunghi  $ADE$  a cărui arie să fie egală cu aria patrulaterului.

19. Dacă segmentul ce unește mijloacele a două laturi opuse ale unui patrulater convex împarte patrulaterul în două patrulatere de aceeași arie, atunci patrulaterul inițial este un trapez sau un paralelogram.

20. Construiți un triunghi  $ABX$  care are aceeași arie ca și un patrulater convex dat  $ABCD$ .

În încheiere, vom prezenta *modul cum se poate stabili teorema lui Pitagora cu ajutorul noțiunii de arie*.

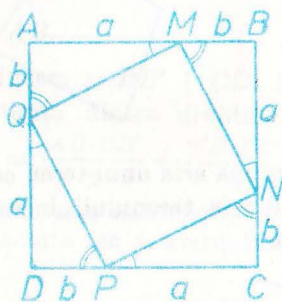


Fig. II.17

În figura II.17  $ABCD$  este un pătrat,  $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$ ,  $AM = a$ , iar  $AQ \equiv BM \equiv CN \equiv DP$ ,  $AQ = b$ . Din triunghiurile congruente  $AMQ, BNM, CPN, DQP$  deducem congruența unghiurilor marcate cu o linie, respectiv cu două și apoi, pe baza teoremei sumei unghiurilor într-un triunghi, că  $MNPQ$  este un dreptunghi. Din congruența aceluiași triunghiuri deducem că  $MNPQ$  este un pătrat. Scriind (vezi problema 9)  $S_{ABCD} = S_{MNPQ} + S_{AMQ} + \dots$ , deducem că  $(a+b)^2 = MN^2 + 4 \frac{ab}{2}$ , deci  $MN^2 = a^2 + b^2$ , ceea ce este tocmai teorema lui Pitagora.

**Problemă distractivă.** Împărțiți poligonul din figura II.18 în cinci poligoane astfel încît, aranjîndu-le altfel, să se formeze din ele un pătrat. Rezolvare. Aria poligonului este 3, deci latura pătratului ce se va forma

va fi  $\sqrt{3}$ . Dacă examinăm mai atent figura, găsim în ea segmente de lungime  $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ , dar nu de  $\sqrt{3}$ .

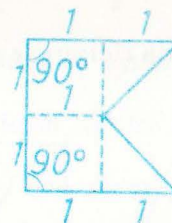


Fig. II.18

Să transformăm întîi poligonul într-un dreptunghi, de formă mai apropiată de cea pătrată.

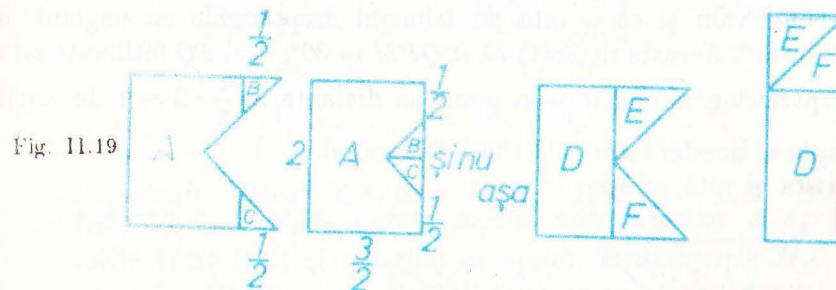


Fig. II.19

Apoi să transformăm dreptunghiul într-un paralelogram, ce are una din laturi  $\sqrt{3}$ , dar avînd grijă să nu atingem tăieturile existente.

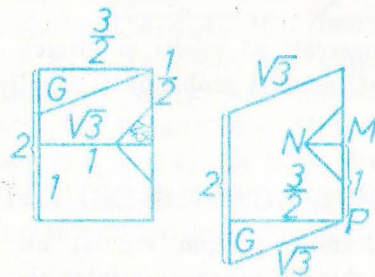


Fig. II.20

Latura din stînga a triunghiului  $G$  se calculează prin teorema lui Pitagora, găsindu-se  $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ , de unde sîntem siguri că tăietura ce separă pe  $G$  nu le întîlnește pe cele dinainte.

În fine, cum aria paralelogramului obținut este tot 3, ca și a figurii inițiale, rezultă că înălțimea sa corespunzătoare acestei laturi va fi  $\sqrt{3}$  și, tăindu-l după această înălțime, vom putea compune pătratul dorit (vezi fig. II.21). Dar problema cere să tăiem poligonul în 5, iar tăietura după acea înălțime riscă să conducă la 6 părți, cu excepția cazului cînd am face-o începînd din colțul dreapta jos  $P$  al paralelogramului (fig. II.21).

Nu cumva atingem cu această tăietură „bucățile mici”? Un calcul ne arată că nu! Distanța  $MN$  este de  $\frac{1}{2}$  — vezi fig. II.19 — iar înălțimea din  $P$  taie dreapta  $MN$  într-un punct  $Q$  așa încît  $\triangle PMQ$  este asemenea cu  $G$  și

această asemănare obținem  $\frac{MQ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{MP}{\frac{1}{2}}$  de unde  $MQ = \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}$  (inegalitatea

verifică prin calcul direct sau prin ridicare la pătrat:  $(\frac{3}{9} > \frac{1}{4})$ .

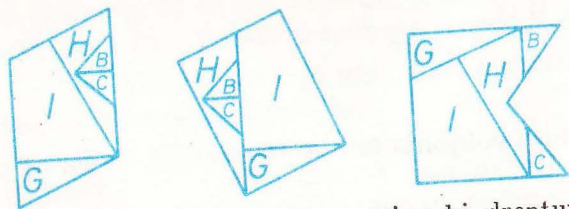


Fig. II.21

Să observăm și că  $G$  este un triunghi dreptunghic cu unghiul „din capta” de  $30^\circ$ . Aceasta ne arată că  $\sphericalangle QPM = 30^\circ$ , deci  $PQ$  întâlnește latura usă a paralelogramului într-un punct la distanța de  $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$  de capătul

dreapta al acestei laturi, deci în interiorul ei.

Există și altă soluție:

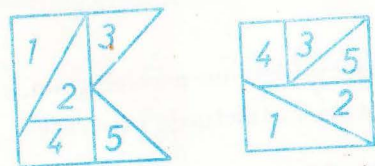


Fig. II.22

Explicați-o și încercați să găsiți și altele!

Eventual încercați aceeași problemă și în alte poligoane: un paralelogram, un triunghi etc.

## POLIGOANE REGULATE

**Definiție.** Numim poligon regulat un poligon cu toate laturile congruente și toate unghiurile congruente între ele.

Dacă printr-un procedeu oarecare împărțim un cerc în  $n$  ( $n \geq 3$ ) arce egale și ducem corzile care subîntind pe fiecare din ele, unind punctele de diviziune succesive, obținem un astfel de poligon.

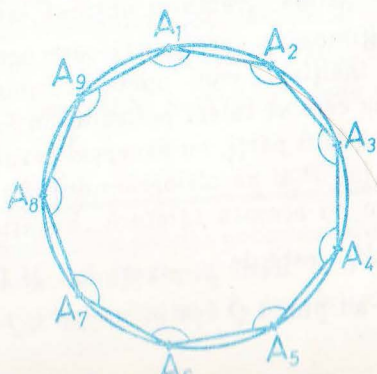


Fig. II.23

Unghiurile acestui poligon sînt congruente fiind înscrise în arce de măsuri egale cu  $\frac{360^\circ}{n} \cdot (n-2)$  iar laturile sînt congruente subîntinzînd arce de aceeași măsură:  $\frac{360^\circ}{n}$ .

Am pornit prin a constata că astfel de poligoane regulate există. Să demonstrăm următoarea:

**Teoremă:** Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.

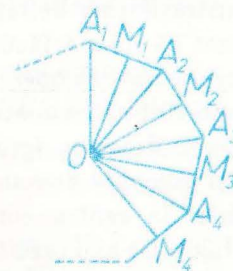


Fig. II.24

*Demonstrație.* Dacă  $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle A_3 \equiv \dots \equiv \sphericalangle A_n$  și laturile  $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4 \dots \equiv A_nA_1$ , ducem mediatoarele laturilor  $A_1A_2$  și  $A_2A_3$  (vezi figurile II.23 II.24 și notațiile de acolo). Mediatoarele  $M_1O$  și  $M_2O$  se întîlnesc în  $O$ . (Dacă nu s-ar întîlni, ar însemna că sînt paralele deci că  $\sphericalangle A_1A_2A_3 = 180^\circ$  ceea ce este absurd). Triunghiurile  $\triangle M_1A_2O \equiv \triangle M_2A_2O$ , ( $M_1$  și  $M_2$  fiind mijloacele laturilor  $A_1A_2$  respectiv  $A_2A_3$ ). Rezultă că  $OA_2$  este bisectoarea lui  $\sphericalangle A_1A_2A_3$ .  $M_2O$  fiind mediatoare, segmentele  $OA_2 = OA_3$ . Ducem  $OM_3 \perp A_3A_4$ . Triunghiurile  $\triangle OA_3M_2 \equiv \triangle OA_3M_3$  pentru că ipotenuza  $OA_3$  este aceeași și  $\sphericalangle M_2A_3O$  este jumătate din unghiul poligonului, deci congruent cu  $\sphericalangle OA_3M_3$ . Rezultă că și  $M_2A_3 \equiv A_3M_3$ , deci  $OM_3$  este mediatorea lui  $A_3A_4$  deci,  $OA_3 \equiv OA_4$ . La fel se arată că  $OA_4 \equiv OA_5$  etc. Deci toate punctele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt egal depărtate de  $O$ . Teorema este demonstrată. Acest punct  $O$  se va numi centrul poligonului regulat.

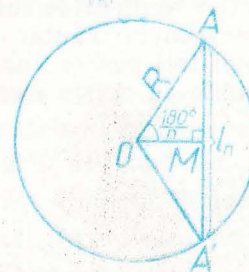


Fig. II.25

Vom nota latura poligonului regulat cu  $n$  laturi cu  $l_n$  (fig. II.25). Știind că un unghi la centru care subîntinde o latură de poligon regulat are  $\frac{360^\circ}{n}$  și cunoscînd raza  $R$  a cercului circumscris poligonului, putem calcula  $AM$  (unde

$M$  este mijlocul laturii  $AA'$ ).  $AM = R \sin \frac{180^\circ}{n}$  și deci  $l_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ . Segmentul  $OM$  dus din centru, perpendicular pe latură în punctul  $M$  se va numi *apotema* poligonului regulat. O vom nota cu  $a_n$ , și  $a_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}$ .

Dacă lucrurile par simple presupunînd deja făcută împărțirea unui cerc în arce egale, există totuși anumite dificultăți de construcție. De pildă s-a demonstrat că împărțirea unui cerc în 7 arce egale nu se poate face cu rigla și compasul (această demonstrație ține de fapt de algebră și nu de geometrie). Fiți atenți: Nu am afirmat că nu s-a făcut pînă în prezent. Am afirmat că este dovedită imposibilitatea acestei operații. Construcțiile pe care le găsiți prin anumite cărți de desen sînt aproximative, conținînd și pe gradul de imperfecțiune a obiectelor cu care desenăm (grosimea minei creionului de pildă). Ele nu constituie procedee exacte ci numai utile.

Vom găsi că unghiul la centru corespunzător laturii unui hexagon regulat este de  $60^\circ$  (fig. II.26). De aici rezultă un procedeu simplu de construcție a sa. Toate triunghiurile avînd un vîrf în centrul hexagonului și ca latură

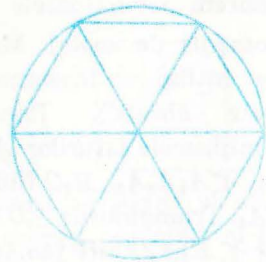


Fig. II.26

opusă lui, laturile hexagonului, sînt triunghiuri echilaterale. Deci latura măsoară cît raza:  $l_6 = R$ . Împărțim un cerc în 6 părți egale luînd un punct  $A$  pe cerc drept centru și cu o „deschidere“ a compasului cît  $R$ , trasăm  $B$  și  $F$  (fig. II.27). Mutînd apoi succesiv centrul cercului obținem și celelalte puncte de diviziune, vîrfurile hexagonului căutat. Observăm că este suficient să găsim cu compasul numai trei puncte consecutive  $A, B, F$ , și pe celelalte le aflăm ducînd diametrele cu aceste extremități. Apotema  $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ .

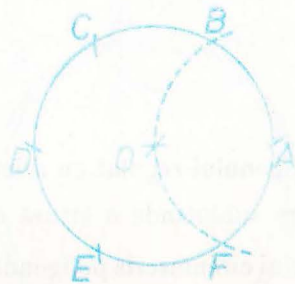


Fig. II.27

Dacă unim din două în două vîrfurile unui hexagon, de pildă  $A, C, E$ , obținem un triunghi echilateral. Calculînd din formulele laturilor și apotemelor, obținem  $L_3 = R\sqrt{3}$  și  $a_3 = \frac{R}{2}$ .

La pătrat (poligon regulat cu 4 laturi), unghiul la centru corespunzător arce de  $90^\circ$ . Aplicînd formulele obținem  $l_4 = R\sqrt{2}$ ,  $a_4 = \frac{R}{2}$ .

### „Poligoane“ regulate stelate

Dacă împărțim cercul în cinci arce egale și unim punctele de diviziune din două în două, segmentele  $AC, CE, EB, BD, DA$  vor fi laturile unui „poligon“ regulat de un tip anumit: Laturile lui se intersectează și în interiorul cercului. Acest „poligon“ se numește stelat (fig. II.28).



Fig. II.28

(El este un poligon regulat concav.)

Atunci cînd am făcut afirmația că orice poligon regulat are vîrfurile pe cerc, demonstrația de mai sus era valabilă și pentru „poligoane“ stelate: nu s-a întrebuintat nicăieri în demonstrație faptul că poligonul ar fi convex. Trebuie numai să considerăm laturile complete, nu porțiuni din ele, cu vîrfurile lui, extremitățile laturilor, așezate pe cerc.

O primă constatare:

Presupunem că un cerc a fost împărțit într-un număr par de arce egale și ducem ca laturi coardele sărînd peste cîte un punct de diviziune. Obținem un poligon regulat cu un număr de laturi de două ori mai mic. De pildă unind vîrfurile unui hexagon regulat din două în două, obținem un triunghi echilateral. Se pune deci problema „simplificării“ cu un factor comun al numărului de diviziuni în care am împărțit cercul și al „pașilor“-arcuri pe care „i sărîm“ cînd ducem corzile-laturi.

Să presupunem că am împărțit un cerc în 14 arce egale. Facem un tabel în care apare ca fracție ireductibilă raportul dintre numărul de arce inițiale și al „pașilor sărîți“. În funcție de acesta vom preciza natura poligo-

nului obținut. Notăm cu  $n$  numărul de diviziuni inițiale, cu  $k$  „pașii” (arcele subînținse de o coardă) și cu  $f$  fracția ireductibilă obținută din simplificarea raportului  $n/k$ .

	I	II	III	IV	V	VI	VII
$n$	14	14	14	14	14	14	14
$k$	1	2	3	4	5	6	7
$f$	14	7	$\frac{14}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{7}{3}$	
NATURA POLIGONULUI	POLIGON CONVEX CU 14 LATURI	HEPTAGON (7 LATURI) CONVEX	POLIGON STELAT CU 14 LATURI	HEPTAGON STELAT	POLIGON STELAT CU 14 LATURI	HEPTAGON STELAT	NU ESTE POLIGON

Am oprit aici tabelul. Dacă  $k = 8$ , atunci  $n - k = 6$  și este ca și cum am fi început să socotim de la punctul inițial pe cerc în celălalt sens. Dacă în loc de 14 am fi avut un număr impar de diviziuni inițiale, de exemplu  $2p + 1$  ne oprim la  $k = p$ ; de exemplu la  $n = 17$  ne oprim la  $k = 8$ .

Altă constatare: dacă fracția ireductibilă este un număr natural, poligonul este convex. Dacă numitorul lui  $f$  nu este 1 atunci poligonul este stelat și anume steaua are atâtea „colțuri” cât arată numărătorul.

Deci nu toate poligoanele stelate cu același număr de colțuri sînt „asemenea”. Heptagonul din coloana a IV-a diferă de cel din coloana a VI-a

### Tabel de rezultate

$$l_3 = R\sqrt{3}$$

$$l_4 = R\sqrt{2}$$

$$l_6 = R$$

$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$a_3 = \frac{R}{2}$$

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

$$a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Tabelul ar deveni mai ușor de reținut dacă am adăuga la  $a_3$  și la  $l_6$  cite un factor  $\sqrt{1}$  pe lângă  $R$ ; ultimele două linii din tabel nu trebuie memorate.

## 12. Probleme

1. În triunghiul echilateral  $ABC$  de latură  $a$  (fig. II.29) se iau punctele  $N, M \in AB, N', P' \in BC, M', P \in AC$ , astfel ca  $MM' \parallel BC, NN' \parallel AC$  și  $PP' \parallel AB$ .

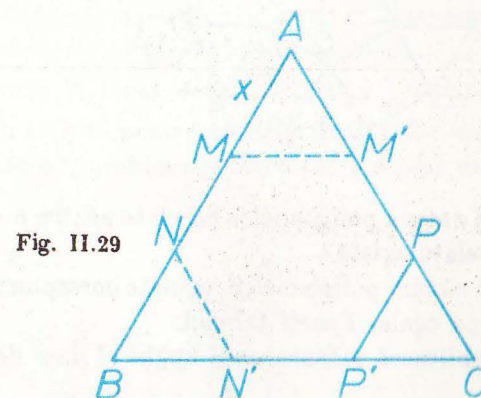


Fig. II.29

Determinați  $x$  în funcție de  $a$  astfel ca hexagonul  $MM'PP'N'N$  să fie regulat.

2. Pătratul din figura II.30, de latură  $a$  i se „taie colțurile” în așa fel încît să „rămînă” un octogon regulat. Să se calculeze latura  $x$  a octogonului în funcție de latura  $a$  a pătratului (fig. II.30).

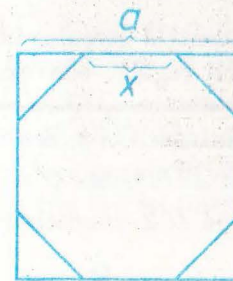


Fig. II.30

3. Cunoscînd  $l_n$  și  $R$ , calculați  $a_n$ .

4. Folosind pătratul înscris în cerc de rază  $R$ , calculați latura octogonului convex înscris în cerc în funcție de  $R$ .

5. Pe laturile hexagonului regulat  $ABCDEF$  se construiesc în afară pătrate, și în virfurile hexagonului, cu două laturi ale acestor pătrate

ca laturi, triunghiuri echilaterale de tipul lui  $BHI$ . Să se precizeze ce fel de poligon este  $GHIJKLMNOPS$  (fig. II.31).

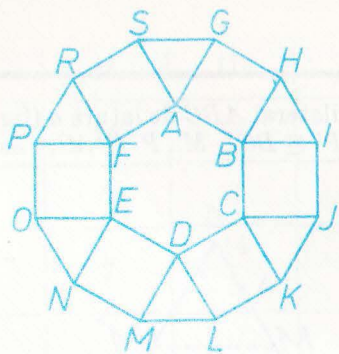


Fig. II.31

6. Precizați natura poligoanelor regulate pentru  $n = 7$ . Cite „tipuri“ de heptagoane stelate există?

7. Precizați natura poligoanelor regulate corespunzătoare împărțirii cercului în 21 arce egale. Faceți tabelul.

8. Să se stabilească măsura unui unghi al unui dodecagon regulat convex ( $n = 12$ ).

9. Dacă un poligon are toate laturile congruente este oare regulat?

10. Dacă un poligon are toate unghiurile congruente este oare regulat?

11. Găsiți numărul diagonalelor unui octogon regulat convex. Era necesar să precizăm că poligonul este regulat?

12. Să se demonstreze că în orice poligon regulat convex se poate inscrie un cerc, adică se poate construi un cerc tangent la toate laturile sale.

Să se arate că centrul cercului înscris coincide cu cel al cercului circumscris poligonului regulat convex.

*O problemă cu enunț deosebit. Să punem întâi problema construirii cu rigla și compasul a unui segment de lungime  $\sqrt{n}$  unde  $n$  este orice număr natural.*

Știm că construim pe  $\sqrt{2}$  cunoscând segmentul unitate (fig. II.32).

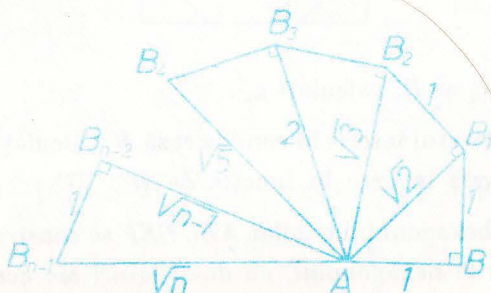


Fig. II.32

„SPIRALA“ LUI ARHIMEDE. Pe segmentul  $AB = 1$  ducem perpendiculara  $BB_1 = 1$ . Segmentul  $AB_1 = \sqrt{2}$ . Pe  $AB_1$  ducem perpendiculara  $B_1B_2 = 1$  și continuăm cu același procedeu:  $B_2B_3 \perp AB_2$  ( $B_2B_3 = 1$ ) etc. Din teorema lui Pitagora rezultă  $AB_2 = \sqrt{3}$ ,  $AB_3 = \sqrt{4} = 2$ ,  $AB_4 = \sqrt{5}$  etc. Presupunând construit segmentul  $AB_{n-2} = \sqrt{n-1}$ , construim  $AB_{n-1} = \sqrt{n}$ . Procedeu duce la construirea lui  $\sqrt{n}$  prin „recurență“, adică folosindu-ne de construcția prealabilă a segmentelor  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n-1}$ .

*Problemă:\** Dându-se un cerc de centru  $O$  cunoscut, să se găsească numai cu compasul vârful unui pătrat înscris în el.

Dacă reușim, raza  $R$  fiind dată, să putem „cuprinde“ în compas un segment de  $R\sqrt{2}$ , am reușit construcția (fig. II.33). Ca în orice problemă de construcție, să considerăm problema rezolvată: pornind dintr-un punct arbi-

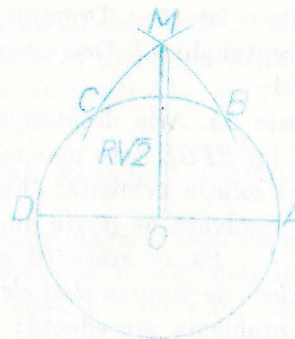


Fig. II.33

triu  $A$ , considerăm virfurile consecutive ale hexagonului regulat înscris în cerc  $B, C, D$ . Deci segmentul  $AC = R\sqrt{3}$ . Cu o deschidere de compas cât  $AC$  și centrul în  $A$  și apoi în  $D$ , trasăm două arce de cerc care se taie în  $M$ . Considerind triunghiul dreptunghic  $AMO$ , segmentul  $OM = R\sqrt{2}$ . Deci construim întâi virfurile trapezului  $A, B, C, D$ , apoi cu „deschiderea“  $AC$  și centrele  $A$  și  $D$  trasăm arcele de cerc care se taie în  $M$ , „prindem“ în compas distanța  $OM$  și o „purtăm“ pe cerc de trei ori. Obținem astfel virfurile pătratului căutat.

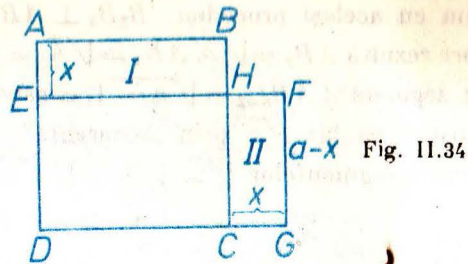
*Două probleme rezolvate 1. Problema rezolvată. Să se arate că dacă două numere pozitive au suma constantă, produsul lor este maxim când ele sînt egale.*

Vom încerca o soluție geometrică a acestei probleme. Pentru aceasta putem să o formulăm și în felul următor:

*Să se demonstreze că dintre toate dreptunghiurile cu perimetru constant, aria cea mai mare o are pătratul.*

\* Problemă dată la etapa pe municipiul București a Olimpiadei din 1978.

lungimea  $DG = a + x$  și lățimea  $ED = a - x$  (fig. II.34).



Evident ambele au același perimetru. Cu notațiile din figură, ca comparăm aria pătratului  $ABCD$  cu cea a dreptunghiului  $DEFG$  revine la preciza care din ariile dreptunghiurilor  $ABHE$  și  $HFGC$  este mai mare. Ambele dreptunghiuri au câte o latură  $x$ . Dreptunghiul II are cealaltă latură  $x$  mai mică decât o are dreptunghiul I. Deci dreptunghiul II are aria mai mică.

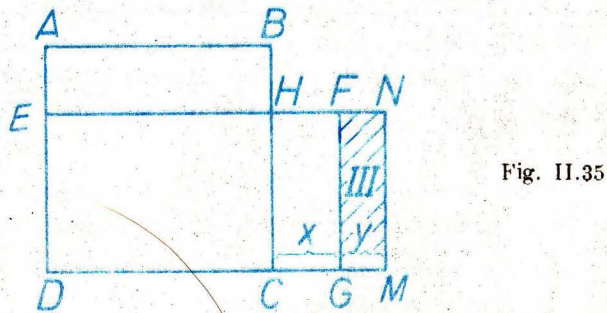
Să spunem și altfel:

Aria lui  $ABHE$  este  $xa$ . Aria dreptunghiului  $HFGC$  este  $x(a-x) = ax - x^2$ . Vizibil aria lui  $EFGD$  este mai mică decât a pătratului  $ABCD$  pentru că  $ax > ax - x^2$  soluție evidentă. (Egalitate am avea dacă  $x = 0$ ).

Această problemă rezolvată ne poate duce și la o a doua:

Să se arate că dacă două numere pozitive au același produs, suma lor este minimă când ele sînt egale.

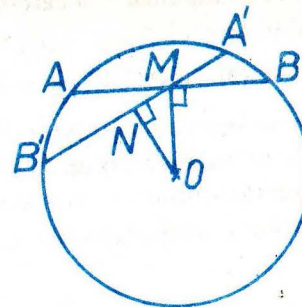
Vom porni de la problema precedentă: în figura pe care am făcut-o pentru ca s-o rezolvăm, pătratul  $ABCD$  și dreptunghiul  $DGFE$  au același perimetru și ariile diferă pentru că dreptunghiul (II) este mai mic decât dreptunghiul (I). Deci adăugăm la dreptunghiul II dreptunghiul cu interior hășurat (III)  $FNMG$  astfel încît dreptunghiul (I) și dreptunghiul  $CMNH$  să devină echivalente (fig. II.35). Deci pătratul  $ABCD$  și dreptunghiul  $EDMN$  sînt



echivalente (produsele  $DM \cdot MN$  și  $AB \cdot AD$  sînt egale), dar perimetrele lor diferă, cel al pătratului este mai mic decît  $2(DM + MN) \geq 2(AB + AD)$ .

O altă soluție la această problemă se poate da prin puterea punctului interior: dintre toate corzile care trec prin  $M$ , în cercul de centru  $O$ , cea mai scurtă este  $AB \perp OM$  (fig. II.36). Într-adevăr oricare altă coardă  $A'B'$

Fig. II.36



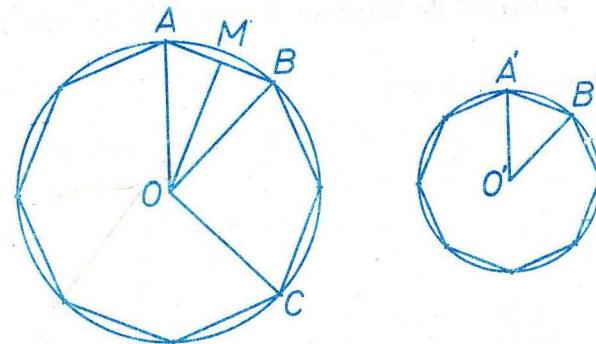
care trece prin  $M$  are distanță  $ON < OM$  deci  $B'N^2 = R^2 - ON^2 > R^2 - OM^2 = BM^2$ , deci  $2B'N > 2BM$ , deci  $A'B' > AB$  adică  $B'M + MA' > AM + MB$ . Dar aplicînd puterea punctului  $M$ ,  $AM \cdot MB = A'M \cdot MB' =$  constant și problema este demonstrată!

## LUNGIMEA ȘI ARIA CERCULUI

Calcularea și chiar definirea lungimii unei curbe și a ariei „mărginite” de o curbă închisă sînt probleme care, în unele detalii ale lor, necesită cunoștințe ce nu le aveți încă. De aceea noi nu vom demonstra formulele pentru lungimea și aria cercului, ci doar vom arăta un mod intuitiv de a ajunge la ele.

Să considerăm două poligoane regulate convexe cu același număr de laturi, de exemplu două octogoane, înscrise fiecare în cîte un cerc.

Fig. II.37



Să notăm cu  $P, p$  perimetrele lor, cu  $R, r$  razele cercurilor în care sînt înscrise.

Avem  $\frac{P}{p} = \frac{8AB}{8A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{R}{r}$ , ca urmare a faptului că  $\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$  (cazul 1, de exemplu:  $\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'}$ ,  $\sphericalangle AOB = \frac{360^\circ}{8} = \sphericalangle A'O'B'$ ).

Dacă am considera în loc de octogoane, poligoane cu un număr foarte mare de laturi înscrise în aceleași cercuri, relația  $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$  ar rămâne adevărată, iar  $P$  ar fi „aproape“ de lungimea  $L$  a cercului de rază  $R$ ,  $p$  ar fi „aproape“ de lungimea  $l$  a cercului de rază  $r$ .

Obținem, schimbând mezii între ei,  $\frac{L}{R} = \frac{l}{r}$ , adică: raportul dintre lungimea unui cerc și raza sa este același pentru toate cercurile.

Acest raport constant se notează cu  $2\pi$ ; valoarea aproximativă a lui  $\pi$  este 3,14159... ( $\pi$  este un număr irațional); nici el nu se „măsoară“ ci se determină, de exemplu, prin formula, ce conține o sumă infinită, și pe care o veți învăța în clasa a XII-a:

$$\pi = 2 \sqrt{3} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right).$$

**Lungimea  $L$  a unui cerc, de rază  $R$  este egală cu  $2\pi$  înmulțit cu  $R$ , adică  $L = 2\pi R$ .**

Să revenim la figura II.37 și să notăm cu  $Q$  lungimea liniei  $ABC$  formată din trei laturi ale octogonului. Avem  $\frac{Q}{p} = \frac{3AB}{8AB} = \frac{3}{8} = \frac{\sphericalangle AOC}{360^\circ} = \frac{\widehat{ABC}}{360^\circ}$ , relație ce rămâne adevărată chiar dacă arcul  $ABC$  ar fi mare (prin  $ABC$  înțelegem măsura, în grade, a arcului  $ABC$ ).

Să păstrăm punctele  $A$  și  $C$  fixe și să considerăm, în loc de un octogon, un poligon regulat cu un număr mare de laturi, înscris în același cerc, având  $A$  și  $C$  printre virfurile sale (pentru aceasta numărul laturilor sale îl vom alege un multiplu de 8). Relația  $\frac{Q}{p} = \frac{\widehat{ABC}}{360^\circ}$  va rămâne valabilă și pentru acest poligon;  $Q$  va fi „aproape“ de lungimea  $M$  a arcului  $ABC$ , iar  $P$  va fi, ca mai înainte, „aproape“ de lungimea  $L$  a cercului de rază  $R$ . Obținem  $\frac{M}{L} = \frac{\widehat{ABC}}{360^\circ}$ , de unde deducem:

**Lungimea unui arc de cerc de măsură  $u$  dintr-un cerc de rază  $R$  este dată de formula  $\frac{u\pi R}{180^\circ}$  ( $u$  fiind exprimată în grade).**

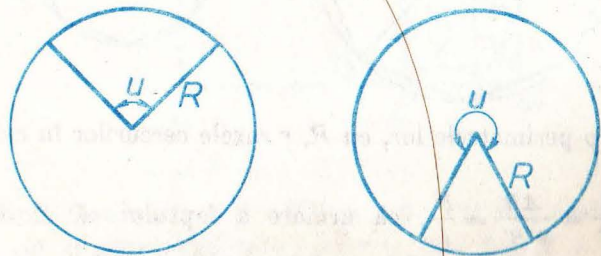


Fig. II.38

Să revenim din nou la figura II.37 și să considerăm aria octogonului  $ABC\dots$ . Ea este egală cu  $8S_{AOB} = \frac{8AB \cdot OM}{2} = \frac{P \cdot OM}{2}$ . Până aici demonstrația este riguroasă și ne conduce la:

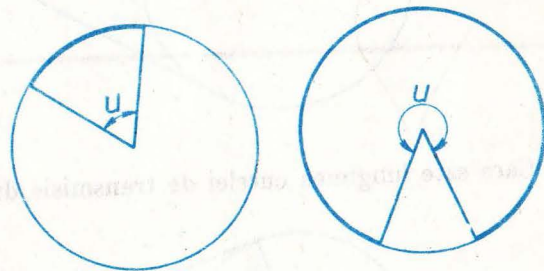
**Teorema. Aria unui poligon regulat convex este egală cu jumătatea produsului dintre perimetrul și apotema poligonului.**

Dacă vom considera un poligon regulat cu număr foarte mare de laturi, înscris în cercul de rază  $R$ , atunci perimetrul său va fi „aproape“ de lungimea cercului, iar apotema „aproape“ de raza cercului. Ajungem la concluzia că aria unui cerc este egală cu jumătate din produsul dintre lungimea și raza sa, adică  $\frac{2\pi R \cdot R}{2}$ :

**Aria unui cerc de rază  $R$  este egală cu  $\pi R^2$ .**

În fine, să considerăm, în figura II.37, aria poligonului  $AB\dots CO$ . Ea este egală cu de trei ori aria triunghiului  $AOB$ , deci cu  $\frac{3}{8}$  din aria octogonului regulat; raportul  $\frac{3}{8}$  este tot una cu raportul dintre măsura arcului  $ABC$  și  $360^\circ$ . Ținând punctele  $A$  și  $C$  fixe și măbind mult numărul laturilor poligonului regulat (acest număr rămânind un multiplu de 8), aria poligonului considerat  $AB\dots CO$  va fi „aproape de aria mărginită de razele  $OA$ ,  $OC$  și arcul  $ABC$  etc. Ajungem la:

**Definiția. Se numește sector circular figura formată dintr-un arc al unui cerc și din razele aceluși cerc cu capetele în capetele arcului.**



**Aria unui sector circular al unui cerc de rază  $R$  ce corespunde unui arc de măsură  $u$  (exprimată în grade) este dată de formula  $\frac{u\pi R^2}{360^\circ}$ .**

**Observație.** Cuvintele „multe“, „aproape“, nu au sens matematic. Ele sugerează numai un raționament, mai rafinat, ce nu l-am precizat aici.



### 13. Probleme

1. Aflați aria cuprinsă între un arc de  $60^\circ$  al unui cerc de rază  $R$  și coarda sa.
2. Aceeași problemă pentru un arc de  $240^\circ$ .
3. Pe cele trei laturi ale unui triunghi dreptunghic ca diametre se descriu cercuri ca în figura II.40. Arătați că aria hașurată este egală cu aria triunghiului.

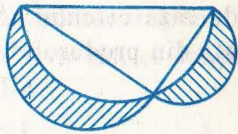


Fig. II.40

4. Două cercuri secante au razele de 10 și 7, iar distanța centrelor de 15. Aflați aria porțiunii comune a celor două cercuri.
5. Aceeași problemă, când distanța centrelor este de 5.
6. Două cercuri tangente exterioare au razele de 9 și 4. Aflați aria cuprinsă între cele două cercuri și una din tangentele comune exterioare.
7. Aflați aria hexagonului regulat de latură  $a$ .
8. Aflați perimetrul figurii II.41, dacă raza cercului este 6 și distanța de la centru la vîrf este 12.

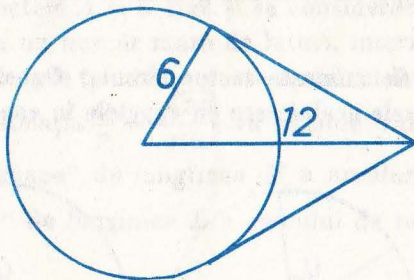


Fig. II.41

9. Care este lungimea curelei de transmisie din figura II.42?

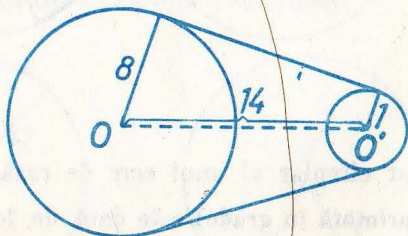


Fig. II.42

10. Aflați lungimea și aria unui semicerc. Desenați.

11. Calculați aria din figura II.43 (hașurată), precum și perimetrul figurii hașurate, razele celor trei cercuri fiind toate egale cu 2.

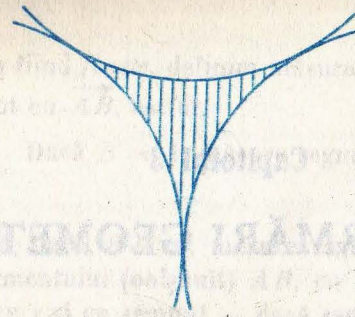


Fig. II.43

12. Aceeași problemă pentru figura hașurată II.44.

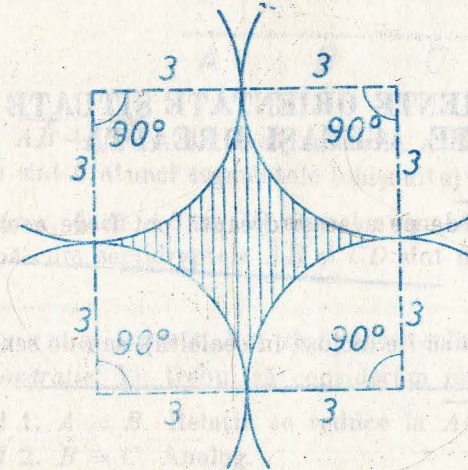


Fig. II.44

### Capitolul 3

## TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

În primele paragrafe ale acestui capitol vom prezenta câteva noțiuni pregătitoare.

### SEGMENTE ORIENTATE SITUATE PE ACEEAȘI DREAPTĂ

Două semidrepte de pe aceeași dreaptă pot fi de același sens (cu



Fig. III.1

cuvinte se poate ca una să fie inclusă în cealaltă), sau de sensuri contrare (



Fig. III.2



alte cuvinte, în caz contrar, sau intersecția lor este interiorul unui segment sau ele n-au nici un punct comun).

**Observație.** Dacă  $A \neq B$ , atunci semidreptele  $AB$  și  $BA$  au sensuri contrare.

**Definiție.** Vom numi segment orientat o figură formată din două puncte  $A, B$ , nu neapărat diferite, luate în această ordine.

Segmentul orientat format din  $A$  și  $B$  se va nota  $\overrightarrow{AB}$ .

Deci  $\overrightarrow{AA}$  este și el un segment orientat, iar, pentru  $A \neq B$ , segmentele orientate  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{BA}$  sînt diferite (spre deosebire de segmentele „obișnuite”  $AB$  și  $BA$  care sînt aceleași).

Punctul  $A$  se numește *originea* iar  $B$  *extremitatea* segmentului orientat  $\overrightarrow{AB}$ .

**Definiție.** Să considerăm o dreaptă  $d$ ; un segment (obișnuit)  $u$  pe ea și un „sens” pe  $d$ , dat printr-o semidreaptă  $s$  a lui  $d$ ,

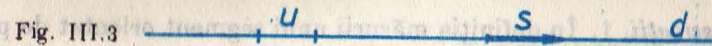


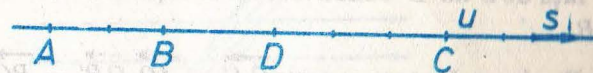
Fig. III.3

Acestea fiind *fixate*, definim măsura unui segment orientat  $\overrightarrow{AB}$  de pe  $d$ , și o notăm tot cu  $\overrightarrow{AB}$ , astfel:

**Cazul 1.** Dacă  $B = A$ , măsura segmentului orientat  $\overrightarrow{AB}$  este considerată  $0 : \overrightarrow{AA} = 0$ .

**Cazul 2.** Dacă  $B \neq A$ , măsura segmentului orientat  $\overrightarrow{AB}$  este egală cu lungimea segmentului (obișnuit)  $AB$ , cu semnul  $+$  dacă semidreapta  $AB$  are același sens cu  $s$  și cu semnul  $-$  dacă semidreapta  $AB$  are sens contrar cu  $s$ .

Fig. III.4



Deci  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$ . Dacă măsurile a două segmente orientate sînt egale și nu sînt  $0$  atunci segmentele (obișnuite) corespunzătoare sînt congruente. Reciproc, dacă  $AB \equiv CD$  atunci avem  $\overrightarrow{AB} = \pm \overrightarrow{CD}$ , semnul fiind  $+$  sau  $-$  după cum semidreptele  $AB$  și  $CD$  sînt de același sens sau de sensuri contrare.

**Teoremă.** Dacă  $A, B, C$  sînt puncte coliniare, avem  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

*Demonstrație.* Va trebui să considerăm mai multe cazuri.

**Cazul 1.**  $A = B$ . Relația se reduce la  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ .

**Cazul 2.**  $B = C$ . Analog.

**Cazul 3.**  $A = C$ . Relația devine  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$ ; am observat mai sus că este adevărată.

**Cazul 4.**  $B$  este între  $A$  și  $C$  (fig. III.5).

Fig. III.5



Semidreptele  $AB, BC, AC$  au același sens deci  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$  au același semn și relația se reduce la  $AB + BC = AC$ .

**Cazul 5.**  $A$  este între  $B$  și  $C$  (fig. III.6).

Fig. III.6

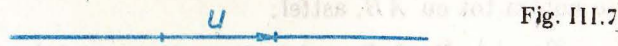


$\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{BC}$  au semne contrare,  $BC > AB$ ,  $\overrightarrow{AC}$  are același semn cu  $\overrightarrow{BC}$  și relația se reduce la  $BC - AB = AC$ .

Cazul 6.  $C$  este între  $A$  și  $B$ .

Se demonstrează asemănător cu cazul 5.

**Observații. 1.** În definiția măsurii unui segment orientat de pe o dreaptă dată, putem alege dintr-o dată unitatea și sensul, alegând unitatea de măsură drept un segment orientat nenul, ce urmează să aibă măsura  $+1$  (fig. III.7).



2. Noțiunea de măsură a unui segment orientat și teorema demonstrată mai sus ne permit să demonstrăm unele afirmații fără a mai considera mai multe cazuri corespunzătoare diferitelor poziții relative a punctelor de pe o dreaptă. De exemplu:

**Problemă rezolvată.** Fie  $A, B, O$  trei puncte coliniare, fie  $A'$  simetricul lui  $A$  față de  $O$  iar  $B'$  simetricul lui  $B$  față de  $O$ . Să se demonstreze că  $A'B' \equiv AB$ .

**Rezolvare.** Ipoteza se scrie  $\vec{OA}' = -\vec{AO}, \vec{OB}' = -\vec{BO}$ . Demonstrație:  $\vec{A'B}' = \vec{A'O} + \vec{OB}' = -\vec{OA}' + \vec{OB}' = -(-\vec{AO}) + \vec{OB}' = \vec{AO} + \vec{OB}' = \vec{AO} + \vec{BO} = \vec{AB}$  deci, cum am observat după definiția măsurii unui segment orientat,  $A'B' \equiv AB$ .

## 14. Probleme

1. Dacă  $A, B, C, D$  sînt puncte coliniare, arătați că  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = 0$ .
2. Care este relația între măsuri de segmente orientate care definește mijlocul  $M$  al unui segment (obișnuit)  $AB$ ?
3. Dacă segmentele (obișnuite)  $AB$  și  $CD$  au același mijloc, atunci  $\vec{AC} = -\vec{BD}$ .
4. Dacă  $\vec{AB} = \vec{CD}$ , demonstrați că  $\vec{AC} = \vec{BD}$ .
5. Fie  $A, O, O'$  trei puncte coliniare, fie  $B$  simetricul lui  $A$  față de  $O$  și  $C$  simetricul lui  $B$  față de  $O'$ . Arătați că  $\vec{AC} = 2 \cdot \vec{OO'}$ .
6.  $A, B, C, D$  fiind puncte coliniare, arătați că  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$ .
7.  $A, B, M, N$  fiind puncte coliniare,  $A \neq B, M \neq B, N \neq B$  și  $\frac{\vec{MA}}{\vec{MB}} = \frac{\vec{NA}}{\vec{NB}}$ , arătați că  $M = N$ .

## Semidrepte de același sens și de sensuri contrare pe drepte paralele

Să considerăm toate dreptele paralele cu o dreaptă dată, să considerăm o secantă și un semiplan determinat de acea secantă. Toate semidreptele obținute intersectînd acel semiplan cu dreptele paralele cu dreapta dată le vom considera că sînt de același sens.

Dacă acum vom alege două semidrepte situate pe două din dreptele paralele din figura III.8, vom spune că semidreptele au același sens dacă fiecare din ele are același sens cu semidreapta din figura III.8 de pe dreapta pe care este situată, sau dacă fiecare din ele este de sens contrar cu semidreapta respectivă din figura III.8; vom spune că semidreptele alese sînt de sensuri

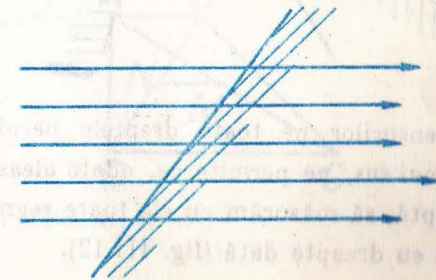


Fig. III.8

contrare dacă una din ele este de același sens și cealaltă de sens contrar cu semidreapta respectivă din figura III.8 ( $s_1$  și  $s_2$  sînt de același sens,  $t_1$  și  $t_2$  sînt de același sens, iar  $r_1$  și  $r_2$  sînt de sensuri contrare) (fig. III.9).

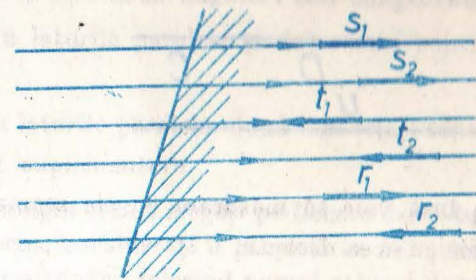


Fig. III.9

Să observăm că aceste convenții nu depind nici de secanta aleasă și nici de semiplanul ales (fig. III.10).

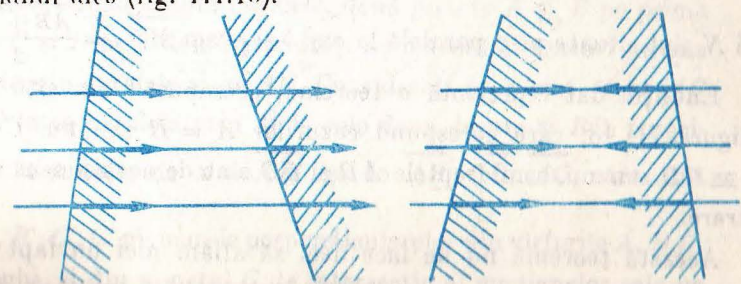


Fig. III.10

Să observăm și că, dacă încercăm să „acordăm” în același mod sensurile pe două drepte concurente, nu reușim, deoarece „acordarea” va depinde de secanta folosită (fig. III.11).

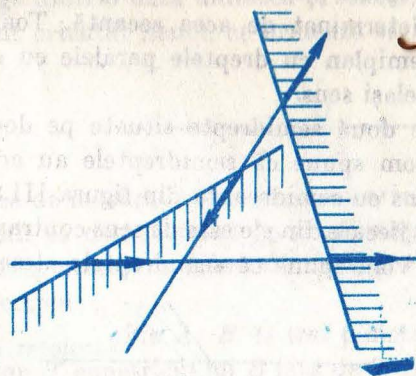


Fig. III.11

Acordarea sensurilor pe toate dreptele paralele cu o dreaptă dată, acordare descrisă mai sus, ne permite ca, odată aleasă o unitate de măsură și un sens pe o dreaptă, să măsurăm cu ele toate segmentele orientate situate pe drepte paralele cu dreapta dată (fig. III.12).

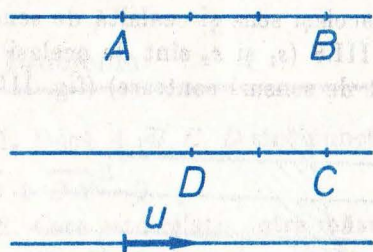


Fig. III.12

Nu avem însă voie să măsurăm cu ele segmente orientate situate pe drepte neparalele cu acea dreaptă.

**Aplicație.** Fie  $a$  și  $b$  două drepte paralele,  $A$  și  $B$  două puncte pe  $a$ ,  $C$  și  $D$  două puncte pe  $b$ . Fie  $M$  mijlocul lui  $AC$ ,  $N$  mijlocul lui  $BD$ . Atunci  $M$  și  $N$  sînt situate pe o paralelă la  $a$  și  $b$  și avem  $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}{2}$ .

Enunțul dat reprezintă o teoremă, „compusă” din alte șase, indicate în figura III.13, care corespund cazurilor  $A = B$  sau nu,  $C = D$  sau nu,  $AB \equiv CD$  sau nu, semidreptele  $AB$  și  $CD$  sînt de același sens sau de sensuri contrare.

Această teoremă nu ne face deci să aflăm nici un fapt nou. Ea este importantă deoarece reușește să unifice într-un singur enunț, destul de sim-

plu, cinci teoreme diferite (faptul ce corespunde primei figuri din III.13 nu este decât titlul de teoremă). Aceasta este posibil datorită noțiunilor introduse în ultimele două paragrafe.

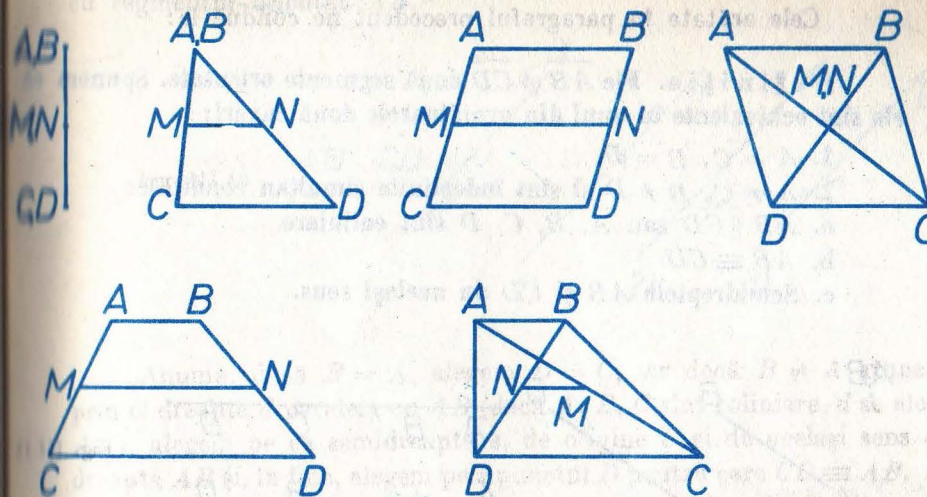


Fig. III.13

## 15. Probleme

1. Se consideră unghiurile  $xOy$ ,  $x'O'y'$  în care  $Ox$  și  $O'x'$  sînt paralele și au același sens, iar  $Oy$  și  $O'y'$  sînt de asemenea paralele și au același sens. Demonstrați că cele două unghiuri sînt congruente.

2. Două unghiuri cu laturile paralele și de sensuri contrare sînt congruente.

3. Două unghiuri cu laturile paralele, două de același sens și două de sensuri contrarii, sînt suplementare.

4. Considerați un triunghi  $ABC$ , alegeți pe fiecare din laturi cîte o unitate de măsură și un sens, considerați o paralelă la  $BC$  și exprimați teorema fundamentală a asemănării folosind numai măsuri de segmente orientate.

5. Considerați două drepte paralele, două puncte  $A$  și  $B$  pe prima și două puncte  $C$  și  $D$  pe a doua, și unități de măsură și sensuri pe una din cele două drepte paralele și pe  $AC$ . Considerați un punct  $M$  pe  $AC$  și intersecția  $N$  între paralela prin  $M$  la cele două drepte și  $BD$ . Exprimați  $y = \overrightarrow{MN}$  în funcție de  $x = \overrightarrow{AM}$  (și de  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ , care sînt constante).

6. Fie  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $G'$  picioarele perpendicularelor din virfurile  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ale unui triunghi și din punctul  $G$  de intersecție al medianelor sale pe o dreaptă  $d$ .

Exprimați  $\vec{GG'}$  cunosând  $\vec{AA'}$ ,  $\vec{BB'}$ ,  $\vec{CC'}$ .

## VECTORI

Cele arătate în paragraful precedent ne conduc la:

**Definiția.** Fie  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$  două segmente orientate. Spunem că ele sînt echivalente în unul din următoarele două cazuri:

1.  $A = C$ ,  $B = D$ .
2.  $A \neq C$ ,  $B \neq D$  și sînt îndeplinite simultan condițiile:
  - a.  $AB \parallel CD$  sau  $A, B, C, D$  sînt coliniare
  - b.  $AB \equiv CD$ .
  - c. Semidreptele  $AB$  și  $CD$  au același sens.

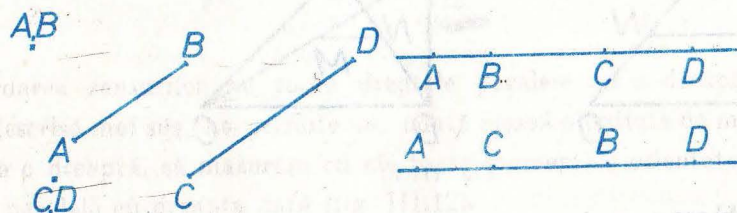


Fig. III.14

Să observăm că nu putem impune condiția *c* atît timp cît n-ar fi fost impusă condiția *a*.

Orice segment orientat este echivalent cu el însuși; dacă un segment orientat este echivalent cu al doilea, atunci și acesta este echivalent cu primul; două segmente orientate echivalente cu al treilea sînt echivalente între ele.

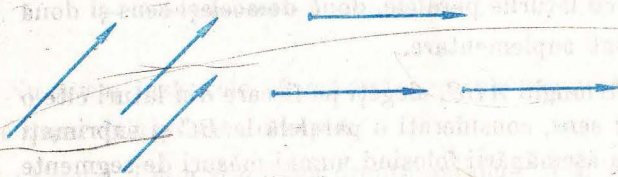


Fig. III.15

**Definiție.** Se numește vector o mulțime formată din toate segmentele orientate echivalente cu un segment orientat dat.

Vectorul format din toate segmentele orientate  $\vec{AA}$  se va numi „vectorul nul“.

În vorbirea curentă vom spune „vectorul  $\vec{AB}$ “ în loc de „vectorul care conține segmentul orientat  $\vec{AB}$ “ și vom spune deci că „vectorii  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$  coincid“, sau că „sînt egali“, în loc de „segmentele orientate  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$  sînt echivalente“.

Să observăm că fiind date un segment orientat  $\vec{AB}$  și un punct  $C$ , există un punct unic  $D$  astfel încît segmentul orientat  $\vec{CD}$  să fie echivalent cu segmentul orientat  $\vec{AB}$ .

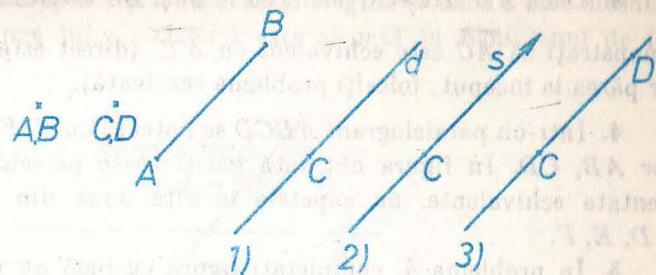


Fig. III.16

Anume: dacă  $B = A$ , alegem  $D = C$ , iar dacă  $B \neq A$  atunci ducem prin  $C$  dreapta  $d$  paralelă cu  $AB$  (dacă  $A, B, C$  sînt coliniare,  $d$  se alege drept  $AB$ ), alegem pe ea semidreapta  $s$ , de origine  $C$  și de același sens cu semidreapta  $AB$  și, în fine, alegem pe  $s$  punctul  $D$  pentru care  $CD \equiv AB$ .

Pe scurt: orice vector se poate „așeza“ astfel încît să aibă „originea“ în orice punct dorim.

### Problemă rezolvată

Dacă  $\vec{AB}$  este echivalent cu  $\vec{CD}$ , demonstrați că  $\vec{AC}$  este echivalent cu  $\vec{BD}$ .

**Rezolvare.** Cazul 1.  $A, B, C$  nu sînt coliniare.

Datorită faptului că semidreptele  $AB$  și  $CD$  au același sens,  $ABDC$  este un patrulater. El este un paralelogram, deoarece laturile opuse  $AB, DC$  sînt paralele și congruente. Rezultă că și  $AC, DB$  sînt paralele și congruente; de asemenea, că semidreptele  $AC, BD$  au același sens. Cele trei fapte, împreună, afirmă, conform definiției, că  $\vec{AC}$  și  $\vec{BD}$  sînt echivalente.

Cazul 2.  $A, B, C$  coliniare. Atunci și  $D$  rezultă situat pe aceeași dreaptă cu  $A, B, C$  și următorul calcul cu măsuri de segmente orientate:  $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CD} = AC + (CD - AB) = AC$  ne convinge de valabilitatea enunțului și în acest caz.

Rezultatul din această problemă ușurează rezolvarea citorva din problemele ce urmează:

### 16. Probleme

1. Desenați două segmente orientate care să îndeplinească două din condițiile *a, b, c* și să nu o îndeplinească pe a treia. Din cele trei variante ale acestei probleme, care este „absurdă“?

2. Fie  $A, B, C$  trei puncte necoliniare. Convingeți-vă că există un punct unic  $D$  astfel încât  $ABCD$  să fie un paralelogram. Caracterizați-l „vectorial“ în două moduri.

3. Dacă  $AB$  este echivalent cu  $\vec{A'B'}$  și  $BC$  este echivalent cu  $\vec{B'C'}$ , demonstrați că  $\vec{AC}$  este echivalent cu  $\vec{A'C'}$  (direct este mai greu decât s-ar părea la început; folosiți problema rezolvată).

4. Într-un paralelogram  $ABCD$  se notează cu  $E, F$  mijloacele laturilor  $AB, CD$ . În figura obținută găsiți toate perechile de segmente orientate echivalente, cu capetele în cite două din punctele  $A, B, C, D, E, F$ .

5. În problema 4, completați figura cu încă un punct, situat pe una din dreptele  $AB, BC, CD, DA$  așa încât să putem forma cu el un segment orientat echivalent cu  $\vec{AC}$ . În cite moduri puteți face aceasta?

6. Un triunghi echilateral  $ABC$  are „centrul“ în  $O$ . „Așezați“ vectorul  $OA$  cu originea în  $B$ , apoi în  $C$ . Precizați în fiecare din cele două cazuri poziția „extremității“ vectorului.

7. Indicați perechi de segmente orientate echivalente pe figura formată dintr-un triunghi și mijloacele laturilor sale.

## UNGHIIURI ORIENTATE

Acest paragraf este asemănător ca idee celor privind segmentele orientate de pe aceeași dreaptă și de pe drepte paralele; aci însă situația nu ne conduce la noțiuni ce au complexitatea noțiunii de vector.

Dacă privim foaia de hirtie „de deasupra“, așa cum facem de obicei, atunci, relativ la orice semidreaptă, unul din semiplanele determinate de dreapta pe care ea este așezată ne apare „la stânga“ semidreptei, iar celălalt „la dreapta“ semidreptei.

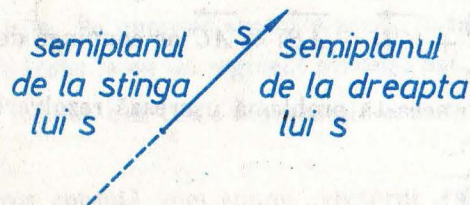


Fig. III.17

Dacă însă am „întoarce foaia“ și aceasta ar fi transparentă (ar fi mai greu să realizăm aceasta privind-o „de dedesubt“), situația s-ar schimba: semiplanul ce apărea „la stînga“ semidreptei ar apărea acum „la dreapta“ ei și invers.

În cele ce urmează vom presupune că „ne-am fixat poziția“ din care privim planul și deci că am precizat, pentru orice semidreaptă, care este semiplanul de la stînga ei și care este cel de la dreapta ei.

În legătură cu aceasta, sînt valabile următoarele *proprietăți*:

a. Dacă două semidrepte  $s$  și  $t$  au aceeași origine și dacă  $t$  este situată în semiplanul de la stînga lui  $s$ , atunci  $s$  este situată în semiplanul de la dreapta lui  $t$ .

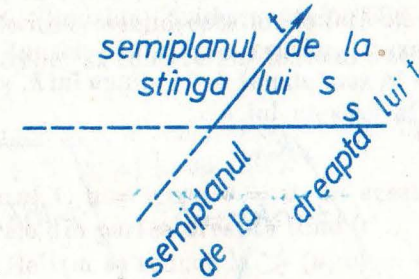
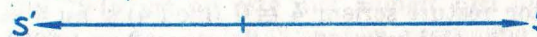


Fig. III.18

b. Dacă  $s$  și  $s'$  sînt cele două semidrepte diferite, cu originea în  $O$  situate pe dreapta  $d$ , atunci semiplanul de la stînga lui  $s$  este tot una cu semiplanul de la dreapta lui  $s'$ .

semiplanul de la stînga lui  $s =$   
 $=$  semiplanul de la dreapta lui  $s'$

Fig. III.19



c. Dacă  $Ox, O'x'$  sînt semidrepte paralele de același sens, dacă  $Oy, O'y'$  sînt de asemenea două semidrepte paralele de același sens și dacă  $Oy$  este situată în semiplanul de la stînga lui  $Ox$ , atunci  $O'y'$  este situată în semiplanul de la stînga lui  $O'x'$ .

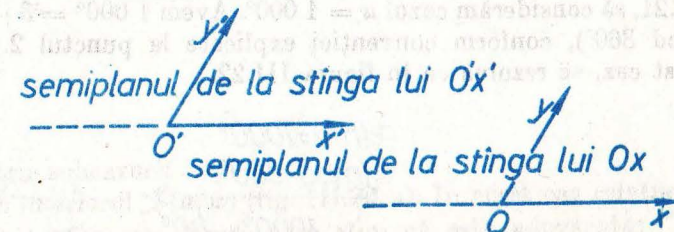


Fig. III.20

*Observație.* Am prezentat noțiunile din acest paragraf, ca și din cel asupra semidreptelor de același sens și de sensuri contrarii, la nivelul intuitiv, la fel ca în partea I a manualului pentru cl. a VI-a.

**Definiție.** Prin unghi orientat vom înțelege o figură formată din două semidrepte  $h, k$  cu aceeași origine, nu neapărat diferite, considerate în această ordine și vom nota  $\sphericalangle(h, k)$ .

Deci:  $\sphericalangle(h, k)$  este și el un unghi orientat, iar, pentru  $h \neq k$ , unghiul orientat  $\sphericalangle(h, k)$  este diferit de unghiul  $\sphericalangle(k, h)$ .

**Definiție.** Prin măsura unui unghi orientat  $\sphericalangle(h, k)$  notată tot cu  $\sphericalangle(h, k)$  vom înțelege.

- $0^\circ$ , dacă  $h = k$ .
- $+180^\circ$  sau  $-180^\circ$ , dacă unghiul (obișnuit)  $\sphericalangle(h, k)$  este alungit.
- În celelalte cazuri, măsura unghiului (obișnuit)  $\sphericalangle(h, k)$ , luată cu semnul  $+$ , dacă  $k$  este în semiplanul de la stînga lui  $h$ , și cu semnul  $-$  dacă  $k$  este în semiplanul de la dreapta lui  $h$ .

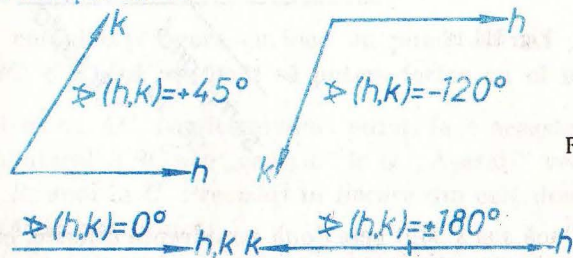


Fig. III.21

**Observații.** 1. Convenția de la  $c$  în legătură cu semiplanele n-avea sens în cazurile  $a$  și  $b$ ; de aceea a trebuit să le considerăm separat.

2. În cazul  $b$  din definiție, facem o convenție care se poate enunța și astfel: în calculele cu măsuri de unghiuri orientate, considerăm totdeauna că  $360^\circ = 0^\circ$ . Aceasta este o situație asemănătoare cu cea în care sîntem interesați, în aritmetică, de resturile împărțirilor numerelor cu 4, de exemplu. În studiul acestor resturi scriem  $4 \equiv 0 \pmod{4}$  și nu  $4 = 0$ ;  $+2 \equiv -2 \pmod{4}$  și nu  $+2 = -2$ . Aici vom scrie, de exemplu,  $+180^\circ \equiv -180^\circ \pmod{360^\circ}$ .

Reamintim că  $a \equiv b \pmod{c}$ , unde  $a, b, c$  sînt numere întregi, înseamnă:  $c$  divide pe  $a - b$ . În cazul nostru  $u \equiv v \pmod{360^\circ}$  înseamnă: citul  $\frac{u-v}{360}$  este un număr întreg.

3. Oricare ar fi o măsură de unghi  $u$  și o semidreaptă  $h$ , există o semidreaptă unică  $k$ , cu aceeași origine ca și  $h$ , astfel încît  $\sphericalangle(h, k) = u \pmod{360^\circ}$ .

Dacă pentru  $-180^\circ \leq u \leq 180^\circ$  aceasta se poate înțelege din figura III.21, să considerăm cazul  $u = 1000^\circ$ . Avem  $1000^\circ = 3 \cdot 360^\circ - 80^\circ = -80^\circ \pmod{360^\circ}$ , conform convenției explicate la punctul 2. Deci problema, în acest caz, se rezolvă ca în figura III.22.

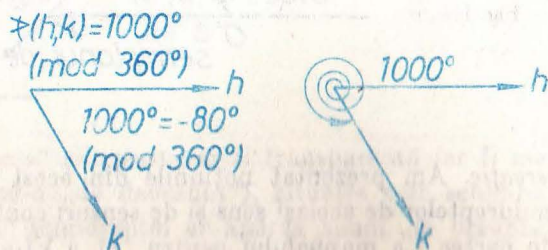


Fig. III.22

Un caz mai familiar este  $u = 280^\circ$ , de exemplu, în care scriem  $u = 360^\circ - 80^\circ \equiv -80^\circ \pmod{360^\circ}$  și care se rezolvă deci tot „prin figura III.22“.

4. Dacă privim planul „din partea cealaltă“ atunci măsurile tuturor unghiurilor orientate apar cu semnele schimbate.

Următoarea teoremă are aceeași importanță ca și cea asemănătoare de la segmente orientate de pe aceeași dreaptă: permite calcule și demonstrații fără a mai face figura, fără a mai considera toate cazurile ce pot apărea ca urmare a pozițiilor diferitelor semidrepte unele față de altele. Bineînțeles că în demonstrația ei va trebui să considerăm toate aceste cazuri, cu toată „hărnicia“.

**Teoremă.** Dacă  $u, v, w$  sînt trei semidrepte cu aceeași origine, atunci:  $\sphericalangle(u, w) \equiv \sphericalangle(u, v) + \sphericalangle(v, w) \pmod{360^\circ}$ .

**Demonstrație.** Cazul 1.  $u = v$  sau  $v = w$ . În acest caz relația este evidentă, unul din numerele din partea dreaptă fiind  $0^\circ$  ...

Cazul 2.  $u = w$ . Relația se reduce la  $\sphericalangle(u, v) = -\sphericalangle(v, u)$ ; ea rezultă din definiția măsurii unghiului orientat și din proprietatea  $a$ , ilustrată în figura III.18.

Cazul 3. Unghiul  $\sphericalangle(v, w)$  este alungit, iar celelalte două nu sînt nule.

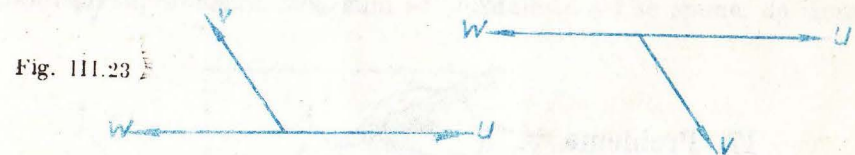


Fig. III.23

În ambele situații, relația rezultă din  $\sphericalangle(u, v) + \sphericalangle(v, w) = 180^\circ$ .

Cazul 4. Unghiul  $\sphericalangle(u, w)$  nu este nici alungit nici nul.

Privind eventual „din partea cealaltă“, putem presupune că  $w$  se află în semiplanul de la stînga lui  $u$ . Să notăm cu  $u'$  și  $w'$  semidreptele ce „prelungesc“ pe  $u$  și  $w$ .

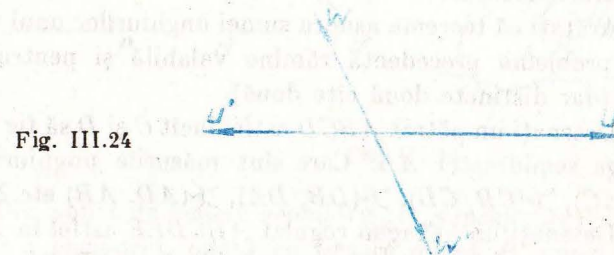


Fig. III.24

Deosebim patru subcazuri:

a)  $v$  se află în interiorul  $\sphericalangle(u, w)$  (fig. III.25, a). În acest caz relația este  $\sphericalangle(u, w) = \sphericalangle(u, v) + \sphericalangle(v, w)$ , despre care știm că este adevărată;

b)  $v$  se află în interiorul  $\sphericalangle(w, u')$  sau coincide cu  $u'$ . În acest caz relația este  $\sphericalangle(u, w) = \sphericalangle(u, v) - \sphericalangle(v, w)$ , despre care știm că este adevărată (situație asemănătoare cu a);

c)  $v$  se află în interiorul  $\sphericalangle(u, w')$  sau coincide cu  $w'$ . În mod asemănător cu b) ajungem la  $\sphericalangle(u, w) = \sphericalangle(v, w) - \sphericalangle(u, v)$ ;  
 d)  $v$  se află în interiorul  $\sphericalangle(u'w')$ . Aici apare situația deosebită legată de convenția de mai sus. Relația devine  $\sphericalangle(u, w') = -\sphericalangle(u, v) - \sphericalangle(v, w)$  (mod  $360^\circ$ ). Știm de la „unghiuri în jurul unui punct“ că  $\sphericalangle(u, v) + \sphericalangle(v, w) + \sphericalangle(w, u) = 360^\circ$ ; aceasta arată că diferența dintre membrul întâi și al 2-lea al relației, împărțită la  $360^\circ$ , dă rezultatul 1. Cu aceasta teorema este demonstrată.

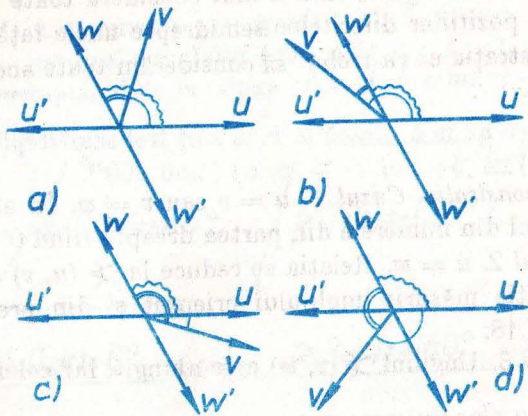


Fig. III.25

## 17. Probleme

1. Considerați un triunghi  $ABC$ . Convingeți-vă că sau pentru toate cele trei semidrepte  $AB, BC, CA$  „virful rămas“ se află în semiplanul de la stânga, sau el se află în semiplanul de la dreapta pentru toate. Enunțați teorema asupra sumei unghiurilor unui triunghi considerând unghiuri orientate.

2. Arătați că teorema asupra sumei unghiurilor unui triunghi obținută în problema precedentă rămâne valabilă și pentru trei puncte coliniare (dar distincte două câte două).

3. Desenați un pătrat  $ABCD$  astfel încât  $C$  și  $D$  să fie în semiplanul din stânga semidreptei  $AB$ . Care sînt măsurile unghiurilor orientate  $\sphericalangle(AB, AC), \sphericalangle(CB, CD), \sphericalangle(DB, DA), \sphericalangle(AD, AB)$  etc.?

4. Desenați un hexagon regulat  $ABCDEF$  astfel încât  $C, D, E, F$  să se afle în semiplanul din dreapta semidreptei  $AB$ . Care sînt măsurile unghiurilor orientate  $\sphericalangle(BC, BA), \sphericalangle(CD, CA), \sphericalangle(FC, FB), \sphericalangle(EA, ED)$  etc.?

5. Se dau două drepte  $a, b$  concurente în  $O$  și pe fiecare se alege câte o semidreaptă  $a', b'$  cu originea în  $O$ . Cite valori poate lua măsura unghiului orientat  $\sphericalangle(a', b')$  (prima semidreaptă fiind cea de pe  $a$ ). Arătați că  $2 \sphericalangle(a', b')$  ia aceeași valoare în toate cazurile descrise.

6. Se dau două semidrepte  $h, k$  de origine  $O$ . Cite semidrepte  $b$  de origine  $O$  există astfel ca  $\sphericalangle(h, b) = \sphericalangle(b, k)$ ? Dar astfel ca  $\sphericalangle(h, b) = -\sphericalangle(b, k)$ ?

7. Oricum ar fi punctele  $A, B, C, D$  diferite două câte două, avem  $\sphericalangle(AD, AB) + \sphericalangle(BA, BC) + \sphericalangle(CB, CD) + \sphericalangle(DC, DA) = 0^\circ$ . Demonstrați aceasta în general și apoi considerați cazuri speciale ca exemple: patrulater convex, concav, există un punct comun interioarelor segmentelor  $AB, CD$  etc.

8. Fie  $O, A$  două puncte pe o dreaptă  $d$ , fie  $B$  alt punct în plan și  $C$  simetricul lui  $B$  față de  $d$ . Avem  $\sphericalangle(OB, OA) = -\sphericalangle(OC, OA)$ .

## DESPRE TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

Obişnuim să gîndim că două triunghiuri (sau, mai general, două figuri geometrice, deși nu am discutat acest caz pînă acum) sînt congruente dacă, desenînd una din ele pe o hîrtie transparentă, putem să le facem să coincidă prin suprapunere. Ne-am ferit pînă acum de astfel de „argumente“ în raționamentele noastre. În acest paragraf vom da o expresie matematică precisă a noțiunii de suprapunere, sau, cum se obișnuiește a i se spune, de izometrie.

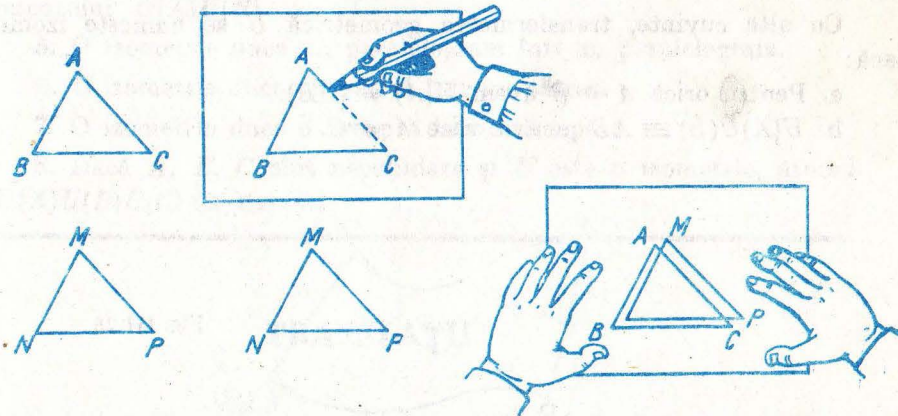


Fig. III.26

Din punct de vedere geometric, o „suprapunere“ apare drept un procedeu de a considera, odată cu fiecare punct  $P$ , punctul  $Q$  bine determinat pentru o suprapunere dată, în care este „mutat“  $P$ .

Dar aceasta nu este altceva decît „o funcție definită pe plan, cu valori în plan“.

**Definiție.** Se numește transformare geometrică o funcție  $U : \pi \rightarrow \pi$  unde  $\pi$  este planul, gîndit ca mulțimea punctelor sale, cu alte cuvinte o transformare geometrică este o funcție definită pe plan cu valori în plan.



Altfel spus, o transformare geometrică este un mod de a atașa fiecărui punct  $P$  din plan un punct bine determinat, care depinde de  $P$ , notat  $U(P)$ , din plan.

Dar nu orice transformare geometrică apare drept ceea ce gândim noi a fi o suprapunere. De exemplu, în figura III.27, să definim  $U(P) = A_-$  dacă

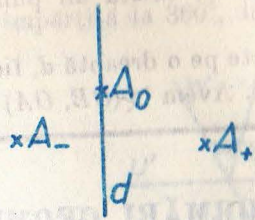


Fig. III.27

$P$  este în semiplanul din stânga,  $U(P) = A_0$  dacă  $P$  este pe dreapta din figură și  $U(P) = A_+$  dacă  $P$  este în semiplanul din dreapta. Prin această transformare geometrică  $U$  planul este „strivit“ în cele trei puncte  $A_-$ ,  $A_0$ ,  $A_+$ . Aceasta nu este o suprapunere; o suprapunere nu modifică distanțele între puncte.

**Definiție.** Se numește **izometrie o transformare geometrică ce duce puncte diferite în puncte diferite și care duce orice segment într-unul congruent cu el.**

Cu alte cuvinte, transformarea geometrică  $U$  se numește izometrie dacă:

- Pentru orice  $A \neq B$  avem  $U(A) \neq U(B)$ .
- $U(A)U(B) \equiv AB$  pentru orice  $A \neq B$ .

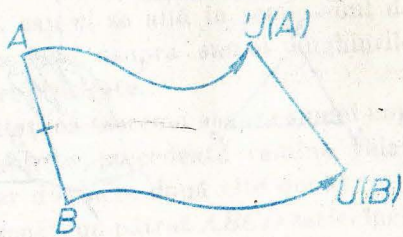
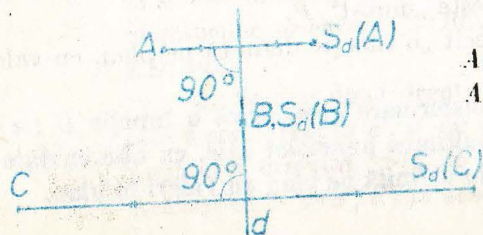


Fig. III.28

**Exemple.** Am văzut în clasa a 6-a că simetria față de o dreaptă  $d$ , pe care o vom nota cu  $S_d$ , este o izometrie.



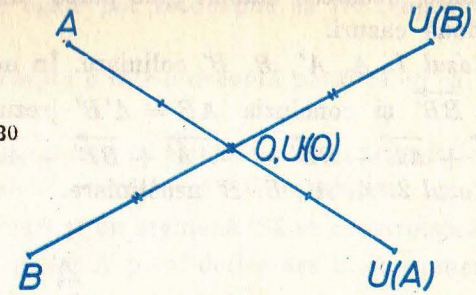
$$AC \equiv S_d(A)S_d(C)$$

$$AB \equiv S_d(A)S_d(B)$$

etc.

Fig. III. 29

Am văzut de asemenea o simetrie față de un punct  $O$ , pentru care vom introduce o notație la pagina 100 este o izometrie.



$$U(A)U(B) \equiv AB$$

$$AO \equiv U(A)U(O)$$

etc.

Fig. III.30

## 18. Probleme

- Dacă  $U$  este o izometrie și  $ABC$  este un triunghi echilateral, atunci  $U(A)U(B)U(C)$  este un triunghi echilateral.
- Dacă  $U$  este o izometrie și  $A, B, C$  sînt puncte coliniare, atunci  $U(A), U(B), U(C)$  sînt coliniare.
- O izometrie duce un triunghi într-un triunghi congruent cu el.
- O izometrie  $U$  duce interiorul segmentului  $AB$  în interiorul segmentului  $U(A)U(B)$ .
- O izometrie duce un paralelogram într-un paralelogram.
- O izometrie duce un pătrat într-un pătrat.
- O izometrie duce o dreaptă într-o dreaptă.
- Dacă  $A, B, C$  sînt necoliniare și  $U$  este o izometrie, atunci  $\sphericalangle U(A)U(B)U(C) \equiv \sphericalangle ABC$ .

## TRANSLAȚII

**Definiție.** Fie  $v$  un vector. Se numește **translație de vector  $v$** , transformarea geometrică  $T_v$ , care duce un punct  $P$  în extremitatea vectorului  $v$ , „apăsat“ cu originea în  $P$ .

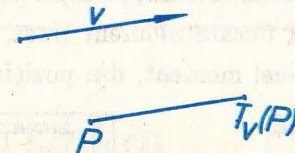


Fig. III.31

**Observație.** Translația de vector nul este așa-numita transformare identică, transformare ce lasă pe loc toate punctele  $P$ . Ea se va nota cu  $I$ .

**Teoremă.** Orice translație este o izometrie.

*Demonstrație.* Fie  $A$  și  $B$  două puncte oarecare,  $A'$  și  $B'$  imaginile lor prin translația considerată. Segmentele orientate  $\overrightarrow{AA'}$  și  $\overrightarrow{BB'}$  vor fi deci echivalente, deoarece ambele „fac parte“ din vectorul translației. Vom deosebi două cazuri.

*Cazul 1.*  $A, A', B, B'$  coliniare. În acest caz ipoteza se poate scrie  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$  și concluzia  $AB \equiv A'B'$  rezultă din  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ .

*Cazul 2.*  $A, A', B, B'$  necoliniare.

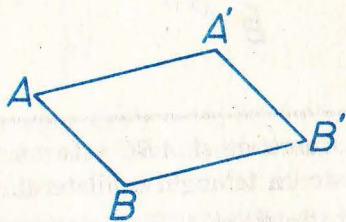


Fig. III.32

*Ipoteza*

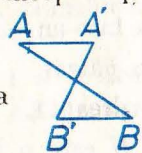
$AA' \parallel BB', AA' \equiv BB'$ .

Semidreapta  $AA'$  de același sens cu semidreapta  $BB'$ .

În acest caz începem prin a observa că  $AA'B'B$  este un patrulater

*Concluzia*  
 $AB \equiv A'B'$ .

(adică nu arată așa



ca urmare a părților 1 și 3 ale ipotezei. Având

laturile opuse  $AA'$  și  $BB'$  paralele și congruente el este paralelogram. Rezultă  $AB \equiv A'B'$  ca opuse în acest paralelogram (pentru a evita folosirea, ca mai sus, a unei teoreme „suplimentare“ din clasa a 6-a, se poate arăta că  $\triangle ABA' \equiv \triangle B'A'B$ , cazul 1).

*Observație.* Fie  $T$  o translație. Cunoșcând imaginea  $T(P_0)$  prin această translație a unui singur punct  $P_0$ , translația  $T$  este perfect determinată: ea este translația de vector  $\overrightarrow{P_0T(P_0)}$ .

Intuitiv, un vagon de cale ferată, pe o porțiune dreaptă de linie, execută o translație (poziția sa, la fiecare moment fixat, se obține printr-o anumită translație, ce depinde de acel moment, din poziția inițială - fig. III.33).

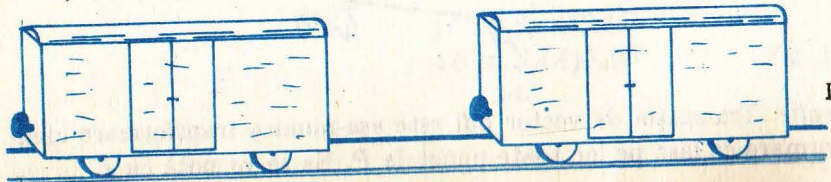


Fig. III.33

## 19. Probleme

1. O translație duce un cerc într-un cerc.
2. Două cercuri de raze egale pot totdeauna să fie „suprapuse“ printr-o translație.
3. O translație duce o dreaptă  $d$  într-o dreaptă paralelă cu ea, sau tot în  $d$ .
4. Singurele drepte transformate în ele însele de o translație de vector nenul  $T_v$  sînt cele „paralele“ cu vectorul  $v$  al translației.
5. Se consideră două cercuri și un segment. Să se construiască un punct  $M$  pe primul cerc și un punct  $N$  pe al doilea așa încît segmentul  $MN$  să fie congruent și paralel cu segmentul dat.
6. Aceeași problemă ca la 5 înlocuind unul din cercuri cu o dreaptă.
7. Se consideră un pătrat  $ABCD$  de centru  $O$ . Fie  $M, N, P, Q$  mijloacele laturilor  $AB, BC, CD, DA$ . Să se precizeze pozițiile punctelor  $T_{\overrightarrow{AO}}(M), T_{\overrightarrow{AO}}(N), T_{\overrightarrow{AO}}(P), T_{\overrightarrow{AO}}(Q)$ .
8. Se consideră un hexagon regulat  $ABCDEF$ , de centru  $O$ . Să se precizeze imaginile vîrfurilor sale prin translația de vector  $\overrightarrow{AO}$ . Aceeași problemă pentru translația de vector  $\overrightarrow{OB}$ . La fel pentru cea de vector  $\overrightarrow{AC}$ .
9. O translație transformă o semidreaptă într-o semidreaptă paralelă și de același sens cu ea.
10. O translație transformă un segment orientat într-unul echivalent cu el.
11. O translație transformă un unghi orientat într-unul de aceeași măsură.
12. Poate o translație de vector nenul să transforme un poligon în el însuși?
13. Dați exemplul de o figură care să fie transformată în ea însăși de o translație de vector nenul.
14. Arătați că o transformare geometrică ce transformă orice segment orientat într-unul echivalent cu el este o translație.

## ROTAȚII

*Definiție.* Fie  $C$  un punct fixat și  $\alpha$  o măsură de unghi orientat. Notația de centru  $C$  și unghi orientat  $\alpha$  se definește drept transformarea geome-

trică  $R_{C,u}$  ce duce  $C$  în  $C$  iar un punct  $P \neq C$  într-un punct  $Q = R_{C,u}(P)$  definit prin  $\sphericalangle(CP, CQ) = u$ ,  $CQ \equiv CP$ .

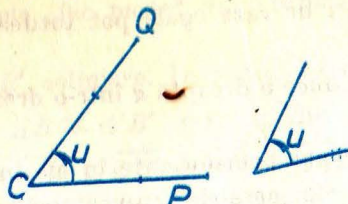


Fig. III.34

Observații. 1. rotația  $R_{C,0^\circ}$  de unghi nul este transformarea identică  $I$ .  
2. rotația  $R_{C,\pm 180^\circ}$  de unghi orientat  $180^\circ$  este tocmai simetria față de  $C$ .

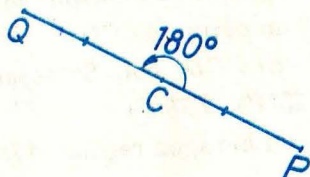


Fig. III.35

**Teoremă.** Orice rotație  $R_{C,u}$  este o izometrie.

*Demonstrație.* Va trebui să alegem două puncte oarecare  $M, N$ , să notăm  $M' = R_{C,u}(M)$ ,  $N' = R_{C,u}(N)$  și să demonstrăm că  $M'N' \equiv MN$ .  
Cazul „general“  $C, M, N$  necoliniare.

*Ipoteza*

$$CM \equiv CM', CN \equiv CN', \\ \sphericalangle(CM, CM') = \sphericalangle(CN, CN') (= u).$$

*Demonstrația* în acest caz. Avem  $\sphericalangle(CM, CN) = \sphericalangle(CM, CM') + \sphericalangle(CM', CN) = \sphericalangle(CM, CM') + \sphericalangle(CM', CN') + \sphericalangle(CN', CN) = \sphericalangle(CN, CN') + \sphericalangle(CN', CN) + \sphericalangle(CM', CN') = \sphericalangle(CM', CN')$ , deci  $\sphericalangle MCN \equiv \sphericalangle M'CN'$ . Rezultă  $\triangle MCN \equiv \triangle M'CN'$  (cazul 1) și deci  $M'N' \equiv MN$ .

Cazul „special“  $C, M, N$  coliniare.

Subcazul  $C = M$  sau  $C = N$  rezultă imediat din definiție:  $CN \equiv CN' \dots$

Subcazul  $C \neq M, C \neq N$ . Din demonstrația de la cazul general rezultă  $\sphericalangle(CM, CN) = \sphericalangle(CM', CN')$ , valoarea lor fiind în cazul de față  $0^\circ$  sau  $180^\circ$ . Deci dacă semidreptele  $CM, CN$  sînt de același sens, așa sînt și semidreptele  $CM', CN'$ , iar dacă  $CM, CN$  sînt de sensuri contrare, așa sînt și  $CM', CN'$ .

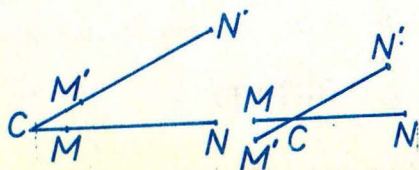


Fig. III.36

În prima situație avem  $M'N' = |CM' - CN'| = |CM - CN| = MN$ , iar în a doua  $M'N' = CM' + CN' = CM + CN = MN$ , q.e.d.

Un carusel execută o rotație (cu aceeași precizare ca și la mișcarea vagonului de cale ferată pag 98).

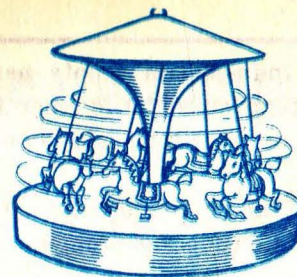


Fig. III.37

## 20. Probleme

1. O rotație duce un cerc într-un cerc. În ce caz o rotație dată duce un cerc dat în el însuși?
2. Două cercuri de raze egale pot fi „suprapuse“ printr-o rotație, al cărei unghi orientat poate fi ales cum dorim,  $\neq 0^\circ$ .
3. O rotație transformă o dreaptă într-o dreaptă. Poate fi dreapta imagine paralelă cu cea inițială? Dar identică? Descrieți cazurile în care au loc aceste situații.
4. O rotație transformă o semidreaptă într-o semidreaptă. În cazurile, precizate prin soluția problemei 3, în care se poate pune problema dacă semidreapta imagine este de același sens sau nu cu semidreapta inițială, precizați care este situația.
5. Să se construiască un triunghi echilateral cu un vîrf dat și cu celelalte două vîrfuri situate pe două drepte date. Descrieți situația în care problema are o infinitate de soluții.
6. Să se construiască un pătrat ce are două vîrfuri opuse pe două cercuri date, iar unul din celelalte două într-un punct dat.
7. Care sînt rotațiile care duc un triunghi echilateral în el însuși?
8. Aceași problemă pentru un pătrat.
9. Aceași problemă pentru un hexagon regulat.
10. Se consideră un hexagon regulat  $ABCDEF$  și figura  $H$  formată din trei cercuri de rază  $\frac{1}{3}AB$  de centre  $A, C, E$  și din trei cercuri de rază  $\frac{1}{4}AB$  de centre  $B, D, F$ . Care sînt rotațiile ce transformă figura  $H$  în ea însăși?
11. Se consideră un pătrat  $ABCD$  în care  $C, D$  sînt în semiplanul din stînga semidreptei  $AB$ . Precizați imaginile vîrfurilor pătratului prin rotația  $R_{A,+45^\circ}$ .
12. Se consideră un hexagon regulat  $ABCDEF$ , în care  $C$  este în semiplanul de la stînga semidreptei  $AB$ . Precizați imaginile vîrfurilor sale prin rotațiile  $R_{A,+60^\circ}$ . Aceași problemă pentru  $R_{A,-60^\circ}$ .

13.  $C$  și  $D$  fiind puncte diferite, determinați un punct  $X$  astfel încât  $R_{C,+60^\circ}(X) = R_{D,-60^\circ}(X)$ . Aceeași problemă înlocuind  $-60^\circ$  cu  $+120^\circ$ . La fel cu  $+60^\circ$ ,  $+60^\circ$ .

**Problema rezolvată.** Dându-se trei drepte paralele (fixate) să se construiască un triunghi echilateral cu vîrfurile respectiv pe fiecare dintre ele.

**Observație:** dacă există unul, prin translație de-a lungul dreptelor putem obține o infinitate.

**SOLUȚIA 1** (folosind numai cunoștințe de clasa a 6-a). Sînt date trei drepte  $a, b, c$  (fig. III.38). Considerăm problema rezolvată.

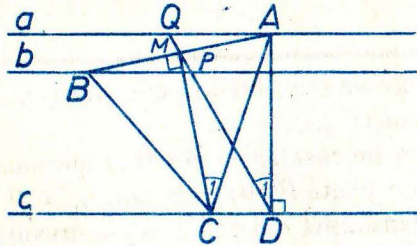


Fig. III.38

Ducem (notațiile sînt cele din figură)  $AD \perp c$  și  $CM$  înălțimea triunghiului  $ABC$  care taie segmentul  $AB$  în  $M$ , mijlocul său. Patrulaterul  $ADCM$  este inscribit în  $\angle ADC = \angle AMC = 90^\circ$ . Deci  $D_1 = C_1 = 30^\circ$ .  $M$  este de asemenea mijlocul segmentului  $PQ$  ( $P$  și  $Q$  sînt punctele unde  $DM$  taie pe  $b$ , respectiv  $a$ ). Problema este terminată: ducem  $AD \perp c$ ,  $ADQ = 30^\circ$ , luăm mijlocul segmentului  $PQ$ . Unim  $A$  cu  $M$  și prelungim pînă taie  $b$  în  $B$ .  $AB$  este latura triunghiului căutat.

**SOLUȚIA 2** (prin asemănare). Dacă distanța dintre  $a$  și  $b$  este  $m$ , cea dintre  $b$  și  $c$  este  $n$ , latura  $AC$  este împărțită în raportul  $m/n$ . Cum toate triunghiurile echilaterale sînt asemenea, luăm un triunghi echilateral  $A'B'C'$  și împărțim latura  $A'C'$  în raportul  $m/n$  prin punctul interior  $N'$  (fig. III.39). Ducem prin  $A'$  și  $B'$  paralele  $a'$  și  $b'$  la  $B'N'$  și obținem o figură „asemenea” cu cea căutată. Fie  $d'$  distanța dintre  $a'$  și  $c'$ . Prin procedeul construirii celei

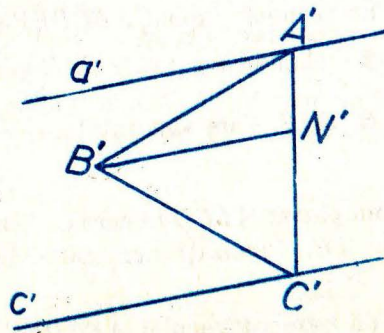


Fig. III.39

„de a patra proporțională”, cunoscînd distanța  $d$  dintre dreptele  $a$  și  $c$ , obținem latura  $AC$  a triunghiului  $ABC$  căutat.

**SOLUȚIA 3** (prin rotație). Rotind pe  $A$  în jurul lui  $B$  cu  $60^\circ$  „ajungem” în  $C$ . Deci rotind dreapta  $a$  în jurul unui punct fixat la început  $B$  pe  $b$ , obținem acolo unde „rotita” lui  $a$  taie  $c$ , punctul  $C$ , deci avem latura  $BC$  a triunghiului.

## PROBLEME RECĂPITULATIVE

1. În triunghiul  $ABC$ , latura  $BC = 5$  cm, medianele  $CC' = 6$  cm și  $BB' = 4,5$  cm. Să se afle celelalte laturi ale triunghiului.

2. Trapezul isoscel  $ABCD$  este circumscris unui cerc. El are  $AB$ , baza mică, de 2 cm și baza mare  $CD = 8$  cm. Se cere raza cercului înscris și laturile neparalele.

3. Într-un triunghi isoscel  $OAB$  ( $OA \equiv OB$ ),  $\angle AOB = 36^\circ$ . Luăm pe latura  $OB$  punctul  $C$  interior, astfel încît  $\widehat{CAB} = 36^\circ$ . Să se demonstreze că:

a)  $\triangle ACB \sim \triangle OAB$ ,

b)  $OC \equiv AB \equiv AC$ .

4. Într-un cerc de centru  $O$  înscriem un poligon regulat cu 10 laturi (decagon regulat). Fie  $AB, BE$  și  $EF$  trei laturi ale sale consecutive.  $AF$  se intersectează cu  $OB$  în  $C$ . Notînd  $AB = BE = EF = l$ ,  $OA = OB = R$  demonstrați că

a)  $CB = R - l$ ;

b)  $OC \equiv AC$ ,  $OC = l$ ;

c)  $R(R - l) = l^2$  sau  $l^2 + Rl - R^2 = 0$ ;

d) Verificați relația  $l^2 + Rl - R^2 = \left(l + \frac{R + R\sqrt{5}}{2}\right)\left(l + \frac{R - R\sqrt{5}}{2}\right)$  și găsiți de aici latura decagonului regulat convex în funcție de raza cercului circumscris.

5. În trapezul dreptunghic  $ABCD$ , înălțimea  $BC = 4$  cm, baza mică  $AB \equiv AD$ , iar baza mare  $CD = 8$  cm. Determinați măsura comună a bazei mici și laturii  $AD$ .

6. În figura R.1 cercurile de centru  $O_1, O_2, O_3$  și rază  $R_1, R_2, R_3$  sînt tangente la dreptele  $VT, VT'$  și tangente exterioare între ele.

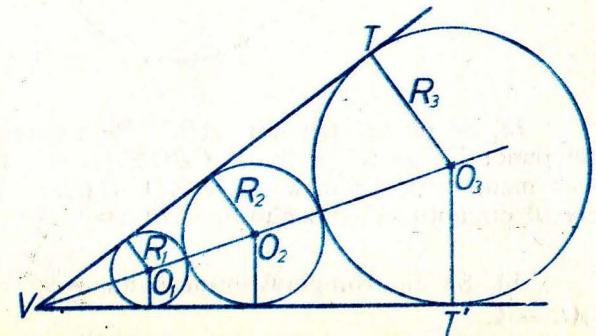


Fig. R.1

Demonstrați că aria cercului ( $O_2$ ) este media proporțională între cea a cercurilor ( $O_1$ ) și ( $O_3$ ).

7. Printr-un punct fix  $P$  situat în interiorul cercului fix de centru  $O$  ( $O \neq P$ ) trec coardele perpendiculare mobile  $AB$ ,  $CD$  de mijloace  $M$  și  $N$  respectiv.

Să se demonstreze că  $MN$  are mărime constantă.

8. În cercul de centru  $O$ ,  $A$  și  $B$  sînt două puncte diametral opuse.

Fie  $M$  și  $N$  două puncte variabile pe cerc, astfel încît  $\widehat{MAN} = 50^\circ$ . Dreptele  $MB$  și  $AN$  se întîlnesc în  $P$ .

a) Cite grade are  $\sphericalangle MPA$ ?

b) Care este locul geometric al punctului  $P$ ?

9. În triunghiul  $ABC$ ,  $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ ,  $BD$  și  $CE$  sînt înălțimi, iar  $O$  este mijlocul segmentului  $BC$ .

a) Să se demonstreze că:  $\triangle OED$  este echilateral.

b) Dacă  $AC = 4$  cm și  $AB$  este de mărime variabilă, să se găsească valoarea minimă a laturii triunghiului echilateral  $OED$ .

10. Să se determine care este dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază 1.

11. În triunghiul isoscel  $ABC$  este înscris un cerc. Laturile  $AB \equiv AC$ ,  $AB = 13$  cm, iar baza  $BC = 10$  cm. Să se calculeze raza cercului înscris.

12\*. Se dă un cerc și  $A$  un punct exterior. Ducem  $AT$  și  $AS$  tangente la cerc (fig. R.2). ( $S$  și  $T$  sînt pe cerc.) Coarda  $TL$  e paralelă cu  $AS$ . Segmentul  $AL$  tăie a doua oară cercul în  $Q$ . Demonstrați că  $TQ$  întîlnește tangenta  $AS$  în  $M$ , mijlocul ei.

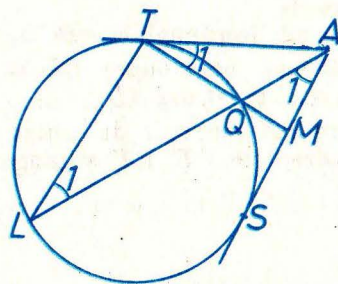


Fig. R.2

13. Se dă un triunghi  $ABC$ . Pe prelungirea laturii  $AC$  se ia un punct  $D$ , astfel încît  $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle BAC$ . Demonstrați că: a)  $BD$  este medie proporțională între  $AD$  și  $CD$ ; b)  $BD$  este tangentă la cercul circumscris triunghiului  $ABC$ .

14. Se dă triunghiul dreptunghic  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ .

Să se găsească latura pătratului  $AMNP$ , unde  $M \in AB$ ,  $N \in BC$ ,  $P \in AC$ . Catetele fiind  $b$ ,  $c$ , aceeași întrebare.

15. În figura R.3,  $ABC$  este un triunghi oarecare,  $ABDE$  și  $ACFG$  pătrate. Să se demonstreze că: a)  $EC \equiv BG$ , b)  $EP \perp PG$ .

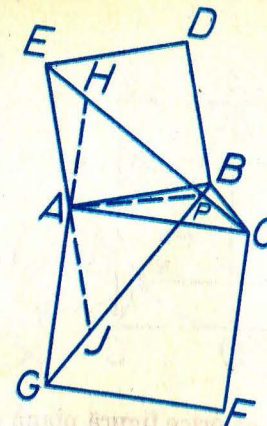


Fig. R.3

16. Un semicerc cu raza  $R$  este înscris într-un trapez isoscel (adică are centrul pe baza mare  $DC$ , și este tangent celorlalte laturi  $AB$ ,  $BC$  și  $DA$ ). Unghiul  $ADC$  format de o latură neparalelă cu baza mare are  $45^\circ$ . Să se afle aria trapezului.

17. Să se afle aria unui trapez isoscel, știind că bazele sale sînt 12 și 20 cm, iar diagonalele sînt perpendiculare între ele.

18. Într-un pătrat  $ABCD$  sînt înscrise două semicercuri cu diametre  $AD$  și  $BC$ . Un cerc mai mic este tangent la ambele semicercuri și la latura  $AB$ . Să se socotească raza acestui cerc în funcție de  $a$ , latura  $AB$ .

19. Segmentul  $AB = a$ , fix, este în același timp coardă și tangentă a două cercuri concentrice de rază variabilă. Să se demonstreze că aria coroanei circulare cuprinsă între ele este constantă.

20. În pătratul  $ABCD$  de latură  $a$  (fig. R.4) se înscrie triunghiul  $APQ$  cu  $\sphericalangle QAP = 30^\circ$ ; ( $Q$  pe segmentul  $DC$  și  $P$  pe segmentul  $BC$ ).  $\sphericalangle APQ = 90^\circ$ . Se cer laturile acestui triunghi.

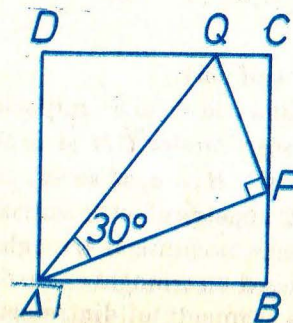


Fig. R.4

21. Se dă triunghiul ascuțit unghic  $ABC$  în care  $CB = 3$  și înălțimea  $AA' = 2$ . Să se afle latura pătratului înscris în triunghi (două vîrfuri pe  $BC$ , celelalte două respectiv pe  $AB$ ,  $AC$ ).

22. În figura R.5  $ABC$  este un triunghi isoscel înscris într-un pătrat ( $AB = AC = a$ ) și pe înălțimea  $AD$  ca diametru se construiește un cerc care taie  $AB$  în  $M$  și  $AC$  în  $N$ . Se cere  $MN$  în funcție de  $a$ .

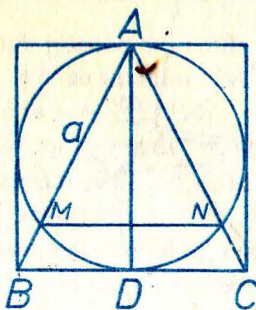


Fig. R.5

23. Demonstrați că orice figură plană care are două axe de simetrie perpendiculare are și un centru de simetrie! Reciproca este adevărată!

24. Cu laturile cît ale respectiv triunghiului echilateral, hexagonului regulat și pătratului înscris în același cerc, se construiește un triunghi. Să i se precizeze natura. Găsiți raza cercului circumscris lui.

25. Pe segmentul  $AB$  se consideră punctul  $M$  variabil și, de aceeași parte a segmentului, triunghiurile echilaterale  $AMC$  și  $MBD$ . Cercurile circumscrise acestor triunghiuri se taie în  $M$  și  $N$  (fig. R.6). Arătați că

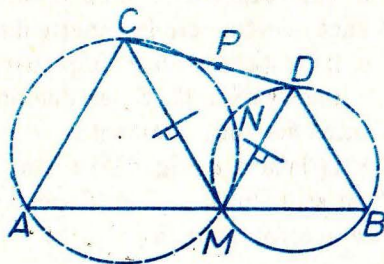


Fig. R.6

- 1)  $A, D, N$  sînt coliniare.
- 2) găsiți locul geometric al lui  $P$ , mijlocul lui  $CD$ , cînd  $M$  se mișcă.
- 3) mediatoarele segmentelor  $CM$  și  $MD$  trec printr-un punct fix.
- 4) dacă  $AM = x$  și  $AB = a$ , să se exprime  $CD$  în funcție de  $a$  și  $x$ .

26. a) Să se arate că simetricul ortocentrului unui triunghi față de o latură se află pe cercul circumscris triunghiului.

b) Să se construiască un triunghi cunoscînd: o înălțime, ortocentrul fixat pe ea și mărimea segmentului dintre ortocentru și alt vîrf.

27. Triunghiului  $ABC$  i se prelungesc laturile  $a, b, c$  cu segmentele  $CB' = a, AC' = b$  și  $BA' = c$ , cum se vede în figura R.7. Se obține un nou triunghi  $A'B'C'$ . Dacă ștergem cu radiera triunghiul

inițial, rămîne numai triunghiul  $A'B'C'$ . Construiți din nou triunghiul  $ABC$ .

(Olimpiada R.F.G., 1977)

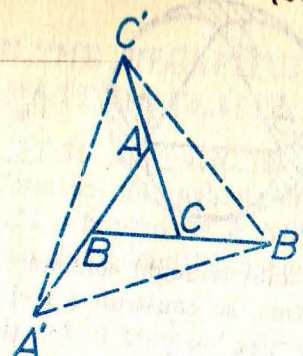


Fig. R.7

28. Un trapez isoscel cu baza mică  $AB = 2a$  și baza mare  $DC = 2b$ , este circumscris unui cerc. Se cere aria trapezului.

29. Fie  $ABCD$  un patrulater convex cu diagonalele  $AC = 3, BD = 4$ .

a) Fie  $M$  un punct pe  $AB$ ,  $MN \parallel BD$ , ( $N \in AD$ ),  $NP \parallel AC$  ( $P \in CD$ ),  $PQ \parallel BD$ , ( $Q \in BC$ ),  $QM' \parallel AC$  ( $M' \in AB$ ). Demonstrați că  $M$  și  $M'$  coincid.

b) Calculați laturile lui  $MNPQ$  în cazul în care el este romb.

30. Construiți un triunghi  $ABC$  cunoscînd raportul  $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$ , latura  $BC = 4$  și raza cercului circumscris  $R = 3$  cm.

31. În figura R.8 catetele  $AB = 3$  cm și  $AC = 4$  cm ale triunghiului dreptunghic  $ABC$  sînt diametrele a două semicercuri construite în afară. Să se calculeze tangenta  $TS$  comună acestora.

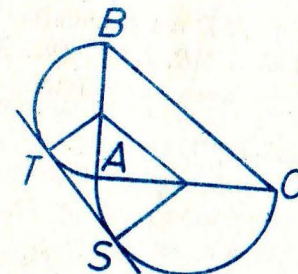


Fig. R.8

32. Se dă triunghiul  $ABC$  și un punct  $D$  mobil pe latura  $BC$ . Fie  $O$  și  $O'$  centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor  $ABD$  și  $ACD$ .

a) Să se arate că raportul razelor acestor cercuri este constant cînd  $D$  parcurge interiorul laturii  $BC$ .

b) Care este poziția lui  $D$  pentru ca razele cercurilor să fie minime?

33. În figura R.9  $ABC$  este un triunghi echilateral și se construiesc în afara lui, pe laturi ca diametre, semicercuri. Un cerc este tangent

la toate aceste semicercuri. Să se afle aria porțiunii hașurate în funcție de  $l$ , latura triunghiului echilateral.

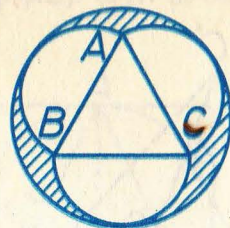


Fig. R.9

34. Pe laturile unui triunghi echilateral ca coarde și tangente la respectiv celelalte laturi, se construiesc trei arce de cerc ca în figura R.10. Să se calculeze aria hașurată în funcție de  $l$ , latura triunghiului.



Fig. R.10

35. Dintr-un triunghi dreptunghic cu catetele  $b, c$ , să se „decupeze” cercul înscris. Se cere aria rămasă din triunghi (fig. R.11).

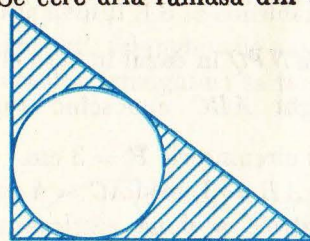


Fig. R.11

36. Pe laturile  $AB$  și  $CD$  ale patrulaterului convex  $ABCD$  se iau respectiv segmentele  $AM = NB$ ,  $DP = QC$ . Să se arate că dacă ariile lui  $AMPD$  și  $NBCQ$  sînt egale, patrulaterul  $ABCD$  este trapez (fig. R.12)

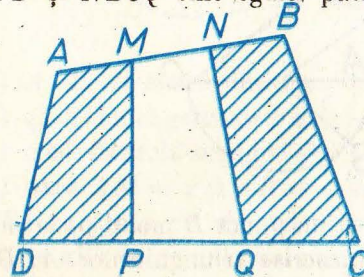


Fig. R.12

37. Într-un cerc dat de centrul  $O$  și de rază 2 cm înscriem un dreptunghi variabil  $ABCD$ . Pe latura  $AB$  luăm punctul  $M$ . Ducem  $MN \parallel AC$  ( $M \in BC$ );  $NP \parallel BD$  ( $P \in CD$ );  $PQ \parallel AC$  ( $Q \in DA$ ). Arătați că  $MNPQ$  este paralelogram și calculați perimetrul său.

## SOLUȚII

### PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A 6-a

1. Se compară de pildă  $\triangle EBG$  cu  $\triangle ABC$ . 2. a)  $\sphericalangle B'CH = 30^\circ$ , împreună cu simetricul său  $\sphericalangle B'CT$  formează un unghi de  $60^\circ$  și  $\sphericalangle B'HC \equiv \sphericalangle BAC$  etc... b)  $\sphericalangle BHC = 120^\circ$  deci  $HI$  îl împarte în  $\sphericalangle BHI \equiv \sphericalangle IHC$ ,  $\sphericalangle BHI = 60^\circ$  etc... 3. Cu notațiile din figura S.0.1. rezultă congruența  $\triangle ADM \equiv \triangle AN$  pen-

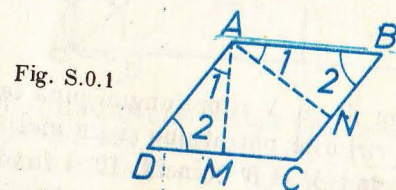


Fig. S.0.1

tru că  $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B \rightarrow \sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle BAN$  și  $AM \equiv AN$ , deci ipotenuzele  $AD \equiv AB$ . 4. Romb! Cu notațiile din figura S.0.2.  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$  (cazul 2), deci  $AB \equiv AD$ ,  $BC \equiv DC$ . Asemănător se arată că  $AD \equiv DC$ ,  $AB \equiv BC$ .

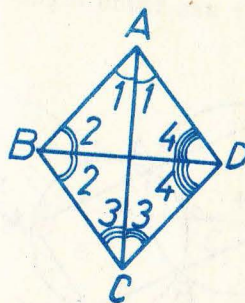


Fig. S.0.2

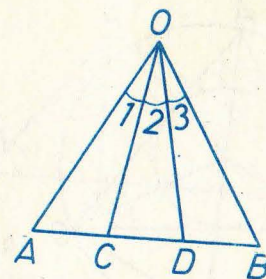


Fig. S.0.3

5. Iese imediat din inegalități de laturi în triunghiurile formate cu laturile inițiale. 6.  $5^\circ, 50^\circ, 125^\circ$ . 7. Ar însemna (fig. S.0.3) că atât  $\triangle OAD$  cât și  $\triangle OCB$  ar fi isoscele, și de aici că dintr-un punct se pot duce două perpendiculare distincte pe aceeași dreaptă. 8. Se dovedește că unghiurile opuse sînt suplimentare. 9. În figura S.0.4.,  $\sphericalangle ABA' = 90^\circ = \sphericalangle ABA''$ ,  $\sphericalangle A' \equiv \sphericalangle M$ .

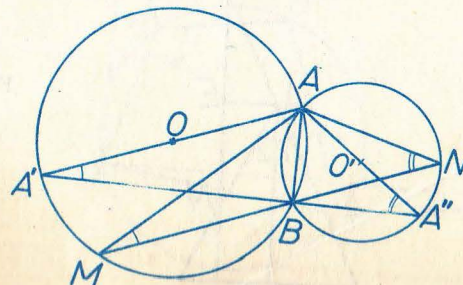


Fig. S.0.4

10. Este mijlocul „arcului mic“  $BC$ . Nu are importanță: trece prin mijlocul arcului pe care nu-l descrie  $A$ . 11. Considerăm problema rezolvată. Cercurile cu diametre  $DA$  respectiv  $BC$  au câte un semicerc pe care se află două vîrfuri ale pătratului (fig. S.0.5.) Fie  $M$  și  $N$  „mijloacele“ celorlalte două semicercuri. Pe aici (conform problemei precedente) trec bisectoarele-diagonale ale unghiurilor

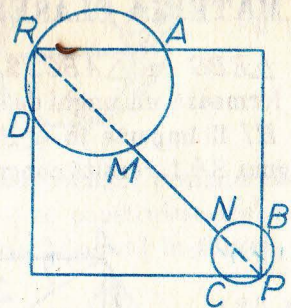


Fig. S.0.5

rilor pătratului. Deci unim  $M$  cu  $N$  și prelungim pînă taie semicercurile celelalte. Obținem  $P$  și  $R$ , vîrfurile pătratului și de aici încolo problema este simplă. Examinați cazul cînd  $M$  și  $N$  coincid. 12.  $I$  fiind pe bisectoarea  $\sphericalangle A$ , arcele  $BL$  și  $LC$  sînt congruente ( $L$  este punctul unde bisectoarea din  $A$  taie a doua oară cercul), deci și coardele  $LB \equiv LC$ .  $I$ , centrul cercului înscris fiind și pe bisectoarele lui  $B$  și  $C$ , cu notațiile din figura S.0.6.  $\sphericalangle L = 2 \cdot \sphericalangle 1$ ,  $\sphericalangle ILC = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$ , deci  $\sphericalangle CIL = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$ .

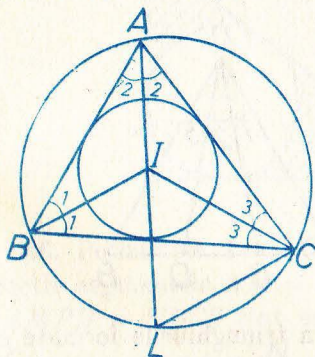


Fig. S.0.6.

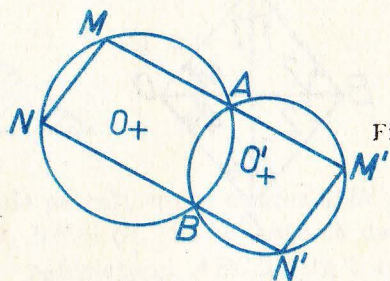


Fig. S.0.7

13.  $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle ABB'$  etc., deci  $A'B' \parallel A''B''$  (fig. S.0.7).

14. a) Cu notațiile din figura S.0.8:  $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle M$ ,  $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle ANE$ . De aici,  $\sphericalangle M_1 \equiv \sphericalangle ANE$ , și  $\triangle AMN$  isoscel. b) Ducem  $AE \perp MN$ ,  $EN \equiv EM$ ,

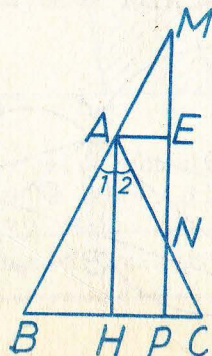


Fig. S.0.8

de aici  $MP + NP = 2PE = 2AH$  și c) locul geometric al lui  $E$  este un segment din  $A$  paralel la  $BC$ .

15. Laturile neparalele sînt congruente: una este linie mijlocie și alta fiind mediană într-un triunghi dreptunghic este jumătate din ipotenuză. 16. a)  $C'A_2 \parallel BH$ ,  $A'C' \parallel AC$  și  $BH \perp AC$ , deci  $C'A_2 \perp A'C'$ , b). Patrulaterul are două unghiuri opuse, drepte: figura S.0.9.

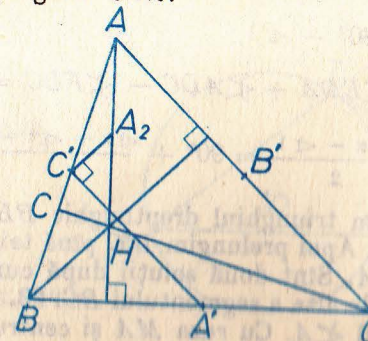


Fig. S.0.9

17. Folosind raționamentul din ultimele două probleme referitor la celelalte vîrfuri și laturi ale triunghiului. 18. Prelungim  $BC$  cu  $CD \equiv BC$  și se formează un triunghi isoscel  $\triangle ABD$  cu  $\sphericalangle BAD = 60^\circ$  deci echilateral. 19. Din problema precedentă  $\sphericalangle EDA = 90^\circ$ , din congruența triunghiurilor  $\triangle CEB$  și  $\triangle BDA$  rezultă  $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle ADF$ . Deci  $AEDF$  inscribit deci  $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE = 90^\circ$ . 20. Ducem perpendiculara pe înălțimea  $AA'$ , apoi cu centrul în  $A$  și cu două raze cît  $AB$  respectiv  $AC$  intersectăm această perpendiculară. Există două soluții (cu unghi obtuz sau ascuțit) figura S.0.10.

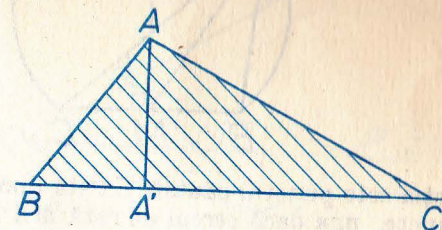
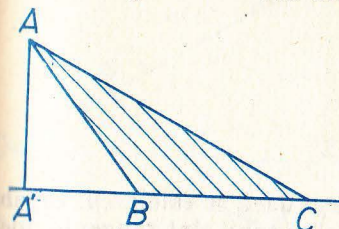


Fig. S.0.10

ii.  $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle C_1$  (le vom nota pe toate cu  $\sphericalangle 1$ , S.0.11)  $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle 1$ . Din triunghiul isoscel  $DCF$  rezultă:

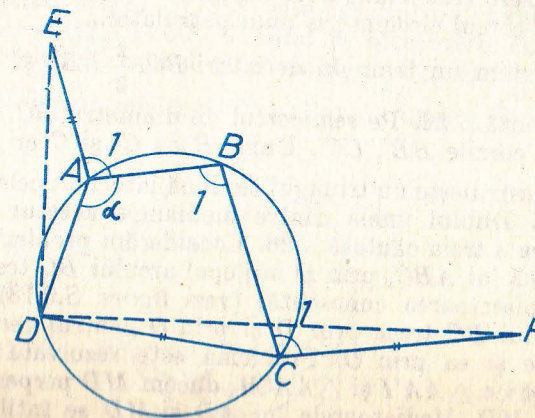


Fig. S.0.11



$$\sphericalangle FDC = \frac{180 - (180 - \sphericalangle \alpha + \sphericalangle 1)}{2} = \frac{\sphericalangle \alpha - \sphericalangle 1}{2}$$

$$\sphericalangle EDA = \frac{180 - (360 - \sphericalangle \alpha - \sphericalangle 1)}{2} = \frac{\sphericalangle \alpha + \sphericalangle 1}{2} - 90$$

$$\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle 1$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle EDF &= \sphericalangle EDA + \sphericalangle ADC - \sphericalangle FDC = \frac{\sphericalangle \alpha + \sphericalangle 1}{2} - 90^\circ + 180^\circ - \\ &- \sphericalangle 1 - \frac{\sphericalangle \alpha - \sphericalangle 1}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle \alpha + \sphericalangle 1 - 2\sphericalangle 1 - \sphericalangle \alpha - \sphericalangle 1}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$

22. Întii construim triunghiul dreptunghic  $BB'C$  unde se cunosc ipotenuza  $BC$  și cateta  $BB'$ . Apoi prelungim  $B'C$  pînă taie arcul care „vede” segmentul  $BC$  sub unghiul  $A$ . Sînt două soluții după cum construim arcul capabil de  $A$  de o parte sau de alta a segmentului  $BC$ . 23. Pe coarda  $BC$  construim arcul capabil de unghiul  $\sphericalangle A$ . Cu raza  $MA$  și centrul  $M$  tăiem cu un arc de cerc acest arc capabil de  $A$ . figura S.0.12.

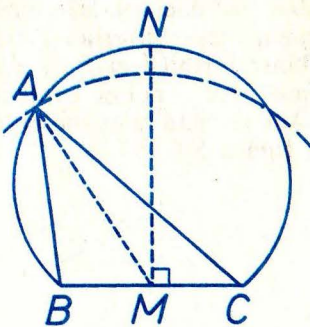


Fig. S.0.12

Intersecția este punctul căutat. Există două soluții dacă se taie arcul capabil în 2 puncte, una dacă cercul de rază  $MA$  și arcul capabil sînt tangente, nici-una dacă  $MA > MN$  ( $MN \perp BC$ ) și o infinitate de soluții dacă  $A = 90^\circ$  și  $MA = \frac{BC}{2}$ .

24. Se găsesc trei triunghiuri congruente. A doua intersecție a două cercuri se află pe cercul circumscris unui patrulater...

25. Construim un triunghi de laturi  $BC$ ,  $\frac{2}{3} BB'$  și  $\frac{2}{3} CC'$ . De aici rezolvarea este imediată... 26. Pe semicercul de diametru  $BC$  cu centrul în  $B$  respectiv  $C$  ducem corzile  $BB'$ ,  $CC'$ . Unim  $B$  cu  $C'$  și  $C$  cu  $B'$  și se vor tăia în  $A$ ...

27. Se construiește un triunghi cu două laturi cît cele date, și a treia cît dublul mediane. Dublul uneia dintre medianele acestui triunghi (precizați care) este latura a treia căutată... 28. Considerăm problema rezolvată, avînd cercul circumscris lui  $ABC$ , prin  $D$  mijlocul arcului  $BC$  trece prelungirea segmentului  $AI$  (bisectoarea cunoscută) (vezi figura S.0.13). Perpendiculara din  $M$ , mijlocul lui  $BC$  trece prin  $D$  și prin  $O$  centrul cercului; mediatoarea corzi  $AD$  trece și ea prin  $O$ . Problema este rezolvată: construim triunghiurile dreptunghice  $\triangle AA'T$  și  $\triangle AA'M$ , ducem  $MD$  perpendiculară pe  $A'M$  și  $\{D\} = AI \cap MD$ . Mediatoarele lui  $AD$  și  $MD$  se întîlnesc în  $O$ . Cu o rază cît

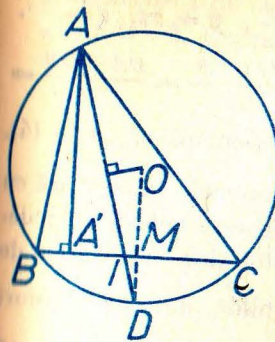


Fig. S.0.13

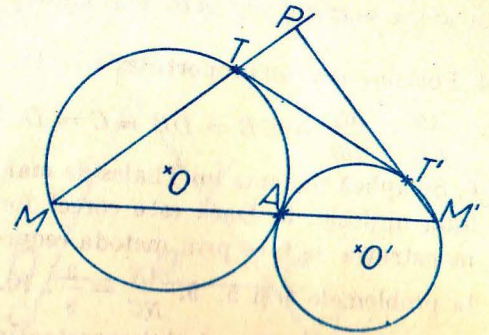


Fig. S.0.14

complementare. Soluția este deci un cerc de diametru  $TT'$ . 30. Se construiește întii un cerc de rază  $R$  în care se ia o coardă cu lungimea  $BC$ . Pe cercul de diametru  $BC$  se ia coarda  $BB'$ . Unim pe  $C$  cu  $B'$  și prelungim pînă taie cercul de rază  $R$ . Acolo se va găsi punctul  $A$ . Problema poate avea două soluții. 31. Considerăm problema rezolvată.  $OM$  este axa mediană în  $OAB$  (fig. S.0.15). Punctele  $A$  și  $B$  sînt egal depărtate de  $OZ$ . De aici ni se sugerează

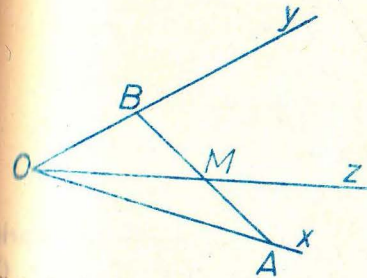


Fig. S.0.15

că trebuie să se găsească pe paralela la  $OX$  respectiv  $OY$ , egal depărtate de  $M$ . Deci luăm pe  $OZ$  segmentul  $MP \equiv OM$ , construim paralelogramul  $AOBP$  de diagonală  $OP$  și punctele  $A$  și  $B$  sînt cele căutate. 32. a) În figura S.0.16, patrulaterul  $TQMS$  este inscribitibil, avînd două unghiuri opuse drepte. Deci  $\sphericalangle QTS = 60^\circ$ ,  $T$  fiind pe bisectoarea  $BQ \equiv TS$ . Deci avem de-a face cu un triunghi isoscel cu un unghi de  $60^\circ$ . b) Bisectoarea unghiului mobil  $\triangle BMC$  trece prin mijlocul (fix) al arcului mare  $\widehat{BC}$ ...

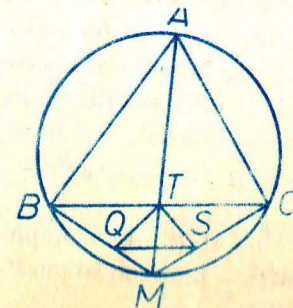


Fig. S.0.16

1.  $AC = 25$  cm,  $CB = 30$  cm. 2.  $CA = 275$  cm,  $CB = 330$  cm ( $C$  se găsește în afara segmentului  $AB$ , mai aproape de  $A$ ). 3.  $x = \frac{y}{z}$ ,  $y = xz$ ,  $z = \frac{y}{x}$ .
4. Folosim una din proporțiile derivate:  $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Leftrightarrow \frac{CA + CB}{CB} = \frac{DA + DB}{DB} \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{DB} \Leftrightarrow CB = DB \Leftrightarrow C = D$ . 5. Raționament asemănător ca la (4).
6. Se aplică teorema lui Thales de mai multe ori... 7. Teoremele în legătură cu linia mijlocie. 8. Dacă este corect formulată, reciproca este adevărată; demonstrația se face prin metoda reducerii la absurd și folosind rezultatele de la problemele 4 și 5. 9.  $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{8}$ . 10. Se folosesc, de pildă, două triunghiuri congruente. 11. Revedeți demonstrația teoremei lui Thales, care a fost făcută pe un caz particular. În loc de  $D_2$  veți avea  $D_m$ , iar  $B$  ar juca rolul lui  $D_m$ . Evident, neparticularizînd, va trebui să apelați la un „șir de puncte“, scriind de exemplu: „ $D_1, D_2, \dots, D_m$ “, adică nu puteți să enumerați toate punctele. 12. Cu notațiile din figura S.I.1 „purtăm“, în continuare, pe aceeași semidreaptă segmentele de lungimi  $w$  și  $u$  ( $OM = w$ ,  $MA = u$ ) și, cu originea

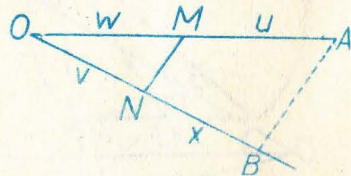


Fig. S.I.1.

- tot în  $O$ , pe cealaltă semidreaptă, îl desenăm pe  $v$  ( $ON = v$ ), ducem apoi prin  $A$  o paralelă la  $MN$ ;  $BN = x$ . 13. Nu putem „incepe“ dintr-un punct  $O$ , segmentul  $x$  trebuind să apară pe ambele capete în poziții care nu-și corespund. Trebuie folosit un alt procedeu. 14. Se folosește teorema lui Thales în  $\triangle OA_1B_1$  și  $\triangle OB_1C_1$  și apoi reciproca acestora în  $\triangle OA_1C_1$ . 15-16. Desenăm 6 segmente paralele la laturi, dacă punctul  $D$  nu este mijlocul lui  $BC$ , și 3 dacă  $BD \equiv DC$ . Se demonstrează folosind repetat teorema lui Thales și problema 4. 17. Prolungim latura  $CA$  a triunghiului  $ABC$  cu segmentul  $AM \equiv AB$ . Ținînd seama că triunghiul  $AMB$  este isoscel, că  $\sphericalangle BAC$  este unghi exterior triunghiului și că  $AD$  este bisectoare, obținem  $AD \parallel MB$ . Aplicăm acum teorema lui Thales în  $\triangle MBC$ . În cazul bisectoarei exterioare purtăm segmentul  $AM \equiv AB$  astfel încît  $M$  să fie în interiorul lui  $AC$  (dacă  $AB < AC$ ) etc... 18. Procedeu este asemănător. Punctul  $M$  nu se găsește în interiorul unghiului, dar  $A$  rămîne între  $O$  și  $B$ . Se găsește  $\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{OD}{OB}$ . 19. Se aplică teorema lui Thales. 20.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dați alte exemple fără să amplificați sau să folosiți proporția de mai sus.

1. Cu notațiile din figura S.I.2. se aplică teorema fundamentală a asemănării în triunghiurile  $DAB$  și  $CAB$  și apoi teorema lui Thales în unul din triunghiurile  $DAC$  sau  $DBC$ ; se obține  $MP = NP$ . 2. Procedeu similar cu cel de la (1). 3. Exprimînd două relații de asemănare unde figurează un raport

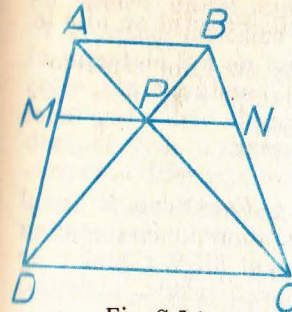


Fig. S.I.2

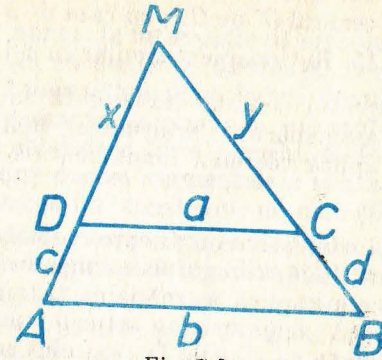


Fig. S.I.3

- comun, se obține relația cerută. 4. Unim, de pildă, una din extremitățile bazei mici cu mijlocul bazei mari; prin punctul unde această dreaptă intersectează diagonala ducem o paralelă la baze. 5. Este în fond problema 1; se obține  $x = \frac{ab}{a+b}$ . 6.  $SO' = \frac{r(R+r)}{R-r}$ . 7.  $AD = 6$  cm,  $DE = 10$  cm,  $AE = 12$  cm.
8. Cu notațiile din figura S.I.3,  $x = \frac{ac}{b-a}$ ,  $y = \frac{ad}{b-a}$  etc.
9. Cu notațiile din figura S.I.4. ( $DB = m$ ,  $AC = n$ ) se obține, din teorema fundamentală a asemănării:  $ND = \frac{ma}{a+b}$ ,  $NB = \frac{mb}{a+b}$ ,  $NA = \frac{nb}{a+b}$ .  $NC = \frac{na}{a+b}$ .

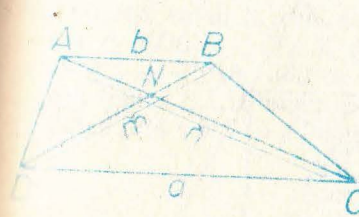


Fig. S.I.4

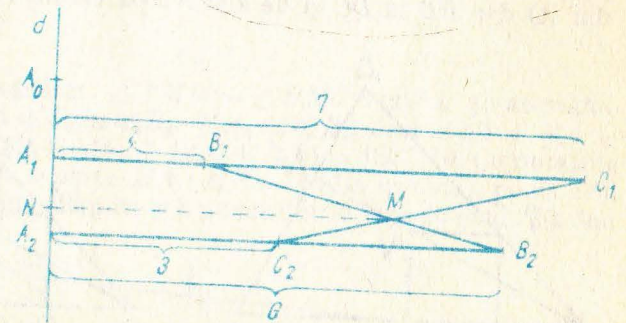


Fig. S.I.5

10. a. Folosim notațiile din figura S.I.5:  $B_1C_1 = 5$  cm,  $B_2C_2 = 3$  cm. Revine la a împărți segmentul  $A_1A_2 = 1$  cm în raportul  $\frac{5}{3}$ . Din  $A_0N = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$  (cm)

$$A_0Q = \frac{41}{11} \text{ cm}, PQ = \frac{131}{11} \text{ cm}.$$

11.  $MO' = \frac{dr}{R-r}$  ( $O'$  fiind centrul cercului cu raza mai mică),  $MO = \frac{dR}{R-r}$ .  
 12. Pentru tangenta comună interioară  $MO' = \frac{dr}{R+r}$ ,  $MO = \frac{dR}{R+r}$  (vezi procedeul analog de la problema 6). 13.  $MO = \frac{dR}{R-r}$ ,  $MO' = \frac{dr}{R-r}$ .  
 14. Un cerc cu centrul  $O'$  pe  $OA$ , cu raza de  $k$  ori cît raza cercului dat, astfel încît  $\frac{O'A}{OA} = k$ . 15. Raționament similar cu cel de la 14. 16. Punctul se află la intersecția tangentei comune (exterioară sau interioară) cu linia centrelor.  
 17. Prin două asemănări se „transpune” suma de rapoarte pe diagonala  $AC$ .  
 18. 4. 19. Se aplică teorema fundamentală a asemănării.

### 3. pag. 22-23

1. Au unghiuri respectiv congruente. 2.-3. La fel cu 1. 4. Cazul doi. 5. Cazul 1. 6-7. Formați două triunghiuri asemenea. 8. Raportul ipotenuzelor egal cu cel a două catete implică asemănarea triunghiurilor (cazul 2). 9. Cazul 1 de asemănare: două unghiuri au laturile respectiv perpendiculare. Atenție: această proprietate va fi utilă la capitolul arii! 10. Se aplică problema precedentă. 11. Din asemănarea triunghiurilor  $\triangle PMC$  și  $\triangle MNB$  rezultă:  $\frac{PC}{NB} = \frac{MC}{MB} = \text{constant}$ , pentru că raportul dintre o latură a unui pătrat și diagonala sa este constant (ușor de demonstrat cu cazul 1). 12. Construim un pătrat oarecare  $MNPQ$  cu latura  $QP$  pe  $BC$  și  $M$  pe  $AB$ , unim  $B$  cu  $N$  și prelungim pînă la  $N'$  pe latura  $AC$  (fig. S.I.6). Ducem apoi  $N'P' \perp BC$  etc. Pătratul căutat este  $M'N'P'Q'$ . 13. a. Din congruența  $\triangle PAD \equiv \triangle MAB$ . b. Din asemănarea  $\triangle ABE \sim \triangle AMQ$  (cazul 2). c. Se arată că  $MB \perp PS$ , și că patrulaterul convex  $PATM$  e inscripțibil. 14. a. Din congruența  $\triangle ECB \equiv \triangle DCA$ . b. Din a. rezultă  $AGCB$  inscripțibil și de aici imediat b. c. Patrulaterul  $CDEG$  inscripțibil (din a) etc. 15. Am demonstrat că într-un triunghi, produsul dintre înălțime și latura pe care cade este constant. Deci  $DQ \cdot AC = DC \cdot AA'$  (în  $\triangle ADC$ ),  $PD \cdot AB = BD \cdot AA'$  (în  $\triangle ABD$ ), ( $A'$  fiind piciorul înălțimii din  $A$ ) dar  $BD \equiv DC$  și de aici relația cerută este imediată.

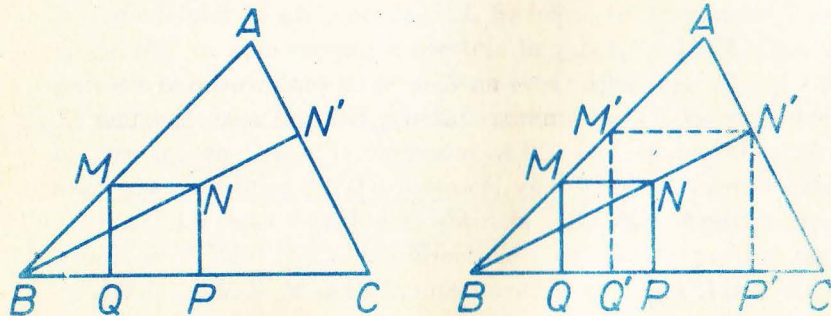


Fig. S.I.6

### pag. 31-3

1. Comparăm în figura S.I.7  $\triangle PAT \sim \triangle PTB$  (cazul 1). 2. Se aplică în ambele puterea punctului și se pune în evidență secanta comună. 3. Se demonstrează că un punct care nu se găsește pe acea secantă comună are puteri diferite față

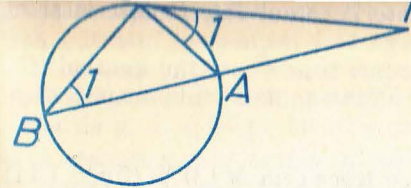


Fig. S.I.7

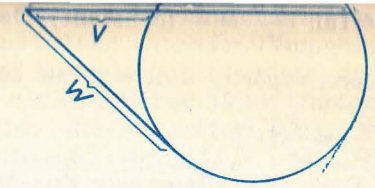


Fig. S.I.8

de cercuri, unind punctul cu un punct de intersecție al cercului și constatînd că punctele celelalte de intersecție cu cercurile diferă. 4. Tangenta comună în punctele lor de tangență. 5. Intersectăm două locuri geometrice de tipul celor din problema precedentă (secante comune) și punctul se găsește pe locul geometric corespunzător și celei de a treia perechi. 6. Pe aceeași semidreaptă  $d$ , cu o extremitate comună ducem segmentele  $u$  și  $v$ , și pe segmentul care este diferența lor, luat drept coardă, construim un cerc (fig. S.I.8). Tangenta la acest cerc este  $\sqrt{uv}$ . În particular pentru comoditate, se ia coarda  $u-v$  ca diametru. 7. Unim  $A$  cu  $B$  și prelungim pînă taie dreapta  $d$  în  $M$ . Construim  $\rho = \sqrt{MA \cdot MB}$ . Apoi luăm pe  $d$  segmentul  $MP = \rho$ , care se poate lua în două sensuri, și construim cercurile ce trec prin  $P, B, A$ . Sînt două, după cum am luat pe dreapta  $d$  punctul  $P$  de o parte sau de alta a lui  $M$ . Dacă  $AB \parallel d$ , atunci punctul  $P$  de tangență se obține ducînd mediatoarea segmentului  $AB$ , la intersecția ei cu  $d$ . Atunci soluția este unică. 8. Comparăm triunghiul  $\triangle MAD$  și  $\triangle MCB$  și ținem seama că unghiurile opuse într-un patrulater inscripțibil sînt suplementare. 9. Dacă  $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$ , pentru că  $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle BMC$ , rezultă  $\sphericalangle D_4 \equiv \sphericalangle C_4$  (fig. S.I.9).

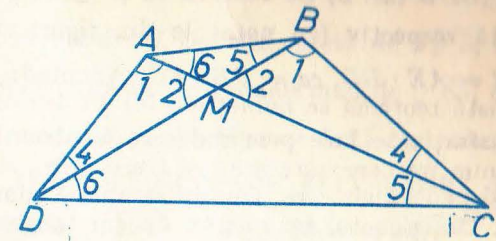


Fig. S.I.9

Aplicînd cazul 2, din asemănarea  $\triangle AMD \sim \triangle BMC$  rezultă și asemănarea  $\triangle MDC \sim \triangle MAB$ , deci  $\sphericalangle C_5 \equiv \sphericalangle B_5$ ,  $\sphericalangle A_6 \equiv \sphericalangle D_6$ , deci  $2(\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 6) = 360^\circ \Leftrightarrow (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 5) + (\sphericalangle 4 + \sphericalangle 6) = 180^\circ$ . 10. Cu notațiile din figura S.I.10 avem pe de o parte  $MA \cdot MB = k$  (din ipoteză), pe de altă parte  $MA \cdot MC = c$  (constant) (ca putere a punctului  $M$  față de cerc). Făcînd

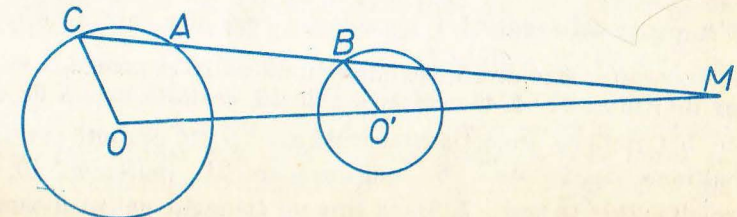


Fig. S.I.10

raportul,  $\frac{MB}{MC} = \frac{k}{c}$  (constant). Deci dacă  $A$  descrie cercul dat,  $B$  descrie și el un cerc, raportul dintre razele celor două cercuri fiind  $\frac{k}{c}$ , avînd centrul  $O'$ ,

$$\left(\frac{MO'}{MO} = \frac{k}{c}\right).$$

11. Dacă  $M$  se află pe cerc, ducem diametrul ce trece prin  $M$  ( $MN$ ) (fig. S.I.11). Punctul  $P$  astfel încît  $MN \cdot MP = k$  va fi (din asemănarea  $\triangle AMN \sim \triangle PMB$ , cazul 2) piciorul perpendicularei din  $B$  pe diametru.  $P$  este fix,  $B$  mobil, deci descrie coarda perpendiculară pe  $MN$ .

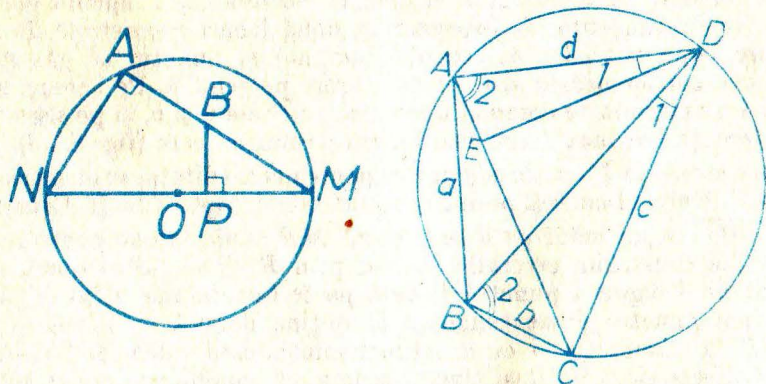


Fig. S.I.11

12. a) Pe latura  $AD$  construim unghiul  $\sphericalangle EDA \equiv \sphericalangle CDB$ , triunghiurile  $\triangle EDA \sim \triangle CDB$  (x). b) Se observă că și  $\triangle ADB \sim \triangle EDC$  (xx). c) Din (x), (xx) rezultă respectiv (cu notațiile din figura S.I.12)  $\frac{d}{BD} = \frac{AE}{b}$ ,  $\frac{c}{DB} = \frac{EC}{a}$  de unde  $bd = AE \cdot BD$ ,  $ca = DB \cdot EC$ . Adunînd:  $bd + ca = BD(AE + EC)$ , q.e.d. Această teoremă se numește a lui Ptolemeu.

13. Demonstrația se face prin reducere la absurd.

14. Construim un cerc oarecare ce trece prin cele două puncte, astfel încît el să taie și pe celălalt cerc. Ducem secantele comune ale celor două perechi de cercuri. Din punctul lor comun ducem tangenta la cercul dat. Obținem astfel un al treilea punct (cel de tangență). Cercul circumscris ultimului punct și celor date este cercul căutat. Construcția se simplifică dacă triunghiul format de centrul cercului dat și cele două puncte date este isoscel. Sint două soluții.

### 6. pag. 37-38

1.  $12, \frac{60}{13}, \frac{25}{13}, \frac{144}{13}$ . 2. Proiecția catetei cunoscute pe ipotenuză este 6, ipotenuza este  $\frac{50}{3}$ , cealaltă catetă  $\frac{40}{3}$ , proiecția celeilalte catete pe ipotenuză este  $\frac{32}{3}$ .
3. Ipotenuza este de 25, cealaltă catetă de 20 și proiecția ei pe ipotenuză 16, iar înălțimea 12. 4. O catetă este de 26, cealaltă catetă 62,4, ipotenuza 67,6 etc. 5. Cateta cu proiecția cunoscută are  $5\sqrt{10}$ , cealaltă catetă este de  $15\sqrt{10}$ , înălțimea de 15 etc... 6. Înălțimea are 21, ipotenuza 70, o catetă  $7\sqrt{10}$ , cealaltă  $21\sqrt{10}$  etc... 7. Dacă într-un triunghi pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, triunghiul este dreptunghic. Atenție:

o greșeală tipică în formularea acestei probleme se face în enunțul următor: „Dacă pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor, triunghiul este dreptunghic”. Or, am admis de la început că triunghiul „are” catete, deci că este dreptunghic. Demonstrația se face prin construcție: se dă un triunghi cu laturile  $a, b, c$ , și pe laturile unui unghi drept desenat alături  $\sphericalangle xoy$ , se poartă respectiv segmentele  $OC = b, OB = c$ . Rezultă  $BC = \sqrt{b^2 + c^2} = a$ . Din congruența celor două triunghiuri rezultă adevărul afirmației. 8. În figura S.I.13, folosind notațiile ei:  $c^2 = xa, b^2 = a(a - x)$ , adunînd obținem  $c^2 + b^2 = a(x + a - x) = a^2$ .

9. În  $\triangle ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  luăm pe ipotenuza  $BC$  punctele  $D \neq E$  astfel ca  $BD \equiv BE \equiv BA$ ,  $D$  fiind între  $B$  și  $C$  (este ca și cum am fi dus cercul

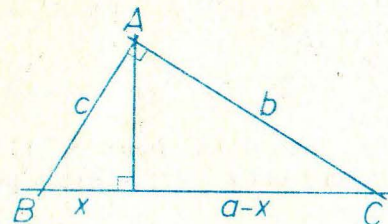


Fig. S.I.13

de centru  $B$  și de rază  $BA$ ...). Cu ajutorul triunghiurilor isoscele  $BAE, BAD$  și cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  arătăm că  $\sphericalangle E = \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$  (de fapt am redemonstrat pe figura noastră teorema asupra unghiului înscris). Avem  $\triangle ACD \sim \triangle ECA$ ,  $\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{AC}$ .  $AC^2 = (CB + BE)(CB - BD)$  etc. 10.  $a\sqrt{2}$ . 11.  $2\sqrt{3}$ .

12.  $2\sqrt{2}$  ambele. 13. Ipotenuza este de 10, cealaltă catetă de  $5\sqrt{3}$ , înălțimea de  $5\frac{\sqrt{3}}{2}$  etc... 14. Latura „oblică” este de 5, diagonala mică de  $\sqrt{65}$ , diagonala mare  $2\sqrt{29}$ . 15. Există două posibilități: a) înălțimea de  $2\sqrt{26}$ , cealaltă diagonală de  $3\sqrt{17}$ , latura „oblică”  $2\sqrt{30}$ ; b) înălțimea de  $4\sqrt{11}$ , cealaltă diagonală  $3\sqrt{33}$ , latura „oblică”  $8\sqrt{3}$ . 16.  $2\sqrt{21}$ . 17.  $8\sqrt{21}/5$ . 18.  $d = \sqrt{209}$ . 19. Ducînd prin punctul  $M$  o secantă ce trece și prin centrul  $O$ , deducem că puterea lui  $M$  față de cerc este  $OM^2 - R^2$ . Ea este minimă dacă  $OM = 0$  deci cînd punctul este în centru, caz în care puterea este  $-R^2$ . 20.  $\sqrt{55}$ . 21.  $2\sqrt{Rr}$ . 22.  $\sqrt{391}$ .

23. Folosind teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic, sau, caz general, folosind puterea punctului într-un cerc unde se poate duce o coardă de  $u + v$ . 24. Considerînd triunghiul de catete 3 și 4, ipotenuza este 5, proiecțiile catetelor pe ipotenuză sînt  $16/5, 9/5$ , iar înălțimea  $12/5$  (vezi problema rezolvată 1). Considerăm acum un triunghi asemenea cu el, „raportul de asemănare” fiind 5 etc. 25. E mai mică cea dată. 26. Cea dată este „lățimea” adică latura mai mică a dreptunghiului. 27.  $5\sqrt{10}, 13\sqrt{10}, 15\sqrt{10}, 9\sqrt{10}$ ; 48 și 40;  $48 \cdot 40 = 5\sqrt{10} \cdot 15\sqrt{10} + 13\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10}$  sau  $48 \cdot 40 = (5 \cdot 15 + 13 \cdot 9)10$  etc. 28. „Dacă într-un triunghi  $ABC, D$  este piciorul înălțimii din  $A$  și  $AD^2 = BD \cdot DC$ , atunci  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ”. Fals, deoarece  $D$  ar putea să nu fie între  $B$  și  $C$ . 29. Construim triunghiul  $B'A'C'$  cu  $\sphericalangle A' = 90^\circ, B'A' \equiv BA, C'A' \equiv CA$ . Știm din clasa a 6-a, că  $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$ , dacă și numai dacă  $BC < B'C'$  etc.

1.  $\sin x < \sin y$ . Considerăm un sferț de cerc unde  $\widehat{AOB} = x$  și  $\widehat{AOC} = y$  ( $O$  este centrul cercului (fig. S.I.14). Evident  $CC' > BB'$  (jumătate din coarda mai apropiată de centru)  $\sin x = \frac{BB'}{R}$ ,  $\sin y = \frac{CC'}{R}$  (unde  $R$  este raza cercului).

Fracțiile au același numitor și este mai mare cea cu numărătorul mai mare.  
 2. Raționament similar cu cel precedent, se obține  $\cos x > \cos y$ . 3. Sinusul crește mai repede în zona valorilor mici. 4.  $x = 45^\circ$ . 5. Din tabel  $53^\circ < x <$

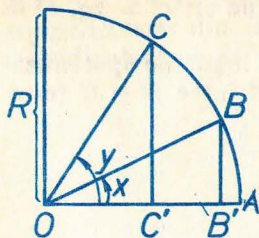


Fig. S.I.14

$< 54^\circ$ ; din tabel  $33^\circ < 90^\circ - x < 34^\circ$ . 6. Din figura S.I.15 rezultă pe lângă cele notate că înălțimea este  $a \sin x \cos x$ , iar proiecțiile pe ipotenuză sînt  $a \cdot \sin^2 x$  și  $a \cdot \cos^2 x$ .

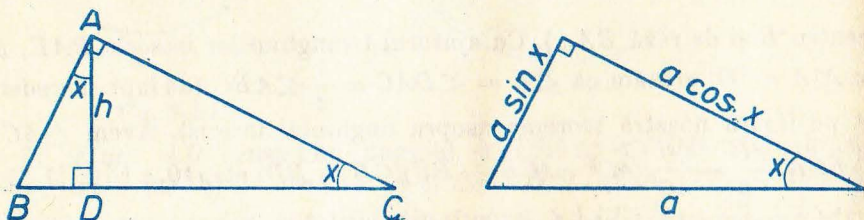


Fig. S.I.15

7. Privind figura S.I.15,  $AC = \frac{h}{\sin x}$ ,  $AB = \frac{h}{\cos x}$ ;  $BD = h \cdot \operatorname{tg} x$ ,  $DC = h \cdot \operatorname{ctg} x$ , unde numim tangenta unghiului  $x$  (notat  $\operatorname{tg} x$ ) raportul dintre cateta opusă lui și cealaltă catetă, și constatăm  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , iar cotangenta unui unghi (notată cu  $\operatorname{ctg} x$ ) numim raportul dintre cateta alăturată și cealaltă catetă; se verifică ușor că  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ . 8. Cu notațiile din figura S.I.16

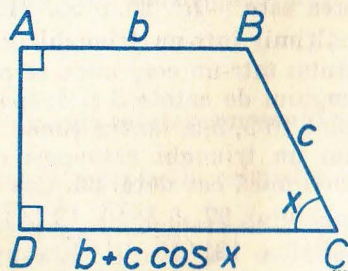


Fig. S.I.16

$$DC = b + c \cdot \cos x, \quad AD = c \cdot \sin x, \quad BD = \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 x}, \quad AC = \sqrt{c^2 \sin^2 x + (b + c \cdot \cos x)^2}.$$

9.  $2R \cdot \sin \frac{x}{2}$ . 10. Baza este  $2a \cdot \cos x$ ; înălțimea corespunzătoare bazei este  $a \cdot \sin x$ , fiecare din celelalte înălțimi este  $2a \cdot \sin x \cdot \cos x$ . 11.  $\sin \frac{x}{2} = \frac{a}{2b}$  (fig. S.I.17). 12.  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{b}{a}$  (fig. S.I.18).

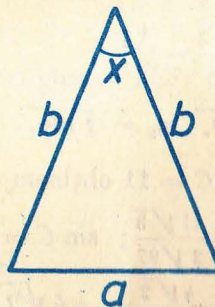


Fig. S.I.17

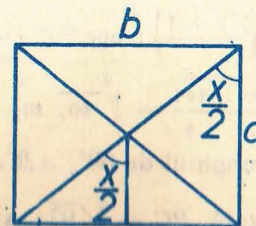


Fig. S.I.18

13.  $\sin \frac{x}{2} = \frac{2}{15}$  (fig. S.I.19). 14.  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{d}$ ,  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R+r}{d}$  (condițiile  $R \pm r < d$  duc la existența tangentelor).

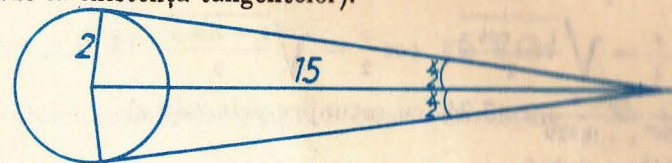


Fig. S.I.19

15.  $\cos \alpha = \frac{d}{R}$  (fig. S.I.20).

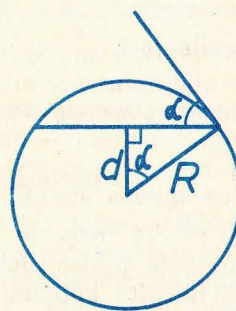


Fig. S.I.20

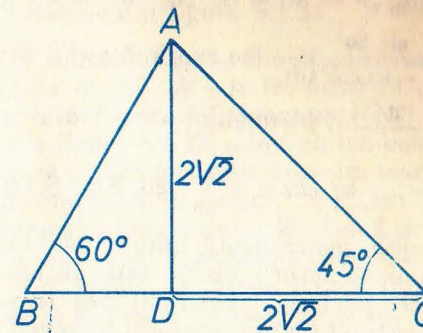


Fig. S.I.21

16.  $BF = a \cdot \cos^4 x$ ,  $AF = \sqrt{(a \cdot \cos x \cdot \sin x)^2 + (a \cdot \cos^2 x - a \cdot \cos^4 x)^2} = a \cdot \sin x \cdot \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ .

8. pag. 50-51

1.  $[-1, 1]$  fiecare valoare o singură dată! 2.  $[0, 1]$  în afară de capete, fiecare valoare de două ori! 3.  $x \approx 41^\circ \dots, x \approx 113^\circ$ ,  $\cos x = 1,6$  imposibil;  $x \approx 23^\circ \dots$ ,  $\sin x = -0,34$  deocamdată este imposibil,  $\sin x = 2$  imposibil. 4. Se folosește teorema lui Pitagora. 5.  $\sin(90^\circ + x) = \cos x$ ,  $\cos(90^\circ + x) = -\sin x$ . 6. Nu.

$-0,423 - 0,466) \approx 7,09$ .

8. a)  $AD = 2\sqrt{2}$ ,  $DC = 2\sqrt{2}$ ,  $BD = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ,  $AB = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ .

$BC = BD + DC = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)$  (fig. S.I.21).

b)  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$ ;  $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ .

9.  $m_1 = \sqrt{\frac{64 + 100}{2} - \frac{144}{4}} = \sqrt{46}$ ,  $m_2 = \sqrt{79}$ ,  $m_3 = \sqrt{106}$ .

10. Notind cu  $A$  unghiul de  $60^\circ$ ,  $AB = 8$ ,  $AC = 11$  obținem din teorema lui Pitagora generalizată  $BC = \sqrt{97}$ ;  $\sin B = \frac{11\sqrt{3}}{2\sqrt{97}}$ ;  $\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{97}}$  ( $B$  și  $C$  se vor calcula din tabele).

11.  $8\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ,  $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ;

$\sin 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ ,  $\cos 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ ; 12.  $16 \sin \frac{x}{2}$ ,

$8 \cos \frac{x}{2}$ ,  $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ ,  $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ . 13. 6.

14.  $R = \frac{6}{\sin 56^\circ} \approx \frac{6}{0,829} \approx 7,24$  (cu rotunjire prin adaos).

15.  $r = 6 \operatorname{tg} 31^\circ \approx 3,606$

16.  $\frac{14\sqrt{111}}{11}$

17. a)  $(d_{1,2})^2 = 89 \pm 80 \cos 50^\circ = 89 \pm 80 \sin 40^\circ$ . b)  $\frac{\sin \alpha}{5} = \frac{\sin \beta}{8} = \frac{\sin 50^\circ}{\sqrt{89 - 80 \cos 50^\circ}}$  (se exprimă  $\alpha$  și  $\beta$  prin sinusurile lor).

18. a)  $\frac{12\sqrt{14}}{5}$ , b) unghiul ascuțit dintre tangente are cosinusul  $\cos \alpha = \frac{25}{39}$ .

19.  $a = \dots$ ; b)  $\cos a = \frac{25}{26}$ . 20. Fig. S.I.22 — se aplică teorema



lui Pitagora generalizată unui triunghi cu laturile 13, 11, 6 și se obține că unghiul opus laturii de 13 este obtuz. Din lungimile proiecțiilor laturilor neperalele pe baze, apoi înălțimea trapezului. b) Rezultă aplicind Pitagora datelor obținute. c) Cu ajutorul teoremei lui Pitagora generalizată, din același triunghi. d) din triunghiurile dreptunghice din care am calculat diagonalele se deduc și unghiurile dintre diagonale și baze etc. e) Utilizind suma unghiurilor într-un triunghi. 21. Diagonala nu poate forma un triunghi împreună cu laturile de 4 și 6, deci ea formează un triunghi împreună cu baza de 16 și latura de 6. Cum  $12 < 16$ , latura de 6 nu poate forma unghi obtuz cu baza mare. Din teorema lui Pitagora generalizată, proiecția diagonalei de 12 pe baza mare este  $11 \frac{3}{8} > 4$ , deci trapezul este ca în prima figură. Se continuă într-un mod asemănător cu problema 20. 22. Sînt două soluții după cum acele capete sînt de părți diferite sau de aceeași parte a drepte:  $\sqrt{4^2 + (7 \pm 5)^2}$ .

23. În  $\triangle ABD$ ,  $\triangle BCD$  se calculează ( $M$  și  $N$  fiind proiecțiile lui  $A$ ,  $C$  pe  $BD$ )  $BM$ ,  $BN$  și apoi  $AM$ ,  $CN$  (teorema lui Pitagora generalizată, apoi teorema lui Pitagora). Se aplică problema 22. 24. Se folosește problema rezolvată (3) în cele 4 triunghiuri formate din cîte o diagonală și cîte două laturi...; la sfîrșit se folosește suma unghiurilor într-un triunghi. 25. După cum  $\sphericalangle B + \sphericalangle D$  este  $>$ ,  $=$  sau  $<$  decît  $180^\circ$ .

9. pag. 56-57

1. Cu notațiile din figura S.I.23:  $m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ .

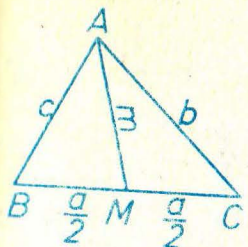


Fig. S.I.23



Fig. S.I.24

2. Se aplică teorema bisectoarei și apoi Stewart. Se obține:  $\frac{c^2 ab}{b+c} + \frac{b^2 ac}{b+c} - i^2 a = \frac{a^3 bc}{b+c}$  și de aici se scoate  $i$ , bisectoarea unghiului  $A$ ... 4-5. Enunțarea reciprocei nu ridică dificultăți, demonstrarea ei se face prin reducerea la absurd. 6. Se aplică teorema lui Menelaos în  $\triangle C_1 C_2 C_3$ , ținind seama că raportul segmentelor  $\frac{MC_1}{MC_2} = \frac{r_1}{r_2}$ , unde s-au folosit notațiile din figura S.I.24. 7. Se dau trei cercuri exterioare două cîte două  $C_1, C_2, C_3$ . Fie  $M_{12}$  intersecția tangentelor comune interioare ale cercurilor  $C_1, C_2$ ,  $M_{13}$  la fel pentru  $C_1, C_3$  iar  $M_{23}$  intersecția tangentelor comune exterioare... Demonstrați că  $M_{12}, M_{13}, M_{23}$  sînt coliniare. 8. Cu notațiile din figura S.I.25, adică ținind cont de tangentele (segmente) dintr-un punct la care sînt congruente, aplicăm teorema lui Ceva. 9. Exact același enunț, înlocuind „cercul înscris” cu „un cerc tangent celor trei laturi, nesituat în interiorul triunghiului”. 10. Două drepte perpendiculare pe segmentul de dreaptă care unește punctele, demonstrind că proiecția medianei triunghiului cu vîrf mobil pe latura fixată, rămîne mereu aceeași... 11. Se aplică rezultatul de la problema precedentă și se obține o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor (această dreaptă se numește axă radicală). 12. Axele radicale ale celor trei perechi de cercuri, ce se pot forma cu trei cercuri  $C_1, C_2, C_3$  ce n-au centre coliniare sînt concurente (sau coincid toate trei). Demonstrația pe baza problemei 11, la fel ca la concurența mediatoarelor în triunghi. 13. Avem  $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$  (Ceva),  $\frac{M'C}{M'B} = \frac{MB}{MC}$  etc. 14.  $BD^2 = MB^2 - MD^2$ . Se scriu alte asemenea 5 relații; se înlocuiesc în relația de demonstrat și se obține o identitate. Reciproca: dacă punctele  $D, E, F$  situate pe laturile  $BC, CA, AB$  ale unui triunghi satisfac din enunț, atunci perpendicularele ridicate în acele puncte pe laturile respective sînt concurente. Demonstrație. Fie  $M$  intersecția celor din  $D, E$  și  $F'$  piciorul per-

pendiculară din  $M$  pe  $AB$ . Folosind și teorema directă deducem că  $FA^2 - FB^2 = F'A^2 - F'B^2$ . Să presupunem că ambii membri sînt pozitivi, deci  $-FB^2 = F'A^2 - F'B^2$ . Să presupunem că mijlocului  $X$  a lui  $AB$  ca și  $B$ . Avem  $FA^2 - FB^2 = (FX - XA)^2 - (FX - XB)^2 = 2FX \cdot XA$  și deci rezultă  $FX = F'X$ ; ținînd seama de poziție,  $F = F'$ . Dacă ați dat alt „final de soluție” atenție la situația în care nu ambele puncte  $F, F'$  sînt între  $A$  și  $B$ . 15. Folosiți problema 1: un cerc cu centrul în mijlocul  $X$  al lui  $AB$ , sau mulțimea formată numai din  $X$ .

16.  $XA \equiv XZ$   $XA^2 = XZ^2$ ,  $XY^2 + AY^2 = XZ^2$   
 $YX^2 + (AT - AS)^2 = (XT + AS)^2$   
 $XY^2 = 2XT \cdot 4AS$   
 $AS = SS' = TZ$  (fig. S.I.26).

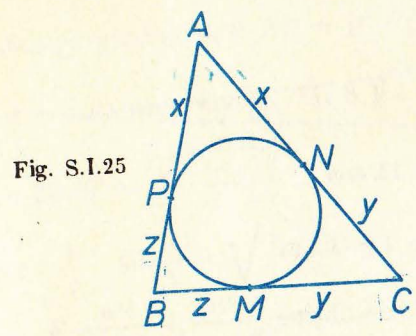


Fig. S.I.25

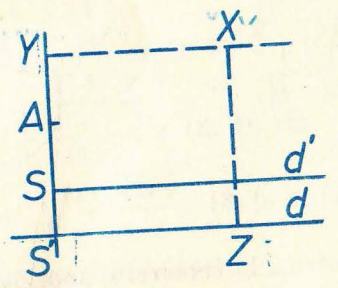
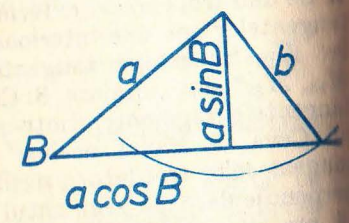


Fig. S.I.26

17. (Figura S.I.27)

Fig. S.I.27



- 0 soluție dacă  $B \geq 90^\circ$ ,  $b \leq a$
- 1 soluție dacă  $B > 90^\circ$ ,  $b > a$
- 0 soluție dacă  $B < 90^\circ$ ,  $b < a \cdot \sin B$
- 1 soluție dacă  $B < 90^\circ$ ,  $b = a \cdot \sin B$
- 2 soluții dacă  $B < 90^\circ$ ,  $a \cdot \sin B < b < a$
- 1 soluție dacă  $B < 90^\circ$ ,  $b \geq a$

$c = a \cdot \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B}$  unde semnul — apare numai dacă sînt 2 soluții.

### CAPITOLUL II

10. pag. 61-62

1. Semiprodusul catetelor. 2.  $S = \frac{a^2}{2}$ . 3.  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ . 4. a)  $S = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$   
 b) Raportul produselor laturilor care formează unghiurile congruente. 5.  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , unde  $p = \frac{a+b+c}{2}$  și  $a, b, c$  laturile triunghiului.

6.  $S_{ABC} = S_{ABE} + S_{BCE} = (S_{ADE} + S_{BDE}) + S_{BCE}$  (se aplică de două ori proprietatea de aditivitate). 7. Se prelungeste  $AM$  pînă taie  $BC$  în  $N$ . Avem  $S_{ABC} = S_{ABN} + S_{ANC} = (S_{ABM} + S_{BMN}) + (S_{CMN} + S_{CMA})$  și apoi  $S_{MBC} = S_{MNB} + S_{MNC}$  (de trei ori aditivitatea). 8. Unul din triunghiuri are aceeași arie cu un altul care împreună cu al doilea triunghi din enunț completează paralelogramul. 9. Se ține cont că mediana împarte un triunghi în alte două triunghiuri de aceeași arie. 10. Cu notațiile din figura S.II.1 ( $i$  este bisectoarea

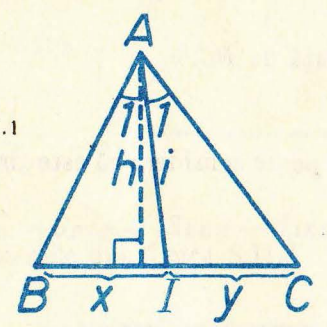


Fig. S.II.1

lui A) exprimăm în două moduri raportul ariilor:

$$\frac{S_{ABI}}{S_{ACI}} = \frac{xh}{yh} = \frac{bi \cdot \sin \frac{A}{2}}{ci \cdot \sin \frac{A}{2}}$$

Prin simplificare obținem relația cerută de

teorema bisectoarei.

11.  $\frac{FB}{FC} = \frac{S_{AFB}}{S_{AFC}} = \frac{AB \cdot AF \cdot \sin x}{AC \cdot AF \cdot \sin y} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{AC \cdot AD \cdot \sin x}{AB \cdot AD \cdot \sin y} = \frac{AB^2 S_{ACD}}{AC^2 S_{ABD}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ .

12. Reciproca teoremei lui Ceva, folosind 11. 13. Suma distanțelor este  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ , alt înălțimea triunghiului echilateral ( $a$  este latura lui). 14. (Figura S.II.2)

Fig. S.II.2

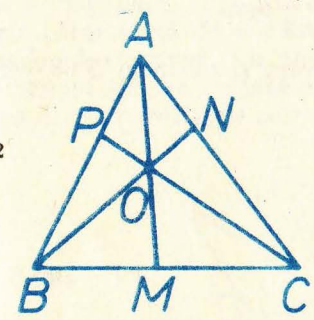
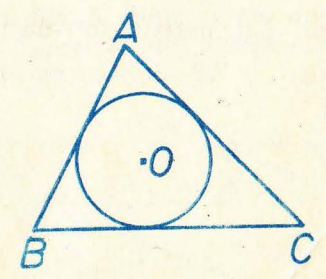


Fig. S.II.3



$\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{BM}{MC}$ ,  $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{CN}{NA}$ ,  $\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} = \frac{AP}{PB}$  avînd bazele  $AO, BO, CO$  respectiv comune. Egalînd produsul membrilor din stînga cu cel al membrilor din dreapta, obținem relația căutăată.

16. Fie  $ABC, A'B'C'$  și  $D, D'$  picioarele înălțimilor din  $A, A'$ . Avem  $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ , deci  $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$  și  $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{BC \cdot AD}{B'C' \cdot A'D'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2$ .

16. Fig. S.II.3)  $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot R + \frac{1}{2} BC \cdot R + \frac{1}{2} CA \cdot R = \frac{1}{2} (AB + BC + CA) R$  etc.

17.  $\frac{S_{ABN}}{S_{AMN}} = \frac{AB}{AM}$ ,  $\frac{S_{ABC}}{S_{ABN}} = \frac{AC}{AN}$ , teorema lui Thales etc.

18. Evident:  $\frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} ah$ .

19. Două paralele echidistante față de  $BC$ .

11. pag. 64-66

1.  $\sqrt{5}$  cm. 2.  $\frac{1}{2} d_1 d_2$ . Sau se mai poate considera că este „inscriptibil“ într-un dreptunghi (fig. S.II.4)

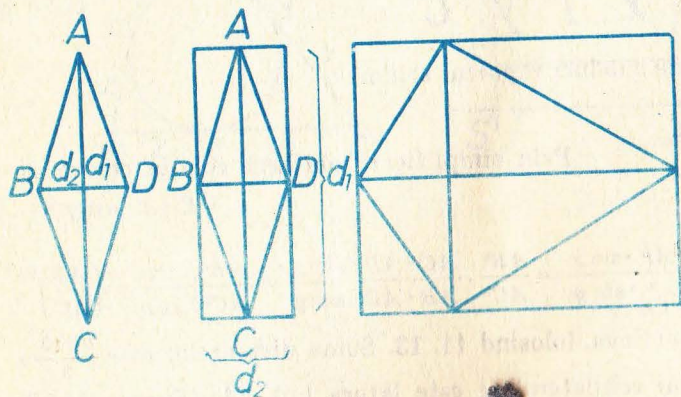


Fig. S.II.4

3. Procedeu identic cu cel de la romb:  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ .

4. Înscriem patrulaterul într-un paralelogram și obținem  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$  (fig. S.II.5)

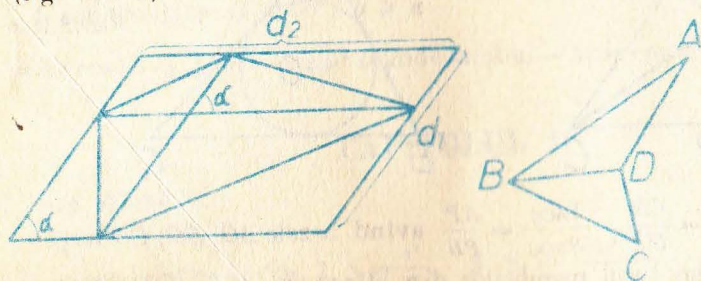


Fig. S.II.5

5.  $S = S_{BAC} - S_{DAC}$  (fig. S.II.5). 6. a) Una din descompuneri este cea din figura S.II.5. Ducem prin  $A$  și  $C$  paralele la  $BD$  și notăm cu  $h$  distanța dintre ele.

$S = \frac{1}{2} BD \cdot h$ . b) Alte două descompuneri le obținem fie prelungind  $AD$  până

taie  $CB$  în  $M$ , fie prelungind  $CD$  până taie  $AB$  în  $N$ . Scriem:  $S_{ABM} + S_{MDC} = S_{ABD} + S_{BMD} + S_{DMC} = S_{ABD} + S_{BDC}$ .

7. Cu notațiile din figura S.II.6 putem descompune patrulaterul  $EBCD$  ducând diagonală  $BD$ . Deci:

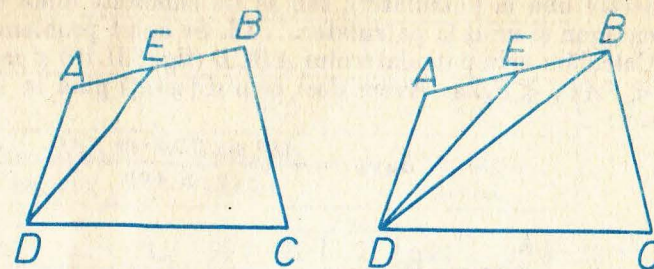


Fig. S.II.6

$S_{EBCD} + S_{AED} = S_{BDC} + (S_{EBD} + S_{AED}) = S_{BDC} + S_{ABD}$  q.e.d.

8. Cu notațiile din figura S.II.7

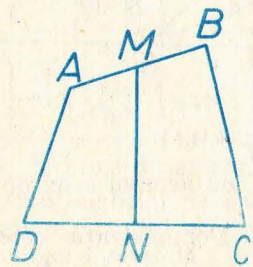


Fig. S.II.7

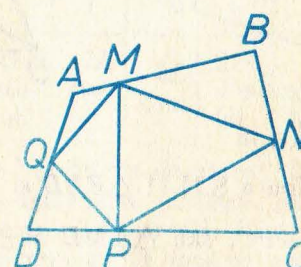


Fig. S.II.8

$S_{AMND} + S_{BMNC} = S_{AMND} + S_{MNC} + S_{MCB} = S_{AMCD} + S_{MCB} = S_{ABCD}$ . 9. Ducem o diagonală a lui  $MNPQ$  de pildă  $MP$  și se ajunge la problema precedentă (fig. S.II.8).

10. Lemă: Fie  $ABCDE$  un pentagon convex (fig. S.II.9). Atunci oricum am duce o diagonală, „descompunem“ pentagonul într-un triunghi și un patrulater a căror sumă de arii este constantă. Această constantă se va numi aria pentagonului convex. Cu notațiile din figură, după ce am dus o diagonală, de exemplu  $EC$ , să cercetăm  $S_{EDC} + S_{ABCE}$ . a) Mai ducem o diagonală dintr-una din extremitățile celei deja duse, de exemplu  $EB$ .

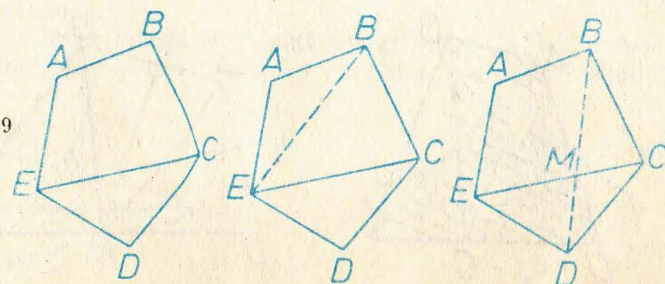


Fig. S.II.9

Avem  $S_{EDC} + S_{ABCE} = S_{EDC} + S_{ECB} + S_{EBA} = S_{EDCB} + S_{ABE}$ . În acest caz lema este demonstrată. b) Dacă ducem o diagonală care nu are ca extremități pe  $E$  sau  $C$ , de exemplu  $BD$ , avem:

$S_{ABCE} + S_{CED} = S_{ABME} + S_{BMC} + S_{MCD} + S_{MDE} = S_{ABDE} + S_{BDC}$  q.e.d.



11. Nu putem determina aria; contraexemplu; un dreptunghi cu lungimea și lățimea  $b$  are aria  $ab$ . Un paralelogram cu o latură  $a$  și alta  $b$ , dar cu un unghi între ele  $\alpha$ , ( $\alpha \neq 90^\circ$ ), are ca arie  $a \cdot b \cdot \sin \alpha < a \cdot b$ . 12. Dacă se cunosc toate laturile: trebuie duse dintr-un vârf sau două diagonale la pentagon (respectiv una la patrulater), sau să se cunoscute două unghiuri consecutive la pentagon și unul la patrulater... 13. Se aplică problema precedentă. 14. Calculăm aria patrulaterului  $ABCD$  (fig. S.II.10) și mai măsurăm unghiurile  $\sphericalangle FAD$ ,  $\sphericalangle FDA$ . Avem deci, prin diferență pînă la  $180^\circ$  și pe  $\sphericalangle AFD$  de aici:

$$S_{AFD} = \frac{AD^2 \sin FDA \cdot \sin FAD}{2 \sin AFD}$$

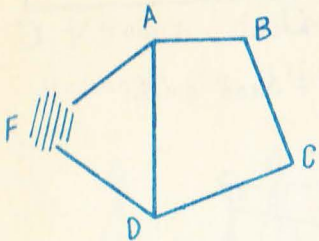


Fig. S.II.10

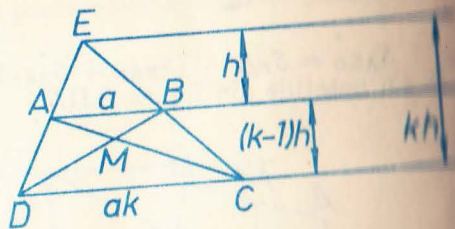


Fig. S.II.11

15.  $\frac{1}{5}$ . 16. În figura S.II.11  $\triangle EBD$  și  $\triangle EAC$  au aceeași arie, de asemenea și  $\triangle ABD$  și  $\triangle ABC$ , sau  $\triangle AMD$  și  $\triangle BMC$ . Demonstrația este imediată.  $S_{trap} = \frac{1}{2} ah(k^2 - 1)$ ,  $S_{AEB} = \frac{1}{2} ah$ ,  $S_{EAC} = \frac{1}{2} akh$ ,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} ah(k+1)$  și rapoartele ultimelor trei arii cu aria trapezului vor fi:  $1/(k^2 - 1)$ ,  $k/(k^2 - 1)$ ,  $1/(k+1)$ . Rămîne de exprimat în funcție de  $a, k, h$  ariile  $\triangle AMB$ ,  $\triangle BMC$  care se obțin din asemănarea lor cunoscînd suma înălțimilor lor.

18. Ducem dintr-unul din vîrfurile  $B$  sau  $C$  (de pildă din  $B$ ), paralela la diagonala ce nu trece prin acest vîrf ( $BE \parallel AC$ ) (fig. S.II.12).  $S_{AED} = S_{ABC}$ .

19. Cu notațiile din figura S.II.13 ( $M$  mijlocul lui  $AB$ ,  $N$  al lui  $DC$ )  $S_{ADN} = S_{BNC}$ . Dacă și  $S_{ADN} = S_{BNC}$  cum rezultă din ipoteză, atunci perpendiculele  $h_1 = h_2$  și problema este rezolvată.

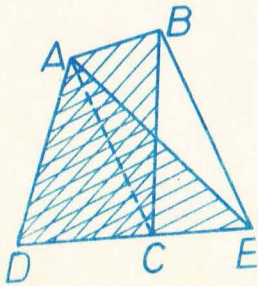


Fig. S.II.12

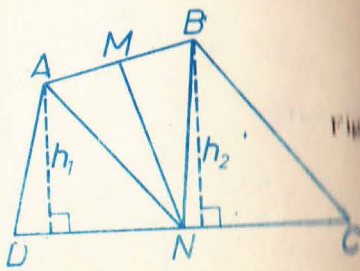


Fig. S.II.13

1.  $x = \frac{a}{3}$ . 2.  $x = \frac{a}{\sqrt{2} + 1} = a(\sqrt{2} - 1)$  (am raționalizat numitorul amplifi- cînd fracția cu  $\sqrt{2} - 1$ ) 3.  $a_n = \sqrt{R^2 - \frac{l_n^2}{4}} = \frac{1}{2}(\sqrt{4R^2 - l_n^2})$  4.  $l_n$

11.  $\sqrt{3} = \sqrt{2}$ . 5. Poligon regulat cu 12 laturi (congruente). 6. Facem din el două heptagoane stelate:

$n$	7	7	7
$k$	1	2	3
$f$	7	7/2	7/3
	heptagon convex	heptagon stelat	heptagon stelat

$n$	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f$	21	$\frac{21}{2}$	7	$\frac{21}{4}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{21}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{21}{11}$
	21L cvx	21L stelat	7L cvx	21L stelat	21L stelat	7L stelat	3L cvx	21L stelat	7L stelat	21L stelat	21L stelat

8.  $180^\circ$ . 9. NU! contraexemplu: rombul diferit de pătrat. 10. NU! Contraexemplu: dreptunghiul. Se ajunge la întrebarea firească: oare pentru orice  $n \geq 4$  se poate construi un contraexemplu? Înceercați! Pentru a doua întrebare puteți duce o paralelă... 11. N-are importanță dacă octogonul este regulat sau nu. 12... Triunghiurile fiind congruente avînd laturile respectiv congruente, sînt congruente și înălțimile...

12 pag. 80-81

$$\frac{(2n-3)\sqrt{3}}{12}$$

$$R^2 \left( \frac{2n}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

13. Se află aria „întregii“ figuri, adică se adună aria triunghiului cu aria semicercului desenat pe catete. Din această sumă se scade aria semicercului desenat pe ipotenuză.

14. Unghiurile de lîngă latura de 15 sînt ascuțite (fig. S.II.15). Aria căutată este suma ariilor celor două sectoare din care se scade dublul ariei triunghiului.

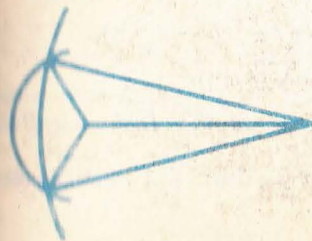


Fig. S.II.14

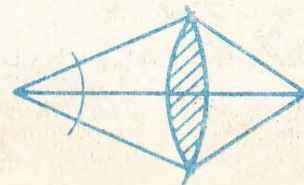


Fig. S.II.15

5. Figura S.II.14 și aria căutată este aria sectorului din cercul mic plus aria sectorului din cercul mare minus dublul ariei triunghiului format de cele două raze și linia centrelor. 6. Aria trapezului minus suma ariilor celor două sectoare (fig. S.II.16).

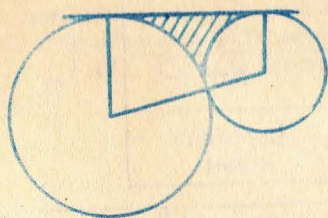


Fig. S.II.16

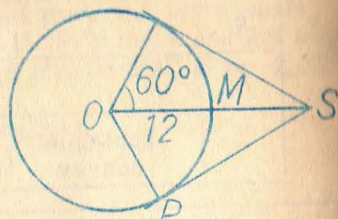


Fig. S.II.17

7.  $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

8. În figura S.II.17  $\angle O = 60^\circ$ ,  $TS = SP = 6\sqrt{3}$ , arc  $TMP = 4\pi$ .  
Conturul are  $8\pi + 12\sqrt{3}$ .

9. Fig. S.II.18

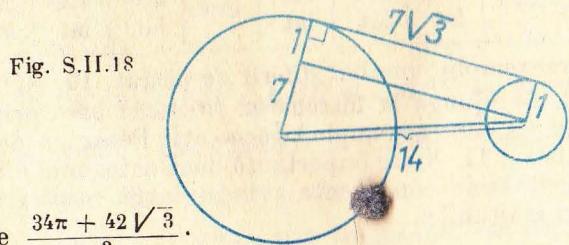


Fig. S.II.18

Se găsește  $\frac{34\pi + 42\sqrt{3}}{3}$ .

10.  $L \cap = \pi R$ ;  $S \cap = \frac{\pi R^2}{2}$ .

11. Din aria unui triunghi echilateral de latură 4 scădem aria unui semicerc de rază 2; obținem  $S \doteq 2(2\sqrt{3} - \pi)$ ;  $P = 2\pi$ .

12.  $S = 36 - 9\pi$  (procedăm asemănător cu 11);  $P = 6\pi$ .

### CAPITOLUL III

14. Pag. 54

1.  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$ ,  $\vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AC} = 0$  adunăm și folosim  $\vec{CA} + \vec{AC} = 0$ .

2.  $\vec{AM} = \vec{MB}$ , sau relația echivalentă  $\vec{MA} + \vec{MB} = 0$ .

3. Fie M mijlocul;  $\vec{AC} = -\vec{CA} = \vec{AM} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{DM} = -\vec{BD}$ .

4.  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$ ,  $\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DB} = 0$  deci  $\vec{CA} = \vec{DB}$  etc., sau

altfel, adunăm  $\vec{BC}$  la relația din ipoteză:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CD} + \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{BD} = -\vec{DB}.$$

6. Avem (probl. 2)  $\vec{AO} = \vec{OB}$ ,  $\vec{BO'} = \vec{O'C}$ . Deci  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AO} + \vec{OB} + \vec{BO'} + \vec{O'C} = 2\vec{OB} + 2\vec{BO'} = 2\vec{OO'}$

7.  $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB}$ ,  $\vec{AC} = \vec{AD} - \vec{CD}$ ,  $\vec{BC} = -\vec{DB} - \vec{CD}$   
Înlocuim și obținem, după desfacerea parantezelor,  $O$  în stînga.

7. Aplic. de ex. 6:  $\vec{MA} \vec{NB} + \vec{MN} \vec{BA} + \vec{AN} \vec{BM} = 0$

Înlocuiesc  $\vec{AN}$  cu  $-\vec{NA}$  și, ca urmare a proporției, deduc

$$\vec{MN} \cdot \vec{BA} = 0, \text{ dar } A \neq B, \text{ deci } M = N.$$

15 pag. 57

1. Dacă unul este alungit așa este și celălalt. Dacă fie  $M$  punctul de întîlnire a lui  $O'y'$  cu  $Ox$  de exemplu  $\sphericalangle x'O'y'$  și  $\sphericalangle xMy'$  rezultă corespondente (sau identice) analog  $\sphericalangle xMy'$  și  $\sphericalangle xOy$ .

2. Unul din ele și opusul la vîrf al celuilalt satisfac ipoteza problemei 1.

3. Unul din ele și cel obținut din celălalt înlocuind una din laturi cu „prelungirea” ei sînt în ipoteza problemei 1.

4. Fie  $M, N$  punctele în care paralela taie  $AB, AC$  (fig. S.III.1).

Vom avea  $\frac{\vec{AM}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{AN}}{\vec{AC}} = \frac{\vec{MN}}{\vec{BC}}$ . 5. În figura S. III. 2

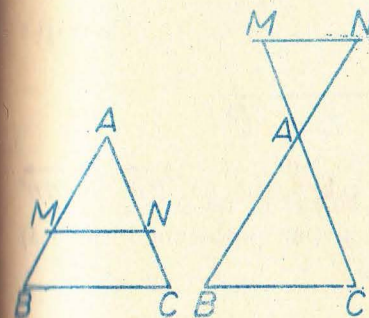


Fig. S.III.1

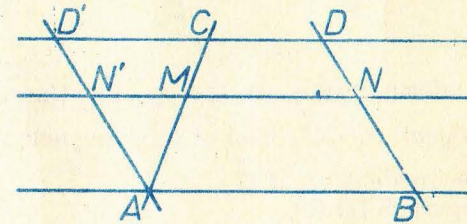


Fig. S.III.2

$AD' \parallel BD$ ,  $y = \vec{MN} = \vec{MN'} + \vec{N'N}$ ;  $\frac{\vec{MN'}}{\vec{CD'}} = \frac{\vec{AM}}{\vec{AC}}$  (probl. 4);  $\vec{N'N} = \vec{AB}$ ;

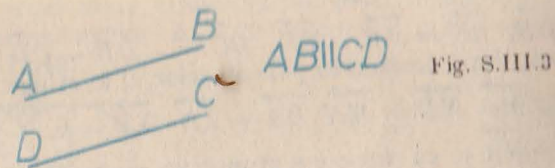
$\vec{CD'} = \vec{CD} + \vec{DD'} = \vec{CD} - \vec{AB}$  se înlocuiesc una cu alta și rezultă (evident, în expresie apar și  $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{AC}$  drept constante).

6. Fie  $D$  mijlocul lui  $AB$ ,  $D'$  piciorul perpendicularei din  $D$  pe  $d$ .

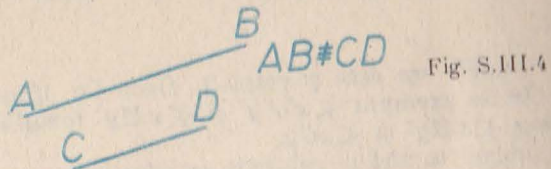
Avem, făcînd  $x = \frac{\vec{AC}}{2}$  în problema 5:  $\vec{DD'} = \frac{1}{2} (\vec{AA'} + \vec{BB'})$  iar făcînd

$x = \frac{\vec{AC}}{3}$  în problema 5:  $\vec{GG'} = \frac{2\vec{DD'} + \vec{CC'}}{3}$ , înlocuim etc.

1.  $a, b$  și nu  $c$  (fig. S.III.3)



$a, c$  și nu  $b$  (fig. S.III.4)



$b, c$  și nu  $a$  absurd.

2. Luăm  $\vec{CD}$  echivalent cu  $\vec{BA}$  (fig. S. III.5). Este tot una cu a lua  $\vec{AD}$  echivalent cu  $\vec{BC}$ .

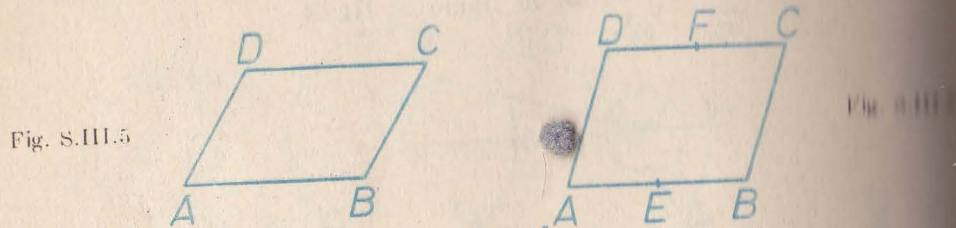


Fig. S.III.5

Fig. S.III.5

3. Conform problemei rezolvate obținem  $\vec{AA'}$  echivalent cu  $\vec{BB'}$  și  $\vec{BB'}$  echivalent cu  $\vec{CC'}$ , deci  $\vec{AA'}$  echivalent cu  $\vec{CC'}$  și (iar problema rezolvată)  $\vec{AC}$  echivalent cu  $\vec{A'C'}$ .

4. Figura S.III.6

$\vec{AB}$  și  $\vec{DC}$ ;  $\vec{AE}$ ,  $\vec{EB}$ ,  $\vec{DF}$  și  $\vec{FC}$ ;  $\vec{AD}$ ,  $\vec{EF}$  și  $\vec{BC}$ ;  $\vec{AF}$  și  $\vec{EC}$ ;  $\vec{BF}$  și  $\vec{ED}$  precum și cele obținute prin „permutarea capetelor în fiecare segment orientat”

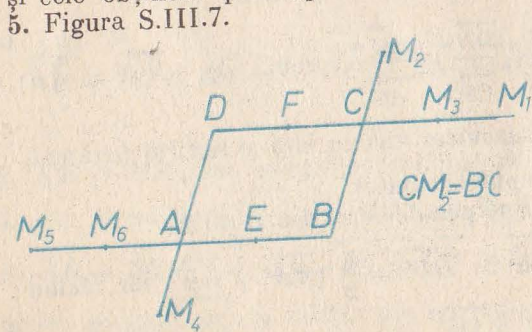


Fig. S.III.7

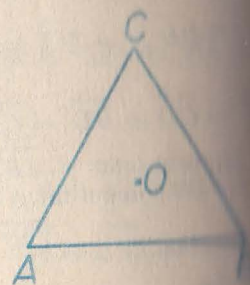


Fig. S.III.8

moduri; iau  $CM_1 \equiv DC$ ,  $CM_2 \equiv BC$ ,  $CM_3 = \frac{1}{2} CM_1$ ,  $AM_4 \equiv AD$ ,  $AM_5 \equiv AB$ ,  $AM_6 = \frac{1}{2} AM_5$  și avem  $\vec{AC}$  echivalent cu  $\vec{BM}_1$ ,  $\vec{EM}_3$ ,  $\vec{DM}_2$ ,  $\vec{M}_4B$ ,  $\vec{M}_5D$ ,  $\vec{M}_6F$ .

ii.  $\vec{OA}$  echivalent cu  $\vec{BD}$  echivalent cu  $\vec{CE}$ .  $D$  este simetricul lui  $C$  față de  $O$ , iar  $E$  al lui  $B$ .

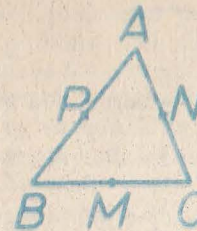


Fig. S.III.9

i.  $\vec{AP}$ ,  $\vec{PB}$ ,  $\vec{NM}$  și alte 2 triplete.

17. pag. 94-95



$$\sphericalangle(AB, AC) + \sphericalangle(BC, BA) + \sphericalangle(CA, CB) = 180^\circ.$$

În al doilea caz se obține  $-180^\circ$  care este considerat tot una cu  $180^\circ$ .

ii. Fig. S.III.10 b



$$\sphericalangle(AB, AC) = 0^\circ, \sphericalangle(BC, BA) = 180^\circ, \sphericalangle(CA, CB) = 0^\circ \text{ etc.}$$

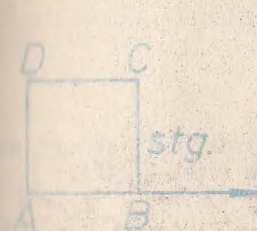


Fig. S.III.11 a

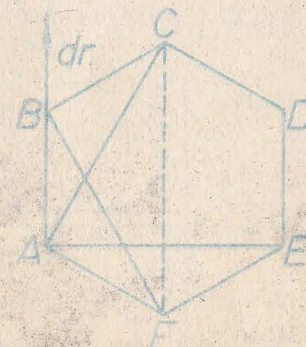


Fig. S.III.11 b

$0^\circ, -90^\circ, -45^\circ, -90^\circ$

$-120^\circ, -90^\circ, 30^\circ, -90^\circ$

5. Dacă înlocuim  $a'$  cu  $a''$  (fig. S.III.12) obținem:  
 $\sphericalangle(a'', b') = \sphericalangle(a'', a') + \sphericalangle(a', b') = 180^\circ + \sphericalangle(a', b')$

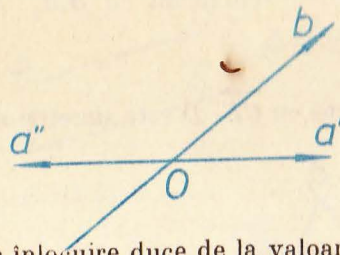


Fig. S.III.12

Deci o astfel de înlocuire duce de la valoarea  $x$  la  $x + 180^\circ$ . O nouă înlocuire va duce la  $x + 180^\circ = x$  etc.  
 Deci două valori  $x$ ;  $x + 180^\circ$ . Dublul lui dă valorile  $2x$ ,  $2x + 360^\circ$ , deci una singură!

6. Geometric două: bisectoarea  $\sphericalangle(h, k)$  și „prelungirea“ ei. Se poate și prin calcul  $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h, b) + \sphericalangle(b, k)$  deci  $2\sphericalangle(h, b) = \sphericalangle(h, k)$ , dar putem adăuga un multiplu la  $360^\circ$  deci  $\sphericalangle(h, b) = \frac{1}{2} \sphericalangle(h, k) + 180^\circ n$ . Se obțin 2 valori din

tincte  $\frac{1}{2} \sphericalangle(b, h)$  și  $\frac{1}{2} \sphericalangle(h, b) + 180^\circ$ .

7. Vezi problema 1

$$\begin{aligned} \sphericalangle(AD, AB) + \sphericalangle(DB, DA) + \sphericalangle(BA, BD) &= 180^\circ \\ \sphericalangle(CB, CD) + \sphericalangle(BD, BC) + \sphericalangle(DC, DB) &= 180^\circ \\ \text{Adun și țin seama de } \sphericalangle(BA, BD) + \sphericalangle(BD, BC) &= \sphericalangle(BA, BC) \\ \sphericalangle(DC, DB) + \sphericalangle(DB, DA) &= \sphericalangle(DC, DA) \end{aligned}$$

Suma este  $-360^\circ$

Suma este  $+360^\circ$

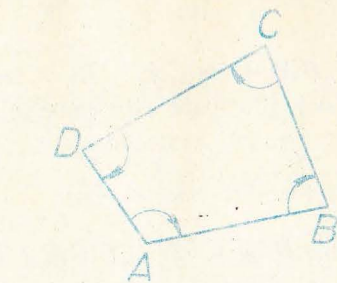
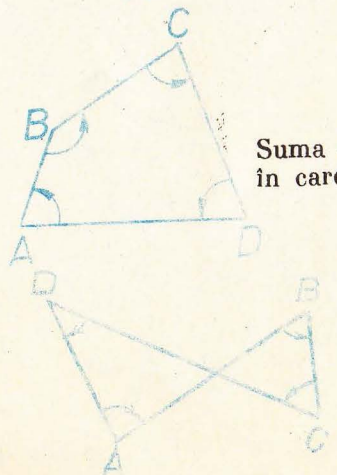


Fig. S.III.13

Fig. S.III.14

Suma este  $360^\circ$  (și încă un caz în care este  $-360^\circ$ )

Fig. S.III.15



Suma este 0

- $U(A) \cup U(B) = AB$  etc.
- Rezultă, dacă de ex.,  $B$  este între  $A$  și  $C$ , că  $U(A) \cup U(C) = U(A) \cup U(B) \cup U(C)$ , deci  $U(A), U(B), U(C)$  nu pot forma un triunghi.
- Cazul 3.
- Vezi raționamentul de la probl. 2.
- Cel mai simplu este: în figura imagine diagonalele se taie în părți congruente. (Considerăm imaginea punctului de intersecție a diagonalelor patrulaterului inițial, aplicăm problema 4). O adaptare a raționamentului de la problema 2 arată că 3 puncte necoliniare merg în 3 puncte necoliniare.
- Imaginea este paralelogram și folosim și problema 3.
- Problema 2 ne spune că imaginea este formată din puncte coliniare. Fie  $A, B$  două puncte pe dreapta inițială,  $X$  un punct pe dreapta  $U(A) \cup U(B)$ . Dacă semidreptele  $U(A)X, U(A) \cup U(B)$  coincid, fie  $Y$  pe semidreapta  $AB$  sau înclt  $Y = U(A)X$ ; vom avea  $U(Y) = X$  (probl. 2. 4). În caz contrar fie  $Y$  pe prelungirea semidreptei  $AB$ .
- Cazul 3 de congruență.

- Translația  $T$ , fiind isometrie, duce un cerc dat (de centrul  $O$  și raza  $R$ ) într-o parte a cercului de centru  $T(O)$  și raza  $R$ . Fie  $X$  un punct pe acest ultim cerc și fie  $Y$  astfel ca  $\overrightarrow{XY}$  echivalent cu  $\overrightarrow{T(O)O}$ . Rezultă  $\overrightarrow{T(O)X}$  echivalent cu  $\overrightarrow{OY}$  (problema rezolvată pag. 91), deci  $OY$  are lungimea  $R$ ,  $Y$  este pe primul cerc, iar  $U(Y) = X$  deoarece  $\overrightarrow{YX}$  rezultă echivalent cu  $\overrightarrow{OT(O)}$  deci cu vectorul translației  $T$ .
- Dacă  $O$  și  $O'$  sînt centrele, consider  $\overrightarrow{T_{OO'}}$ .
- $\overrightarrow{AT(A)}$  este echivalent cu  $\overrightarrow{BT(B)}$  deci  $\overrightarrow{T(A)T(B)}$  este echivalent cu  $\overrightarrow{AB}$  (problema rezolvată pag. 91), deci s-a văzut (probl. 7, set 18 pag. 99) că o isometrie duce o dreaptă  $AB$  în dreapta  $T(A)T(B)$  etc.
- Fie  $AB$  o dreaptă. Pentru a fi transformată în ea însăși de  $T_v$  (știm că este dusă în una paralelă cu ea sau în ea însăși) trebuie ca punctul  $C = T_v(A)$ , definit de „ $\overrightarrow{AC}$  echivalent cu  $v$ “ să se afle pe  $AB$  etc. 5. Fie  $AB$  segmentul dat,  $MN$  congruent și paralel cu  $AB$  este tot una cu  $\overrightarrow{MN}$  este echivalent cu  $\overrightarrow{AB}$  sau cu  $\overrightarrow{BA}$ , deci cu:  $N$  este fie transformat din  $M$  prin translația  $T_{\overrightarrow{AB}}$ ,

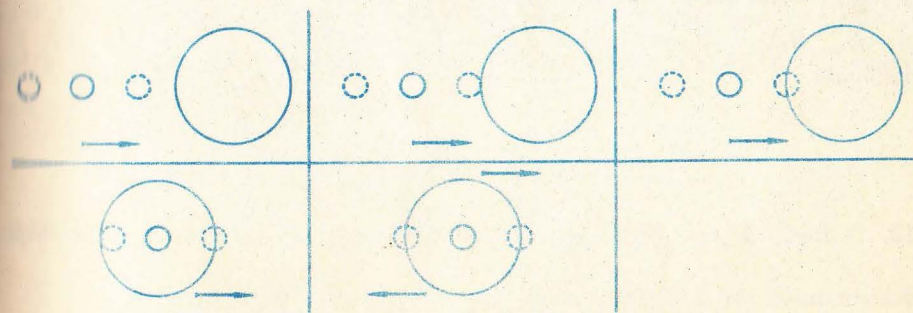
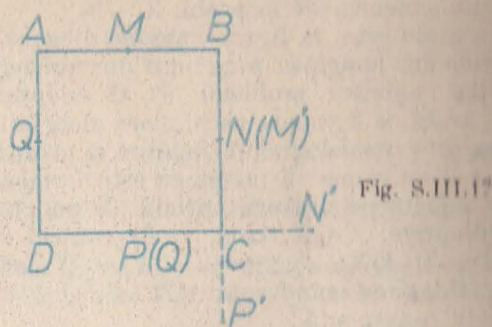


Fig. S.III.16

... prin  $T_{BA}$ . Deci se alege  $N$  la una din intersecțiile cercului al doilea cu ...  
 formatele primului cerc prin cele două translații. Pot fi 0, 1, 2, 3, 4 soluții.  
 6. La fel 0, 1, 2, 3, sau 4 soluții.  
 7. Le-am notat  $M'$  etc.

$$CN' \equiv CP' \equiv CN.$$



8.  $DD' \equiv OD$ ,  $T_{BO} = T_{EO}$  deci soluție asemănătoare cu primul caz.

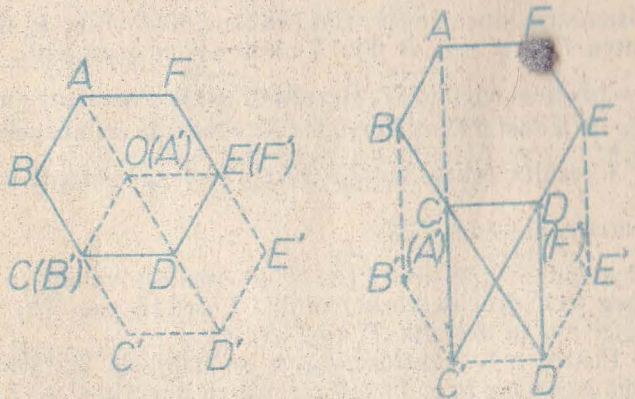


Fig. S.III.18 a

Fig. S.III.18 b

9. S-a văzut că din  $\overrightarrow{AT(A)}$  echivalent cu  $\overrightarrow{BT(B)}$  rezultă  $\overrightarrow{AB}$  echivalent cu  $\overrightarrow{T(A)T(B)}$  etc. 10. Vezi problema 9. 11. Vezi problema 8 și problema 9, pag. 15, pag. 89. 12. Nu, deoarece dacă  $T$  este translația  $T_r$  și  $A$  este un vârf al poligonului și  $B_1 = T_r(A)$ , atunci poligonul va trebui să conțină ca vârfuri  $A, B_1, B_2, \dots$  coliniare și cu  $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_2B_3} = \dots$  care rezultă două drepte distincte.



Fig. S.III.19

13. O dreaptă (vezi probl. 4), două drepte paralele, intersecția a 3 semidreptelor determinate de 2 drepte paralele.



Fig. S.III.20

14. Fie  $T$  acea transformare,  $A$  un punct fix,  $X$  unul variabil.  $B = T(A)$ . Dacă  $Y = T(X)$  atunci  $\overrightarrow{AX}$  echivalent cu  $\overrightarrow{BY}$  deci (problema rezolvată la pag. 91)  $\overrightarrow{XY}$  echivalent cu  $\overrightarrow{AB}$ , adică  $Y = T_{AB}(X)$ .

30 pag. 101-102

1. Rotație aplicată centrului  $O$  îl duce în  $O'$  ( $O' = R_{c,u}(O)$ ). Fie  $M' = R_{c,u}(M)$ . Rotația fiind o isometrie,  $O'M' \equiv OM$  dar  $O'$  este fix deci  $M'$  descrie un cerc de aceeași rază cu a primului. Dacă punctele  $C = O$  (coincide  $C$  cu  $O$ ) atunci cercul se va transforma în el însuși. 2. Centrul  $C$  al rotației se va găsi pe mediatoarea lui  $OO'$  (linia centrelor) și unghiul  $\sphericalangle OCO'$  poate fi construit cît vrem de mare.

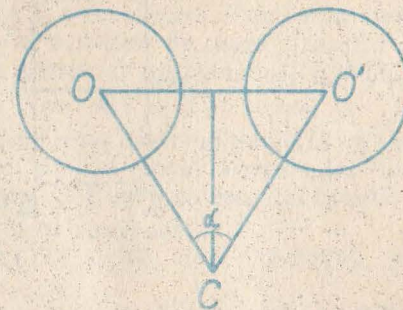


Fig. S.III.21

3. Rotația este o isometrie. considerăm  $M' = R_{c,u}(M)$ ,  $N' = R_{c,u}(N)$  și  $P' = R_{c,u}(P)$  imaginile prin rotație a punctelor coliniare  $M, N, P$ . ( $N$  între  $M$  și  $P$ ). Dacă  $M', N', P'$  nu sînt coliniare rezultă  $M'N' + N'P' > M'P'$ . Dar  $MN + NP = MP$  dar  $M'N' \equiv MN$ ,  $N'P' \equiv NP$ ,  $MP \equiv M'P'$ , contradicție!

4. Pe semidreapta  $OX$  luăm punctele  $A$  și  $B$  ( $A$  între  $O$  și  $B$ ). Deci  $OA + AB = OB$ . Ele au imaginile respectiv  $A', B'$  iar  $O'$  îi corespunde lui  $O$ . Dacă  $A'$  și  $B'$  nu se găsesc de aceeași parte a lui  $O'$  rezultă că  $A'B' + O'A' > O'B'$  dar  $A'B' \equiv AB$ ,  $O'A' \equiv OA$ ,  $O'B' \equiv OB$ . De aici contradicția. 5. Considerăm problema rezolvată în cazul în care  $d \parallel d'$ . Dacă rotim  $A$  cu  $60^\circ$  în jurul lui  $O$ , ajungem în  $B$ . Deci soluția revine la a roti pe  $d$  cu  $60^\circ$  în jurul lui  $O$  și acolo unde „rotita“ lui  $d$  taie dreapta  $d'$  avem punctul  $B$ . O soluție diferită se poate da și prin asemănare considerind că toate triunghiurile echilaterale sînt asemenea și împărțind latura  $O'A'$  a unui „model“ echilateral  $O'A'B'$  cu punctul  $C'$  într-un raport egal cu  $\frac{OC}{CA}$ . Găsim apoi prin Thales o patra proporțională, segmentul  $O'D'$ , putem construi apoi pe „model“

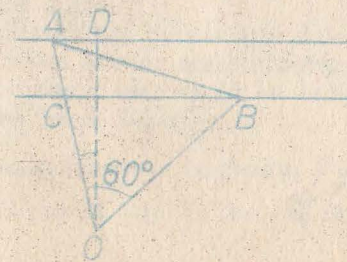


Fig. S.III.22

unghiul  $A'O'D'$  și problema este rezolvată. Dacă  $d$  și  $d'$  nu sînt paralele, procedăm totuși ca în prima soluție.

Avem o infinitate de soluții dacă  $d = R_{0,60^\circ}(d')$  adică  $d'$  este chiar „rotită” cu  $60^\circ$  a dreptei  $d$ .

6. Rotim primul cerc  $O$  cu  $90^\circ$  în jurul punctului fix  $C$  și intersectăm cu cercul  $O'$ . Pot fi 0, 1, 2, 3, 4 soluții. 7. Cele de  $120^\circ$  cu centrul  $C$  în centrul cercului circumscris triunghiului echilateral dat. 8, 9. Soluții asemănătoare cu 7. 10. Dacă  $O$  este „centrul hexagonului” regulat,  $R_{0,\pm 120^\circ}$  sînt rotațiile care rezolvă problema în afară de rotația de „argument” 0.

11. Soluțiile sînt pătratele punctate:

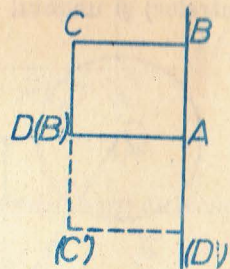


Fig. S.III.23

12. Soluțiile sînt hexagoanele punctate:

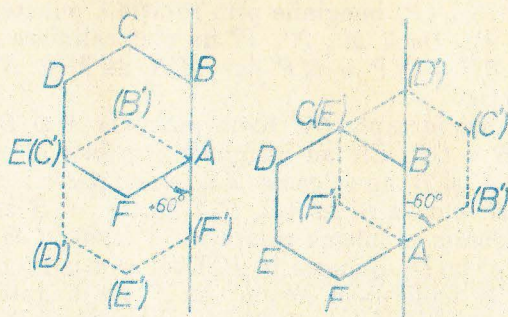


Fig. S.III.24

13. a) Cu notațiile din figură

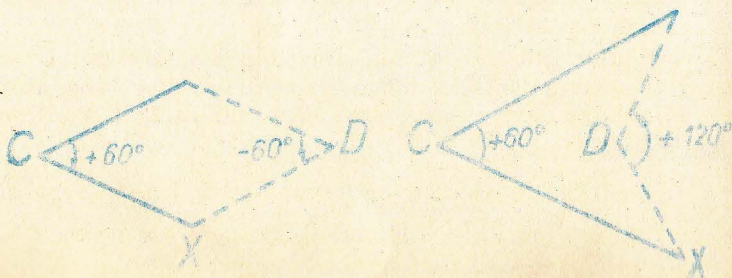


Fig. S.III.25

## PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului. Pentru că medianele se intersectează la două treimi de vîrf și o treime de „bază”, rezultă  $BG = 3$  cm,  $GC = 4$  cm. Folosiți reciproca teoremei lui Pitagora,  $\sphericalangle BGC = 90^\circ$ , și teorema lui Pitagora și  $AC = \sqrt{73}$  cm,  $AB = 2\sqrt{13}$  cm.

2. Folosim faptul că tangentele duse dintr-un punct la un cerc sînt congruente, aici  $BC \equiv AD$ ,  $BC = 5$  cm. Apoi, fie prin teorema lui Pitagora, aflînd înălțimea, fie prin teorema înălțimii, aflînd raza cercului înscris, obținem  $r = 2$  cm.

3. a) Triunghiurile au unghiuri congruente.

b) În  $\triangle OCA$ ,  $\sphericalangle OAC = \sphericalangle COA = 36^\circ$ , deci  $CA \equiv OC$ . Dar și  $\triangle CAB$  este isoscel deci  $CA \equiv AB$ .

4. Pentru  $a, b$ , se folosește problema precedentă; c) Prin asemănarea triunghiurilor  $ACB$  și  $OAB$ ; d) Se efectuează înmulțirea în membrul drept. Din c) și d) rezultă că produsul este 0 cînd unul din factori este 0, deci numai  $l = R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

5. Aplicînd teorema lui Pitagora, se ajunge la ecuația  $64 - 16x + x^2 + 16 = x^2$ , deci  $x = 5$  cm.

6. Din asemănare rezultă că  $R_2^2 = R_1 R_3$  și de aici obținem relația imediată.

(În fond, se poate exprima și  $\widehat{O_3VT'}$  în trei moduri.)

7. Patrulaterul  $OMPN$  este dreptunghi, deci  $MN \equiv OP$ .

8. Triunghiul  $APM$  este dreptunghic și are un unghi de  $50^\circ$ . Deci  $\sphericalangle MPA = 40^\circ$ . Punctul  $P$  vede segmentul fie sub un unghi de  $40^\circ$  cînd  $M, N$  sînt pe semicercuri diferite determinate de  $AB$ , fie de  $140^\circ$  cînd sînt pe același semicerc. Deci  $P$  descrie un cerc.

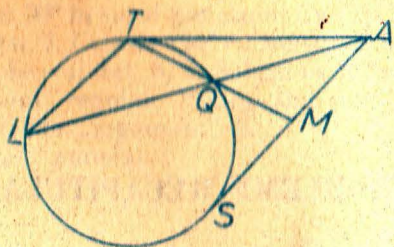
9. a)  $OE = OD$  (mediane în triunghiuri dreptunghice cu aceeași ipotenuză), și  $\sphericalangle EOD$  este unghi la centru care subîntinde același arc cu unghiul înscris  $\sphericalangle EBD = 30^\circ$ . (Patrulaterul  $BEDC$  este inscriptibil); b)  $OE$  este minim cînd  $BC$  este minim, deci cînd este perpendicular pe  $AB$ .  $BC$  în acest caz este  $4\sqrt{3}$  cm și  $OE = 2\sqrt{3}$  cm.

10. Considerăm „jumătate” din dreptunghi determinat de o diagonală. Triunghiul dreptunghic astfel format are înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, maximă atunci cînd aceasta este egală cu raza. Deci dreptunghiul căutat este pătratul și aria sa va fi 2.

11.  $\frac{10}{3}$  cm. 12. Din asemănarea triunghiului  $TMA$  cu  $\triangle AMQ$  (fig. S.R.1) și aplicînd puterea punctului  $M$  față de cerc, se obține relația cerută.

13. Se compară triunghiurile  $BDA$  și  $BCD$ . Cercul circumscris  $\triangle ABC$  este tangent la dreapta  $BD$ . Se folosește puterea punctului.

Fig. S.R.1



14.  $x = \frac{12}{7}$ ,  $y = \frac{bc}{b+c}$ . 15. Triunghiul  $\triangle EAC \equiv \triangle BAG$ . De asemenea,  $\triangle AEH = \triangle AGJ$  etc... 16.  $S = R^2(2\sqrt{2}-1)$ . 17.  $S = 256 \text{ cm}^2$ . 18.  $x = \frac{a}{8}$ .  
 19.  $S = \frac{a^2}{4}\pi$ . 20.  $a \cdot \frac{\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{3}$ ;  $2a \cdot \frac{\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{3}$ ;  $a \cdot \frac{\sqrt{21-6\sqrt{3}}}{3}$ . 21.  $x = \frac{6}{5} = 1,2$ . 22.  $MN = \frac{8a\sqrt{5}}{25}$ . 23. Centrul de simetrie este intersecția celor două axe. Nu, contraexemple: paralelogramul! 24. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. Raza căutată este  $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ , unde  $R$  este raza cercului inițial. 25. 1) Se arată că  $\sphericalangle AMN + \sphericalangle MND = 180^\circ$ ; 2) Un segment de dreaptă paralel cu  $AB$  și de două ori mai mic (se completează, prelungind  $AC$  și  $BD$ , un paralelogram); 3) Mediatoarele din enunț sînt și bisectoarele unghiurilor  $B$  și  $A$ . În fond, chiar mediatoarele din enunț sînt „fixe”; 4)  $CD = \sqrt{3x^2 + a^2 - 3ax}$ . 26. a) Ortocentrul descrie un arc capabil de suplementul unghiului  $A$ , deci simetric cu „celălalt” arc. b) Se determină poziția aceluși vîrf. Acest vîrf împreună cu un capăt al înălțimii și cu simetricul ortocentrului față de celălalt capăt determină cercul circumscris triunghiului etc. 27. Considerăm problema rezolvată, prelungim  $CC'$  pînă taie  $A'B'$  în  $C_1$ , ducem din  $B$  paralela  $BE$  la  $CC'$  ( $E \in A'B'$ ) și constatăm că  $A'B'$  este împărțit de  $E$  și  $C_1$  în trei părți congruente. Analog, procedăm pe celelalte două laturi  $A'C'$  și  $C'B'$ . 28.  $S = 2(a+b)\sqrt{ab}$ . 29. Se aplică teorema lui Thales de 4 ori,  $l = \frac{12}{7}$ . 30. Se aplică teorema bisectoarei și faptul că bisectoarea unghiului  $A$  trece prin mijlocul arcului  $BC$ . 31.  $TS = \sqrt{6}$ . 32. a)  $\triangle AOB \sim \triangle AOC$ , unghiurile din  $D$  fiind suplimentare, triunghiurile fiind isoscele și subîntinzînd unghiuri la centru de măsuri egale. b)  $D$  să fie piciorul înălțimii. 33.  $\frac{(4\sqrt{3}-1)\pi - 6\sqrt{3}}{24} l^2$ .  
 34.  $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} l^2$ . 35.  $r = \frac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}$ ,  $\frac{1}{2}bc - \frac{24}{(b+c+\sqrt{b^2+c^2})^2} \pi$ .  
 36. Dacă  $AB$  n-ar fi paralel cu  $CD$ , și dacă s-ar întîlni în partea stîngă a figurii II.59, atunci înălțimea din  $D$  a  $\triangle AMD$  ar fi mai mică decît înălțimea din  $Q$  a  $\triangle BNQ$  și de asemenea înălțimea din  $M$  a  $\triangle MDP$  ar fi mai mică decît înălțimea din  $B$  a  $\triangle BCQ$ ; deci, ar rezulta aria  $AMPD <$  aria  $BNQC$ .  
 37. 8 cm.

## CUPRINS

Probleme recapitulative din materia clasei a 6-a.....	3
<b>CAPITOLUL 1</b>	
Relații metrice.....	7
Introducere.....	7
Teorema lui Thales.....	11
Teorema lui Thales în cazul rapoartelor reale oarecare.....	12
Teorema fundamentală a asemănării.....	19
Triunghiuri asemenea. Cazurile de asemănare.....	26
Puterea unui punct față de un cerc.....	32
Relații metrice în triunghiul dreptunghic.....	39
Sinusul și cosinusul unui unghi.....	44
Tangenta unui unghi.....	46
Rezolvarea triunghiurilor oarecare.....	52
Cîteva teoreme în plus (facultativ).....	
<b>CAPITOLUL 2</b>	58
Arii.....	59
Introducere.....	62
Aria unui triunghi.....	68
Aria unui patrulater.....	71
Poligoane regulate.....	77
Poligoane regulate stelate.....	
Lungimea și aria cercului.....	
<b>CAPITOLUL 3</b>	82
Transformări geometrice.....	85
Segmente orientate situate pe aceeași dreaptă.....	88
Semidrepte de același sens și de sensuri contrare pe drepte paralele.....	90
Vectori.....	95
Unghiuri orientate.....	97
Despre transformări geometrice.....	99
Translații.....	103
rotații.....	109
Probleme recapitulative.....	109
Soluții.....	114
Probleme recapitulative din materia clasei a 6-a.....	124
Capitolul 1.....	130
Capitolul 2.....	139
Capitolul 3.....	141
Probleme recapitulative.....	