TABELE și FORMULE MATEMATICE

E. ROGAI

Editura tehnică

Alfabetele grec și gotic

Alfabetul grec (vechi) de tipar			Alfabetul gotic de tipar		
A	α	alfa	𝔄	𝔞	a
B	β	beta	𝔅	𝔟	be
Γ	γ	gamma	ℭ	𝔠	ţe
Δ	δ	delta	𝔇	𝔡	de
E	ε	epsilon	𝔈	𝔢	e
Z	ζ	dzeta	𝔉	𝔣	ef
H	η	eta	𝔊	𝔤	ghe
Θ	θ	theta	ℌ	𝔥	haş
I	ι	iota	ℑ	𝔦	i
K	κ	kappa	𝔍	𝔧	iot
Λ	λ	lambda	𝔎	𝔨	ka
M	μ	miu	𝔏	𝔩	el
N	ν	niu	𝔐	𝔪	em
Ξ	ξ	csi	𝔑	𝔫	en
O	ο	omicron	𝔒	𝔬	o
Π	π	pi	𝔓	𝔭	pe
P	ρ	ro	𝔔	𝔮	chiu
Σ	σ, ς	sigma	ℜ	𝔯	er
T	τ	tau	𝔖	ſ, 𝔰	es
Υ	υ	ipsilon	𝔗	𝔱	te
Φ	φ	fi	𝔘	𝔲	u
X	χ	hi	𝔙	𝔳	fau
Ψ	ψ	psi	𝔚	𝔴	ve
Ω	ω	omega	𝔛	𝔵	ics
			𝔜	𝔶	ipsilon
			ℨ	𝔷	ţet

1. ARITMETICA

1.1. Sisteme de numerație

Sistemul de numerație în baza zece. Orice număr natural $n \neq 0$ se poate scrie în mod unic sub forma:

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad a_m \neq 0, \ m \in \mathbf{N}^*,$$

sau

$$n = \overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0}$$

cu $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, numite *cifrele* numărului n.

Numerele $1, 2, \ldots, 9$ se numesc *cifre semnificative*.

Exemplu. $5\,987 = 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7$.

Sisteme de numerație în baza B, $B \in \mathbf{N}$, $B \geqslant 2$. Orice număr natural n nenul se poate scrie în mod unic sub forma:

$$n = a_m B^m + a_{m-1} B^{m-1} + \ldots + a_1 B + a_0, \quad a_m \neq 0, \ m \in \mathbf{N},$$

sau

$$n = \overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0},$$

cu $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, B-1\}$, care se numesc *cifrele* numărului n.

Numerele $1, 2, \ldots, B-1$ sînt *cifrele semnificative*.

Sisteme de numerație utilizate. Alături de sistemul zecimal se utilizează: *sistemul binar* ($B = 2$, cu cifrele 0, 1), sistemul *octal* ($B = 8$, cu cifrele $0, 1, 2, \ldots, 7$), *sistemul hexazecimal* ($B = 16$, cu cifrele $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F$) și *sistemul sexagesimal* (cu baza $B = 60$).

Frecvent, baza unui sistem de numerație se asociază numărului respectiv, sub forma unui indice inferior, scris între paranteze rotunde.

Exemplu. $100_{(10)} = 6 \cdot 16 + 4 = 64_{(16)}$; $111_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 7_{(10)} = 2 \cdot 3 + 1 = 21_{(3)}$.

1.2. Teorema împărțirii întregi

Teorema împărțirii întregi pentru numerele naturale. Dacă $a \in \mathbf{N}$ și $b \in \mathbf{N}^*$, atunci există $q \in \mathbf{N}$ și $r \in \mathbf{N}$, astfel încît $a = bq + r$, cu $0 \leqslant r < b$, q și r fiind unic determinați cu această proprietate.

Exemplu. Pentru $a = 41$ și $b = 13$ există $q = 3$ și $r = 2$, astfel încît $41 = 13 \cdot 3 + 2$.

Teorema împărțirii numerelor întregi. Dacă $a \in \mathbf{Z}$ și $b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, atunci există $q \in \mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{Z}$ astfel încît $a = bq + r$, cu $0 \leqslant r < |b|$, q și r fiind unic determinați cu această proprietate.

Numerele a, b, q și r se numesc respectiv: *deîmpărțit, împărțitor, cît* și *rest*.

* Pentru notațiile folosite pentru submulțimi importante ale numerelor reale, a se vedea § 5.1.1., pagina 379

1.3. Divizibilitatea numerelor naturale

Definiție. Numărul natural $b \neq 0$ divide numărul natural a, dacă există un număr natural c, astfel încît $a = bc$.

Se spune că a se divide prin b (sau a este un multiplu al lui b), respectiv b divide pe a (sau b este un divizor al lui a); proprietatea b divide pe a se notează $b \mid a$.

Criteriu general de divizibilitate: un număr natural $b \neq 0$ divide numărul natural a, dacă și numai dacă restul împărțirii lui a la b este egal cu zero.

Algoritmul lui Euclide. Se numește algoritmul lui Euclid al numerelor naturale a și b, $a \geqslant b > 0$, tabloul de relații

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < b,\\
b &= r_1q_2 + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2q_3 + r_3, \quad 0 \leqslant r_3 < r_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \quad 0 \leqslant r_n < r_{n-1},\\
r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + r_{n+1}, \quad r_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Numerele $q_1, \dots, q_{n+1}$ se numesc *cîturi*, iar $r_1, \dots, r_{n+1}$ resturi.

Cîteva proprietăți. 1) Dacă $a \mid b$ și $b \mid c$, atunci $a \mid c$ (tranzitivitate).

2) Dacă $b \mid a$ și $c \neq 0$, atunci $bc \mid ac$.

3) Dacă $b \mid a$ și $b \mid c$ atunci $b \mid (a \pm c)$.

Teoremă. Produsul a n numere naturale consecutive se divide cu $n!$.

Teoremă. Orice număr întreg a se divide cu $-a$, -1, 1 și a.

Definiție. Divizorii $-a$, -1, 1 și a ai unui număr întreg a se numesc divizori improprii. Orice alt divizor al lui $a \in \mathbf{Z}$ se numește divizor propriu.

Definiție. Numerele întregi diferite de -1 și 1 care au numai divizori improprii se numesc numere indecompozabile.

Definiție. Numerele întregi care au divizori proprii se numesc numere compuse.

1.4. Criterii de divizibilitate a numerelor naturale scrise în baza 10

1) Un număr natural este divizibil cu 2 (sau cu 5) dacă și numai dacă cifra unităților este divizibilă cu 2 (sau cu 5).

2) Un număr natural este divizibil cu 4 (sau cu 25), dacă și numai dacă numărul format cu cifra zecilor și a unităților, luate în această ordine, este divizibil cu 4 (sau cu 25).

Generalizare. Un număr natural este divizibil cu 2^p (sau cu 5^p), $p \in \mathbf{N}^*$, dacă și numai dacă numărul format cu ultimele p cifre este divizibil cu 2^p (sau cu 5^p).

3) Un număr natural este divizibil cu 3 (sau cu 9), dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3 (sau 9).

4) Un număr natural este divizibil cu 7 dacă și numai dacă suma produselor obținute prin înmulțirea cifrei unităților cu 1, a cifrei zecilor cu 3, a *cifrei sutelor cu 2, a cifrei miilor cu 6, a cifrei zecilor de mii cu 4, a cifrei sutelor de mii cu 5, a cifrei milioanelor cu 1, a cifrei zecilor de milioane cu 3 etc. este divizibilă prin 7. Restul împărțirii unui număr natural prin 7 este egal cu restul împărțirii acestei sume prin 7.*

5) Un număr natural este divizibil cu 11 dacă și numai dacă diferența dintre suma cifrelor de rang impar și suma cifrelor de rang par este divizibilă cu 11.

6) Un număr natural este divizibil cu 13 dacă și numai dacă diferența dintre numărul format cu ultimele trei cifre și numărul format cu toate celelalte cifre este divizibilă cu 13.

Observație. Acest criteriu este valabil și pentru divizibilitatea cu 7 sau 11, dacă diferența respectivă este divizibilă cu 7 sau 11.

1.5. Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun*

Definiție 1. Se numește cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al numerelor naturale a și b numărul natural d care are proprietățile: 1) $d \mid a$ și $d \mid b$ *(adică d este un divizor comun); 2) dacă $\delta \mid a$ și $\delta \mid b$,* atunci $\delta \mid d$ *(adică d este cel mai mare dintre toți divizorii comuni ai lui a și b).* C.m.m.d.c. se notează cu (a, b) și se determină cu ajutorul algoritmului lui Euclid ($d = r_n$).

Definiție 2. Numerele naturale a și b se numesc prime între ele, dacă $(a,b) = 1$.

Definiție 3. Se numește cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) *al numerelor naturale a și b numărul natural m care are proprietățile:* 1) $a \mid m$ și $b \mid m$ (adică m este un multiplu comun); 2) dacă $a \mid \mu$ și $b \mid \mu$, $\mu \in \mathbf{N}$, atunci $m \mid \mu$ *(adică m este cel mai mic dintre toți multiplii comuni ai lui a și b),* C.m.m.m.c se notează $[a, b]$.

Proprietăți comune ale c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

$(a, a) = a$; $[a, a] = a$ (indempotență)

$(a, b) = (b, a)$; $[a, b] = [b, a]$ (comutativitate)

$(ac, bc) = c\,(a, b)$; $[ac, bc] = c\,[a, b]$

$(a, (b, c)) = ((a, b), c)$; $[a, [b, c]] = [[a, b], c]$ (asociativitate).

$(a, [a, b]) = a$; $[a, (a, b)] = a$ (absorbție).

$(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

Teorema lui Gauss. Dacă un număr întreg divide produsul a două numere întregi și este prim cu unul dintre factorii produsului, atunci acest număr divide celălalt factor al produsului.

1.6. Numere prime

Definiție. Se numește număr prim orice număr natural p, $p \geqslant 2$, care are drept divizori pe ± 1 și $\pm p$.

Exemplu. Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13 sînt numere prime. În tabela 1.3 sînt date numerele prime de la 1 la 10 000.

* Aceste concepte se definesc corespunzător pentru $a, b \in \mathbf{Z}$ sau pentru un număr finit de numere întregi.

Teorema lui Euclid. Mulțimea numerelor prime este infinită.

Teoremă. Numărul natural $p \geqslant 2$ este prim $\Leftrightarrow \forall\, a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încît din p divide produsul ab să rezulte că $p \mid a$ sau $p \mid b$.

Teoremă. Dacă $2^h + 1$ este un număr natural prim mai mare decît 3, atunci h este o putere a lui 2.

Observație. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. De pildă
$2^{32} + 1 = 641 \cdot 6\,700\,417$ (Euler) și $2^{64} + 1 = 274.177 \cdot 67\,280\,421\,310\,721$ (Landry);

Funcția lui Euler, $\varphi(n)$, este definită pe N, cu valori în N, astfel: $\varphi(n)$ este numărul numerelor naturale mai mici decît n și prime cu n. Se mai numește *indicatorul numărului* n sau *indicatorul lui Euler*.

Exemplu. Pentru $n = 30$, numerele 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 și 29 sînt mai mici decît 30 și sînt prime cu 30. Deci $\varphi(30) = 8$.

Teoremă. Dacă numărul natural n are descompunerea $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, atunci

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Exemplu. Fie $n = 30$. Deoarece $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, avem $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ și $p_3 = 5$. Prin urmare $\varphi(30) = 30\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8$.

Teoremă. Dacă $a, b \in \mathrm{N}$ și $(a, b) = 1$, atunci $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Exemplu. Fie $n = 21$; pentru el avem $a = 3$ și $b = 7$. Deci $\varphi(21) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$*.

Proprietăți ale indictorului lui Euler.

1. Indicatorul unui număr natural mai mare decît 2 este un număr natural par.

2. Dacă $n > 1$, atunci $\varphi(n) \leqslant n - 1$.

3. Dacă $n - 1$ se divide cu $\varphi(n)$, atunci n este prim.

4. Suma indicatorilor tuturor divizorilor unui număr natural este egal cu numărul natural considerat.

5. Suma numerelor naturale prime cu $n \in \mathrm{N}$ și mai mici decît n, notată $\rho(n)$, este dată de formula

$$\rho(n) = \frac{1}{2}\, n\varphi(n).$$

Mica teoremă a lui Fermat. Dacă p este un număr natural prim, iar a un întreg oarecare, atunci

$$a^p - a \equiv 0 \pmod{p}, \qquad (1)$$

adică $a^p - a$ se divide cu p.

Dacă a nu este divizibil cu numărul prim p, atunci relația (1) se mai scrie

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}, \qquad (2)$$

adică, de această dată, $a^{p-1} - 1$ se divide cu p.

---

* Am omis proprietatea că dacă p este un număr natural prim, atunci $\varphi(p) = p - 1$.

Exemplu. Dacă $p = 7$ și $a = 2$, atunci $2^6 - 1 = 63$ este un multiplu de 7.

Teorema lui Euler sau teorema lui Fermat generalizată. Fie n un număr natural dat, $\varphi(n)$ indicatorul lui n și $(a, n) = 1$, cu $a \in Z$; atunci avem

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

adică $a^{\varphi(n)} - 1$ se divide cu n.

Exemplu. Pentru $a = 7$ și $n = 10$, avem $\varphi(10) = 10\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$, respectiv $a^{\varphi(n)} = 7^4 = 2\,401 = 1 + \text{m}\ 10$;

Teorema lui Wilson. Numărul natural p este prim, dacă și numai dacă $(p - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, adică numărul $(p - 1)! + 1$ se divide cu p.

Exemplu. Fie $p = 7$ (număr prim). Atunci $(7 - 1)! + 1 = 721 = 7 \cdot 103$ este un multiplu de 7.

Șiruri de numere prime. Din șirul de numere $p_n = n^2 + n + 41$, cu $n = 0, 1, 2, \ldots, 29$ rezultă 40 de numere prime (Euler): 41, 43, ..., 1601.

De asemenea, din șirul de numere naturale $q_n = n^2 + n + 17$, cu $n = 0, 1, 2, \ldots, 15$ rezultă 16 numere prime 17, 19, 23, ..., 257.

1.7. Teoreme de teoria numerelor

Teoremă fundamentală. Orice număr întreg diferit de zero și de ± 1 se poate descompune într-un produs de factori primi. Această descompunere este unică, abstracție făcînd de ordinea factorilor. Un asemenea număr întreg n se scrie sub forma: $n = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ numere naturale nenule, iar $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ numere prime.

Aceasta se mai numește *teorema fundamentală a aritmeticii*.

Dacă un număr natural n are descompunerea canonică $n = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma}$, atunci divizorii săi naturali sînt termenii produsului:

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha}) \cdot (1 + b + \ldots + b^{\beta}) \cdot (1 + c + \ldots + c^{\gamma}).$$

Numărul divizorilor unui număr natural n. Dacă numărul natural n are descompunerea canonică

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

atunci numărul divizorilor naturali ai lui n, $\sigma(n)$, este dat de produsul

$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1).$$

Suma divizorilor unui număr natural n. Dacă numărul natural n are descompunerea canonică

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

atunci suma tuturor divizorilor naturali ai lui n, $\tau(n)$, este dată de formula

$$\tau(n) = \frac{p_1^{\alpha_1 + 1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2 + 1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k + 1} - 1}{p_k - 1}.$$

1.8. Ecuații remarcabile

Ecuația pitagorică $x^2 + y^2 = z^2$. Această ecuație are drept soluții mulțimea de numere naturale $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$, $u, v \in N^*$, $u > v$.

Exemplu. Pentru $u = 2$ și $v = 1$, găsim soluția naturală $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$. Pentru $u = 3$ și $v = 2$, obținem $x = 12$, $y = 5$ și $z = 13$.

Ecuația diofantică $ax + by = c$. Această ecuație cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$ are soluții întregi dacă și numai dacă c.m.m.d.c. al numerelor a și b, respectiv (a, b), este divizor al lui c. Soluțiile întregi ale ecuației sînt $x = x_0 + mb$, $y = y_0 - ma$, $m \in \mathbf{Z}$, unde x_0, y_0 este o soluție întreagă, particulară.

Exemplu. Ecuația $3x - 10y = 2$ are c.m.m.d.c. $(3, -10) = 1$, respectiv $x_0 = 4$, $y_0 = 1$. Deci $x = 4 - 10m$, $y = 1 - 3m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Ecuația lui Pell-Fermat $x^2 - ky^2 = 1$. Această ecuație, unde k este un număr natural, diferit de un pătrat perfect, admite un șir de soluții, numere naturale $(x_n, y_n)_{n \in N}$, definite recurent astfel: $x_{n+1} = x_1x_n + ky_1y_n$; $y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n$, cu (x_1, y_1) ceea mai mică soluție.

Exemplu. Ecuația*) $x^2 - 3y^2 = 1$ are $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; deci

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n,\ y_{n+1} = x_n + 2y_n,\ n \geqslant 1.$$

1.9. Alte rezultate din aritmetică

Definiție. Se numește fracție ireductibilă orice număr rațional $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, cu $(m, n) = 1$.

Teoremă. O fracție ireductibilă se transformă într-o fracție zecimală periodică simplă dacă numitorul ei nu are nici factorul 2 și nici factorul 5. Ea se transformă în fracție zecimală periodică mixtă, dacă numitorul său pe lingă 2 sau 5 conține și alți factori primi. Partea neperiodică are un număr de cifre egal cu cel mai mare dintre exponenții lui 2 și 5.

Teoremă. Dacă $a, a', b, b', n \in \mathbf{Z}$ și $ab' - a'b = \pm 1$, atunci fracția $\frac{an + a'}{bn + b'}$ este ireductibilă.

1.10. Extragerea rădăcinii pătrate

Numărul dat, de exemplu 53 824, se împarte în grupe de cite două cifre, de la dreapta spre stinga, ultima grupă putind avea și o singură cifră: 5 38 24. Se caută numărul al cărui pătrat se cuprinde în prima grupă din stînga (în exemplul dat, numărul căutat este 2); el va fi prima cifră a rădăcinii pătrate a numărului dat. Pătratul respectiv se scade din prima grupă și restului găsit, adică lui 1, i se alătură a doua grupă, respectiv 38. Cu numărul astfel obținut, adică cu 138, se procedează astfel: se separă ultima cifră din dreapta și apoi grupa din stinga, adică 13, se împarte cu dublul primei cifre a rădăcinii, în cazul nostru 4; citul 3 se scrie lîngă dublul rădăcinii, 43, obținindu-se un număr care se înmulțește cu ultima sa cifră, $43 \times 3 = 129$.

*) A se vedea Gazeta Matematică nr. 5/1979, pg. 207.

Dacă acest produs se poate scădea din numărul format de primul rest și de grupa alăturată lui, 138, atunci numărul cu care s-a înmulțit, 3, este a doua cifră a rădăcinii numărului dat. Dacă nu, se schimbă cifra înmulțitoare. Toate celelalte cifre ale rădăcinii se află prin același procedeu.

Restul fiecărei scăderi trebuie să fie mai mic decît dublul numărului format de cifrele respective ale rădăcinii plus unu.

Dacă numărul dat este zecimal, despărțirea în grupe de două cifre se face pornind de la virgulă, spre stînga pentru partea întreagă și spre dreapta pentru partea zecimală (completînd cu un zero ultima grupă din dreapta, în cazul cînd are o singură cifră).

Exemplu.

$\sqrt{5\,38\,24}$	232	
4	$2 \times 2 = 4$	$43 \times 3 = 129$
138	$23 \times 2 = 46$	$462 \times 2 = 924$
129		
= = 924		
924		
= = =		

1.11. Extragerea rădăcinii cubice

Numărul dat, de exemplu 13 312 053, se împarte în grupe de cîte trei cifre, de la dreapta spre stînga, ultima grupă din stînga putînd avea două cifre sau chiar o singură cifră: 13 312 053. Se caută numărul al cărui cub se cuprinde în prima grupă din stînga (în exemplul menționat, numărul căutat este 2) și care constituie prima cifră a rădăcinii. Se scade cubul, adică 8 din prima grupă, 13, și restului 5 i se alătură prima cifră a grupei următoare, adică 3. Numărul astfel format, 53, se împarte la întreitul pătratului primei cifre a rădăcinii, adică la 12. Cîtul astfel obținut este sau a doua cifră a rădăcinii căutate sau un număr mai mare și atunci, prin încercări succesive care să permită efectuarea scăderii, se ajunge la cifra exactă (în exemplul dat, rezultatul împărțirii 53:12 este 4; acesta este prea mare și atunci se încearcă cu 3, care este cifra căutată). Numărul format de cele două cifre ale rădăcinii, 23, se ridică la cub și se scade din numărul format de primele două grupe din stînga ale numărului dat, adică, din 13 312. Lîngă restul obținut, 11 450, se coboară prima cifră a grupei a treia, 0, și operația se continuă în mod asemănător.

Restul trebuie să fie mai mic decît întreitul sumei dintre rădăcină și pătratul rădăcinii plus unu.

Exemplu:

$\sqrt[3]{13\,312\,053}$	237
8	$2^2 \times 3 = 12$
$53:12 = 4$	$24^3 = 13\,824$ (prea mare)
13 312	$23^3 = 12\,167$
12 167	$23^2 \times 3 = 1\,587$
$11450:1\,587 = 7$	$237^3 = 13\,312\,053$
13312 053	
13312 053	
-- -- -- --	

1.12. Folosirea tabelelor 1.1.—1.5.

Tabela 1.1. Puterile numerelor 2, 3 și 5

Această tabelă conține puterile de la 1 la 40 ale numărului 2, de la 1 la 30 ale numărului 3 și de la 1 la 24 ale numărului 5. Ea se folosește astfel: se caută în coloana Ex (exponentul) și se merge, pe aceeași linie orizontală spre dreapta, în coloana P, unde se găsește puterea; de exemplu, pentru a afla puterea 2^{12} se caută în coloana Ex numărul 12 și se găsește în coloana P rezultatul $4\,096 = 2^{12}$.

Tabela 1.2. Puterile 4 și 5 ale numerelor de la 1 la 100

Procedeul de utilizare al tabelei este următorul. În prima coloană și în cea de a patra se găsește numărul n, iar în celelalte puterile numărului n; de exemplu dacă $n = 15$, atunci $n^4 = 50\,625$, iar $n^5 = 759\,375$.

Tabela 1.3. Numerele prime de la 1 la 10000

Această tabelă conține numerele prime în ordinea mărimii; pentru ușurința citirii, numărul sutelor n-a fost trecut decît o singură dată și cu cifre grase; de exemplu **307**, **1 601**, **6 007** etc.

Tabela 1.4. Cei mai mici divizori ai numerelor naturale de la 169 la 10000

Această tabelă servește la descompunerea numerelor mari in factori primi; ea nu conține numerele divizibile prin 2, 3, 5, 7 și 11 din motive ușor de înțeles.

Pentru utilizarea tabelei se imparte numărul — care interesectează — pe rind prin 2, 3, 5, 7 și 11; cind una din impărțiri se face exact, se caută citul in coloana N; dacă acest cit se află in coloană, atunci cel mai mic divizor al său se găsește in coloana alăturată D. Împărțim citul prin acest cel mai mic divizor al său și căutăm noul cit in tabelă. Continuăm ca mai inainte, pină cind obținem un cit care nu se mai găsește in tabela și care este, in consecință, număr prim (ceea ce se poate verifica ușor cu ajutorul tabelei 1.3).

Exemplu: $H = 43\,615$; se vede ușor că H este divizibil prin 5 și prin 11; găsim: $43\,615 = 5 \times 11 \times 793$. Numărul 793 se află in coloana N; alături in coloana D, citim cel mai mic divizor al său, numărul 13. Împărțim pe 793 prin 13; avem: $793 = 13 \times 61$. Așadar $43\,615 = 5 \times 11 \times 13 \times 61$.

Tabela 1.5. Părți proporționale pentru interpolări liniare ale numerelor naturale de la 11 la 90

Dacă se cunosc două valori ale unei mărimi, se poate calcula cu o precizie suficientă, uneori, pentru nevoile practice, o valoare intermediară, admițîndu-se o creștere sau o descreștere proporțională cu diferența dintre cele două valori cunoscute.

Exemplu. Se caută valoarea $\sqrt{901,3}$, cunoscind valoarea $\sqrt{901} = 30,017$ și $\sqrt{902} = 30,033$. La diferența de o unitate întreagă a numărului corespunde o creștere de 16 miimi a radicalului. Admițind proporționalitatea dintre creșterea radicalului și creșterea numărului se va adăuga la cea mai mică dintre cele două valori, $\dfrac{16 \times 3}{10}$ miimi, adică 4,8 respectiv 5 miimi, valoarea aflată la intersecția liniei 3 cu coloana 16 din tabelă. Valoarea căutată este deci 30,022.

TABELA 1.1. Puterile numerelor 2, 3 şi 5

Puterile lui 2

Ex	P	Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	2	11	2 048	21	2 097 152	31	2 147 483 648
2	4	12	4 096	22	4 194 304	32	4 294 967 296
3	8	13	8 192	23	8 388 608	33	8 589 934 592
4	16	14	16 384	24	16 777 216	34	17 179 869 184
5	32	15	32 768	25	33 554 432	35	34 359 738 368
6	64	16	65 536	26	67 108 864	36	68 719 476 736
7	128	17	131 072	27	134 217 728	37	137 438 953 472
8	256	18	262 144	28	268 435 456	38	274 877 906 944
9	512	19	524 288	29	536 870 912	39	549 755 813 888
10	1 024	20	1 048 576	30	1 073 741 824	40	1 099 511 627 776

Puterile lui 3

Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	3	11	177 147	21	10 460 353 203
2	9	12	531 441	22	31 381 059 609
3	27	13	1 594 323	23	94 143 178 827
4	81	14	4 782 969	24	282 429 536 481
5	243	15	14 348 907	25	847 288 609 443
6	729	16	43 046 721	26	2 541 865 828 329
7	2 187	17	129 140 163	27	7 625 597 484 987
8	6 561	18	387 420 489	26	22 876 792 454 961
9	19 683	19	1 162 261 467	29	68 630 377 364 883
10	59 049	20	3 486 784 401	30	205 891 132 094 649

Puterile lui 5

Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	5	9	1 953 125	17	762 939 453 125
2	25	10	9 765 625	18	3 814 697 265 625
3	125	11	48 828 125	19	19 073 486 328 125
4	625	12	244 140 625	20	95 367 431 640 625
5	3 125	13	1 220 703 125	21	476 837 158 203 125
6	15 625	14	6 103 515 625	22	2 384 185 791 015 625
7	78 125	15	30 517 578 125	23	11 920 928 955 078 125
8	390 625	16	152 587 890 625	24	59 604 644 775 390 625

TABELA 1.2. Puterile 4 și 5 ale numerelor de la 1 la 100

n	n^4	n^5	n	n^4	n^5
1	1	1	25	390 625	9 765 625
2	16	32	26	456 976	11 881 376
			27	531 441	14 348 907
3	81	243	28	614 656	17 210 368
4	256	1 024	29	707 281	20 511 149
5	625	3 125	30	810 000	24 300 000
6	1 296	7 776	31	923 521	28 629 151
7	2 401	16 807	32	1 048 576	33 554 432
8	4 096	32 768	33	1 185 921	39 135 393
9	6 561	59 049	34	1 336 336	45 435 424
10	10 000	100 000	35	1 500 625	52 521 875
11	14 641	161 051	36	1 679 616	60 466 176
12	20 736	248 832	37	1 874 161	69 343 957
13	28 561	371 293	38	2 085 136	79 235 168
14	38 416	537 824	39	2 313 441	90 224 199
15	50 625	759 375	40	2 560 000	102 400 000
16	65 536	1 048 576	41	2 825 761	115 856 201
17	83 521	1 419 857	42	3 111 696	130 691 232
18	104 976	1 889 568	43	3 418 801	147 008 443
19	130 321	2 476 099	44	3 748 096	164 916 224
20	160 000	3 200 000	45	4 100 625	184 528 125
21	194 481	4 084 101	46	4 477 456	205 962 976
22	234 256	5 153 632	47	4 879 681	229 345 007
23	279 841	6 436 343	48	5 308 416	254 803 968
24	331 776	7 962 624	49	5 764 801	282 475 249

n	n^4	n^5	n	n^4	n^5
50	6 250 000	312 500 000	75	31 640 625	2 373 046 875
51	6 765 201	345 025 251	76	33 362 176	2 535 525 376
52	7 311 616	380 204 032	77	35 153 041	2 706 784 157
53	7 890 481	418 195 493	78	37 015 056	2 887 174 368
54	8 503 056	459 165 024	79	38 950 081	3 077 056 399
55	9 150 625	503 284 375	80	40 960 000	3 276 800 000
56	9 834 496	550 731 776	81	43 046 721	3 486 784 401
57	10 556 001	601 692 057	82	45 212 176	3 707 398 432
58	11 316 496	656 356 768	83	47 458 321	3 939 040 643
59	12 117 361	714 924 299	84	49 787 136	4 182 119 424
60	12 960 000	777 600 000	85	52 200 625	4 437 053 125
61	13 845 841	844 596 301	86	54 708 816	4 704 270 176
62	14 776 336	916 132 832	87	57 289 761	4 984 209 207
63	15 752 961	992 436 543	88	59 969 536	5 277 319 168
64	16 777 216	1 073 741 824	89	62 742 241	5 584 059 449
65	17 850 625	1 160 290 625	90	65 610 000	5 904 900 000
66	18 974 736	1 252 332 576	91	68 574 961	6 240 321 451
67	20 151 121	1 350 125 107	92	71 639 296	6 590 815 232
68	21 381 376	1 453 933 568	93	74 805 201	6 956 883 693
69	22 667 121	1 564 031 349	94	78 074 896	7 339 040 224
70	24 010 000	1 680 700 000	95	81 450 625	7 737 809 375
			96	84 934 656	8 153 726 976
71	25 411 681	1 804 229 351	97	88 529 281	8 587 340 257
72	26 873 856	1 934 917 632	98	92 236 816	9 039 207 968
73	28 398 241	2 073 071 593	99	96 059 601	9 509 900 499
74	29 986 576	2 219 006 614	100	100 000 000	10 000 000 000

Tabela 1.3. Numerele prime de la 1 la 10 000

1: 2	2 23	4 99	8 11	11 17	14 81	18 11	21 61	25 43
3	27	—	21	23	83	23	79	49
5	29	5 03	23	29	87	31	22 03	51
7	33	09	27	51	89	47	07	57
11	39	21	29	53	93	61	13	79
13	41	23	39	63	99	67	21	91
17	51	41	53	71	—	71	37	93
19	57	47	57	81	15 11	73	39	26 09
23	63	57	59	87	23	77	43	17
29	69	63	63	93	31	79	51	21
31	71	69	77	12 01	43	89	67	33
37	77	71	81	13	49	19 01	69	47
41	81	77	83	17	53	07	73	57
43	83	87	87	23	59	13	81	59
47	93	93	9 07	29	67	31	87	63
53	3 07	99	11	31	71	33	93	71
59	11	6 01	19	37	79	49	97	77
61	13	07	29	49	83	51	28 09	83
67	17	13	37	59	97	73	11	87
71	31	17	41	77	16 01	79	33	89
73	37	19	47	79	07	87	39	93
79	47	31	53	83	09	93	41	99
83	49	41	67	89	13	97	47	27 07
89	53	43	71	91	19	99	51	11
97	59	47	77	97	21	20 03	57	13
1 01	67	53	83	13 01	27	11	71	19
03	73	59	91	03	37	17	77	29
07	79	61	97	07	57	27	81	31
09	83	73	10 09	19	63	29	83	41
13	89	77	13	21	67	39	89	49
27	97	83	19	27	69	53	93	53
31	4 01	91	21	61	93	63	99	67
37	09	7 01	31	67	97	69	24 11	77
39	19	09	33	73	99	81	17	89
49	21	19	39	81	17 09	83	23	91
51	31	27	49	99	21	87	37	97
57	33	33	51	14 09	23	89	41	28 01
63	39	39	61	23	33	99	47	03
67	43	43	63	27	41	21 11	59	19
73	49	51	69	29	47	13	67	33
79	57	57	87	33	53	29	73	37
81	61	61	91	39	59	31	77	43
91	63	69	93	47	77	37	—	51
93	67	73	97	51	83	41	25 03	57
97	79	87	11 03	53	87	43	21	61
99	87	97	09	59	89	53	31	79
2 11	91	8 09	09	71	18 01	53	39	87

28 97	33 07	36 59	40 49	44 51	48 71	52 61	56 53	60 53
	13	71	51	57	77	73	57	67
29 03	19	73	57	63	89	79	59	73
09	23	77	73	81		81	69	79
17	29	91	79	83	49 03	97	83	89
27	31	97	91	93	09		89	91
39	43		93	—	19	53 03	93	
53	47	37 01	99		31	09		61 01
57	59	09		45 07	33	23	57 01	13
63	61	19	41 11	13	37	33	11	21
69	71	27	27	17	43	47	17	31
71	73	33	29	19	51	51	37	33
99	89	39	33	23	57	81	41	43
	91	61	39	47	67	87	43	51
30 01		67	53	49	69	93	49	63
11	34 07	69	57	61	73	99	79	73
19	13	79	59	67	87		83	97
23	33	93	77	83	93	54 07	91	99
37	49	97		91	99	13		
41	57		42 01	97	•	17	58 01	62 03
49	61	38 03	11			19	07	11
61	63	21	17	46 03	50 03	31	13	17
67	67	23	19	21	09	37	21	21
79	69	33	29	37	11	41	27	29
83	91	47	31	39	21	43	39	47
89	99	51	41	43	23	49	43	57
	—	53	43	49	39	71	49	63
31 09		63	53	51	51	77	51	69
19	35 11	77	59	57	59	79	57	71
21	17	81	61	63	77	83	61	77
37	27	89	71	73	81	—	67	87
63	29		73	79	87		69	99
67	33	39 07	83	91	99	55 01	79	
69	39	11	89			03	81	63 01
81	41	17	97	47 03	51 01	07	97	11
87	47	19		21	07	19		17
91	57	23	43 27	23	13	21	59 03	23
	59	29	37	29	19	27	23	29
32 03	71	31	39	33	47	31	27	37
09	81	43	49	51	53	57	39	43
17	83	47	57	59	67	63	53	53
21	93	67	63	83	71	69	81	59
29		89	73	87	79	73	87	61
51	36 07		91	89	89	81		67
53	13	40 01	97	93	97	91	60 07	73
57	17	03		99			11	79
59	23	07	44 09	48 01	52 09	56 23	29	89
71	31	13	21	13	27	39	37	97
99	37	19	23	17	31	41	43	
	43	21	41	31	33	47	47	64 21
33 01		27	47	61	37	51		27

64 49	68 63	72 83	76 87	81 17	85 63	89 63	93 77	97 81
51	69	97	91	23	73	69	91	87
69	71	**73** 07	99	47	81	71	97	91
73	83	09	**77** 03	61	97	99	**94** 03	**98** 03
81	99	21	17	67	99	**90** 01	13	11
91	**69** 07	31	23	71	**86** 09	07	19	17
—	11	33	27	79	23	11	21	29
65 21	17	49	41	91	27	13	31	33
29	47	51	53	**82** 09	29	29	33	39
47	49	69	57	19	41	41	37	51
51	59	93	59	21	47	43	39	57
53	61	**74** 11	89	31	63	49	61	59
63	67	17	93	33	69	59	63	71
69	71	33	**78** 17	37	77	67	67	83
71	77	51	23	43	81	91	73	87
77	83	57	29	63	89	**91** 03	79	**99** 01
81	91	59	41	69	93	09	91	07
99	97	77	53	73	99	27	97	23
66 07	**70** 01	81	67	87	**87** 07	33	—	29
19	13	87	73	91	13	37	**95** 11	31
37	19	89	77	93	19	51	21	41
53	27	99	79	97	31	57	33	49
59	39	—	83	**83** 11	37	61	39	67
61	43	**75** 07	**79** 01	17	41	73	47	73
73	57	17	07	29	47	81	51	
79	69	23	19	53	53	87	87	
89	79	29	27	63	61	99	**96** 01	
91	**71** 03	37	33	69	79	**92** 03	13	
67 01	09	41	37	77	83	09	19	
03	21	47	49	87	**88** 03	21	23	
09	27	49	51	89	07	27	29	
19	29	59	63	**84** 19	19	39	31	
33	51	61	93	23	21	41	43	
37	59	73	**80** 09	29	31	57	49	
61	77	77	11	31	37	77	61	
63	87	83	17	43	39	81	77	
79	93	89	39	47	49	83	79	
81	**72** 07	91	53	61	61	93	89	
91	11	**76** 03	59	67	63	**93** 11	97	
93	13	07	69	—	67	19	**97** 19	
68 03	19	21	81	**85** 01	87	23	21	
23	29	39	87	13	93	37	33	
27	37	43	89	21	**89** 23	41	39	
29	43	49	93	27	29	43	43	
33	47	69	**81** 01	37	33	49	49	
41	53	73	11	39	41	71	67	
57		81		43	51		69	

Tabela 1.4 Cei mai mici divizori ai numerelor de la 169 la 10 000

N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D
1 69	13	9 43	23	15 13	17	20 47	23	25 37	43	30 43	17	34 97	13
		49	13	17	37	59	29	61	13	53	43		
2 21	13	61	31	37	29	71	19	67	17	71	37	35 03	31
47	13	89	23	41	23	77	31	73	31	77	17	23	13
89	17			77	19			81	29	97	19	51	53
99	13	10 03	17	91	37	21 17	29	87	13			69	43
		07	19			19	13	99	23	31 03	29	87	17
3 23	17	27	13	16 33	23	47	19			07	13	89	37
61	19	37	17	43	31	59	17	26 03	19	27	53	99	59
77	13	73	29	49	17	71	13	23	43	31	31		
91	17	79	13	51	13	73	41	27	37	33	13	36 01	13
		81	23	79	23	83	37	41	19	39	43	11	28
4 08	13			81	41	97	13	69	17	49	47	29	19
37	19	11 21	19	91	19					51	23	49	41
81	13	39	17			22 01	31	27 01	37	61	29	53	13
93	17	47	31	17 03	13	09	47	43	13	73	19	67	19
		57	13	11	29	27	17	47	41	93	31	79	13
5 27	17	59	19	17	17	31	23	59	31	97	23	83	29
29	23	89	29	39	37	49	13	71	17				
33	13			51	17	57	37	73	47	32 11	13	37 18	47
51	19	12 07	17	63	41	63	31			33	53	21	61
59	13	19	23	69	29	79	43	28 09	53	39	41	37	37
89	19	41	17	81	13	91	29	13	29	47	17	43	19
		47	29					31	19	63	13	49	23
6 11	13	61	13	18 07	13	23 23	23	39	17	77	29	57	13
29	17	71	31	17	23	27	13	67	47	81	17	63	53
67	23	73	19	19	17	29	17	69	19	87	19	81	19
89	13			29	31	53	13	73	13	93	37	91	17
97	17	13 13	13	43	19	63	17	81	43			99	29
		33	31	49	43	69	23	99	13	33 17	31		
7 08	19	39	13	53	17					37	47	38 09	13
13	23	43	17	91	31	24 07	29	29 11	41	41	13	11	37
31	17	49	19			13	19	21	23	49	17	27	43
67	13	57	23	19 09	23	19	41	23	37	79	31	41	23
79	19	63	29	19	19	49	31	29	29	83	17	59	17
93	13	69	37	21	17	61	23	41	17	97	43	69	53
99	17	87	19	27	41	79	37	51	13			87	13
8 17	19	91	13	37	13	83	13	77	13	34 01	19	93	17
41	29	14 03	23	43	29	89	19	83	19	03	41		
	29	11	17	57	19	91	47	87	29	19	13	39 01	47
51	23	17	13	61	37	25 01	41	93	41	27	23	37	31
71	13	57	31	63	13	07	23			13	47	53	59
93	19	69	13			09	13	30 07	31	39	19	59	37
99	29	15 01	19	20 21	43	33	17	13	23	73	23	61	17
9 01	17			33	19			29	16	81	59	73	29
23	13			41	13								

Tabela 1.4 (continuare)

N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D
39 77	41	44 29	43	48 59	43	53 17	13	57 71	29	61 91	41	66 31	19
79	23	39	23	67	31	21	17	73	23	62 27	13	41	29
91	13	53	61	83	19	29	73	77	53	33	23	47	17
40 09	19	69	41	91	67	39	19	58 09	37	39	17	49	61
31	29	71	17	97	59	53	53	33	19	41	79	67	59
33	37	89	67	49 01	13	59	23	37	13	53	13	83	41
43	13	45 11	13	13	17	63	31	91	43	83	61	97	37
61	31	31	23	27	13	71	41	93	71	89	19	67 07	19
63	17	37	13	79	13	77	19	99	17	63 13	59	31	53
69	13	41	19	81	17	89	17	59 09	19	19	71	39	23
87	61	53	29	97	19	54 29	61	11	23	31	13	49	17
97	17	59	47	50 17	29	47	13	17	61	41	17	51	43
41 17	23	73	17	29	47	59	53	21	31	71	23	57	29
21	13	77	23	41	71	61	43	33	17	83	13	67	67
41	41	79	19	53	31	73	13	41	13	64 01	37	73	13
63	23	89	13	57	13	91	17	47	19	03	19	99	13
71	43	46 01	43	63	61	97	23	59	59	07	43	68 17	17
81	37	07	17	69	37	55 13	37	63	67	09	13	21	19
83	47	19	31	83	13	39	29	69	47	31	59	47	41
87	53	33	41	51 11	19	43	23	77	43	37	41	51	13
89	59	61	59	23	47	49	31	83	31	39	47	59	19
99	13	67	13	29	23	61	67	89	53	43	17	77	13
42 23	41	81	31	41	53	67	19	93	13	63	23	87	71
37	19	87	43	43	37	87	37	60 01	17	67	29	89	83
47	31	93	13	49	19	97	29	19	13	87	13	93	61
67	17	99	37	61	13	56 03	13	23	19	93	43	69 01	67
43 08	13	47 09	17	77	31	09	71	31	37	97	73	13	31
07	59	17	53	83	71	11	31	49	23	99	67	29	13
09	31	27	29	91	29	17	41	59	73	65 09	23	31	29
13	19	47	47	52 07	41	27	17	71	13	11	17	43	53
21	29	57	67	13	13	29	13	77	59	27	61	53	17
31	61	69	19	19	17	33	43	61 03	17	33	47	73	19
43	43	71	13	21	23	71	53	07	31	39	13	89	29
51	19	77	17	39	13	81	13	09	41	41	31	70 03	47
69	17	48 11	17	49	29	99	41	19	29	57	79	09	43
79	29	19	61	51	59	57 07	13	37	17	83	29	31	79
81	13	41	47	63	19	13	29	57	47	93	19	33	13
87	41	43	29	67	23	23	59	61	61	66 13	17	37	31
93	23	47	37	87	17	29	17	69	31	17	13	61	23
99	53	49	13	93	67	59	13	79	37	23	37	67	37
44 27	19	53	23	58 11	47	67	73	87	23			81	73

N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D
70 87	19	74 53	29	79 21	89	83 33	13	87 49	13	91 69	53	95 99	29
98	41	68	17	39	17	39	31	59	19	79	67		
97	47	71	31	43	13	41	19	73	31	93	29	96 07	13
99	31	93	59	57	73	47	17	77	67	97	17	17	59
71 11				61	19	57	61	91	59			37	23
23	13	75 01	13	67	31	59	13	97	19	92 11	61	41	31
41	17	19	73	69	13	81	17			17	13	59	13
53	37	31	17	79	79	83	83	88 01	13	23	23	71	19
57	23	43	19	81	23	99	37	09	23	53	19	73	17
63	17	71	67	91	61			43	37	59	47	83	23
69	13	97	71	99	19	84 01	31	51	53	63	59		
71	67					11	13	57	17	69	13	97 01	89
81	71	76 13	23	80 03	53	13	47	73	19	71	73	03	31
99	43	19	19	21	13	17	19	79	13	87	37	07	17
	23	27	29	23	71	41	23	81	83	99	17	27	71
72 01		31	13	27	23	53	79	91	17	93 01	71	31	37
23	19	33	17	33	29	71	43			07	41	61	43
41	31	57	13	47	13	73	37	89 03	29	13	67	63	13
61	13	61	47	51	83	79	61	09	59	29	19	73	29
67	53	63	79	77	41	83	17	17	37	47	13	97	97
	13	97	43	83	59	89	13	27	79	53	47	99	41
77	19	77 09	13			97	29	47	23	67	17		
79	29	29	59	81 19	23	85 07	47	57	13	79	83	98 09	17
89	37	39	71	31	47	09	67	59		89	41	27	31
91	23	47	61	37	79	31	19	77	47	94 97	23	41	13
73 03	67	51	23	43	17	49	83	83	13	09	97	47	43
13	71	69	17	49	29	51	17	89	89	51	13	53	59
19	13	71	19	53	31	57	43	93	17	69	17	69	71
27	17	81	31	59	41	67	13	90 17	71	81	19	81	41
39	41	83	43	77	13	79	23	19	29	87	53	93	13
61	17	87	13	89	19	87	31	47	83			99	19
63	37	78 01	29	82 01	59	93	13	61	13	95 03	13		
67	53	97	37	03	13	86 11	79	71	47	09	37	99 13	23
73	73	11	73	07	29	21	37	73	43	17	31	17	47
79	47	13	13	13	43	33	89	77	29	23	89	37	19
87	83	31	41	27	19	39	53	83	31	29	13	43	61
91	19	37	17	49	73	51	41	89	61	53	41	53	37
97	13	49	47	51	37	53	17	91 01	19	57	19	59	23
74 09	31	59	29	57	23	71	13	13	13	63	73	71	13
21	41	71	17	69	17	83	19	31	23	71	17	79	17
23	13	91	13	99	43			39	13	77	61	83	67
29	17	97	53	83 03	19	87 11	31	43	41	89	43	91	97
39	43	79 13	41	21	53	87 17	23	67	89	93	53	97	13

Tabela 1.5. Părţi proporţionale pentru interpolări liniare ale numerelor de 11 la 90

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3.0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
3	3.3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8.0	8,5	9,0	9,5	10,0
6	6,6	7.2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2,1	2,2	2,3	2.4	2,5	2,6	2,7	2.8	2,9	3.0
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5.2	5,4	5,6	5,8	6,0
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8.4	8,7	9,0
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10.8	11,2	11,6	12.0
5	10.5	11,0	11,5	12.0	12,5	13.0	13,5	14.0	14.5	15,0
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16.8	17.4	18,0
7	14,7	15.4	16,1	16.8	17,5	18.2	18,9	19.6	20.3	21,0
8	16.8	17,6	18,4	19.2	20.0	20,8	21,6	22,4	23.2	24,0
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22.5	23,4	24.3	25,2	26,1	27.0

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	3,1	3,2	3,3	3.4	3,5	3,6	3,7	3.8	3,9	4,0
2	6,2	6.4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8.0
3	9,3	9,6	9.9	10.2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14.0	14.4	14.8	15,2	15,6	16,0
5	15,5	16,0	16,5	17.0	17,5	18,0	18.5	19,0	19,5	20.0
6	18.6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0
8	24.8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31.2	32,0
9	27,9	28,8	29.7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0

Tabela 1.5 (continuare)

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9

Tabela 1.5 (continuare)

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7.3	7.4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15.0	15,2	15.4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21.9	22,2	22,5	22.8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30.0	30,4	30.8	31,2	31.6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37.5	38.0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42.6	43,2	43.8	44,4	45,0	45,6	46,2	46.8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55.3	56,0	7
8	56,8	57.6	58,4	59.2	60,0	60,8	61.6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65.7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72.0	9
	81	82	83	48	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8.3	8.4	8,5	8,6	8,7	8.8	8.9	9.0	1
2	16.2	16,4	16,6	16.8	17,0	17.2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24.9	25.2	25.5	25,8	26,1	26.4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33.6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41.0	41.5	42.0	42,5	43.0	43.5	44,0	44,5	45.0	5
6	48,6	49.2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58.1	58.8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68.0	68.8	69.6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75.6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

2. ALGEBRA

2.1. Elemente de logică matematică

2.1.1. Noțiunea de propoziție

Definiție. Se numește propoziție un enunț despre care se poate spune că este adevărat sau fals, dar nu și adevărat și fals simultan.

Se notează cu p, q, P, Q.

Exemple:

1) $\pi \notin \mathbf{Q}$; acesta este un enunț care exprimă un adevăr, deci este o *propoziție adevărată*;

2) $x + 5 = 3$, $x \in \mathbf{N}$ este o *propoziție falsă*, pentru că nu există nici un număr natural astfel ca $x + 5 = 3$;

3) $x \leqslant y$, $x, y \in \mathbf{N}$ este un *enunț* despre care nu se poate spune nimic. Deci *nu este o propoziție*.

Valoarea logică sau valoarea de adevăr a unei propoziții. Dacă o propoziție p este adevărată se spune că are valoarea logică sau valoarea de adevăr: *adevărul*; această valoare de adevăr se notează cu simbolul 1 sau a și scriem $v(p) = 1$ sau $v(p) = a$. Dacă o propoziție q este falsă, se spune că are valoarea de adevăr: *falsul*; această valoare de adevăr se notează cu simbolul 0 sau f și scriem $v(q) = 0$ sau $v(q) = f$.

2.1.2. Conectori (operatori) logici

Negația. *Negația unei propoziții p este propoziția care este falsă cînd p este adevărată și este adevărată cînd p este falsă.*

Se notează non p, $\urcorner p$, $\bar{p}$.

Tabela de adevăr * a propoziției non p se întocmește pe baza relației $v(\text{non } p) = 1 - v(p)$:

p	non p
1	0
0	1

Exemplu. Dacă p este propoziția „d și d' sînt două drepte paralele", atunci non p este propoziția „d și d' au un punct comun" sau „d și d' nu sînt paralele"; dacă p este propoziția „$|x| = x$, $x \in \mathbf{R}$", atunci non p este propoziția „$x < 0$, $x \in \mathbf{R}$".

Conjuncția. *Conjuncția a două propoziții p și q este propoziția care este adevărată dacă și numai dacă fiecare propoziție p și q este adevărată.*

Se notează: $p \wedge q$; „p și q"; $p \,\&\, q$.

---

* Negația poate fi interpretată ca o funcție definită pe $\{0, 1\}$ cu valori în $\{0, 1\}$, dată de tabela de adevăr. Analog pot fi interpretate disjuncția, conjuncția etc.

Tabela de adevăr a propoziției „p și q" este

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Proprietăți. Conjuncția propozițiilor este comutativă și asociativă. Asociativitatea conjuncției rezultă din următoarea tabelă de adevăr:

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Disjuncția. *Disjuncția a două propoziții p și q este propoziția care este adevărată dacă și numai dacă cel puțin una din propozițiile p, q este adevărată.* Se notează $p \vee q$; „p sau q".

Tabela de adevăr a propoziției „p sau q" este

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Proprietăți. Disjuncția propozițiilor este comutativă și asociativă.

Implicația. *Implicația propozițiilor p și q este propoziția care este falsă dacă și numai dacă p este adevărată și q falsă.*

Se notează: (non p) sau q, $p \rightarrow q$ și se citește: „p implică q" sau „dacă p, atunci q". Propoziția p este *ipoteza*, iar propoziția q *concluzia*.

Tabela de adevăr a propoziției „(non p) sau q": este

p	q	non p	(non p) sau q
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Exemplu. Dacă p este propoziția „triunghiul ABC este dreptunghic în A" și q este propoziția „triunghiul ABC are $\widehat{B} = 20°$ și $\widehat{C} = 70°$", atunci $q \to p$ este o propoziție adevărată. În schimb p nu implică q.

Proprietăți. Implicația propozițiilor nu este comutativă: $(p \to q)$ și $(q \to p)$ nu au aceleași valori logice, oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor p și q. Însă $(p \to q)$ și (non $q \to$ non p) au aceleași valori logice.

Dacă p și $(p \to q)$ sînt adevărate, atunci și q este adevărată. Această proprietate se numește *modus ponens*.

Echivalența logică. *Propozițiile p și q sînt echivalente logic, dacă și numai dacă p, q sînt adevărate sau sînt false simultan.*

Se notează: „(non p) $\vee$ q și (non q) $\vee$ p"; „$(p \to q)$ și $(q \to p)$"; „$p \leftrightarrow q$"; se citește: „p echivalent cu q" sau „p dacă și numai dacă q"; „p este condiție necesară și suficientă pentru q".

Exemplu. $(x > 4$ și $x > 6) \leftrightarrow x > 6$, $x \in \mathbf{R}$.

Tabela de adevăr corespunzătoare propoziției compuse $p \leftrightarrow q$ este:

p	q	non p	non q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

Proprietăți. Echivalența este comutativă și asociativă.

Incompatibilitatea. Incompatibilitatea a două propoziții p și q se exprimă printr-o propoziție care este adevărată cînd cel puțin una din ele este falsă și este falsă cînd și p și q sînt adevărate.

Se notează $p \mid q$.

Tabela de adevăr pentru $p \mid q$ este:

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

2.1.3. *Expresii în calculul propozițiilor*

Propozițiile p, q, r,... fiind date, cu ajutorul conectorilor logici $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\mid$ putem forma diferite asamblaje, care se numesc *formule ale calculului cu propoziții sau expresii logice*. Ele se notează α sau α $(p, q, r,...)$, β sau β $(p, q, r,...)$.

Înlocuind în α pe p, q, r,... cu diferite propoziții obținem o altă propoziție, adevărată sau nu, a cărei valoare de adevăr se numește *valoarea expresiei* α, obținută pentru propozițiile p, q, r,... respective.

Asupra unei expresii logice se pot efectua transformări logice, cum sînt: transformarea prin inversiune, reciprocitatea, corelația sau transformarea identică.

Tautologie. O expresie logică α care se reduce la o propoziție adevărată, oricare ar fi propozițiile $p, q, r, \ldots$ se numește *tautologie*.

Unele tautologii se pot lua drept *axiome*, adică drept propoziții adevărate prin definiție, și cu ajutorul acestor axiome se pot da demonstrații ale unor *teoreme* sau *teze*, folosind anumite reguli sau criterii (de *substituție* și *deducție*) dintre care menționăm *regula de inferență*.

Expresii echivalente. Două expresii logice α și β se numesc echivalente dacă și numai dacă pentru orice propoziții $p, q, r, \ldots$ cele două expresii reprezintă propoziții care au aceleași valori de adevăr. În scris se notează $\alpha \equiv \beta$.

Exemplu $\alpha = \text{non } (p \wedge q)$ și $\beta = \text{non } p \vee \text{non } q$ sînt expresii logice echivalente.

2.1.4. *Noțiunea de predicat*

Definiție. Se numește predicat sau propoziție cu variabile un enunț care depinde de o variabilă sau de mai multe variabile și are proprietatea că pentru orice valori date variabilelor se obține o propoziție adevărată sau o propoziție falsă.

Predicatele se notează $p(x, y, z, \ldots)$, $q(x, y, z, \ldots)$ și pot fi unare (de o variabilă), binare (de două variabile), ternare (de trei variabile) etc., variabilele $x, y, z, \ldots$ luînd valori in mulțimi date.

Echivalența a două predicate. Predicatele $p(x, y, z, \ldots)$ și $q(x, y, z, \ldots)$ se numesc echivalente dacă, oricare ar fi valorile pe care le iau $x, y, z, \ldots$ în unul și același domeniu, propozițiile corespunzătoare au aceleași valori de adevăr. Scriem $p(x, y, z, \ldots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \ldots)$. Evident, $p(x, y, z, \ldots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \ldots)$ dacă $p(x, y, z, \ldots) \Rightarrow q(x, y, z, \ldots)$ și $q(x, y, z, \ldots) \Rightarrow p(x, y, z, \ldots)$.

2.1.5. *Cuantificatori*

Cuantificatorul existențial. Fie $p(x)$, cu $x \in M$, un predicat. Dacă există (cel puțin) un element $x' \in M$, astfel încît propoziția $p(x')$ este adevărată, atunci scriem $\exists x\, p(x)$, $(\exists x)\, p(x)$ sau $(\exists x \in M)\, p(x)$. Simbolul $\exists$ se numește *cuantificator existențial* și se citește *„există"*.

Exemplu. $(\exists x \in \mathbf{Z})\; x^2 - 1 = 0$.

Cuantificatorul universal. Fie $p(x)$, cu $x \in M$, un predicat. Dacă $p(x)$ este o propoziție adevărată pentru orice $x \in M$, atunci scriem $\forall x p(x)$, $(\forall x)\, p(x)$ sau $(\forall x \in M)\, p(x)$. Simbolul $\forall$ se numește *cuantificator universal* și se citește *„oricare ar fi"*.

Exemplu. $\forall x \in \mathbf{R}\; |x| \geqslant 0$.

Proprietatea de comutativitate a cuantificatorilor:

1. $(\forall x)(\forall y)\, p(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\, p(x, y)$;

2. $(\exists x)(\exists y)\, p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\, p(x, y)$

Reguli de negare:

$\urcorner[(\exists x)\, p(x)] \Leftrightarrow [(\forall x)\urcorner p(x)]$; $\urcorner[(\exists x)(\exists y)\, p(x, y)] \Leftrightarrow [(\forall x)(\forall y)\urcorner p(x, y)]$

$\urcorner[(\forall x)\, p(x)] \Leftrightarrow [(\exists x)\urcorner p(x)]$; $\urcorner[(\forall x)(\forall y)\, p(x, y)] \Leftrightarrow [(\exists x)(\exists y)\urcorner p(x, y)]$.

Exemple: 1) Propoziția „$(\exists x \in \mathbf{Q})\; x^2 = 2$" este falsă. Negația ei este propoziția „$(\forall x \in \mathbf{Q})\; x^2 \neq 2$" și reprezintă o propoziție adevărată.

2) Este cunoscută definiția convergenței unui șir de numere reale către un număr a:

$$„\exists a \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon".$$

Negația acestei propoziții este

$$„\forall a \in \mathbf{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n > N,\ |a_n - a| \geq \varepsilon".$$

Astfel se vede clar că pentru a obține negarea unei propoziții este suficient să înlocuim un cuantificator prin altul și să transformăm concluzia în negația sa.

2.1.6. *Metoda de demonstrație prin reducere la absurd*

Această metodă se bazează pe tautologia

$$(p \to q) \equiv (\text{non } q \to \text{non } p),$$

care ne arată că pentru a demonstra că $p \to q$, este totuna cu a demonstra că non $q \to$ non p.

2.1.7. *Proprietăți fundamentale ale conectorilor (operatorilor) logici*

Oricare ar fi propozițiile $p, q, r, \ldots$, avem

1) non (non p) $\equiv p$

2) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (comutativitatea conjuncției).

3) $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$ (asociativitatea conjuncției).

4) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (comutativitatea disjuncției).

5) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (asociativitatea disjuncției).

6) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ (tranzitivitatea implicației).

7) $\left.\begin{array}{l}\text{non } (p \wedge q) \equiv (\text{non } p) \vee (\text{non } q)\\ \text{non } (p \vee q) \equiv (\text{non } p) \wedge (\text{non } q)\end{array}\right\}$ legile lui de Morgan

8) $\left.\begin{array}{l}[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]\\ [p \vee (q \wedge r)] \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)\end{array}\right\}$ conjuncția este distributivă în raport cu disjuncția și de asemenea disjuncția este distributivă în raport cu conjuncția.

2.2. Mulțimi

Moduri de definire a mulțimilor. Mulțimile se definesc fie prin indicarea elementelor lor (de pildă $\{0, 1, 3\}$ sau $\{x, y, z\}$), fie prin specificarea unei proprietăți caracteristice a elementelor lor (de exemplu $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

Mulțimile se notează cu litere mari: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$, iar elementele lor cu litere mici: $a, b, c, \ldots$

Apartenența unui element la o mulțime. Dacă un element a aparține unei mulțimi A, aceasta se notează $a \in A$ și se citește „a aparține lui A".

Exemplu. Dacă $M = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, atunci putem scrie $a \in M$. De asemenea $4 \in \mathbf{N}$.

Negația acestei relații, neapartenența lui b la mulțimea B, se scrie $b \notin B$.

De pildă $\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$.

Mulțimea vidă este mulțimea care nu are nici un element. Se notează $\emptyset$.

Egalitatea mulțimilor A și B: $(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(\forall y \in B \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in A)$.

Exemple. $\{1, 2, 4, 8\} = \{n \in \mathbf{N} \mid n$ este divizor natural al lui $8\}$; $\{1, 7, 3\} =$ $= \{1, 3, 7\}$.

Proprietățile egalității: 1. $\forall A$, $A = A$ (reflexivitatea)

2. $(A = B) \Rightarrow (B = A)$ (simetria)

3. $(A = B$ și $B = C) \Rightarrow (A = C)$ (tranzitivitatea)

Incluziunea mulțimii A în mulțimea B: $(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A) \Rightarrow (x \in B)$. Mulțimea A se numește *o parte* sau *o submulțime a lui B*.

Exemplu. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$.

Proprietățile incluziunii. 1. $\forall A$, $A \subset A$ (reflexivitatea)

2. $(A \subset B)$ și $(B \subset A) \Rightarrow (A = B)$ (antisimetria)

3. $(A \subset B$ și $B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ (tranzitivitatea)

4. $\forall A$, $\emptyset \subset A$.

Relația de *neincluziune* se notează $A \not\subset B$ și se citește „A nu e o parte a lui B".

Reuniunea mulțimilor A și B: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$.

Exemplu. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Proprietățile reuniunii: 1. $\forall A, B$: $A \cup B = B \cup A$ (comutativitatea)

2. $\forall A, B, C$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativitatea)

3. $\forall A$: $A \cup A = A$ (idempotența)

4. $\forall A$, $A \cup \emptyset = A$

5. $\forall A, B$: $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

Intersecția mulțimilor A și B: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$.

Exemplu. $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4\} = \{1, 2\}$.

Proprietățile intersecției: 1. $\forall A, B$: $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea)

2. $\forall A, B, C$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea)

3. $\forall A$, $A \cap A = A$ (idempotența)

4. $\forall A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

5. $\forall A, B$: $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

6. $\forall A, B, C$: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivitatea intersecției față de reuniune)

7. $\forall A, B, C$: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivitatea reuniunii față de intersecție)

8. $\forall A, B$: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (absorbția)

Mulțimile A și B care nu au nici un element comun se numesc *disjuncte*. Pentru ele avem $A \cap B = \emptyset$.

Exemplu. Mulțimile $A = [1, 2]$ și $B = [3, 4]$ sînt disjuncte.

Diferența mulțimilor A **și** B: $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$.

Exemplu: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 5, 6\} = \{1, 3\}$.

Proprietățile diferenței: 1. $\forall A$; $A \setminus A = \emptyset$.

2. $\forall A, B, C$: $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

3. $\forall A, B$; $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

4. $\forall A, B$: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Diferența simetrică a mulțimilor A și B: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exemplu: Pentru $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 4, 5\}$, avem $A \triangle B = \{2, 3, 4, 5\}$.

Proprietățile diferenței simetrice: 1. $\forall A$. $A \triangle A = \emptyset$.

2. $\forall A, B$, $A \triangle B = B \triangle A$ (comutativitatea).

3. $\forall A$, $A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A$.

4. $\forall A, B, C$, $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (asociativitatea).

5. $\forall A, B, C$, $A \cap (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle (A \cap C)$.

6. $\forall A, B$, $A \triangle B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.

Complementara unei mulțimi A în raport cu mulțimea E (A fiind o parte a lui E, adică $A \subset E$):

$$C_E A = \{x \mid x \in E \text{ și } x \notin A\}.$$

Exemplu: $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$; $C_E A = \{2, 4\}$.

Proprietăți: ($\forall A, B \subset E$): 1. $C_E(C_E A) = A$ (principiul reciprocității)

2. $C_E A = E \setminus A$.

3. $C_E \emptyset = E$.

4. $C_E E = \emptyset$.

5. $A \cup C_E A = E$ (principiul excluderii terțiului)

6. $A \cap C_E A = \emptyset$ (principiul necontradicției)

7. $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$

Formulele lui de Morgan ($\forall A, B \subset E$)

$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$; $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

non $(p \vee q) \equiv$ non $p \wedge$ non q; non $(p \wedge q) \equiv$ non $p \vee$ non q.

Produsul cartezian a două mulțimi A și B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exemplu. $\{1, 2\} \times \{0, 3\} = \{(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3)\}$.

Proprietățile produsului cartezian ($\forall A, B, C, D$ avem): 1. $A \times B \neq B \times A$, dacă $A \neq B$. $\forall A, B, C, D$ avem

2. $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$

3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

5. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Mulțimi echipotente. Mulțimile A și B se numesc echipotente dacă există o bijecție de la A la B.

Exemplu: $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$ sînt mulțimi echipotente.

Mulțimea N și mulțimea numerelor pare sînt mulțimii echipotente.

Mulțime finită. Fie E o mulțime. Aceasta se numește finită dacă $E = \emptyset$ sau dacă există $n \in$ N, astfel încît E este echipotentă cu mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$

Mulțimea infinită. O mulțime E se numește infinită dacă ea nu este finită Exemple de mulțimi infinite sînt: **N**, **Z**, **Q**, **R**.

Mulțime numărabilă. Fie E o mulțime. Aceasta se numește numărabilă dacă este echipotentă cu **N**. Exemplu: Mulțimea numerelor raționale.

Mulțime cel mult numărabilă. O mulțime E se numește cel mult numărabilă dacă este finită sau numărabilă.

Cardinalul unei mulțimi. Fie E o mulțime. Se numește *cardinalul* acestei mulțimi un simbol asociat ei, notat $|E|$ sau card E, astfel încît $|E| = |F|$ dacă și numai dacă E este echipotentă cu F; cardinalul mulțimei vide se notează cu 0, cardinalul mulțimei $\{1, 2, \ldots, n\}$, cu $n \in$ N, se notează cu n, iar cardinalul mulțimei **N** se notează cu $\aleph_0$ (alef zero).

Mulțimea tuturor părților unei mulțimi E, **notată** $P(E)$. Dacă:

$E = \emptyset$, atunci $P(E) = \{\emptyset\}$, card $P(E) = 1 = 2^0$;

$E = \{a\}$, atunci $P(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$, card $P(E) = 2 = 2^1$;

$E = \{a_1, a_2\}$, atunci $P(E) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$, card $P(E) = 4 = 2^2$;

. . . .

$E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $P(E) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \ldots,$ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\}$, card $P(E) = 2^n$.

Mulțimea $P(E)$ împreună cu intersecția și diferența simetrică formează un inel.

Teoremă. 1. Fie A și B două mulțimi finite. Atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2. Fie A, B și C trei mulțimi finite. Atunci

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

2.3. Relații binare

Relație binară pe o mulțime. Fie M o mulțime nevidă. Se numește *relație binară* R pe M o parte a produsului cartezian $M \times M$.

Dacă $x \in M$ este in relația R cu $y \in M$, atunci scriem xRy sau $(x, y) \in R$. Deci o relație binară se referă la perechile de elemente din M.

Exemple Relația „$\leqslant$" pe **R**; relația „divide" pe **Z**; relația de paralelism pe mulțimea dreptelor din $\mathbf{R}^2$; relația „$\in$"; relația „$\subset$" sînt relații binare.

Proprietăți ale relațiilor binare pe o mulțime:

1. Relația binară R pe mulțimea M se numește *reflexivă* dacă $\forall a \in M$ avem aRa.

2. Relația binară R pe mulțimea M se numește *simetrică* dacă, $\forall a, b \in M$, aRb implică bRa.

3. Relația binară R pe mulțimea M se numește *antisimetrică* dacă $\forall a, b \in M$, aRb și bRa implică $a = b$.

4. Relația binară R pe mulțimea M se numește *tranzitivă* dacă, $\forall a, b, c \in M$, aRb și bRc implică aRc.

Graficul unei relații R definită pe M. Se numește *graficul relației R* definită pe M mulțimea $G = \{(x, y) \mid xRy\}$.

Relație de echivalență. O relație binară R definită pe o mulțime nevidă M se numește *relație de echivalență* dacă ea este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemple. 1) Fie $\mathbf{N}$ mulțimea numerelor naturale și numărul 3 fixat. Pe $\mathbf{N}$ stabilim următoarea relație R: a și b din $\mathbf{N}$ sînt în relația R, dacă a și b împărțite la 3 dau același rest.

Scriem $a \equiv b$ (modulo 3); de pildă $4 \equiv 1$ (modulo 3). Această relație este o *relație de echivalență.*

2) Fie $\mathbf{Z}$ mulțimea întregilor (raționali). Pe $\mathbf{Z}$ stabilim următoarea relație R': a și b sînt în relația R' dacă $\exists k \in \mathbf{Z}$, astfel încît $a - b = 2k + 1$. Relația R' *nu* este o relație de echivalență fiindcă, deși este simetrică, ea nu are proprietatea de reflexivitate și cea de tranzitivitate.

Clase de echivalență. Fie M o mulțime nevidă, R o relație de echivalență pe M și a un element fixat din M. Se numește *clasă de echivalență* corespunzătoare elementului a mulțimea $C_a = \{x \in M \mid xRa\}$.

În exemplul 1) clasele de echivalență sînt următoarele trei mulțimi:

$$\hat{0} = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

$$\hat{1} = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$$

$$\hat{2} = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$$

Două clase de echivalență C_a și C_b sau coincid (cînd aRb) sau sînt disjuncte.

Mulțimea cît. Fie M o mulțime nevidă și R o relație de echivalență pe M. Se numește *mulțime cît* a lui M în raport cu relația R și se notează M/R mulțimea claselor de echivalență.

În exemplu 1) mulțimea cît este $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$.

Relație de ordine. Fie M o mulțime nevidă; se numește relație de ordine pe M o relație binară care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
Se notează „$\prec$" sau „$\leqslant$".

Exemple: 1) Relația cunoscută de ordine naturală „$\leqslant$" pe $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ este o relație de ordine.

2) Relația „$|$" (divide) pe $\mathbf{N}$ este o relație de ordine.

3) Relația de incluziune „$\subset$" pe mulțimea părților unei mulțimi este o relație de ordine.

Relație de ordine totală. Fie M o mulțime nevidă și „$\prec$" o relație de ordine pe M. Această relație de ordine se numește *relație de ordine totală* dacă oricare două elemente ale lui M sînt comparabile, adică $\forall a, b \in M$ avem sau $a \prec b$ sau $b \prec a$.

Mulțimea M înzestrată cu o relație de ordine totală se numește *mulțime total ordonată.*

Exemple. 1) Relația de ordine naturală „$\leqslant$" pe $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ este o relație de ordine totală.

2) Relația de divizibilitate pe $\mathbf{N}$ nu este o relație de ordine totală, ci de ordine parțială (fiindcă există perechi de elemente din $\mathbf{N}$, de pildă 3 și 7, care nu-s comparabile (3 nu divide pe 7 și 7 nu divide pe 3).

Relație de bună ordonare. *Fie M o mulțime nevidă. O relație de ordine pe M se numește relație de bună ordonare dacă orice parte nevidă a lui M are un cel mai mic element. Mulțimea M, cu această relație de bună ordonare, se zice bine ordonată.*

O relație de bună ordonare pe M este o relație de ordine totală pe M.

Exemplu. Mulțimea $\mathbf{N}$, cu relația de ordine naturală „$\leqslant$", este bine ordonată. Mulțimile $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$, cu aceeași relație de ordine, „$\leqslant$", nu mai sînt bine ordonate.

2.4. Operații cu numere reale

2.4.1. *Puteri naturale ale numerelor reale*

1) $(+a)^n = +a^n$

2) $(-a)^{2n} = +a^{2n}$.

3) $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.

4) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

5) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$;

6) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

7) $a^m : b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$.

8) $\dfrac{1}{a^m} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^m = a^{-m}$, $a \neq 0$.

9) $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$.

10) $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

11) $0^n = 0$, $n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Puterile numerelor reale se extind atît pentru exponenți raționali pozitivi sau negativi, cît și pentru exponenți reali, puterile reale fiind definite cu ajutorul șirurilor de puteri raționale. Aceste puteri au proprietăți identice cu cele naturale.

2.4.2. *Identități fundamentale*

Oricare ar fi $x, y, z, t, a, b, c, d, a_1, \ldots, b_1, \ldots \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$, avem:

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$

2) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$

3) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax - by - cz - dt)^2 +$
$+ (bx + ay - dz + ct)^2 + (cx + dy + az - bt)^2 + (dx - cy + bz + at)^2$

4) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

5) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\cdot(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) =$
$= \dfrac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

6) $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$

7) $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

8) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})$

9) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

10) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

11) $(1 + a)(1 + a^2 + a^4) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$

12) $a^6 + b^6 = (a^3 - 2ab^2)^2 + (b^3 - 2a^2b)^2$ *(G. de Racquigny — Adanson).*

13) * $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

14) $a^{2n} - b^{2n} = (a^2 - b^2)(a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + \ldots + a^2b^{2n-4} + b^{2n-2})$

15) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$

16) $(1 + a + a^2 + \ldots + a^n)(1 + a^{n+1}) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{2n+1}$

17) $(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)\ldots(1 + a^{2^n}) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{2^{n+1}-1}$

18) $$(x + a)(x^2 + a^2)(x^4 + a^4)\ldots(x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}) = \begin{cases} \dfrac{x^{2^n} - a^{2^n}}{x - a}, & x \neq a \\ 2^n \cdot a^{2^n-1}, & x = a \end{cases}$$

19) $(x^2 - ax + a^2)(x^4 - a^2x^2 + a^4)\ldots(x^{2^n} - a^{2^{n-1}} \cdot x^{2^{n-1}} + a^{2^n}) =$
$$= \frac{x^{2^{n+1}} + a^{2^n} \cdot x^{2^n} + a^{2^{n+1}}}{x^2 + ax + a^2}$$

20) Identitatea lui *Lagrange*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2, \ a_i, \ b_j \in \mathbf{R}, \ i, \ j = \overline{1, n}$$

21) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \ldots + \frac{1}{n + n}$$ (E. Catalan).

22) $(1 + 2^{2n+1} + 2^{n+1})(1 + 2^{2n+1} - 2^{n+1}) = 1 + 2^{4n+2}$ *(Aurifeuille)*

2.4.3. *Radicali. Proprietăți***

$(a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$
$a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b$
$+ 2ab^2 + b^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$

1) $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} \quad (a \geqslant 0).$

2) $\sqrt[m]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}. \quad (a > 0).$

3) $(\sqrt[m]{a})^m = a \quad (a \geqslant 0)$

4) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \quad (a, b \geqslant 0).$

5) $\left(\sqrt[m]{\dfrac{1}{a}}\right)^m = \dfrac{1}{a} \quad (a > 0)$

6) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc} \quad (a, b, c \geqslant 0).$

---

* Identitățile de la 13), 14), 15) ne arată că $a^n - b^n$ este un *multiplu de* $a - b$, că $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ este *multiplu de* $a + b$, respectiv că $a^{2n} - b^{2n}$ este *multiplu de* $a^2 - b^2$, rezultate foarte utile în aplicații.

** Indicii radicalilor se consideră *numere naturale*, mai mari decît 2 sau egale 2.

7) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ $(a \geqslant 0,\ b > 0)$.

8) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$ $(a \geqslant 0)$.

9) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$ $(a > 0)$.

10) $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m$ $.(a \geqslant 0)$.

11) $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$ $(a \geqslant 0)$.

12) $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}$ $(a \geqslant 0)$.

13) $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} \cdot b^{qm}}$ $(a, b \geqslant 0)$.

14) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ $(a \geqslant 0)$.

15) $\sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} : b^{mq}}$ $(a \geqslant 0,\ b > 0)$.

16) $\sqrt{a^2} = |a|$ $(a \in R)$.

17) $\sqrt[2n+1]{-a} = -a^{1/(2n+1)} = -\sqrt[2n+1]{a}$ $(a \geqslant 0)$.

18) $(\sqrt[2n+1]{-a})^{2n+1} = -a$ $(a \geqslant 0)$.

19) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$ $(a, b \geqslant 0)$.

20) $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{(A + C)/2} \pm \sqrt{(A - C)/2}$, dacă şi numai dacă $A^2 - B = C^2$.

21) Cantitatea sau expresia conjugată lui $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ este $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$.

22) Cantitatea sau expresia conjugată lui $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ este $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

2.5. Ecuaţii şi inecuaţii de gradul întîi

2.5.1. *Ecuaţii de gradul întîi sau ecuaţii afine*

$$ax + b = 0, \quad a \in \mathbf{R},\ x,\ b \in \mathbf{R}.$$

Fie S mulţimea de soluţii a acestei ecuaţii.

Dacă: 1) $a \neq 0$; $x = -\dfrac{b}{a}$ (soluţie unică). $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

2) $a = 0$ şi $b \neq 0$, ecuaţia nu are soluţii. $S = \varnothing$.

3) $a = 0$ şi $b = 0$, orice număr real x este soluţie a ecuaţiei afine date; $S = \mathbf{R}$.

Semnul funcţiei afine: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		semn contrar lui a	0	același semn cu a	

Graficul funcției afine este o *linie dreaptă*.

2.5.2. *Inecuații de gradul întîi sau inecuații afine*

Cazul 1. $ax + b > 0$, $a, x, b \in \mathbf{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor.

Dacă: 1) $a > 0$, $S = \left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$

2) $a < 0$, $S = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$

3) $a = 0$, $b > 0$, $S = \mathbf{R}$

4) $a = 0$ $b \leqslant 0$, $S = \varnothing$.

Cazul 2. $ax + b \leqslant 0$, $a, x, b \in \mathbf{R}$,

Dacă: 1) $a > 0$, $S = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right]$

2) $a < 0$, $S = \left[-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$

3) $a = 0$. $b \leqslant 0$ $S = \mathbf{R}$

4) $a = 0$, $b > 0$, $S = \varnothing$

Inecuațiile $ax + b < 0$ și $ax + b \geqslant 0$ se reduc la cele două cazuri (prin înmulțirea inecuației respective cu -1 și schimbarea sensului inegalităților).

2.5.3. *Modulul unui număr real x*

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ dacă } x < 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ x \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$

Proprietăți: $\forall x, y \in \mathbf{R}$ avem:

1) $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 1'. $|x| = x$ signum x.

2) $|-x| = |x|$; 2'. $x = |x|$ signum x.

3) $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y$ sau $x = -y)$.

4) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$, cu $a \in R_+$.

5) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

6) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

7) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$

8) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

9) $||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

10) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

11) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

Ecuații și inecuații fundamentale, care conțin modulul

1) $|x - a| = b$, $(a, b, x \in \mathbf{R}$, S = mulțimea soluțiilor)

b	S
$b < 0$	$\varnothing$
$b = 0$	$\{a\}$
$b > 0$	$\{a - b;\ a + b\}$

2) $|x - a| > b$

b	S
$b < 0$	$\mathbf{R}$
$b = 0$	$\mathbf{R} \setminus \{a\}$
$b > 0$	$(-\infty,\ a - b) \cup (a + b,\ +\infty)$

3) $|x - a| < b$

b	S
$b < 0$	$\varnothing$
$b = 0$	$\varnothing$
$b > 0$	$(a - b;\ a + b)$

2.6. Numere complexe

Definiție. Se numește *număr complex* orice element $z = (a, b)$ al mulțimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, înzestrate cu două operații algebrice, adunarea $\forall z = (a, b)$, $\forall z' = (a', b') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $z + z' := (a + a',\ b + b')$ și înmulțirea $\forall z = (a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\forall z' = (a', b') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $zz' = (aa' - bb',\ ab' + a'b)$. Mulțimea numerelor complexe se notează cu $\mathbf{C}$ și este un *corp comutativ* *

2.6.1. *Forma algebrică a numerelor complexe*

$z = a + ib$, cu $a = (a, 0)$, $b = (b, 0)$ și $i = (0, 1)$, respectiv $i^2 = -1$

Egalitatea a două numere complexe z și z':

$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ și $b = b'$.

* A se vedea paragraful cu „Structuri algebrice"

Adunarea **numerelor complexe are proprietăţile:** este asociativă, comutativă, admite ca element neutru pe 0 şi orice număr complex $a + ib$ admite un opus $-a - ib$.

Înmulţirea numerelor complexe are proprietăţile: este asociativă, comutativă, admite ca element neutru pe 1, orice număr complex $(a + bi)$ nenul admite un invers $\left((a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i\right)$; este distributivă faţă de adunare: $z(z' + z'') = zz' + zz''$, $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$.

Puterile numărului i:

$$\forall m \in \mathbb{N};\ i^{4m} = 1,\ i^{4m+1} = i,\ i^{4m+2} = -1,\ i^{4m+3} = -i.$$

Numere complexe conjugate. Dacă $z = a + ib$, atunci numărul $a - ib$ se numeşte *conjugatul* lui z şi se notează cu $a - ib = \overline{a + ib} = \bar{z}$. Au loc următoarele proprietăţi:

$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$:

1) $z + \bar{z} = 2a$

2) $z - \bar{z} = 2bi$

3) $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$

4) $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$

5) $z\bar{z} = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

6) $\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}}$

7) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

8) $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$.

Modulul unui număr complex

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \text{sau} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Avem apoi:

1) $|z| = |\bar{z}|$; 2) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

3) $|z| - |z'| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

4) $|zz'| = |z| \cdot |z'|$; 5) $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$, $|z| \neq 0$

2.6.2. *Forma trigonometrică a numerelor complexe*

$z = r(\cos u + i \sin u)$, unde $r = |z|$, iar unghiul $u \in [0, 2\pi)$ este soluţia ecuaţiilor trigonometrice $r \cos u = a$ şi $r \sin u = b$.

Exemplu: Dacă $z = -1 - i$, atunci $|z| = \sqrt{2}$, $u = \frac{5\pi}{4}$ şi $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

2.6.3. *Formula lui Moivre*

$\forall u \in \mathbf{R}$ și $\forall n \in \mathbf{N}$, $(\cos u + i \sin u)^n = \cos(nu) + i \sin(nu)$.

Consecințe ale formulei lui Moivre

$\cos nu = \cos^n u - C_n^2 \cos^{n-2} u \sin^2 u + C_n^4 \cos^{n-4} u \sin^4 u - \dots$

$\sin nu = C_n^1 \cos^{n-1} u \sin u - C_n^3 \cos^{n-3} u \sin^3 u + \dots$

$$\operatorname{tg} nu = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} u - C_n^3 \operatorname{tg}^3 u + C_n^5 \operatorname{tg}^5 u - \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 u + C_n^4 \operatorname{tg}^4 u - \dots}$$

2.6.4. *Extragerea rădăcinii de ordinul n dintr-un număr complex* $z = r(\cos u + i \sin u)$

$$(\sqrt[n]{z})_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{u + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{u + 2k\pi}{n}\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

$$(\sqrt[n]{1})_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1^*$$

$$(\sqrt[n]{-1})_k = \cos\frac{2k + 1}{n}\pi + i \sin\frac{2k + 1}{n}\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1^{**}$$

$$\sqrt{a + ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$$

Exemple. 1) Pentru $n = 3$ și $z = 1$ ($r = 1$ și $u = 0$) rădăcinile cubice complexe ale unității sînt $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = j$, $\varepsilon_2 = j^2$, unde $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Afixele ε_0, ε_1 și ε_2 corespund vîrfurilor unui triunghi echilateral, înscris într-un cerc de rază 1.

2) Pentru $n = 2$ și $z = i\left(r = 1,\ u = \frac{\pi}{2}\right)$ avem $z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

2.6.5. *Forma exponențială a numerelor complexe*

$z = re^{iu}$.

Proprietăți:

1) $\bar{z} = re^{-iu}$;

2) $zz' = rr' e^{i(u+u')}$;

---

* Pentru simplicitate, în continuare, notăm $(\sqrt[n]{1})_k = \varepsilon_k$;

** Pentru același argument, notăm $(\sqrt[n]{-1})_k = \omega_k$.

3) $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} e^{i(u-u')}$;

4) $z^n = r^n e^{inu}$;

5) $(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(u+2k\pi)}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Formulele lui Euler.

$e^{iu} = \cos u + i \sin u$; $e^{-iu} = \cos u - i \sin u$.

2.6.6. *Ecuația binomă*

$x^n - A = 0$, $A \in \mathbf{C}$, $A = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$x_k = |A|^{1/n} \omega_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{R}$, $A < 0$;

$x_k = A^{1/n} \varepsilon_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{R}$, $A > 0$;

$x_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$;

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \mathrm{i}$. Deoarece $\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$, avem $\frac{1+iz}{1-iz} = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$. Rezolvînd această ultimă ecuație în raport cu z, găsim $z_k = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

2.7. Ecuații și inecuații de gradul al II-lea

2.7.1. *Ecuații de gradul al doilea*

$ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Formule de rezolvare.

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $\Delta = b^2 - 4ac$;

sau

$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$; $b = 2b'$; $\Delta' = b'^2 - ac$.

Formulele lui François Viète.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Discuția naturii și semnului rădăcinilor în funcție de semnele lui $\Delta = b^2 - 4ac$, $P = x_1x_2$ și $S = x_1 + x_2$

Δ	P	S	Natura și semnul rădăcinilor
$\Delta < 0$	—	—	Rădăcini complexe
$\Delta = 0$	—	—	Rădăcini reale și egale
$\Delta > 0$	$P > 0$	$S > 0$	Rădăcini reale pozitive
	$P > 0$	$S < 0$	Rădăcini reale negative
	$P < 0$	$S > 0$	Rădăcini reale și de semne contrare; cea pozitivă este mai mare decît valoarea absolută a celei negative
	$P < 0$	$S < 0$	Rădăcini reale și de semne contrare. Cea negativă este mai mare în valoarea absolută.

Rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbf{R}$, exprimate cu ajutorul funcțiilor trigonometrice:

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$

Δ	q	Relația de definire a lui φ	x_1	x_2
$\Delta > 0$	$q < 0$	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{\lvert p \rvert}$	$\varepsilon\sqrt{-q}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$	$-\varepsilon\sqrt{-q}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$
$\Delta > 0$	$q > 0$	$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{\lvert p \rvert}$	$-\varepsilon\sqrt{q}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$	$-\varepsilon\sqrt{q}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$
$\Delta < 0$	$q > 0$	$\cos\varphi = \frac{\lvert p \rvert}{2\sqrt{q}}$	$\sqrt{q}\cdot e^{i\varphi}$	$\sqrt{q}\cdot e^{-i\varphi}$

$\varepsilon = \operatorname{signum} p$

Formule utile în studiul ecuației de gradul al II-lea:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$$

Semnul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$

$\Delta > 0$: $a \neq 0$, $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Semnul lui a	0	Semn contrar lui a	0	Semnul lui a	

$\Delta = 0$:

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$f(x)$	Semnul lui a	0	Semnul lui a

$\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Semnul lui a	

Graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, este o *parabolă*.

Descompunerea trinomului $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, x_1 și x_2 fiind rădăcinile trinomului

1. $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
2. $\Delta = 0$; $f(x) = a(x - x_1)^2$.
3. $\Delta < 0$, $f(x)$ este ireductibil (indecompozabil) pe $\mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Construirea unei ecuații de gradul al II-lea cînd se cunosc suma și produsul rădăcinilor ei:

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ cu } S = x_1 + x_2 \text{ și } P = x_1x_2.$$

Condiții necesare și suficiente pentru ca numerele reale date α *și* β *să fie în anumite relații cu rădăcinile* x_1 *și* x_2 *ale ecuației de gradul al doilea:*

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0, \ a, b, c \in \mathbf{R}, \ a \neq 0$$

respectiv, pentru ca $f(x)$ *să păstreze un semn constant* $\forall x$, $x \in \mathbf{R}$.

Nr. crt.	Relații între x_1, x_2, α și β	Condiții necesare și suficiente
1	$\alpha < x_1 < \beta < x_2$ sau $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$.	1°. $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
2	$\alpha < x_1 \leqslant x_2 < \beta$	1°. $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$. 2°. $af(\alpha) > 0$. 3°. $af(\beta) > 0$. 4°. $\alpha < -\frac{b}{2a}$. 5°. $\beta > -\frac{b}{2a}$.

Nr. crt.	Relații între x_1 x_2, α și β	Condiții necesare și suficiente
3	$x_1 < \alpha < \beta < x_2$	1°. $af(\alpha) < 0$. 2° $af(\beta) < 0$, ceea ce atrage după sine $\Delta > 0$ sau 1°'. $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$. 2°'. $af(\alpha) + af(\beta) < 0$.
4	$x_1 < \alpha < x_2$	$af(\alpha) < 0$.
5	$\alpha < x_1 \leqslant x_2$	1°. $\Delta \geqslant 0$. 2°. $af(\alpha) > 0$. 3°. $\alpha < -\frac{b}{2a}$.
6	$x_1 \leqslant x_2 < \alpha$	1°. $\Delta \geqslant 0$. 2°. $af(\alpha) > 0$. 3°. $\frac{-b}{2a} < \alpha$.
7	$f(x) \geqslant 0$, $\forall x$, $x \in \mathbf{R}$	1°. $\Delta \leqslant 0$. 2°. $a > 0$.
8	$f(x) \leqslant 0$, $\forall x$, $x \in \mathbf{R}$	1°. $\Delta \leqslant 0$. 2°. $a < 0$.

Teoremă. Ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$ și $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $a, b, c, a', b', c' \in \mathbf{R}$, $aa' \neq 0$, au cel puțin o rădăcină comună dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0.$$

Teoremă. Două ecuații de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ și $a'x^2 + b'x + c' = 0$ au aceleași rădăcini dacă și numai dacă au coeficienții proporționali: $a = ma'$, $b = mb'$, $c = mc'$, $m \in \mathbf{R}^*$

Observație. Rezolvarea ecuației bipătrate $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, prin substituția $x^n = y$, se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea în y, anume $ay^2 + by + c = 0$, și la rezolvarea a două ecuații binome de forma $x^n = y_1$, $x^n = y_2$.

2.7.2. *Inecuații fundamentale de gradul al II-lea*

1) $ax^2 + bx + c > 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, S = mulțimea soluțiilor:

Δ	a	S
$\Delta > 0$	$a > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
$\Delta > 0$	$a < 0$	(x_1, x_2)
$\Delta = 0$	$a > 0$	$\mathbf{R} \setminus \{x_1\}$
$\Delta = 0$	$a < 0$	$\emptyset$
$\Delta < 0$	$a > 0$	$\mathbf{R}$
$\Delta < 0$	$a < 0$	$\emptyset$

2) $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, S = mulțimea soluțiilor:

Δ	a	S
$\Delta > 0$	$a > 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$
$\Delta > 0$	$a < 0$	$[x_1, x_2]$
$\Delta = 0$	$a > 0$	$\mathbf{R}$
$\Delta = 0$	$a < 0$	$\{x_1\}$
$\Delta < 0$	$a > 0$	$\mathbf{R}$
$\Delta < 0$	$a < 0$	$\emptyset$

Inecuațiile $ax^2 + bx + c < 0$ și $ax^2 + bx + c \leq 0$ se reduc la cazurile precedente (prin înmulțirea cu -1 și schimbarea sensului acestor inegalități)

2.8. Ecuații algebrice de gradul III, IV și V

2.8.1. *Rezolvarea ecuației de gradul al treilea*

Metoda lui Cardan. Ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, prin substituția $x = y - \frac{b}{3a}$, capătă *forma canonică*

$$y^3 + py + q = 0, \text{ cu } p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \; q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}. \quad (1)$$

Dacă notăm

$$P = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \text{ și } Q = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

atunci rădăcinile ecuației (1) sînt

$$y_1 = P + Q,$$

$$y_2 = -\frac{P + Q}{2} + i\frac{P - Q}{2} \cdot \sqrt{3},$$

$$y_3 = -\frac{P + Q}{2} - i\frac{P - Q}{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Exemplu. $y^3 - 6y + 6 = 0$; $p = -6$, $q = 6$; $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -8 + 9 = 1$;

$$P = \sqrt[3]{-3 + 1} = -\sqrt[3]{2}; \; Q = -\sqrt[3]{4}.$$

Deci

$$y_1 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4};$$

$$y_2 = +\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2});$$

$$y_3 = +\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}).$$

Observație. Numărul $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ se numește *discriminantul ecuației* (1).

Dacă $D < 0$, atunci ecuația (1) are toate rădăcinile reale și distincte.

Dacă $D = 0$, atunci ecuația (1) are toate rădăcinile reale, dintre care două confundate (egale).

Dacă $D > 0$, atunci ecuația (1) are o singură rădăcină reală și două complexe conjugate.

În cazul $D < 0$, cele trei rădăcini reale au forme complexe și este mai indicat să se folosească alte metode de rezolvare, de pildă cea care utilizează funcțiile trigonometrice.

Metodă de rezolvare a ecuației $y^3 + py + q = 0$, bazată pe folosirea funcțiilor trigonometrice.

Cazul 1. $D < 0$ $(p < 0)$. Dacă α este definit de $\cos\alpha = \dfrac{-q}{2\sqrt{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$,

atunci

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}; \quad y_{2,3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right).$$

Exemplu: $y^3 - 24y - 32 = 0$; $p = -24$; $q = -32$, $D = (-8)^3 + (-16)^2 = 256 - 512 = -256$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ și

$y_1 = 4\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}$; $y_2 = -4\sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{12}$; $y_3 = -4$.

Cazul 2. $D \geqslant 0$ $(p < 0)$. Dacă θ și φ sînt definite de

$$\sin\theta = \frac{2}{q}\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}, \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},$$

atunci

$$y_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\varphi}; \quad y_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{1 \pm i\sqrt{3}\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

Cazul 3. $D > 0$ $(p > 0)$. Dacă θ și φ sînt definite de

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}, \quad \frac{-\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}, \quad \text{atunci}$$

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cos 2\varphi; \quad y_{2,3} = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\frac{\cos 2\varphi \pm i\sqrt{3}}{\sin 2\varphi}.$$

Cazul 4. $D = 0$ $(p < 0)$.

$$y_1 = \mp 2\sqrt{-\frac{p}{3}}; \quad y_2 = y_3 = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

2.8.2. *Ecuația reciprocă de gradul al treilea*

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0, \; a, b, c \in \mathbf{R} \; a \neq 0.$$

Rezolvarea ei se reduce la aceea a ecuației

$$(x \pm 1)[ax^2 + (b \mp a)x + a] = 0.$$

2.8.3. *Rezolvarea ecuației de gradul al patrulea*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \; a \neq 0.$$

Ecuația se poate scrie:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d,$$

sau, prin adunarea la ambii membri a cantității $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}$,

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \frac{y^2}{4} - d.$$

Alegem pe y astfel ca și partea a doua să fie un pătrat perfect. Notînd cu $A^2 = \frac{a^2}{4} - b + y$, $B^2 = \frac{y^2}{4} - d$, $2AB = \frac{ay}{2} - c$ această condiție se scrie $4 \cdot A^2B^2 = (2AB)^2$, ceea ce ne conduce la *ecuația rezolvantă*

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (d(a^2 - 4b) + c^2) = 0.$$

Dacă y_0 este o rădăcină a acestei ecuații, atunci rezolvarea ecuației date se reduce la aceea a ecuațiilor

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = Ax + B \text{ și } x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = -Ax - B.$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația $x^4 + 3x^3 - 5x - 3 = 0$. Ecuația rezolvantă (avînd $a = 3$, $b = 0$, $c = -5$, $d = -3$) este $y^3 - 3y + 2 = 0$. Fie $y_0 = -2$. Atunci $A^2 = \frac{1}{4}$, $B^2 = 4$, $2AB = 2$. Deci $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$; acum avem de rezolvat ecuațiile $x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = \frac{x}{2} + 2$ și $x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = -\frac{x}{2} - 2$ care ne dau

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_3 = x_4 = -1$$

2.8.4. *Ecuația reciprocă de gradul al patrulea*

$$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0,\ a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0.\ x \neq 0.$$

Rezolvarea ei se reduce la aceea a unei ecuații de gradul al doilea, prin substituția $y = x + \frac{1}{x}$:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \pm b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \text{ sau } ay^2 \pm by + c - 2a = 0.$$

2.8.5. *Ecuația bipătrată*

$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$. Cu $x^2 = y$, rezultă ecuația $ay^2 + by + c = 0$, deci

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

2.8.6. *Ecuația reciprocă de gradul al cincilea*

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0,\ a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0.$$

Rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuației $x \pm 1 = 0$ și a unei ecuații reciproce de gradul al patrulea.

2.9. Logaritmi

Definiție. Fie $a \in \mathbf{R}_+^*$, $a \neq 1$, și $b \in \mathbf{R}_+^*$ două numere reale. Se numește *logaritm* al numărului real strict pozitiv b exponentul la care trebuie ridicat numărul a, numit *bază*, pentru a obține numărul b.

Logaritmul numărului b în baza a se notează $\log_a b$.

Evident $b = a^{\log_a b}$. Pentru $a = 10$ obținem *logaritmii zecimali*, iar pentru $a = e$ obținem *logaritmii naturali* sau *neperieni*.

Proprietăți:

1) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c\ (b, c > 0)$.

2) $\log_a a = 1$.

3) $\log_a 1 = 0$.

4) $\log_a a^c = c$; $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|,\ x \neq 0$.

5) $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b\ (b > 0,\ m \in N,\ m \geqslant 2)$

6) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

7) (Formula de schimbare a bazei logaritmului) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

8) $x > 0$ și $y > 0 \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

9) $x > 0$ și $y > 0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\operatorname{colog}_a x = -\log_a x$

10) $a > 1$ și $x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x < 0$; $a > 1$ și $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$.

11) $0 < a < 1$ și $x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x > 0$; $0 < a < 1$ și $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$.

12) $a > 1$ și $0 < x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$; $0 < a < 1$ și $0 < x < y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$.

13) $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1, \Rightarrow \dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \dfrac{\log_b x}{\log_b y}$

14) $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow \log_a x = \log_{a^n} x^n$

15) $x \in \mathbf{R},\ a > 0,\ a \neq 1 \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$

Operații *cu logaritmi zecimali.* 1°. *Suma a doi logaritmi:* se adună separat caracteristicile (se adună algebric, întrucît există caracteristici pozitive și caracteristici negative) și separat mantisele (care sînt întotdeauna pozitive, afară de cazul în care întregul logaritm este negativ); apoi cele două rezultate se adună algebric.

2°. *Scăderea a doi logaritmi:* se adună descăzutul cu cologaritmul scăzătorului.

3°. *Înmulțirea unui logaritm cu un număr întreg:* cînd caracteristica este pozitivă, înmulțirea se face în modul obișnuit; cînd caracteristica este negativă se înmulțește separat mantisa și separat caracteristica și se adună algebric rezultatele.

4°. *Împărțirea unui logaritm printr-un număr întreg.* În cazul cînd caracteristica este pozitivă, împărțirea se face obișnuit. In cazul în care este negativă, se împarte separat mantisa și separat caracteristica; dacă nu se împarte exact caracteristica prin numărul dat, atunci se adaugă caracteristicii atîtea unități negative cîte sînt necesare pentru a avea un număr divizibil prin împărțitorul respectiv și, pentru a nu se modifica rezultatul, se adaugă și mantisei tot atîtea unități, dar pozitive.

2.9.1. *Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale*

1) $\log_a x = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b \in \mathbf{R}$. Soluția: $x = a^b$.

2) $\log_a x > b,\ b \in \mathbf{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	S
$a > 1$	$(a^b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$(0, a^b)$

3) $\log_a x < b,\ b \in \mathbf{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	S
$a > 1$	$(0, a^b)$
$0 < a < 1$	$(a^b, +\infty)$

2.9.2. *Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale*

1) $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Soluția $x = \log_a b \in \mathbf{R}$.

2) $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \leq 0$, nu are nici o soluție reală.

3) $a^x > b$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	b	S
$a > 1$	$b > 0$	$(\log_a b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$(-\infty, \log_a b)$
$a > 0$, $a \neq 1$	$b < 0$	$\mathbf{R}$

4) $a^x < b$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	b	S
$a > 1$	$b > 0$	$(-\infty, \log_a b)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$(\log_a b, +\infty)$
$a > 0$, $a \neq 1$	$b \leq 0$	$\emptyset$

2.10. Metoda inducției matematice

2.10.1. *Axioma de recurență a lui Peano*

Fie A o parte a lui $\mathbf{N}$ astfel că:

1. $0 \in A$; 2. $(\forall n \in \mathbf{N})$, $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$. Atunci rezultă $A = \mathbf{N}$.

2.10.2. *Metoda inducției matematice*

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de numărul natural n. Dacă avem

1. $P(0)$ adevărată;

2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(n)$ adevărată $\Rightarrow P(n+1)$ adevărată, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

In demonstrație prin metoda inducției matematice (recurență) poate apărea în loc de 0, un număr natural n_0, dacă în propoziția $P(n)$ pe care vrem să o demonstrăm am considerat $n \geqslant n_0$.

2.10.3. *Variantă a metodei inducției matematice*

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de numărul natural $n \geqslant n_0 \in \mathbf{N}$. Dacă avem:

1. $P(n_0)$ adevărată;

2. $(\forall m \in \mathbf{N},\ n_0 \leqslant m < k)$ $P(m)$ adevărată $\Rightarrow P(k)$ adevărată, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant n_0$.

Exemplu. Media aritmetică a n numere pozitive nu este mai mică decît media lor geometrică, adică

$\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ și numerele strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, avem

$$P(n): \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{1}$$

egalitatea avînd loc atunci și numai atunci cînd $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Redăm demonstrația lui *Cauchy*:

1. *Etapa de verificare*: în cazul nostru $n_0 = 2$; pentru $n = 2$ inegalitatea este adevărată, întrucît

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geqslant 0, \text{ evident; deci}$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}. \tag{2}$$

Se constată imediat că (2) se transformă în egalitate dacă și numai dacă $a_1 = a_2$.

2) *Etapa de demonstrație.* Admitem că relația (1) este adevărată pentru $n = 2^k > 2$ și să demonstrăm că ea este adevărată și pentru $2n = 2^{k+1}$, adică

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n} \geqslant \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}}. \tag{3}$$

În adevăr, avem

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n}}{2r} =$$

$$= \frac{\dfrac{a_1 + a_2}{2} + \dfrac{a_3 + a_4}{2} + \ldots + \dfrac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \cdots \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}}.$$

Cum inegalitatea noastră este adevărată pentru 2, urmează că ea este adevărată pentru $2^2, 2^3, \ldots, 2^k, \ldots, \forall k \in \mathbf{N}$.

Pentru a arăta că (1) are loc pentru orice n, rămîne să arătăm că (1) are loc pentru orice p care nu e putere a lui 2, $p < 2^k$. In acest scop folosim următorul rezultat:

„Dacă p nu este o putere a lui 2 și este mai mic decît 2^k, atunci $\exists m \in \mathbf{N}$ astfel încît $p + m = 2^k$". De aceea vom scrie

$$\frac{a_1 + a_n + \ldots + a_p + a_{p+1} + \ldots a_{p+m}}{p + m} \geqslant \sqrt[p+m]{a_1a_2 \ldots a_{p+m}}.$$

Alegem $a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_{p+m} = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p}$.

Aceasta ne permite să scriem

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p + m\dfrac{a_1 + \ldots + a_p}{p}}{p + m} \geqslant \sqrt[p+m]{a_1a_2 \ldots a_p\left(\frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}\right)^m}$$

sau

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p} \geqslant \sqrt[p+m]{a_1a_2 \ldots a_p\left(\frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}\right)^m}$$

sau

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p}\right)^{p+m} \geqslant a_1a_2 \ldots a_p\left(\frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}\right)^m$$

sau

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p}\right)^p \geqslant a_1a_2 \ldots a_p$$

sau

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p} \geqslant \sqrt[p]{a_1a_2 \ldots a_p}, \quad \forall p < 2^k. \tag{4}$$

Deci (1) are loc pentru orice n.

Mai rămîne de arătat că egalitatea în (1) are loc dacă și numai dacă $a_1 = \ldots = a_n$.

Evident $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ implică egalitate în (1). Pentru a arăta că $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ ne conduce la $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ este suficient a arăta* că $a_1 \neq a_2$ implică

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}.$$

* Adică noi arătăm, de fapt, contrara reciprocei.

Fie deci $a_1 \neq a_2$, situație în care avem $\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$.

De aceea putem relua (1) sub forma

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n} > \sqrt[n]{(\sqrt{a_1 a_2})^2 a_3 \ldots a_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}.$$

Deci $a_1 \neq a_2$ ne conduce la $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$, adică egalitate în (1) are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2.11. Progresii aritmetice

Definiție. Se numește progresie aritmetică un șir de numere $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ în care fiecare termen, începînd cu a_2, se obține din cel precedent prin adăugarea unui număr constant numit rația progresiei.

Se notează $\div a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Dacă a_1 este primul termen, a_n cel de al n-lea termen (*termenul general* sau *termenul de rang n*), r *rația*, n numărul termenilor și S_n suma celor n termeni, atunci avem:

$$a_n = a_{n-1} + r, \ n \geqslant 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \ n \geqslant 2 \ (a_n \text{ în funcție de } a_1, r \text{ și } n) \qquad (1)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ sau}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n \qquad (2)$$

Natura progresiei. Progresia este crescătoare dacă $r > 0$, descrescătoare dacă $r < 0$ și toți termenii sînt egali, dacă $r = 0$.

Termeni echidistanți de extremi. Intr-o progresie aritmetică suma termenilor echidistanți de extremi este egală cu suma termenilor extremi:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ($n = 2m + 1$), atunci există un termen în mijloc, a_{m+1}, astfel încît

$$2a_{m+1} = a_1 + a_{2m+1}$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca trei numere a, b, c, luate în această ordine, să formeze o progresie aritmetică este să avem $2b = a + c$.

Inserarea mediilor aritmetice $a'_1, \ldots, a'_m$ între doi termeni consecutivi a_j, a_{j+1} ai unei progresii aritmetice $a_1, \ldots, a_n$ de rație r se reduce la calcularea rației r' a progresiei aritmetice $a_j, a'_1, \ldots, a'_m, a_{j+1}$ de $m + 2$ termeni. Rezultă $r' = r/(m+1)$ sau $r' = \frac{a_{j+1} - a_j}{m+1}$.

Exemplu. Să se insereze 5 medii aritmetice între -3 și 12.

Soluție. Fie r' rația progresiei căutate. Numărul termenilor fiind $2 + 5 = 7$, avem

$$r' = \frac{12 - (-3)}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Rezultă progresia căutată

$$\div -3;\ -\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{9}{2},\ 7,\ \frac{19}{2},\ 12.$$

2.11.1. *Reprezentarea unei progresii aritmetice cu n termeni*

1) Dacă numărul termenilor este impar ($n = 2m + 1$), a fiind termenul din mijloc și r rația, atunci progresia are forma

$$a - mr, \ldots, a - r,\ a,\ a + r, \ldots, a + mr.$$

2) Dacă numărul termenilor este par ($n = 2m$), progresia are forma: $a - (2m + 1)r', \ldots, a - 3r',\ a - r',\ a + r',\ a + 3r', \ldots, a + (2m + 1)r'$, cu rația $r = 2r'$.

Caracterizarea și determinarea unei progresii aritmetice. O progresie aritmetică este complet caracterizată dacă cunoaștem pe a_1, r, n, a_n și S_n. Aceste cinci numere sînt legate prin două relații: relațiile (1) și (2). Rezultă că pentru a determina complet o progresie aritmetică nouă trebuie să ni se indice 3 din cele 5 numere menționate (sau trei relații care conține aceste 5 numere), astfel încît împreună cu (1) și (2) să formeze un sistem compatibil din care să aflăm pe a_1, r, n, a_n și S_n.

Exemplu. O progresie aritmetică are suma termenilor săi egală cu 222, $a_3 + a_7 = 28$, $a_4 + a_8 = 34$.

Se cere numărul termenilor săi, primul termen și rația.

Rezolvare. Pentru această progresie avem trei relații date prin enunț, plus cele două din cadrul teoriei, deci cinci ecuații cu cinci necunoscute și problema are sens.

Din $a_3 + (a_3 + 4r) = 28$ și $(a_3 + r) + (a_3 + 5r) = 34$ găsim $a_3 = 8$ și $r = 3$. Din $a_3 = a_1 + 2r$, deducem $a_1 = 2$. Din $2S_n = (2a_1 + (n - 1)r)\cdot n$, găsim ecuația pentru n, $3n^2 + nl - 444 = 0$, cu rădăcina naturală $n = 12$. În sfîrșit $a_{12} = 35$.

Deci pentru această progresie avem

$$a_1 = 2,\ r = 3,\ n = 12,\ a_{12} = 35,\ S_{12} = 222.$$

2.11.2. *Progresii armonice (W. Oughtred)*

Definiție. Se numește progresie armonică șirul de numere obținut din răsturnarea termenilor unei progresii aritmetice.

Se notează $\div h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$

Exemplu. $\div 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Proprietăți. Fiecare termen al progresiei, în afară de primul (h_1) și ultimul (h_n), este media armonică a termenilor adiacenți $\left(h_k = \dfrac{2}{\dfrac{1}{h_{k-1}} + \dfrac{1}{h_{k+1}}}\right)$.

Formula termenului general: $h_n = \dfrac{a_1 r}{(n-1)a_1 + r}$, cu a_1 și r primul termen și rația progresiei aritmetice din care provine progresia armonică respectivă.

2.12. Progresii geometrice

Definiție. Se numește progresie geometrică un șir de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ în care fiecare termen, începînd cu a_2, se deduce din cel precedent prin înmulțirea acestuia cu un același număr $q (q \neq 0)$ numit rație.

Se notează $\div\div a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Dacă a_1 este primul termen, a_n cel de al n-lea termen (*termenul general* sau *termenul de rang, n*), q rația, n numărul termenilor și S_n suma celor n termeni, avem:

$a_n = q \cdot a_{n-1}, \ n \geqslant 2$ (prin definiție),

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \ n \geqslant 2$ (a_n în funcție de a_1, q și n)

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

sau $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}$, $q \neq 1$.

Natura progresiei:

$$q > 1 \begin{cases} a_1 > 0, & \text{progresia este crescătoare;} \\ a_1 < 0, & \text{progresia este descrescătoare;} \end{cases}$$

$$0 < q < 1 \begin{cases} a_1 > 0, & \text{progresia este descrescătoare;} \\ a_1 < 0, & \text{progresia este crescătoare;} \end{cases}$$

$q < 0$ progresia este alternată (orice doi termeni consecutivi sînt de semne contrare);

$q = 0$, primul termen este a_1, ceilalți sînt nuli;

$q = 1$, toți termenii progresiei sînt egali cu primul termen a_1.

Termeni echidistanți de extremi. Într-o progresie geometrică, produsul a doi termeni echidistanți de extremi este egal cu produsul termenilor extremi:

$$a_p \cdot a_{n-p+1} = a_1 \cdot a_n.$$

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ($n = 2m + 1$), atunci există un termen la mijloc, a_{m+1}, astfel încît

$$a_{m+1}^2 = a_1 \cdot a_{2m+1}$$

Condiția necesară și suficientă cu trei numere a, b, c, luate în această ordine, să formeze o progresie geometrică este să avem $b^2 = ac$.

Inserarea mediilor geometrice $a'_1, a'_2, \ldots, a'_m$ între doi termeni consecutivi a_j, a_{j+1} ai unei progresii geometrice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de rație q se reduce la calcularea rației q' a progresiei geometrice $a_j, a'_1, \ldots, a'_m, a_{j+1}$ cu $m+2$ termeni.

Această rație este $q' = \sqrt[m+1]{q}$ sau $q' = \sqrt[m+1]{\dfrac{a_{j+1}}{a_j}}$.

Dacă m este par avem o singură soluție reală: $q' = \sqrt[m+1]{\dfrac{a_{j+1}}{a_j}}$.

Dacă m este impar avem:

$$\begin{cases} \text{în cazul } \dfrac{a_{j+1}}{a_j} < 0, \text{ nici o soluție} \\ \text{în cazul } \dfrac{a_{j+1}}{a_j} > 0, \text{ două soluții reale:} \\ q' = \pm \sqrt[m+1]{\dfrac{a_{j+1}}{a_j}}. \end{cases}$$

Exemplu. Să se insereze cinci medii geometrice între $\dfrac{1}{2}$ și 4.

Soluție. Avem 7 termeni, deci $q' = \pm \sqrt[6]{\dfrac{4}{\dfrac{1}{2}}} = \pm \sqrt[6]{2^3} = \pm \sqrt{2}$.

Rezultă două progresii geometrice:

$$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4,$$

respectiv

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4.$$

2.12.1. *Reprezentarea unei progresii geometrice cu n termeni*

Dacă numărul termenilor este impar ($n = 2m+1$) și a este termenul din mijloc, progresia o putem scrie astfel:

$$\frac{a}{q^m}, \ldots, \frac{a}{q}, a, qa, \ldots, q^m a.$$

Dacă numărul termenilor este par ($n = 2m$), putem scrie:

$$\frac{a}{q^{2m-1}}, \ldots, \frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, qa, q^3a, \ldots, q^{2m-1}a$$

(progresie cu rația q^2)

sau

$$(-1)^m \frac{a}{q^{2m-1}}, \ldots, \frac{-a}{q^3}, \quad \frac{a}{q}, \quad -qa, \ q^3a, \ldots, (-1)^m q^{2m-1}a$$

(progresie cu rația $-q^2$).

Limita sumei S_n:

Dacă:

$q > 1$: $q^n \to +\infty$ și $S_n \to +\infty$, dacă $a_1 > 0$; respectiv $S_n \to -\infty$, dacă $a_1 < 0$;

$$0 < q < 1 \Rightarrow q^n \to 0 \text{ și } \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

$q < -1$: q^n nu are limită și $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ nu există.

$$-1 < q < 0: q^n \to 0 \text{ și } \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Caracterizarea și determinarea unei progresii geometrice se face la fel ca la progresiile aritmetice.

2.13. Analiză combinatorie

2.13.1. *Permutări*

Definiție. Se numesc permutări ale unei mulțimi A cu n elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele n elemente ale lui A.

Numărul permutărilor a n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, este:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!; \quad 0! = 1 \text{ (prin definiție).}$$

Exemplu. Numărul permutărilor a trei elemente, a, b și c (*abc, bca, cab, acb, bac, cba*) este $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Numărul permutărilor cu repetiție a n elemente, în care fiecare element se poate repeta pînă la n ori, este $\overline{P}_n = n^n$.

Exemplu. Cu elementele a, b, c putem forma permutările cu repetiție:

aaa, bbb, ccc, aab, aba, baa, aac, aca, caa

abb, bab, bba, cbb, bcb, bbc, cca, cac, acc

ccb, cbc, bcc, abc, acb, bac, bca, cab, cba;

$$n = 3; \ 3^3 = 27 \text{ permutări} = \overline{P}_n.$$

Numărul permutărilor a n elemente, dintre care α_1 sînt egale între ele, α_2 sînt egale între ele, ..., α_r sînt egale între ele, este egal cu

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_r!}, \quad \text{cu } \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = n.$$

Exemplu. Pentru $n = 3$ și $\alpha_1 = 2$ (*aac, aca, caa*) avem

$$\tilde{P} = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

Factoriale (proprietăți):

$$n! = (n-1)!n;\ n! = (n-2)!(n-1)n;\ n! = \frac{(n+1)!}{n+1};$$

$$n! = \frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}.$$

2.13.2. *Aranjamente*

Definiție. Se numesc aranjamente a n elemente luate cîte $m (m \leqslant n)$ ale unei mulțimi A cu n elemente, toate submulțimile ordonate cu cîte m elemente care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A.

Se notează A_n^m.

Numărul aranjamentelor a n elemente luate cîte m este

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},\quad n \geqslant m.$$

Exemplu. Numărul aranjamentelor a trei elemente a, b, c luate cîte două (*ab, ac, bc, ba, ca, cb*) este $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Proprietăți. $A_n^n = P_n$, $A_n^n = \frac{n!}{0!}$ sau $A_n^n = n!$; $A_n^{n-1} = A_n^n$; $A_n^0 = 1$.

Numărul aranjamentelor cu repetiție a n elemente luate cîte m este $\bar{A}_n^m = n^m$.

Exemplu. Pentru trei elemente a, b, c aranjamentele lor cu repetiție, de cîte două elemente, sînt *aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb*; deci $n = 3$ și $m = 2$; obținem $3^2 = 9$ aranjări cu repetiție.

2.13.3. *Combinări*

Definiție. Se numesc combinări a n elemente luate cîte m ($m \leqslant n$) ale unei mulțimi A cu n elemente toate submulțimile cu cîte m elemente, care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A.

Se notează C_n^m sau $\binom{n}{m}$.

Numărul combinărilor a n elemente luate cîte m este

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{sau} \quad C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

Exemplu. Numărul combinărilor a trei elemente luate cîte două (*ab, ac, bc*) este $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$.

Proprietăți.

a) $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1$.

b) $C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

c) Numărul submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este 2^n.

d) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \ldots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$.

e) $$\frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_m!} = C_n^{p_1} \cdot C_{n-p_1}^{p_2} \ldots C_{n-(p_1+\ldots+p_{m-1})}^{p_m}$$

$p_1 + p_2 + \ldots + p_m < n$

Numărul combinărilor cu repetiţie a n elemente luate cîte m este $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Exemplu. Cu trei elemente a, b şi c se pot forma combinările cu repetiţie de cîte două elemente: aa, bb, cc, ab, ac, bc. Deci $n = 3$, $m = 2$ şi $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_4^2 = 6$ combinări cu repetiţie.

2.13.4. *Binomul lui Newton*

$$(x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + C_n^n a^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} \cdot a + C_n^2 x^{n-2} \cdot a^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + (-1)^n a^n$$

Proprietăţi ($0 \leqslant m \leqslant n$):

1. Termenul de rang $k + 1$ este $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k$ sau
$$T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k.$$

2. $C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$; $\quad C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1} \cdot C_n^k$.

3. $T_{k+2} = \dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{a}{x} \cdot T_{k+1}$ sau $T_{k+2} = -\dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{a}{x} \cdot T_{k+1}$.

4. Numărul termenilor dezvoltării $(x \pm a)^n$ este $n + 1$.

5. Coeficienţii termenilor egal depărtaţi de extremi sînt egali.

Relaţii importante.

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n; \quad C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}; \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}.$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$$

Dezvoltări particulare uzuale

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

2) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

4) $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$

5) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Cazul general:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = n! \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m = 0 \\ p_1 + \dots + p_m = n}}^{n} \frac{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \dots a_m^{p_m}}{p_1!\, p_2! \dots p_m!}$$

2.13.5. *Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale*

Dacă $S_p = 1^p + 2^p + \dots + n^p$, $p \in \mathbf{N}$, atunci avem

$S_1 = n(n+1)/2;$ $\qquad S_5 = n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$

$S_2 = n(n+1)(2n+1)/6;$ $\qquad S_6 = n(n+1)(6n^5+15n^4+6n^3-6n^2-n+1)/42$

$S_3 = n^2(n+1)^2/4;$ $\qquad S_7 = n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)/24$

$S_4 = n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)/30 \dots$

O relație care permite calculul lui S_p, cînd se cunosc $S_{p-1}, S_{p-2}, \dots, S_1$ ese

$(n+1)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{p+1}^2 S_{p-1} + \dots + C_{p+1}^p S_1 + n$ (formula lui Pascal).

2.14. Matrice și determinanți

2.14.1. *Matrice*

Definiție. Fie K un corp comutativ. Se numește *matrice* cu m linii și n coloane ($m, n \in \mathbf{N}^*$) orice familie A,

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\}},$$

de elemente a_{ij} aparținînd corpului K.

Elementele matricei A se reprezintă ca un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Primul indice marchează numărul liniei, iar al doilea indice marchează numărul coloanei.

Uneori se notează cu paranteze cu cîrlige [...] sau cu simbolul ||...||.

Pentru $K = \mathbf{R}$ obținem o matrice reală, iar pentru $K = \mathbf{C}$ obținem o matrice complexă.

Mulțimea tuturor matricelor cu elemente din K, avînd m linii și n coloane, numite de tipul (m, n), se notează cu $M_{m,n}(K)$ sau $M_{m,n}$.

In $M_{m,n}$ se definește matricea de efect nul față de adunarea matricelor care are toate elementele egale cu O și care se numește *matrice nulă*:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Matricea opusă matricei A. Fie $A=(a_{ij})\in M_{m,n}$; matricea $-A$,

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix},$$

se numește *opusa matricei A*.

Alte matrice:

a) *matricea linie* $(1, n)$ $(a_{11}\ \ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$;

b) *matricea coloană* $(m, 1)$ $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$;

c) *Matrice pătratică.* Matricea A pentru care $m=n$ se numește *matrice pătratică*. Mulțimea acestor matrice se notează cu $M_n(K)$ sau M_n.

d) *matricea diagonală*: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$;

e) *matricea scalară*: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$;

f) *matricea unitate*, notată cu E: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Egalitatea a două matrice. Două matrice $A=(a_{ij})$ și $B=(b_{ij})$ din $M_{m,n}(K)$ sînt egale dacă și numai dacă $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall (i,j)\in\{1,2,\dots,m\}\times\{1, 2,\dots,n\}=I\times J$.

Adunarea matricelor. Fie $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in M_{m,n}$; matricea $C=(c_{ij})\in M_{m,n}$ se numește *suma matricelor A* și *B* și se scrie $C=A+B$, dacă $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $\forall(i,j)\in I\times J$.

Exemplu. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+(-1) & -1+2 \\ 1+2 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Proprietățile adunării matricelor

$\forall A, B, C \in M_{m,n}$ avem 1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) $A + O = O + A = A$

4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Deci $(M_{m,n}, +)$ este un grup comutativ (abelian).

Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$, matricea $D = (d_{ij}) \in M_{m,n}$ se numește *diferența matricelor* A și B și se scrie $D = A + (-B) = A - B$, dacă $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $\forall (i, j) \in I \times J$.

Înmulțirea matricelor cu un scalar. Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ și $\lambda \in K$; matricea $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$ se numește *produsul matricei*[1] A *cu* λ, $B = \lambda A$, dacă $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall (i, j) \in I \times J$.

Exemplu. $3 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari:

$\forall A, B \in M_{m,n}$ și $\lambda, \mu \in K$, avem

1) $1 \cdot A = A$ 3) $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

2) $\lambda A = A \lambda$ 4) $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$.

5) $\lambda (\mu A) = \mu (\lambda A) = (\lambda \mu) A$

Înmulțirea matricelor. Fie $A = (a_{ik}) \in M_{m,n}$ și $B = (b_{kj}) \in M_{n,p}$; matricea $C = (c_{ij}) \in M_{m,p}$ se numește *produsul matricelor* A și B, $C = AB$, dacă

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall (i, j) \in I \times J.$$

Exemplu. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (2) & 2 \cdot (2) + (-1) \cdot (1) \\ 1 \cdot (-1) + (0) \cdot (2) & 1 \cdot (2) + (0) \cdot (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proprietățile înmulțirii matricelor.

1) $AE = EA = A$. 4) $\lambda (AB) = (\lambda A) B = A (\lambda B)$.

2) $AO = OA = O$. 5) $(A + B) C = AC + BC$.

3) $(AB)C = A(BC)$. 6) $C(A + B) = CA + CB$.

---

[1] Dacă numărul coloanelor matricei A nu este egal cu numărul liniilor matricei B, atunci înmulțirea celor două matrice nu este posibilă.

Matricea transpusă a unei matrice:

Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$. Matricea ${}^tA$ se numește transpusa matricei A, dacă ${}^tA = (a_{ji})$, $\forall (i, j) \in I \times J$ sau

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

Transpusa matricei A este matricea obținută din A prin schimbarea liniilor în coloane și a coloanelor în linii.

Proprietăți.

1) ${}^t({}^tA) = A$.

2) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

3) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.

4) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Exemplu.

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ atunci ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Matricea adjunctă a unei matrice

Se numește *adjuncta matricei* $A = (a_{ij}) \in M_n$ și se notează cu A^* matricea

$$
A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},
$$

unde A_{ij} este complementul algebric al lui a_{ji}.

Clase speciale de matrice pătratice:

1) O matrice $A = (a_{ij})$ se numește *simetrică*, dacă și numai dacă $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall (i, j) \in I \times J$, adică $A = {}^tA$.

2) O matrice $A = (a_{ij})$ se numește *antisimetrică*, dacă și numai dacă $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall (i, j) \in I \times J$, adică $A = -{}^tA$.

3) O matrice A se numește *ortogonală* dacă și numai dacă $A{}^tA = E$, adică $A^{-1} = {}^tA$.

4) O matrice A se numește *nedegenerată*, dacă $\det A \neq 0$.

5) O matrice A se numește *degenerată*, dacă $\det A = 0$.

Matrice inversabile. Fie $A \in M_n$; A este ***inversabilă*** dacă există o matrice $B \in M_n$ astfel încît $AB = BA = E$; B se notează cu A^{-1} și se numește ***inversa*** *matricei* A.

Teoremă. Matricea $A \in M_n$ admite o inversă $A^{-1} \in M_n$ dacă și numai dacă $\det A \neq 0$; în plus $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$.

Exemplu. Inversa matricii $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ este

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \quad \text{cu } a^2 + b^2 \neq 0.$$

Proprietăți. 1) $(A^{-1})^{-1} = A$; 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Rangul unei matrice

Fie matricea $A \in M_{m,n}$.

Minorul unei matrice. Minorul unei matrice de ordinul k se numește determinantul format din k^2 elemente (k linii și tot atîtea coloane) ale matricei date (păstrînd ordinea elementelor). Matricea A are *rangul r*, dacă A are un minor nenul de ordinul r, iar toți minorii lui A de ordin mai mare ca r, dacă există astfel de minori, sînt nuli. Se scrie rang $A = r$.

Forma matriceală a sistemelor afine: $AX = B$, A, B matrice cunoscute, iar X matrice necunoscută.

Exemplu. Să se afle matricea X din ecuația $XA + B = C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Avem $\det A = -2$; $A_{11} = 4$, $A_{12} = 2$; $A_{21} = 3$; $A_{22} = 1$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad X = (C - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.15. Determinanți

Permutare. O funcție bijectivă f definită pe $\{1, 2, ..., n\}$ cu valori în $\{1, 2, ..., n\}$ se numește *permutare* sau *substituție*. Se notează

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_i & \dots & k_j & \dots & k_n \end{pmatrix} \quad \text{sau } (k_1, k_2, ..., k_n).$$

Inversiune. O pereche ordonată (i, j), $i < j$, cu proprietatea $f(i) > f(j)$ sau $k_i > k_j$ se numește *inversiune* pentru permutarea f. Numărul tuturor inversiunilor pe care le prezintă f se notează cu $I(k_1, k_2, ..., k_n)$.

Semnul unei permutări. Numărul $(-1)^{I(k_1, ..., k_n)}$ se numește *semnul* permutării $(k_1, k_2, ..., k_n)$. Permutarea f se numește pară dacă $(-1)^{I(k_1, ..., k_n)} = 1$ și impară dacă $(-1)^{I(k_1, ..., k_n)} = -1$.

Definiția determinantului de ordinul al doilea. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Numărul obținut prin adunarea următoarelor două numere $(-1)^{I(1,2)}a_{11}a_{22} + (-1)^{I(2,1)}a_{12}a_{21} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numește *determinantul matricei A* sau *determinant de ordinul al 2-lea* și se notează

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Definiția determinantului de ordinul al treilea. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Numărul obținut prin adunarea următoarelor 3! numere

$$(-1)^{I(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{I(2,3,1)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{I(3,1,2)}a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$+ (-1)^{I(3,2,1)}a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{I(2,1,3)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{I(1,3,2)}a_{11}a_{23}a_{32} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

se numește *determinantul matricei A* sau *determinant de ordinul al III-lea*. Se notează

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

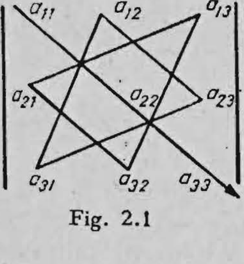


Fig. 2.1

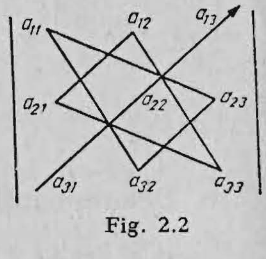


Fig. 2.2

Regula lui Sarrus. Pentru calculul determinantului de ordinul al III-lea există următoarea regulă simplă. numită *regula lui Sarrus* sau *regula triunghiurilor.*

Termenii cu semnul + în dezvoltarea determinantului se obțin înmulțind numerele de pe diagonala principală ($a_{11}a_{22}a_{33}$) și cele din vîrfurile „triunghiurilor", care au bazele paralele cu această diagonală principală ($a_{12}a_{23}a_{31}$ și $a_{13}a_{21}a_{32}$) (fig. 2.1).

Termenii cu semnul minus în dezvoltarea determinantului se obțin înmulțind numerele de pe diagonala secundară ($-a_{13}a_{22}a_{31}$) și cele din vîrfurile „triunghiurilor" care au bazele paralele cu această diagonală secundară ($-a_{12}a_{21}a_{33}$ și $-a_{11}a_{23}a_{32}$) (fig. 2.2).

Exemple. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - 4\cdot 6 = -22$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= (-1)\cdot 3\cdot(-1) + 4\cdot 1\cdot(-2) + 1\cdot 0\cdot 2 - (-2)\cdot 3\cdot 1 - 0\cdot 4\cdot(-1) - $$
$$- (-1)\cdot 1\cdot 2 = 3.$$

Determinantul de ordinul al n-lea. Fie matricea $A = (a_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$. Numărul

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)} (-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

unde suma este extinsă asupra celor $n!$ permutări $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ale numerelor $1, 2, \dots, n$ se numește *determinantul matricei A* sau *determinant de ordinul al n-lea* și se notează

$$\det(a_{ij}) = \det A = |a_{ij}|.$$

Minori ai unui determinant. Se numește *minor al elementului* a_{ij} din determinantul matricei A, determinantul de ordinul $n-1$ ce se obține din A prin eliminarea liniei i și a coloanei j și se notează M_{ij}.

Complement algebric. Se numește *complement algebric* sau *cofactor* al elementului a_{ij} din determinantul matricei A numărul

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Semnele cu care se prevăd minorii M_{ij} pentru a deveni complemenți algebrici sînt date în tabloul următor:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Dezvoltarea determinantului det A după elementele liniei i:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \tag{1}$$

Pentru $h \neq i$ avem

$$0 = a_{i1}A_{h1} + a_{i2}A_{h2} + \dots + a_{in}A_{hn} \tag{1'}$$

Dezvoltarea determinantului det A după elementele coloanei j:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \tag{2}$$

Pentru $k \neq j$, avem

$$0 = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{nk} \tag{2'}$$

Exemplu. Fie $n = 4$. Dezvoltarea lui det A după elementele primei coloane este

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Determinantul produsului a două matrice

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Proprietăţi ale determinanţilor

1) Dacă toate elementele unei coloane sau ale unei linii dintr-o matrice[1] sînt egale cu zero, atunci determinantul acestei matrice este egal cu zero.

2) Dacă elementele a două linii sau a două coloane dintr-o matrice sînt egale sau proporţionale, atunci determinantul acestei matrice este egal cu zero.

3) Dacă schimbăm două linii sau două coloane între ele într-o matrice A, obţinînd o nouă matrice A', atunci $\det A' = -\det A$.

4) Dacă într-o matrice A înmulţim o linie sau o coloană cu un număr a, obţinînd o nouă matrice A', atunci $\det A' = a \det A$.

5) Orice matrice A şi transpusa ei ${}^tA$ au acelaşi determinant, $\det {}^tA = \det A$.

6) Dacă într-o matrice A o coloană sau o linie este o combinaţie liniară a celorlalte coloane sau linii, atunci $\det A = 0$.

7) Dacă într-o matrice A toate elementele unei linii sau ale unei coloane sînt sume de cîte doi termeni atunci $\det A$ se poate scrie ca suma a doi determinanţi.

8) Orice matrice pătrată de ordin impar antisimetrică (strîmb-simetrică) are determinantul său egal cu zero.

9) Dacă $A = (a_{ij})$ şi $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ sînt complemenţii algebrici ai elementelor a_{ij}, atunci $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$.

10) Determinantul unei matrice antisimetrice de ordin par este pătratul unui polinom format cu elementele matricei.

Determinanţi importanţi. Determinanţi celebri.

1) *Determinant adjunct.* Determinantul matricei adjuncte A^* a unei matrice A se numeşte *determinant adjunct* şi el este egal cu

$$d_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots A_{pn} \end{vmatrix} = D^{n-1},$$

dacă $D = \det A$.

[1] Aici şi mai departe prin matrice înţelegem o matrice pătrată.

2) *Determinant reciproc.* Dacă o matrice A este inversabilă, determinantul δ al matricei inverse (reciproce) A^{-1} se numeşte *determinant reciproc* şi este egal cu

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det A}.$$

3) *Determinant principal.* Fie $A \in M_{m,n}$ o matrice. Se numeşte *determinant principal* corespunzător matricei A un determinant de ordinul maxim, format cu elementele matricei A, care este nenul.

4) *Determinantul Vandermonde.* Se numeşte *determinant Vandermonde* determinantul de forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

5) *Determinantul lui Wronski.* Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n funcţii de clasă C^{n-1}. Se numeşte *determinant al lui Wronski* corespunzător acestor funcţii sau *wronskian* determinantul

$$W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

6) *Inegalitatea lui J. Hadamard.* Fie D determinantul corespunzător matricei $A \in M_n$. Atunci avem

$$D^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}^2\right).$$

7) *Determinantul continuant*

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

8) *Determinantul dublu simetric de ordinul 6:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & a_5 \\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2 & b_3 & a_4 \\ a_4 & b_2 & c_2 & c_1 & b_2 & a_3 \\ a_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & a_2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

9) *Determinantul circulant:*

$$Z_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 \ldots a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 \ldots a_1 & a_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_n & a_1 \quad a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

10) *Ecuația seculară* $(a_{ik} \in \mathbf{R},\ a_{ij} = a_{ji})$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2.16. Sisteme de ecuații afine[1] (liniare și neomogene)

α) *Sisteme de n ecuații afine cu n necunoscute* $(n \in \mathbf{N}^*)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad D = |a_{ik}| \neq 0, \quad a_{ik}, b_i \in \mathbf{R}^{2)}. \tag{1}$$

Soluția unică este dată de *regula lui Cramer* sub forma unui vector cu n componente $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, unde

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{2}$$

determinantul D_i obținându-se din D prin înlocuirea elementelor din coloana i cu termenii liberi, anume cu $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

[1] În scriere matricială sistemul afin (1) are forma $AX = B$ și soluția $X = A^{-1}B$, $\det A \neq 0$.
[2] În locul corpului **R** putem avea corpul **C** sau Z_p, cu p prim etc.

Exemplu. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2; \\ -x + y + z = 3 \end{cases} \quad \text{aici } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Sistemul admite soluția unică

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}; \quad x = \frac{3}{2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-4}; \quad y = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-4}; \quad z = \frac{5}{2}.$$

β) *Sisteme de m ecuații afine cu n necunoscute* (n, $m \in \mathbb{N}^*$)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{3}$$

Teorema lui Rouché-Fontené: O condiție necesară și suficientă ca sistemul (3) să aibă soluții este ca toți determinanții lui caracteristici să fie nuli.

Din matricea $A = \| a_{ik} \|$ a coeficienților necunoscutelor se extrage un determinant nenul de ordin maxim p, notat D_p, și numit *determinant principal* și se construiesc *determinanții caracteristici*, D_c, $c = p + 1, p + 2, ..., m$ prin bordarea determinantului principal „orizontal", jos, cu coeficienții *necunoscutelor principale* din ecuațiile rămase, care nu au intrat în formarea determinantului principal, și „vertical", în dreapta, cu termeni liberi corespunzători.

1) *Cazul* $m = n$.

i) Dacă $D \neq 0$, atunci sistemul este cramerian și are soluția unică dată de (2).

ii) Dacă $D = 0$ și cel puțin un determinant caracteristic este diferit de de zero, atunci sistemul nu are soluții.

iii) Dacă $D = 0$ și toți determinanții caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil, dar nedeterminat. Se rezolvă cele p, ecuații principale și se obțin necunoscutele principale $x_1, x_2, ..., x_p$ în funcție de $x_{p+1}, ..., x_n$. Sistemul are o „nedeterminare" de ordinul $n - p$, în sensul că necunoscutele secundare $x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n$ rămîn arbitrare.

Exemplu. Să se rezolve şi să se discute sistemul

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbf{R}. \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$$

Determinantul sistemului este $D = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$.

i) Dacă $D \neq 0$, sistemul are soluţia unică $x = -\dfrac{\lambda + 1}{(\lambda + 2)}$,

$$y = \frac{1}{\lambda + 2}, \qquad z = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}.$$

ii) Dacă $D = 0$ avem situaţiile următoare:

Dacă $\lambda = 1$ toate cele 3 ecuaţii se reduc la una singură ($m = 1$, $n = 3$, $p = 1$) şi sistemul admite o mulţime de soluţii cu a şi b arbitrari în $\mathbf{R}$:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = 1 - a - b, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Dacă $\lambda = -2 (m = 3,\ n = 3)$ luăm drept determinant principal

$$D_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \quad \text{deci} \quad p = 2.$$

Acestuia îi corespunde un singur determinant caracteristic

$$D_c = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9.$$

Cum $D_c \neq 0$, rezultă că în acest caz sistemul este incompatibil.

2) *Cazul* $m < n$.

Sistemul nu are soluţie unică ($p \leqslant m < n$).

i) Dacă cel puţin un determinant caracteristic este nenul, atunci sistemul nu are soluţii, este incompatibil.

ii) Dacă toţi determinanţii caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil, dar nedeterminat. Sistemul are o „nedeterminare" de ordinul $n - p$.

Exemplu. Să se rezolve în mulţimea claselor de resturi modul 7 sistemul

$$\begin{cases} 3x + \ \ y + 2z = 6 \\ x + 4y + 2z = 3 \\ 5x + 2y + 6z = 5 \end{cases}$$

Rezolvare. Întrucît $(Z_7, +, \cdot)$ este corp, calculele se fac exact ca în $\mathbf{R}$. Avem

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 (3 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1) =$$

$$= 2 (1 + 5 + 2 + 1 + 1 + 4) = 0.$$

Luăm $D_p = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 = 5 - 1 = 4 \neq 0.$

Calculăm $D_c = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; găsim $D_c = 0$.

Sîntem în cazul *teoremei Rouché-Fontené* și soluția se află rezolvînd sistemul

$$3x + y = 6 - 2z,$$
$$x + 4y = 3 - 2z.$$

Se găsește $x = 2\alpha$, $y = 6 + 6\alpha$, $z = \alpha$, α oarecare în $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3) *Cazul* $m > n$ $(p \leqslant n)$.

i) Dacă cel puțin un determinant caracteristic este diferit de zero, atunci sistemul este incompatibil.

ii) Dacă toți determinanții caracteristici sînt zero, atunci sistemul este compatibil, dar nedeterminat. Sistemul are o „nedeterminare" de ordinul $n - p$.

Exemplu. Să se rezolve *sistemul lui Rolle*:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + y + 2z = 13; \end{cases}$$

aici $m = 5$ și $n = 3$. Din matricea coeficienților găsim determinantul principal:

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ deci } p = 3.$$

Acestuia îi corespund determinanții caracteristici

$$D_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{vmatrix} \text{ și } D_c' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 13 \end{vmatrix}.$$

Cum aceștia sînt nuli, rezultă că sistemul este compatibil și are soluția: $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

Un caz particular important: $n + 1$ ecuații afine cu n necunoscute. *O condiție necesară și suficientă ca acest sistem să fie compatibil este ca determinantul matricei extinse a sistemului să fie nul.*

Exemplu. Să se afle valoarea parametrului $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 2\alpha y = 4 \\ \alpha x - \quad y = 3 \end{cases}$$

este compatibil.

Aici matricea extinsă este $A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2\alpha & 4 \\ \alpha & -1 & 3 \end{pmatrix}$ Apoi

$\det A' = 14(1 - \alpha^2)$ și $\det A' = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1$ sau $\alpha^2 = 1$. Pentru $\alpha = -1$, rezultă soluția unică $x = -\frac{2}{5}$, $y = -\frac{13}{5}$, iar pentru $\alpha = 1$ găsim soluția $x = 2$, $y = -1$. Pentru $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ sistemul nu are soluții.

γ) *Sisteme de m ecuații liniare cu n necunoscute* ($m, n \in \mathbf{N}^*$)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{sau} \quad AX = 0.$$

1) *Cazul* $m = n$

i) Dacă $D \neq 0$, atunci sistemul este cramerian și are soluția unică nulă $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

ii) Dacă $D = 0$, sistemul admite soluții diferite de soluția nulă (sintem în cazul $\beta 2$).

2) *Cazul* $m < n$

Dacă p ($\leqslant m$) este ordinul determinantului principal, cum $D_c = 0$, rezultă că sistemul are o „nedeterminare" de ordinul $n - p$.

3) *Cazul* $m > n$

i) Dacă $p = n$, atunci sistemul admite numai soluția nulă.

ii) Dacă $p < n$, atunci sistemul are o „nedeterminare" de ordinul $n - p$.

Exemplu. Să se rezolve sistemul liniar

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x - 5y + 4z = 0, \\ x + 17y + 4z = 0. \end{cases}$$

Din matricea sistemului ($m = 4$, $n = 3$) deducem 4 determinanți de ordinul 3, toți nuli. Rezultă $D_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 (p = 2)$; necunoscutele principale sînt x şi y. Lui D_p îi corespund doi determinanţi caracteristici nuli. Sistemul admite soluţii nenule şi acestea se obţin rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} x + 3y = -2z, \\ 2x - y = -3z. \end{cases}$$

Găsim astfel că sistemul admite o mulţime de soluţii, cu a arbitrar,

$$x = -\frac{11}{7}a, \quad y = -\frac{1}{7}a, \quad z = a, \quad a \in \mathbf{R}.$$

4) *Caz particular important* ($n - 1$ ecuaţii cu n necunoscute) $m = n - 1$ $p = n - 1$. În această situaţie sistemul admite o mulţime de soluţii, el avînd o „nedeterminare" de ordinul 1. Dacă admitem că

$$D_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad \text{atunci}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D_p}x_n, \quad x_2 = \frac{D_2}{D_p}x_n, \dots, x_{n-1} = \frac{D_{n-1}}{D_p}x_n,$$

cu x_n arbitrar în $\mathbf{R}$, iar D_j obţinîndu-se din D_p prin înlocuirea coloanei j cu vectorul-coloană

$$\begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ -a_{2,n} \\ \vdots \\ -a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

2.17. Polinoame

2.17.1. *Polinoame cu coeficienţi complecşi*

Forma algebrică a unui polinom $f \in \mathbf{C}[X]$*) este $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$ sau

$$f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \dots + a_n$$

unde numerele complexe $a_0, \dots, a_n$ sînt *coeficienţii* polinomului, $X = (0, 1, 0, \dots)$ este *nedeterminata* (un polinom particular), n este *gradul polinomului*, a_n *termenul liber*, iar a_0 *coeficientul dominant*.

Funcţia polinominală asociată polinomului $f \in \mathbf{C}[X]$ este o funcţie $\tilde{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ cu proprietatea $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbf{C}$, $f(\alpha)$ fiind valoarea polinomului f în α.

*) În general se poate considera inelul polinoamelor $K[X]$, unde K este un corp comutativ oarecare, de pildă Z_p cu p prim.

Dacă $f = g$, atunci $\tilde{f} = \tilde{g}$.
Există însă și polinoame diferite, ale căror funcții polinomiale coincid.

Exemplu. $f(x) = X$ și $g(X) = X^3$, $f \neq g$, $f, g \in Z_3[X]$;

$$\begin{array}{c|ccc} x & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline f(x) & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline g(x) & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \end{array} \Rightarrow \tilde{f} = \tilde{g}.$$

Teorema împărțirii cu rest a două polinoame.

Oricare ar fi $f, g \in \mathbf{C}[X]$, $g \neq 0$, există polinoamele unice $q, r \in \mathbf{C}[X]$, astfel încît $f = gq + r$, grad $r <$ grad g.
Polinomul f se numește *deîmpărțit*, g *împărțitor*, q *cît* și r *rest*.

Împărțirea unui polinom cu $X - a$: Dacă $f \in \mathbf{C}[X]$ și $a \in \mathbf{C}$, atunci există $q \in \mathbf{C}[X]$ unic, astfel încît $f = (X - a)\, q + f(a)$.
Restul împărțirii polinomului $f \in \mathbf{C}[X]$, $f \neq 0$, cu $X - a$ este $f(a)$. Rezultă că acesta se poate afla fără a efectua împărțirea.

Schema lui Horner ne ajută să aflăm cîtul $q = b_0X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ al împărțirii polinomului $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ la polinomul $g = X - a$ precum și restul acestei împărțiri, $r = f(a) = ab_{n-1} + a_n$.

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	...	$b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$	$r = f(a) = ab_{n-1} + a_n$

Exemplu. Pentru $f = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X + 4$ și $q = X + 1$ avem

	1	2	5	4	4
-1	1	1	4	0	4

respectiv $q = X^3 + X^2 + 4X$ și $r = 4$.

2.17.1.1. Divizibilitatea polinoamelor

Definiție. Fie $f, g \in \mathbf{C}[X]$ două polinoame. Spunem că polinomul g divide pe f și scriem $g \mid f$ dacă există $q \in \mathbf{C}[X]$, astfel încît $f = qg$.

Se mai spune că f este *divizibil* prin g, f este un *multiplu* al lui g sau că g este un *divizor* al lui f.

Proprietăți. 1) Polinoamele de grad zero (adică constantele nenule) divid orice polinom.

2) Polinomul g divide pe $f \neq 0$, dacă și numai dacă restul împărțirii lui f la g este nul.

În particular $X - a$ divide pe $f \neq 0$, dacă și numai dacă $f(a) = 0$.

3) Dacă g divide pe f și $f \neq 0$, atunci grad $f \geqslant$ grad g.

4) Dacă $a \in C^*$, atunci $af \mid f$.

5) Divizibilitatea polinoamelor este *reflexivă* ($f \mid f$) și *tranzitivă* ($f \mid g$ și $g \mid h \Rightarrow f \mid h$).

6) Dacă $f \mid g$ și $g \mid f$, atunci f și g se numesc *asociate* în divizibilitate, adică $\exists a \in C^*$, astfel încît $f = ag$.

2.17.1.2. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al polinoamelor

Definiție. Un polinom d se numește c.m.m.d.c. *al polinoamelor f* și *g*

1) *Dacă $d \mid f$ și $d \mid g$.*

2) *Dacă $d' \mid f$ și $d' \mid g$, atunci $d' \mid d$.*

Notăm $d = (f, g)$.

Teoremă. Orice două polinoame f și g admit un c.m.m.d.c. El se determină cu algoritmul lui Euclid și este egal cu ultimul rest nenul.

Exemplu. Polinoamele $f = X^2 - 1$ și $g = (X + 1)^3$ au $d = X + 1$.

Teoremă. Dacă d este c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g, atunci există polinoamele u și v astfel încît

$$uf + vg = d.$$

Definiție. Două polinoame f și g pentru care $d = 1$ se numesc prime între ele.

Exemplu. $f = X^2 - X + 1$ și $g = X^2 + X + 1$ sînt polinoame prime între ele.

Exemplu. Fie polinoamele $f = X^3$ și $g = (1 - X)^4$ prime între ele. Să se afle polinoamele u și v astfel ca să avem $uf + vg = 1$.

Rezolvare. Incercăm u de gradul patru și v de gradul trei. Nu reușim. Micșorăm gradele lui u și v cu cîte o unitate. Fie $u = b_0X^3 + b_1X^2 + b_2X + b_3$ și $v = a_0X^2 + a_1X + a_2$.

Scriem relația noastră astfel

$$X^3(b_0X^3 + b_1X^2 + b_2X + b_3) + (1 - X)^4 (a_0X^2 + a_1x + a_2) = 1.$$

Inlocuim pe X cu 0 și găsim $a_2 = 1$.

Impărțim cu $(1 - X)^4 \neq 0$, derivăm odată

$$\frac{3X^2u}{(1 - X)^4} + \frac{X^3u'}{(1 - X)^4} + \frac{4X^3u}{(1 - x)^5} + 2a_0X + a_1 = \frac{4}{(1 - X)^5}$$

și înlocuim pe X cu zero. Găsim $a_1 = 4$.

Repetînd această operație, găsim $a_0 = 10$.

Deci $v = 10X^2 + 4X + 1$.

Dezvoltăm pe u după puterile lui $X - 1$, sub forma $u = C_0(X - 1)^3 + C_1(X - 1)^2 + C_2(X - 1) + C_3$, înlocuim apoi pe $X = 1$ și găsim $C_3 = 1$.

Ulterior împărțim cu X^3, derivăm succesiv de 3 ori și înlocuim pe X cu 1.

Găsim $C_2 = -3$, $C_1 = 6$ şi $C_0 = -10$.
Acum $u = -10(X-1)^3 + 6(X-1)^2 - 3(X-1) + 1$ sau

$$u = -10X^3 + 36X^2 - 45X + 20.$$

2.17.1.3. Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al polinoamelor

Definiţie. Un polinom m se numeşte c.m.m.m.c. *al polinoamelor f* şi *g dacă:*

1) $f \mid m$ *şi* $g \mid m$.

2) *Dacă* $f \mid m'$ *şi* $g \mid m'$, *atunci* $m \mid m'$.

Exemplu. Pentru polinoamele $f = X^2 - 1$ şi $g = (X+1)^3$, avem $m = (X-1)(X+1)^3$.

Teoremă. Dacă d este c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g, atunci $m = \frac{fg}{d}$.

2.17.1.4. Rădăcinile polinoamelor

Definiţie. Numărul $\alpha \in C$ *se numeşte rădăcină a polinomului f, dacă şi numai dacă* $\tilde{f}(\alpha) = 0$.

Teorema lui Bézout. Numărul $\alpha \in C$ este rădăcină a polinomului $f \neq 0$ dacă şi numai dacă $(X - \alpha) \mid f$.

Definiţie. Numărul α se numeşte rădăcină multiplă de ordinul p a polinomului $f \neq 0$, dacă şi numai dacă $(X-\alpha)^p$ divide pe f, iar $(X-\alpha)^{p+1}$ nu-l divide pe f.

Pentru $p = 1$, rădăcină se *numeşte simplă,* iar pentru $p = 2$ ea se numeşte *rădăcină dublă.*

Teoremă. Numărul $\alpha \in C$ este rădăcină multiplă de ordinul p al polinomului f, dacă şi numai dacă

$$\tilde{f}(\alpha) = 0;\ \tilde{f}'(\alpha) = 0;\ \dots \tilde{f}^{(p-1)}(\alpha) = 0;\ \tilde{f}^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Teoremă. Dacă două polinoame $f, g \in C[X]$ au proprietatea că $f(z) = g(z)$ oricare ar fi $z \in C$, atunci $f = g$.

Teoremă. Dacă $f \in C[X]$ este un polinom de grad n şi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt rădăcinile lui cu ordinile de multiplicitate $m_1, m_2, \dots, m_n$ atunci

$$f = a_0(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2} \dots (X - x_n)^{m_n}$$

unde a_0 este coeficientul dominant al lui f, iar

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = \text{grad } f.$$

2.17.1.5. Rădăcini comune la două polinoame. Rezultant

Definiție. Se numește rezultant a două polinoame

$$f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \text{ și } g = b_0X^m + b_1X^{m-1} + \dots + b_m,$$

determinantul

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \dots & & & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & & b_m & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ linii} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ linii} \end{matrix}$$

Teoremă. Polinoamele f și g au cel puțin o rădăcină comună, dacă și numai dacă $R(f, g) = 0$.

Exemplu. Să se afle valorile lui $m \in \mathbf{R}$, pentru care ecuațiile $x^2 + mx + 1=0$ și $x^2 + x + m = 0$ au o rădăcină comună.

Rezultantul celor două polinoame $f = x^2 + mx + 1$ și $g = x^2 + x + m$ este

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2.$$

Din $R(f, g) = 0$ rezultă $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = -2$.

Pentru $m_1 = m_2 = 1$ ecuațiile coincid și au două rădăcini comune, iar pentru $m_3 = -2$ ecuațiile au o singură rădăcină comună $\alpha = 1$.

2.17.1.6. Polinoame ireductibile

Definiție. Un polinom f se numește ireductibil peste corpul comutativ în care coeficienții lui iau valori dacă nu există g și h, polinoame cu coeficienți în același corp, astfel încît să avem

$$f = gh, \text{ grad } g, \text{ grad } h < \text{grad } f.$$

Polinomul f se numește *reductibil* peste corpul respectiv în caz contrar.

Exemple. $f = X^2 + 3$ este ireductibil peste $\mathbf{R}$; $f = X^2 - 4$ este reductibil peste $\mathbf{R}$, fiindcă $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$; $f = X^2 + 1$ este ireductibil peste $\mathbf{R}$, dar reductibil peste $\mathbf{C}$.

Teoremă. Un polinom cu coeficienți într-un corp comutativ, de grad $n > 1$, este ireductibil peste acel corp dacă și numai dacă polinomul nu are rădăcini, în corpul respectiv.

Teoremă. Un polinom $f \in \mathbf{C}[X]$ este ireductibil (adică nu poate fi factorizat) dacă și numai dacă este de forma $f = aX + b$.

Teoremă. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$ un polinom ireductibil.

Dacă f divide produsul de polinoame $f_1 f_2 \dots f_n$, atunci f divide cel puțin unul din factorii produsului.

2.17.1.7. Ecuații algebrice

Definiție. O ecuație de forma $f(x) = 0$, unde $f \neq 0$ este un polinom, se numește ecuație algebrică cu o singură necunoscută.

Teorema lui Abel-Ruffini. Ecuațiile algebrice de grad mai mare decît patru nu se pot rezolva prin radicali.

Teorema lui D'Alembert-Gauss. Orice ecuație algebrică

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

de grad mai mare decît unu sau egal cu unu, are cel puțin o rădăcină (complexă).

Teoremă. Dacă un polinom f de gradul n se anulează pentru $n+1$ numere distincte, atunci $f = 0$.

Formulele lui Viète. Dacă numerele complexe $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots a_n$, $a_0 \neq 0$, atunci

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1 x_2 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}.$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

. . . .

$$x_1 x_2 \dots x_k + x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} + \dots + x_{m-k+1} x_{m-k+2} \dots x_m = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

. . . .

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

2.17.1.8. Formula lui Taylor și formula lui Mac-Laurin pentru polinoame:

$$f(X + h) = f(X) + \frac{h}{1!} f'(X) + \frac{h^2}{2!} f''(X) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(X).$$

$$f(X) = f(0) + \frac{X}{1!} f'(0) + \frac{X^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{X^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

2.17.2. *Polinoame cu coeficienţi reali. Ecuaţii algebrice*

Teoremă. Orice polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ de grad impar are cel puţin o rădăcină reală.

Teoremă. Dacă un polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ admite pe $\alpha = a + ib$, $b \neq 0$, drept rădăcină, atunci el admite ca rădăcină şi pe $\overline{\alpha} = a - ib$, adică $f(a + ib) = 0 \Rightarrow f(a - ib) = 0$. Rădăcinile α şi $\overline{\alpha}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Teoremă. Orice polinom $f \in \mathbf{R}[X]$, grad $f \geqslant 2$, are un număr par de rădăcini complexe.

Teoremă. Dacă f este un polinom cu coeficienţii reali şi pentru a, $b \in \mathbf{R}$ avem $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci f are cel puţin o rădăcină reală între a şi b.

Teoremă. Intre două rădăcini reale consecutive ale lui $f \in \mathbf{R}[X]$ există cel puţin o rădăcină a lui f'.

Teoremă. Intre două rădăcini reale consecutive ale derivatei lui $f \in \mathbf{R}[X]$ există cel mult o rădăcină a lui f.

Teoremă. Un polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ este ireductibil dacă şi numai dacă este de forma $f = aX + b$, cu $a \neq 0$ sau $f = aX^2 + bX + c$, cu $a \neq 0$ şi $b^2 - 4ac < 0$.

Teorema factorizării. Orice polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ de grad mai mare decît 1 sau egal cu 1 poate fi factorizat (descompus în factori ireductibili) astfel

$$f = a_0 (X - x_1)^{p_1} \ldots (X - x_k)^{p_k} (X^2 + b_1 X + c_1)^{r_1} \ldots (X^2 + b_s X + c_s)^{r_s},$$

unde $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{R}$, iar $b_1^2 - 4c_1 < 0, \ldots, b_s^2 - 4c_s < 0$.

Şirul lui Rolle. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ un polinom şi $c_1, c_2, \ldots, c_m$ rădăcinile reale ale derivatei f'. Fie $|c_j| < M$, $j = \overline{1, m}$. Atunci şirul

$$f(-M),\ f(c_1),\ f(c_2), \ldots, f(c_m),\ f(M).$$

se numeşte *şirul lui Rolle* asociat polinomului f.

Teoremă. Numărul rădăcinilor reale simple ale unui polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ este egal cu numărul de variaţii de semn ale şirului lui Rolle al lui f.

Exemplu. Pentru $f = 3X^4 - 4X^3 - 12X^3 - 12$ avem

$f' = 12X(X^2 - X - 2)$. Deci $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ şi $c_3 = 2$.

Construim *şirul lui Rolle*

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Rezultă că polinomul f are două rădăcini reale simple $x_1 \in (-\infty, -1)$ şi $x_2 \in (2, +\infty)$.

2.17.3. *Polinoame cu coeficienţi raţionali. Ecuaţii algebrice*

Teoremă. Dacă un polinom $f \in \mathbf{Q}[X]$ admite pe $\alpha = a + b\sqrt{d}$ (a, $b \in \mathbf{Q}$, $b \neq 0$, $d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$) drept rădăcină, atunci el admite şi pe $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{d}$ ca rădăcină, adică $f(a + b\sqrt{d}) = 0 \Rightarrow f(a - b\sqrt{d}) = 0$; $a + b\sqrt{d}$ şi $a - b\sqrt{d}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

2.17.4. Polinoame cu coeficienţi întregi

Teoremă. Dacă un polinom $f \in \mathbf{Z}[X]$, grad $f \geqslant 1$, admite o rădăcină raţională $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, atunci p divide termenul liber a_n (adică $p \mid a_n$), iar q divide coeficientul dominant a_0 (adică $q \mid a_0$).

In particular dacă $f \in \mathbf{Z}[X]$ are o rădăcină întreagă $\alpha = p$, atunci aceasta este un divizor al termenului liber a_n.

2.17.5. Aproximarea rădăcinilor iraţionale ale polinoamelor $f \in \mathbf{R}[X]$

Metoda coardei (Regula falsi): Dacă $f \in \mathbf{R}[X]$ are în $(a, b) \subset \mathbf{R}$ o rădăcină x_0 atunci

$$x_0 \simeq a - \frac{b-a}{\tilde{f}(b) - \tilde{f}(a)} \tilde{f}(a). \tag{1}$$

Metoda tangentei sau metoda lui Newton. Dacă $f \in \mathbf{R}[X]$ are în $(a, b) \subset \mathbf{R}$ o rădăcină x_0, atunci

$$x_0 \simeq a - \frac{\tilde{f}(a)}{\tilde{f}'(a)} \tag{2}$$

sau

$$x_0 \simeq b - \frac{\tilde{f}(b)}{\tilde{f}'(b)}. \tag{3}$$

Exemplu. Fie polinomul $f = X^3 + X^2 - 21X - 20$. Se ştie că el admite rădăcina $x_0 \in (4; 5)$. Să se determine x_0 cu două zecimale exacte.

Soluţie. Numărul x_0 este rădăcină a lui f, deoarece $f(4) = -24 < 0$ şi $f(5) = 25 > 0$. Luăm $A(4, -24)$ $B(5,25)$ pe graficul lui f. Avem astfel $a = 4$, $b = 5$, $f(a) = -24$; $f(b) = 25$. Cu formula (1) găsim

$$x_1 = 4 - \frac{1}{49}(-24); \quad x_1 \simeq 4,5. \tag{α}$$

Pentru a aplica formula (3), calculăm derivatele lui f şi anume $f' = 3X^2 + 2X - 21$, $f'' = 6X + 2$. Observăm că $f''(x) > 0$, $\forall x \in (4; 5)$. Avem apoi $f'(b) = 64$, iar (3) ne permite să scriem

$$x_2 = 5 - \frac{25}{64}; \quad x_2 \simeq 4,6 \tag{β}$$

Fiecare din numerele definite de (α) şi (β) este o valoare aproximativă pentru x_0.

Putem obţine o valoare mai apropiată de x_0, care se află în intervalul $(4,5; 4,6)$, dacă iterăm procedeul. Deci vom porni de la $A_1(4,5; -3,125)$ şi $B_1(4,6; 1,896)$ şi vom găsi

$$x_1' \simeq 4,56224, \text{ respectiv } x_2' \simeq 4,56331.$$

Evident rădăcina x_0, calculată cu două zecimale exacte, este $x_0 = 4,56$.

2.18. Structuri algebrice

2.18.1. *Lege de compoziție internă*

Lege de compoziție internă definită pe o mulțime $E \neq \emptyset$. Orice aplicație φ definită pe $E \times E$ cu valori în E:

$$\varphi : E \times E \to E, \ (x, y) \to \varphi(x, y)$$

se numește *lege de compoziție internă* sau simplu *lege internă*.

Elementul $\varphi(x, y)$ din E se numește *compusul* lui x cu y prin φ și este un element unic.

Notații pentru legea φ : $*$, $\circ$, $\perp$, $\top$, $\wedge$, $\vee$, $+$, $\cdot$ $\oplus$, $\odot$. În notație aditivă scriem $\varphi(x, y) = x + y$, iar în cea multiplicativă $\varphi(x, y) = xy$.

Exemple. Se știe că $\forall x, y \in \mathbf{N}$ avem $x + y \in \mathbf{N}$, $xy \in \mathbf{N}$. Deci adunarea și înmulțirea numerelor naturale reprezintă legi de compoziție interne definite pe $\mathbf{N}$.

Parte stabilă a unei mulțimi $E \neq \emptyset$. O submulțime S a lui E cu proprietatea

$$\forall x, y \in S, \ \varphi(x, y) \in S$$

se numește *parte stabilă* a lui E în raport cu φ.

Exemplu. Submulțimea P a numerelor întregi pare este o parte stabilă a lui $\mathbf{Z}$ față de adunarea numerelor întregi.

Proprietățile legilor interne.

Asociativitatea. O lege de compoziție $*$ definită pe $E \times E$ cu valori în E se numește *asociativă* dacă

$$\forall x, y, z \in E, \ (x * y) * z = x * (y * z).$$

În notație aditivă aceasta se scrie: $\forall x, y, z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$, iar în notație multiplicativă aceasta devine $\forall x, y, z \in E$, $(xy)z = x(yz)$.

Exemple. 1) Adunarea și înmulțirea numerelor raționale sînt legi de compoziție asociative.

2) Scăderea și împărțirea numerelor reale nu sînt legi de compoziție asociative.

3) Compunerea funcțiilor definite pe E cu valori în E este o lege de compoziție asociativă.

Comutativitatea. O lege de compoziție $*$ definită pe $E \times E$ cu valori în E se numește *comutativă* dacă

$$\forall x, y \in E, \ x * y = y * x.$$

Exemple. 1) Reuniunea și intersecția mulțimilor sînt operații asociative și comutative.

2) Compunerea translațiilor este o lege de compoziție asociativă.

Elementul neutru. Un element $e \in E$ se numește *element neutru* pentru o lege de compoziție $*$ pe E, dacă $\forall x \in E$, $x * e = e * x = x$.

Exemplu. Zero este element neutru pentru adunare pe $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, iar 1 este element neutru pentru înmulțire pe $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$.

Teoremă. Dacă o lege internă admite un element neutru, atunci acesta este unic.

Elemente regulate (simplificare la stînga și simplificare la dreapta). Fie E o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție $*$. Dacă din relația $x * a = x * b$ rezultă $a = b$, spunem că x este element (din E) cu care putem „simplifica" la stînga. Dacă din relația $a * y = b * y$ rezultă $a = b$, spunem că $y \in E$ este un element cu care putem „simplifica" la dreapta.

Exemplu. În $(\mathbf{N}, +)$ avem $a + x = x + b \Leftrightarrow a = b$; $a, b, x \in \mathbf{N}$. În schimb în $(\mathbf{N}, \cdot)$ din $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$, nu putem deduce $2 = 3$.

Elemente simetrizabile. Un element $x \in E$ se numește *simetrizabil* față de legea $*$ (cu elementul neutru e), dacă $\exists x' \in E$, astfel încît $x' * x = x * x' = e$. Elementul x' se numește *simetricul* lui x și este *unic.*

În notație aditivă $x' = -x$ și se numește *opusul* lui x, iar în notația multiplicativă x' se notează x^{-1} și se numește *inversul* lui x.

Exemplu. În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, cu elementele din $\mathbf{R}$, înzestrată cu operația de adunare, o matrice A are drept simetrică pe $A' = -A$. În mulțimea claselor de resturi modulo 5, înzestrată cu operația de înmulțire avem $\hat{1}' = \hat{1}$, $\hat{2}' = \hat{3}$; $\hat{3}' = \hat{2}$, $\hat{4}' = \hat{4}$.

Distributivitatea. Fie E o mulțime nevidă înzestrată cu două legi de compoziție $\perp$ și $\top$. Spunem că legea $\top$ este *distributivă* față de legea $\perp$, dacă

$$\forall x, y, z \in E, \text{ avem}$$

$$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$$

$$(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x).$$

(Distributivitatea celei de a doua legi față de prima lege, la stînga și la dreapta).

Exemplu. În mulțimea $P(E)$ a părților unei mulțimi E intersecția este distributivă față de reuniune și reciproc.

2.18.2. *Grupuri*

Definiție. O mulțime G nevidă înzestrată cu o lege de compoziție $*$ se numește grup, dacă verifică următoarele axiome (numite axiomele grupului):

$G_1 : \forall x, y, z \in G, \quad (x * y) * z = x * (y * z)$ (asociativitate)

$G_2 : \exists e \in G, \ \forall x \in G, \quad x * e = e * x = x,$ (există element neutru)

$G_3 : \forall x \in G, \ \exists x' \in G, \quad x * x' = x' * x = e$ (orice x are un simetric x')

Dacă în plus legea verifică și axioma:

$G_4 : \forall x, y \in G, \quad x * y = y * x$ (comutativitate), atunci grupul $(G, *)$ se numește *comutativ* sau *abelian.*

Exemple: $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$ sînt grupuri abeliene; $(\mathbf{R}, \cdot)$ nu este un grup fiindcă 0 nu are simetric; $(\mathbf{N}, +)$ nu este grup fiindcă elementele nu au simetrice tot în $\mathbf{N}$.

Mulțimea rădăcinilor ecuației $x^4 - 1 = 0$ formează un grup multiplicativ abelian.

Grupul lui *Klein* $(\{e, a, b, c\}, \bullet)$

$\bullet$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

este un exemplu de grup cu 4 elemente.

Operații într-un grup $(G, *)$

1. $\forall x, a, b \in G, \quad x * a = x * b \Rightarrow a = b.$

$\forall y, a, b \in G, \quad a * y = b * y \Rightarrow a = b.$

2. Intr-un grup $(G, *)$ ecuațiile $x * a = b$ și $c * x = d$, $\forall a, b, c, d \in G$, au soluții unice în G, anume $x = b * a'$ și $y = c' * d$.

3. Fie G un grup multiplicativ. Dacă punem, $\forall a \in G$ și

$$\forall n \in N, a^n = \begin{cases} e, & n = 0 \\ a^{n-1}a, & n \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{atunci avem}$$

$$\forall m, n \in N, a^m a^n = a^{m+n}; \ (a^m)^n = a^{mn}.$$

Aceste proprietăți cu ajutorul definiției: $\forall n \in Z/N$, $a^n = (a^{-n})^{-1}$, se extind și la exponenți din Z.

2.18.3. *Inele*

Definiție. O mulțime A nevidă, înzestrată cu două legi interne (pe care le vom nota $+$ și $\cdot$) se numește inel, dacă verifică axiomele următoare (numite axiomele inelului):

$$G_1 : \forall x, y, z \in A, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$G_2 : \exists 0_A \in A, \quad \forall x \in A \quad 0_A + x = x + 0_A = x.$$

$$G_3 : \forall x \in A, \ \exists x' \in A; \quad x + x' = x + x = 0_A.$$

$$G_4 : \forall x, y \in A, \quad x + y = y + x.$$

$$M_1 : \forall x, y, z \in A, \quad (xy)z = x(yz).$$

$$M_2 : \exists 1_A \in A, \quad \forall x \in A, \quad x \cdot 1_A = 1_A \cdot x = x,$$

$$D_1 : \forall x, y, z \in A, \quad x(y + z) = xy + xz.$$

$$D_2 : \forall x, y, z \in A, \quad (y + z)\, x = (yx) + (zx).$$

Dacă înmulțirea este comutativă $[\forall x, y \in A, \ xy = yx]$, inelul A se numește *inel comutativ.*

Elementele care admit simetrice față de înmulțire se numesc *unități* sau *elemente inversabile* ale inelului.

Un inel este fără *divizori ai lui zero,* dacă pentru $x \neq 0$ și $y \neq 0$ avem $xy \neq 0$.

Exemple. $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ este un inel comutativ numit *inelul întregilor raționali.* $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sînt inele comutative. De asemenea avem inelele de polinoame $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{C}[X]$ și inelul claselor de resturi modulo n.

Reguli de calcul într-un inel:

1) $\forall x \in A$, $xO_A = O_A \cdot x = O_A$.

2) $O_A \neq 1_A$.

3) $\forall x, y \in A$, $x(-y) = (-x)y = -xy$.

4) $\forall x, y \in A$, $(-x)(-y) = xy$.

5) $\forall x \in A$, $-(-x) = x$.

6) $\forall x, y, z \in A$ avem $x(y - z) = xy - xz$ și $(x - y)z = xz - yz$.

7) Intr-un inel fără divizori ai lui zero este valabilă simplificarea la stînga și la dreapta.

2.18.4. *Corpuri*

Definiție. Un inel K pentru care $O_K \neq 1_K$ și orice x din K, $x \neq O_K$ are un simetric x^{-1} față de înmulțire se numește corp.

Un corp se numește *comutativ*, dacă înmulțirea este comutativă.

Deci axiomele corpului comutativ $(K, +, \cdot)$ sînt:

A_1 $\forall x, y, z \in K$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A_2 $\exists O_K \in K$, $\forall x \in K$, $O_K + x = x + O_K = x$.

A_3 $\forall x \in K$, $\exists (-x) \in K$ $x + (-x) = (-x) + x = O_K$.

A_4 $\forall x, y \in K$, $x + y = y + x$.

M_1 $\forall x, y, z \in K$, $(xy)z = x(yz)$.

M_2 $\exists 1_K \in K$, $\forall x \in K$, $x \cdot 1_K = 1_K x = x$.

M_3 $\forall x \in K \setminus \{O_K\}$, $\exists x^{-1} \in K$, $xx^{-1} = x^{-1}x = 1_K$.

M_4 $\forall x, y \in K$, $xy = yx$.

D $\forall x, y, z \in K$, $x(y + z) = xy + xz$.

Exemple de corpuri comutative, $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbf{C}, +, \cdot)$.

Corpul claselor de resturi modulo, p, cu p număr prim $(p \geqslant 2)$.

Mulțimea matricelor

$$\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$$

cu elemente în Z_3, înzestrată cu adunarea și înmulțirea, este un corp.

Teoremă: 1. Corpurile nu admit divizori ai lui zero.

2. Elementele diferite de zero dintr-un corp formează un grup față de înmulțire.

2.18.5. *Morfisme (omomorfisme)*

Fie E și F două mulțimi înzestrate cu structurile algebrice (S) și (T). Admitem că sînt date o aplicație asociind la fiecare lege internă $\top$ relativă la S o lege internă $\perp$ pe F relativă la (T) și o aplicație asociind la fiecare lege externă $*$ pe E, avînd drept domeniu al operatorilor pe Ω, o lege externă $\bar{*}$ pe F, cu același domeniu de operatori, aceste aplicații fiind bijective.

O aplicație $f: E \to F$ se numește morfism relativ la structurile (S) și (T) dacă

1) $\forall x, y \in E, \quad f(x \perp y) = f(x) \top f(y).$

2) $\forall (\lambda, x) \in \Omega x E, \; f(\lambda * x) = \lambda \bar{*} f(x).$

Morfism (omomorfism) de grupuri. Fie $(G, *)$ și $(G', \cdot)$ două grupuri. *Se numește morfism de grupuri o aplicație $f: G \to G'$ pentru care*

$$\forall x, y \in G, \quad f(x * y) = f(x) \cdot f(y).$$

Exemple. 1) Aplicația $f: (\mathbf{R}^*, \cdot) \to (M_2(\mathbf{R}), \cdot)$, cu $f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, unde $M_2(\mathbf{R})$ este mulțimea matricelor nesingulare de ordinul al doilea cu elemente reale este un morfism al grupului $(\mathbf{R}^*, \cdot)$ în grupul $(M_2(\mathbf{R}), \cdot)$.

2) Grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule este omomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive prin $f(z) = |z|$.

Teoremă. Dacă f este un morfism de la G la G', atunci $f(e) = e'$ și $\forall x \in G$ avem $f(x') = (f(x))'$.

Morfism (omomorfism) de inele. Fie $(A, +, \cdot)$ și $(A', +, \cdot)$ două inele. Se numește *morfism de inele* o aplicație $f: A \to A'$ pentru care

$$\forall x, \; y \in A, \quad f(x + y) = f(x) + f(y); \; f(xy) = f(x) \cdot f(y); \; f(1) = 1'.$$

Exemple. 1) Aplicația care asociază oricărui întreg rațional clasa de resturi modulo n este un morfism al inelului $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ în inelul claselor de resturi modulo n, $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot)$.

2) Aplicația $f: (\mathbf{C}, +, \cdot) \to (\mathbf{Z} + \sqrt{2}\mathbf{Z}, +, \cdot)$, de la inelul numerelor complexe la inelul numerelor de forma $a + \sqrt{2}b$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$ definită prin

$$f(a + ib) = a + b\sqrt{2}$$

este un morfism de inele.

Morfism (omomorfism) de corpuri. Fie K și K' două corpuri. Se numește *morfism de corpuri* o aplicație f care este un *morfism de inele* de la K la K'.

2.18.6. *Izomorfism*

Fie E și F două mulțimi înzestrate cu structurile algebrice (S) și (T). Se numește *izomorfism al* lui E în F, orice morfism bijectiv.

Rezultă astfel imediat definițiile izomorfismelor de grupuri, de inele și de corpuri.

Exemplu. Fie grupurile $(\mathbf{C}, *)$ și $(\mathbf{C}, \cdot)$, unde $\forall x, y \in \mathbf{C}$, $x * y = x + y + 1$ și $x \cdot y = x + y + i$.

Atunci $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, cu $f(z) = iz$, este un izomorfism de grupuri.

Inelul întregilor lui Gauss $(\{z \mid z = x + iy,\ x, y \in \mathbf{Z}\}, +, \cdot)$ este izomorf cu inelul matricelor $\left(\left\{M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{Z}\right\}, +, \cdot\right)$ prin funcția cu valori matriceale: $f(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.

2.18.7. *Automorfisme*

Se numește *automorfism orice izomorfism* de la E la E.

Exemple. 1) Fie E grupul multiplicativ al numerelor reale nenule. Atunci $f(x) = x^{2m+1}$, $m \in \mathbf{N}$, este un automorfism de la E la E.

2) Fie A un inel. Dacă $a \in A$ admite un invers a^{-1}, atunci $f(x) = a \times a^{-1}$ este un automorfism al lui A.

3) Fie $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ corpul numerelor complexe. Aplicația $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, cu $f(z) = \bar{z}$ este un automorfism de la $\mathbf{C}$ la $\mathbf{C}$.

2.18.8. *Endomorfisme*

Se numește endomorfism orice morfism de la E la E.

Exemplu. Fie E grupul multiplicativ al numerelor reale nenule. Atunci $f(x) = x^m$, $m \in \mathbf{N}^*$, este un endomorfism de la E la E.

2.19. Spațiu vectorial

2.19.1. *Lege de compoziție externă*

Definiție. Fie Ω și M două mulțimi nevide. Se numește lege de compoziție externă orice aplicație de la $\Omega \times M$ la M.

Astfel la orice α din Ω și x din M corespunde un singur element (o singură imagine) în M și pe care îl (o) vom nota $\alpha * x$ sau $\psi(\alpha, x)$.

Se scrie $\psi : \Omega \times M \to M$ sau $(\alpha, x) \to \alpha * x$.

Mulțimea Ω se numește *domeniul operatorilor*, $\alpha \in \Omega$ purtînd numele de *operator* sau *scalar*, iar mulțimea M se numește *mulțimea vectorilor*, orice $x \in M$ numindu-se *vector*.

Orice lege internă $*$ definită pe $E \times E$ cu valori în E, $(x, y) \mapsto x * y$, poate fi considerată drept o lege externă dacă, domeniul operatorilor nu mai este „exterior" față de E, ci este tot E (în cele ce urmează vom vedea că $\mathbf{R}$ este un spațiu vectorial pe el însuși, considerînd mulțimea operatorilor $\mathbf{R}$, iar mulțimea vectorilor de asemenea $\mathbf{R}$).

Exemplu. Înmulțirea vectorilor de poziție cu un scalar. Fie $\Omega = \mathbf{R}$ și $M = \mathbf{R}^3$, mulțimea vectorilor de poziție $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ai punctelor $P(x, y, z)$ din $\mathbf{R}^3$. Prin definiție $(\alpha, \vec{r}) \mapsto \alpha\vec{r}$ reprezintă vectorul de poziție al unui punct P', definit astfel: $|\overrightarrow{OP'}| = |\alpha|\, r$, P' se află pe dreapta determinată de O și P, de aceeași parte cu P cînd $\alpha > 0$ și în partea opusă cînd $\alpha < 0$. Legea de compoziție externă definită pe $\mathbf{R} \times M$ cu valori în M, cu $(\alpha, \vec{r}) \mapsto \alpha\vec{r}$ se numește înmulțirea vectorilor de poziție cu scalari.

2.19.2. *Spațiu vectorial*

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ, M o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție internă notată aditiv și fie o lege externă de la $K \times M$ la M, notată multiplicativ.

Se numește spațiu vectorial peste K tripletul $(M, +, \cdot)$ care verifică următoarele axiome:

$$\text{I}\begin{cases} 1.\ \forall x, y, z \in M, & (x + y) + z = x + (y + z) \\ 2.\ \forall x, y \in M, & x + y = y + x \\ 3.\ \exists O_M \in M, & \forall x \in M,\ x + O_M = O_M + x = x \\ 4.\ \forall x \in M, & \exists (-x) \in M,\ x + (-x) = (-x) + x = O_M \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} 5.\ \forall x \in M, & 1_K \cdot x = x \\ 6.\ \forall \alpha, \beta \in K, & \forall x \in M,\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} 7.\ \forall \alpha, \beta \in K, & \forall x \in M,\ (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x \\ 8.\ \forall \alpha \in K & \forall x, y \in M,\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y. \end{cases}$$

Exemple. 1) Fie $K = \mathbf{R} = M$; atunci $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ este spațiu vectorial peste el însuși.

2) Mulțimea soluțiilor ecuației diferențiale $y'' + y = 0$, $M = \{\varphi : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \varphi''(x) + \varphi(x) = 0,\ \forall x \in (a, b)\}$ înzestrată cu operațiile naturale de adunare a funcțiilor și de înmulțire cu scalari a acestor funcții, este un spațiu vectorial peste $\mathbf{R}$.

3) Mulțimea C a funcțiilor definite și continue pe un interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$, cu valori reale, este un spațiu vectorial peste $\mathbf{R}$ față de operațiile naturale de adunare a funcțiilor $(\forall f, g \in \mathbf{C}$ și $\forall x \in [a, b],\ (f + g)(x) = f(x) + g(x))$ și de înmulțire a acestora cu scalari $(\forall \lambda \in \mathbf{R}$ și $\forall f \in \mathbf{C},\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x))$.

Consecințe ale axiomelor spațiului vectorial.

1. $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\forall x, y \in M$, avem $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ și $(\alpha - \beta) x = \alpha x - \beta x$.

2. $\forall \alpha \in K$, $\alpha O_M = O_M$.

3. $\forall x \in M$, $O_K x = O_M$.

4. $\forall x \in M$, $(-1_K) x = -x$.

5. $\alpha x = 0_M \Rightarrow \alpha = 0_K$ sau $x = 0_M$.

2.19.3. *Bază. Dependență și independență liniară*

Bază. Fie M un spațiu vectorial peste K. Elementele $e_1, e_2, \dots, e_n$ din M constituie o *bază* a lui M dacă:

1) $\forall x \in M$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încît $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$, cu $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, implică $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0_K$.

Exemple. 1) Vectorii $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ constituie o bază a spațiului vectorial al vectorilor de poziție din $\mathbf{R}^2$.

2) Vectorii $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ și $e_3 = (0, 0, 1)$ constituie o bază a spațiului vectorial $\mathbf{R}^3$.

Combinație liniară cu coeficienți în K. Fie $x \in M$ un vector. Vectorul x este o *combinație liniară a vectorilor* $x_1, x_2, ..., x_m$ din M, dacă $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in K$ astfel încît

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m.$$

Independență liniară. Vectorii $x_1, ..., x_m$ din M se numesc *liniar independenți* dacă

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = 0_M, \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in K,$$

implică $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0_K$.

Exemplu. Vectorii (1, 0 si (0, 1) din $\mathbf{R}^2$ sînt liniar independenți sau distincții

Dependență liniară. Vectorii $x_1, ..., x_m \in M$ se numesc *liniar dependenți*. dacă $\exists \alpha_1, ..., \alpha_m \in K$, nu toate nule, astfel încît să avem

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m = 0_M.$$

Exemplu. Vectorii (2, 2) și (1, 1) din $\mathbf{R}^2$ sînt liniar dependenți, fiindcă $(2, 2) - 2(1, 1) = 0$.

Coordonatele unui vector într-o bază. Dacă $e_1, e_2, ..., e_n$ este o bază a spațiului vectorial M peste K și $x \in M$, atunci scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, unic determinați, astfel încît să avem $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, se numesc *coordonatele vectorului* x în baza respectivă.

Exemplu. Vectorul de poziție $\vec{r}$ (2, 3) în baza $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ din $\mathbf{R}^2$ are coordonatele $\alpha_1 = 2$ și $\alpha_2 = 3$.

2.19.4. *Transformări liniare*

Fie M și M' două spații vectoriale peste K. Orice aplicație $T : M \to M'$ se numește *transformare liniară* sau *operație liniară*, dacă are proprietățile:

1) $\forall x, y \in M, \quad T(x + y) = T(x) + T(y)$;

2) $\forall \alpha \in K, \quad \forall x \in M, \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Exemple. 1) Fie $C^1(I)$ mulțimea funcțiilor de clasă C^1 definite pe I. Fie $\frac{d}{dx}$ operația prin care unei funcții din C^1 îi asociem derivata sa. Deci $(Tf)(x) = \left(\frac{d}{dx} f\right)(x) = f'(x)$. Această operație este o operație liniară.

2. Transformarea de la $\mathbf{R}^2$ la $\mathbf{R}^2$ definită astfel:

$$x' = x + y, \quad y' = x - y$$

este o transformare liniară.

2.20. Folosirea tabelelor 2.1—2.7

Tabela 2.1. Coeficienţi binomiali

Tabela conţine coeficienţii binomiali, C_n^k, $0 \leq k \leq n$, care apar în dezvoltarea binomului lui Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. În prima coloană se dă n, iar în celelalte $C_n^0, \ldots, C_n^n$ de la $n = 1$ la $n = 15$. Folosirea tabelei este imediată: ne alegem n şi apoi, pe aceeaşi orizontală cu n, citim C_n^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, care ne interesează.

Tabela 2.2. Logaritmii zecimali ai numerelor de la 1 la 100

În această tabelă sînt date mantisele sau părţile zecimale ale logaritmilor numerelor întregi cuprinse între 1 şi 100. In coloana N sînt trecute numerele de la 1 la 99, cifra zecilor fiind scrisă o singură dată. Modul de utilizarea al tabelei rezultă imediat.

Tabela 2.3. Logaritmii zecimali ai numerelor de la 100 la 10 000

În această tabelă sînt date mantisele numerelor întregi cuprinse între 100 şi 10 000. Numerele formate din trei cifre se găsesc în coloana N, iar în coloana alăturată (coloana 0) se află mantisele respective. Pentru uşurinţa citirii mantiselor, primele lor două cifre n-au fost scrise decît o singură dată şi numai în coloana 0. Dacă numerele au patru cifre (ale căror prime trei cifre se află în coloana N, iar a patra în fruntea uneia dintre cele zece coloane alăturate), atunci ultimele trei cifre ale mantiselor logaritmilor respectivi se găsesc la intersecţia liniei numărului format de primele trei cifre cu coloana care are deasupra cifra unităţilor; grupa de două cifre cu care începe mantisa se ia din coloana 0, pe aceeaşi linie sau mai sus, In cazul cînd ultimele trei cifre sînt însemnate cu o steluţă, primele două cifre se iau din rîndul următor.

Se pun două probleme în calculele cu logaritmii: aflarea logaritmului unui număr dat şi aflarea numărului al cărui logaritm a fost dat.

Problema 1

Cazul 1. Numărul are mai puţin de trei cifre, adică se găseşte în tabele.

Exemplu. Să se afle lg 542,3. Neţinînd seamă de virgulă, căutăm mantisa logaritmului numărului 5 423, ale cărei ultime trei cifre le aflăm la intersecţia liniei numărului 542 din coloana N şi a coloanei lui 3; găsim 424. Adăugînd şi primele două cifre, 73, mantisa căutată este 73 424; deci

$$\lg 5\,423 = 3{,}73\,424$$

(caracteristica, sau partea întreagă a logaritmului, este 3) şi

$$\lg 542{,}3 = 2{,}73\,424$$

(caracteristica este 2).

Cazul 2. Numărul considerat are cinci sau mai multe cifre, deci nu se găseşte in tabele.

Exemplu. Să se afle lg 23 458.

Căutăm mai întîi mantisa logaritmului numărului 2 345; găsim 37 014 (am luat 37 în loc de 36, întrucît ultimele trei cifre ale mantisei au o steluţă).

Deci

$$\lg 2\,345 = 3{,}37\,014$$

Dar

$$\lg 2\,346 = 3{,}37\,033.$$

Mantisa logaritmului numărului 2 345,8 este cuprinsă între 37 014 și 37 033, între care există o diferență de 19 unități de ordinul al cincilea zecimal. Admițînd că creșterea numărului este proporțională cu creșterea logaritmului, urmează că unei creșteri cu o unitate a numărului 2 345 îi corespunde o creștere a logaritmului cu 19 unități de ordinul al cincilea zecimal. Deci creșterii de 0,8 unități îi corespunde o creștere de $0{,}8 \times 19 = 15{,}2$ sau aproximativ de 15 unități de ordinul al cincilea zecimal al logaritmului. Așadar mantisa logaritmului numărului 2 345,8 este egală cu $37\,014 + 15 = 37\,029$ și deci

$$\lg 2\,345{,}8 = 3{,}37\,029.$$

Urmează că

$$\lg 23\,458 = 4{,}37\,029.$$

In scopul ușurării calculelor, în cazul cînd numărul al cărui logaritm se caută are mai mult de cinci cifre, pentru a găsi creșterea corespunzătoare a logaritmului se folosesc părțile proporționale scrise în ultima coloană P.P.

Exemplu. Să se afle logaritmul numărului 147 756. Se caută întîi mantisa logaritmului numărului 1477,56. Pentru aceasta se află în primul rînd mantisa logaritmului lui 1477; se găsește 16938, apoi mantisa logaritmului lui 1478 și se găsește 16967. Diferența între aceste două mantise este 29 de unități de ordinul al cincilea zecimal. Creșterii numărului 1477 cu 0,56 îi corespunde o creștere a logaritmului egală cu $0{,}56 \times 29$ unități de ordinul al cincilea zecimal. Se evită înmulțirea, căutîndu-se în coloana P.P., coloana care are scris în capătul ei valoarea 29; la intersecția acestei coloane cu linia lui 5 (care reprezintă zecimi) se găsește $14{,}5 \approx 15$ unități de ordinul al cincilea zecimal care reprezintă creșterea logaritmului pentru creșterea numărului cu 0,5. La intersecția coloanei lui 29 cu linia lui 6 se găsește 17,4 unități de ordinul al cincilea zecimal, corespunzătoare unei creșteri a numărului cu 0,6; unei creșteri a numărului cu 0,06 îi corespunde o creștere a logaritmului cu $1{,}74 \approx 2$ unități de ordinul al cincilea zecimal. Deci mantisa căutată este $16938 + 15 + 2 = 16955$, iar $\lg 147756 = 5{,}16955$.

Problema 2

Cazul 1. Mantisa logaritmului se găsește în tabele și deci numărul se află imediat.

Exemplu. Să se afle numărul al cărui logaritm este 1,91 089.

Se caută în coloana 0 pînă cînd se găsesc primele două cifre ale mantisei care sînt 91; acum se află foarte ușor și ultimele trei cifre, 089. Pe linia lui 089, în coloana *N*, citim 814 iar pe coloana lui 089 citim 5; deci ținînd seama de caracteristică, numărul căutat este 81,45.

Cazul 2. Mantisa nu se găsește în tabele.

Exemplu. Să se afle numărul al cărui logaritm este 2,73 129. Din tabele se deduce că mantisa logaritmului numărului căutat este cuprinsă între 73 127 și 73 135 cărora le corespund numerele 5 386 și 5 387; ea este mai apropiată de 73 127 de care diferă prin 2 unități. Diferența dintre mantisele 73 135 și 73 127 este de 8 unități. Admițînd iarăși că creșterea numerelor este proporțională cu creșterea logaritmilor respectivi urmează ca unei creșteri a mantisei cu 8 unități de ordinul al cincilea zecimal îi corespunde o creștere de o unitate a numărului; așadar unei creșteri de 2 unități a mantisei corespunde o creștere de $\frac{2}{8} = 0,25$ unități sau aproximativ de 0,3 unități a numărului. Ținînd seama de caracteristică, numărul al cărui logaritm este 2,73 129 este 538,63. Se mai poate găsi creșterea corespunzătoare a numărului cu ajutorul ultimei coloane P.P.

Tabela 2.4. Antilogaritmi

Cu ajutorul acestei tabele putem afla numerele (antilogaritmii) corespunzătoare unor logaritmi dați. Mantisele logaritmilor sînt date cu trei cifre, primele două aflîndu-se în coloana întîi, iar a treia în capul uneia din cele zece coloane următoare. Modul de folosire este foarte simplu. De exemplu să se afle numărul corespunzător logaritmului 1,7423. Căutăm mai întîi numărul corespunzător logaritmului 1,742; la intersecția liniei lui 74 cu coloana lui 2 aflăm numărul căutat 5521 (nu ținem seama de virgulă). Diferența între numărul următor și acest număr este 13 care corespunde unei creșteri cu o unitate de ordinul al patrulea zecimal al mantisei. Deci creșterii cu 0,3 a mantisei corespunde o creștere de $0,3 \times 13 = 3,9 \approx 4$ a numărului. Așadar numărul căutat, ținînd seamă de caracteristică, este 55,25.

Tabela 2.5. Logaritmii naturali ai numerelor de la 1,00 la 9,99

Tabela se folosește simplu. De exemplu, să se afle ln 2,37. La intersecția liniei 2,3 cu coloana lui 7 se găsește logaritmul căutat: 0,8629.

Combinată cu tabela 2.6 (logaritmii naturali ai puterilor lui 10), această tabelă poate fi folosită și pentru aflarea logaritmilor naturali ai altor numere care nu figurează în 2.3,

Exemplul 1. Să se afle în 734. Avem

$$\ln 734 = \ln 7,34 + \ln 10^2 = 1,9933 + 4,6051702 \approx$$

$$\approx 1,9933 + 4,6052 = 6,5985.$$

Exemplul 2. Să se afle ln 0,00431. Avem

$$\ln 0,00431 = \ln 4,31 - \ln 10^3 = 1,4609 - 6,9077553 \approx$$

$$\approx 1,4609 - 6,9078 = -5,4469.$$

Tabela 2.6. Logaritmii naturali ai puterilor lui 10

Modul de folosire al acestei tabele este evident (vezi și indicația pentru utilizarea tabelei II.2).

Tabela 2.7. Multiplii lui 1/M pentru transformarea logaritmilor zecimali în logaritmi naturali

În tabelă n au fost trecuți multiplii de la 1 la 9 ai lui $1/M$, întrucît se pot deduce ușor din multiplii 10. 20, 30 etc. prin simpla mutare a virgulei spre stînga, peste o cifră. Modul de folosire este imediat.

Exemplu. Să se afle ln N știind că lg $N = 0,13217$. Se știe că

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N,$$

adică, în cazul nostru,

$$\ln N = \frac{1}{M} \times 0,13217,$$

sau

$$\ln N = \frac{1}{M} \times 0,13 + \frac{1}{M} \times 0,0021 + \frac{1}{M} \times 0,000\,07,$$

care se mai poate scrie

$$\ln N = \frac{1}{M} \times 13 \times \frac{1}{100} + \frac{1}{M} \times 21 \times \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{M} \times 7 \times \frac{1}{100\,000}.$$

Căutînd în tabelă multiplii 13, 21 și 7 ai lui $\frac{1}{M}$, obținem

$$\ln N = 29,93\,361 \times \frac{1}{100} + 48,35\,429 \times \frac{1}{10\,000} + 16,118\,096 \times \frac{1}{100\,000} =$$

$$= 0,29\,934 + 0,00\,484 + 0,00\,016 = 0,30\,434.$$

T a b e l a 2.8. Multiplii modulului M pentru transformarea logaritmilor naturali în logaritmi zecimali

În tabelă n-au fost trecuți multiplii de la 1 la 9 ai lui M, deoarece se pot deduce cu ușurință din multiplii 10, 20, 30 etc., prin mutarea virgulei spre stînga peste o cifră. Modul de folosire este imediat.

Exemplu. Să se afle $\lg N$ știind că $\ln N = 1,24514$. Se știe că

$$\lg N = M \ln N,$$

în cazul nostru

$$\lg N = M \times 1,24514.$$

Această egalitate se mai poate scrie

$$\lg N = M \times 1,2 + M \times 0,045 + M \times 0,000\,14 =$$

$$= M \times 12 \times \frac{1}{10} + M \times 45 \times \frac{1}{1\,000} + M \times 14 \times \frac{1}{100\,000}.$$

Căutînd în tabelă multiplii 12, 45 și 14 ai lui M, obținem

$$\lg N = 5\,21153 \times \frac{1}{10} + 19,54325 \times \frac{1}{1\,000} + 6.08012 \times \frac{1}{100\,000} =$$

$$= 0,52115 + 0,01954 + 0,00006 = 0,54075.$$

T a b e l a 2.9. Valorile funcțiilor e^x și e^{-x} pentru $x \in [0, 10]$

Această tabelă conține valorile funcțiilor e^x și e^{-x}, x variind de la 0 la 10. Valorile lui x merg din sutime în sutime de la 0 pînă la 4 și din zecime în zecime de la 4 la 10. Tabela se folosește prin citirea directă.

3. GEOMETRIE

3.1. Geometrie plană

3.1.1. *Teoreme și relații în triunghiuri, patrulatere și poligoane oarecare*

1) **Triunghiul dreptunghic** (fig. 3.1). *Notații:* a — lungimea ipotenuzei; b, c — lungimile catetelor; S — aria; $\overline{AD}$ — înălțime; $\overline{AE}$ — mediană; r — raza cercului inscris; R — raza cercului circumscris).

$a^2 = b^2 + c^2$ *(teorema lui Pitagora)*

$\overline{AD}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{DB}$ *(teorema înălțimii)*

$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$ *(teorema catetei)*

$S = bc/2$; $a = 2R$; $\overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}/\overline{BC}$

$\overline{EA} = \overline{EB} = \overline{EC}$

$b + c = 2r + a$

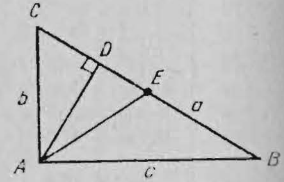


Fig. 3.1

2) **Triunghiul oarecare**

Notații (fig. 3.2): a, b, c — lungimile laturilor; h_a = lungimea înălțimii ce pleacă din vîrful A; $p = (a + b + c)/2$ = semiperimetrul; R = lungimea razei cercului circumscris; O — centrul cercului circumscris; r = lungimea razei cercului înscris; I — centrul cercului înscris; r_a, r_b, r_c = lungimile razelor cercurilor exînscrise; m_a = lungimea medianei dusă din vîrful A; $\overline{AE} = i_a$ = lungimea bisectoarei interioare a unghiului A; i'_a — lungimea bisectoarei exterioare a unghiului A; S = aria; $s = (m_a + m_b + m_c)/2$;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad \textit{(teorema lui Pitagora generalizată)}$$

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \quad i'_a = \frac{2}{b - c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} \ (a > b > c,$$

lung. bis. ext.);

$$i_a = \frac{2}{b + c}\sqrt{pbc(p - a)} = \frac{h_a}{\cos\dfrac{B - C}{2}} = \frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b + c};$$

$$i_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2};$$

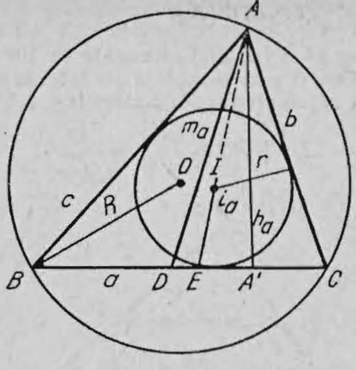


Fig. 3.2

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R} = pr = (p-a)\,r_a = \sqrt{r r_a r_b r_c} = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} =$$

$$= p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{bc\sin A}{2} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A} = \frac{h_b^2 \sin B}{2 \sin A \sin C} =$$

$$= r^2 \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{4}{3}\sqrt{s(s-m_a)(s-m_b)(s-m_c)};$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r;\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c};\quad r_a = S/(p-a) = p\operatorname{tg}(A/2).$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{c}{b};\quad \overline{BE} = \frac{ac}{b+c},\quad \overline{EC} = \frac{ab}{b+c}$$ (*teorema bisectoarei*);

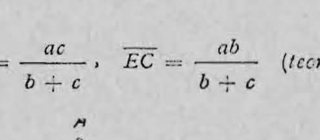


Fig. 3.3

$\overline{B'C'} = a\cos A$ ($\overline{B'C'}$ — lungimea unei *antiparalele*) (fig. 3.3)

3.1.2. *Teoreme remarcabile*

1) Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.

2) **Teorema lui Thales.** O paralelă la una din laturile unui triunghi împarte celelalte două laturi în segmente proporționale: (fig. 3.4):

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

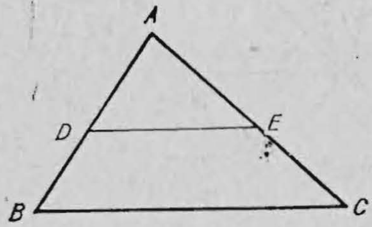


Fig. 3.4

3) **Teorema bisectoarei.** Bisectoarele (interioară și cea exterioară) unui unghi dintr-un triunghi împart respectiv latura opusă în segmente proporționale cu celelalte două laturi (fig. 3.5):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}; \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}.$$

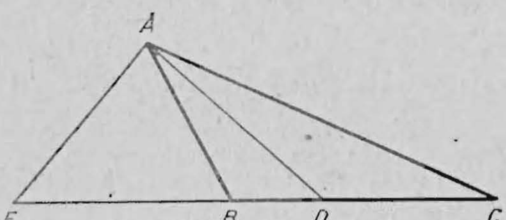


Fig. 3.5

4) Teorema lui Stewart. Dacă A, B și C sînt trei puncte coliniare, în această ordine, iar O este un punct exterior dreptei pe care se află cele trei puncte, atunci avem (fig. 3.6):

$$\overline{OA^2} \cdot \overline{BC} - \overline{OB^2} \cdot \overline{AC} + \overline{OC^2} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}.$$

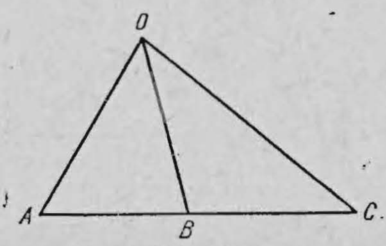


Fig. 3.6

5) **Teorema lui Menelaus**: Dacă pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi ABC luăm trei puncte M, N, P care verifică relația (fig. 3.7):

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1,$$

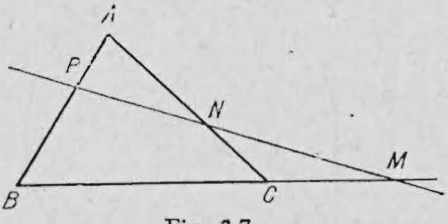


Fig. 3.7

atunci aceste trei puncte sînt coliniare.

6) **Teorema lui Ceva.** Dacă pe laturile unui triunghi ABC luăm trei puncte M, N, P astfel încît să avem relația (fig. 3.8):

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1,$$

atunci dreptele AM, BN și CP sînt concurente.

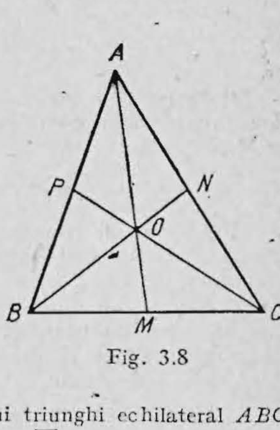


Fig. 3.8

7) **Teorema lui Pompeiu.** Dacă în planul unui triunghi echilateral ABC luăm un punct I, atunci cu segmentele $\overline{IA}$, $\overline{IB}$ și $\overline{IC}$ se poate construi un triunghi (care poate fi eventual degenerat).

8) Distanța l dintre centrul O al cercului circumscris unui triunghi și centrul I al cercului înscris în același triunghi este

$$l = \sqrt{R^2 - Rr}.$$

9) **Teorema lui Nagel.** Dacă O este centrul cercului circumscris unui triunghi ABC, atunci AO, BO și CO sint perpendiculare pe laturile triunghiului ortic.

10) Dacă înălțimile triunghiului intersectează cercul circumscris în A' B', C', atunci A este mijlocul arcului $\overset{\frown}{B'C'}$ etc.

11) **Cercul lui Euler** (cercul celor 9 puncte). Dacă ABC este un triunghi, atunci picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor AH, BH, CH, unde H este ortocentrul triunghiului, sint conciclice. Raza cercului lui Euler este $R/2$.

12) **Postulatul lui Euclid.** Fiind date un punct A și o dreaptă d, care nu trece prin A, există o singură paralelă la d care trece prin A.

13) **Dreapta lui Simson.** Dacă dintr-un punct M al cercului circumscris triunghiului ABC se coboară perpendicularele MD, ME, MF pe BC, CA și AB, atunci punctele D, E, F sînt coliniare (fig. 3.9).

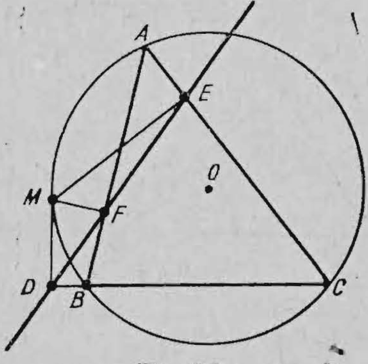


Fig. 3.9

14) **Teorema lui Steiner:** Dacă prin vîrful A al triunghiului ABC ducem două drepte simetrice față de bisectoarea unghiului A, care întîlnesc latura BC în M și N, atunci avem

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CM} \cdot \overline{CN} = \overline{AC}^2 \cdot \overline{BM} \cdot \overline{BN}.$$

15) **Inegalitățile triunghiului.** Cu segmentele a, b, c se poate construi un triunghi dacă și numai dacă $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$ sau $|b - c| < a < b + c$.

16) Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sînt concurente în centrul cercului înscris în triunghi.

17) Mediatoarele laturilor unui triunghi sînt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului.

18) Medianele unui triunghi sînt concurente în centrul de greutate al triunghiului.

19) Înălțimile unui triunghi sînt concurente în ortocentrul triunghiului.

20) Un unghi exterior al unui triunghi este egal cu suma celor două unghiuri ale triunghiului, care nu-i sînt alăturate.

21) Într-un triunghi cu două laturi neegale, laturii cu lungimea mai mare i se opune unghiul mai mare și reciproc.

22) Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralel cu a treia latură și este egal cu jumătate din aceasta.

23) Raportul ariilor a două triunghiri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare al acestora.

3) **Paralelogramul** (fig. 3.10) (a, b lungimile laturilor, d_1, d_2 = lungimile diagonalelor, φ = unghiul diagonalelor, h = lungimea înălțimii, S = aria)

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ (*teorema paralelogramului*)

$$S = ah = ab \sin B = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}.$$

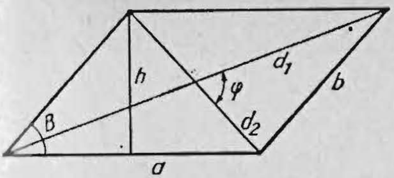


Fig. 3.10

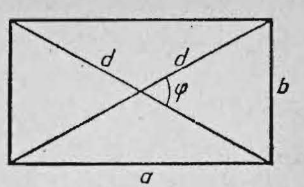


Fig. 3.11

4) **Dreptunghiul** (fig. 3.11) (a, b — lungimile laturilor; d — lungimea diagonalei; φ — unghiul diagonalelor; S = aria)

$$S = ab = \frac{d^2 \sin\varphi}{2}.$$

5) **Pătratul (fig. 3.12) (a — lungimea laturii; $D = 2R$ = lungimea diagonalei; R — lungimea razei cercului circumscris; S — aria)**

$$S = a^2 = \frac{D^2}{2} = 2R^2.$$

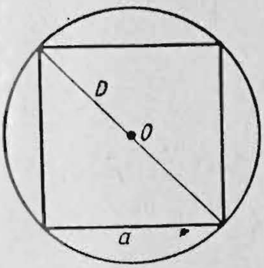


Fig. 3.12

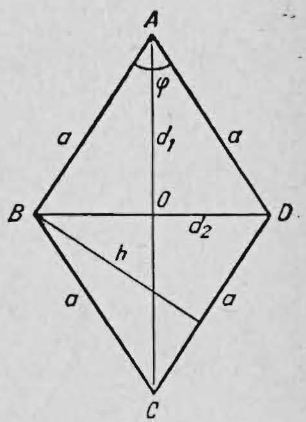


Fig. 3.13

6) **Rombul** (fig. 3.13) (a — lungimea laturii; d_1, d_2 — lungimile diagonalelor; φ — unghiul dintre laturile AB și AD; h — lungimea înălțimii; S — aria)

$$S = a^2 \sin\varphi = \frac{d_1 d_2}{2} = ah.$$

7) **Trapezul oarecare** (fig. 3.14) $a = \overline{AB}$ — lungimea bazei mari; $b = \overline{DC}$ — lungimea bazei mici; h — lungimea înălțimii; $\overline{GH}$ — linia mijlocie; d_1, d_2 — lungimile diagonalelor; φ — unghiul diagonalelor; O — punctul de intersecție a diagonalelor; S — aria

$$\overline{OE} = \overline{OF}; \quad \overline{GH} = (a + b)/2; \quad \overline{PQ} = (a - b)/2;$$

$$S = \frac{(a + b)\,h}{2} = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}; \quad d_1^2 + d_2^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{DC}.$$

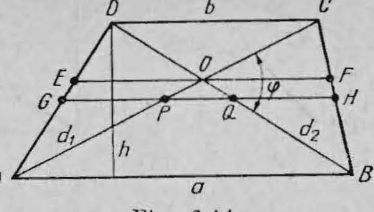


Fig. 3.14

8) **Patrulaterul inscriptibil** (fig. 3.15) (a, b, c, d — lungimile laturilor $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — unghiurile patrulaterului; p — semiperimetrul; d_1, d_2 — lungimile diagonalelor; S — aria)

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°; \quad \hat{B}_1 = \hat{A}_2 \text{ etc.}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 \cdot d_2 &= ac + bd \\ \frac{d_1}{d_2} &= \frac{ab + cd}{ad + bc} \end{aligned}\right\} \textit{Teoremele lui Ptolemeu}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$$

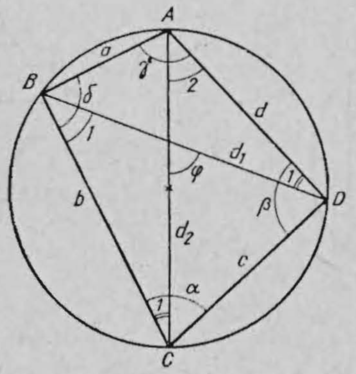


Fig. 3.15

9) **Poligonul oarecare** (fig. 3.16).

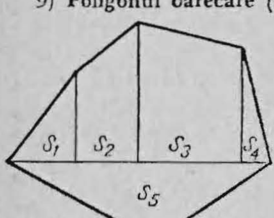


Fig. 3.16

Poligonul se descompune în triunghiuri și trapeze. Aria sa, S, este suma ariilor parțiale S_1, S_2, S_3, S_4, S_5;

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5;$$

ariile parțiale se calculează cu formulele cunoscute.

10) **Patrulaterul oarecare.** *Teorema lui Euler.* În orice patrulater suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor, plus de patru ori pătratul lungimii segmentului care unește mijloacele diagonalelor.

11) **Poligonul regulat cu n laturi inscris într-un cerc de rază** R (fig. 3.17)

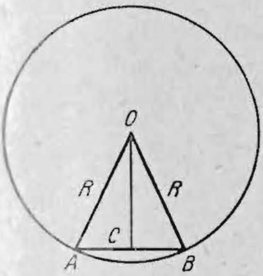


Fig. 3.17

$$\sphericalangle AOB = \frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Latura: $\overline{AB} = 2R\cos\frac{\pi}{n}$.

Aria: $S_n = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

12) **Suma unghiurilor unui poligon convex oarecare cu** n **laturi este** $U = (n-2)\cdot 180° = (n-2)\pi$.

3.1.3. *Cercul*

(R = lungimea razei cercului; L = lungimea cercului; l = lungimea arcului de α radiani; S = aria cercului).

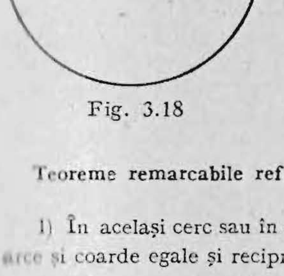


Fig. 3.18

$l = R\alpha$;

$L = 2\pi R$; $S = \pi R^2$

Aria sectorului $AOB = \frac{\alpha R^2}{2}$

Aria segmentului s = aria sectorului AOB – aria triunghiului AOB.

Aria unei coroane circulare $= \pi(R^2 - r^2)$.

Teoreme remarcabile referitoare la cerc.

1) În același cerc sau în cercuri egale, la unghiuri la centru egale corespund arce și coarde egale și reciproc.

2) Diametrul perpendicular pe o coardă a cercului imparte coarda și arcele corespunzătoare în cîte două părți egale și reciproc.

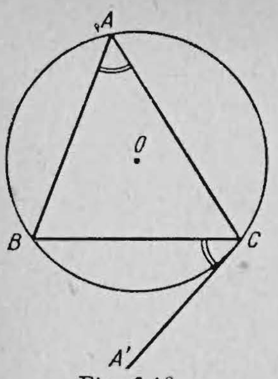


Fig. 3.19

3) În același cerc sau în cercuri egale, la arce egale corespund coarde egale și reciproc.

4) Arcele cuprinse între două coarde paralele sînt egale.

5) În același cerc sau în cercuri egale, coardele egale sînt egal depărtate de centru și reciproc.

6) Dacă ABC este un triunghi înscris într-un cerc și CA' este o semitangentă în C, atunci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA'$ și reciproc (fig. 3.19).

3.1.4. *Locuri geometrice fundamentale*

1) Locul geometric al punctelor egal depărtate de extremitățile unui segment de dreaptă este *mediatoarea* acelui segment.

2) Locul geometric al punctelor interioare unui unghi egal depărtate de laturile sale este *bisectoarea* acelui unghi.

3) Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este reprezentat de bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte.

4) Locul geometric al punctelor situate la o distanță dată de o dreaptă dată este reprezentat de două drepte paralele cu dreapta dată.

5) Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct dat este un *cerc*.

6) Locul geometric al punctelor din care un segment de dreaptă se vede sub un unghi dat este reprezentat de *două arce de cerc*, care au aceleași extremități ca și segmentul și sînt simetrice față de dreapta pe care este situat segmentul.

7) Locul geometric al punctelor din care un segment de dreaptă se vede sub un unghi drept este *cercul* ce are segmentul respectiv drept diametru.

8) Locul geometric al punctelor N, care împart într-un raport constant segmentele determinate de un punct fix A și de un punct mobil M de pe o dreaptă dată d este o paralelă la (d), care împarte distanța de la A la (d) în același raport.

9) Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două drepte paralele este constant este reprezentat de două drepte paralele cu dreptele date.

10) Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant ($\neq 1$) este un *cerc*.

11) Locul geometric al punctelor N, situate pe segmentele care unesc un punct fix A cu un punct M mobil pe o dreaptă (d) dată, astfel încît $\overline{AN} \cdot \overline{AM} = k$ este un *cerc*, care trece prin A și are centrul pe perpendiculara dusă din A pe dreapta (d).

12) Locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor lor la două puncte date este constantă este un *cerc* cu centrul în mijlocul segmentului cu extremitățile in cele două puncte.

13) Locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor distanțelor lor la două puncte fixe este constantă este o *dreaptă* perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte fixe.

14) Locul geometric al punctelor care au puteri egale față de două cercuri date este o *dreaptă*, anume *axa radicală* a celor două cercuri.

15) Locul geometric al punctelor de putere constantă față de un cerc dat este un *cerc* concentric cu cercul dat, un punct sau mulțimea vidă.

16) Locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix (numit focar) și de o dreaptă fixă (numită directoare) este o *parabolă*.

17) Locul geometric al punctelor ce au proprietatea că suma distanțelor lor la două puncte fixe (numite focare) este constantă este o *elipsă*.

18) Locul geometric al punctelor ce au proprietatea că diferența distanțelor lor la două puncte fixe (numite focare) este constantă este o *hiperbolă*.

Observare foarte importantă: Pentru a arăta că locul geometric al punctelor dintr-un plan π, care au anumită proprietate P este mulțimea de puncte L, trebuie să demonstrăm să au loc următoarele propoziții:

i) Orice punct al mulțimii L are proprietatea P;

ii) Orice punct din planul π care are proprietatea P aparține mulțimii L.

3.1.5. *Relații în poligoanele regulate înscrise într-un cerc*

Notații: R = raza cercului circumscris; L_n = latura poligonului regulat convex cu n laturi; a_n = apotema poligonului regulat convex cu n laturi; L'_n = latura poligonului stelat cu n laturi; a'_n = apotema poligonului stelat cu n laturi; P_n = perimetrul poligonului regulat convex cu n laturi; S_n = aria poligonului regulat convex cu n laturi

Relații:

$$L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 + R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

$$S_n = \frac{P_n a_n}{2}$$

3.1.6. *Folosirea tabelelor 3.1—3.3*

Tabela 3.1. Laturile, apotemele și ariile poligoanelor regulate în funcție de raza cercului circumscris

Tabela se folosește prin citire directă: pe prima linie sînt trecute poligoanele regulate, iar pe celelalte trei lungimile laturilor, ale apotemelor și ariile respective poligoane în funcție de R (raza cercului circumscris).

Tabela 3.2. Puteri, radicali, logaritmi naturali, valori reciproce, lungimi și arii de cercuri

Tabela se folosește prin simpla citire a valorilor căutate; prima coloană conține numerele de la 1 pînă la 1 500, iar celelalte coloane, diferite puteri, radicali, logaritmii naturali etc., ai acestor numere.

Tabela 3.3. Valori numerice importante (expresii în π, g și e)

Modul de utilizare este evident. În coloana a treia și a șasea sînt dați logaritmii zecimali ai numerelor din coloana a doua și a cincea.

Tabela 3.1 Laturile, apotemele și ariile poligoanelor regulate în funcție de raza R a cercului circumscris

Elementele \ Poligonul regulat	Triunghiul echilateral ($n=3$)	Pătratul ($n=4$)	Pentagonul convex ($n=5$)	Pentagonul stelat ($n=5$)	Hexagonul ($n=6$)
Latura (L_n sau L'_n)	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{10-2\sqrt{5}}/2$	$R\sqrt{10+2\sqrt{5}}/2$	R
Apotema (a_n sau a'_n)	$R/2$	$R\sqrt{2}/2$	$R(\sqrt{5}+1)/4$	$R(\sqrt{5}-1)/4$	$R\sqrt{3}/2$
Aria (S_n)	$3R^2\sqrt{3}/4$	$2R^2$	$\frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$		$3R^2\sqrt{3}/2$

Tabelul 3.1 *(continuare)*

Elementele \ Poligonul regulat	Octogonul convex ($n=8$)	Octogonul stelat ($n=8$)	Decagonul convex ($n=10$)	Decagonul stelat ($n=10$)	Dodecagonul convex ($n=12$)	Dodecagonul stelat ($n=12$)
Latura (L_n sau L'_n)	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$R\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$R(\sqrt{5}-1)/2$	$R(\sqrt{5}+1)/2$	$R(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$	$R(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$
Apotema (a_n sau a'_n)	$R\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$	$R\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4$	$R\sqrt{10-2\sqrt{5}}/4$	$R(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$R(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$
Aria (S_n)	$2\sqrt{2}R^2$		$\frac{5R^2}{4}\sqrt{10-\sqrt{2}}/5$		$3R^2$	

Tabela 3.3. Valori numerice importante
(expresii în π, g și e)

	n	ln n		n	ln n
π	3,1415 93	0,49715	$1:\pi$	0,3183 10	$\bar{1},50285$
2π	6,2831 85	0,79818	$1:2\pi$	0,1591 55	$\bar{1},20182$
3π	9,4247 78	0,97427	$1:3\pi$	0,1061 03	$\bar{1},02573$
4π	12,5663 71	1,09921	$1:4\pi$	0,0795 77	$\bar{2},90079$
$\pi:2$	1,5707 96	0,19612	$2:\pi$	0,6366 20	$\bar{1},80388$
$\pi:3$	1,0471 98	0,02003	$3:\pi$	0,9549 30	$\bar{1},97997$
$\pi:4$	0,7853 98	$\bar{1},89509$	$4:\pi$	1,2732 40	0,10491
$\pi:6$	0,5235 99	$\bar{1},71900$	$6:\pi$	1,9098 59	0,28100
$\pi:180\ (=1°)$	0,0174 53	$\bar{2},24188$	$180°:\pi$	57°,2957 80	1,75812
$\pi:10\,800\ (=1')$	0,0002 91	$\bar{4},46373$	$10\,800':\pi$	3437',74 68	3,53627
$\pi:648\,000\ (=1'')$	0,0000 05	$\bar{6},68557$	$648\,000'':\pi$	206264'',81	5,31443
π^2	9,8696 04	0,99430	$1:\pi^2$	0,1013 21	$\bar{1},00570$
$\sqrt{\pi}$	1,7724 54	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,5641 90	$\bar{1},75143$
$\sqrt{2\pi}$	2,5066 28	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,3989 42	$\bar{1},60091$
$\sqrt{\pi:2}$	1,2533 14	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,7978 85	$\bar{1},90194$
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645 92	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,6827 84	$\bar{1},83428$
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,6119 92	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,6203 50	$\bar{1},79264$
e	2,7182 82	0,43429	$1:e$	0,3678 79	$\bar{1},56571$
e^2	7,3890 56	0,86859	$1:e^2$	0,1353 35	$\bar{1},13141$
$\sqrt{e}$	1,6487 21	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,6065 31	$\bar{1},78285$
$\sqrt[3]{e}$	1,3956 12	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,7165 32	$\bar{1},85524$
$e^{\pi:2}$	4,8104 77	0,68219	$e^{-\pi:2}$	0,2078 80	$\bar{1},31781$
e^{π}	23,1406 93	1,36438	$e^{-\pi}$	0,0432 14	$\bar{2},63562$
$e^{2\pi}$	535,4916 56	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,0018 67	$\bar{3},27125$
C[1]	0,5772 16	$\bar{1},76134$	ln π	1,1447 30	0,05870
$M = \lg e$	0,4342 94	$\bar{1},63778$	$1:M = \ln 10$	2,3025 85	0,36222
g[2]	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\bar{1},00833$
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\bar{2},70730$
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi\sqrt{g}$	9,83974	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi\sqrt{2g}$	13,91536	1,14359

1) C este constanta lui Euler;

2) g este accelerația gravitației în m/s^2; aici este dată valoarea rotunjită a lui g la nivelul mării și latitudinea 45°—50°.

3.2. Geometria în spaţiu

3.2.1. *Teoreme remarcabile*

1) Dacă o dreaptă din spaţiu este paralelă cu o dreaptă conţinută într-un plan atunci dreapta din spaţiu este paralelă cu planul.

2) Dacă o dreaptă este paralelă cu două plane neparalele, atunci ea este paralelă cu dreapta lor de intersecţie.

3) Dacă două drepte sînt perpendiculare pe acelaşi plan, atunci ele sînt paralele.

4) Dacă un plan este perpendicular pe două plane, atunci el este perpendicular şi pe intersecţia lor.

5) Dacă o dreaptă e perpendiculară pe un plan, atunci orice plan care trece prin această dreaptă este perpendicular pe planul iniţial.

6) O dreaptă e perpendiculară pe un plan, dacă ea este perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan.

7) Dacă proiecţia unei oblice pe un plan e perpendiculară pe o dreaptă din plan, atunci şi oblica însăşi e perpendiculară pe acea dreaptă din plan.

8) Un plan intersectează două plane paralele după două drepte paralele.

9) Dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă conţinută în unul din plane e paralelă cu celălalt plan.

10) *Teorema (proiecţiei) unghiului drept*: Proiecţia unui unghi drept pe un plan paralel cu una din laturile lui este tot un unghi drept şi reciproc.

11) *Teorema celor trei perpendiculare*: Dacă dintr-un punct A ducem perpendiculara AB pe planul (p), $B \in P$, iar din piciorul B ducem perpendiculara BC pe o dreaptă (d) situată în planul (p), atunci AC este perpendiculară pe (d) (fig. 3.20).

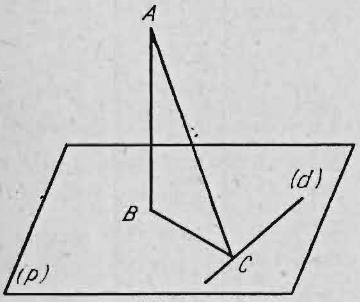


Fig. 3.20

Reciproca 1. Dacă AB este perpendiculară pe (p), $B \in p$, iar $d \subset p$ şi AC este perpendiculară pe d, cu $C \in d$, atunci BC este perpendiculară pe d.

Reciproca 2. Dacă BC este perpendiculară pe d, cu $B \in p$, $d \subset p$ şi $C \in d$, şi AC este perpendiculară pe d, iar AB este perpendiculară pe BC, atunci AB este perpendiculară pe planul p.

12) *Proiecţia unui segment de dreaptă pe un plan*: Proiecţia segmentului de dreaptă AB pe un plan (P) se obţine ducînd prin capetele A şi B ale segmentului perpendiculare pe planul (P), care îl intersectează în A' şi B'. Planul generat de dreptele paralele AA' şi BB' se numeşte *plan proiectant*. Se numeşte unghiul dreptei AB făcut cu planul (P) unghiul φ format de dreapta AB cu proiecţia ei $A'B'$ pe planul (P) şi avem relaţia (fig. 3.21).

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \varphi.$$

13) **Teorema proiecţiei ariei, unui poligon plan pe un plan.**

Dacă un poligon P din planul (π) are aria S şi dacă proiectăm ortogonal pe P pe un plan (π'), care face cu (π) unghiul ascuţit φ, atunci aria S' a lui P' este dată de

$$S' = S \cos \varphi.$$

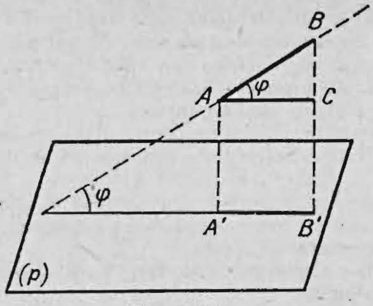


Fig. 3.21

14) Dacă proiecțiile poligonului plan P din planul (π), de arie S, pe trei plane (π'), (π''), (π''') perpendiculare două cîte două sînt P', P'' și P''' și au ariile S', S'', S''', atunci

$$S^2 = (S')^2 + (S'')^2 + (S''')^2.$$

15) *Teorema secțiunii.* Raportul ariilor a două secțiuni prin plane perpendiculare pe înălțimea unei piramide sau a unui con este egal cu pătratul raportului lungimilor înălțimilor corespunzătoare, iar raportul volumelor corpurilor cu acele secțiuni drept baze este egal cu cubul raportului lungimilor înălțimilor respective.

16) O prismă oblică este echivalentă cu o prismă dreaptă care are ca bază o secțiune dreaptă a prismei oblice, iar ca înălțime muchia laterală a prismei oblice.

3.2.2. *Locuri geometrice fundamentale*

1) Locul geometric al punctelor comune la două plane secante este *dreapta* de intersecție a planelor.

2) Locul geometric al punctelor egal depărtate de trei puncte necoliniare e o *dreaptă* perpendiculară pe planul determinat de cele trei puncte, în centrul cercului circumscris triunghiului format de ele.

3) Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date este un *plan perpendicular* pe mijlocul segmentului determinat de cele două puncte.

4) Locul geometric al punctelor egal depărtate de fețele unui diedru este *semiplanul bisector* al diedrului.

5) Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte concurente în O este reprezentat de cele două plane care trec prin perpendiculara pe planul celor două drepte în O și prin cele două bisectoare ale unghiurilor formate de cele două drepte concurente.

6) Locul geometric al punctelor egal depărtate de un plan este format din două *plane* paralele cu planul dat.

7) Locul geometric al mijloacelor segmentelor paralele cu o direcție fixă, cuprinse între două plane fixe, paralele, este *planul paralel* cu planele date și egal depărtat de ele.

8) Locul geometric al dreptelor paralele cu un plan, duse printr-un punct exterior, e un *plan* care trece prin acest punct și e paralel cu planul dat.

9) Locul geometric al perpendicularelor duse dintr-un punct pe o dreaptă dată este un plan, perpendicular pe acea dreaptă.

10) Locul geometric al dreptelor mobile, care se sprijină pe o dreaptă fixă și care trec printr-un punct fix exterior dreptei fixe este un *plan*.

11) Locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct fix și sînt paralele cu un plan fix este un *plan* paralel cu acest plan.

12) Locul geometric al punctelor din spațiu pentru care diferența pătratelor distanțelor lor la două puncte fixe este constantă e un *plan* perpendicular pe dreapta care unește cele două puncte.

13) Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor lor la două plane paralele este constant este reprezentat de două *plane* paralele cu planele date.

14) Locul geometric al punctelor din planul (π), din care un segment de dreaptă dat se vede sub un unghi drept este un *cerc* sau un *punct*, dacă în (π) există puncte cu proprietatea cerută.

15) Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix, numit centru, este o sferă.

16) Locul geometric al tangentelor unei sfere, paralele cu o dreaptă dată, e o suprafață cilindrică de rotație, circumscrisă sferei în lungul unui cerc mare.

17) Locul geometric al tangentelor duse unei sfere printr-un punct exterior e o suprafață conică de rotație, circumscrisă sferei în lungul unui cerc.

3.2.3. *Ariile și volumele principalelor poliedre. Razele sferelor înscrise sau circumscrise acestora*

Notații generale. a, b, c — lungimile laturilor, muchiilor, dimensiunilor poliedrelor; d = lungimea diagonalei; P, p = perimetrele bazelor; A = apotema; S, s = ariile bazelor; S_l = aria laterală; S_t = aria totală; I = înălțimea; V = volumul; r = lungimea razei sferei înscrise; R = lungimea razei sferei circumscrise, D = lungimea diametrului sferei circumscrise.

1) *Cubul* (fig. 3.22)

$$S_l = 4a^2; \qquad d = a\sqrt{3};$$

$$S_t = 6a^2; \qquad r = a/2;$$

$$V = a^3; \qquad R = d/2;$$

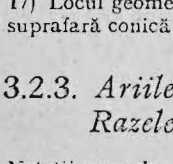


Fig. 3.22

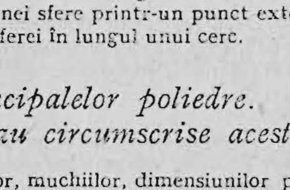


Fig. 3.23

2) *Paralelipipedul dreptunghic* (fig. 3.23)

$$S_t = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc; \; d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$R = d/2; \; D = d$$

3) *Paralelipipedul oarecare* (fig. 3.24)

S_l = Suma ariilor paralelogramelor care formează suprafața laterală a paralelipipedului.

$S_t = S_l + 2S$

$V = SI$

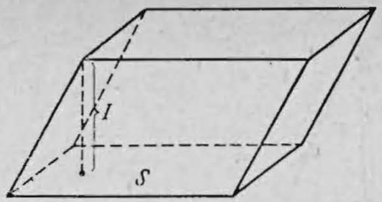
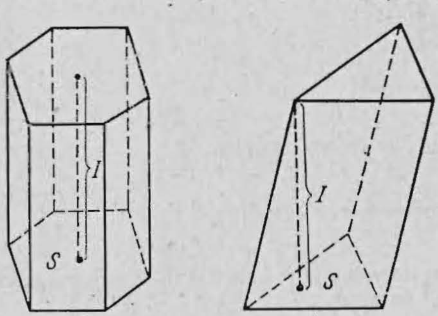


Fig. 3.24

4) *Prisma dreaptă sau oblică* (fig. 3.25)

$S_l = P \cdot I$ (fig. 3.25, *a*); $S_t = S_l + 2S$

$V = SI$ = aria secțiunii drepte · lungimea muchiei (fig. 3.25, *a*, *b*)



a b

Fig. 3.25

5) *Piramida regulată* (fig. 3.26)

$$S_l = \frac{PA}{2};\quad S_t = S_l + S;\quad V = \frac{SI}{3};$$

$$r = 3V/(S_l + S)$$

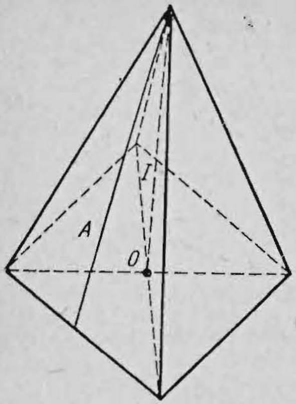
Formula care dă volumul se aplică și în cazul unei piramide oarecare.

6) *Tetraedrul regulat* (fig. 3.27)

$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}},\quad S_l = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4};$$

$$S_t = a^2\sqrt{3};\quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};\quad r_{sf.\ inscr.} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$R_{sf.\ circ} = \frac{3a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$



$\frac{SI}{3}$

Fig. 3.26

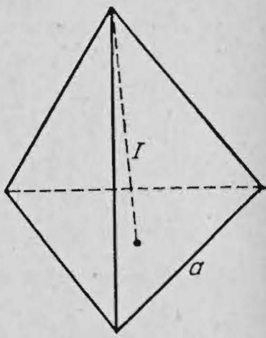


Fig. 3.27

7) *Trunchiul de piramidă* (fig. 3.28)

$$S_l = \frac{P+p}{2}A\,;\ S_t = S_l + S + s\,;\ V = \frac{I}{3}(S + s + \sqrt{Ss})$$

Formula care dă volumul se aplică şi în cazul unui trunchi de piramidă, cu bazele paralele, oarecare.

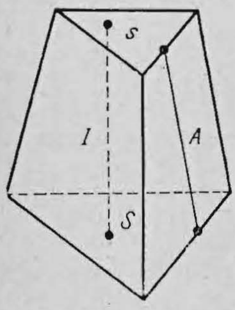


Fig. 3.28

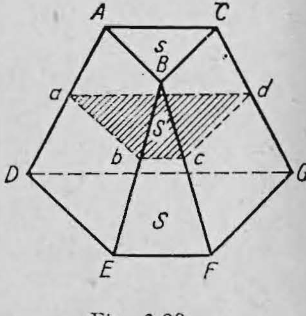


Fig. 3.29

8) *Prismatoidul** (fig. 3.29)

s = aria ABC; S = aria $DEFG$; S' = aria $abcd$; I = lungimea înălţimii; a, b, c, d mijloacele muchiilor; $V = \frac{I}{6}(S + 4S' + s)$ (*formula lui Simson*).

* Prismatoidul este un poliedru care are ca baze două poligoane aşezate în plane paralele, iar feţele laterale sînt trapeze sau triunghiuri.

3.2.4. *Ariile și volumele principalelor corpuri rotunde*

Notații generale. R, R_1, r = lungimile razelor; D, d = lungimi ale diametrelor; a, b, c = lungimile semiaxelor; G = lungimea generatoarei; I = lungimea înălțimii; S = aria; S_l = aria laterală; S_t = aria totală; V = volumul.

1) *Cilindrul circular drept* (fig. 3.30)

$$S_l = 2\pi RG;\quad S_t = 2\pi R(G + R);\quad V = \pi R^2 I$$

$2\pi RG + \pi R^2$

$2\pi R(G+R)$

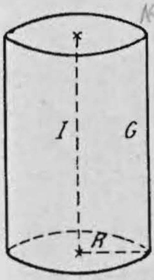


Fig. 3.30

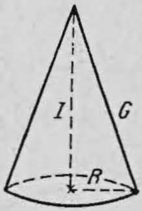


Fig. 3.31

$Al = \pi R G$

2) *Conul circular drept* (fig. 3.31)

$$\boxed{S_l} = \pi RG;\quad S_t = \pi R(G + R);\quad V = \frac{\pi R^2 I}{3};$$

$$r_{sf.\,inscr.} = R\sqrt{\frac{G - R}{G + R}};\quad R_{sf.\,circ.} = \frac{G^2}{2\sqrt{G^2 - R^2}}.$$

3) *Trunchiul de con* (fig. 3.32)

$$S_l = \pi G(R + r);\quad S_t = S_l + \pi(R^2 + r^2);\quad V = \frac{\pi I}{3}(R^2 + r^2 + Rr);$$

$$d = \sqrt{G^2 + 4Rr}\ \text{(diagonala)}\quad R_{sf.\,circ.} = \frac{Gd}{2I}.$$

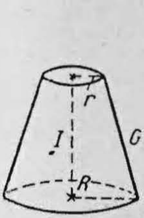


Fig. 3.32

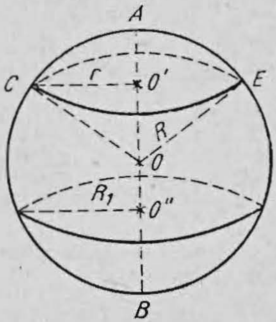


Fig. 3.33

4) *Sfera* (fig. 3.33)

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2;\ D = 2R;\ V = \frac{4\pi R^3}{3} = \pi \frac{D^3}{6}.$$

5) *Zona sferică* (fig. 3.33)

$$S = 2\pi RI,\ I = \overline{O'O''};\ V = \frac{\pi I}{6}(3r^2 + 3R_1^2 + I^2)$$

6) *Calota sferică* (fig. 3.33)

$$S = 2\pi RI,\ I = \overline{O'A};\ V = \frac{\pi I^2}{3}(3R - I) = \frac{\pi I}{6}(I^2 + 3r^2).$$

7) *Sectorul sferic* (de primul tip (fig. 3.34, *a*), de al doilea tip (fig. 3.34, *b*)):

$$S = 2\pi RI + \pi Rr \text{ (fig. 3.34, } a\text{)};\ V = \frac{2\pi R^2 I}{3} \text{ (fig. 3.34, } a, b\text{)}$$

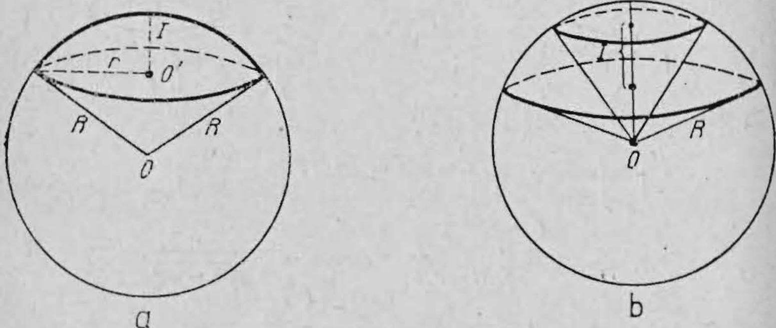


Fig. 3.34

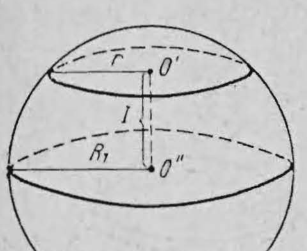


Fig. 3.35

8) *Segmentul sferic cu două baze* (fig. 3.35) (porțiunea de sferă cuprinsă între două plane paralele)

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{I}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}(\pi R_1^2 I + \pi r^2 I).$$

9) Segmentul sferic cu **o** bază (fig. 3.36) (porțiunea de sferă mărginită de o calotă și un disc):

$$V = \frac{\pi I^2}{3}(3R - I).$$

10) **Elipsoidul:** (fig. 3.37)

$$V = \frac{4\pi abc}{3}.$$

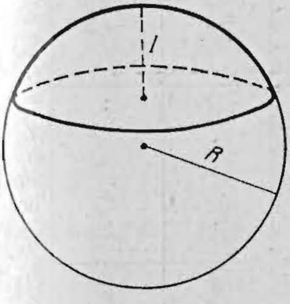


Fig. 3.36

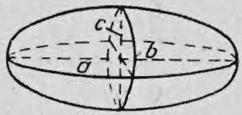


Fig. 3.37

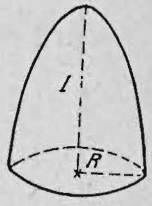


Fig. 3.38

11) **Paraboloidul de rotație:** (fig. 3.38)

$$V = \frac{\pi R^2 l}{2}.$$

12) **Torul (inel cilindric)** (fig. 3.39)

$S = 4\pi^2 Rr$, r = raza cercului generator; $V = 2\pi^2 Rr^2 \cdot$ $d = 2r$, $D = 2R$.

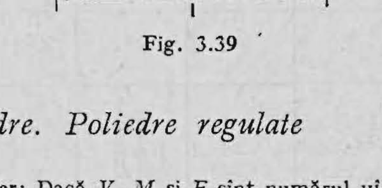


Fig. 3.39

3.2.5. *Poliedre. Poliedre regulate*

Teorema lui Euler: Dacă V, M și F sînt numărul vîrfurilor, al muchiilor și al fețelor unui poliedru convex, atunci

$$V - M + F = 2.$$

Poliedrele regulate sînt: tetraedrul, hexaedrul sau cubul, octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul.

Principalele caracteristici ale acestor poliedre, printre care ariile laterale și volumele lor, în funcție de lungimea a a muchei, sînt date mai jos·

Poliedrul regulat	Felul fețelor	Numărul fețelor	Numărul vîrfurilor	Numărul muchiilor	Aria	Volumul	Raza sferei circumscrise, R	Raza sferei inscrise, r
1 Tetraedrul	Triunghiuri echilaterale	4	4	6	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$
2 Cubul	Pătrate	6	8	12	$6a^2$	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
3 Octaedrul	Triunghiuri echilaterale	8	6	12	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
4 Dodecaedrul	Pentagoane regulate	12	20	30	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a\sqrt{10}}{20}(25+11\sqrt{5})$
5 Icosaedrul	Triunghiuri echilaterale	20	12	30	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$

Dacă R este raza sferei circumscrise, r raza sferei înscrise şi ρ raza cercului circumscris unei feţe, atunci avem (în cazul icosaedrului şi dodecaedrului):

$$r = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \cdot R; \quad \rho = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} \cdot R.$$

3.2.6. *Cîteva volume uzuale*

1. **Cotitul butoaielor:**

Notaţii generale. R = raza secţiunii butoiului prin vrană; D = diametrul secţiunii butoiului prin vrană; r = raza mijlocie a fundurilor; d = diametrul mijlociu al fundurilor; I = înălţimea butoiului.

Capacitatea butoaielor se calculează cu formulele aproximative.

a) $V = \pi \left(\frac{2D+d}{6}\right)^2 \cdot I;$

b) $V = 0{,}8\ IDd;$

c) $V = \pi I \left(R - \frac{3(R-r)}{8}\right)^2$ *(formula lui Dez)*;

d) $V = \frac{\pi I}{3}(2R^2 + r^2)$ *(formula lui Oughtud)*.

2. **Cubajul trunchiurilor de arbori.** a) Trunchiul de arbore cilindric

C = lungimea cercului de bază; I = înălţimea trunchiului; V = volumul.

$$V = \frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2 I}{\pi}$$

b) Trunchiul de arbore care are forma unui trunchi de con

C = lungimea cercului măsurată pe arbore la jumătatea lui; I = înălţimea arborelui; V = volumul.

$$V = \frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2 I}{\pi}.$$

3. **Calculul debitului de apă al unui rîu.** În construcţiile de poduri şi hidrocentrale e necesar să cunoaştem debitul volumic de apă al unui rîu, adică volumul de apă pe care îl dă rîul într-un minut.

Acest volum se asimilează cu cel al unei prisme avînd ca bază o secţiune făcută în rîu, printr-un plan normal pe direcţia sa, şi ca înălţime distanţa parcursă de apă într-un minut.

Dacă secţiunea are aspectul din fig. 3.40, se procedează astfel. De a lungul orizontalei AB, perpendicular pe cursul apei, în punctele C, D, E, ... se fac sondaje şi se determină adîncimea rîului.

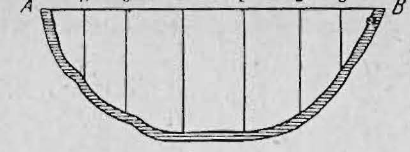


Fig. 3.40

Se calculează aria S a secțiunii, adunînd ariile triunghiurilor și trapezelor astfel formate. Pentru a afla înălțimea I a prismei, se determină ce distanță parcurge o bucată de lemn plutitor într-un minut. Acum debitul volumic va fi $D = SI$.

Observare: Problemele de geometrie se împart, în principal, în probleme *de calcul* (a unor elemente ale unor figuri geometrice), *de demonstrație* (a unor proprietăți ale unor figuri geometrice), *de maxim și minim*, de *locuri geometrice* și *de construcție*.

3.2.7. *Folosirea tabelei 3.4*

Tabela 3.4. Factorul corespunzător raportului h/d pentru calculul conținutului de lichid în cilindri orizontali

Volumul cilindrilor (cisternelor), care nu sînt plini cu lichid, se calculează cu ajutorul ariei segmentului de cerc udat de lichid și al lungimii cilindrului. Practic, însă, pentru cilindrii orizontali se consideră că lichidul cu nivelul h are volumul egal cu produsul dintre volumul total al cilindrului și factorul corespunzător raportului h/d, în care d este diametrul cilindrului. În tabelă este dată valoarea acestui factor în funcție de valoarea raportului h/d.

Tabela 3.4. Factorul corespunzător raportului h/d pentru calculul conținutului de lichid în cilindri orizontali

$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.
0,01	0,0017	0,21	0,1527	0,41	0,3860	0,61	0,6389	0,81	0,8677
0,02	0,0048	0,22	0,1631	0,42	0,3986	0,62	0,6513	0,82	0,8776
0,03	0,0087	0,23	0,1738	0,43	0,4112	0,63	0,6636	0,83	0,8873
0,04	0,0134	0,24	0,1845	0,44	0,4238	0,64	0,6759	0,84	0,8967
0,05	0,0187	0,25	0,1955	0,45	0,4364	0,65	0,6881	0,85	0,9059
0,06	0,0245	0,26	0,2066	0,46	0,4491	0,66	0,7002	0,86	0,9140
0,07	0,0308	0,27	0,2178	0,47	0,4618	0,67	0,7122	0,87	0,9236
0,08	0,0375	0,28	0,2292	0,48	0,4745	0,68	0,7241	0,88	0,9320

$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.
0,09	0,0446	0,29	0,2407	0,49	0,4873	0,69	0,7360	0,89	0,9402
0,10	0,0520	0,30	0,2525	0,50	0,5000	0,70	0,7477	0,90	0,9480
0,11	0,0598	0,31	0,2640	0,51	0,5127	0,71	0,7593	0,91	0,9554
0,12	0,0689	0,32	0,2759	0,52	0,5255	0,72	0,7708	0,92	0,9625
0,13	0,0764	0,33	0,2878	0,53	0,5382	0,73	0,7822	0,93	0,9692
0,14	0,0851	0,34	0,2998	0,54	0,5509	0,74	0,7934	0,94	0,9755
0,15	0,0941	0,35	0,3119	0,55	0,5636	0,75	0,8045	0,95	0,9813
0,16	0,1033	0,36	0,3241	0,56	0,5762	0,76	0,8155	0,96	0,9866
0,17	0,1127	0,37	0,3364	0,57	0,5888	0,77	0,8262	0,97	0,9913
0,18	0,1224	0,38	0,6487	0,58	0,6014	0,78	0,8369	0,98	0,9952
0,19	0,1323	0,39	0,3611	0,59	0,6140	0,79	0,8473	0,99	0,9983
0,20	0,1424	0,40	0,3735	0,60	0,6265	0,80	0,8576	1,00	1,0000

3.3. Geometrie analitică

3.3.1. *Vectori*

1) *Notații*: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{v}(x, y, z)$, $\vec{v}_1(a_1, b_1, c_1)$.

2) *Lungimea unui vector*: $|\overrightarrow{AB}|$; AB; $|\vec{a}|$; a; $|\vec{v}|$; v; $|\vec{v}_1|$; v_1.

3) *Adunarea vectorilor*: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (*regula triunghiului*, fig. 3.41) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (*regula paralelogramului*, fig. 3.42)

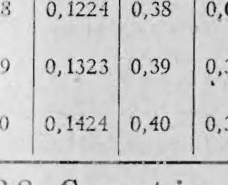


Fig. 3.41

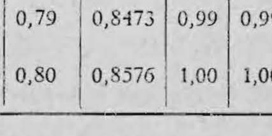


Fig. 3.42

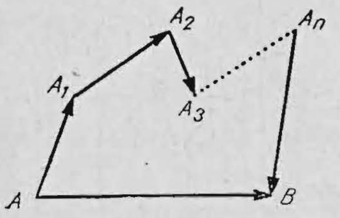


Fig. 3.43

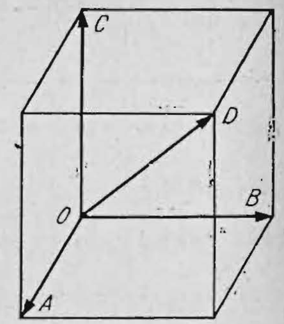


Fig. 3.44

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB} = \overrightarrow{AB} \text{ (\textit{regula poligonului}, fig. 3.43)}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} \text{ (\textit{regula paralelipipedului}, fig. 3.44)}$$

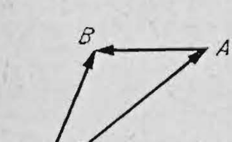


Fig. 3.45

4) *Scăderea vectorilor*: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} \text{ (fig. 3.45)}$$

5) *Criteriul de coliniaritate a doi vectori* $\vec{a}$ și $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \lambda\vec{b},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \lambda \in \mathbf{R}^*$$

6) *Proprietățile adunării vectorilor și ale înmulțirii cu scalari* (din **R** sau **C** a vectorilor 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

4) $(\lambda\mu)\,\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

5) $(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

6) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

7) $0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

7) *Forma hipercomplexă a vectorilor*:

1) Fie $A\,(a_1, b_1, c_1)$ și $B\,(a_2, b_2, c_2)$ două puncte date: atunci

$\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1)\,\vec{i} + (b_2 - b_1)\,\vec{j} + (c_2 - c_1)\,\vec{k}$, respectiv

$$AB = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

2) Fie $\vec{a} = (a_1, b_1, c_1)$ și $\vec{b} = (a_2, b_2, c_2)$ doi vectori dați; atunci

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm a_2,\ b_1 \pm b_2,\ c_1 \pm c_2)$; $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1,\ \lambda b_1,\ \lambda c_1)$

$a = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$ ·(lungimea lui $\vec{a}$)

8) *Versorul vectorului* $\vec{a}(a_1, b_1, c_1)$.

$$\frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}\vec{i} + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}\vec{j} + \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}\vec{k}$$

9) *Produsul scalar a doi vectori* $\vec{a}, \vec{b}$:

1) $\vec{a}\vec{b} = ab\cos\varphi,\ \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $\vec{a}\vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

3) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{ab}$

Proprietăți: 1. $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$ implică $\vec{a}\vec{b} = 0$.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ și $a \neq 0,\ b \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

4. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\vec{b})$

5. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

10) *Produsul vectorial a doi vectori* $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\varphi,\ \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, b)$

2) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ și $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ constituie un triedru drept

Proprietăți: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ și $a \neq 0,\ b \neq 0 \Leftrightarrow a \parallel \vec{b}$.

2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

3) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times b)$

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

5) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

6) Fie $\vec{a} = (a_1, b_1, c_1)$ și $\vec{b} = (a_2, b_2, c_2)$ doi vectori dați; atunci

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right),$$

respectiv

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

11) *Dublul produs vectorial*: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$

12) *Identități vectoriale.*

1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$

2) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

3) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$

13) *Produsul mixt a trei vectori.* $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$

Proprietăți: 1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sînt trei vectori coplanari.

2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$

3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$

4) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c}) = \lambda\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

5) Fie $\vec{a} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{b} = (a_2, b_2, c_2)$ și $\vec{c} = (a_3, b_3, c_3)$ trei vectori dați, atunci

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

14) *Proiecția unui vector* $\vec{a}(a_1, b_1, c_1)$ *pe o axă* l *de versor* $\vec{s}$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$: $\text{Pr}_l\vec{a} = \vec{a}\vec{s}$.

Proprietăți: 1. $\text{Pr}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_l\vec{a} + \text{Pr}_l\vec{b}$.

2. $\text{Pr}_l\, \lambda\vec{a} = \lambda\text{Pr}_l\, \vec{a}$.

3.3.2. *Transformări geometrice în plan*

1. *Translația de vector* $\vec{v}$ (a, b).

Definiție. Transformarea geometrică a planului care asociază fiecărui punct P al acestuia, de vector de poziție $\overrightarrow{OP}$, punctul P_1, de vector de poziție $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} + \vec{v}$ (figura 3.46)

Notație. T, $T_{\vec{v}}$.

Proprietăți.

1. O translație este definită dacă se dau un punct P și imaginea sa P_1 prin această transformare.

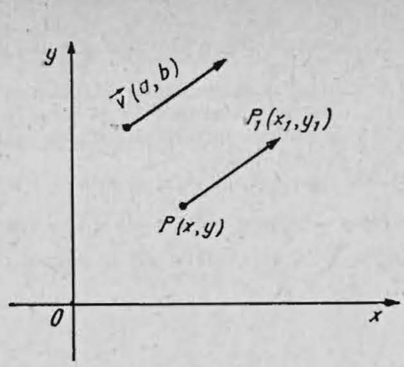


Fig. 3.46

2. Translația conservă distanțele dintre punctele planului (este o izometrie*) și transformă o dreaptă dată în una paralelă cu aceasta, distinctă de ea sau nu.
3. Translația conservă coliniaritatea punctelor planului și unghiurile.
4. Translația transformă un poligon într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un cerc egal cu cel dat.
5. Dacă $P_1(x_1, y_1)$ este imaginea lui $P(x,y)$ prin translația T, atunci avem

$$x_1 = x + a,\ y_1 = y + b^{**}$$

Alte proprietăți. 1. $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$

2. $T_{\vec{a}} \circ T_{-\vec{a}} = T_{-\vec{a}} \circ T_{\vec{a}} = E^{***}$

3. $T_{\vec{0}} = E.$

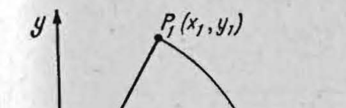


Fig. 3.47

2. *Rotația față de un punct (centru) O cu unghiul* α

Definiție: Transformarea geometrică a planului, care asociază fiecărui punct P al acestuia, punctul P_1 definit de proprietățile $\sphericalangle(OP, OP_1) = \alpha$ și $\overline{OP_1} = \overline{OP}$ (figura 3.47)

Notație: R_O^{α}.

Proprietăți.

1. O rotație este definită dacă se dau: sau punctul O împreună cu un punct P și cu imaginea sa P_1; sau două puncte (distincte) P și Q împreună cu imaginile lor P_1 și Q_1.

---

* În planul p, se numește izometrie o aplicație $I: p \to p$, care are proprietatea $d(I(A), I(B)) = d(A, B)$, $\forall A, B \in p$.

** Ecuațiile translației de vector $\vec{v}(a, b, c)$ în spațiu sînt

$$x_1 = x + a,\ y_1 = y + b,\ z_1 = z + c.$$

*** Cu E am notat transformarea identică a planului.

2. Rotația conservă distanțele dintre punctele planului (este o izometrie) și transformă dreptele în drepte.

3) Rotația conservă coliniaritatea punctelor planului și unghiurile.

4) Rotația invariază cercurile cu centrele în punctul O.

5) Rotația transformă un poligon într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un cerc egal cu acel dat.

6) Dacă $P_1(x_1, y_1)$ este imaginea lui $P(x, y)$ prin rotația R_O^α, atunci avem

$$x_1 = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \quad y_1 = x \sin\alpha - y \cos\alpha$$

7) Dacă $\underbrace{R_O^\alpha \circ \ldots \circ R_O^\alpha}_{\text{de } n \text{ ori}} = E$, atunci rotația R_O^α se spune că are *ordinul* n.

Alte proprietăți.

1. $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, $R_O^{\alpha+2k\pi} = R_O^\alpha$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^{\alpha+\beta}$.
3. $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $R_O^\alpha \circ R_O^{-\alpha} = E$.
4. $R_O^\pi = S_O$.*

3. *Simetria față de o dreaptă d a planului*

Definiție. Transformarea geometrică a planului care asociază fiecărui punct P al acestuia punctul P_1 definit de proprietățile: $PP_1 \perp d$ și $\overline{PO'} = \overline{O'P_1}$ (fig. 3.48)

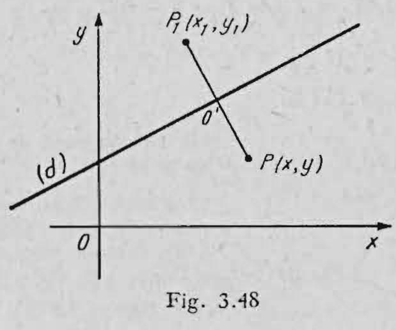


Fig. 3.48

Notație. S_d.

Proprietăți. 1) Simetria conservă distanțele dintre punctele planului (este o izometrie) și transformă dreptele în drepte.

2. Simetria invariază dreptele perpemdiculare pe dreapta d și cercurile cu centrele pe axa de simetrie d.

3. Simetria păstrează coliniaritatea punctelor din plan și unghiurile, dar orientarea figurilor o inversează.

4. Simetria transformă un poligon dat într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un alt cerc egal cu cel dat.

5. Dacă $P_1(x_1, y_1)$ este imaginea lui $P(x, y)$ prin simetria S_d, unde d este prima bisectoare, atunci avem

$$x_1 = y, \qquad y_1 = x.$$

---

* A se vedea „simetria față de un punct O din spațiu", pag. 191.

6. Asemănător, dacă d este axa Ox, atunci avem

$$x_1 = x, \quad y_1 = -y.$$

7. Asemănător, dacă d este axa Oy, atunci avem

$$x_1 = -x, \quad y_1 = y.$$

Alte proprietăți.

1. Dacă $d \perp d'$ și $O = d \cap d'$, atunci.

$$S_d \circ S_{d'} = S_{d'} \circ S_d = S_O.$$

2. Dacă $d \parallel d'$, atunci

$$S_d \circ S_{d'} = T \text{ (translație)}.$$

4. *Omotetia de centru sau pol O si raport* $k \in \mathbf{R}$.

Definiție: Transformarea geometrică a planului care asociază fiecărui punct P al acestuia punctul P_1 definit de proprietatea $\overline{OP_1} = k\overline{OP}$ (figura 3.49).

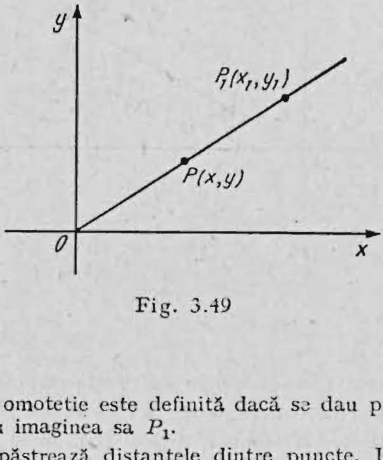


Fig. 3.49

Notație: H_O^k.

Proprietăți. 1. O omotetie este definită dacă se dau punctul O împreună cu un punct P și cu imaginea sa P_1.

2. Omotetia nu păstrează distanțele dintre puncte. Ea le amplifică cu raportul omotetiei în modul, $|k|$.

3. Omotetia invariază dreptele ce trec prin pol.

4. Omotetia păstrează unghiul dreptelor.

5. Omotetia transformă o dreaptă dată într-o dreaptă paralelă cu cea dată, un poligon dat într-un poligon asemenea cu cel dat și cercurile în cercuri.

6. Dacă $P_1(x_1, y_1)$ este imaginea lui $P(x, y)$ prin omotetia H_O^k, atunci avem

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky^*.$$

---

* Ecuațiile omotetiei în spațiu sînt

$$x_1 = kx, \; y_1 = ky, \; z_1 = kz.$$

Alte proprietăți.

1. $H_O^1 = E$

2. $H_O^{-1} = S_O$

3. $H^k_{O_1} \circ H^l_{O_2} = T$, dacă $lk = 1$

4. $H^k_{O_1} \circ H^l_{O_2} = H^{kl}_{O_3}$, dacă $lk \neq 1$

5. $H_O^{\frac{1}{k}}(P_1) = P$.

5. *Inversiunea de pol O și putere* $k \in \mathbf{R}$

Definiție: Transformarea geometrică a planului care asociază fiecărui punct P al acestuia punctul P_1, coliniar cu O și P, definit de proprietatea (fig. 3.50)

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP_1} = k^2.$$

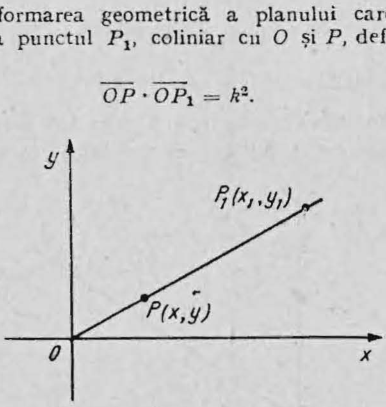


Fig. 50

Notație: I_O^k.

Proprietăți.

1. Inversiunea nu păstrează distanțele dintre puncte.

2. Inversiunea invariază dreptele ce trec prin pol.

3. Inversiunea păstrează unghiul liniilor, dar nu și orientarea figurilor.

4. Inversiunea transformă o dreaptă ce nu trece prin pol într-un cerc ce trece prin pol și cercurile ce nu trec prin pol în cercuri ce nu trec nici ele prin pol.

5. Dacă $P_1(x_1, y_1)$ este imaginea lui $P(x, y)$ prin inversiunea I_O^k, atunci avem

$$x_1 = \frac{k^2x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{k^2y}{x^2 + y^2} \text{ *)}$$

*) Ecuațiile inversiunii în spațiu sînt:

$$x_1 = \frac{k^2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y_1 = \frac{k^2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z_1 = \frac{k^2z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

3.3.3. *Transformări geometrice în spațiu*

6. *Simetria față de un punct O din spațiu*

Definiție: Transformarea geometrică a spațiului care asociază fiecărui punct P al acestuia punctul P_1 definit de proprietățile: P_1 se găsește pe dreapta OP și $\overrightarrow{OP_1} = -\overrightarrow{OP}$.

Notație: S_O.

Proprietăți: 1. Simetria conservă distanțele dintre puncte (este o izometrie), transformă o dreaptă dată într-o dreaptă paralelă cu cea dată distinctă sau nu de aceasta, un plan într-un plan paralel cu cel dat distinct sau nu de acesta și un unghi într-un unghi egal cu cel dat.

2. Simetria păstrează coliniaritatea punctelor.

3. Simetria transformă un poligon dat într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un alt cerc egal cu cel dat.

4. Simetria invariază dreptele și planele ce trec prin O.

5. Dacă $P_1(x_1, y_1, z_1)$ este imaginea lui $P(x, y, z)$ prin simetria S_O, atunci avem

$$x_1 = -x,\ y_1 = -y,\ z_1 = -z^{*)}$$

Alte proprietăți: 1. $S_{O_1} \circ S_{O_2} = 2\overrightarrow{O_2O_1}$ (translație)

2. $S_O \circ S_O = E$.

7. *Simetria față de un plan p în spațiu*

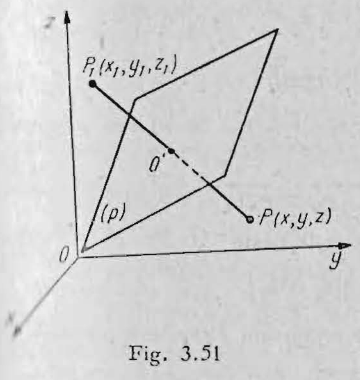


Fig. 3.51

Definiție: Transformarea geometrică a spațiului care asociază oricărui punct P al acestuia un punct P_1 definit de proprietățile: $PP_1 \perp p$ și $\overline{O'P_1} = \overline{O'P}$ (fig. 3.51).

Notație: S_p

Proprietăți:

1. Simetria conservă distanțele dintre punctele spațiului (este o izometrie) și unghiul dreptelor, al planelor și al dreptelor cu planele.

2. Simetria invariază punctele planului p, dreptele conținute în p și planele perpendiculare pe p.

3. Simetria transformă o dreaptă într-o altă dreaptă și un plan într-un alt plan.

4. Simetria transformă o dreaptă paralelă cu p și un plan paralel cu p într-o dreaptă de asemenea paralelă cu p și într-un plan de asemenea paralel cu p.

5. Simetria păstrează coliniaritatea punctelor.

---

*) Ecuațiile simetriei în plan sînt:

$$x_1 = -x,\ y_1 = -y.$$

6. Simetria transformă un poligon dat într-un alt poligon egal cu primul şi un cerc dat într-un alt cerc egal cu cel dat.

Alte proprietăţi: Dacă $p_1 \| p_2$, atunci $S_{p_1} \circ S_{p_2} = T$ (translaţie)

8. *Rotaţia faţă de o axă z'z cu unghiul* α

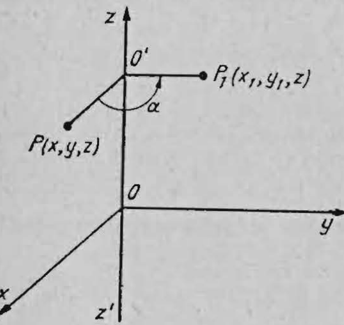


Fig. 3.52

Definiţie: Transformarea geometrică a spaţiului, care asociază fiecărui punct P al acestuia punctul P_1 definit de proprietăţile: $\sphericalangle (O'P, O'P_1) = \alpha$, $\overline{O'P} = \overline{O'P_1}$ şi punctele O', P, P_1 se găsesc într-un acelaşi plan perpendicular pe axa $z'z$ în O' (figura 3.52).

Notaţie: $R^{\alpha}_{z'z}$.

Proprietăţi. 1. O rotaţie este definită dacă se dau două perechi de puncte corespondente: punctele P şi Q şi imaginile lor P_1 şi Q_1.

2. Rotaţia conservă distanţele dintre punctele spaţiului (este o izometrie) şi transformă dreptele în drepte.

3. Rotaţia conservă coplanaritatea punctelor din spaţiu şi unghiurile.

4. Rotaţia transformă un poligon într-un poligon egal şi un cerc într-un cerc egal cu cel dat.

5. Dacă $P_1(x_1, y_1, z_1)$ este imaginea lui $P(x, y, z)$ prin rotaţia $R_{z'z}$, atunci avem

$$x_1 = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \quad y_1 = x \sin\alpha + y \cos\alpha, \quad z_1 = z.$$

3.3.4. *Punctul şi dreapta. Planul*

1° *Teorema lui Michel Charles*: Dacă $P_i(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt n puncte pe o dreaptă, atunci

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = \vec{0}$$

2° Distanţa d dintre două puncte $P_1(x_1)$ şi $P_2(x_2)$ este

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

3° Abscisa x a punctului P care imparte segmentul $\overline{P_1P_2}$ în raportul k,

$$\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{PP_2},$$

este

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}.$$

Pentru $k = 1$, găsim abscisa mijlocului $P(x)$ al segmentului $\overline{P_1P_2}$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

4° O condiție necesară și suficientă ca punctul $P'(x')$ să fie conjugat armonic cu $P''(x'')$ față de $P_1(x_1)$ și $P_2(x_2)$, toate punctele fiind situate pe o aceeași dreaptă, este

$$2(x_1x_2 + x'x'') = (x_1 + x_2)(x' + x'')$$

5° Distanța d dintre două puncte $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ din plan este

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Dacă $P_1 = O$ și $P_2 = P(x, y)$, atunci $d = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6° Coordonatele punctului $P(x, y)$ care împarte segmentul $\overline{P_1P_2}$ în raportul k,

$$\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{PP_2}$$

sînt

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Dacă P e mijlocul lui P_1P_2, atunci P are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

7° Coordonatele centrului de greutate G al triunghiului format de punctele $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, sînt

$$G: x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

8° O condiție necesară și suficientă ca punctele $P_3(x_3, y_3)$ și $P_4(x_4, y_4)$ să fie conjugate armonic cu $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ este exprimată de egalitățile:

$$\begin{cases} 2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ 2(y_1y_2 + y_3y_4) = (y_1 + y_2)(y_3 + y_4) \end{cases}$$

9° Ecuațiile unor drepte particulare din plan:

$x = 0$ (axa $y'Oy$); $\quad y = x$ (prima bisectoare);

$y = 0$ (axa $x'Ox$); $\quad y = -x$ (a doua bisectoare);

$x = a$ (dreaptă paralelă la $y'Oy$); $y = mx$ (dreaptă ce trece prin O).

$y = b$ (dreaptă paralelă la $x'Ox$);

10° Ecuația generală a dreptei este $Ax + By + C = 0$; ecuația redusă a dreptei este $y = mx + n$.

11° Ecuația dreptei care taie axele de coordonate în $A(a, 0)$ și $B(0, b)$ sau *ecuația dreptei prin tăieturi* este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0;$$

12° Ecuația normală a dreptei (*forma lui L. O. Hesse*) este

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0.$$

13° Ecuația dreptei care trece prin $P_0(x_0, y_0)$ și are coeficientul unghiular m, dat, este

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

14° Ecuația dreptei care trece prin două puncte $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ este

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

sau, sub formă de determinant,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

și dreapta are coeficientul unghiular

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

15° Ecuația dreptei care trece prin O și prin $P_1(x_1, y_1)$ este $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$.

16° O condiție necesară și suficientă ca dreptele

$$D_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (1)$$

$$D_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

să se intersecteze la distanță finită este

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

17° O condiție necesară ca dreptele D_1 și D_2 să fie paralele este $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

18° O condiție necesară și suficientă ca dreptele D_1 și D_2 să fie paralele este ca sistemul (1) să nu aibă soluții.

19° Condiția necesară și suficientă ca dreptele D_1 și D_2 să coincidă este

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

20° Unghiul α al dreptelor D_1 și D_2 care au coeficienții unghiulari $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$, este dat de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}.$$

21° O condiție necesară și suficientă ca dreptele D_1 și D_2 să fie perpendiculare este

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \text{ sau } 1 + m_1m_2 = 0.$$

22° Ecuaţia unei normale oarecare la dreapta de ecuaţie $Ax + By + C = 0$ este

$$Bx - Ay + C' = 0, \text{ cu } C' \text{ arbitrar.}$$

23° Ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ sînt

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, \quad k = \text{parametru real.}$$

24° Ecuaţiile parametrice ale dreptei definite printr-un punct $P_0(x_0, y_0)$ şi o direcţie α sînt

$$x = x_0 + \rho \cos \alpha, \; y = y_0 + \rho \sin \alpha, \; \rho = \text{parametru real.}$$

25° Ecuaţia fasciculului de drepte paralele (de pantă dată m) este

$$y = mx + \lambda, \; \lambda = \text{parametru real.}$$

26° Ecuaţia fasciculului de drepte care trec prin intersecţia dreptelor D_1 şi D_2 este

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

$$\lambda = \text{parametru real}$$

sau, dacă $P_0(x_0, y_0)$ este vîrful fasciculului,

$$y - y_0 = m(x - x_0), \; m = \text{parametru real.}$$

27° Condiţia necesară şi suficientă ca trei drepte

$$D_i: A_ix + B_iy + C_i = 0, \; i = 1, 2, 3$$

să fie concurente (la distanţă finită, la infinit sau într-un punct nedeterminat) este

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

28° Distanţa d de la punctul $P_0(x_0, y_0)$ la dreapta $D: Ax + By + C = 0$ este

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

29° Ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele D_1 şi D_2 sînt

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

30° Aria triunghiului determinat de $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, este

$$S = \frac{|D|}{2}, \text{ unde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

31° Condiția necesară și suficientă ca 3 puncte $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, să fie în linie dreaptă este

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

32° Transformarea coordonatelor carteziene rectangulare într-o translație de la sistemul xOy la sistemul $XO'Y$, cu O' (a, b), este dată de formulele (fig. 3.53)

$$\begin{cases} x = a + X, \\ y = b + Y, \end{cases}$$

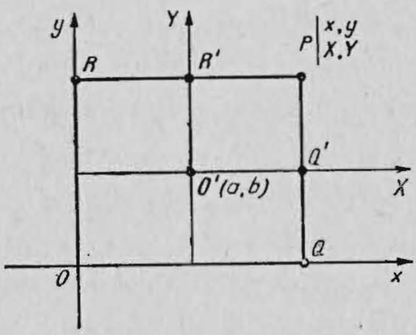


Fig. 3.53

unde x, y sînt coordonatele unui punct P față de reperul xOy; a, b coordonatele noii origini O' față de reperul xOy, iar X, Y coordonatele lui P față de noul reper $XO'Y$.

33° Transformarea coordonatelor carteziene ortogonale într-o rotație de unghi $\alpha = \sphericalangle (Ox, OX)$ și centru O a axelor de coordonate este dată de formulele (fig. 3.54)

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{cases}$$

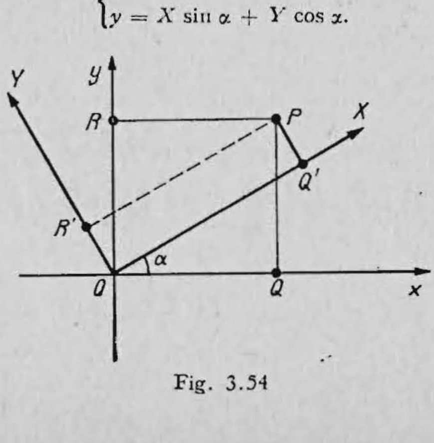


Fig. 3.54

3.3.5. *Cercul*

1° Ecuația cercului C cu centrul în origine și raza r este

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \qquad (1)$$

2° Ecuațiile lui parametrice sînt $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

3° Ecuația cu pătratele strînse este

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0, \qquad (2)$$

unde a și b sînt coordonatele centrului său ω, iar r raza cercului.

4° Ecuația normală a cercului este

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \qquad (3)$$

unde $a = -\dfrac{m}{2}$, $b = -\dfrac{n}{2}$ și $r^2 = \dfrac{m^2}{4} + \dfrac{n^2}{4} - p$.

5° Ecuația generală a cercului este $A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$, $A \neq 0$.

6° Ecuația pătratică a tangentelor la cercul (1), duse din punctul exterior $P_0(x_0, y_0)$, este

$$(r^2 - y_0^2)(x - x_0)^2 + 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) + (r^2 - x_0^2)(y - y_0)^2 = 0.$$

7° Puterea ρ a punctului $P_0(x_0, y_0)$ față de cercul (2) este

$$\rho = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

8° Cercurile C_1 și C_2 de ecuații $x^2 + y^2 + m_ix + n_iy + p_i = 0$, $i = 1, 2$ sînt ortogonale dacă și numai dacă $m_1m_2 + n_1n_2 - 2(p_1 + p_2) = 0$.

9° Ecuația axei radicale a acelorași cercuri C_1 și C_2 este

$$(m_1 - m_2)x + (n_1 - n_2)y + p_1 - p_2 = 0.$$

10° Ecuațiile parametrice ale cercului (2) sînt

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

11° Ecuația cercului care trece prin trei puncte necoliniare date $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, este

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

12° Ecuaţia tangentei la cercurile (1) şi (3) în punctul lor $P_0(x_0, y_0)$ sînt

$$xx_0 + yy_0 - r^2 = 0.$$

$$xx_0 + yy_0 + \frac{m}{2}(x + x_0) + \frac{n}{2}(y + y_0) + p = 0.$$

13° Ecuaţiile (magice ale) tangentelor la cerc paralele cu o direcţie dată m sînt

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

cînd centrul cercului se află în originea reperului respectiv, $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$, cînd centrul este în $\omega(a, b)$.

14° Ecuaţia polarei punctului $P_0(x_0, y_0)$ care nu aparţine cercului (3) este

$$xx_0 + yy_0 + \frac{m}{2}(x + x_0) + \frac{n}{2}(y + y_0) + p = 0.$$

3.3.6. *Elipsa*

1° Elipsa E raportată la axe are ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde a, b sînt lungimile semiaxelor, iar $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ distanţa de la centru la fiecare focar F şi F' (fig. 3.55).

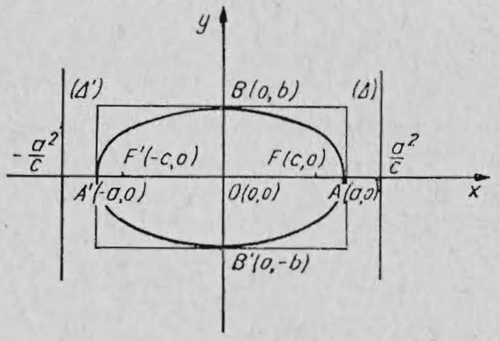


Fig. 3.55

2° Elipsa cu centrul în $O'(p, q)$, raportată la reperul xOy, şi avînd axele paralele cu axele sistemului de coordonate, are ecuaţia

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

3° Elipsa este proiecția ortogonală a cercului său principal (cercul de centru O și raza a), așezat într-un plan ce face cu planul elipsei unghiul α dat de relația $\cos \alpha = \frac{b}{a}$.

4° Ecuațiile parametrice ale elipsei sînt $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

5° Ecuația (canonică a) tangentei la elipsa E în $P_0(x_0, y_0) \in E$ este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

6° Ecuațiile (magice ale) tangentelor la elipsă paralele cu o direcție dată m sînt

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

7° Ecuația pătratică a tangentelor la elipsă care se pot duce din punctul $P_0(x_0, y_0)$ exterior elipsei este

$$(a^2 - x_0^2)(y - y_0)^2 + 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) + (b^2 - y_0^2)(x - x_0)^2 = 0.$$

8° Locul punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la elipsă este cercul lui Monge

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

9° Tangenta la elipsă într-un punct $P \in E$ este bisectoarea exterioară a unghiului format de razele vectoare ale lui P.

10° Locul proiecțiilor unui focar al elipsei pe tangentele elipsei este cercul principal al elipsei $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

11° Ecuația polarei unui punct $P_0(x_0, y_0) \notin E$ față de elipsă este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

12° Ea coincide cu ecuația tangentei cînd $P_0 \in E$.

13° Ecuația normalei la elipsă în $P_0(x_0, y_0) \in E$ este

$$y - y_0 = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0).$$

14° La elipsă se pot duce două normale paralele cu o direcție dată m.

15° Dintr-un punct dat se pot duce la elipsă două normale sau patru normale.

16° Ecuațiile directoarelor la elispă sînt $x = \frac{a^2}{c}$ și $x = -\frac{a^2}{c}$.

17° Raportul distanțelor de la un punct al elipsei la focar și la directoarea corespunzătoare este constant și egal cu $\frac{c}{a}$.

18° Excentricitatea elipsei este $e = \frac{c}{a} < 1$.

19° Aria elipsei este $S = \pi ab$.

3.3.7. *Hiperbola*

1° Hiperbola H raportată la axe are ecuația canonică

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (1)$$

unde a, b sînt lungimile semiaxelor, iar $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ este distanța de la centrul său O la focarele F și F' (fig. 3.56).

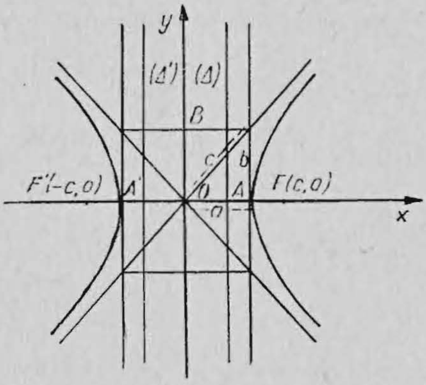


Fig. 3.56

2° Asimptotele hiperbolei sînt

$$y = \frac{bx}{a} \quad \text{și} \quad y = -\frac{bx}{a}.$$

3° Hiperbola cu centrul în $O'(p, q)$, raportată la reperul xOy și avînd axele sale paralele cu axele reperului, are ecuația

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

4° Ecuațiile parametrice ale hiperbolei sînt

$$x = \frac{a}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$y = \frac{b}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$$

λ = parametru real.

5° Ecuația hiperbolei conjugate cu (1) este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

6° Ecuația hiperbolei echilatere este

$$x^2 - y^2 = a^2$$

sau, cînd este raportată la asimptote drept axe de coordonate,

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$

7° Ecuația (canonică a) tangentei la hiperbola H în $P_0(x_0, y_0) \in H$ este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

8° Ecuațiile (magice ale) tangentelor la hiperbolă, paralele cu o direcție dată m, sînt

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

9° Ecuația pătratică a tangentelor la hiperbolă care se pot duce din $P_0(x_0, y_0)$, exterior hiperbolei, este

$$(a^2 - x_0^2)(y - y_0)^2 + 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) - (b^2 + y_0^2)(x - x_0)^2 = 0.$$

10° Locul punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la hiperbolă este cercul lui Monge

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2, \quad \text{cînd} \quad a > b.$$

11° Orice paralelă la una din asimptotele hiperbolei taie curba într-un singur punct la distanță finită.

12° Tangenta (geometrică) la hiperbolă într-un punct $P \in H$ este bisectoarea interioară a unghiului format de razele vectoare ale lui P.

13° Locul proiecțiilor unui focar al hiperbolei pe tangentele curbei este cercul cu diametrul egal cu axa transversă a hiperbolei (cercul principal al hiperbolei $x^2 + y^2 = a^2$).

14° Ecuația polarei unui punct $P_0(x_0, y_0) \notin H$ față de hiperbolă este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

Ea coincide cu ecuația tangentei cînd $P_0 \in H$.

15° Ecuația normalei la hiperbolă în $P_0(x_0, y_0) \in H$ este

$$y - y_0 = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0).$$

16° La hiperbolă se pot duce două normale paralele cu o direcție dată m, cînd $a^2 - b^2m^2 > 0$.

17° Dintr-un punct dat se pot duce la hiperbolă două normale, patru sau trei, din care una poate fi considerată ca dublă.

18° Ecuațiile directoare la hiperbolă sînt $x = \frac{a^2}{c}$ și $x = -\frac{a^2}{c}$.

19° Raportul distanțelor de la un punct al hiperbolei la focar și la directoarea corespunzătoare este constant și egal cu $\frac{c}{a}$.

20° Excentricitatea hiperbolei este $e = \frac{c}{a} > 1$.

3.3.8. *Parabola*

1° Ecuația (canonică a) parabolei P raportată la axa ei de simetrie Ox și la tangenta Oy în vîrful său O este

$$y^2 - 2px = 0,$$

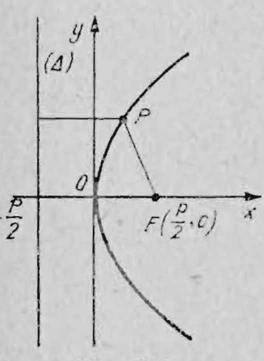


Fig. 3.57

unde p e parametrul parabolei, iar $\frac{p}{2} = OF$ este abscisa focarului F de pe axa Ox (fig. 3.57).

2° Parabola cu vîrful în $O'(\alpha, \beta)$, raportată la reperul xOy și avînd axa și tangenta la vîrf paralele cu axele reperului, este

$$(y - \beta)^2 - 2p(x - \alpha) = 0$$

sau

$$x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{\beta}{p}y + \frac{\beta^2}{2p} + \alpha.$$

3° Ecuația

$$x = ay^2 + by + c$$

reprezintă o parabolă cu

$$p = \frac{1}{2a}, \quad \alpha = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad \beta = -\frac{b}{2a}.$$

4° Ecuația

$$y = ax^2 + bx + c$$

reprezintă o parabolă cu

$$p = \frac{1}{2a}; \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

5° Ecuațiile parametrice ale parabolei sînt

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda^2}{2p} \\ y = \lambda, \end{cases} \quad \lambda = \text{parametru real.}$$

6° Ecuația (canonică a) tangentei la parabola P în $P_0(x_0, y_0) \in P$ este

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

7° Ecuația (magică a) tangentei la parabolă, paralelă cu o direcție dată m, este

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

8° Ecuația pătratică a tangentelor la parabolă care se pot duce dintr-un punct $P_0(x_0, y_0)$ exterior parabolei este

$$2x_0(y - y_0)^2 - 2y_0(x - x_0)(y - y_0) + p(x - x_0)^2 = 0$$

9° Locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la parabolă este directoarea parabolei $x = -p/2$.

10° Tangenta la parabolă într-un punct al ei este bisectoarea unghiului format de raza vectoare și paralela la axa Ox dusă prin acel punct.

11° Locul geometric al proiecției focarului pe tangentele la parabolă este tangenta la vîrf.

12° Locul geometric al simetricului focarului față de tangentele la porabolă este directoarea parabolei.

13° Ecuația polarei unui punct $P_0(x_0, y_0) \notin P$ față de parabolă este

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

14° Ea coincide cu ecuația tangentei cînd $P_0(x_0, y_0) \in P$.

15° Ecuația normalei la parabolă in $P_0(x_0, y_0) \in P$ este

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$$

16° La o parabolă se poate duce o singură normală paralelă cu o direcție dată m.

17° Dintr-un punct dat se pot duce la o parabolă cel mult trei normale și cel puțin una.

18° Ecuația directoarei la parabolă este $x = -\dfrac{p}{2}$

19° Raporul distanțelor de la un punct al parabolei la focar și la directoare este constant și egal cu unitatea.

20° Excentricitatea parabolei este $e = 1$

3.3.9. *Curbele reprezentate de ecuația*

$$y^2 = 2px + qx^2$$

1) $p \neq 0$ $\begin{cases} q = -1 & \text{cerc} \\ q = 0 & \text{parabolă} \\ q \neq \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{cases} q < 0 & \text{elipsă cu semiaxele } a \text{ și } a\sqrt{-q} \\ q > 0 & \text{hiperbolă cu semiaxele } a \text{ și } a\sqrt{q} \end{cases} \end{cases}$

2) $p = 0$ $\begin{cases} q > 0 & \text{două drepte care trec prin origine} \\ q < 0 & \text{două drepte imaginare} \\ q = 0 & \text{două drepte confundate cu axa } x'Ox. \end{cases}$

3.3.10. *Secțiuni conice*

Într-un con de rotație, secțiunea dreaptă este un cerc; dacă planul de secțiune nu este perpendicular pe axă, atunci secțiunea este elipsă, hiperbolă sau parabolă, după cum

1) planul secant întîlnește numai o pînză a conului și taie toate generatoarele (fig. 3.58, a);

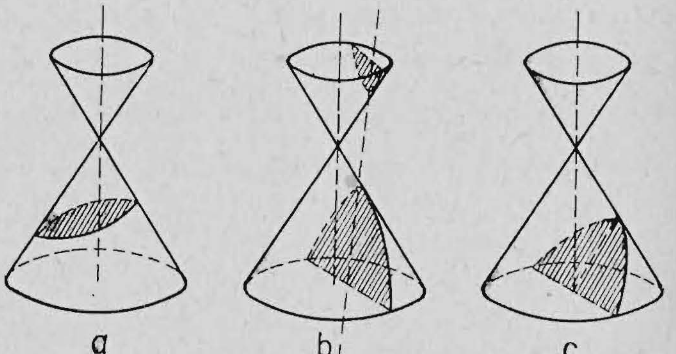


Fig. 3.58

2) planul secant întîlnește ambele pînze ale conului (fig. 3.58, b);

3) planul secant este paralel cu un plan tangent la con (planul secant nu mai taie toate generatoarele, una fiind paralelă cu el, (fig. 3.58, c).

4. TRIGONOMETRIE

4.1. Unități de măsură pentru unghiuri. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani

Unitățile de măsură pentru unghiuri și arce sînt: gradul *sexagesimal* (°), cu submultiplii săi minutul sexagesimal (′) și secunda sexagesimală (″), *radianul*, *unghiul drept* (dr) și *gradul centesimal* (^{g}), cu submultiplii săi minutul centesimal (^{c}) și secunda centesimală (^{cc}):

$$1^\circ = 60' = 3600''; \quad 1' = 60'';$$

$$1^g = 100^c = 10\,000^{cc}; \quad 1^c = 100^{cc};$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ radiani} = 100^g = 1 \text{ dr.}$$

Unghiurile se notează cu diferite litere mici ale alfabetului latin u, v, w, x, y, ale alfabetului grecesc α, β, γ, φ, ψ sau cu litere mari ale alfabetului latin, de pildă A, B, C, D.

Ca orice mărime fizică, un *unghi este egal cu măsura sa înmulțită cu unitatea de măsură aleasă.*

Întrucît în practică se întîlnesc unghiuri și arce măsurate cu diferite unități de măsură, este necesar să știm a trece de la unele unități de măsură la altele. Astfel cu ajutorul Tabelei 4.1 putem transforma gradele sexagesimale în radiani și reciproc.

Modul de folosire al tabelei se deduce imediat.

Exemplul 1. Să se afle cîți radiani are unghiul de 49°20′8″. Avem 49° = 40° + 9°.

Căutînd pe 40°, respectiv 9°, în coloana gradelor, găsim valorile 0,698132 respectiv 0,157080 în coloana radianilor. Căutind și 20′, respectiv 8″ în coloana minutelor și secundelor, citim radianii în coloana alăturată, adică 0,005818, respectiv 0,000039. Adăugînd găsim rezultatul căutat:

$$49^\circ 20' 8'' = 0{,}698132 + 0{,}157080 + 0{,}005818 + 0{,}000039 = 0{,}861069 \text{ radiani.}$$

Exemplul 2. Să se afle cite grade are unghiul de 4,545 radiani. Se caută în tabelă valoarea imediat mai mică (4,363323) și se citește numărul de grade corespunzătoare, adică 250°. Se face diferența 4,576 − 4,363323 = 0,212677 și se caută numărul de grade corespunzător acestei diferențe, întocmai ca mai înainte. Rezultă 12° și diferența 0,212677 − 0,209440 = 0,003237. Procedîndu-se ca mai sus rezultă 10′ și diferența 0,003237 − 0,002909 = 0,000428, apoi 1′ și diferența 0,000137, căreia îi corespund aproximativ 30″. Deci rezultatul este 4,546 radiani = 250° + 12° + 10′ + 1′ + 30″ = 262°11′30″.

Tabela 4.1. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani

Secunde și minute	Radiani	Grade	Radiani	Grade	Radiani
1″	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,553505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575995
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191986	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
		15	0,261799	65	1,134464
1′	0,000291	16	0,279253	70	1,221730
2	0,000582	17	0,296706	75	1,308997
3	0,000873	18	0,314159	80	1,396263
		19	0,331613	85	1,483530
4	0,001164	20	0,349066	90	1,570796
5	0,001454	21	0,366519	100	1,745329
6	0,001745	22	0,383972	120	2,094395
7	0,002036	23	0,401426	150	2,617994
8	0,002327	24	0,418879	180	3,141593
9	0,002618	25	0,436332	200	3,490659
10	0,002909	26	0,453786	250	4,363323
20	0.005818	27	0,471239	270	4,712389
30	0,008727	28	0,488692	300	5,235988
40	0,011636	29	0,506145	360	6,283185
50	0,014544	30	0,523599	400	6,981317

4.2. Definiția funcțiilor trigonometrice ale unui unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic

Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A, b și c sînt lungimile catetelor și a lungimea ipotenuzei, atunci (fig. 4.1)

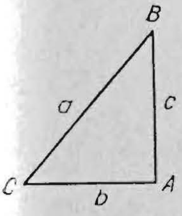


Fig. 4.1

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b}$$

$$\sin C = \frac{c}{a}, \quad \cos C = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}$$

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

$$\sec C = \frac{1}{\cos C} = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{cosec} C = \frac{1}{\sin C} = \frac{a}{c}.$$

4.3. Definiția funcțiilor trigonometrice pentru unghiuri oarecare și argumente numerice

In planul $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ raportat la un reper ortonormat (Ox, Oy) considerăm cercul trigonometric (de rază 1) de centru O, un punct M pe cerc, M' proiecția ortogonală a lui M pe raza OA (fig. 4.2, a), tangentele la cerc în A

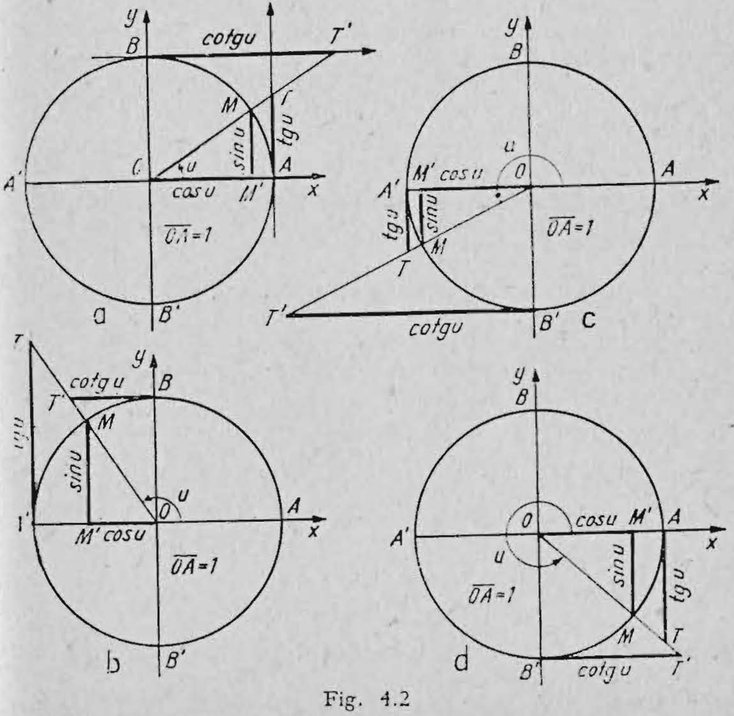


Fig. 4.2

și B, orientate la fel cu axele de coordonate Ox și Oy și punctele T și T' rezultate din intersecția razei vectoare OM cu aceste tangente.

Dacă $u = \sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ atunci avem prin definiție

$$\cos u = \overline{OM'}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u} \qquad \operatorname{tg} u = \overline{AT}; \quad \sec u = \frac{1}{\overline{OM'}}$$

sau

$$\sin u = \overline{M'M}, \quad \operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\sin u} \qquad \operatorname{cotg} u = \overline{BT'}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\overline{M'M}}.$$

Pentru $u = 0$ și $u = \frac{\pi}{2}$, avem $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$, $\sec 0 = 1$, $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$, tangenta și secanta nefiind definite în $u = \frac{\pi}{2}$, iar cotangenta și cosecanta nefiind definite în $u = 0$. Pentru unghiuri $u \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ avem definiții analoage (fig. 4.2, b, c, d).

Aceste definiții se extind, definind sin, cos, tg, cotg, sec, cosec atît pe mulțimea unghiurilor măsurate în radiani în valoare absolută mai mare decît 2π, respectiv pe mulțimea numerelor reale *prin proprietatea*

„$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists u \in [0, 2\pi)$ și $\exists k \in \mathbb{Z}$, *astfel încît* $x = u + 2 \cdot k\pi$" *și prin periodicizarea funcțiilor trigonometrice.*

4.4. Periodicitatea funcțiilor trigonometrice fundamentale

Funcțiile sin și cos sînt periodice cu perioada $T = 2\pi$, iar funcțiile tg și cotg sînt periodice cu perioada $T = \pi$ și avem

1. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4.5. Graficele funcțiilor trigonometrice fundamentale (fig. 4.3, a, b, c, d).

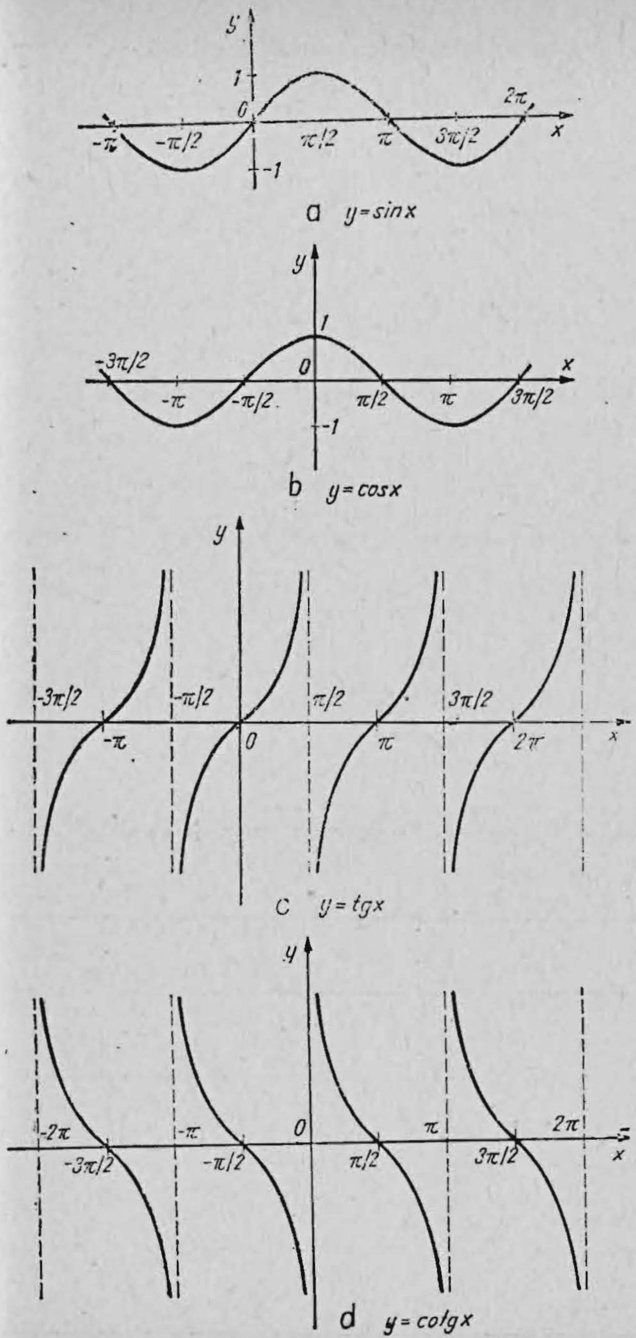


Fig. 4.3

4.6. Identități trigonometrice fundamentale:

$$\forall u \in R, \ \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$\forall u \in R \setminus \frac{Z\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{cotg} u = 1$$

$$\forall u \in R \setminus \left(\frac{\pi}{2} + Z\pi\right), \quad 1 + \operatorname{tg}^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$$

$$\forall u \in R \setminus Z\pi, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u.$$

4.7. Continuitatea și derivabilitatea funcțiilor trigonometrice

Teoremă: Funcțiile trigonometrice sînt continue pe domeniile lor de definiție.

Teoremă: Funcțiile trigonometrice sînt indefinit derivabile pe domeniile lor de definiție.

Teoremă. Primitivele celor 6 funcții trigonometrice se exprimă cu ajutoru funcțiilor trigonometrice înseși și al logaritmului acestor funcții.

Teoremă. Funcțiile sin, cos: $R \to [-1, 1]$ sînt soluțiile următoarelor *probleme Cauchy*:

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

și

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

4.8. Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice fundamentale

Cadranul \ Funcția	sin u	cos u	tg u	cotg u
I $\left(0 < u < \frac{\pi}{2}\right)$	+	+	+	+
II $\left(\frac{\pi}{2} < u < \pi\right)$	+	–	–	–
III $\left(\pi < u < \frac{3\pi}{2}\right)$	–	–	+	+
IV $\left(\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi\right)$	–	+	–	–

4.9. Formule de reducere la un unghi ascuțit

Argumentul / Funcția	$v = \frac{\pi}{2} \pm u$	$v = \pi \pm u$	$v = \frac{3\pi}{2} \pm u$	$v = 2\pi - u$	$v = -u$
$\sin v$	$\cos u$	$\mp \sin u$	$-\cos u$	$-\sin u$	$-\sin u$
$\cos v$	$\mp \sin u$	$-\cos u$	$\pm \sin u$	$\cos u$	$\cos u$
$\mathrm{tg}\, v$	$\mp \mathrm{cotg}\, u$	$\pm \mathrm{tg}\, u$	$\mp \mathrm{cotg}\, u$	$-\mathrm{tg}\, u$	$-\mathrm{tg}\, u$
$\mathrm{cotg}\, v$	$\mp \mathrm{tg}\, u$	$\pm \mathrm{cotg}\, u$	$\mp \mathrm{tg}\, u$	$-\mathrm{cotg}\, u$	$-\mathrm{cotg}\, u$

4.10. Expresiile funcțiilor $\sin^2 u$, $\cos^2 u$, $\mathrm{tg}^2 u$ și $\mathrm{cotg}^2 u$ în funcție de pătratul unei funcții trigonometrice fundamentale

	$\sin^2 u$	$\cos^2 u$	$\mathrm{tg}^2 u$	$\mathrm{cotg}^2 u$
$\sin^2 u$		$1 - \cos^2 u$	$\frac{\mathrm{tg}^2 u}{1 + \mathrm{tg}^2 u}$	$\frac{1}{1 + \mathrm{cotg}^2 u}$
$\cos^2 u$	$1 - \sin^2 u$		$\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 u}$	$\frac{\mathrm{cotg}^2 u}{1 + \mathrm{cotg}^2 u}$
$\mathrm{tg}^2 u$	$\frac{\sin^2 u}{1 - \sin^2 u}$	$\frac{1 - \cos^2 u}{\cos^2 u}$		$\frac{1}{\mathrm{cotg}^2 u}$
$\mathrm{cotg}^2 u$	$\frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u}$	$\frac{\cos^2 u}{1 - \cos^2 u}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 u}$	

Tabela 4.2. Valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale ale cîtorva unghiuri

Cadranul	Unghiul u	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{cotg} u$
	$0°$	0	1	0	nu este definită
	$15° = \frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
	$18° = \frac{\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
	$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
I	$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
	$60° = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	$72° = \frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	$75° = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
	$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	nu este definită	0
	$108° = \frac{3\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	$120° = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
II	$135° = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1
	$150° = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
	$162° = \frac{9\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
	$180° = \pi$	0	-1	0	nu este definită
	$210° = \frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
III	$225° = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	$240° = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$270° = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	nu este definită	0
	$300° = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
IV	$315° = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	$330° = \frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
	$360° = 2\pi$	0	1	0	nu este definită

Tabela 4.3 Funcțiile trigonometrice exprimate cu ajutorul uneia dintre ele

Funcția cunoscută \ Funcția necunoscută	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{cotg} u$	$\sec u$	$\operatorname{cosec} u$
$\sin u$	$\sin u$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 u}$	$\pm\frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$	$\frac{1}{\sin u}$
$\cos u$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 u}$	$\cos u$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\cos u}$	$\pm\frac{\cos u}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$	$\frac{1}{\cos u}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$
$\operatorname{tg} u$	$\pm\frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\operatorname{tg} u}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\operatorname{tg} u}$
$\operatorname{cotg} u$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 u}}$	$\pm\frac{\operatorname{cotg} u}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 u}}$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} u}$	$\operatorname{cotg} u$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 u}}{\operatorname{cotg} u}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 u}$
$\sec u$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2 u-1}}{\sec u}$	$\frac{1}{\sec u}$	$\pm\sqrt{\sec^2 u-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2 u-1}}$	$\sec u$	$\pm\frac{\sec u}{\sqrt{\sec^2 u-1}}$
$\operatorname{cosec} u$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} u}$	$\pm\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}}{\operatorname{cosec} u}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}$	$\pm\frac{\operatorname{cosec} u}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}}$	$\operatorname{cosec} u$

Tabela 4.4 Funcțiile trigonometrice fundamentale ale unei sume și diferențe de unghiuri

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v; \quad \cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}; \quad \operatorname{cotg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v \mp 1}{\operatorname{cotg} v \pm \operatorname{cotg} u}$$

$$\sin(u + v + w) = \sin u \cos v \cos w + \sin v \cos w \cos u + \sin w \cos u \cos v - \sin u \sin v \sin w$$

$$\cos(u + v + w) = \cos u \cos v \cos w - \sin u \sin v \cos w - \sin v \sin w \cos u - \sin u \sin w \cos v$$

$$\operatorname{tg}(u + v + w) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v \cdot \operatorname{tg} w}{1 - (\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w + \operatorname{tg} w \operatorname{tg} u)}$$

$$\operatorname{cotg}(u + v + w) = \frac{\operatorname{cotg} u \cdot \operatorname{cotg} v \cdot \operatorname{cotg} w - \operatorname{cotg} u - \operatorname{cotg} v - \operatorname{cotg} w}{\operatorname{cotg} u \cdot \operatorname{cotg} v + \operatorname{cotg} v \operatorname{cotg} w + \operatorname{cotg} w \operatorname{cotg} u - 1}$$

Tabela 4.5. Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice fundamentale în sume de funcții trigonometrice corespunzătoare

$$\sin u \cos v = \frac{\sin(u + v) + \sin(u - v)}{2}; \quad \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v}$$

$$\cos u \cos v = \frac{\cos(u + v) + \cos(u - v)}{2}; \operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v = \frac{\operatorname{cotg} u + \operatorname{ctg} v}{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}$$

$$\sin u \sin v = \frac{\cos(u - v) - \cos(u + v)}{2} \quad \operatorname{cotg} u \operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{cotg} u + \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u + \operatorname{cotg} v}$$

$$4 \sin u \sin v \sin w = \sin(u + v - w) + \sin(-u + v + w) + \sin(u - v + w) - \sin(u + v + w)$$

$$4 \sin u \cos v \cos w = \sin(u + v - w) - \sin(-u + v + w) + \sin(u - v + w) + \sin(u + v + w)$$

$$4 \sin u \sin v \cos w = -\cos(u + v - w) + \cos(-u + v + w) + \cos(u - v + w) - \cos(u + v + w)$$

$$4 \cos u \cos v \cos w = \cos(-u + v + w) + \cos(u - v + w) + \cos(u + v - w) + \cos(u + v + w)$$

4.11. Funcțiile trigonometrice ale jumătății, dublului și triplului unui unghi

Funcția căutată	Expresia ei
	Funcțiile trigonometrice fundamentale ale jumătății unghiului
$\sin\frac{u}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin u}-\sqrt{1-\sin u}\right).$
$\cos\frac{u}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin u}+\sqrt{1-\sin u}\right).$
$\operatorname{tg}\frac{u}{2}$	$\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\operatorname{tg} u}=\frac{\sin u}{1+\cos u}=\frac{1-\cos u}{\sin u}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$
$\operatorname{cotg}\frac{u}{2}$	$\frac{1}{-\operatorname{cotg} u\pm\sqrt{\operatorname{cotg}^2 u+1}}=\frac{\sin u}{1-\cos u}=\frac{1+\cos u}{\sin u}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}}.$
	Funcțiile trigonometrice fundamentale ale dublului unghiului
$\sin 2u$	$2\sin u\cos u=\pm 2\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}=\pm 2\cos u\sqrt{1-\cos^2 u}$
$\cos 2u$	$\cos^2 u-\sin^2 u=2\cos^2 u-1=1-2\sin^2 u.$
$\operatorname{tg} 2u$	$\frac{2\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg}^2 u}.$
$\operatorname{cotg} 2u$	$\frac{\operatorname{cotg}^2 u-1}{2\operatorname{cotg} u}.$
$\sec 2u$	$\frac{\sec^2 u}{2-\sec^2 u}$
$\operatorname{cosec} 2u$	$\pm\frac{\sec^2 u}{2\sqrt{\sec^2 u-1}}.$
	Funcțiile trigonometrice fundamentale ale triplului unghiului
$\sin 3u$	$3\sin u\cos^2 u-\sin^3 u=3\sin u-4\sin^3 u.$
$\cos 3u$	$\cos^3 u-3\cos u\sin^2 u=4\cos^3 u-3\cos u.$
$\operatorname{tg} 3u$	$\frac{3\operatorname{tg} u-\operatorname{tg}^3 u}{1-3\operatorname{tg}^2 u}.$
$\operatorname{cotg} 3u$	$\frac{\operatorname{cotg}^3 u-3\operatorname{cotg} u}{3\operatorname{cotg}^2 u-1}.$

Alte formule utile:

$\sin 4u = 2\sin 2u\cdot\cos 2u$; $\cos 4u = 8\cos^4 u-8\cos^2 u+1.$

4.12. Linearizarea unor puteri ale sinusului și cosinusului

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}; \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}.$$

$$\sin^3 u = \frac{3 \sin u - \sin 3u}{4}; \quad \cos^3 u = \frac{3 \cos u + \cos 3u}{4}.$$

$$\sin^4 u = \frac{3 - 4 \cos 2u + \cos 4u}{8}; \quad \cos^4 u = \frac{3 + 4 \cos 2u + \cos 4u}{8}.$$

$$\sin^5 u = \frac{10 \sin u - 5 \sin 3u + \sin 5u}{16}; \quad \cos^5 u = \frac{10 \cos u + 5 \cos 3u + \cos 5u}{16}.$$

$$\sin^6 u = \frac{10 - 15 \cos 2u + 6 \cos 4u - \cos 6u}{32}.$$

$$\cos^6 u = \frac{10 + 15 \cos 2u + 6 \cos 4u + \cos 6u}{32}.$$

$$\sin^7 u = \frac{35 \sin u - 21 \sin 3u + 7 \sin 5u - \sin 7u}{64}.$$

$$\cos^7 u = \frac{35 \cos u + 21 \cos 3u + 7 \cos 5u + \cos 7u}{64}.$$

$$\sin^8 u = \frac{35 - 56 \cos 2u + 28 \cos 4u - 8 \cos 6u + \cos 8u}{128}.$$

$$\cos^8 u = \frac{35 + 56 \cos 2u + 28 \cos 4u + 8 \cos 6u + \cos 8u}{128}.$$

4.13. Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul tangentei jumătății unghiului

$$\sin u = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \operatorname{cotg} u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

$$\cos u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \sec u = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}.$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 u}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} = \frac{1 + t^2}{2t}, \text{ unde } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

4.14. Formule de transformare a unor sume de funcții trigonometrice în produse (Formule calculabile prin logaritmi)

$$\sin u \pm \sin v = 2\sin\frac{u \pm v}{2}\cos\frac{u \mp v}{2}; \quad \cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}.$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} = 2\sin\frac{v+u}{2}\sin\frac{v-u}{2}.$$

$$\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v = \frac{\sin(u \pm v)}{\cos u \cos v}; \quad \operatorname{cotg} u \pm \operatorname{cotg} v = \frac{\sin(v \pm u)}{\sin u \sin v}.$$

$$1 - \cos u = 2\sin^2(u/2); \; 1 + \cos u = 2\cos^2(u/2); \; 1 \pm \sin 2u = (\sin u \pm \cos u)^2.$$

$$1 \pm \sin u = \sin\frac{\pi}{2} \pm \sin u = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{u}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{u}{2}\right).$$

$$1 \pm \operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \pm \operatorname{tg} u = \sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm u\right)}{\cos u}.$$

$$A\sin u + B\cos u = A\left(\sin u + \frac{B}{A}\cos u\right) = A(\sin u + \operatorname{tg}\varphi\cos u) = A\,\frac{\sin(u+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

(s-a introdus unghiul auxiliar φ, definit de $\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)

$$A \pm B = A\left(1 \pm \frac{B}{A}\right) = A(1 \pm \operatorname{tg}\varphi) = A\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \varphi\right)}{\cos\varphi};$$ dacă $A > 0$,

$B > 0$, atunci se poate lua $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2\varphi$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\cos u \pm \sin u = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm u\right) = \sqrt{2}\left(\cos \mp \frac{\pi}{4}\right).$$

4.15. Identități pentru funcțiile trigonometrice ale unghiurilor A, B, C ale unui triunghi oarecare

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2.$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

$$\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 4\cos 2A \cos 2B \cos 2C - 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

$$\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A = 1.$$

4.16. Inegalități verificate de funcțiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi oarecare și de alte elemente ale acestuia.

$$8 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant 1$$

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

$$8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant 3\cdot\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} < 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geqslant 1$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$8\cos A \cos B \cos C \leqslant 1$$

$$1 \leqslant \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C\cdot\operatorname{tg} A \geqslant 9$$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leqslant \sin A + \sin B + \sin C$

$p \geqslant 3 \cdot R\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}$

$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$

$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2.$

4.17. Relații între elementele unui triunghi oarecare *

Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Teorema cosinusurilor:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Teorema tangentelor

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A - B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A + B}{2}}$$

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B + C}{2}}$$

$$\frac{c - a}{c + a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C - A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C + A}{2}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B} = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C} = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c \sin A}{b - \cos A} = \frac{c \sin B}{a - c \cos B}.$$

Teorema proiecțiilor

$a = b \cos C + c \cos B$

$b = c \cos A + a \cos C$

$c = a \cos B + b \cos A$

* A se vedea și paragraful 3.1.1 de la capitolul Geometrie

Formulele lui Karl Mollweide:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},\qquad \frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{c+a}{b}=\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}},\qquad \frac{c-a}{b}=\frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

Alte relații importante:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}},\quad \sin\frac{C}{2}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$$

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$p-a=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$p-b=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$p-c=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$h_a=2R\sin B\sin C;\quad h_b=2R\sin C\sin A,\quad h_c=2R\sin A\sin B$$

$$r_a=r+a\operatorname{tg}\frac{A}{2};\quad r_b=r+b\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad r_c=r+c\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$r=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\overline{OH}=R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}.$$

Tabela 4.6. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

Cazul	Date	Necunoscute	Formule de rezolvare			
I	$A=90^\circ$, b, c	B, C, a, S	$\operatorname{tg} B=\frac{b}{c}$; $\operatorname{cotg} B=\frac{c}{b}$	$\operatorname{tg} C=\frac{c}{b}$; $\operatorname{cotg} C=\frac{b}{c}$	$a=\sqrt{b^2+c^2}$; $a=b\sec C=\frac{b}{\cos C}$	$S=\frac{1}{2}bc$
II	$A=90^\circ$, a, b	B, C, c, S	$\sin B=\frac{b}{a}$; $C=90^\circ-B$	$\cos C=\frac{b}{a}$; $B=90^\circ-C$	$c=\sqrt{a^2-b^2}$; $c=\sqrt{(a+b)(a-b)}=$ $=a\cos B$	$S=\frac{1}{2}b\sqrt{(a+b)(a-b)}=$ $=\frac{1}{2}ab\sin C$
III	$A=90^\circ$, B, a	C, b, c, S	$C=90^\circ-B$	$b=a\sin B$; $b=a\cos C$	$c=a\sin C$; $c=a\cos B$	$S=\frac{1}{4}a^2\sin 2B$
IV	$A=90^\circ$, B, b	C, a, c, S	$C=90^\circ-B$	$a=\frac{b}{\sin B}$; $a=\frac{b}{\cos C}$	$c=b\operatorname{tg} C$; $c=b\operatorname{cotg} B$	$S=\frac{1}{2}b^2\operatorname{cotg} B$

Tabela 4.7. Rezolvarea triunghiurilor oarecare

Cazul	Date	Necunoscute	Formule de rezolvare			
I	B, C, a	A, b, c, S	$A=180^\circ-(B+C)$	$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$	$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$	$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=$ $=\frac{ab\sin C}{2}$
	A, B, a	C, b, c, S	$C=180^\circ-(A+B)$	$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$	$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$	$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$
II	C, a, b	A, B, c, S	$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$; $A+B=180^\circ-C$		$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$	$S=\frac{ab\sin C}{2}$
III	A, a, b	B, C, c, S	$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$	$C=180^\circ-$ $-(A+B)$	$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=$ $=b\cos A\pm$ $\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$; $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$	$S=\frac{bc\sin A}{2}=$ $=\frac{b\sin A}{2}(b\cos A\pm$ $\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A})$

Cazul	Date	Necunoscute	Formule de rezolvare
IV	a b c $a+b+$ $+c=2p$	A B C S	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$; $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ Ca verificare: $A+B+C=180^\circ$

În cazul III putem avea drept soluţie: două triunghiuri, un triunghi sau nici un triunghi, cu datele A, a, b.

În adevăr, apariţia radicalului $\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$ în expresia lui c impune o discutare a semnului cantităţii de sub radical. Această discuţie, rezumată, este:

1. $A>90^\circ$;
   - $a>b \Rightarrow$ un singur triunghi
   - $a\leqslant b \Rightarrow$ nici un triunghi
2. $A=90^\circ$
   - $a>b \Rightarrow$ un singur triunghi
   - $a\leqslant b \Rightarrow$ nici un triunghi
3. $A<90^\circ$
   - α) $a<b\sin A \Rightarrow$ nici un triunghi
   - β) $a=b\sin A \Rightarrow$ un triunghi dreptunghic
   - γ) $a>b\sin A$: $\begin{cases} a>b \Rightarrow \text{un singur triunghi} \\ a=b \Rightarrow \text{un singur triunghi isoscel} \\ a>b \Rightarrow \text{un singur triunghi} \end{cases}$

4.18. Produse. Sume. Inegalităţi şi identităţi remarcabile

1. $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

2. $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$

3. $\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}$

4. $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$

5. $\cos\frac{\pi}{4n}\cos\frac{3\pi}{4n}\ldots\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}$

6. $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}$

7. $\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}, & n \text{ impar}\\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}, & n \text{ par}\end{cases}$

8. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

9. $(2\cos x-1)(2\cos 2x-1)\ldots(2\cos 2^{n-1}x-1)=$

$=\frac{2\cos 2^n x-1}{2\cos x+1},\quad \cos x\neq-\frac{1}{2}$.

* * *

10. $\sin x+\sin(x+h)+\sin(x+2h)+\ldots+\sin(x+nh)=$

$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h\sin\left(x+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}},\quad h\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

11. $\cos x+\cos(x+h)+\cos(x+2h)+\ldots+\cos(x+nh)=$

$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}},\quad h\neq 2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$

12. $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$, $\sin x\neq 0$

13. $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$, $\sin x\neq 0$

14. $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{cotg}2x+\ldots+\operatorname{tg}(2^{n-1}x)+\operatorname{cotg}(2^{n-1}x)=$
$=2[\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}(2^n x)]$

15. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-2\operatorname{cotg}2x$

16. $1+a\cos x+a^2\cos 2x+\ldots+a^n\cos nx=$
$=\frac{a^{n+2}\cos nx-a^{n+1}\cos(n+1)x-a\cos x+1}{a^2-2a\cos x+1}$

17. $a\sin x+a^2\sin 2x+\ldots+a^n\sin nx=$
$=\frac{a^{n+2}\sin nx-a^{n+1}\sin(n+1)x+a\sin x}{a^2-2a\cos x+1}$

18. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+1+1^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+2+2^2}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}=$
$=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1},\quad n\in\mathbf{N}^*$

19. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+2},\quad n\in\mathbf{N}^*$

20. $\frac{4\pi^2}{27}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots$

* * *

21. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \ldots + \cos\frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$

22. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

23. $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{139} = \frac{\pi}{4}$ *(Machin)*

24. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

* * *

25. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|$

26. $\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$

27. $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}, \quad \sin(x + y + z) < \sin x + \sin y + \sin$

4.19. Funcţii trigonometrice inverse[1]

Relaţii între funcţiile trigonometrice inverse:

$$\begin{cases} \arcsin x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ \arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, & x \in [0, 1] \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0] \end{cases} \\ \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (0, 1] \\ -\pi + \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in [-1, 0) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in \mathbf{R} \\ \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in [0, +\infty) \\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (-\infty, 0] \end{cases} \\ \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \\ -\pi + \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \end{cases}$$

[1] A se vedea paragraful „Funcţii elementare".

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & x \in [0, 1] \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (0, 1] \\ \pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$$\arccos x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in [0, +\infty) \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \\ \pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

Formule de adunare

$$\begin{cases} \arcsin x + \arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - xy), & 0 < x, y < 1 \\ \arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), & 0 < x, y < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}), & 0 < x, y < 1 \\ \arccos x - \arccos y = \arcsin(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}), & 0 < x, y < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1-xy}{x+y}, & x, y > 0 \\ \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-y}{1+xy}, & x, y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{arc\,ctg} x + \operatorname{arc\,ctg} y = \operatorname{arc\,cotg}\dfrac{xy-1}{x+y}, & x, y > 0 \\ \operatorname{arc\,ctg} x - \operatorname{arc\,ctg} y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y-x}{1+xy}, & x > 0,\ y > 0 \end{cases}$$

4.20. Condiții necesare și suficiente ca valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale corespunzătoare la două unghiuri u și v să fie egale

Teoremă: 1. $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + 2k\pi$ sau $u = \pi - v + 2\cdot l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$

2. $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + 2k\pi$ sau $u = -v + 2\cdot l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$

3. $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v \Leftrightarrow u = v + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $u \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, $v \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $m, n \in \mathbf{Z}$

4. $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v \Leftrightarrow u = v + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $u \neq m\pi$, $v \neq n\pi$, $m, n \in \mathbf{Z}$

Tabela 4.8. Ecuaţii trigonometrice fundamentale

Ecuaţia	Discuţie după a	Mulţimea soluţiilor S
$\sin x = a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$-1 < a < 1$	$S = \{x \mid x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ sau $S = (\arcsin a + 2\mathbf{Z}\pi) \cup (\pi - \arcsin a + 2\mathbf{Z}\pi)$ sau $\begin{cases} x' = \arcsin a + 2k\pi, & k \in \mathbf{Z} \\ x'' = \pi - \arcsin a + 2l\pi, & l \in \mathbf{Z} \end{cases}$
	$\|a\| > 1$	$S = \emptyset$
	$a = -1$	$S = -\dfrac{\pi}{2} + 2\mathbf{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \mathbf{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \dfrac{\pi}{2} + 2\mathbf{Z}\pi$
$\cos x = a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$-1 < a < 1$	$S = \{x \mid x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ sau $S = (\arccos a + 2\mathbf{Z}\pi) \cup (-\arccos a + 2\mathbf{Z}\pi)$ sau $\begin{cases} x' = \arccos a + 2k\pi, & k \in \mathbf{Z} \\ x'' = -\arccos a + 2l\pi, & l \in \mathbf{Z} \end{cases}$
	$\|a\| > 1$	$S = \emptyset$
	$a = -1$	$S = \pi + 2\mathbf{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \dfrac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = 2\mathbf{Z}\pi$

Tabela 4.8 *(continuare)*

Ecuaţia	Discuţie după a	Mulţimea soluţiilor S
$\operatorname{tg} x = a$ $x \in \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right)$ $a \in \mathbf{R}$	$a \in \mathbf{R}$	$S = \{x \mid x = \operatorname{arc\,tg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ sau $S = \operatorname{arc\,tg} a + \mathbf{Z}\pi$ sau $x = \operatorname{arc\,tg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
	$a = -1$	$S = -\frac{\pi}{4} + \mathbf{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \mathbf{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \frac{\pi}{4} + \mathbf{Z}\pi$
$\operatorname{cotg} x = a$ $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$ $a \in \mathbf{R}$	$a \in \mathbf{R}$	$S = \{x \mid x = \operatorname{arc\,ctg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ sau $S = \operatorname{arc\,ctg} a + \mathbf{Z}\pi$ sau $x = \operatorname{arc\,cotg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
	$a = -1$	$x = \frac{3\pi}{4} + \mathbf{Z}\pi$
	$a = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$
	$a = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \mathbf{Z}\pi.$

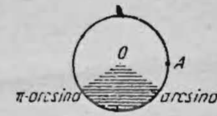
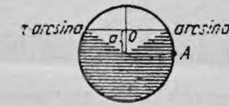
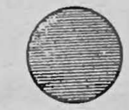
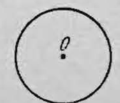
Exemple: 1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$

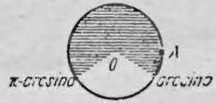
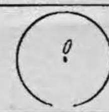
2) $\cos x = \frac{1}{3};\quad \begin{cases} x' = \arccos\frac{1}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbf{Z} \text{ sau} \\ x'' = -\arccos\frac{1}{3} + 2\,l\pi, & l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

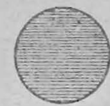
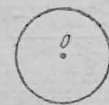
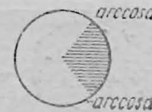
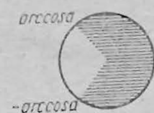
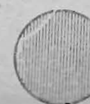
3) $\operatorname{tg} x = -4;\quad x = -\operatorname{arctg} 4 + k\pi,\quad k \in \mathbf{Z}$

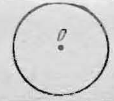
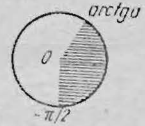
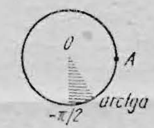
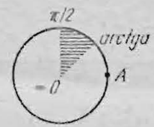
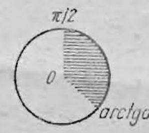
4) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3};\quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi;\quad k \in \mathbf{Z}.$

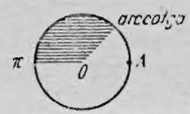
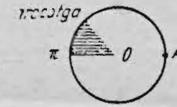
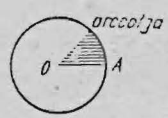
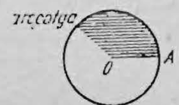
4.21 Inecuații trigonometrice fundamentale

Nr. crt.	Inecuația	Discuție	Mulțimea soluțiilor	Figura
1	$\sin x < a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$-1 < a < 0$	$\{x \mid \pi - \arcsin a + 2k\pi < x < 2\pi + \arcsin a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$	
		$0 \leqslant a \leqslant 1$	$\{x \mid \pi - \arcsin a + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \{x \mid 2\pi l < x < \arcsin a + 2l\pi,\ l \in \mathbf{Z}\}$	
		$a > 1$	$\mathbf{R}$	
		$a \leqslant -1$	$\varnothing$	

		$0 \leqslant a < 1$	$\{x \mid \arcsin a + 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$	
		$-1 \leqslant a < 0$	$\{x \mid 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup$ $\cup \{2\pi + \arcsin a + 2\pi l < x < 2\pi + 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}\}$	
2	$\sin x > a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a < -1$	$\mathbf{R}$	
		$a \geqslant 1$	$\varnothing$	
3	$\cos x < a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$-1 < a \leqslant 0$	$\{x \mid \arccos a + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$	
		$0 < a \leqslant 1$	$\{x \mid \arccos a + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$	

Nr. crt.	Inecuaţia	Discuţie	Mulţimea soluţiilor	Figura
	$\cos x < a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a > 1$	$\mathbf{R}$	
		$a \leq -1$	$\varnothing$	
4	$\cos x > a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$0 < a < 1$	$\{x \mid 2k\pi < x < 2k\pi + \arccos a,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup$ $\cup \{x \mid 2\pi - \arccos a + 2\pi l < x < 2\pi + 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}\}$	
		$-1 < a < 0$	$\{x \mid 2k\pi < x < \arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup$ $\cup \{2\pi - \arccos a + 2\pi l < x < 2\pi + 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}\}$	
		$a < -1$	$\mathbf{R}$	

		$a \geqslant 1$	$\varnothing$	
5	$\operatorname{tg} x < a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a \geqslant 0$	$\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \operatorname{arc\,tg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$	
		$a < 0$	$\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \operatorname{arc\,tg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$	
6	$\operatorname{tg} x > a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a \geqslant 0$	$\left\{x \mid \operatorname{arc\,tg} a + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$	
		$a < 0$	$\left\{x \mid \operatorname{arc\,tg} a + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$	

Nr. crt.	Inecuaţia	Discuţie	Mulţimea soluţiilor	Figura
7	$\cot x < a$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$	$a \geqslant 0$	$\{x \mid \operatorname{arc\,ctg} a + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	
		$a < 0$	$\{x \mid \operatorname{arc\,ctg} a + \pi k < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	
8	$\cot x > a$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$	$a \geqslant 0$	$\{x \mid \pi k < x < \operatorname{arc\,ctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	
		$a < 0$	$\{x \mid \pi k < x < \operatorname{arc\,ctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	

4.22. Aplicații ale trigonometriei

1. *Determinarea distanței dintre două puncte accesibile (A și B) despărțite printr-un obstacol* (fig. 4.4)

Alegem un punct C și măsurăm distanțele a, b și unghiul C. Formula $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C}$ ne dă distanța căutată.

2. *Determinarea distanței dintre un punct accesibil (A) și altul inaccesibil (B)* (fig. 4.5).

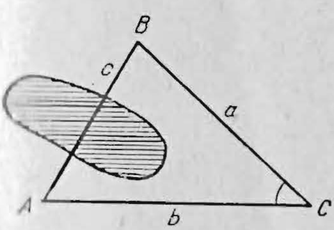


Fig. 4.4

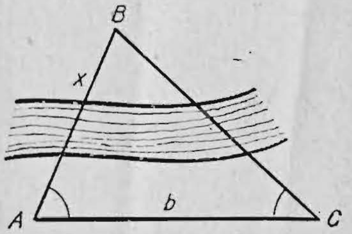


Fig. 4.5

Alegem un punct C, din care să se vadă B, și măsurăm distanța b dintre C și A și unghiurile C și A. Determinăm apoi distanța x dintre A și B cu formula $x = \dfrac{b \sin C}{\sin (A + C)}$.

3. *Determinarea distanței dintre două puncte inaccesibile (A și B)* (fig. 4.6).

Alegem punctele accesibile C și D și măsurăm distanța d dintre D și C și unghiurile D_1, D_2, C_1 și C_2.

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul ACD și deducem

$$\overline{AC} = \frac{d \sin (D_1 + D_2)}{\sin (D_1 + D_2 + C_1)},$$ respectiv în triunghiul BCD,

$$\overline{BC} = \frac{d \sin D_2}{\sin (D_2 + C_1 + C_2)}.$$ Acum în triunghiul ABC cunoscînd două laturi și unghiul dintre ele, putem determina distanța dintre A și B cu teorema cosinusului.

4. *Determinarea distanței dintre două puncte A și B situate pe aceeași verticală* (fig. 4.7).

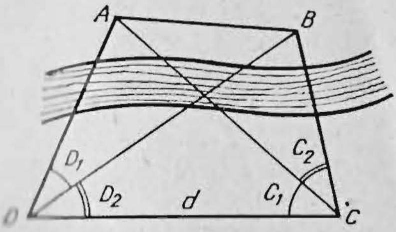


Fig. 4.6

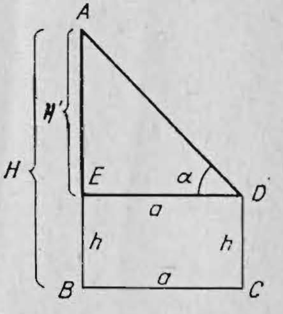


Fig. 4.7

a) *Cazul bazei B accesibile* (fig. 4.7). Alegem un punct C accesibil și măsurăm distanța a dintre B și C precum și unghiul α. Cunoaștem înălțimea h cu ajutorul grafometrului.

Înălțimea căutată este $H = h + H' = h + a \operatorname{tg} \alpha$.

b) *Cazul bazei B inaccesibile* (fig. 4.8). Alegem două puncte accesibile D și C. Măsurăm distanța a dintre C și D precum și unghiurile α și β. Deter-

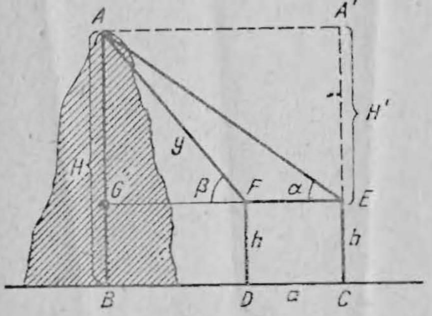


Fig. 4.8

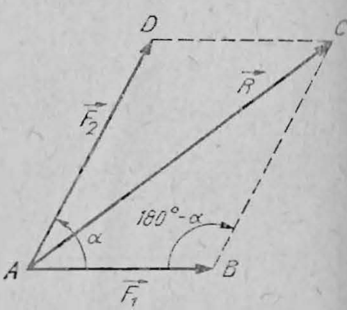


Fig. 4.9

minînd cu ajutorul grafometrului distanța h dintre C și E, putem scrie succesiv

$$H = H' + h = h + y \sin \beta, \quad y = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)};$$

deci

$$H = h + \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

5. *Determinarea mărimii rezultantei $\vec{R}$ a două forțe $\vec{F_1}$ și $\vec{F_2}$* (fig. 4.9).
Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABC și deducem $|\vec{F_1} + \vec{F_2}|^2 = R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos (180° - \alpha)$ sau $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha$.

Analog se determină $|\vec{F_1} - \vec{F_2}|^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos \alpha$.

6. *Aruncarea oblică a unui corp în vid. Bătaia maximă. Înălțimea maximă.* Se știe că dacă aruncăm din O un corp M sub unghiul α față de Ox, cu viteza inițială v_0, legea de mișcare a corpului $M(x, y)$ este (fig. 4.10)

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2, \quad t \geq 0.$$

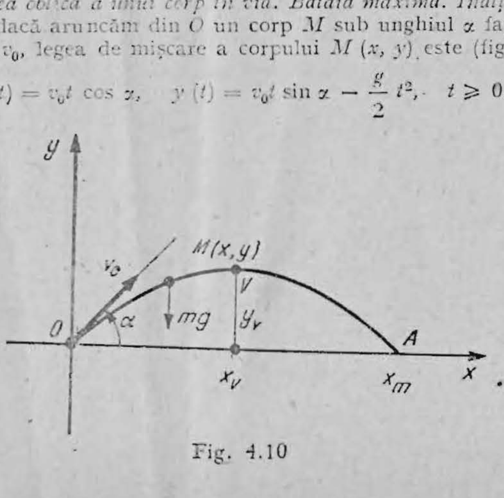


Fig. 4.10

Cînd corpul ajunge în A avem $y(t) = 0$. De aici rezultă rădăcinile $t_1 = 0$ (care corespunde lui O) şi $t_2 = \frac{2 v_0}{g} \sin \alpha$ (care corespunde efectiv lui A). Distanţa

$$x(t_2) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

se numeşte *bătaie* sau *distanţă de aruncare*. Avînd în vedere că $\sin 2\alpha$ are valoarea cea mai mare 1 şi că ea corespunde lui $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, rezultă că *bătaia maximă* este $x_m = \frac{v_0^2}{g}$.

Astfel bătaia maximă se obţine la o aruncare sub unghiul $\alpha = 45°$.

Înălţimea pînă la care se ridică corpul M se determină avînd în vedere că, în punctul cel mai înalt, V, al traiectoriei, viteza corpului are componenta v_y a vitezei nulă.

Deci $v_y = \frac{dy}{dt} = 0$; de aici rezultă „*timpul de urcare*" $t_u = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ respectiv înălţimea $y_v = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$.

Evident y_v este maxim la aruncarea pe verticală $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$; dar pentru, cazul bătăii maxime ($\alpha = 45°$), găsim $y_v = \frac{v_0^2}{4g}$.

4.23. Formule fundamentale pentru funcţiile hiperbolice

Definiţii: 1) sinusul hiperbolic $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2, \quad x \in \mathbf{R}$

2) cosinusul hiperbolic $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2, \quad x \in \mathbf{R}$

3) tangenta hiperbolică $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}$

4) cotangenta hiperbolică $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}^*$

Identităţi fundamentale: 1) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$

2) $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$

3) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

4) $\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1, \quad x \neq 0$

5) $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

6) $\operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$

Tabela 4.9. Relații între funcțiile hiperbolice

Funcția căutată	Funcția dată		
	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sgn} x\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$	$\dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$
$\operatorname{ch} x$	$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{ch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}}$	$\dfrac{\operatorname{sgn} x\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$	$\operatorname{th} x$
$\operatorname{cth} x$	$\dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}}{\operatorname{sh} x}$	$\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sgn} x\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$, $x \neq 0$

Funcțiile hiperbolice ale unor sume și diferențe de argumente

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$$

Formule de transformare a sumei sau diferenței a două funcții hiperbolice în produse de funcții hiperbolice

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y}$$

Formule pentru transformarea unor produse de funcții hiperbolice în sume de funcții hiperbolice

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y)]$$

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)]$$

$$\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)]$$

Funcțiile hiperbolice de argument dublu

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

Funcțiile hiperbolice ale argumentului pe jumătate

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \operatorname{sgn} x \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}; \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}$$

Exprimarea rațională a funcțiilor hiperbolice ale unui argument cu ajutorul tangentei hiperbolice a jumătății argumentului

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{th} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}};$$

Liniarizarea puterilor funcțiilor hiperbolice

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1) \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1)$$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n &= \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx \\ (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n &= \operatorname{ch} nx - \operatorname{sh} nx \end{aligned}\right\} \textit{Teorema lui Moivre}$$

Relațiile dintre funcțiile trigonometrice și cele hiperbolice

Formulele lui Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$; $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

1. $\sin x = -i \operatorname{sh} ix = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
2. $\cos x = \operatorname{ch} ix = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
3. $\operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix = -i \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$
4. $\operatorname{ctg} x = i \operatorname{cth} ix = i \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$
5. $\sin ix = i \operatorname{sh} x = i \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$
6. $\cos ix = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
7. $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x = i \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$
8. $\operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{cth} x = -i \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

Paritatea sau imparitatea funcțiilor hiperbolice

$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$; $\qquad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$

$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$; $\qquad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x,\ x \neq 0$

4.24. Folosirea tabelei IV.10 și a tabelei IV.11

Tabela 4.10. Valorile naturale ale funcțiilor trigonometrice fundamentale ale unghiurilor măsurate în grade sexagesimale

Tabela 4.10 conține valorile funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unghiurilor de la 0° la 90° din 10′ în 10′, cu cinci zecimale.

Pentru unghiurile mai mici de 45°, gradele sînt date la stînga fiecărei tabele, de sus în jos, iar pentru unghiurile mai mari de 45° la dreapta fiecărei tabele, de jos în sus.

Valorile sinusului pentru unghiurile de la 0° la 44° se citesc de sus în jos în tabela care are scris sus „sinus" și de jos în sus pentru unghiurile de la 45° la 89° în tabela care are scris jos „sinus". Minutele se citesc sus în primul caz și jos în al doilea caz. La fel se procedează și cu celelalte funcții. Căutarea în tabele este simplă, mai ales dacă unghiul se găsește în tabele.

Exemplul 1. Să se afle sinusul unghiului de 25° 40′. Citim in stînga 25° și sus 40′ (în tabela 4.10 care are scris sus „sinus"); la intersecția liniei lui 25° cu coloana lui 40′ găsim 0,43313.

Exemplul 2. Să se afle sinusul unghiului de 63°20′. Citim în dreapta 63° și jos 20′ (în tabela 4.10 care are scris jos „sinus"): la intersecția liniei lui 63° cu coloana lui 20′, găsim 0,89363.

Dacă unghiul nu se găsește în tabele, se face interpolarea prin părți proporționale pentru sin x și cos x. Pentru tg x și cotg x avem de făcut următoarele observații: tg x se interpolează prin părți proporționale pentru $x \leqslant 46°40'$. De aici pînă la 70° se obțin numai patru, pînă la 80°40′, numai trei și pînă la 85°40′ numai două zecimale exacte. O determinare mai precisă o dă formula

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{1}{90° - x} \quad \text{conexată cu tabela 3.2 a valorilor } \frac{1}{n}\, 10^3.$$

Tabela 4.11. Logaritmii cu cinci zecimale ai funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de la 0° pînă la 90° din minut în minut

Tabela 4.11 conține logaritmii funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unghiurilor de la 0° la 90° din minut în minut, precum și logaritmii rapoartelor dintre sinusul sau tangenta unui unghi și unghiul respectiv, pentru unghiurile de la 0° la 2°59′.

Gradele se caută în partea de sus a paginii și minutele în prima coloană din dreapta dacă unghiul este mai mic de 45°; dacă unghiul este mai mare de 45°, gradele se găsesc în partea de jos a paginii și minutele în ultima coloană din dreapta. Logaritmii funcțiilor trigonometrice se citesc sus sau în josul paginii, după cum unghiul este mai mic sau mai mare de 45°. Caracteristica comună mai multor logaritmi succesivi este scrisă o singură dată în fiecare grup de zece.

Coloanele notate cu + d 1″ și — d 1″, aflate la dreapta fiecărei coloane de logaritmi, conțin diferența dintre logaritmii funcțiilor a două unghiuri care diferă între ele prin 1″. Aceste diferențe s-au obținut împărțind la 60 diferența dintre doi logaritmi consecutivi. Dacă numărul secundelor cu care crește unghiul este mai mare decît 1, partea proporțională a mantisei se obține înmulțind d 1″ cu numărul respectiv de secunde. Semnele + sau —, care preced d 1″, arată că partea proporțională se adună la mantisă sau se scade din ea. Pentru unghiurile de la 2° la 87° se poate evita înmulțirea folosind tabelele auxiliare P.P. (tabelele părților proporționale) care se găsesc dedesubtul tabelelor principale pentru unghiurile de la 6° la 83° și pe pagina alăturată pentru unghiurile de la 2° la 6° și de la 83° la 87°.

In tabelele P.P. părțile proporționale sînt calculate din secundă în secundă de la 6″ la 10″; părțile proporționale pentru 10″, 20″, 30″, 40″ și 50″ dau, prin împărțirea cu 10, părțile proporționale pentru 1″, 2″, 3″, 4″ și 5″.

Logaritmul sinusului sau tangentei unui unghi mic de la 0° la 3° nu se poate afla interpolînd prin părți proporționale, deoarece aceasta ar duce la inexactități. Pentru a afla logaritmul sinusului sau tangentei unui asemenea unghi se adună la logaritmul numărului de secunde al unghiului numărul S sau T care reprezintă logaritmul raportului dintre sinus și unghi, respectiv dintre tangentă și unghi. Pentru aceasta se folosesc tabelele mici date sub tabelele de logaritmi ai funcțiilor unghiurilor de la 0° la 3°. Ele conțin numărul de secunde ale unghiului și numerele S și T.

Ca și în cazul calculelor logaritmice obișnuite, și în calculul cu logaritmii funcțiilor trigonometrice sînt de rezolvat două probleme: aflarea logaritmului funcției trigonometrice a unui unghi dat și aflarea unghiului corespunzător unui logaritm dat al unei funcții trigonometrice.

Problema 1.

Cazul 1. Unghiul se află în tabele (conține numai grade și minute).

Exemplu. Să se afle lg sin 20°26′. Se caută pe pagina care are scris sus 20°, iar în coloana din stînga 26′; lg. sin se citește sus, iar la intersecția coloanei acestuia cu linia lui 26′ se găsește logaritmul căutat: $\overline{1},54297$.

Cazul 2. Unghiul nu se află în tabele (conține grade, minute și secunde)

Exemplu. Să se afle lg cos 54°18′20″. Se caută pe pagina care are scris jos 54°, iar în coloana din dreapta 18′: lg cos se citește jos, iar la intersecția coloanei acestuia cu linia lui 18′ găsim logaritmul $\overline{1},76607$. Căutăm în mod asemănător lg cos 54°19′ și găsim $\overline{1},76590$. Logaritmul căutat se află cuprins între acești logaritmi. În coloana — d1″ citim 0,28, în tabelele P.P., la intersecția coloanei 0,28 cu linia 20″ citim 5,7, deci aproximativ 6. Intrucît d1″ are semnul minus, înseamnă că din mantisa logaritmului lui 54°18′ se scad 6 unități de ordinul al cincilea. Așadar logaritmul căutat este $\overline{1},76601$.

Problema 2.

Cazul 1. Logaritmul dat se găsește în tabele.

Exemplu. Să se afle x știind că lg tg $x = \overline{1},90371$. Logaritmul fiind mai mic decît 0, înseamnă că unghiul este mai mic de 45°. Deci se caută în coloana notată sus „lg tg"; se găsește 38°42′.

Cazul 2. Logaritmul căutat nu se află în tabele.

Exemplu. Să se afle x știind că lg cotg $x = \overline{1},73185$. Deoarece logaritmul este negativ, unghiul este mai mare decît 45°.

Căutînd în tabele se deduce că acest logaritm este cuprins între $\overline{1},73175$ și $\overline{1},73205$, cărora le corespund unghiurile 61°40′ și 61°39′. În coloana — d1″ găsim 0,50. Între $\overline{1},73185$ și $\overline{1},73175$ diferența este 10. În tabela P.P., în coloana 0,50, se caută 10, căruia îi corespunde în prima coloană din stînga 20″. Deci unghiul căutat este de 61°39′20″.

5. ANALIZĂ MATEMATICĂ

5.1. Numerele reale

Mulțimea numerelor reale[1] constituie o mulțime $\mathbf{R}$, înzestrată cu două operații binare, notate cu $+$ (adunarea) și $\cdot$ (înmulțirea), împreună cu o relație $\leqslant$ (care se citește mai mic decît sau egal cu), avînd proprietățile:

1. $(\mathbf{R}, +)$ este *grup comutativ*, adică:

1.1. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ avem $(x + y) + z = x + (y + z)$.

1.2. $\exists 0 \in \mathbf{R}$, astfel încît $\forall x \in \mathbf{R}$ avem $x + 0 = 0 + x = x$.

1.3. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists x' \in \mathbf{R}$, astfel încît $x + x' = x' + x = 0$; x' se numește *opusul* lui x și se notează cu $-x$.

1.4. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ avem $x + y = y + x$.

2. $(\mathbf{R}^*, \cdot)$ unde $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ este *grup comutativ*, adică:

2.1. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^*$ avem $x(yz) = (xy)z$.

2.2. $\exists 1 \in \mathbf{R}^*$, astfel încît $\forall x \in \mathbf{R}^*$, avem $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

2.3. $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $\exists x' \in \mathbf{R}^*$ astfel încît $xx' = x'x = 1$; x' se numește *inversul* lui x și se notează cu x^{-1} sau $\dfrac{1}{x}$.

2.4. $\forall x, y \in \mathbf{R}^*$ avem $xy = yx$.

3. Adunarea și înmulțirea sînt *compatibile* între ele, adică

3.1. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ avem $x(y + z) = xy + xz$

3.2. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ avem $(x + y)z = xz + yz$.

4. Relația $\leqslant$ este o *relație de ordine totală* compatibilă cu operațiile de adunare și înmulțire:

4.1. $\forall x \in \mathbf{R}$, avem $x \leqslant x$

4.2. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x \leqslant y$ și $y \leqslant x$ implică $x = y$

4.3. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, $x \leqslant y$ și $y \leqslant z$ implică $x \leqslant z$

4.4. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ avem $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$

4.5. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ și $x \leqslant y$ avem $x + z \leqslant y + z$, $\forall z \in \mathbf{R}$

4.6. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ și $x \leqslant y$ avem $xz \leqslant yz$, $\forall z \geqslant 0$.

---

[1]) Numelele reale pot fi introduse și cu ajutorul *tăieturilor* în mulțimea numerelor raționale *(Dedekind)*, al *șirurilor fundamentale de numere raționale (Cantor)* și *al fracțiilor zecimale infinite (Weierstrass)*, nu numai pe cale axiomatică.

5. $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leqslant)$ satisface *axioma lui Arhimede*:
$\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall y \in \mathbf{R}$, $y > 0$, $\exists n \in \mathbf{N}$ astfel încît $ny > x$.

6. Oricare ar fi $(a_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de numere reale crescător și $(b_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de numere reale descrescător, pentru care $a_n \leqslant b_m$, $\forall n, m \geqslant 1$ și $b_n - a_n \to 0$ atunci există un singur număr $c \in \mathbf{R}$, astfel încît $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, $\forall n \geqslant 1$.

Observația 1. Axiomele de la 1—3 ne arată că $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Axiomele 4.1—4.4 ne arată că relația $\leqslant$ este o relație de ordine totală, iar cele de la 4.5—4.6 că relația $\leqslant$ este compatibilă cu structura de corp, a lui $\mathbf{R}$.

Observația 2. În locul axiomelor 5—6 se poate lua axioma

5'. Orice mulțime nevidă $E \subset \mathbf{R}$ majorată (i.e.[1] $\exists b \in \mathbf{R}$, astfel încît $\forall x \in E$ avem $x \leqslant b$) posedă margine superioară.

Observația 3. Rezultă astfel că $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leqslant)$ este un *corp ordonat continuu arhimedian* (sau *complet ordonat*).

5.1.1 *Submulțimi ale lui* R

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},\ \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$$

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\};\ \mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}.$$

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}^*\right\};\quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\};\ \mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$$

5.1.2 *Proprietăți ale numerelor reale, deduse din axiome*

1. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ și $x + z = y + z$ avem $x = y$.

2[2]. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ avem $-(x + y) = -x + (-y) = -x - y$.

3. $\forall x \in \mathbf{R}$ avem $-(-x) = x$.

4. $\forall a, b \in \mathbf{R}$ ecuația $a + x = b$ are soluția unică $x = b - a \in \mathbf{R}$.

5. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ avem $(x + y) - z = x + (y - z)$ și $x - (y + z) = (x - y) - z$.

6. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ $z \neq 0$ și $xz = yz$ avem $x = y$.

7. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ avem $x(-y) = (-x)y = -xy$ și $(-x)(-y) = xy$.

8. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ avem $x(y - z) = xy - xz$.

9. $\forall x \in \mathbf{R}$ avem $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

10[3]. $\forall x \in \mathbf{R}^*$ avem $(x^{-1})^{-1} = x$.

---

[1] i.e. este prescurtarea expresiei latinești „id est", care se traduce prin „adică", „aceasta înseamnă".

[2] $\forall x, y \in \mathbf{R}$, numărul $x + (-y)$ se numește *diferența* numerelor x și y și se notează $x - y$.

[3] $\forall x, y \in \mathbf{R}$ și $y \neq 0$, numărul $x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$ se numește *cîtul* împărțirii lui x la y și se notează $\frac{x}{y}$.

11. $\forall x, y \in \mathbf{R}^*$ avem $(xy)^{-1} = \dfrac{1}{xy}$.

12. $\forall a, b \in \mathbf{R}$ cu $a \neq 0$, ecuația $ax = b$ are soluția unică $x = \dfrac{b}{a} \in \mathbf{R}$.

13. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, și $xy = 0$ avem $x = 0$ sau $y = 0$.

14. $\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ avem $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad + bc}{cd}$; $\dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{d} = \dfrac{ab}{cd}$, respectiv $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad - bc}{cd}$

15. $\forall a \in \mathbf{R}$ și $b, c, d \in \mathbf{R}^*$ avem $\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

16. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ avem $x \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant -x$; $x \geqslant 0 \Leftrightarrow -x \leqslant 0$.

17. $\forall x, y, z, t \in \mathbf{R}$, $x \leqslant y$ și $z \leqslant t$ rezultă $x + z \leqslant y + t$.

18. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $\forall z \leqslant 0$ și $x \leqslant y$ rezultă $xz \geqslant yz$.

19. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x > 0$ și $y < 0$ rezultă $xy < 0$.

20. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x < 0$ și $y < 0$ rezultă $xy > 0$.

21. $x, y, z, t \in \mathbf{R}_+$, $x \geqslant y$ și $z \geqslant t$, $xz \geqslant yt$.

22. $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $x^2 > 0$.

23. $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$ avem $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 0$; $x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < 0$

24. $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*$, $x \leqslant y \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$

25. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ și $x < y$, $\exists r \in \mathbf{Q}$ și $\rho \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, astfel încît $x < r < y$ și $x < \rho < y$.

26. Mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

27. Orice șir fundamental de numere reale este convergent și reciproc.

28. Fie $a \in \mathbf{R}_+$ și $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Atunci rădăcina de ordinul n a lui a există și este unică.

5.1.3. *Dreapta încheiată*

1. Numerele reale pot fi puse în corespondență bijectivă cu punctele unei drepte pe care au fost alese un punct origine O, un sens pozitiv și o unitate de măsură pentru lungimi. Din această rațiune, mulțimea $\mathbf{R}$ se identifică uneori cu dreapta considerată, numind-o *dreapta reală*, iar numerele reale se identifică cu punctele acestei drepte.

2. Fie $-\infty$ și $+\infty$ două simboluri. Notăm $\overline{R} := R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Relația de ordine $\leqslant$ a lui R se extinde la $\overline{R}$ punînd $-\infty < x < +\infty$, $\forall x \in R$. Rezultă că $(\overline{R}, \leqslant)$ este total ordonată.

Mulțimea $\overline{R}$ se numește *dreapta completată* sau *dreapta încheiată*.

Observații. Pe $\overline{R}$ nu se pot introduce structuri algebrice.

5.1.4. *Intervale numerice*

1. Fie $a \in R$, $b \in R$ și $a < b$. Mulțimile următoare sînt intervale mărginite ale lui R:

$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ (interval deschis).

$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (interval închis; *compact*).

$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ (interval închis la stînga și deschis la dreapta).

$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ (interval deschis în stînga și închis în dreapta).

2. Fie $a \in R$. Mulțimile următoare sînt intervale nemărginite ale lui R:

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ (semidreaptă deschisă la stînga).

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$ (semidreaptă închisă la stînga).

$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$ (semidreaptă deschisă la dreapta).

$(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$ (semidreaptă închisă la dreapta).

Observație. Numerele a, b, $-\infty$, $+\infty$ se numesc *capetele intervalelor respective*. Dacă I este un interval al axei reale, atunci intervalul obținut din I prin înlăturarea capetelor acestuia se numește *interiorul lui I* și se notează cu $\mathring{I}$.

5.1.5. *Vecinătate. Punct de acumulare*

Definiții. 1. *Se numește vecinătate a lui* $a \in R$, *orice mulțime* $V \subset R$, *care conține un interval deschis, care conține pe a.*

Se numește *vecinătate a lui* $-\infty$ orice mulțime $V_{-\infty} \subset R$ care conține o semidreaptă deschisă la dreapta $(-\infty, a)$, cu $a \in R$.

Se numește *vecinătate a lui* $+\infty$ orice mulțime $V_{+\infty} \subset R$ care conține o semidreaptă deschisă la stînga $(a, +\infty)$, cu $a \in R$.

2. Fie $E \subset R$ o mulțime. Un punct $x_0 \in R$ se numește *punct de acumulare* al mulțimii E, dacă oricare ar fi V o vecinătate a lui x_0 avem $V \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor de acumulare ale lui E se notează cu E' și se numește *mulțimea derivată* a lui E.

3. Un punct $x_0 \in R$ se numește *punct de acumulare la dreapta* (respectiv la stînga) al lui E, dacă oricare ar fi V o vecinătate a lui x_0 avem $V^+ \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ (respectiv $V^- \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$), unde $V^+ = V \cap [x_0, +\infty)$ (respectiv $V^- = (-\infty, x_0] \cap V$) este o semivecinătate la dreapta a lui x_0 (respectiv o semivecinătate la stînga a lui x_0).

Mulțimea punctelor de acumulare la dreapta ale lui E se notează cu E'^d, iar mulțimea punctelor de acumulare la stînga ale lui E se notează cu E'^s.

Observăm că $E' = E'^s \cup E'^d$ și că $E'^s \cap E'^d$ poate fi vidă.

Teoremă. 1) $x_0 \in E' \Leftrightarrow \exists x_n \in E \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$;

2) $x_0 \in E'^s \Leftrightarrow \exists x_n \in E$, $x_n < x_0$, $x_n \to x_0$;

3) $x_0 \in E'^d \Leftrightarrow \exists x_n \in E$, $x_n > x_0$, $x_n \to x_0$.

Observație. În mod analog se poate defini noțiunea de punct de acumulare al lui E în $\overline{R}$.

5.1.6. *Mulțimi mărginite ale lui* **R**. *Margine superioară. Margine inferioară*

Definiție. Mulțimea nevidă $E \subset \mathbf{R}$ se numește majorată sau mărginită superior dacă $\exists b \in \mathbf{R}$ astfel încît $\forall x \in E$ avem $x \leqslant b$. Numărul b se numește *majorant* pentru E.

Dacă $b \in E$ spunem că E are un *cel mai mare element*, anume pe b; se notează $b = \max E$.

Analog, mulțimea $E \subset \mathbf{R}$ se numește *minorată* sau *mărginită inferior* dacă $\exists a \in \mathbf{R}$, astfel încît $\forall x \in E$ avem $a \leqslant x$. Numărul a se numește *minorant* pentru E.

Dacă $a \in E$, spunem că E are un cel mai mic element, anume pe a; se notează $a = \min E$.

Exemplu. Pentru $E = [1, 3]$, $\min E = 1$ și $\max E = 3$. Intervalele deschise ale lui $\mathbf{R}$ nu posedă min și max.

Definiție. Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulțime nevidă care admite minoranți. Se numește marginea inferioară a lui E sau infimumul lui E și se notează* $\inf E$ *cel mai mare minorant al lui E.*

Definiție. Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulțime nevidă, care admite majoranți. Se numește marginea superioară a lui E sau supremumul lui E și se notează $\sup E$ *cel mai mic majorant al lui E.*

Exemplu. Pentru $E = \left\{3 + \dfrac{1}{n}\right\}_{n \geqslant 1}$ avem $\inf E = 3$ și $\sup E = 4$; $\inf \mathbf{R} = -\infty$.

5.2. Inegalități remarcabile

1. Forme ale *inegalității lui Bernoulli*:

α) $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, $\forall a \in \mathbf{R}$, $a \geqslant -1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

β) $(1 + a)^\alpha \geqslant 1 + \alpha a$, $\forall a \in \mathbf{R}$, $a \geqslant -1$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \geqslant 1$.

γ) $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant -1$, toate aceste numere avînd același semn.

2. *Inegalitatea lui Cauchy*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \quad \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}.$$

Inegalitatea devine egalitate pentru $a_i = \lambda b_i$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$.

3. *Inegalitățile lui Minkovski*:

$$\alpha) \quad \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}.$$

---

*) $\inf E$ este caracterizat de următoarele două proprietăți:
1) $\forall x \in E$ avem $\inf E \leqslant x$;
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in E$, astfel încît $y < \varepsilon + \inf E$,
iar $\sup E$ de proprietățile
1′) $\forall x \in E$, avem $x \leqslant \sup E$
2′) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in E$, astfel încît $\sup E - \varepsilon < y$;

β) $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall a_i, b_i \in \mathbf{R}_+, p > 1.$

γ) $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $a_i b_i, \in R_+,\ 0 < p < 1.$

δ) $[(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)]^{\frac{1}{n}} \geqslant (a_1a_2\dots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1b_2\dots b_n)^{\frac{1}{n}}$, $\forall a_i, b_i \in \mathbf{R}_+,\ i = \overline{1, n}.$

4. Inegalitățile mediilor:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dots+\dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n},$$

cu a_i, $i = \overline{1, n}$ numere reale strict pozitive. Inegalitățile devin egalități dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

5. $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^k$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $\forall a_i \in \mathbf{R}_+^*$, $i = \overline{1, n}$, egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

6. *Inegalitatea lui Hölder* pentru sume finite:

α) $\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$ și $1 < p < \infty$, iar q se deduce din $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

β) $\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $\forall b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}^*$ și $0 < p < 1$, iar q se deduce din $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Inegalitatea se transformă în egalitate pentru $|a_i|^p = \lambda|b_i|^q$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $i = \overline{1, n}$.

7. *Inegalitatea lui Cebîșev*: dacă $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ este un șir finit de numere pozitive monoton crescător, iar $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ este un șir finit de numere pozitive monoton descrescător, atunci avem

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k < \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right),$$

excepție făcînd cazul în care $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, cînd inegalitatea devine egalitate.

Dacă ambele şiruri sint sau monoton crescătoare sau monoton descrescătoare simultan, atunci avem

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

8. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2, \quad \forall a_i \in \mathbf{R}_+^*, \quad i = \overline{1, n}.$

9. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \quad \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}_+^*.$

10. $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant \frac{n}{2}, \quad \forall a_i \in \mathbf{R}_+^*, \quad i = \overline{1, n}, a_1 a_2 \ldots a_n = 1$

11. Fie intervalul compact $[a, b] \subset \mathbf{R}$, cu $0 < a < b$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n puncte din acest interval. Atunci avem

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

12. $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n, \quad \forall a_i \in \mathbf{R}_+^*, \quad i = \overline{1, n}.$

13. $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \quad \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$

14. $\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sqrt{a_1 + \ldots + a_n} \cdot \sqrt{b_1 + \ldots + b_n}$, $a_i, b_i \in \mathbf{R}_+$, $i = \overline{1, n}$.

15. $\frac{n^2 h}{2} < h + 2h + \ldots + nh < \frac{(n+1)^2 h}{2}, \quad h > 0, \quad n \geqslant 1$ (*Arhimede*).

16. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2, \quad n \geqslant 1.$

17. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 2.$

18. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n+1} - 2, \quad n > 1.$

19. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \geqslant 1.$

20. $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9}, \ldots, \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}\, n \geqslant 1.$

21. $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad n \geqslant 1.$

22. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\dots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n\geqslant 1$.

23. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$, $n\geqslant 1$.

24. $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$, $n\geqslant 3$.

25. $\sqrt[n]{n+1}<\sqrt[n-1]{n}$, $n\geqslant 3$.

26. $\sqrt[n]{n!}>\sqrt{n}$, $n\geqslant 3$.

27. $n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n\geqslant 1$.

28. $n!<2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $n\geqslant 3$.

29. $n!>2^{n-1}$, $n\geqslant 3$.

30. $2^n>n^3$, $n\geqslant 10$.

31. $\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$, $\forall a,b\in\mathbf{R}_+^*$, $n\geqslant 1$.

Inegalitatea devine egalitate dacă $a=b$.

Cazuri particulare importante:

$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$, $\forall a,b\in\mathbf{R}_+^*$.

$4(a^3+b^3)\geqslant(a+b)^3$, $\forall a,b\in\mathbf{R}_+^*$.

$8(a^4+b^4)\geqslant(a+b)^4$, $\forall a,b\in\mathbf{R}_+^*$.

32. $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$.

33. $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$, $\forall a,b,c\in\mathbf{R}$. Inegalitatea devine egalitate dacă și numai dacă $a=b=c$.

34. $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

35. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$, $ab>0$.

36. $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, $\forall a\in\mathbf{R}_+^*$.

37. $\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$, $a>b>$

38. $a^3+b^3+c^3>3abc$, $\forall a,b,c\in\mathbf{R}_+^*$; $a\neq b, b\neq c, c\neq a$.

39. $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$.

40. $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\forall a,b\in\mathbf{R}_+$.

41. $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $\forall a,b,c,d\in\mathbf{R}_+^*$.

42. $\sqrt[3]{(a+d)(b+e)(c+f)}\geqslant\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{def}$, $\forall a,b,\dots,f\in\mathbf{R}_+^*$.

5.3. Şiruri de numere reale

Noţiunea de şir. *Se numeşte şir de numere reale o aplicaţie f a mulţimii* **N** *în* **R**. Dacă $a_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci şirul f se scrie $(a_n)_{n \geq 0}$, $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, (a_n) sau $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; a_n se numeşte *termenul general* al şirului f.

În locul lui **N** se poate lua $\mathbf{N}^*$, în care caz şirul f se scrie $(a_n)_{n \geq 1}$, $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, (a_n) sau $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Exemple de şiruri: 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

2) $2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$ (un şir constant)

3) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots$

Şir finit. O aplicaţie f a mulţimii $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ în mulţimea **R** se numeşte *şir finit* (de numere reale) şi se notează $(a_k)_{k=\overline{1,n}}$ sau $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Noţiunea de subşir. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este un şir şi $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ un şir de numere naturale strict crescător, atunci şirul $(a_{k_n})_{n \geq 1}$ se numeşte *subşir* al şirului iniţial.

Şiruri cu limită. Un şir numeric $(a_n)_{n \geq 1}$ se numeşte *cu limită în* $\overline{\mathbf{R}}$, dacă $\exists a \in \overline{\mathbf{R}}$, cu proprietatea că orice vecinătate a lui a conţine toţi termenii şirului, începînd de la un anumit rang înainte. Scriem $\lim a_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$ pentru $n \to +\infty$.

Şiruri convergente. Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ care are limita $a \in \mathbf{R}$ se numeşte *convergent* în **R**.

1. Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ converge către $a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in N$, astfel încît $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = \frac{n+1}{2n}$, $n \geq 1$, are limita $a = \frac{1}{2}$.

2. Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) $\Leftrightarrow \forall c > 0$ $\exists n_c \in \mathbf{N}$, aşa fel încît $\forall n \geq n_c$ să avem $a_n \geq c$ (respectiv $a_n \leq -c$).

Şiruri divergente. Un şir care nu este convergent se numeşte *divergent*.

Şiruri mărginite. Şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este *mărginit* dacă şi numai dacă $\exists M > 0$, astfel încît, $\forall n \in \mathbf{N}$, să avem $|a_n| \leq M$.

Exemplu. Şirul $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ este mărginit de 1, căci $|a_n| = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Şiruri crescătoare. Şiruri descrescătoare. Şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este *crescător* (respectiv *descrescător*) dacă $\forall n \in \mathbf{N}$ avem $a_n \leq a_{n+1}$ (respectiv $a_n \geq a_{n+1}$). Şirurile crescătoare şi şirurile descrescătoare se numesc *şiruri monotone*.

Exemplu. Şirul definit astfel $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $n \geq 2$, este *strict crescător*.

Şir fundamental sau şir Cauchy. Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale se numeşte *şir fundamental* sau *Cauchy* dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $\forall m, n \geq n_\varepsilon$ să avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Noţiunea de şir fundamental şi cea de şir convergent de numere reale sînt echivalente.

5.3.1. *Teoreme fundamentale asupra șirurilor numerice*

1. Orice șir convergent de numere este mărginit.

2. (*Criteriul majorării*). Dacă $a \in \mathbf{R}$, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ sînt două șiruri care au proprietatea $\forall n \geq 1$, $|a_n - a| \leq \alpha_n$ și $\alpha_n \to 0$, atunci $a_n \to a$.

Exemplu. Pentru șirul cu termenul general $a_n = \sin \frac{1}{n}$ avem $|a_n - 0| \leq \frac{1}{n}$ și, cum $\frac{1}{n} \to 0$, rezultă $a_n \to 0$.

3. *Trecerea la limită în inegalități.* Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri cu limită pentru care $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri astfel încît $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

5. Dacă șirul de numere strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător și nemărginit, atunci $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Exemplu. Șirul cu termenul general $a_n = 1 + 2^n$ fiind crescător și nemărginit, șirul cu termenul general $\frac{1}{1 + 2^n} \to 0$.

6. Dacă $a \in \mathbf{R}$ iar șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ converge către a, atunci șirul $(|a_n|)_{n\geq 1}$ converge către $|a|$.

7. Dacă șirul $(|a_n|)_{n\geq 1}$ converge către 0, atunci $a_n \to 0$.

8. (*Teorema de convergență a șirurilor monotone*). Orice șir monoton și mărginit este convergent (*Weierstrass*).

Exemplu. Șirul definit astfel $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $n \geq 2$ este strict crescător și mărginit. El are limita $a = 2$.

9. *Lema lui Cesaro.* Orice șir mărginit conține un subșir convergent.

10. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, un șir convergent astfel încît $|a_n| \leq M$, $\forall n \geq n_0$; atunci $|\lim\limits_{n\to\infty} a_n| \leq M$.

11) *Teorema „cleștelui".* 1) Dacă șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ îndeplinesc condițiile i) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$; ii) $b_n - a_n \to 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Exemple. 1. Șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ sînt definite astfel:

$$a_0 \in \mathbf{R}, \quad b_0 \in \mathbf{R}, \quad 0 < a_0 < b_0$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{a_0 b_0},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}.$$

....

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}},$$

....

îndeplinesc condițiile din teorema precedentă și au una și aceeași limită (*Gauss*), *media aritmetico-geometrică a numerelor a_0 și b_0*.

2. Șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ definite astfel

$$a_0 \in R \quad b_0 \in R, \quad a_0 < b_0$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \qquad b_1 = \frac{a_2 + 2b_0}{3};$$

....

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3} \qquad n \geq 2$$

....

îndeplinesc condițiile i) și ii) $\left(b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{6^n}\right)$ și au, deci, aceeași limită.

2) Dacă $a \in R$, iar $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(\beta_n)_{n\geq 1}$ sînt trei șiruri pentru care $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$, $\forall n \geq n_0 \in N$, și $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$, atunci și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Exemplu. Avem evident $\underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}}_{\alpha_n} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{a_n} \leq$

$\leq \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}_{\beta_n}$. Cum $\alpha_n, \beta_n \to 1$, rezultă $a_n \to 1$.

12) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir cu limita $a \in \overline{R}$. Atunci șirul mediilor aritmetice $\left(b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)$, cel al mediilor geometrice ($g_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $a_k > 0$, $\forall k \in N^*$) și șirul mediilor armonice $\left(h_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}\right)$, $a_k > 0$, $\forall k \in N^*$) au aceeași limită a.

13) Șirul $(q^n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă $-1 < q \leq 1$.

14) *Lema lui Cesaro-Stolz*. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere cu proprietățile

1) $0 < b_1 < b_2 \ldots < b_n < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{R}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

15) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri convergente. Atunci

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$.

iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, dacă $\forall n \geq 1$, $b_n \neq 0$ şi $\lim b_n \neq 0$.

iv) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim_{n\to\infty} b_n}$, dacă $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ şi $\forall n \geq 1$, $a_n > 0$.

16) Rezultatele de la 15) se extind şi la şirurile cu limită, dacă facem convenţiile:

1) $a + (+\infty) = (+\infty) + a = a - (-\infty) = -(-\infty) + a = a + \infty = \infty + a = \infty$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

2) $a - (+\infty) = (-\infty) + a = a + (-\infty) = a - \infty = -\infty + a = -\infty$ $\forall a \in \mathbf{R}$.

3) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

4) $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$.

5) $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \pm\infty$ după cum $a > 0$ sau $a < 0$.

6) $a(-\infty) = (-\infty) \cdot a = \mp\infty$, după cum $a > 0$ sau $a < 0$.

7) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

8) $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$.

9) $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

10) $\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$ sau $\mp\infty$, după cum $a > 0$ sau $a < 0$

11) $(\pm\infty)^n = (\pm 1)^n \cdot \infty$, $n \in \mathbf{N}^*$.

12) $a^{+\infty} = +\infty$, dacă $a > 1$ şi $a^{+\infty} = 0$ dacă $0 < a < 1$,

13) $a^{-\infty} = 0$, dacă $a > 1$ şi $a^{-\infty} = +\infty$, dacă $0 < a < 1$.

14) $\infty^a = \infty$, $\forall a > 0$; $\infty^a = 0$, $\forall a < 0$.

15) $0^{+\infty} = 0$; $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$; $(+\infty)^{-\infty} = 0$.

16) $\sqrt[n]{(+\infty)} = +\infty$; $\sqrt[2n+1]{(-\infty)} = -\infty$.

17) $\log_a(+\infty) = +\infty$; $\log_a 0 = -\infty$, dacă $a > 1$.

18) $\log_a 0 = +\infty$, $\log_a(+\infty) = -\infty$, dacă $0 < a < 1$.

17) Simbolurile $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0 şi 1^∞ nu au sens (nu au înţeles).

18) Limita l a şirului cu termenul general $a_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, unde $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f funcţie continuă, este $l = \int_a^b f(x)\,dx$.

5.3.2. *Şiruri remarcabile*

1) *Şirul lui Fibonacci*, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$, care are termenul general

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n \geq 1$$

şi pentru care avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{numărul „de aur)"}$$

2) Şirul care aproximează pe $\sqrt{a}$, $a > 0$ *(Heron)*, cu termenul general

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left[a_n + \frac{a}{a_n}\right], \quad n \geq 1, \ a_1 > 0 \text{ fiind un număr real dat.}$$

3) Şirul cu termenul general

$$a_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right], \quad n \geq 1, a > 0, \ a \in \mathbf{R}, \ a_1 > 0, \ a_1 \in \mathbf{R}, \ p \in \mathbf{N}$$

$p \geq 2$ care este convergent către $\sqrt[p]{a}$ *(Newton)*.

4) *Şirul lui Traian Lalescu*, avînd termenul general

$$a_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

5) *Şirul care are drept limită numărul* e

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = e = 2{,}7182818284\ldots$$

6) Şirul care are drept limită *constanta* γ *a lui Euler*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \gamma = 0{,}577215661 9\ldots$$

7) Şirul cu termenul general

$$e_n = \frac{1}{2^n}(a_0 + C_n^1 a_1 + \ldots + C_n^n a_n)$$

care are limita a, dacă şirul convergent de numere $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita a *(Euler)*

5.3.3. *Limite fundamentale de şiruri*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $\forall a > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$, $a > 0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^p n}{n^a} = 0$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $p \in \mathbf{N}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $\forall a \in \mathbf{R}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a^n = \begin{cases} 0, \text{ dacă } |a| < 1, \ p \in R_+ \\ +\infty, \text{ dacă } a > 1, \ p \in \mathbf{R}_+ \end{cases}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \begin{cases} \infty, \text{ pentru } a > 1, \ p \in \mathbf{R}_+ \\ 0, \text{ pentru } |a| \leqslant 1, \ p \in \mathbf{R}_+. \end{cases}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$.

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^{\pm n} = \mathbf{e}$

11) $\lim\limits_{\substack{x_n\to 0 \\ x_n > 0}} \left(1 \pm x_n\right)^{\pm \frac{1}{x_n}} = \mathbf{e}$

12) $\lim\limits_{\substack{y_n\to \infty \\ y_n > 0}} \left(1 \pm \frac{1}{y_n}\right)^{\pm y_n} = \mathbf{e}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$

14) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$

15) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_0n^p+A_1n^{p-1}+\ldots+A_p}{B_0n^q+B_1b^{q-1}+\ldots+B_q}=\begin{cases}\frac{A_0}{B_0}, & \text{pentru } p=q\in\mathbb{N};\ B_0\neq 0\\ +\infty, & \text{pentru } \frac{A_0}{B_0}>0,\ p>q,\\ -\infty, & \text{pentru } \frac{A_0}{B_0}<0,\ p>q,\\ 0, & \text{pentru } p<q.\end{cases}$$

16) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$ (Wallis).

5.3.4. *Șiruri recurente liniare*

Termenul general al șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit recurent astfel:

$$\begin{cases}a_{n+k}=\alpha_1a_{n+k-1}+\alpha_2a_{n+k-2}+\ldots+\alpha_ka_n, & n=1,2,\ldots\\ a_1,a_2,\ldots,a_k \text{ fiind cunoscuți;}\\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in\mathbf{R} \text{ fiind } k \text{ numere date}\end{cases}$$

se află rezolvînd *ecuația caracteristică*

$$r^k=\alpha_1r^{k-1}+\ldots+\alpha_k. \qquad (1)$$

1. Dacă ecuația (1) are rădăcinile reale și distincte $r_1, r_2, \ldots, r_k$ atunci

$$a_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n+\ldots+C_kr_k^n,$$

constantele $C_1,\ldots,C_k$ determinîndu-se din cunoașterea primilor k termeni $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ai șirului respectiv.

Exemplu. Fie un șir definit astfel: $a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$, $n\geqslant 1$, $a_1=0$, $a_2=1$; să găsim termenul său general a_n; pentru el avem:

$$r^2=\frac{1}{2}(r+1),\quad r_1=1;\ r_2=-\frac{1}{2},$$

$$a_n=C_1+\left(-\frac{1}{2}\right)^nC_2;\ a_1=0 \text{ și } a_2=1\Rightarrow C_1=\frac{2}{3},\ C_2=\frac{4}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right),\quad n\geqslant 1.$$

2. Dacă ecuația (1) are o rădăcină reală r_1 multiplă de ordinul s, atunci ea contribuie în expresia lui a_n (*soluția generală*) cu s termeni de forma $(C_1 + C_2 n + \ldots + C_s n^{s-1}) r_1^n$.

3. Dacă ecuația cu coeficienți reali (1) admite două rădăcini complexe conjugate $r_{1,2} = \rho(\cos\omega \pm i\sin\omega)$, atunci ele contribuie în expresia termenului general a_n cu termenii $(C_1 \cos n\omega + C_2 \sin n\omega)\rho^n$.

5.4. Serii de numere reale

Definiție. *Fie șirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de numere reale și șirul* $(S_n)_{n\geq 1}$, *definit astfel* $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Se numește *serie de numere* perechea de șiruri $(a_n)_{n\geq 1}$, $(S_n)_{n\geq 1}$, care se notează $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sau $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$. Termenii șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ se numesc termenii seriei, a_n se numește *termenul general al seriei*, termenii șirului $(S_n)_{n\geq 1}$ se numesc *sumele parțiale ale seriei*, iar seria $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ se numește *restul de rang n al seriei* considerate.

Serii convergente, divergente, oscilante. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ se numește *convergentă* dacă șirul sumelor ei parțiale $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Limita S a șirului $(S_n)_{n\geq 1}$ se numește *suma seriei* și se notează $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Exemple. 1) Seria geometrică $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots$ este convergentă dacă $-1 < q < 1$ și are suma $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

2) Seria armonică alternată $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n} + \ldots$ este convergentă și are suma $S = \ln 2$.

3) Seria $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \ldots$ este convergentă și are suma $S = e$.

Seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ se numește *divergentă* dacă șirul sumelor ei parțiale este divergent.

Exemple. 1) Seria $1 + 1 + 1 + \ldots$ este o serie divergentă și are suma $+\infty$.

2) *Seria armonică* $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ este divergentă și are suma $+\infty$.

3) *Seria armonică generalizată* $1 + \dfrac{1}{2^\sigma} + \ldots + \dfrac{1}{n^\sigma} + \ldots$ este *divergentă pentru* $\sigma \leq 1$ (avînd suma $+\infty$) *și convergentă pentru* $\sigma > 1$.

Seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ se numește *oscilantă* dacă șirul sumelor ei parțiale nu are limită.

Exemplu. Seria $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ este o *serie oscilantă*.

Teoremă. Dacă $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este o serie convergentă de numere, atunci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ converge către zero.

Corolar. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ nu tinde către zero, atunci seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă.

5.4.1. *Alte serii remarcabile*

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbf{N}^*$, fixat

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^4}{n!} = 15\, e.$

3) $\sum_{n\geq 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}.$

4) $\sum_{n\geq 1} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{4}.$

5) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (*Leibniz*).

6) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (*Euler*).

7) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

8) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$

9) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$

10) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (*Euler*).

11) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$

12) $1 - \ln\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots =$

$= 0{,}577215\ldots$ (*constanta lui Euler*).

13) Fie $1 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ mulţimea tuturor numerelor prime, ordonată crescător. Atunci seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$$ este divergentă (*Euler*).

14) Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$ o serie numerică cu termeni pozitivi convergentă și $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ restul seriei. Atunci seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} \text{ este convergentă, iar seria}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{r_n} \text{ este divergentă } (O.\ D.\ Kellog).$$

15) Mulțimea tuturor sumelor parțiale neordonate ale seriei armonice $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ coincide cu mulțimea numerelor raționale pozitive *(problema fracțiilor egiptene)*

16) Dacă în seria armonică $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ se elimină termenii ai căror numitori conțin cifra 9, atunci seria nouă obținută este convergentă și are suma mai mică decît 25 sau egală cu 25 *(A. J. Kempner)*.

17) Fie $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$. Atunci seria

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m-1} + \frac{x}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m-1} +$$

$$+ \frac{x}{2m} + \frac{1}{2m+1} + \cdots + \frac{1}{3m-1} + \frac{x}{3m} + \cdots$$

este convergentă numai pentru $x = -m + 1$. *(K. Knopp)*.

5.5. Noțiunea de funcție

5.5.1. *Generalități*

Definiție. Fie E și F două mulțimi și G o parte a produsului cartezian $E \times F$ astfel încît $\forall x \in E$, $\exists! y \in F$, cu proprietatea $(x, y) \in G$. Numim funcție (aplicație, transformare) definită pe E cu valori în F tripletul $f = (E, F, G)$.

E se numește *domeniul de definiție*, F *codomeniul funcției*, iar G graficul lui f.

În locul notației $f = (E, F, G)$ se preferă:

$$f: E \to F; \quad E \xrightarrow{f} F; \quad x \to f(x); \quad y = f(x);$$

x se numește *variabilă independentă* sau *argument*, iar y *variabilă dependentă*. Elementul unic $y \in F$, care corespunde lui $x \in E$, se numește și *imaginea lui x prin f sau valoarea funcției f în x*.

Exemple. 1) $f(x) = \sqrt{x}$, pentru care $E = [0, 4]$ și $F = [0, 2]$;

2) $f(x) = \sin x$, cu $E = \mathbf{R}$ și $F = [-1, 1]$;

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ $E = \mathbf{R}$, $F = \{0, 1\}$ (funcția lui Dirichlet)

Observație. Dacă $E, F \subset \mathbf{R}$, atunci $f: E \to F$ se numește *funcție reala de argument real* sau *funcție numerică*.

Dacă E nu se precizează, atunci prin domeniul de definiție a funcției se subînțelege mulțimea tuturor punctelor x din $\mathbf{R}$ pentru care $f(x)$ are sens.

Restricția unei funcții. Extensia unei funcții. Fie $f: E \to F$ o funcție și $A \subset E$ o parte a lui E. Se numește *restricția lui f la A* și se notează f_A, funcția $f_A: A \to F$ definită astfel, $\forall x \in A$, $f_A(x) = f(x)$.

Funcția $f: E \to F$ se numește o *extensie* sau o *prelungire* a lui $f_A: A \subset E \to F$ de la A la E.

Exemplu. Funcția $g(x) = \cos x$, $g: [0, \pi] \to [-1, 1]$ este o restricție a lui $f(x) = \cos x$, $f: \mathbf{R} \to [-1, 1]$ și f o extensie a lui g.

Funcții egale. Două funcții $f: E \to F$ și $g: E_1 \to F_1$ se numesc *egale* dacă $E = E_1$, $F = F_1$ și, $\forall x$, $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Exemple. Funcțiile $f: \{1\} \to \{1\}$, $f(x) = x$ și $g: \{1\} \to \{1\}$, $g(x) = 2x^2 - 1$ sînt două funcții egale.

Funcția numerică nulă pe E. Se numește *funcție (numerică) nulă pe* $E (\subset \mathbf{R})$ funcția $f: E \to \mathbf{R}$ definită prin, $\forall x \in E$, $f(x) = 0$. Se notează $f = 0$ sau $f \equiv 0$.

Funcția constantă (pe E). Fie $f: E \to F$ o funcție. Spunem că f este funcția constantă pe E și scriem $f = c$, dacă $\exists c \in F$, astfel încît $\forall x \in E$, avem $f(x) = c$.

Funcția caracteristică a unei mulțimi. Fie $A \subset E$ o mulțime. Se numește *funcție caracteristică* a mulțimii A funcția $\varphi_A: E \to \{0, 1\}$, definită astfel

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \in A \setminus E \end{cases}$$

Funcția lui Dirichlet: $f: \mathbf{R} \to \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{cînd } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{cînd } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

Funcția lui Riemann: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{cînd } x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\},\ x = \dfrac{p}{q},\ (p, q) = 1,\ q \geqslant 1 \\ 0, & \text{cînd } x \in \mathbf{R} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \{0\}). \end{cases}$$

Funcția liniară. Fie o funcție $f: E \to F$ cu E și F spații vectoriale peste K. Funcția f se numește *liniară* dacă

1) $\forall x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *(aditivitate)*

2) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *(omogeneitate)*

Exemplu: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = 2x$ este o funcție liniară.

Funcția identică (sau identitate) a unei mulțimi. Fie E o mulțime oarecare. Se numește funcție identică a mulțimii E și se notează 1_E, funcția $1_E: E \to E$ definită astfel, $\forall x \in E$, $1_E(x) = x$.

Exemplu. Fie $E = [0, 2]$; $1_E(x) = x$, $x \in [0, 2]$.

Observație. Numărul funcțiilor definite pe o mulțime E finită cu m elemente, cu valori în mulțimea finită F cu n elemente este egal cu n^m.

Funcție multiplicativă. Fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție cu $E \subset \mathbf{R}$. Funcția f se numește *multiplicativă*, dacă $\forall x, y \in E$ avem $xy \in E$ și $f(xy) = f(x)f(y)$.
Exemple de funcții multiplicative sînt: funcția *signum* și *funcția lui Euler* (*indicatorul lui Euler*).

Funcții numerice pare și impare. Mulțimea $A \subset \mathbf{R}$ se numește *simetrică* în raport cu originea O[1]), dacă $\forall x \in A$ avem $-x \in A$, adică $A = -A$.

Definiție. Fie $f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cu E simetrică față de origine. Funcția f se numește *pară* dacă $\forall x \in E$ avem $f(-x) = f(x)$. Funcția f se numește *impară* dacă $\forall x \in E$ avem $f(-x) = -f(x)$.

Exemple. Funcția cos este pară pe $\mathbf{R}$, iar sin, signum impare pe domeniile lor de definiție.

Funcții numerice periodice. Fie $E \subset \mathbf{R}$ o submulțime a lui $\mathbf{R}$ și $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție. Spunem că funcția f este *periodică* dacă există $T > 0$ astfel încît $\forall x \in E$ să avem $x + T \in E$ și $f(x + T) = f(x)$. Numărul T se numește o *perioadă* a lui f.

Cel mai mic număr pozitiv T avînd proprietatea de mai sus se numește *perioada minimă* a lui f.

Exemple. 1) Funcțiile sin și cos sînt periodice cu perioada $T = 2\pi$.

2) Funcțiile tg și cotg sînt periodice cu perioada $T = \pi$.

3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x^2$, nu este periodică.

Funcții injective. O funcție $f : E \to F$ se numește injectivă dacă, $\forall x, y \in E$ și $x \neq y$, *avem* $f(x) \neq f(y)$.

P 1. O funcție $f : E \to F$ *este injectivă* dacă, $\forall x, y \in E$, egalitatea $f(x) = f(y)$ implică $x = y$.

P 2. O funcție $f : E \to F$ *nu este injectivă*, dacă există cel puțin două elemente $x, y \in E$, $x \neq y$, astfel încît să avem $f(x) = f(y)$.

P 3. O funcție numerică $f : E \to F$ (E, $F \subset \mathbf{R}$) este injectivă dacă orice paralelă la Ox dusă prin puncte ale lui F intersectează graficul ei în cel mult un punct.

Exemple: 1) $f : [0, 2] \to [0, 4]$, $f(x) = x^2$ este injectivă.

2) $g : [-1, 1] \to [0, 1]$, $g(x) = x^2$ nu este injectivă.

Funcții surjective. O funcție $f : E \to F$ se numește surjectivă dacă $F = f(E)$ *adică dacă imaginea lui E prin f este F.*

P 1. O funcție $f : E \to F$ *este surjectivă* dacă oricare ar fi $b \in F$, ecuația $f(x) = b$ are cel puțin o rădăcină $x \in E$.

P 2. O funcție $f : E \to F$ *nu este surjectivă* dacă $\exists y \in F$ astfel încît $\forall x \in E$ avem $y \neq f(x)$.

Exemple. 1) $f : [-1, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$ este surjectivă.

2) $g : [-1, 1] \to [0, 1] \cup \{2\}$, $g(x) = x^2$ nu este surjectivă.

P 3. O funcție numerică $f : E \to F$ (E, F $\subset \mathbf{R}$) este surjectivă dacă orice paralelă la Ox dusă prin puncte ale lui F intersectează graficul lui f în cel puțin un punct.

---

[1]) Analog se introduc noțiunile de *mulțime simetrică față de un punct* x_0 și de funcție pară în raport cu x_0, respectiv impară.

Funcții bijective. O funcție se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.

Exemple: 1) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este bijectivă.

2) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ este bijectivă.

Compunerea funcțiilor. Fie $g : F \to H$ și $f : E \to F$.
Se numește *compusa lui g cu f* funcția $h(x) = g(f(x))$, $\forall x \in E$. Se notează $h = g \circ f$.

Exemple. 1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$; $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2^x$; avem

$$(f \circ g)(x) = 2^{2x};\quad (g \circ f)(x) = 2^{x^2};\quad (f \circ f)(x) = x^4,\quad (g \circ g)(x) = 2^{2^x}.$$

Propoziție. Fie $h : G \to H$, $g : F \to G$ și $f : E \to F$ trei funcții. Atunci $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Funcții inversabile. Funcția $f : E \to F$ se numește inversabilă dacă $\exists g : F \to E$ astfel încît

$$f \circ g = 1_F \text{ și } g \circ f = 1_E.$$

Dacă există un astfel de g, atunci el este *unic*, se notează $g = f^{-1}$ și se numește *funcția inversă a lui f* sau *funcția reciprocă a lui f*.

Teoreme: 1. O funcție este inversabilă $\Leftrightarrow$ este bijectivă.

2. Dacă o funcție numerică inversabilă f este strict crescătoare (descrescătoare), atunci și f^{-1} este strict crescătoare (descrescătoare).

3. Graficele funcțiilor f și f^{-1} sînt *simetrice* față de prima bisectoare.

Exemplu. Dacă $f : [-2, 5] \to [-13, 8]$ și $f(x) = 3x - 7$, atunci $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$ și $f^{-1} : [-13, 8] \to [-2, 5]$.

Funcții numerice monotone. Funcția $f : E \to F$, $E, F \subset \mathbf{R}$, este *crescătoare* (respectiv *strict crescătoare*) pe $A \subset E$, dacă și numai dacă, $\forall x, y \in A$, avem: $x \leqslant y$ implică $f(x) \leqslant f(y)$ (respectiv $x < y$ implică $f(x) < f(y)$)

Funcția $f : E \to F$, E, $F \subset \mathbf{R}$, este *descrescătoare* (respectiv *strict descrescătoare*) pe $A \subset E$ dacă și numai dacă $\forall x, y \in A$, avem: $x \leqslant y$ implică $f(x) \geqslant f(y)$ (respectiv $x < y$ implică $f(x) > f(y)$).

Aceste funcții se numesc *monotone* (respectiv *strict monotone*).

Exemple. 1) Funcția $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2) $f : [1, 4] \to [1, 16]$, $f(x) = x^2$ este strict crescătoare pe $[1, 4]$;

3) $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$.

4) Funcția $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$, este monoton crescătoare.

Teoreme. 1. Orice funcție numerică strict monotonă este injectivă.

2. Orice funcție numerică strict monotonă și surjectivă este bijectivă.

Funcții numerice mărginite. Fie $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție. Funcția f este *mărginită pe* $A \subset E$, dacă satisface una din următoarele condiții echivalente între ele:

1) Mulțimea $f(A)$ este mărginită;

2) $\exists m, M \in \mathbf{R}$, astfel incit $\forall x \in A$ să avem $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

3) $\exists k > 0$ astfel incit $\forall x \in A$, să avem $|f(x)| \leqslant k$.

Marginea superioară (respectiv *inferioară*) a mulțimii $f(A)$ se numește *marginea superioară* (respectiv *inferioară*) a lui f pe A și se notează $\sup\limits_{A} f(x)$ (respectiv $\inf\limits_{A} f(x)$).

Dacă mulțimea $f(A)$ nu admite majoranți (respectiv minoranți), atunci prin extensiune se pune $\sup f(x) = +\infty$ (respectiv $\inf f(x) = -\infty$).

Dacă mulțimea $f(A)$ admite maxim (respectiv minim), adică $\exists a \in A$ (respectiv $\exists b \in A$) cu proprietatea $f(a) \geqslant f(x)$, $\forall x \in A$ (respectiv $f(b) \leqslant f(x)$, $\forall x \in A$), atunci spunem că *f își atinge maximul* (respectiv *minimul*) *pe mulțimea A*.

Numărul $f(a)$ (respectiv $f(b)$) se numește *maximul* (respectiv *minimul*) funcției f pe A și se notează $\max f(x)$ (respectiv $\min f(x)$), punctul a (respectiv b) numindu-se *punct de maxim* (respectiv punct *de minim*) al lui f pe A.

Punctul $a_1 \in E$ (respectiv $b_1 \in E$) se numește *punct de maxim (respectiv minim) local* al lui f, dacă există o vecinătate U a lui a_1 (respectiv V a lui b_1) cu proprietatea $f(x) \leqslant f(a_1)$, $\forall x \in U \cap (E \setminus \{a_1\})$ (respectiv $f(b_1) \leqslant f(x)$, $\forall x \in V \cap (E \setminus \{b_1\})$).

Dacă se inlocuiește $\leqslant$ cu $<$ obținem definiția *punctului de maxim* (respectiv de minim) *local strict*.

Valorile maxime și minime ale unei funcții se numesc *extreme* ale acesteia, iar *punctele de maxim* și *de minim puncte de extrem*.

Exemple. 1) $f: \mathbf{R} \to [-1, 1]$ $f(x) = \sin x$ este mărginită și $\max\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 1$, $\min\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = -1$.

2) $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ nu este mărginită; $\min\limits_{x \in [0, +\infty)} f(x) = 0$, $\sup\limits_{x \in [0, +\infty)} f(x) = +\infty$.

Funcții convexe. Fie $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval. Funcția f se numește *convexă* pe I dacă, $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $\forall \lambda \in (0, 1)$, avem

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2). \qquad (1)$$

Dacă in (1) inlocuim semnul $\leqslant$ prin $<$, atunci f se numește *strict convexă*, iar dacă același semn il inlocuim cu $\geqslant$ atunci f se numește *concavă*.

Teoremă. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție convexă. Atunci f este continuă în $\mathring{I}$.

Teoremă: Fie $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție convexă. Atunci f admite derivate laterale în fiecare punct din $\mathring{I}$.

Teoremă. Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Atunci f este *convexă* pe $[a, b]$ dacă și numai dacă $\forall x \in (a, b)$ avem $f''(x) \geqslant 0$.

Exemple. 1) $f: \mathbf{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$ este convexă.

2) $f: \mathbf{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ este convexă

3) $f: [-1, 1] \to [-1, 1]$, $f(x) = x^3$ nu este convexă

Inegalitatea lui Jensen. Dacă $f: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie convexă, $x_k \in I$,

$p_k \geqslant 0$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k > 0$, atunci avem

$$f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right) \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}.$$

Funcţii cu punct fix. Fie E o mulţime. Funcţia $f: E \to E$ spunem că admitem *punctul fix* $x_0 \in E$ dacă $f(x_0) = x_0$.

Dacă $E \subset \mathbf{R}$, atunci $f: E \to E$ are cel puţin un punct fix $\Leftrightarrow$ graficul lui f intersectează prima bisectoare cel puţin într-un punct.

Exemple: 1) Funcţiile sin şi cos au fiecare cîte un singur punct fix.
2) Funcţiile tg şi ctg au fiecare cîte o infinitate de puncte fixe.

Funcţii lipschitziene. O funcţie $f: E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se numeşte *lipschitziană* dacă există $L > 0$ cu proprietatea

$$\forall x, y \in E, \text{ avem } |f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|.$$

Exemple. 1) Funcţiile sin, cos : $\mathbf{R} \to [-1, 1]$ sînt lipschitziene cu $L = 1$.

2) Funcţia $\mathrm{tg}: \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ nu este lipschitziană.

Observaţie. Funcţiile lipschitziene joacă un rol însemnat în *teoria ecuaţiilor diferenţiale.*

Funcţii cu proprietatea lui Darboux (PD). Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Spunem că f are *proprietatea lui Darboux* dacă $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, şi $\forall y$ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ există $x \in (x_1, x_2)$ astfel încît $y = f(x)$.

Exemple. 1) Funcţiile continue au proprietatea lui Darboux.
2) Derivata oricărei funcţii derivabile are *PD*.

3) Funcţia $f: (-2, 2) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leqslant 0 \\ x + 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$

nu are *PD* fiindcă luînd $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = 1$ şi $y = \dfrac{1}{2} \in (f(x_1), f(x_2)) = (0, 2)$,

nu există $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$ astfel încît $\dfrac{1}{2}$ să fie imaginea unui asemenea punct x (fig. 5.1)

Teoremă. Funcţia $f: I \to \mathbf{R}$, cu I interval al axei reale, are $PD \Leftrightarrow \forall J \subset I$, imaginea lui J prin f este un interval.

Operaţii algebrice cu funcţii numerice. Fie $f: E \to \mathbf{R}$ şi $g: F \to \mathbf{R}$, $E, F \subset \mathbf{R}$, $E \cap F \neq \emptyset$, două funcţii numerice.

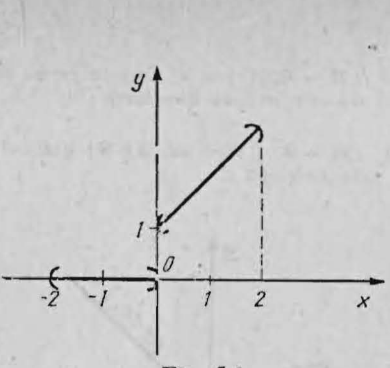


Fig. 5.1

1. Suma $f+g$ este funcţia definită astfel:

$$\forall x \in E \cap F, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. Diferenţa $f-g$ este funcţia definită astfel

$$\forall x \in E \cap F, \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

3. Produsul fg este funcţia definită astfel:

$$\forall x \in E \cap F, \quad (fg)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

4. Citul $\frac{f}{g}$ este funcţia definită astfel:

$$\forall x \in E \cap F \text{ şi } g(x) \neq 0, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

5. Funcţia af, cu $a \in \mathbf{R}$, este definită astfel:

$$\forall x \in E, \quad (af)(x) = af(x).$$

Teoremă. Mulţimea C a funcţiilor continue $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ constituie un spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ faţă de operaţiile naturale de adunare a funcţiilor ($\forall f,g \in C$, $\forall x \in [a,b]$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$) şi de înmulţire a acestora cu scalari $\forall x \in [a,b]$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall f \in C$, avem $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$)

5.5.2. *Funcţii elementare*

1. *Funcţia constantă* $f: \mathbf{R} \to \{b\}$, $b \in \mathbf{R}$, $f(x) = b$ sau $y = b$; G_f (graficul lui f) este o dreaptă paralelă la Ox (fig. 5.2).

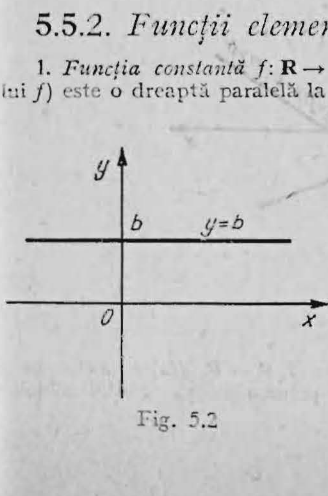


Fig. 5.2

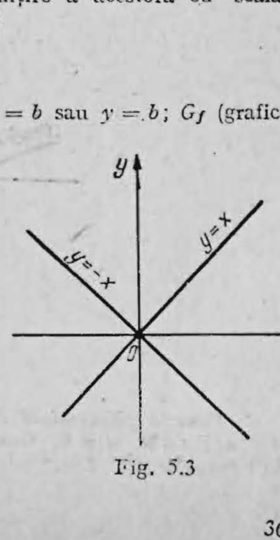


Fig. 5.3

2. *Funcția identică* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x$; G_f este *prima bisectoare* (fig. 5.3); $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x$; G_f este *a doua bisectoare* (fig. 5.3).

3. *Funcția liniară* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax, a \in \mathbf{R}$; graficul G este *o dreaptă* (fig. 5.4) care trece prin originea O.

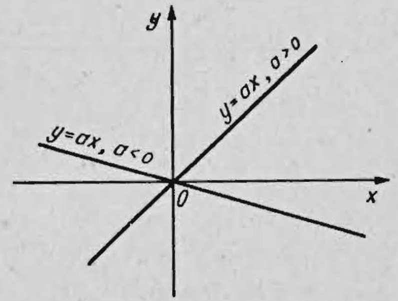


Fig. 5.4

4. *Funcția afină* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b, a,b \in \mathbf{R}, a \neq 0$; G_f este *o dreaptă* (fig. 5.5). Semnul lui $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		Semn contrar lui a	0	Semnul lui a	

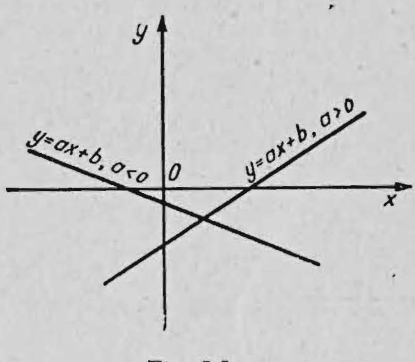


Fig. 5.5

5. *Funcția polinomială de gradul al doilea* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$. Graficele funcțiilor polinomiale de gradul al doilea sint *parabole* (fig. 5.6).

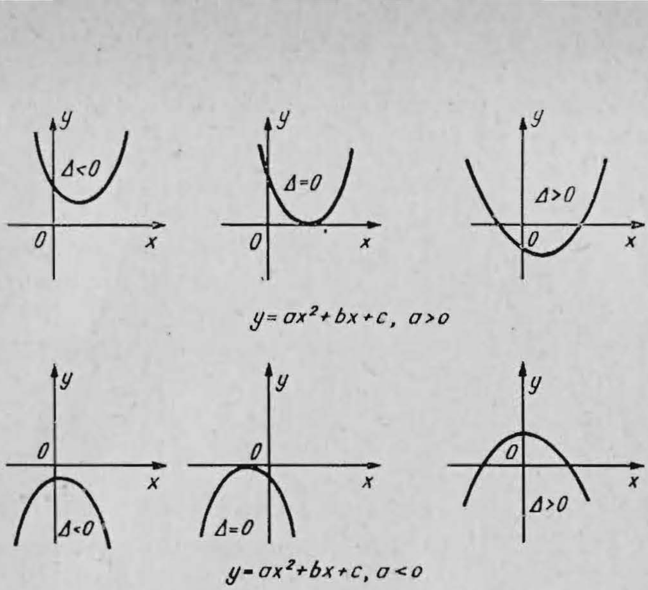


Fig. 5.6

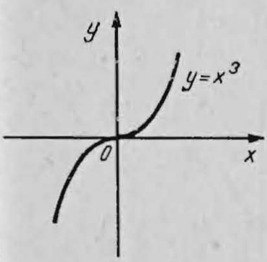


Fig. 5.7

7. *Funcția polinomială de gradul al treilea* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$; G_f este *o parabolă de gradul al treilea* (fig. 5.7).

8. *Funcțiile raționale* $f: \mathbf{R} \setminus \{x \mid Q(x) = 0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbf{R}[X]$.

9. *Funcția radical* $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ sau $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cu $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$.

10. *Funcția putere* $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = x^a$, $a \in \mathbf{R}$.

11. *Funcția exponențială* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbf{R}$ (fig. 5.8 și fig. 5.9). Funcția exponențială este bijectivă.

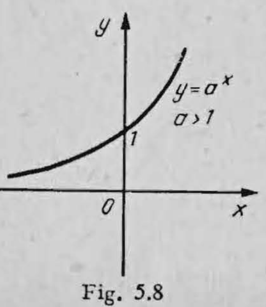


Fig. 5.8

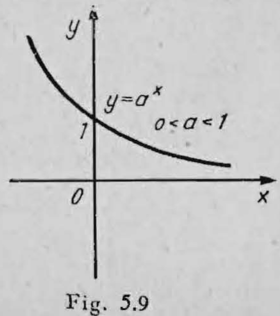


Fig. 5.9

Inversa ei este funcţia logaritmică.

12. *Funcţia logaritmică* $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \log_a x, a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1$ (fig. 5.10 şi fig. 5.11). Este bijectivă şi inversa ei este funcţia exponenţială.

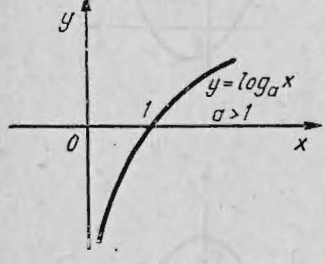


Fig. 5.10

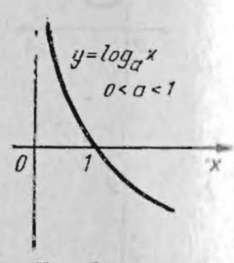


Fig. 5.11

13. *Funcţia sin şi funcţia arc sin.* Fie funcţia sin: $\mathbf{R} \to [-1, 1]$. Restricţia acesteia la $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este bijectivă şi admite deci o funcţie inversă, anume arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (fig. 5.12); avem $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\forall x \in [-1, 1]$; $\sin(\arcsin x) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$; $\arcsin(\sin x) = x$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

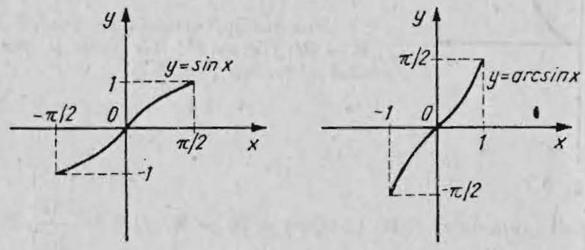


Fig. 5.12

14. *Funcţia cos şi funcţia arccos.* Fie funcţia cos: $\mathbf{R} \to [-1, 1]$. Restricţia acesteia la intervalul $[0, \pi]$ este bijectivă şi admite deci o funcţie inversă, anume arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi]$ (fig. 5.13); avem $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,

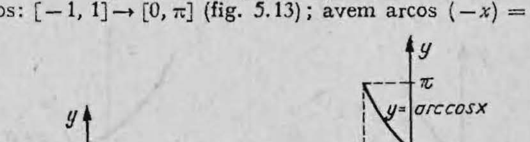


Fig. 5.13

$\forall x \in [-1, 1]$; $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$; $\cos(\arccos x) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$; $\arccos(\cos x) = x$, $\forall x \in [0, \pi]$.

15. *Funcția tg și funcția arctg.* Fie funcția $\mathrm{tg}: \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right\} \to \mathbf{R}$. Restricția acesteia la intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este strict crescătoare și surjectivă și admite deci o funcție inversă, anume $\mathrm{arctg}: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (figura 5.14); avem $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$, $\forall x \in \mathbf{R}$; $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$; $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

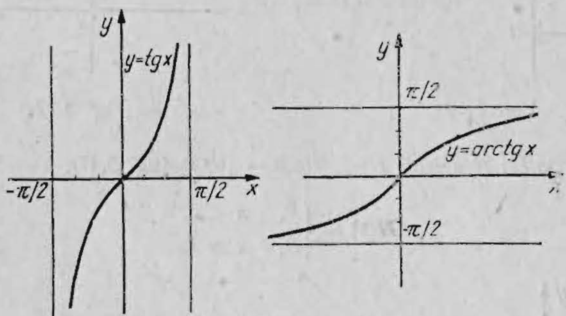


Fig. 5.14

16. *Funcția ctg și funcția arcctg.* Fie funcția $\mathrm{ctg}: \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi \to \mathbf{R}$. Restricția acesteia la intervalul $(0, \pi)$ este strict descrescătoare și surjectivă și admite deci o funcție inversă, anume, $\mathrm{arcctg}: \mathbf{R} \to (0, \pi)$ (fig. 5.45); avem $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$, $\forall x \in \mathbf{R}$; $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$; $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x$, $\forall x \in (0, \pi)$; $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

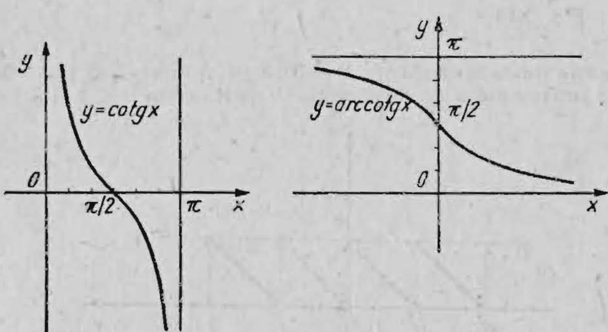


Fig. 5.15

17. *Funcția signum*: sign: $\mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}$ (fig. 5.16), cu

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

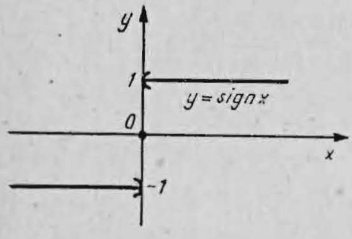


Fig. 5.16

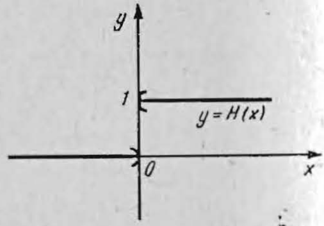


Fig. 5.17

18. *Funcția lui Heaviside* $H(x)$, $H: \mathbf{R} \to \{0, 1\}$ (fig. 5.17),

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

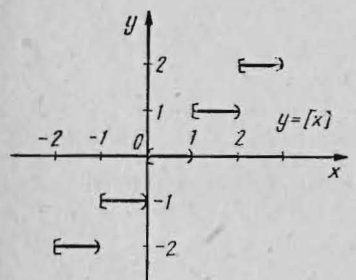


Fig. 5.18

19. *Funcția parte întreagă* $[\cdot] : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ (fig. 5.18),

$$[x] = \begin{cases} -n, & -n \leq x < -n + 1, \quad n \in \mathbf{N} \\ n, & n \leq x < n + 1, \quad n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

O proprietate remarcabilă a acestei funcții: $\forall x \in \mathbf{R}$, avem $[x] \leq x < [x] + 1$, respectiv $x - 1 < [x] \leq x$.

20. *Funcția parte zecimală* f: $\mathbf{R} \to [0, 1)$, $f(x) = x - [x]$ (fig. 5.19). O proprietate interesantă a acestei funcții: $\forall x \in \mathbf{R}$, avem $0 \leq x - [x] < 1$.

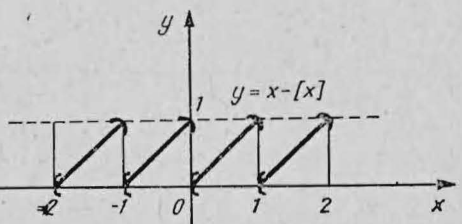


Fig. 5.19

21. *Funcția „distanța de la x la cel mai apropiat întreg"*:

$$\{\cdot\}: \mathbf{R}\to[0, 1] \text{ (fig. 5.20), respectiv } \{x\} = \begin{cases} x - n, & \text{cînd } x \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right] \\ -x+n+1, & \text{cînd } x \in \left[n+\frac{1}{2}, n + 1\right] \end{cases}$$

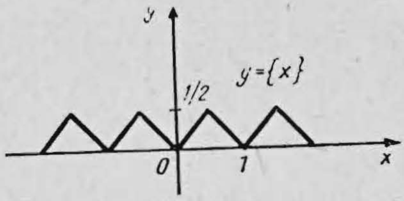


Fig. 5.20

22. *Funcția modul* $|\cdot|: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ (fig. 5.21)

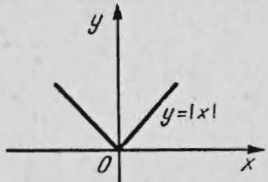


Fig. 5.21

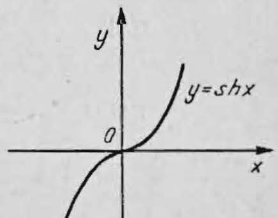


Fig. 5.22

23. *Funcția sinus hiperbolic*: sh: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ (fig. 5.22), $\text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Funcția este bijectivă și impară.

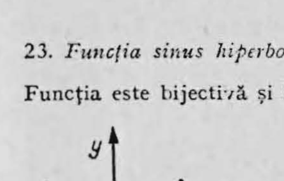


Fig. 5.23

24. *Funcția cosinus hiperbolic*: ch: $\mathbf{R}\to[1, +\infty)$, $\text{ch } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (fig. 5.23).
Funcția este surjectivă și pară.

25. Funcția $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $f: \mathbf{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (fig. 5.24).

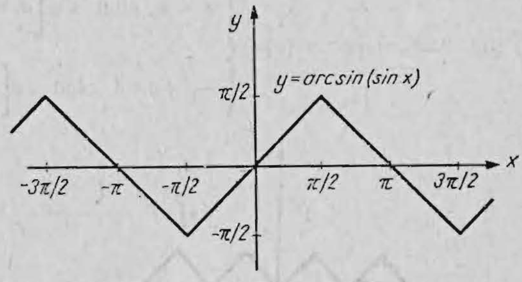


Fig. 5.24

26. Funcția $f(x) = \arccos(\cos x)$, $f: \mathbf{R} \to [0, \pi]$ (fig. 5.25).

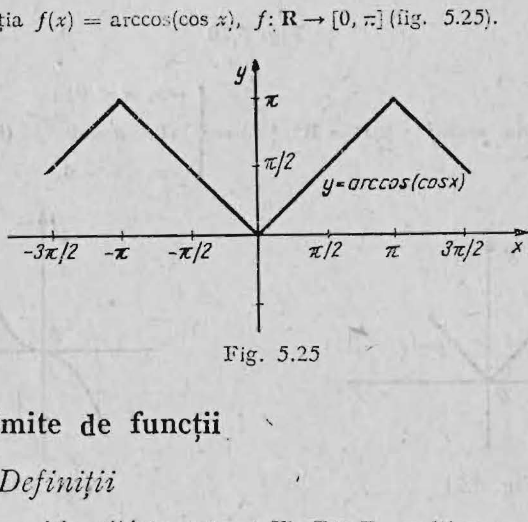


Fig. 5.25

5.6. Limite de funcții

5.6.1. *Definiții*

1. *Limita unei funcții într-un punct.* Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in E'$ un punct, $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție și $l \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct. Spunem că l este *limita funcției* f în x_0, dacă $\forall (x_n)_{n \geq 1}$ un șir de puncte din $E \setminus \{x_0\}$, cu limita x_0, șirul valorilor lui f, $(f(x_n))_{n\geq 1}$, are limita l. Scriem atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Exemplu. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = 2^x$ și $x_0 = 1$. Atunci $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = 2$.

Observație. Funcția f *nu are limită* în x_0, dacă există șiruri de puncte din $E \setminus \{x_0\}$, care au limita x_0, dar pentru care șirurile valorilor funcției au limite diferite între ele.

2. *Limita laterală la stînga.* Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in E'^s$ un punct, $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție și $l_s \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct. Spunem că l_s este *limita funcției* f *la stînga* în x_0, dacă $\forall (x_n)_{n\geq 1}$ un șir de puncte din E, $x_n < x_0$, cu limita x_0, șirul valorilor lui f, $(f(x_n))_{n\geq 1}$, are limita l_s. Scriem atunci $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = l_s = f(x_0 - 0)$.

Exemplu. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(1 + \dfrac{|x|}{x}\right) = 0.$

3. *Limita laterală la dreapta.* Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in E'^d$ un punct, $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție și $l_d \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct. Spunem că l_d este *limita funcției f la dreapta* în x_0, dacă $\forall (x_n)_{n\geq 1}$ un șir de puncte din E, $x_n > x_0$, cu limita x_0, șirul valorilor lui f, $(f(x_n))_{n\geq 1}$, are limita l_d. Scriem atunci $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = l_d = f(x_0 + 0)$.

Exemplu. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 + \dfrac{|x|}{x}\right) = 2.$

5.6.2. *Proprietăți*

Propoziție. Fie $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in E'$ un punct (de acumulare al lui E). Atunci numărul $l \in \overline{\mathbf{R}}$ este limita funcției f în punctul x_0, dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \neq x_0$ din $U \cap E$, să avem $f(x) \in V$.

Exemplu. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$. Fie $V_\infty = (\varepsilon, +\infty)$ o vecinătate a lui $+\infty$. Din $\dfrac{1}{(x-2)^2} > \varepsilon$ sau $|x-2| < \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ sau $x \in \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 2 + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = U$, vecinătate a lui 2, deducem $\dfrac{1}{(x-2)^2} \in V$, vecinătate a lui $+\infty$, și deci $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

Propoziție. Fie $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in E'$ un punct (de acumulare al lui E). Atunci numărul $l \in \mathbf{R}$ este limita funcției f în punctul x_0, dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, astfel încît $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in E\setminus\{x_0\}$, cu proprietatea $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$.

Exemplu. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ și $x_0 = 1$. Pentru a arăta că $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 1) = 2$, fie $\varepsilon > 0$ dat. Să arătăm că lui ε îi corespunde δ, astfel încît $|x - 1| < \delta$ să implice $|x^2 + 1 - 2| < \varepsilon$.

În adevăr, din $|x^2 + 1 - 2| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1| \leq$ $\leq |x-1|(|x-1| + 2) < \eta(2 + \eta) < \varepsilon$, sau $2\eta < \dfrac{\varepsilon}{2}$ și $\eta^2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$, deducem

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 1) = 2$.

Limita modulului. Fie $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție și x_0 un punct de acumulare al lui E. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.

Criteriul majorării. Fie $f, g: E \to \mathbf{R}$ două funcții și $x_0 \in E'$.

1. Dacă $|f(x) - l| \leq |g(x)|$, $\forall x \in E$, și dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Exemplu. Fie $f: \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. În adevăr din $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, și $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, pe baza criteriului majorării, deducem că $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

2. Dacă $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall x \in E$ și dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Exemplu. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + x + 5$. Se cere $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Observăm că $\forall x > 0$, avem $f(x) = 2x^2 + x + 5 > x^2 = g(x)$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dar cum $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, rezultă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Dacă $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in E$ și dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exemplu. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$. Se cere $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Observăm că $f(x) < x^3 = g(x)$, $g: (-\infty, -1) \to \mathbf{R}$. Dar cum $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, rezultă și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Trecerea la limită în inegalități. Fie $f, g: E \to \mathbf{R}$ două funcții și $x_0 \in E'$ un punct (de acumulare al lui E).

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ există (în $\overline{\mathbf{R}}$) și dacă $f(x) \leqslant g(x)$, pentru orice $x \in E\setminus\{x_0\}$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Exemplu. Fie $g(x) = x^2$, $g: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ și f funcția nulă. Avem $\forall x > 0$, $x^2 > 0$. Dar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$.

Acest exemplu ne arată că dintr-o inegalitate strictă $g(x) > f(x)$, $\forall x \neq x_0$, $x \in \mathbf{R}$, nu putem deduce pentru limite decît o inegalitate nestrictă

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \geqslant \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Operații cu funcții care au limită. Fie $f, g: E \to \mathbf{R}$ două funcții și $x_0 \in E'$ un punct (de acumulare al lui E).

1. Dacă funcțiile f și g au în punctul x_0 limitele l_1 și l_2 din $\overline{\mathbf{R}}$ și dacă $l_1 + l_2$ are sens, atunci funcția $f + g$ are limită in x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

2. Dacă funcțiile f și g au în punctul x_0 limite l_1 și l_2 în $\overline{\mathbf{R}}$ și dacă $l_1 \cdot l_2$ are sens, atunci funcția fg are limită în x_0 și avem

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

3. Dacă funcțiile f și g au în punctul x_0 limitele l_1 și l_2 în $\overline{\mathbf{R}}$ și dacă raportul $\frac{l_1}{l_2}$ are sens, atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Limite de puteri. Fie $f, g: E \to \mathbf{R}$ două funcții, $x_0 \in E'$ (un punct de acumulare al lui E) și f cu valori strict pozitive. Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ și $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ și dacă a^b are sens, atunci funcția $(f(x))^{g(x)}$ are limită în x_0 și avem

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)^{g(x)}) = (\lim_{x \to x_0} f(x))^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Limite de funcții compuse. Fie $f: F \to \mathbf{R}$ și $u: E \to F$ două funcții, x_0 un punct de acumulare al lui E, u_0 un punct de acumulare al lui F și $h = f \circ u$.

Dacă i) $\lim_{x \to x_0} u(x) = u_0$; ii) $u(x) \neq u_0$, $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$; iii) $\lim_{u \to u_0} f(u) = l$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = l$.

Cazurile exceptate la operațiile cu limite de funcții:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \; 0 \cdot \infty, \; 0^0, \; 1^\infty, \; \infty^0.$$

5.6.3. *Limite fundamentale de funcții*

1. *Polinoame*. Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ și $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ două polinoame cu coeficienți reali. Atunci avem

1) $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbf{R}$;

2) $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = a_0(\pm\infty)^n$;

3) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, $\quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$, $Q(x_0) \neq 0$;

2. *Funcții raționale*:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0x^n + \ldots + a_n}{b_0x^m + \ldots + a_m} = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad n < m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{dacă} \quad n = m \\ \dfrac{a_0}{b_0}(\pm\infty)^{n-m}, & \text{dacă } n > m. \end{cases}$$

3. *Funcția radical*:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \; x_0 \in \mathbf{R}_+, \quad n \in \mathbf{N}, \; n \geqslant 2;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt[n]{x_0}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_0}}, \quad x_0 \in \mathbf{R}_+^*$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}} = -\infty; \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}} = 0.$$

Exemplu:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

4. *Funcția exponențială*:

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad x_0 \in \mathbf{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \text{dacă} \quad a > 1, \quad a \in \mathbf{R}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad \text{dacă} \quad 0 < a < 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad e = 2,71828\,18284\ldots$$

5. *Funcția logaritmică*:

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0, \quad x_0 > 0, \text{ finit}, \quad a > 0, \; a \neq 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty, \quad \log_{a\,x\to+\infty} x = +\infty, \quad \text{dacă} \quad a > 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \log_a x = -\infty, \quad \text{dacă} \quad 0 < a < 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

6. *Funcții trigonometrice*:

$$\lim \sin x = \sin x_0; \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R},$$

$x \to x_0$,

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad x_0 \notin \pi/2 + \mathbf{Z}\pi$$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} x_0, \quad x_0 \notin \mathbf{Z}\pi$$

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} \operatorname{tg} x = +\infty; \quad \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} \operatorname{tg} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{cotg} x = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{cotg} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad -1 \leqslant x_0 \leqslant 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad -1 \leqslant x_0 \leqslant 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg} x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{-\pi}{2}; \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi; \ \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$

7. *Alte limite fundamentale*:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}; \quad \lim_{y \to 0} (1 + y)^{1/y} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a \ \forall a \in \mathbf{R}; \ \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a \mathrm{e}, \ a > 0, \ a \neq 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \ a \in \mathbf{R}, \ a > 0; \ \lim_{x \to b} \frac{a^x - a^b}{x - b} = a^b \ln a, \ a \in \mathbf{R}, \ a > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \begin{cases} 0, & \text{cînd } 0 < a < 1, \ a \in \mathbf{R} \\ +\infty, & \text{cînd } a > 1, \quad a \in \mathbf{R} \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}^*$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x \cdot x^n = 0, \quad \forall a \in \mathbf{R}, \ a \in (0, 1) \text{ și } n \in \mathbf{N}^*$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0, \ n \geqslant 1; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}^*$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^p x}{x^a} = 0, \ \forall p \in \mathbf{N}, \ \forall a \in \mathbf{R}, \ a > 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0, \ P = \text{polinom din } \mathbf{R}[x]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^x = 1.$$

5.7. Funcţii continue

Definiţie. Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in E$ un punct şi $f: E \to \mathbf{R}$ o funcţie Funcţia f este *continuă* în x_0, dacă oricare ar fi $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de puncte din E care are limita x_0, rezultă că şirul valorilor lui f, $(f(x_n))_{n \geq 1}$, are limita $f(x_0)$.

Punctul x_0 se numeşte *punct de continuitate*.

Observaţie. Dacă f nu este continuă în x_0, atunci ea se numeşte *discontinuă* în x_0.

Exemplu. Funcţia $f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1 \\ 7x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

este discontinuă în $x_0 = 1$.

Definiţie. Funcţia $f: E \to \mathbf{R}$ *se numeşte continuă pe* $A \subset E$, dacă f este continuă în fiecare punct x din A.

Exemplu. Funcţia $f: \mathbf{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ este continuă pe $\mathbf{R}$.

Definiţie. Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in E \cap E'^s$ un punct şi $f: E \to \mathbf{R}$ o funcţie. Spunem că funcţia f *este continuă în* x_0 *la stînga*, dacă $f(x_0 - 0)$ există şi este egală cu $f(x_0)$.

Definiţie. Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in E \cap E'^d$ un punct şi $f: E \to \mathbf{R}$ o funcţie. Spunem că funcţia f este *continuă în* x_0 *la dreapta*, dacă $f(x_0 + 0)$ există şi este egală cu $f(x_0)$.

Exemplu. Funcţia $f: [2, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x-2}$ este continuă la dreapta în $x_0 = 2$.

Definiţie. Fie $f: (a, b) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie.

Punctul $x_0 \in (a, b)$ se numeşte *punct de discontinuitate de primă speţă*, dacă f este discontinuă în x_0, iar $f(x_0 - 0)$ şi $f(x_0 + 0)$ există şi sînt finite.

Exemplu. Punctul $x_0 = 0$ pentru funcţia signum este un punct de discontinuitate de prima speţă.

5.7.1. *Teoreme*

1. Funcția $f: E \to \mathbf{R}$ este continuă în $x_0 \in E$, dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$ există o vecinătate U a lui x_0, astfel încît $\forall x \in U \cap E$, să avem $f(x) \in V$.

2. Funcția $f: E \to \mathbf{R}$ este continuă în $x_0 \in E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ astfel încît $\forall x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$ să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Exemplu. Fie $f(x) = x^4 + 8x^3 + 4$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $x_0 = 0$. Funcția f este continuă în 0. În adevăr, fie $\varepsilon > 0$, dat. Avem $|f(x) - 4| = |x^4 + 8x^3| \leq \leq |x|(|x|^3 + 8x^2)$. Dacă $|x| < 1$, atunci $|x^3| + 8x^2 < 9$ și $|f(x) - 4| < < 9|x| < \varepsilon$ implică $|x| < \dfrac{\varepsilon}{9}$.

Cu $\delta = \text{minimum}\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{9}\right\}$ avem $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$, adică $f(x)$ este continuu în 0.

3. O funcție $f: E \to \mathbf{R}$ este *continuă* în orice punct izolat al domeniului său de definiție.

4. Fie $f: E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in E \cap E'^s \cap E'^d$ un punct de acumulare la stînga și la dreapta a lui E. Atunci funcția f este continuă în x_0 dacă și numai dacă

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0),$$

respectiv

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0).$$

Exemplu. Funcția $f: [0, 2] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$ este continuă în $x_0 = 1$

fiindcă $f(1 - 0) = 2 = f(1) = f(1 + 0)$.

Observație. Funcțiile elementare fiind definite pe intervale sau reuniuni de intervale, iar acestea fiind formate numai din puncte de acumulare, rezultă că pentru funcțiile elementare se poate aplica definiția continuității cu ajutorul limitei.

5. (*Continuitatea funcțiilor elementare*). Polinoamele, funcțiile raționale, funcția radical, funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile trigonometrice directe și cele inverse sînt continue pe domeniul lor de definiție.

5.7.2. *Funcții continue pe intervale numerice*

1. Teoremă (*Bolzano*). Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci imaginea lui I prin f, adică $f(I)$, este un interval.

2. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci f are proprietatea lui Darboux.

3. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Dacă în două puncte $a, b \in I$ funcția ia valori de semne contrare, atunci f ia valoarea zero cel puțin într-un punct cuprins între a și b.

4. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Dacă $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, atunci $\forall x \in I$ avem $f(x) > 0$ sau $f(x) < 0$.

5. Fie $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$ un compact (interval închis și mărginit) și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci f este mărginită pe I și își atinge efectiv valorile extreme.

5.7.3. *Prelungirea funcțiilor prin continuitate*

Definiție. Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulțime și $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Funcția f se zice *prelungibilă prin continuitate* la mulțimea $F \supset E$, dacă există $\hat{f}: F \to \mathbf{R}$ o funcție continuă a cărei restricție la E este f, adică $f = \hat{f}|_E$.

Teoremă. Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulțime, $f: E \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $a \in \mathbf{R} \setminus E$ un punct.

Atunci: i) Dacă a nu este un punct de acumulare al lui E, f poate fi prelungită prin continuitate în a, definind pe $\hat{f}(a)$ în mod arbitrar.

ii) Dacă a este un punct de acumulare al lui E, funcția f poate fi prelungită prin continuitate în $a \Leftrightarrow f$ are limită în a.

În acest caz definim $\hat{f}(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Exemple. 1) Funcția $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ se poate prelungi în $x = 0$ prin continuitate prin

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

fiindcă există $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

2) Funcția $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, nu se poate prelungi prin continuitate în $x = 0$, fiindcă nu există $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

5.7.4. *Operații cu funcții continue*

Teoremă. Fie $f, g: E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții continue în $x_0 \in E$ (sau pe E). Atunci funcțiile $f + g$, $f - g$, af, cu $a \in \mathbf{R}$, fg, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, $|f|$, f^g, $\dfrac{f}{g}$ sînt continue în x_0 (sau pe E), dacă f^g și $\dfrac{f}{g}$ au sens.

5.7.5. *Continuitatea funcțiilor compuse*

Teoremă. Fie $f: E \to F$ și $g: F \to \mathbf{R}$. Dacă funcția f este continuă în $x_0 \in E$, iar funcția g în $f(x_0) \in F$, atunci $g \circ f$ este continuă în $x_0 \in E$.

5.7.6. *Teorema lui Cauchy*

Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și aditivă. Atunci funcția f este liniară.

5.8. Funcţii derivabile

Funcţii cu derivată într-un punct. Fie $f: E^{1)} \to \mathbf{R}$ o funcţie şi $x_0 \in E \cap E'$ un punct. Funcţia f este *cu derivată* în x_0, dacă limita

$$(1) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ notată cu } f'(x_0),$$

există în $\overline{\mathbf{R}}$.

Funcţii derivabile într-un punct. Funcţia $f: E \to \mathbf{R}$ se numeşte *derivabilă* în $x_0 \in E \cap E'$, dacă derivata $f'(x_0)$ există şi $f'(x_0) \in \mathbf{R}$, adică este finită.

O formă echivalentă a lui (1) este

$$(2) \qquad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple. 1) Funcţia $\cos: \mathbf{R} \to [-1, 1]$ este derivabilă în $x_0 = \frac{\pi}{2}$ şi $f'(x_0) = -1$.

2) Funcţia $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ x^2, & x \in \mathbf{Q} \end{cases}$ este derivabilă doar în origine şi $f'(0) = 0$.

Funcţii derivabile pe o mulţime. Fie $f: E \to \mathbf{R}$ o funcţie şi $A \subset E \cap E'$ o mulţime. Funcţia f se numeşte *derivabilă pe* A, dacă ea este derivabilă în orice punct x_0 din A. Aplicaţia $x \to f'(x)$ de la A la $\mathbf{R}$ se numeşte derivata lui f pe A şi se notează cu f', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)$, sau y', $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dacă $y = f(x)$.

Exemple: 1) Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

2) Funcţiile $\sin, \cos: \mathbf{R} \to [-1, 1]$ sînt derivabile pe $\mathbf{R}$.

Funcţii cu derivate laterale. Funcţia $f: E \to \mathbf{R}$ este *cu derivată la stînga* (respectiv *la dreapta*) în $x_0 \in E \cap E'^s$ (respectiv $x_0 \in E \cap E'^d$), dacă limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(\text{respectiv limita } \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$, notată $f'_s(x_0)$ sau $f'(x_0 - 0)$ (respectiv $f'_d(x_0)$ sau $f'(x_0 + 0)$) există în $\overline{\mathbf{R}}$.

Funcţii derivabile lateral. Funcţia $f: E \to \mathbf{R}$ se numeşte *derivabilă la stînga* (respectiv *la dreapta*) în punctul $x_0 \in E \cap E'^s$ (respectiv $x_0 \in E \cap E'^d$), dacă $f'_s(x_0)$ (respectiv $f'_d(x_0)$) există şi este finită, adică $f'_s(x_0) \in \mathbf{R}$ (respectiv $f'_d(x_0) \in \mathbf{R}$).

Exemplu. Funcţia $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, are în origine $f'_s(0) = -1$ şi $f'_d(0) = 1$. Funcţia $|x|$ nu este deci derivabilă în $x_0 = 0$.

Interpretarea geometrică a derivatei $f'(x_0)$. Dacă $f: (a,b) \to \mathbf{R}$, este derivabilă pe (a,b), atunci $f'(x_0)$, cu $x_0 \in (a,b)$ reprezintă *coeficientul unghiular al tangentei geometrice* la graficul lui f în punctul $(x_0, f(x_0))$, tangentă care are ecuaţia

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Dacă $f'(x_0)$ este infinită, atunci tangenta geometrică în $(x_0, f(x_0))$ la graficul lui f este paralelă cu axa $y'Oy$.

Dacă $f: E \to \mathbf{R}$ este continuă în $x_0 \in E$ şi $f'_s(x_0)$, $f'_d(x_0)$ există, dintre care cel puţin una este finită, dar f nu este derivabilă în x_0, atunci punctul $(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct unghiular* al graficului lui f.

---

[1]) Mulţimea E poate fi un interval sau o reuniune de intervale nereduse la un punct.

Exemplu. Funcţia $f(x) = |x - 2|$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ are pe $x = 2$ drept punct unghiular.

Teoremă. Dacă $f: E \to \mathbf{R}$ este derivabilă în $x_0 \in E \cap E'^s \cap E'^d$, atunci f este derivabilă la stînga şi la dreapta; în plus $f'_s(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0)$ şi reciproc.

Continuitatea funcţiilor derivabile. Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Teoremă. Fie $f, g: E \to \mathbf{R}$ două funcţii derivabile în $x_0 \in E \cap E'$ ii $\lambda \in \mathbf{R}$ un număr dat. Atunci funcţiile $f \pm g$, λf, fg, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0$, $x_0 \in E \cap E')$ şi f^g (dacă f^g are sens) sînt derivabile în x_0 şi avem

i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

ii) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

iii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

v) $(f^g)'(x_0) = (gf^{g-1} \cdot f')(x_0) + ((f^g \ln f) \cdot g')(x_0)$.

Derivata funcţiei compuse a două funcţii

Fie $f: F \to R$ şi $g: E \to F$ două funcţii. Dacă g este derivabilă în $x_0 \in E \cap E'$ şi f în $g(x_0) \in F \cap F'$, atunci $f \circ g$ este derivabilă în $x_0 \in E$ şi avem

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Derivata funcţiei inverse a unei funcţii date. Fie: $f: I \to J$, I, J intervale, o funcţie continuă şi bijectivă şi $f^{-1}: J \to I$ inversa ei. Dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci f^{-1} e derivabilă în $y_0 = f(x_0) \in J$ şi avem

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Diferenţiala unei funcţii. Fie $f: E \to \mathbf{R}$ şi $x_0 \in E \cap E'$. Funcţia liniară $h \to f'(x_0)h$ (cu argumentul $h \in \mathbf{R}$) se numeşte *diferenţiala funcţiei* f în x_0 şi se notează $\mathrm{d}f(x_0, h)$. Deci

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)\, h. \tag{1}$$

Diferenţiala $\mathrm{d}x$ a funcţiei identice este egală cu h, adică cu creşterea argumentului: $\mathrm{d}x = h$. De aceea relaţia (1) se mai scrie

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{sau} \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Diferenţiala funcţiei compuse $f(g(x))$ este $\mathrm{d}f(g) = f'(g)\mathrm{d}g$.

Exemplu. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x - 1$; atunci $\mathrm{d}f = (3x^2 + 1)\mathrm{d}x$.

TABELA 5.1. Derivatele şi diferenţialele funcţiilor elementare

Funcţia	Domeniul de definiţie	Derivata	Diferenţiala	Mulţimea pe care y este derivabilă
$y = a,\ a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = 0$	$\mathrm{d}y = 0$	$\mathbf{R}$
$y = x$	$\mathbf{R}$	$y' = 1$	$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$	$\mathbf{R}$
$y = ax,\ a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = a$	$\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x$	$\mathbf{R}$
$y = x^n\ (n \in \mathbf{N})$	$\mathbf{R}$	$y' = nx^{n-1}$	$\mathrm{d}y = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$	$\mathbf{R}$
$y = ax^n (n \in \mathbf{N}),\ a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = nax^{n-1}$	$\mathrm{d}y = nax^{n-1}\mathrm{d}x$	$\mathbf{R}$
$y = \frac{1}{x}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$\mathrm{d}y = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$y = \frac{1}{x^n},\quad (n \in \mathbf{N})$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{d}y = \frac{-n\mathrm{d}x}{x^{n+1}}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$y = x^\alpha,\ \alpha > 1,\ \alpha \in \mathbf{R}$	$[0,\ +\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathrm{d}y = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$	$[0,\ +\infty)$
$y = x^\alpha,\ \alpha < 1,\ \alpha \in \mathbf{R}$	$(0,\ +\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathrm{d}y = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$	$(0,\ +\infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0,\ +\infty)$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$	$(0,\ +\infty)$
$y = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2$	$[0,\ +\infty)$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathrm{d}y = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,\mathrm{d}x$	$(0,\ +\infty)$
$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ $ad - bc \neq 0$	$\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\mathrm{d}y = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\,\mathrm{d}x$	$\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

$y = e^x$	$\mathbf{R}$	$y' = e^x$	$dy = e^x dx$	$\mathbf{R}$
$y = ae^x,\ a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = ae^x$	$dy = ae^x dx$	$\mathbf{R}$
$y = ae^{bx},\ a, b \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = abe^{bx}$	$dy = abe^{bx} dx$	$\mathbf{R}$
$y = a^x,\ a > 0\ \ a \neq 1,\ a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = a^x \ln a$	$dy = a^x \ln a\, dx$	$\mathbf{R}$
$y = ba^x,\ b \in \mathbf{R}\ a > 0$ $a \neq 1,\ a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = ba^x \ln a$	$dy = ba^x \ln a\, dx$	$\mathbf{R}$
$y = ba^{cx},\ a, b, c \in \mathbf{R}$ $a \neq 1,\ a > 0$	$\mathbf{R}$	$y' = bca^{cx} \ln a$	$dy = bca^{cx} \ln a \cdot dx$	$\mathbf{R}$
$y = \ln x$	$(0, +\infty)$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$dy = \dfrac{1}{x} dx$	$(0, +\infty)$
$y = \ln \lvert x \rvert$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$dy = \dfrac{1}{x} dx$	$\mathbf{R}/\{0\}$
$y = \log_a x,\ a > 0\ a \neq 1,\ a \in \mathbf{R}$	$(0, +\infty)$	$y' = 1/(x \ln a)$	$dy = \dfrac{1}{x \ln a} dx$	$(0, +\infty)$
$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}),\ a \in \mathbf{R}_+^*$	$\mathbf{R}$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$dy = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$	$\mathbf{R}$
$y = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x - a}{x + a}\ a \in \mathbf{R}_+^*$	$(-\infty, -a) \cup$ $\cup (a, +\infty)$	$y' = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$	$dy = \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx$	$(-\infty, -a) \cup$ $\cup (a, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a + x}{a - x},\quad a \in \mathbf{R}_+^*$	$(-a, a)$	$y' = \dfrac{1}{a^2 - x^2}$	$dy = \dfrac{1}{a^2 - x^2} dx$	$(-a, a)$
$y = \sin x$	$\mathbf{R}$	$y' = \cos x$	$dy = \cos x\, dx$	$\mathbf{R}$

Tabela 5.1. (continuare)

Funcţia	Domeniul de definiţie	Derivata	Diferenţiala	Mulţimea pe care y este derivabilă
$y = \cos x$	$\mathbf{R}$	$y' = -\sin x$	$dy = -\sin x\, dx$	$\mathbf{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$\mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right)$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right)$
$y = \operatorname{ctg} x$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$
$y = \sec x$	$\mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right)$	$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$dy = \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}$	$\mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right)$
$y = \operatorname{cosec} x$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$dy = -\frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	$(-1, 1)$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$dy = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	$(-1, 1)$
$y = \operatorname{arc\,ctg} x$	$\mathbf{R}$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$dy = \frac{1}{1 + x^2} dx$	$\mathbf{R}$
$y = \operatorname{arc\,cotg} x$	$\mathbf{R}$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$	$dy = -\frac{1}{1 + x^2} dx$	$\mathbf{R}$

$y = \operatorname{arc\,sec} x$ $0 \leqslant y < \frac{\pi}{2}$	$[1, +\infty)$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$	$(1, +\infty)$
$y = \operatorname{arc\,sec} x$ $\frac{\pi}{2} < y \leqslant \pi$	$(-\infty, -1]$	$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$	$(-\infty, -1)$
$y = \operatorname{arc\,cosec} x$ $0 < y \leqslant \frac{\pi}{2}$	$[1, +\infty)$	$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$	$(1, +\infty)$
$y = \operatorname{arc\,cosec} x$ $\frac{-\pi}{2} \leqslant y < 0$	$(-\infty, -1]$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$	$(-\infty, -1)$
$y = \operatorname{sh} x$	**R**	$y' = \operatorname{ch} x$	$dy = \operatorname{ch} x\,dx$	**R**
$y = \operatorname{ch} x$	**R**	$y' = \operatorname{sh} x$	$dy = \operatorname{sh} x\,dx$	**R**
$y = \operatorname{th} x$	**R**	$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$dy = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$	**R**
$y = \operatorname{cth} x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$dy = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$y = \operatorname{sech} x$	**R**	$y' = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$	$dy = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$	**R**
$y = \operatorname{csech} x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}$	$dy = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$

Tabela 5.1 (continuare)

Funcţia	Domeniul de definiţie	Derivata	Diferenţiala	Mulţimea pe care y este derivabilă
$y = \arg \operatorname{sh} x$ $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\mathbf{R}$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$dy = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$	$\mathbf{R}$
$y = \arg \operatorname{ch} x$ $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$; $y \geqslant 0$	$[1, +\infty)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$dy = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$	$(1, +\infty)$
$y = \arg \operatorname{ch} x$ $x = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$; $y \leqslant 0$	$[1, +\infty)$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$dy = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$	$(1, +\infty)$
$y = \arg \operatorname{th} x$ $y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$	$(-1, 1)$	$y' = \dfrac{1}{1 - x^2}$	$dy = \dfrac{1}{1 - x^2}\, dx$	$(-1, 1)$
$y = \arg \operatorname{cth} x$ $y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$	$(-\infty, -1) \cup$ $\cup (1, +\infty)$	$y' = \dfrac{1}{1 - x^2}$	$dy = \dfrac{1}{1 - x^2}\, dx$	$(-\infty, -1) \cup$ $\cup (1, +\infty)$
$y = \arg \operatorname{sech} x$; $y \geqslant 0$	$(0, 1]$	$y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$	$dy = \dfrac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx$	$(0, 1)$
$y = \arg \operatorname{sech} x$; $y \leqslant 0$	$(0, 1]$	$y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$	$dy = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx$	$(0, 1)$
$y = \arg \operatorname{cosech} x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2 + 1}}$	$dy = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$

Ținînd seama de mulțimile pe care funcțiile elementare sînt derivabile, de regulile precedente de derivare a funcțiilor elementare (tabela 5.1) și de regula de derivare a funcțiilor compuse ($y(x) = f(u(x))$, $y'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$; $y(x) = f(u(v(x)))$ $y' = f'(u)\, u'(v)\, v'(x)$), obținem și următoarele formule de derivare și de diferențiere

Tabela 5.1. (continuare)

Funcția	Derivata	Diferențiala
$y = u$*	$y' = u'$	$dy = du$
$y = au,\ a \in \mathbf{R}$	$y' = au'$	$dy = a\,du$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$dy = du \pm dv$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$dy = v\,du + u\,dv$
$y = uvw$	$y' = u'vw + uv'w + uvw'$	$du = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$
$y = \dfrac{1}{v}$	$y' = -\dfrac{v'}{v^2}$	$dy = -\dfrac{1}{v^2}\,dv$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$dy = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
$y = u^n,\ n \in \mathbf{Z},\ u \neq 0$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$	$dy = nu^{n-1}\,du$
$y = au^n,\ n \in \mathbf{Z},\ u \neq 0,\ a \in \mathbf{R}$	$y' = nau^{n-1} \cdot u'$	$dy = nau^{n-1}\,du$
$y = u^\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R},\ u > 0$	$y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$dy = \alpha u^{\alpha-1} \cdot du$
$y = \sqrt{u},\ u > 0$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$dy = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$
$y = \sqrt[n]{u},\ n =$ impar; $u \neq 0$	$y' = \dfrac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$dy = \dfrac{du}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = \sqrt[n]{u},\ u > 0,\ n =$ par	$y' = \dfrac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$dy = \dfrac{du}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$	$dy = e^u \cdot du$
$y = a e^u,\ a \in \mathbf{R}$	$y' = au'\, e^u$	$dy = a\, e^u\, du$
$y = Ca^u,\ C \in \mathbf{R}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \mathbf{R}$	$y' = Cu'a^u \dfrac{\log_b a}{\log_b e}$	$dy = Ca^u \cdot \dfrac{\log_b a}{\log_b e} \cdot du$
$y = \ln u,\ u > 0$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$dy = \dfrac{1}{u}\,du$

* Am notat cu $u, v, w, \ldots$ funcții reale de argument real, derivabile.

Tabela 5.1 (continuare)

Funcția	Derivata	Diferențiala
$y = \ln \lvert u \rvert$	$y' = \frac{u'}{u}$	$dy = \frac{1}{u}\, du$
$y = \log_a u,\ u > 0,\ a \in \mathbf{R}$ $a > 0,\ a \neq 1$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$dy = \frac{1}{u} \log_a e\, du$
$y = \sin u$	$y' = u' \cdot \cos u$	$dy = (\cos u)\, du$
$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \sin u$	$dy = -(\sin u)\, du$
$y = \operatorname{tg} u,\ u \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$dy = \frac{du}{\cos^2 u}$
$y = \operatorname{cotg} u,\ u \notin \mathbf{Z}\pi$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$dy = -\frac{du}{\sin^2 u}$
$y = \sec u,\ u \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$	$y = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot u'$	$dy = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot du$
$y = \operatorname{cosec} u,\ u \notin \mathbf{Z}\pi$	$y' = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot u'$	$dy = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot du$
$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot du$
$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$dy = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot du$
$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$	$dy = \frac{1}{1 + u^2} \cdot du$
$y = \operatorname{arccotg} u$	$y' = -\frac{u'}{1 + u^2}$	$dy = \frac{-1}{1 + u^2} \cdot du$
$y = \operatorname{arcsec} u$	$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$	$dy = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot du$
$y = \operatorname{arccosec} u$	$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$	$dy = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot du$
$y = u^v,\ u > 0$	$y' = y\left[\frac{u'}{u} v + v' \ln u\right]$	$dy = y\left[\frac{1}{u} v \cdot du + (\ln u)\, dv\right]$
$y = x^v,\ x > 0$	$y' = vx^{v-1} + x^v \cdot v' \cdot \ln x$	$dy = vx^{v-1}\, dx + x^v (\ln x)\, dv$
$y = x^x,\ x > 0$	$y' = x^x(1 + \ln x)$	$dy = x^x(1 + \ln x) \cdot dx$

Derivata unui determinant. Fie $a_{ij} : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cu I interval, n^2 funcții de clasă C^1 pe I și $D(x) = | a_{ij}(x) |$. Atunci avem

$$D'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdot$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

5.8.1. *Proprietăți ale funcțiilor derivabile*

Puncte de maxim și minim local ale unei funcții $f : I \to \mathbf{R}$, cu $I \subset \mathbf{R}$ interval. Spunem că punctul $a \in I$ este un punct de *maxim local* strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui a, astfel încît

$$f(x) < f(a), \ \forall x \in U \cap (I \setminus \{a\}).$$

Spunem că punctul $b \in I$ este un punct de *minim local* strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui b, astfel încît

$$f(x) > f(b), \ \forall x \in U \cap (I \setminus \{b\}).$$

Dacă inegalitățile stricte se înlocuiesc cu inegalități nestricte, obținem definiția maximului și minimului în sens larg.

Punctele de maxim și cele de minim ale lui f se numesc *puncte de extrem* ale lui f.

Teorema lui Fermat. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe I. În orice punct de extrem local (din interiorul lui I) derivata lui f este nulă.

Teorema lui Rolle. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ și $a, b \in I$, cu $a < b$.
Dacă: 1) f este continuă pe intervalul $[a, b]$;
2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);
3) $f(a) = f(b)$;
atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f'(c) = 0$.

Corolar 1. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Atunci între două zerouri ale lui f există cel puțin un zerou al derivatei f'.

Corolar 2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție definită pe un interval și derivabilă pe acest interval. Dacă a și b sînt două rădăcini consecutive ale derivatei și $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci f are exact o rădăcină c între a și b. Dacă în schimb $f(a) \cdot f(b) > 0$, atunci f nu are rădăcini în intervalul (a, b).

Teorema lui Cauchy. Fie $f, g : I \to \mathbf{R}$, două funcții și $a, b \in I$, $a < b$.
Dacă:
1) f și g sînt continue pe intervalul închis $[a, b]$.
2) f și g sînt derivabile pe intervalul deschis (a, b).
3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$,
atunci $g(a) \neq g(b)$ și există cel-puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Teorema lui Lagrange. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție, $a, b \in I$ și $a < b$. Dacă
1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$,

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b), atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

5.8.2. *Consecințe ale teoremei lui Lagrange*

1. Dacă o funcție derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acel interval.

2. Dacă f și g sînt două funcții cu derivatele egale pe un interval, atunci funcțiile diferă printr-o constantă pe acel interval.

3. Fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $I \subset E$ un interval. Dacă $\forall x \in I$, avem $f'(x) > 0$, atunci f este strict crescătoare pe I. Dacă $\forall x \in I$, avem $f'(x) < 0$ atunci f este strict descrescătoare pe I.

4. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ (cu $a \in \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$) o funcție derivabilă. Dacă $f(a) \geqslant 0$ și $f'(x) > 0$, $x \in (a, b)$, atunci $f > 0$ pe (a, b).

5. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $c \in (a, b)$. Dacă f' se anulează în c schimbîndu-și semnul, atunci c este un punct de extrem local pentru f.

6. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe I și $x_0 \in I$. Dacă f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și dacă derivata f' are limită în $\overline{\mathbf{R}}$ în x_0, atunci f este cu derivată în x_0 și $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

Exemplu. Fie $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$. După consecința de mai sus f este cu derivată în -1 și 1, anume $f'(-1) = +\infty = f'(1)$.

Teorema lui Darboux. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Atunci derivata f' a lui f are proprietatea lui Darboux, adică nu poate trece de la o valoare a ei la alta, fără a trece prin toate valorile intermediare.

5.8.3. *Derivate de ordin superior*

Definiție. Fie I un interval și $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Spunem că f este *derivabilă de două ori în* $x_0 \in I$, dacă funcția $f' : I \to \mathbf{R}$ este derivabilă în x_0. Derivata lui f' în x_0 se numește derivata de ordinul al doilea a lui f și se notează $f''(x_0)$, $D^2f(x_0)$, $\dfrac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Deci

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Analog se definesc: $f'''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$.

Formula lui Leibniz. Fie $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții de n ori derivabile pe I. Atunci fg este de n ori derivabilă pe I și avem relația:

$$(fg)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)\, g'(x) + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + C_n^n f(x)\, g^{(n)}(x), \quad \forall x \in I$$

Cîteva derivate de ordinul n:

1. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

2. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}$

4. $(ae^x)^{(n)} = ae^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

5. $(x^m)^{(n)} = A_m^n x^{m-n}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant n \leqslant m$

6. $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, $a > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

7. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $n \in \mathbf{N}$

8. $(\operatorname{sh} x)^{(2n)} = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{sh} x)^{(2n-1)} = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$

9. $(\operatorname{ch} x)^{(2n)} = \operatorname{ch} x$; $(\operatorname{ch} x)^{(2n-1)} = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$

10. $y = \operatorname{arctg} x$; $y^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin\left(y + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x \in \mathbf{R}$,

$$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geqslant 1.$$

5.8.4. *Forme nedeterminate. Înlăturarea nedeterminărilor*

În cazurile exceptate de teoremele relative la operațiile cu limite de funcții, trebuie efectuat un studiu direct pentru a stabili dacă există sau nu limite.

Uneori derivatele sînt de folos în aceste cazuri, în primul rînd în cazul $\dfrac{0}{0}$, prin anumite teoreme (l'Hospital, Cauchy).

Ridicarea celorlalte nedeterminări, de forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0 și 1^∞, se reduce la înlăturarea unei nedeterminări de forma $\dfrac{0}{0}$.

Teorema lui l'Hospital. Fie I un interval oarecare al axei reale și x_0 un punct de acumulare al lui I. Fie f și g două funcții definite pe $I \setminus \{x_0\}$. Dacă:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

2) f şi g sînt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$.

3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

4) Există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{R}$,

atunci

α) $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

β) Funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple. 1) Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = x^2 - 3x + 2$ şi $g(x) = x - 1$. Se cere $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Cu teorema lui l'Hospital găsim

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 3}{1} = -1.$$

2) Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $g(x) = x$.

Se cere $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Sîntem în cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$ şi cu teorema lui l'Hospital corespunzătoare obţinem

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(1 + e^x))'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

3) Exemplul de mai jos ne arată că reciproca teoremei precedente nu este adevărată, în sensul că, de pildă, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ poate exista, fără ca $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ să existe. Astfel pentru $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ şi $g(x) = x + \sin x$, avem $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x + \sin x} = 1$, în vreme ce $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \cos x}$ nu există.

Teorema lui Cauchy. Fie I un interval al axei reale, $x_0 \in I$ şi $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcţii. Dacă

1) $f(x_0) = 0$ şi $g(x_0) = 0$

2) f şi g sînt derivabile în x_0 şi $g'(x_0) \neq 0$,

atunci

α) Există o vecinătate U a lui x_0, astfel încît $g(x_0) \neq 0$ pentru orice $x \in U$ şi $x \neq x_0$ şi

β) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Exemplu. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii definite astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 1 - \cos x, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases} \quad \text{şi} \quad g(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ x, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Să calculăm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Cu teorema lui Cauchy obţinem

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0, \text{ căci } f'(0) = 0 \text{ şi } g'(0) = 1.$$

Teorema lui l'Hospital nu se aplică.

5.8.5. *Reprezentarea grafică a funcţiilor*

Consideraţii generale. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă de două ori şi $x_0 \in (a, b)$.

1. Dacă f' se anulează în x_0 şi îşi schimbă semnul, atunci x_0 este un punct de extrem local pentru f şi anume:

α) Dacă derivata f' este strict pozitivă la stînga lui x_0 şi strict negativă la dreapta lui x_0, atunci x_0 este punct de maxim local pentru f.

β) Dacă derivata f' este strict negativă la stînga lui x_0 şi strict pozitivă la dreapta lui x_0, atunci x_0 este un punct de minim local pentru f.

2. Dacă f'' se anulează în x_0 şi îşi schimbă semnul, atunci x_0 este un punct de inflexiune.

3. Dacă $f'' > 0$ pe (a, b), atunci f e convexă pe acest interval, iar dacă $f'' < 0$ pe (a, b), atunci f este concavă pe (a, b).

4. Fie x_0 un punct de extrem local pentru f.

Dacă $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este un punct de minim local pentru f, iar dacă $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este un punct de maxim local.

La trasarea graficului unei funcţii se efectuează următoarele operaţii:

1) a). Se determină domeniul de definiţie a funcţiei. Dacă se dă $f : E \subset \mathbf{R} \to F \subset \mathbf{R}$, $f(x) = \ldots$, evident atunci domeniul respectiv este chiar E. Dacă nu se indică E, ci se dă doar $f(x) = \ldots$, atunci E este reprezentat de mulţimea punctelor dreptei reale, pentru care operaţiile prin care este definită f au sens.

b) Se determină (dacă există) punctele de intersecție cu axele de coordonate, adică punctele de forma $(0, f(0))$ sau $(x, f(x) = 0)$.

c) Se detrmină limitele funcției f la capetele intervalelor de existență, inclusiv $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ și $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, dacă E include intervale de forma $(-\infty, c)$ și $(d, +\infty)$.

2) Se determină (dacă există) simetriile pe care le poate prezenta graficul lui f (simetrie față de Ox, față de Oy, față de O sau față de alte puncte din $\mathbf{R}^2$) și, pentru funcțiile periodice, perioada (pentru a desena graficul lui f numai pe o perioadă).

3) Se află (dacă există) punctele de discontinuitate și limitele laterale corespunzătoare ale lui f.

4) Se determină *asimptotele verticale* (corespunzătoare acelor puncte $a \in E$ în care cel puțin o limită laterală este infinită); ecuația unei asemenea asimptote verticale va fi de forma $x = a$.

5) Se determină *asimptotele orizontale* (asociate acelor puncte $b, b' \in E$ care au proprietatea că $b = \lim_{x \to -\infty} f(x)$ sau $b' = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ (cînd E include intervale de tipul $(-\infty, c)$ sau $(d, +\infty)$); ecuația unei asemenea asimptote orizontale va fi de forma $y = b$ (la ramura de la $-\infty$) sau $y = b'$ (la ramura de la $+\infty$).

6) Se determină *asimptotele oblice (rectilinii)* (adică dreptele de ecuație $y = mx + n$, cu proprietatea $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$ (dacă E include intervale de forma $(-\infty, c)$; rezultă $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$); caz analog cînd E include intervale de forma $(d, +\infty)$.

7) Se cercetează dacă graficul funcției f admite și *asimptote curbilinii*. Curba de ecuație $y = g(x)$ este o asimptotă curbilinie a graficului funcției $f \Leftrightarrow f(x)$ se poate scrie sub forma $f(x) = g(x) + h(x)$, cu $\lim_{x \to -\infty \text{sau} +\infty} h(x) = 0$ (dacă E include intervale de forma $(-\infty, c)$ sau $(d, +\infty)$; $g, h : E \to \mathbf{R}$). De pildă funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2(x + 9)/(x + 1)$ admite drept asimptotă curbilinie parabola de ecuație $y = x^2 + 8x - 8$.

8) Se calculează $f'(x)$ și rădăcinile acesteia. Abscisele punctelor de extrem local se găsesc printre rădăcinile derivatei. Se întocmește un tablou cu semnul derivatei pe E.

9) Se calculează $f''(x)$ și rădăcinile acesteia. Abscisele punctelor de inflexiune (dacă există) se găsesc printre rădăcinile lui f''. Se întocmește un tablou cu semnul derivatei secunde, în care tablou se includ și punctele de discontinuitate ale derivatei a doua, cînd asemenea puncte există.

10) Se calculează coeficienții unghiulari ai (semi)tangentelor la grafic în punctele remarcabile ale acestuia.

11) Se întocmește tabloul general de variație a funcției, cuprinzînd 4 linii cu valorile importante ale lui x, cu $f'(x)$, cu $f(x)$ și $f''(x)$.

12) Se reprezintă apoi, într-un reper ortogonal, punctele remarcabile $(x, f(x))$ ale curbei reprezentative, așa cum rezultă din tabloul general, și asimptotele acestuia (dacă există). Ținînd seama de caracterul crescător sau descrescător al funcției, de caracterul ei concav sau convex, se unesc punctele desenate printr-o trăsătură continuă. Dacă vrem să trasăm graficul lui f cu o precizie și mai mare, putem desena și cîteva puncte ajutătoare ale graficului, de forma $(x_i, f(x_i))$, cu $i = 1, 2, \dots,$ și $x_i \in E$.

5.9. Primitive. Proprietăți

Definiție. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție. Funcția $F: I \to \mathbf{R}$ se numește *primitivă (exactă)* sau *antiderivată* a funcției f, dacă:

1) F este derivabilă pe I.

2) $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemplu. Fie $\sin: \mathbf{R} \to [-1, 1]$; atunci o primitivă a acestei funcții este $F(x) = -\cos x$.

Propoziție. Fie $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție care admite primitive. Atunci orice două primitive ale lui $f(x)$, $F_1(x)$ și $F_2(x)$, diferă între ele printr-o constantă.

Definiție. Fie $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție care admite primitive. Se numește *integrală nedefinită* mulțimea tuturor primitivelor lui f și se notează

$$\int f,\ \int f\mathrm{d}x \text{ sau } \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplu. Pentru $f(x) = \sin x$, din exemplul precedent, avem $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$, $C \in \mathbf{R}$.

5.9.1. *Proprietăți*

1) Orice funcție continuă $f: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admite primitive.

2) Dacă $f, g: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt două funcții care admit primitive, atunci și funcția $\alpha f + \beta g$, cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, admite primitive și avem relația

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\mathrm{d}x.$$

3) O funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux.

4) Dacă f este definită pe intervalul I al axei reale, cu valori reale, și imaginea lui I prin f nu este un interval atunci f nu admite primitive.

Tabela 5.2 **Primitive imediate ale unor funcții elementare**

Nr. crt.	Funcția	Domeniul de definiție	Primitiva
1	$f(x) = x^n$ $n \in \mathbf{N}$	$\mathbf{R}$	$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
2	$f(x) = x^\alpha$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$(0, +\infty)$	$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
3	$f(x) = \sqrt[m]{x}$ $m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$	$(0, +\infty)$	$\int \sqrt[m]{x}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{m+1} \cdot \sqrt[m]{x^{m+1}}$
4	$f(x) = a^x$ $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\mathbf{R}$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$

Nr. crt.	Funcţia	Domeniul de definiţie	Primitiva
5	$f(x) = e^x$	$\mathbf{R}$	$\int e^x \, dx = e^x$
6	$f(x) = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x)$
7	$f(x) = \frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x$
8	$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ $a \in \mathbf{R},\ a > 0$	$(-\infty, -a)$ sau $(a, +\infty)$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a}$
9	$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ $a \in \mathbf{R},\ a > 0$	$(-a, a)$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a - x}{a + x}$
10	$f(x) = \sin x$	$\mathbf{R}$	$\int \sin x \, dx = -\cos x$
11	$f(x) = \cos x$	$\mathbf{R}$	$\int \cos x \, dx = \sin x$
12	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
13	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$
14	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right)$	$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert$
15	$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln\lvert\sin x\rvert$
16	$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right)$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x}$
17	$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x}$

Nr. crt.	Funcţia	Domeniul de definiţie	Primitiva
18	$f(x) = \sin \alpha x$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\mathbf{R}$	$\int \sin \alpha x \, dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha}$
19	$f(x) = \cos \alpha x$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\mathbf{R}$	$\int \cos \alpha x \, dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$
20	$f(x) = \sin^2 x$	$\mathbf{R}$	$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$
21	$f(x) = \cos^2 x$	$\mathbf{R}$	$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$
22	$f(x) = \frac{1}{\sin x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left\| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\|$
23	$f(x) = \frac{1}{\cos x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi \right\}$	$\int \frac{1}{\cos x} dx =$ $= -\ln \left\| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\|$
24	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ $a \in \mathbf{R},\ a > 0$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} =$ $= \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$
25	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ $a \in \mathbf{R},\ a > 0$	$I \subset (-\infty, -a)$ sau $I \subset (a, +\infty)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$ $= \ln \| x + \sqrt{x^2 - a^2} \|$
26	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$
27	$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$-\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos x$
28	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $a \in \mathbf{R},\ a > 0$	$(-a,\ a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

Nr. crt.	Funcţia	Domeniul de definiţie	Primitiva
29	$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$(-a, a)$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a}$
30	$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x$
31	$f(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{-dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,ctg} x$
32	$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$
33	$f(x) = \frac{-1}{a^2 + x^2}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{-dx}{x^2 + a^2} =$ $= \frac{1}{a} \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}$
34	$f(x) = e^{ax} \sin bx$ $a, b \in \mathbf{R},\ a^2 + b^2 \neq 0$	$\mathbf{R}$	$\int e^{ax} \sin bx =$ $= \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \times$ $\times e^{ax}$
35	$f(x) = e^{ax} \cos bx$ $a, b \in \mathbf{R},\ a^2 + b^2 \neq 0$	$\mathbf{R}$	$\int e^{ax} \cos bx\, dx =$ $= \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}$
36	$f(x) = \operatorname{sh} x$	$\mathbf{R}$	$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x$
37	$f(x) = \operatorname{ch} x$	$\mathbf{R}$	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x$
38	$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(-\infty, 0)$ sau $(0, +\infty)$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$
39	$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$

5.9.2. *Metode de calcul al primitivelor*

1) *Metoda de antiderivare prin părți.* Dacă $u, v: I \to \mathbf{R}$ sînt funcții derivabile cu derivatele continue, atunci uv, $u'v$ și uv' admit primitive și avem

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) *O metodă de antiderivare bazată pe o schimbare de variabilă:* Calcularea primitivelor de forma:

$$A = \int f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde $t = u(x)$ este o funcție definită pe I cu valori în J, iar $f(t)$ este o funcție definită pe J cu valori în $\mathbf{R}$.

Dacă u este derivabilă pe I și f are primitive pe J, atunci funcția $f(u(x))u'(x)$, definită pe I cu valori în $\mathbf{R}$, are primitive pe I. Mai precis, dacă $F(t)$ este o primitivă a lui $f(t)$, atunci avem:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

În rezumat calculul primitivei se face după schema:

1) Se face substituția $t = u(x)$
2) Se diferențiază această funcție $\mathrm{d}t = u'(x)\,\mathrm{d}x$
3) Se înlocuiește (formal) în A și se obține

$$A = \int f(t)\mathrm{d}t.$$

4) Se calculează o primitivă $F(t)$ a lui $f(t)$.
5) Se scrie A

$$A = \int f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Exemplu Fie $f: (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$. Se cere o primitivă a lui f.

Observăm că A se scrie astfel

$$A = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}.$$

Avem deci: $t = x^2$, $t:(-1, 1) \to [0, 1)$; t sau $u(x)$ este derivabilă pe $(-1, 1) = I$; $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$, $f: [0, 1) \to \mathbf{R}$, cu primitive pe $[0, 1) = J$, de pildă $F(t) = \arcsin t$. Rezultă că $\dfrac{1}{2} \cdot f(x^2) \cdot (x^2)'$, definită pe $(-1, 1)$ cu valori în $\mathbf{R}$ are primitive pe $(-1, 1)$ și

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\,(x^2) + C$$

În rezumat

1) $t = x^2$

2) $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$

3) $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}}$

4) $F(t) = \frac{1}{2} \arcsin t$

5) $\int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \arcsin (x^2) + C.$

Dăm în continuare o tabelă cu primitive ale unor funcţii compuse, deduse din tabela anterioară a primitivelor imediate, cu ajutorul metodei dezvoltate la acest punct. Peste tot vom admite că $u: I \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi cu derivata continuă pe I.

Tabela. 5.3. **Alte primitive**

Nr. crt.	Primitive ale unor funcţii compuse
1	$\int u^n(x)\, u'(x) \mathrm{d}x = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}, \quad n \in \mathbf{Z},\ n \neq -1$
2	$\int u^{\alpha}(x)\, u'(x)\, \mathrm{d}x = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}, \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}, u: I \to J \subset (0, +\infty),$
3	$\int \frac{u'(x)\, \mathrm{d}x}{\sqrt[m]{u^{m-1}(x)}} = \sqrt[m]{u(x)} \quad m \in \mathbf{N},\ m \geqslant 2,\ u: I \to J \subset (0, +\infty)$
4	$\int a^{u(x)}\, u'(x)\, \mathrm{d}x = \frac{a^{u(x)}}{\ln a}, \ a \in \mathbf{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
5	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} \mathrm{d}x = \ln \mid u(x) \mid, \quad \forall x \in I,\ u(x) \neq 0$
6	$\int \frac{u'(x)\mathrm{d}x}{u^2(x) - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{u(x) - a}{u(x) + a} \right\| \quad a \in \mathbf{R},\ a > 0,\ \forall x \in I,\ u(x) \in \{-a, a\}$
7	$\int \sin u(x) \cdot u'(x)\, \mathrm{d}x = -\cos u(x),$
8	$\int \cos u(x) \cdot u'(x)\mathrm{d}x = \sin u(x),$
9	$\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)} \mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} u(x) \quad \forall x \in I,\ u(x) \notin \mathbf{Z}\pi$
10	$\int \frac{u'(x)\, \mathrm{d}x}{\sin u(x)} = \ln \left\| \operatorname{tg} \frac{u(x)}{2} \right\|, \quad \forall x \in I,\ u(x) \notin \mathbf{Z}\pi$
11	$\int \frac{u'(x)\, \mathrm{d}x}{\cos u(x)} = -\ln \left\| \operatorname{tg}\left(\frac{u(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right\|, \quad \forall x \in I, u(x) \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$
12	$\int \frac{u'(x)\, \mathrm{d}x}{\cos^2 u(x)} = \operatorname{tg} u(x), \quad \forall x \in I, u(x) \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$
13	$\int \operatorname{tg} u(x) \cdot u'(x)\, \mathrm{d}x = -\ln \mid \cos u(x) \mid \quad \forall x \in I,\ u(x) \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$

Nr. crt.	Primitive ale unor funcții compuse
14	$\int \operatorname{cotg} u(x) \cdot u'(x)\,dx = \ln \lvert \sin u(x) \rvert, \quad \forall x \in I,\ u(x) \notin \mathbf{Z}\pi$
15	$\int \frac{\cos u(x)}{\sin^2 u(x)} u'(x)\,dx = -\frac{1}{\sin u(x)}, \quad \forall x \in I,\ u(x) \notin \mathbf{Z}\pi$
16	$\int \frac{\sin u(x)}{\cos^2 u(x)} u'(x)\,dx = \frac{1}{\cos u(x)}, \ \forall x \in I,\ u(x) \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$
17	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2 + u^2(x)}}\,dx = \ln(u(x) + \sqrt{a^2 + u^2(x)}) \quad a \in \mathbf{R},\ a > 0$
18	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - a^2}}\,dx = \ln \lvert u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2} \rvert, \ a \in \mathbf{R},\ a > 0$ $u(I) \subset (-\infty, -a)$ sau $(a, +\infty)$
19	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}}\,dx = \arcsin \frac{u(x)}{a},\ a \in \mathbf{R},\ a > 0,\ u(I) \subset (-a, a)$
20	$\int \frac{u'(x)}{a^2 + u^2(x)}\,dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{a},\ a \in \mathbf{R},\ a > 0$
21	$\int \cos^2 u(x) \cdot u'(x)\,dx = \frac{u(x)}{2} + \frac{\sin 2u(x)}{4}$
22	$\int \sin^2 u(x) \cdot u'(x)\,dx = \frac{u(x)}{2} - \frac{\sin 2u(x)}{4}$

3) *O altă metodă de calcul al unor primitive prin schimbarea de variabilă:* Calcularea primitivelor de forma

$$B = \int f(u(x))\,dx,$$

unde $t = u(x)$ este o funcție definită pe I cu valori în J, iar $f(t)$ este o funcție definită pe J cu valori în $\mathbf{R}$.

Dacă $t = u(x)$ este strict monotonă și derivabilă pe I, dacă inversa ei $x = v(t)$, $v: J \to I$, are derivata $v'(t)$ continuă pe J, dacă $f(t)$ este continuă pe J și dacă $F(t)$ este o primitivă a lui $f(t) \cdot v'(t)$, atunci

$$\int f(u(x))\,dx = F(u(x)) + C$$

Schemă formală:

1) Se face substituția $t = u(x)$
2) Se află inversa lui u, $x = v(t)$
3) Se diferențiază ultima funcție $dx = v'(t)\,dt$.
4) Se înlocuiește în B care devine

$$B = \int f(t) \cdot v'(t)\,dt$$

5) Se află $F(t) = \int f(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t$

6) Se scrie B

$$\int f(u(x))\, \mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Exemplu. Fie $f(x) = \cos^2\sqrt{x}$, $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$. Considerăm $t = u(x) = \sqrt{x}$, $u:(0, \infty) \to (0, \infty)$, funcție strict monotonă și derivabilă pe $(0, \infty) = I$. Inversa ei $x = v(t) = t^2, v: (0, \infty) \to (0, \infty)$ este continuă și are derivata $v'(t) = 2t$ continuă pe $(0, \infty) = J$. În plus $f(t) = \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$ este continuă pe $(0, \infty) = J$. O primitivă a lui $f(t) \cdot v'(t) = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}\, 2t$ este imediată $f(t) = = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t \sin 2t}{2} + \dfrac{\cos 2t}{4}$.

$$\text{Acum} \int \cos^2 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \cos 2\sqrt{x} + C.$$

În rezumat:

1) $t = \sqrt{x}$

2) $x = t^2$

3) $\mathrm{d}x = 2t\, \mathrm{d}t$

4) $B = \int \cos^2 t \cdot 2t\, \mathrm{d}t = \int (1 + \cos 2t) \cdot t\, \mathrm{d}t$

5) $F(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t \sin 2t}{2} + \dfrac{\cos 2t}{4}$

6) $\int \cos^2 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} \sin 2\sqrt{x} + \dfrac{\cos 2\sqrt{x}}{4} + C$

4) *Calculul primitivelor prin recurență.* Această metodă se aplică la determinarea primitivelor funcțiilor f care depind și de numărul natural n,

$$f: I \times M \to \mathbf{R},\ M \subset \mathbf{N},\ (x, n) \to f(x, n).$$

Folosind o altă metodă de calcul al primitivelor (de pildă metoda integrării prin părți), sîntem conduși la determinarea unei primitive pentru $f(x, n-1)$ sau $f(x, n-2)$. Iterînd procedeul ajungem la determinarea primitivelor funcțiilor $f(x, 0)$, $f(x, 1)$ sau $f(x, 2)$ care se calculează imediat sau sînt tabelate.

Exemplu: Fie $f: I \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(x, n) = x^n e^x$. Să se stabilească o formulă de recurență pentru calculul lui $I_n = \int x^n e^x \, dx$. Integrăm sau antiderivăm prin părți luînd $u = x^n$ (deci $du = nx^{n-1} \, dx$) și $dv = e^x \, dx$ (cu $v = e^x$). Găsim

$$I_n = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx \quad \text{sau}$$

$$I = x^n e^x - nI_{n-1} \tag{1}$$

Evident $I_0 = e^x$. Din (1) deducem

$$I_1 = x e^x - e^x, \; I_2 = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) \text{ etc.}$$

Formule de recurență utile în calculul primitivelor

$$A_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}; \quad A_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} A_{n-1}, \; n \geq 2$$

$$B_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}; \quad B_n = -\frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 - a^2)^{n-1}} -$$

$$- \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot B_{n-1}, \; n \geq 2$$

$$C_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx; \quad C_m = \frac{x^{m-1} \sqrt{a^2 + x^2}}{m} - \frac{(m-1) a^2}{m} \cdot C_{m-2}, \; m \geq 2$$

$$D_m = \int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}; \quad D_m = \frac{x^{m-1} \sqrt{x^2 - a^2}}{m} + \frac{(m-1)a^2}{m} D_{m-2}, \; m \geq 2$$

$$E_m = \int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2 + x^2}}; \; E_m = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{(m-1) a^2 x^{m-1}} - \frac{m-2}{(m-1) a^2} \cdot E_{m-2}, \; m \geq 2$$

$$F_n = \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}}; \quad F_n = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(n-1)\, a^2 x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)\, a^2} F_{n-2},\ n \geqslant 2$$

$$G_m = \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad G_m = -\frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{m-1}{m} \cdot a^2 G_{m-2},\ m \geqslant 2$$

$$H_m = \int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2 - x^2}}; \quad H_m = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 (m-1)\, x^{m-1}} + \frac{m-2}{a^2(m-1)} \cdot H_{m-2},\ m \geqslant 2$$

$$J_m = \int (\ln x)^m\, dx; \qquad J_m = x \ln^m x - m J_{m-1},\ m \geqslant 1$$

$$K_n = \int \sin^n x\, dx; \qquad K_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} K_{n-2},\ n \geqslant 2$$

$$L_n = \int \cos^n x\, dx; \qquad L_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} L_{n-2},\ n \geqslant 2$$

$$M_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx; \qquad M_n = \frac{1}{n-1} \mathrm{tg}^{n-1} x - M_{n-2},\ n \geqslant 2$$

$$N_n = \int \mathrm{cotg}^n\, c dx; \qquad N_n = -\frac{1}{n-1} \mathrm{cotg}^{n-1} x - N_{n-1},\ n \geqslant 2$$

$$P_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \qquad P_n = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} P_{n-2},\ n \geqslant 2$$

$$Q_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}; \qquad Q_n = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} Q_{n-2},\ n \geqslant 2$$

$$R_n = \int x^n \sin x\, dx; \quad R_n = -x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1) R_{n-2},\ n \geqslant 2$$

$$S_n = \int x^n \cos x\, dx; \quad S_n = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) S_{n-2},\ n \geqslant 2$$

5) *Metoda coeficienților nedeterminați pentru calcularea primitivelor din funcții transcendente*

Dacă $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, $f: I \to R$, cu P_n un polinom de gradul n, atunci o primitivă a lui f este $F(x) = e^{x} \cdot Q_n(x)$, unde Q_n este tot un polinom de gradul n.

Pentru a determina pe $F(x)$ este suficient să determinăm pe $Q_n(x)$. În acest scop, după definiția primitivei, avem

$$(e^{\alpha x}Q_n(x))' = e^{\alpha x}P_n(x). \tag{1}$$

De aici rezultă coeficienții lui Q_n și deci $F(x)$ este cunoscută.

Exemplu. Să se afle o primitivă a lui $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x}$.

Din egalitatea

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}\, dx = (A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3)\, e^{3x} + C,$$

prin derivare găsim (după suprimarea lui e^{3x})

$$x^3 - 2x^2 + 5 = 3A_0x^3 + 3(A_1 + A_0)\, x^2 + (3A_2 + 2A_1)\, x + 3A_3 + A_2.$$

De aici rezultă sistemul

$$3A_0 = 1 \qquad 3A_2 + 2A_1 = 0$$

$$3A_1 + 3A_0 = -2 \qquad 3A_3 + A_2 = 5$$

cu soluția:

$$A_0 = \frac{1}{3}, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = \frac{2}{3} \quad \text{și} \quad A_3 = \frac{13}{9}.$$

Deci $\displaystyle\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{9}\right) e^{3x} + C.$

Observație. Aceeași metodă e aplicabilă și la calcularea primitivelor funcțiilor $g(x) = R_n(x)\cos \alpha x$ și $h(x) = S_n(x)\sin \alpha x$, cu R_n și S_n polinoame de gradul n.

5.9.3. *Calculul primitivelor unor funcții raționale*

Definiție. O funcție rațională $f: I \to \mathbf{R}$ se numește *simplă* dacă are una din formele

1) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

2) $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\quad A, a \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a \notin I$

3) $f(x) = \dfrac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}$, $\quad B, C, a, b, c \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad b^2 - 4ac < 0$

Definiție. Un polinom de două variabile de gradul n este o funcție de forma $P(x, y) = \sum\limits_{\substack{i, j = 0 \\ i+j \leq n}} a_{ij}x^iy^j, \quad a_{ij} \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}.$

Definiție. Se numește *funcție rațională* de două variabile cîtul a două polinoame de două variabile.

Teorema de descompunere a unei funcții raționale în funcții raționale simple. Fie $f\colon I \to \mathbf{R}$ o funcție rațională

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (Q(x) \neq 0, \quad \forall x \in I)$$

unde $P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$ sînt polinoame prime între ele.

Dacă $Q(x)$ are factorizarea

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_q)^{\alpha_q} (x^2 + M_1 x + N_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + M_r x + N_r)^{\beta_r}$$

atunci f se descompune în mod unic astfel

$$f(x) = g(x) + \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{x-a_1} + \dots +$$

$$\frac{A_1^{(q)}}{(x-a_q)^{\alpha_q}} + \frac{A_2^{(q)}}{(x-a_q)^{\alpha_q-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_q}^{(q)}}{x-a_q} +$$

$$+ \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{(x^2+M_1x+N_1)^{\beta_1}} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2+M_1x+N_1)^{\beta_1-1}} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)} + C_{\beta_1}^{(1)}}{x^2+M_1x+N_1} +$$

$$+ \dots + \frac{B_1^{(r)}x + C_1^{(r)}}{(x^2+M_rx+N_r)^{\beta_r}} + \frac{B_2^{(r)}x + C_2^{(r)}}{(x^2+M_rx+N_r)^{\beta_r-1}} + \dots + \frac{B_{\beta_r}^{(r)} + C_{\beta_r}^{(r)}}{x^2+M_rx+N_r}$$

unde $g(x)$ e un polinom cu coeficienți reali, constantele care apar sînt numere reale, iar $M_k^2 - 4N_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, r$.

Teoremă. Calculul primitivei $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$ se reduce la calculul unor primitive din funcții raționale simple

$$\int x^n \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbf{N}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a \in \mathbf{R} \quad \text{și}$$

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + Mx + N)^n} \mathrm{d}x, \quad B, C, M, N \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad M^2 - 4N < 0.$$

Exemple. 1) Fie $f\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$. Să se afle o primitivă a lui f.

Descompunem pe $f(x)$ în funcții raționale simple astfel

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x = (A + B)\,x^2 + (-A + B + C)\,x + A + C \Leftrightarrow$$

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Avem deci descompunerea

$$\frac{x}{x^3+1} = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{x+1}{x^2-x+1} = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{6}\,\frac{2x - 1 + 3}{x^2 - x + 1} =$$

$$= -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$$

respectiv

$$\int \frac{x\,dx}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C,$$

$b^2-4ac>0,$

3) $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-(b^2-4ac)}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-(b^2-4ac)}} + C, \quad b^2-4ac<0.$$

4) $$\int \frac{dx}{(ax^2+bc+c)^n} = -\frac{1}{(n-1)(b^2-4ac)}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} -$$

$$-\frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2-4ac)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + C.$$

5) $$\int \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{\alpha}{2a(n-1)}\cdot\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$$

$$+\frac{2\beta a-\alpha b}{2a}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} + C.$$

5.9.4. *Metoda lui Ostogradschii pentru determinarea părții raționale a primitivei dintr-o funcție rațională*

Fie $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $\forall x\in[a,b]$, $Q(x)\neq 0$.

1) Derivăm pe $Q(x)$ și găsim cel mai mare comun divizor al lui Q și Q'. Fie acesta $D(x)$.

2) Aflăm cîtul împărțirii lui $Q(x)$ la $D(x)$. Fie acesta $C(x)$.

3) Construim un polinom $\varphi(x)$, cu coeficienți reali nedeterminați, avînd gradul cu o unitate mai mic decît gradul lui $D(x)$.

4) Construim un polinom $\psi(x)$, cu coeficienți reali nedeterminați, avînd gradul cu o unitate mai mic decît $C(x)$.

5) Construim egalitatea

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{\varphi(x)}{D(x)} + \int\frac{\psi(x)}{C(x)}\,dx, \quad x\in[a,b].$$

Derivînd și folosind metoda coeficienților nedeterminați, determinăm polinoamele $\varphi(x)$ și $\psi(x)$, deci și pe $\dfrac{\varphi(x)}{D(x)}$ (partea rațională a primitivei) și pe $\dfrac{\psi(x)}{C(x)}$.

6) Calculăm apoi o primitivă a lui $\dfrac{\psi(x)}{C(x)}$.

Exemplu. Fie $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^3(x+1)^2}$, $x \in (2, +\infty)$. Să se determine partea algebrică din primitiva lui $f(x)$. În acest caz avem $P(x) = 1$; $Q(x) = (x-2)^3(x+1)^2$; $Q'(x) = (x-2)^2(x+1)(5x-1)$; $(Q(x), Q'(x)) = (x-2)^2 (x+1) = D(x)$; câtul împărțirii lui $Q(x)$ la $D(x)$ este $C(x) = (x-2)(x+1)$. Deci:

1) $D(x) = (x-2)^2(x+1)$.

2) $C(x) = (x-2)(x+1)$.

3) $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

4) $\psi(x) = a_1 x + b_1$.

5) $$\int \frac{dx}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{(x-2)^2(x+1)} + \int \frac{a_1x+b_1}{(x-2)(x+1)}\,dx.$$

Derivăm:

$$\frac{1}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{(x^2-x-2)(2ax+b)-(ax^2+bx+c)3x}{(x-2)^3(x+1)^2} + \frac{a_1x+b_1}{(x-2)(x+1)},$$

și deducem

$$1 = a_1x^4 + (b_1 - a - 3a_1)x^3 + (-2a-2b-3b_1)x^2 + x(-4a-b- 3c+4a_1) + (-2b+4b_1),$$

de unde sistemul:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 0;\\
&b_1 - a - 3a_1 = 0,\\
&-2a-2b-3b_1 = 0,\\
&-4a-b-3c+4a_1 = 0,\\
&-2b+4b_1 = 1,
\end{aligned}$$

cu soluția: $a = \dfrac{1}{9}$, $b = -\dfrac{5}{18}$, $c = -\dfrac{1}{18}$, $a_1 = 0$, $b_1 = \dfrac{1}{9}$.

Egalitatea de la 5) devine

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{2x^2-5x-1}{18(x-2)^2(x+1)} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x-2)(x+1)} + C,$$

iar partea algebrică din primitivă este $\dfrac{\varphi(x)}{D(x)} = \dfrac{2x^2-5x-1}{18(x-2)^2(x+1)}$.

O primitivă pentru $\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$ este $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$, $x > 2$, și astfel am obținut chiar o primitivă pentru $f(x)$.

5.9.5. *Substituţii şi formule utilizate pentru reducerea calculării primitivelor unor funcţii la calcularea primitivelor din funcţii raţionale*

Nr. crt.	Primitiva	Substituţia. Formule
1	$\int R$[1]$\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$	$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ ·
2	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$	i) Pentru $a \geqslant 0$, $t \pm x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ ii) Pentru $c \geqslant 0$, $tx \pm \sqrt{c} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ iii) Pentru $b^2 - 4ac \geqslant 0$, $t(x - x_1) = \sqrt{ax^2+bc+c}$, x_1 fiind o rădăcină a ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$
3	$\int R(e^{ax})\,\mathrm{d}x$	$t = e^{ax}$, $a \neq 0$, $a \in \mathrm{R}$
4	$\int R(\mathrm{tg}\, x)\,\mathrm{d}x$	$t = \mathrm{tg}\, x$, $x = \mathrm{arc\,tg}\, t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
5	$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$	$t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$, $x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\, t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\dfrac{x}{2} \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.
6	$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a \sin t$ sau $x = a \cos t$
7	$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\,\mathrm{tg}\, t$ sau $x = a\,\mathrm{cotg}\, t$ sau $x = a\,\mathrm{sh}\, t$
8	$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = \dfrac{a}{\sin t}$ sau $x = \dfrac{a}{\cos t}$ sau $x = a\,\mathrm{ch}\, t$
9	$\int \dfrac{Mx+N}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$	$t = \dfrac{1}{x-\alpha}$.

[1]) Cu $R(\alpha)$ şi $R(\alpha, \beta)$ am notat funcţii raţionale de un argument, respectiv de două argumente. A se vedea definiţiile de la pagina 407.

Exemple. 1) Să se afle o primitivă pentru $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}}$

$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$. Observăm că $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}} = f(u(x))$ cu $u(x) =$

$= \dfrac{1}{x}$. Dacă luăm $t = \dfrac{1}{x}$ sîntem exact în condițiile metodei 3) și avem

$$\int f(t)\, v'(t)\, dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}$$

Cum $1+t+t^2 = \left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$, aplicăm formula 17 din tabela 5.3 și avem

$$F(t) = -\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right),$$

respectiv

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x+x^2}\right) + C$$

2) Să se afle o primitivă pentru $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x-x^2}}$, $x \in (0, 1)$. Aici $ax^2+bx+c = -x^2+x$ și avem cel de al trei-lea caz al lui Euler (tabela de la 5.9.5, cazul 2, iii)

Luăm $x_1 = 0$ și introducem funcția t definită de $\sqrt{x-x^2} = tx$, care ne dă $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$, $t : (0, 1) \to (0, +\infty)$, funcție strict descrescătoare, derivabilă, avînd inversa $x = v(t)$, cu $v(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $v : (0, +\infty) \to (0, 1)$, cu $v'(t)$ continuă.

$$\text{Acum } f(t)\, v'(t) = \frac{1}{\dfrac{t^2+2}{t^2+1}\cdot\dfrac{t}{t^2+1}} \cdot \frac{-2t}{(t^2+1)^2} = -2\frac{1}{t^2+2}.$$

O primitivă a acestei funcții este $F(t) = -\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{t}{\sqrt{2}}$, iar o primitivă a funcției date este

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-x^2}} = -\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{2x}}.$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|\,2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\,| + C$, $a > 0$,

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, \ a < 0.$

5) $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{\alpha}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2\beta a - \alpha b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + C.$

6) $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b^2-4ac}{8a\sqrt{a}} \times$

$\times \ln|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| + C, \ a > 0.$

7) $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$

$\displaystyle+ \frac{b^2-4ac}{8a\sqrt{-a}} \cdot \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, \ a < 0.$

5.10. Funcții integrabile

5.10.1. *Integrala Riemann*

1. *Definiție.* Fie $[a, b] \subset \mathbf{R}$ un interval compact. Se numește *diviziune* a acestui interval și se notează cu δ o mulțime finită $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de puncte din $[a, b]$, astfel încît $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Mulțimea diviziunilor intervalului compact $[a, b]$ o notăm cu Δ.

2. *Definiție.* Se numește *normă* a diviziunii δ și se notează cu $\nu(\delta)$ cea mai mare dintre lungimile intervalelor parțiale $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

3. *Definiție.* Se numește *mulțime de puncte intermediare* asociată diviziunii δ și se notează cu ξ o mulțime de n puncte $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, avînd proprietatea $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

4. *Definiție.* Fie $[a, b]$ un interval compact al axei reale, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție, δ o diviziune a lui $[a, b]$ și ξ o mulțime de puncte intermediare asociată lui δ. Se numește *sumă Riemann*, corespunzătoare funcției f, diviziunii δ și mulțimii ξ de puncte intermediare și se notează cu $\sigma_f(\delta, \xi)$ numărul $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$.

5. *Definiție.* Funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ se numește *integrabilă* (în sensul lui) Riemann pe $[a, b]$, dacă $\exists A \in \mathbf{R}$, cu proprietățile: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon) = \eta$, astfel încît pentru orice diviziune δ a lui $[a, b]$, cu $\nu(\delta) < \eta$ și pentru orice mulțime de puncte intermediare ξ, asociată lui δ, să avem

$$|\sigma_f(\delta, \xi) - A| < \varepsilon$$

sau

$$\lim_{\nu(\delta)\to 0} \sigma_f(\delta, \xi) = A,$$

oricare ar fi diviziunea δ din mulțimea diviziunilor Δ ale intervalului $[a, b]$ și oricare ar fi mulțimea ξ de puncte intermediare asociată lui δ.

6. *Definiție.* Numărul A se numește *integrala definită* (în sensul lui) Riemann a funcției f pe $[a, b]$ și se notează

$$\int_a^b f, \quad \int_a^b f\,dx \quad \text{sau} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

5.10.2. Proprietăți ale integralei definite

1) Orice funcție monotonă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă.
2) Orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă.
3) Orice funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ integrabilă este mărginită pe $[a, b]$.
4) Dacă f este mărginită pe $[a, b]$ și continuă pe $[a, b]$, excepție făcînd un număr finit de puncte din $[a, b]$, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

5) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt două funcții cu proprietățile: f este integrabilă pe $[a, b]$ și $g(x) = f(x)$ pe $[a, b] \setminus A$ unde A este o parte finită inclusă în $[a, b]$, atunci

α) $g(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$ și

β) $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

6) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcții integrabile, iar $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă și

$$\int_b^a (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx,$$

7) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ și restricțiile lui f la $[a, c]$, respectiv $[c, b]$, $a < c < b$ sînt integrabile, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

Exemplu. Fie $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x^2 + 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$ Funcția f este integrabilă. În adevăr funcțiile $f_1(x) = x$, $x \in [0, 1]$ și $f_2(x) = x^2 + 1$, $x \in [1, 2]$ sînt integrabilă și f diferă pe $[1, 2]$ de f_2 într-un singur punct. Deci f este integrabilă și

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (x^2 + 1)\,dx = 23/6.$$

8) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci avem

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x) \right| dx.$$

9) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ este integrabilă, cu valori pozitive, atunci $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

10) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ este o funcție continuă, iar $[c, d] \subset [a, b]$, atunci avem

$$\int_c^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

11) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt două funcții integrabile cu proprietatea $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci avem

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx,$$

12) Dacă $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este integrabilă şi $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x\in[a,b]$ atunci

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

13) Dacă $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o primitivă a lui f care se anulează in $x_0\in[a,b]$, atunci F are forma

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,d\alpha,\quad \forall x\in[a,b].$$

14) *Teorema de medie.* Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcţie continuă, atunci există $c\in[a,b]$ cu proprietatea

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=f(c).$$

Dacă f este continuă pe $[a,b]\subset\mathbf{R}$, iar g este pozitivă şi integrabilă pe $[a,b]$, atunci există $\xi\in(a,b)$, astfel încît

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

15) *Formula de integrare prin părţi.* Dacă $u,v:[a,b]\to\mathbf{R}$ sînt funcţii de clasa C^1, atunci avem

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

16) *Formula lui Leibniz-Newton.* Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcţie integrabilă, care admite primitive pe $[a,b]$, atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

17) *Formula de schimbare de variabilă.* Dacă $u:[a,b]\to I$ şi $f:I\to\mathbf{R}$, cu u de clasă C^1 şi f continuă, atunci

$$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

18) Există funcţii integrabile care nu admit primitive şi există funcţii care admit primitive dar nu sînt integrabile.

Exemple. 1) Funcţia $f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in(0,1]\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$ este integrabilă, dar nu admite primitive fiindcă nu are proprietatea lui Darboux: $f([0,1])=\{0,1\}$ nu este interval.

2) Fie $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x\in(0,1]\\ 0, \text{ dacă } x=0\end{cases}$

Funcția f', derivata lui f, admite ca primitivă pe f. În schimb f' nu este integrabilă deoarece funcțiile integrabile sînt mărginite, iar f' nu este mărginită $\left(f'\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right) = -2\sqrt{\pi n} \to -\infty\right)$.

19) *Formula lui Leibniz.* Fie $[a, b]$ și $[c, d]$ două intervale compacte ale axei reale, $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și cu derivata parțială în raport cu x continuă și $\alpha(x)$, $\beta(x)$ două funcții continue și cu $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$ continue pe $[a, b]$. Atunci funcția

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t)\, dt,$$

este derivabilă pe $[a, b]$ și are loc relația

$$F'(x) = f(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\, dt.$$

Tabela 5.4. Cîteva integrale definite

1) $$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ dacă } m \neq n,\ m \text{ și } n \text{ sînt numere întregi pozitive} \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ dacă } m = n \end{cases}$$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx = -2\pi$; 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}$;

4) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \pi/16$

5) $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\, dx =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n + 1)} \quad (n > 0, \text{ întreg})$$

6) $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n > 0, \text{ întreg})$$

7) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{a/b}} \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}$;

8) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2)\, dx = \begin{cases} 0 & (0 < a \leq 1); \\ 2\pi \ln a & (a > 1) \end{cases}$

9) $\int_0^{\pi} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\pi} \ln \sin x \, dx = -\pi \ln 2.$

10) $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ 11) $\int_0^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \frac{\pi}{2}$ $m \in N^*$

5.10.3. *Aplicații ale integralei definite*

1) *Determinarea ariilor figurilor plane.* Dacă $f : [a, b] \to R_+$ este o funcție continuă, atunci subgraficul lui f are aria

$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$

2) Dacă $f_1, f_2 : [a, b] \to R$ sînt două funcții continue și $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$, atunci porțiunea de plan cuprinsă între graficele celor două funcții și dreptele de ecuații $x = a$ și $x = b$ are aria

$$A = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \, dx$$

3) *Determinarea volumului corpurilor de rotație.* Dacă $f : [a, b] \to R$ este o funcție continuă, pozitivă, atunci corpul de rotație generat de f are volumul

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

4) *Determinarea lungimii graficului unei funcții.* Dacă $f : [a, b] \to R$ este o funcție de clasă C^1, atunci graficul lui f are lungimea

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx.$$

5) *Determinarea ariei suprafețelor de rotație.* Dacă $f : [a, b] \to R$ este o funcție de clasă C^1, pozitivă, atunci suprafața de rotație generată de f are aria

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

6) *Determinarea coordonatelor ξ și η ale centrului de greutate.* Fie $G(\xi, \eta)$ centrul de greutate al unei plăci plane omogene mărginite pe graficele funcțiilor continue $f, g : [a, b] \to R$ ($f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a, b]$) și de dreptele de ecuații $x = a$, $x = b$. Atunci avem

$$\xi = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x)) \, dx}{\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx}; \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) \, dx}{\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx}$$

Rezultă imediat un caz particular interesant cînd $f = 0$.

7) *Determinarea momentului de inerție al unui corp de rotație omogen față de axa de rotație*

Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ este o funcție continuă, atunci corpul omogen de rotație (față de Ox) generat de f are momentul de inerție față de axa de rotație

$$I = \frac{\pi\mu}{2} \int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde μ este densitatea constantă a corpului respectiv.

8) *Determinarea momentului de inerție al unei plăci plane omogene limitate de graficele funcțiilor continue* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$, $g(x) \geqslant f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, și de dreptele de ecuații $x = a$, $x = b$, față de axa absciselor, se efectuează cu formula

$$I = \frac{\mu}{3} \int_a^b (g^3(x) - f^3(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde μ este densitatea constantă a plăcii respective.

9) *Calcularea limitelor unor șiruri numerice.*

a) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă, atunci

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Dacă $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă, atunci

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.10.4. *Integrarea numerică a funcțiilor*

1) *Formula dreptunghiurilor.* Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție de clasă C^1, $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ și

$$S_n = \frac{b-a}{n} [f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]$$

respectiv

$$S_n' = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)],$$

atunci S_n sau S_n' aproximează integrala definită $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, cu o eroare cel mult egală cu $\frac{(b-a)^2 M'}{n}$, unde $M' = \max\limits_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Exemplu. Să se calculeze $I = \int_1^9 \sqrt{6x-5}\,\mathrm{d}x$, divizînd intervalul $[1, 9]$ în 8 părți egale. Să se indice eroarea absolută și cea relativă.

În acest caz (fig. 5.26) avem $a = x_0 = 1$, $x_8 = b = 9$, $h = \frac{(b-a)}{8} = 1$. $x_1 = 2, \ldots, x_7 = 8$. Calculăm valorile lui f în punc.... de diviziune:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2,6458	3,6056	4,3589	5	5,5678	6,0828	6,5574	7

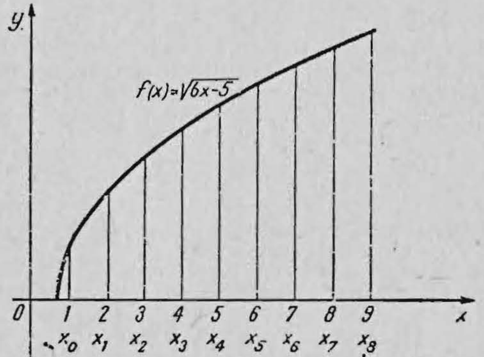


Fig. 5.26

Cu formula ce dă pe S_n găsim $I \simeq S = 34{,}8183$.

Valoarea exactă a lui I se găsește imediat $I = 38$.

Acum eroarea absolută este $\varepsilon_a = I - S_n = 3{,}1817$, iar cea relativă $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{38} \cdot 100 = 8{,}37\%$.

2) *Formula trapezelor.* Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție de clasă C^2, $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ și

$$S_n = \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2(f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) + f(b)],$$

atunci S_n aproximează integrala definită $\int_a^b f(x)\,dx$ cu o eroare cel mult egală cu $\frac{(b-a)^3 M''}{12\, n^2}$, unde $M'' = \max\limits_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Exemplu. Valoarea lui I calculată cu această metodă se găsește a fi $I \simeq 37{,}8183$, eroarea absolută $\varepsilon_a = 0{,}1817$ și eroarea relativă $\varepsilon_r = 0{,}48\%$.

5.11. Ecuații diferențiale

Definiție. Se numește *ecuație diferențială* ordinară (sau obișnuită) cu o funcție necunoscută y o relație de forma

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0, \qquad (1)$$

sau de forma

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

între variabila independentă x, funcţia necunoscută $y(x)$ şi derivatele acesteia pînă la un anumit ordin n, unde $F : \Delta \subset \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$ respectiv $f: J \times D \subset \mathbf{R} \times R^n \to \mathbf{R}$, sînt funcţii continue.

Observaţie: Cu I, J notăm intervale ale axei reale, ca de obicei.

Exemple de ecuaţii diferenţiale: $y'(x) - y(x) = 0$; $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$; $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$; $y'' - 3y' + y = 0$; $(x+2)y'' - (x-5)y' - 7y = 0$.

Definiţie. Se numeşte *ordin al ecuaţiei diferenţiale* (1) sau (2) ordinul cel mai înalt al derivatei lui y care intră în ecuaţie.

Exemple. Ecuaţia diferenţială $y' - y = 0$ este de ordinul întîi, iar ecuaţia $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ este de ordinul al doilea.

Definiţie. Se numeşte *soluţie* a ecuaţiei (2) o funcţie $\varphi : I \subset J \to \mathbf{R}$, cu derivatele $\varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ continue pe I, care înlocuită în relaţia (2) o transformă pe aceasta într-o identitate în $x \in I$:

$$\forall x \in I,\ \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Exemplu. Funcţia $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = e^x$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y' - y = 0$, fiindcă înlocuită în ecuaţie ne dă $e^x - e^x = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Problema lui Cauchy pentru ecuaţia (2): A rezolva problema lui Cauchy pentru ecuaţia (2) înseamnă a determina o soluţie $\varphi : I \to \mathbf{R}$ a ecuaţiei, care îndeplineşte condiţiile (iniţiale)

$$\varphi(x_0) = y_0$$

$$\varphi'(x_0) = y_0', \quad x_0 \in J, \ (y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Exemplu de problemă Cauchy. Să se determine o soluţie $\varphi : [1, 3] \to \mathbf{R}$ a ecuaţiei $y'(x) - y(x) = 0$, care îndeplineşte condiţia:

$y(2) = 2$. Se găseşte $\varphi(x) = 2e^{x-2}$, $\varphi : [1, 3] \to [2e^{-1}, 2e]$.

Observaţie: În rezolvarea problemelor lui Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială fundamentale sînt următoarele chestiuni;

1) Demonstrarea existenţei locale sau globale a soluţiei;
2) Determinarea intervalului pe care există soluţia.
3) Demonstrarea unicităţii soluţiei.
4) Dependenţa soluţiei de condiţiile iniţiale.

Pentru ecuaţiile diferenţiale elementare considerate în cele ce urmează mai jos, aceste chestiuni se rezolvă uşor (constructiv), pe baza cunoştinţelor de analiză matematică dobîndite în liceu.

5.11.1. *Cîteva tipuri de ecuaţii diferenţiale elementare*

1. $y'(x) = f(x)$, $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, I interval, f continuă.
2. $y'(x) = f(x)y(x)$, $f : I \subset R \to R$, f continuă *(ecuaţie liniară)*.
3. $y'(x) = ay(x) + b$, $a, b \in \mathbf{R}$ *(ecuaţie afină cu coeficienţi constanţi)*.
4. $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$, $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f continuă, $g : J \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\forall y \in J$, $g(y) \neq 0$, g continuă *(ecuaţie cu variabilele separabile)*.
5. $a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ *(ecuaţie liniară de ordinul al II-lea cu coeficienţi constanţi)*.

5.11.2. *Mulțimea soluțiilor unor ecuații diferențiale și soluția problemei lui Cauchy pentru aceste ecuații*

Nr. crt.	Tipul ecuației	Ecuația diferențială	Mulțimea soluțiilor sau soluția generală	Datele inițiale	Soluția problemei Chauchy
1	Ecuația cu variabilele separate	$y' = f(x)$, $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f continuă	$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$, $x \in I$, $C \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in I$
		Exemplu. $y' = \sin x$, $\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$	$y(x) = -\cos x + C$, $x \in \mathbf{R}$, $C \in \mathbf{R}$	$y(0) = 1$	$\varphi(x) = 2 - \cos x$, $x \in \mathbf{R}$
2	Ecuație cu variabilele separabile	$y' = g(y)$, $g : J \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}\setminus\{0\}$ g continuă	$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} - x = C$, $x \in I$, $C \in R$	$y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$	$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}$, $y : I \to J$
		Exemplu. $y' = 1 + y^2$, $y : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$	$\operatorname{arctg} y(x) = x + C$, $x \in I$, $C \in \mathbf{R}$	$y(0) = 0$	$\varphi(x) = \operatorname{tang} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
3	Ecuație cu variabilele separabile	$y' = f(x) \cdot g(y)$, $f : I \to \mathbf{R}$, $g : J \to \mathbf{R}\setminus\{0\}$, continue	$\int f(x)\,\mathrm{d}x + C = \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$, $x \in I_1 \subset I$, $y \in J$; $C \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$	$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)}$, $x \in I_1 \subset I$, $y \in J$

		Exemplu. $y' = -\dfrac{1+y^2}{y}\sin x$ $g(y) = \dfrac{1+y^2}{y}$, $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ $f(x) = -\sin x$, $f : I \to [-1, 1]$	$\ln(1+y^2) = 2\cos x + C$	$y(0) = 1$	$\varphi(x) = \sqrt{2 \cdot e^{2\cos x - 2} - 1}$ $\lvert x \rvert \leqslant 2 \cdot \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{\ln 2}}{2}\right)$
4	Ecuație liniară	$y' + P(x)y = 0$, $P : I \to \mathbf{R}$, continuă	$y(x) = C \cdot e^{-\int P(x)\,d}$, $x \in I$, $C \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = y(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}$, $x \in I$
		Exemplu. $y' + \dfrac{1}{x-2}y = 0$, $x \in (2, +\infty)$	$y(x-2) = C$	$x_0 = 3$; $y_0 = 5$	$\varphi(x) = \dfrac{5}{x-2}$, $x \in (2, +\infty)$
5	Ecuație afină cu coeficienți constanți	$y' = ay + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ $y : I \to J$; $y \neq -\dfrac{b}{a}$, $\forall x \in I$	$y(x) = C e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $x \in I$, $C \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$	$y(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} -$ $-\dfrac{b}{a}$, $y : I \to J$
		Exemplu. $y' = y - 2$ $y : \mathbf{R} \to (2, +\infty)$	$y(x) = 2 + C e^{x}$	$y(0) = 3$	$\varphi(x) = 2 + e^{x}$; $x \in \mathbf{R}$
6	Ecuație de ordin superior normală	$y'' = f(x)$, $f : I \to \mathbf{R}$, f continuă	$y(x) = \int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)\,dt +$ $+ C_1 x + C_2$, x, $x_0 \in I$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ $x_0 \in I$, y_0, $y'_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = \int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)\,dt +$ $+ y'_0(x - x_0) + y_0$

Nr. crt.	Tipul ecuației	Ecuația diferențială	Mulțimea soluțiilor sau soluția generală	Datele inițiale	Soluția problemei Cauchy
		Exemplu. $y'' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\arcsin : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$y(x) = \frac{2x^2 - 1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2} + C_1 x + C_2$, $x \in (-1, 1)$; $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 0$	$\varphi(x) = \frac{2x^2 - 1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$
7	Ecuație diferențială a oscilațiilor armonice	$y'' + w^2 y = 0$; $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$	$y(x) = C_1 \sin wx + C_2 \cos wx$; $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ $x_0, y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = y_0 \cos w(x - x_0) + \frac{y'_0}{w} \sin w(x - x_0)$, $x \in \mathbf{R}$
		Exemplu. $y'' + 17y = 0$	$y(x) = C_1 \sin\sqrt{17}\, x + C_2 \cos\sqrt{17}\, x$, $x \in \mathbf{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$x_0 = 0$ $y_0 = 1$, $y'_0 = \sqrt{17}$	$\varphi(x) = \cos\sqrt{17}\, x + \sin\sqrt{17}\, x$, $x \in \mathbf{R}$
8	Ecuație liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Cazul rădăcinilor distincte	$ay'' + by' + cy = 0$ $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $a, b, c \in \mathbf{R}$ $ar^2 + br + c = 0$, $\Delta > 0$; $r_1 \neq r_2$	$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, $x \in \mathbf{R}$.	$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $x_0, y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = \frac{r_2 y_0 - y'_0}{r_2 - r_1} e^{(x - x_0) r_1} + \frac{y'_0 - r_1 y_0}{r_2 - r_1} \cdot e^{(x - x_0) r_2}$, $x \in \mathbf{R}$
		Exemplu. $3y'' - 2y' - 8y = 0$ $3r^2 - 2r - 8 = 0$ $r_1 = 2$, $r_2 = -4/3$	$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$, $x \in \mathbf{R}$; $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$x_0 = 0$, $y_0 = 1$; $y'_0 = 0$	$\varphi(x) = \frac{2}{5} e^{2x} + \frac{3}{5} e^{-\frac{4}{3}x}$, $x \in \mathbf{R}$

9	Ecuație liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Cazul rădăcinilor duble	$ay'' + by' + c = 0;$ $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$ $ar^2 + br + c = 0$, cu $\Delta = 0,\ r_1 = r_2 = r$	$y(x) = (C_1 x + C_2)\, e^{rx}$, $x \in \mathbf{R},\ C_1,\ C_2 \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $x_0,\ y_0$, $y'_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = [(y'_0 - ry_0)\, x + y_0 +$ $+ rx_0 y_0 - x_0 y'_0]\, e^{r(x-x_0)},\ x \in \mathbf{R}$
		Exemplu. $y'' + 2y' + y = 0$ $r^2 + 2r + 1 = 0$ $r_1 = r_2 = -1$	$y(x) = (C_1 x + C_2)\, e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}\ C_1,\ C_2 \in \mathbf{R}$	$x_0 = 0$ $y_0 = 0$ $y'_0 = 1;$	$\varphi(x) = xe^{-x},\ x \in \mathbf{R}$
10	Ecuația liniară cu coeficienți constanți. Cazul rădăcinilor complexe	$ay'' + by' + cy = 0$ $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$ $ar^2 + br + c = 0,\ \Delta < 0;$ $r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta$	$y(x) = (C_1 \sin \beta x +$ $+ C_2 \cos \beta x) \cdot e^{\alpha x},\ x \in \mathbf{R},\ C_1$, $C_2 \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = y'_0$, $x_0,\ y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = \Big[\dfrac{y'_0 - \alpha y_0}{\beta} \sin \beta(x -$ $- x_0) + y_0 \cos \beta(x -$ $- x_0)\Big]\, e^{\alpha(x-x_0)},\ x \in \mathbf{R}$
		Exemplu. $y'' + 2y' + 2y = 0$ $r^2 + 2r + 2 = 0$ $r_1 = -1 + i,\ r_2 = -1 - i$, $\alpha = -1;\ \beta = 1.$	$y(x) = e^{-x}(C_1 \sin x +$ $+ C_2 \cos x)$ $x \in \mathbf{R}:\ C_1,\ C_2 \in \mathbf{R}$	$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$	$\varphi(x) = (\sin x + \cos x)\, e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$

Tabela 5.7. Cîteva integrale pe intervale necompacte:

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$ 2. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ 3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}$

4. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (a < 0) \end{cases}$ 5. $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

6. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$ 7. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

8. $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{x + 1} = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad (0 < n < 1)$

9. $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$

10. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pentru } a > b \\ 0 & \text{pentru } a = b \\ \frac{\pi}{4} & \text{pentru } a < b \end{cases}$

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin (x^2)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos (x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Rogai, E., Teodorescu, C. Tabele matematice uzuale, Editura Tehnică, edițiile I—VIII.

2. *Manuale:* (Editura Didactică și Pedagogică).

Clasa a IX-a

a) Năstăsescu, C., Niță, C., Rizescu, Gh. Algebră, 1981.
b) Bogdanoff, Z., Georgescu-Buzău, E., Panaitopol, L. *Algebră,* 1977
c) Dumitrescu, Gh., *Algebră,* 1958.
d) Coța, A., Radó, M., Răduțiu, M., Vornicescu, Fl., *Geometrie și trigonometrie,* 1981.
e) Teleman, K., Florescu, M., Moraru, D., Rădulescu, C., Stătescu, E. *Geometrie și trigonometrie,* 1979.
f) Coșniță, C, Simionescu, Gh. D., *Geometrie,* 1964.
g) Constantinescu, L., Petrișor, Gr. *Geometrie și trigonometrie,* 1975

Clasa a X-a

a) Năstăsescu, C., Niță, C., Popa, S. *Algebră,* 1980
b) Bogdanoff, Z., Georgescu-Buzău, E. *Algebră,* 1978
c) Crișan, I., Pop, A. *Algebră.* 1963

d) Teleman, K., Florescu, M., Moraru, D., Rădulescu, C., Stătescu, E. *Geometrie și trigonometrie*, 1980
e) Mihăileanu, N. N., Ionescu-Bujor, C., Ionescu-Țiu, C. *Geometrie în spațiu*, 1976
f) Dumitrescu, Gh. *Geometrie în spațiu*, 1963
g) Coșniță, C. *Geometrie în spațiu*, 1963

Clasa a XI-a

a) Năstăsescu, C., Niță, C., Stănescu, I. *Elemente de algebră superioară*, 1980
b) Udriște, C., Tomuleanu, V. *Geometrie analitică*, 1981
c) Simionescu, Gh. D. *Geometrie analitică*, 1978
d) Gussi, Gh., Stănășilă, O., Stoica, T. *Elemente de analiză matematică*, 1980
e) P. Preoteasa, L. D. Șerbinați, *Matematică aplicată în tehnica de calcul*, 1980

Clasa a XII-a

a) Ion, I. D., Ghicca, A., Nediță, N. *Algebră*, 1980
b) Hollinger, A., Georgescu-Buzău, E. *Elemente de algebră superioară*, 1969
c) Colojoară, I., Dragomir, A. *Elemente de algebră superioară*, 1968
d) Boboc, N., Colojoară, I. *Elemente de analiză matematică*, 1980
e) Acad. Caius Iacob. *Elemente de analiză matematică*, 1973
f) Acad. Gheorghe Mihoc, *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică*, 1979
g) Șchiop, A. I., Stancu, M. *Matematică aplicată în tehnica de calcul*, 1980

3. *Alte lucrări fundamentale*

a) Bădulescu, V. *Tabele de logaritmi*, București, Ediția a III-a, 1944
b) Cristescu, V. *Culegere de probleme de Trigonometrie*, Partea I, 1943
c) Antoine Dalle, 2000 *théorèmes et problèmes de Géométrie avec solutions*, J. Gauthier, P. Paelinck, 1923, Namur
d) J. Dupuis, *Tables de logarithmes à cinq décimales, disposées à double entrée et revues*, par J. Dupuis, Paris, Hachette, 1928
e) J. Hadamard, *Lecții de geometrie elementară, Geometrie plană, geometrie în spațiu*, Editura Tehnică, 1960, 1961
f) Ionescu, I. *Culegere de probleme de aritmetică*, Biblioteca „Gazetei Matematice" nr. XIII, 1937
g) Acad. Grigore C. Moisil, *Elemente de logică matematică și de teoria mulțimilor*, Editura Științifică, 1968, București
h) Myller, A. *Curs de geometrie analitică*, Ed. Pygmalion, Iași, 1946
i) Acad. Octav Onicescu, Gheorghe Galbură, *Algebra*, 1948
j) D. I. Perepiolkin, *Probleme rezolvate din „Lecții de geometrie în spațiu de J. Hadamard"*, Editura Tehnică, 1962
k) Ionescu-Țiu, C., Mihăileanu, N. N., Pîrșan, L., Rogai, E. *Probleme de matematică pentru examenele de bacalaureat și admitere în învățămîntul superior*, București, Editura Tehnică, două ediții, 1972, 1973
l) Sirețchi, Gh. *Analiză matematică*, vol. I, ed. a IV-a, 1978, Universitatea București
m) Stamate, I., Stoian, I. *Culegere de probleme de algebră*, 1971
n) Teodorescu, I. St. *Metode de aritmetică*, 1937
o) Acad. Vinogradov, I. M. *Bazele teoriei numerelor*, 1954, București

CUPRINS

Prefață 3
1. **Aritmetica** 5
1.1. Sisteme de numerație 5
1.2. Teorema împărțirii întregi 5
1.3. Divizibilitatea numerelor naturale 6
1.4. Criterii de divizibilitate a numerelor naturale scrise in baza 10 6
1.5. Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun 7
1.6. Numere prime 7
1.7. Teoreme de teoria numerelor 9
1.8. Ecuații remarcabile 10
1.9. Alte rezultate din aritmetică 10
1.10. Extragerea rădăcinii pătrate 10
1.11. Extragerea rădăcinii cubice 11
1.12. Folosirea tabelelor 1.1–1.5 12
Tabela 1.1. Puterile numerelor 2, 3 și 5 13
Tabela 1.2. Puterile 4 și 5 ale numerelor naturale de la 1 la 100 14
Tabela 1.3. Numerele prime de la 1 la 10 000 16
Tabela 1.4. Cei mai mici divizori ai numerelor de la 169 la 10 000 19
Tabela 1.5. Părți proporționale pentru interpolări liniare ale numerelor de la 11 la 90 22
2. **Algebra** 25
2.1. Elemente de logică matematică 25
2.1.1. Noțiunea de propoziție 25
2.1.2. Conectori (operatori) logici 25
2.1.3. Expresii in calculul propozițiilor 27
2.1.4. Noțiunea de predicat 28
2.1.5. Cuantificatori 28
2.1.6. Metoda de demonstrație prin reducere la absurd 29
2.1.7. Proprietăți fundamentale ale conectorilor (operatorilor) logici 29
2.2. Mulțimi 29
2.3. Relații binare 32
2.4. Operații cu numere reale 34
2.4.1. Puteri naturale ale numerelor reale 34
2.4.2. Identități fundamentale 34
2.4.3. Radicali. Proprietăți 35
2.5. Ecuații și inecuații de gradul întii 36
2.5.1. Ecuații de gradul întii sau ecuații afine 36
2.5.2. Inecuații de gradul intii sau inecuații afine 37
2.5.3. Modulul unui număr real x 37
2.6. Numere complexe 38
2.6.1. Forma algebrică a numerelor complexe 38
2.6.2. Forma trigonometrică a numerelor complexe 39
2.6.3. Formula lui Moivre 40
2.6.4. Extragerea rădăcinii de ordinul n dintr-un număr complex 40
2.6.5. Forma exponențială a numerelor complexe 40
2.6.6. Ecuația binomă 41
2.7. Ecuații și inecuații de gradul al II-lea 41
2.7.1. Ecuații de gradul al doilea 41
2.7.2. Inecuații fundamentale de gradul al II-lea 45
2.8. Ecuații algebrice de gradul III, IV și V 46
2.8.1. Rezolvarea ecuației de gradul al treilea 46
2.8.2. Ecuația reciprocă de gradul al treilea 48
2.8.3. Rezolvarea ecuației de gradul al patrulea 48

2.8.4. Ecuația reciprocă de gradul al patrulea 49
2.8.5. Ecuația bipătrată 49
2.8.6. Ecuația reciprocă de gradul al cincilea 49
2.9. Logaritmi 49
2.9.1. Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale 50
2.9.2. Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale 51
2.10. Metoda inducției matematice 51
2.10.1. Axioma de recurență a lui Peano 51
2.10.2. Metoda inducției matematice 51
2.10.3. Variantă a metodei inducției matematice 52
2.11. Progresii aritmetice 54
2.11.1. Reprezentarea unei progresii aritmetice cu n termeni 55
2.11.2. Progresii armonice 55
2.12. Progresii geometrice 55
2.12.1. Reprezentarea unei progresii geometrice cu n termeni 57
2.13. Analiză combinatorie 58
2.13.1. Permutări 58
2.13.2. Aranjamente 59
2.13.3. Combinări 59
2.13.4. Binomul lui Newton 60
2.13.5. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale 61
2.14. Matrice 61
2.14.1. Matrice. 61
2.15. Determinanți 56
2.16. Sisteme de ecuații afine (liniare și neomogene) 70
2.17. Polinoame 75
2.17.1. Polinoame cu coeficienți complexi 75
2.17.1.1. Divizibilitatea polinoamelor 76
2.17.1.2. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor 77
2.17.1.3. Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor 78
2.17.1.4. Rădăcinile polinoamelor 78
2.17.1.5. Rădăcini comune la două polinoame. Rezultant 79
2.17.1.6. Polinoame ireductibile 79
2.17.1.7. Ecuații algebrice 80
2.17.1.8. Formula lui Taylor și Mac-Laurin pentru polinoame 80
2.17.2. Polinoame cu coeficienți reali. Ecuații algebrice 81
2.17.3. Polinoame cu coeficienți raționali. Ecuații algebrice .. 81
2.17.4. Polinoame cu coeficienți întregi 82
2.17.5. Aproximarea rădăcinilor iraționale ale polinoamelor $f \in \mathbf{R}[X]$ 82
2.18. Structuri algebrice 83
2.18.1. Lege de compoziție internă 83
2.18.2. Grupuri 84
2.18.3. Inele 85
2.18.4. Corpuri 86
2.18.5. Morfisme (omomorfisme) 87
2.18.6. Izomorfism 87
2.18.7. Automorfisme 88
2.18.8. Endomorfisme 88
2.19. Spațiu vectorial 88
2.19.1. Lege de compoziție externă 88
2.19.2. Spațiu vectorial 89
2.19.3. Bază. Dependență și independență liniară 89
2.19.4. Transformări liniare 90
Tabela 2.1. Coeficienți binominali 95

2.20. Folosirea tabelelor 2.1–2.9 95
Tabela 2.2. Logaritmii zecimali ai numerelor de la 1 la 100 96
Tabela 2.3. Logaritmii zecimali ai numerelor de la 100 la 10 000 97
Tabela 2.4. Antilogaritmi 119
Tabela 2.5. Logaritmii naturali ai numerelor de la 1,00 la 9,99 122
Tabela 2.6. Logaritmii naturali ai puterilor lui 10 124
Tabela 2.7. Multiplii lui $\frac{1}{M}$ 124
Tabela 2.8. Multiplii modulului M 125
Tabela 2.9. Valorile funcțiilor e^x și e^{-x} pentru $x \in (0,10)$.... 126

3. Geometrie 130
3.1. Geometrie plană 130
3.1.1. Teoreme și relații în triunghiuri, patrulatere și poligoane oarecare 130
3.1.2. Teoreme remarcabile 132
3.1.3. Cercul 137
3.1.4. Locuri geometrice fundamentale 138
3.1.5. Relații în poligoanele regulate înscrise într-un cerc 139
3.1.6. Folosirea tabelelor 3.1–3.3 139
Tabela 3.1. Laturile, apotemele și ariile poligoanelor regulate în funcție de raza R a cercului circumscris 140
Tabela 3.2. Puteri, radicali, logaritmi naturali, valori reciproce, lungimi și arii de cercuri 141
Tabela 3.3. Valori numerice importante (expresii în π, g și e) 171
3.2. Geometria în spațiu 172
3.2.1. Teoreme remarcabile 172
3.2.2. Locuri geometrice fundamentale 173
3.2.3. Ariile și volumele principalelor poliedre. Razele sferelor înscrise sau circumscrise acestora 174
3.2.4. Ariile și volumele principalelor corpuri rotunde 177
3.2.5. Poliedre. Poliedre regulate 179
3.2.6. Cîteva volume uzuale 181
3.2.7. Folosirea tabelei 3.4. 182
Tabela 3.4. Factorul corespunzător raportului h/d pentru calculul conținutului de lichid în cilindri orizontali 182
3.3. Geometrie analitică 183
3.3.1. Vectori 183
3.3.2. Transformări geometrice în plan 186
3.3.3. Transformări geometrice în spațiu 191
3.3.4. Punctul și dreapta. Planul 192
3.3.5. Cercul 197
3.3.6. Elipsa 198
3.3.7. Hiperbola 200
3.3.8. Parabola 202
3.3.9. Curbele reprezentate de ecuația $y^2 = 2px + qx^2$...... 203
3.3.10. Secțiuni conice 204

4. Trigonometrie 205
4.1.1. Unități de măsură pentru unghiuri. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani 205
Tabela 4.1. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani 206
4.2. Definiția funcțiilor trigonometrice ale unui unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic 207
4.3. Definiția funcțiilor trigonometrice pentru unghiuri oarecare și argumente numerice 207
4.4. Periodicitatea funcțiilor trigonometrice fundamentale 208

4.5. Graficele funcțiilor trigonometrice fundamentale 208
4.6. Identități trigonometrice fundamentale 210
4.7. Continuitatea și derivabilitatea funcțiilor trigonometrice 210
4.8. Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice fundamentale 210
4.9. Formule de reducere la un unghi ascuțit 211
4.10. Expresiile funcțiilor $\sin^2 u$, $\cos^2 u$, $\mathrm{tg}^2 u$ și $\mathrm{cotg}^2 u$ în funcție de pătratul unei funcții trigonometrice fundamentale 211
Tabela 4.2. Valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale ale cîtorva unghiuri 212
Tabela 4.3. Funcțiile trigonometrice exprimate cu ajutorul uneia dintre ele 213
Tabela 4.4. Funcțiile trigonometrice fundamentale ale unor sume și diferențe de unghiuri 214
Tabela 4.5. Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice fundamentale în sume de funcții trigonometrice corespunzătoare 214
4.11. Funcțiile trigonometrice ale jumătății, dublului și triplului unui unghi 215
4.12. Linearizarea unor puteri ale sinusului și cosinusului 216
4.13. Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul tangentei jumătății unghiului 216
4.14. Formule de transformare a unor sume de funcții trigonometrice în produse (Formule calculabile prin logaritmi) 217
4.15. Identități pentru funcțiile trigonometrice ale unghiurilor A, B, C ale unui triunghi oarecare 217
4.16. Inegalități verificate de funcțiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi oarecare și de alte elemente ale acestuia 218
4.17. Relații între elementele unui triunghi oarecare 219
Tabela 4.6. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice 221
Tabela 4.7. Rezolvarea triunghiurilor oarecare 221
4.18. Produse. Sume. Inegalități și identități remarcabile 222
4.19. Funcții trigonometrice inverse 224
4.20. Condiții necesare și suficiente ca valorile funcțiilor trigonometrice corespunzătoare la două unghiuri u și v să fie egale 225
Tabela 4.8. Ecuații trigonometrice fundamentale 226
4.21. Inecuații trigonometrice fundamentale 228
4.22. Aplicații ale trigonometriei 233
4.23. Formule fundamentale pentru funcțiile hiperbolice 235
Tabela 4.9. Relații între funcțiile hiperbolice 236
4.24. Folosirea tabelei 4.10 și a tabelei 4.11 238
Tabela 4.10. Valorile naturale ale funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor măsurate în grade sexagesimale 240
Tabela 4.11. Logaritmii cu cinci zecimale ai funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de la 0° pînă la 90° din minut în minut 244

5. Analiză matematică 342
5.1. Numere reale 342
5.1.1. Submulțimi ale lui **R** 343
5.1.2. Proprități ale numerelor reale, deduse din axiome 343
5.1.3. Dreapta încheiată 344
5.1.4. Intervale numerice 345
5.1.5. Vecinătate. Punct de acumulare 345
5.1.6. Mulțimi mărginite ale lui **R**. Margine superioară. Margine inferioară 346
5.2. Inegalități remarcabile 346
5.3. Șiruri de numere reale 350

5.3.1. Teoreme fundamentale asupra șirurilor numerice 351
5.3.2. Șiruri remarcabile 354
5.3.3. Limite fundamentale de șiruri 355
5.3.4. Șiruri recurente liniare 356
5.4. Serii de numere reale 357
5.4.1. Alte serii remarcabile 358
5.5. Noțiunea de funcție 359
5,5.1. Generalități 359
5.5.2. Funcții elementare 365
5.6. Limite de funcții 372
5.6.1. Definiții 372
5.6.2. Proprietăți 373
5.6.3. Limite fundamentale de funcții 375
5.7. Funcții continue 378
5.7.1. Teoreme 378
5.7.2. Funcții continue pe intervale numerice 379
5.7.3. Prelungirea funcțiilor prin continuitate 380
5.7.4. Operații cu funcții continue 380
5.7.5. Continuitatea funcțiilor compuse 380
5.7.6. Teorema lui Cauchy 380
5.8. Funcții derivabile 381
Tabela 5.1. Derivatele și diferențialele funcțiilor elementare 384
5.8.1. Proprietăți ale funcțiilor derivabile 390
5.8.2. Consecințe ale teoremei lui Lagrange 391
5.8.3. Derivate de ordin superior 391
5.8.4. Forme nedeterminate. Înlăturarea nedeterminărilor 392
5.8.5. Reprezentarea grafică a funcțiilor 394
5.9. Primitive. Proprietăți 396
5.9.1. Proprietăți 396
Tabela 5.2. Primitive imediate ale unor funcții elementare 396
5.9.2. Metode de calcul al primitivelor 400
Tabela 5.3. Alte primitive 401
5.9.3. Calculul primitivelor unor funcții raționale 406
5.9.4. Metoda lui Ostrogradschii pentru determinarea părții raționale a primitivei dintr-o funcție rațională 408
5.9.5. Substituții și formule utilizate pentru reducerea calculării primitivelor unor funcții la calcularea primitivelor din funcții raționale 410
5.10. Funcții integrabile 412
5.10.1. Integrala Riemann 412
5.10.2. Proprietăți ale integralei definite 413
Tabela 5.4. Cîteva integrale definite 415
5.10.3. Aplicații ale integralei definite 416
5.10.4. Integrarea numerică a funcțiilor 417
5.11. Ecuații diferențiale 418
5.11.1. Cîteva tipuri de ecuații diferențiale elementare 419
5.11.2. Mulțimea soluțiilor unor ecuații diferențiale și soluția problemei lui Cauchy pentru aceste ecuații 420
Tabela 5.5. Multiplii lui π de la 1 la 100 424
Tabela 5.6. Multiplii lui $1/\pi$ de la 1 la 100 425
Tabela 5.7. Cîteva integrale pe intervale necompacte 426
Bibliografie 426

Lei 30