DICȚIONAR
DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Coordonator

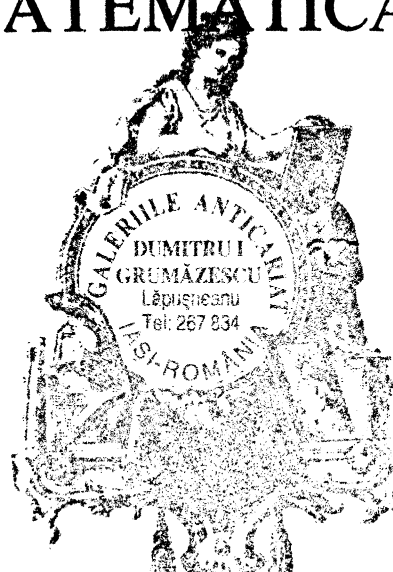
prof. uiv. dr. doc. ROMULUS CRISTESCU
Membru corespondent al Academiei R. S. România

Autori:

lect. univ. dr. ION CHIȚESCU (*I.C.*)
prof. univ. dr. doc. ROMULUS CRISTESCU (*R.C.*)
lect. univ. dr. GHEORGHE GRIGORE (*Gh.Gr.*)
cercet. șt. dr. GEORGE GUSSI (*G.G.*)
prof. univ. dr. doc. ARISTIDE HALANAY (*A.H.*)
prof. univ. dr. MARTIN JURCHESCU (*M.J.*)
prof. univ. dr. doc. SOLOMON MARCUS (*S.M.*)

Redactare și coordonare lexicografică
MARIA BORICEAN

DICŢIONAR DE ANALIZĂ MATEMATICĂ



Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică
Bucureşti, 1989

NOTAŢII

$\in$ — semnul de apartenenţă la o mulţime

$\notin$ — semnul de neapartenenţă la o mulţime

$\subset$ — semnul de incluziune a mulţimilor

$\not\subset$ — semnul de neincluziune a mulţimilor

$\bigcup$ — semnul de reuniune a mulţimilor

$\bigcap$ — semnul de intersecţie a mulţimilor

$\forall$ — cuantificatorul universal („oricare ar fi")

$\exists$ — cuantificatorul existenţial („există")

$\Rightarrow$ — semnul de implicaţie logică

$\Leftrightarrow$ — semnul de echivalenţă logică

$\emptyset$ — mulţimea vidă

$\{x \in X \mid P(x)\}$ — mulţimea elementelor din X care au proprietatea P

$\{x_i\}_{i \in I}$ — familie de elemente

$X \setminus A$, $\complement_X A$, $\complement A$ — complementara în X a mulţimii A

$A \setminus B$ — diferenţa a două mulţimi A şi B

$A \times B$ — produsul cartezian al mulţimilor A şi B

X^n — produsul cartezian a n mulţimi egale cu X

$\prod$ — semn pentru un produs (cartezian) de mulţimi sau de numere

$\coprod$ — semnul de reuniune disjunctă

Y^X — mulţimea funcţiilor definite pe X cu valori în Y

$f : A \to B$ — funcţia f definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B

$f(A)$ — imaginea directă a mulţimii A prin funcţia f; $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

$f^{-1}(A)$ — imaginea inversă a mulţimii A prin funcţia f; $f^{-1}(A) = \{x \mid f(x) \in A\}$

f^{-1} — inversa funcţiei bijective f

$\circ$ — semnul de compunere a două funcţii

supp, spt — suportul unei funcţii, măsuri, distribuţii

$\mathbb{N}$ — mulţimea numerelor naturale; $\mathbb{N} = (1, 2, \ldots)$

$\mathbb{R}$ — mulţimea numerelor reale (dreapta r)

$\mathbb{R}_+$ — mulţimea numerelor reale pozitive; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

$\overline{\mathbb{R}}$ — dreapta reală extinsă; $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$\mathbb{C}$ — mulţimea numerelor complexe (planul complex)

$\widetilde{\mathbb{C}}$ — planul complex extins $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\mathbb{Q}$ — corpul numerelor raţionale

$\mathbb{Z}$ — inelul numerelor întregi

$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ — intevale în $\mathbb{R}$

$|a|$ — modulul lui a

$\bar{z}$ — conjugatul numărului complex z

Re z, re z — partea reală a numărului complex z

Im z, im z — partea imaginară a numărului complex z

log, ln — logaritm în baza e

e^{α}, $\exp \alpha$ — funcţia exponenţială în baze e

$\underset{t \in [a, b]}{\operatorname{var}} x(t)$, $\bigvee_a^b x$ — variaţia totală a funcţiei $x : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\int$ — semnul de integrală

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f'_x — derivata parţială a funcţiei f în raport cu x

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, f' — derivata funcţiei f

$\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, $f^{(n)}$ — derivata de ordin n a funcţiei f

Ker f — nucleul aplicaţiei liniare f; $\operatorname{Ker} f = \{x \mid f(x) = 0\}$

max A — cel mai mare element al mulţimii A

$\min A$	— cel mai mic element al mulțimii A
nf A	— marginea inferioară a mulțimii A
$\sup A$	— marginea superioară a mulțimii A
$\overline{\lim}$, lim sup	— limita superioară
$\underline{\lim}$, lim inf	— limita inferioară
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	— limita șirului $\{x_n\}_{n\in \mathrm{N}}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$	— suma unei serii
S	— semn pentru suma unei familii sumabile de elemente
$\operatorname{int} A$, $\mathring{A}$	— interiorul mulțimii A
$\bar{A}$	— închiderea mulțimii A
$\Vert\ \Vert$	— norma
$\mathcal{L}(X, Y)$	— spațiul operatorilor liniari și continui definiți pe X și cu valori în Y
$\mathcal{L}(X)$	— spațiul operatorilor liniari și continui definiți pe X cu valori în X
$C^k(T)$	— mulțimea funcțiilor de clasă C^k pe T
$C^\infty(T)$	— mulțimea funcțiilor de clasă C^∞ pe T
$\det A$	— determinantul matricii A
$\binom{n}{k}$, C_n^k	— combinări de n elemente luate cîte k
$n!$	— n-factorial; $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$
δ_{ij}	— simbolul lui Kronecker; $\delta_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$ și $\delta_{ij} = 1$ dacă $i = j$
0	— elementul nul într-un spațiu liniar

ABREVIERI

a.p.t. = aproape peste tot
ex. = exemplu
i.e. (*id est*) = adică
obs. = observație
rel. = relativ la
v. = vezi

A

abatere medie pătratică (a două funcții reale f și g pe intervalul compact $[a, b]$), expresia $\sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx}$. Dacă $a = -\pi$, $b = \pi$, iar g parcurge polinoamele trigonometrice de ordin n, atunci **a.m.p.** a funcțiilor f și g își atinge valoarea minimă de îndată ce g este polinomul Fourier de ordin n asociat lui f pe $[-\pi, \pi]$. (*S.M.*)

acces perfect (al unei funcții într-un punct) Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un **a.p.** al lui f în $x \in A$ este o mulțime perfectă $\Gamma \subset A$ care se acumulează în x atît la stînga cît și la dreapta astfel încît restricția $f \mid \Gamma$ este continuă în x. O funcție de prima clasă Baire în intervalul compact I are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă admite un a.p. în fiecare punct din I (la extremități acumularea va fi unilaterală). (*S.M.*)

acoperire, familie $\{D_i\}_{i \in I}$ de părți ale mulțimii $\mathcal{X}$ avînd proprietatea $\bigcup_{i \in I} D_i = \mathcal{X}$. Se numește *subacoperire* a **a.** $\{D_i\}_{i \in I}$ o subfamilie $\{D_i\}_{i \in J}$, $J \subset I$ astfel încît $\bigcup_{i \in J} D_i = \mathcal{X}$. Dacă mulțimea I este finită **a.** se numește *finită*. Dacă $\mathcal{X}$ este un spațiu topologic și toate mulțimile D_i sînt deschise se spune că **a.** $\{D_i\}_{i \in I}$ este **a.** *deschisă*. Dacă $\{D_i\}_{i \in I}$ și $\{F_j\}_{j \in J}$ sînt două **a.** ale lui $\mathcal{X}$ și dacă pentru orice $j \in J$ există $i \in I$ astfel încît $F_j \subset D_i$, se spune că **a.** $\{F_j\}_{j \in J}$ este *subordonată* **a.** $\{D_i\}_{i \in I}$ (sau că $\{F_j\}_{j \in J}$ este *înscrisă în* $\{D_i\}_{i \in I}$). (*Gh.Gr.*)

acoperire convexă v. **spațiu liniar**

acoperire echilibrată v. **spațiu liniar**

acoperire liniară v. **spațiu liniar**

acoperire local finită v. **familie local finită de mulțimi**

acoperire plină v. **mulțime ordonată**

acoperire solidă v. **spațiu liniar ordonat**

acoperire Vitali Fie (X, d) un spațiu metric, $\mathcal{B}$ tribul borelienelor lui X și $\mu: \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură numărabil aditivă cu proprietatea că $\mu(A) < \infty$ pentru orice bilă închisă $A \subset X$. Fie $A \subset X$ o mulțime și $\mathcal{F}$ un sistem de mulțimi închise și mărginite ale lui X. Vom spune că $\mathcal{F}$ este o **a.V.** pentru A sau că A este *acoperită în sensul lui Vitali* de $\mathcal{F}$ dacă fiecare mulțime din $\mathcal{F}$ are măsură strict pozitivă finită și, în plus, există un număr strict pozitiv a și un număr $b > 2$ astfel încît pentru orice x din A și orice $\varepsilon > 0$ putem găsi $F \in \mathcal{F}$ cu proprietățile: a) $x \in F$; b) $\mu(F) < \varepsilon$; c) $\mu(B(F, b\,\delta(F)))/\mu(F) \leqslant a$, unde $\delta(F)$ este diametrul lui F iar $B(F, \delta(F))$ bila deschisă de centru F și rază $\delta(F)$ (*i.e.* $B(F, \delta(F)) = \{x \in X \mid d(x, F) < \delta(F)\}$).

Teorema de acoperire a lui Vitali. Dacă (X, d) este un spațiu metric compact și $\mathcal{F}$ o **a.V.** pentru o mulțime $A \subset X$, atunci există o parte finită sau un șir $\{F_n\}_n$ de elemente din $\mathcal{F}$, mutual disjuncte, astfel încît mulțimea $A \setminus \left(\bigcup_n F_n\right)$ este μ-neglijabilă.

Considerăm acum cazul $X = \mathbb{R}$. Fie λ măsura Lebesgue în $\mathbb{R}$ și $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime mărginită. Se spune că o familie de intervale $\mathcal{I}$ nedegenerate și mărginite este o **a.V.** pentru A dacă pentru orice x în A și orice $\varepsilon > 0$ există un interval $I \in \mathcal{I}$ cu $x \in I$ și $\lambda(I) < \varepsilon$. Teorema de **a.V.** spune că dacă $\mathcal{I}$ este o **a.V.** pentru $A \subset \mathbb{R}$, atunci există o parte finită sau un șir $\{I_n\}_n$ de elemente din $\mathcal{I}$, mutual disjuncte, astfel încît mulțimea $E \setminus \left(\bigcup_n I_n\right)$ este neglijabilă. (*I. C.*)

aderența unei mulțimi v. **punct aderent**

adevăratul maxim v. **spații** L^p, **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon), **funcție total măsurabilă**

adjunctul formal (al unui operator diferențial liniar) Fie $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ un operator diferențial liniar; aici $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ este un multiindice, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, unde $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, iar coeficienții $a_\alpha(x)$ sînt funcții de clasă cel puțin C^m într-o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$. Notînd cu $(u, v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$ produsul scalar din $L^2(\Omega)$, **a.f.** (sau *algebric*, sau *transpusul*) operatorului P, notat cu $\bar{P}$ (sau ${}^tP$), este unicul operator diferențial ce verifică $(Pu, v) = (u, \bar{P}v)$ pentru orice $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \in C^\infty$. Expresia lui $\bar{P}$ este $\bar{P}v = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha(x)\, v)$. (*G. G.*)

adjunctul unui operator v. **operator autoadjunct, operator simetric**

algebra Grassmann (a unui spațiu vectorial real finit-dimensional V), o $\mathbb{R}$-algebră asociativă cu element 1, notată $\bigwedge(V)$, cu proprietățile următoare: 1) V este un subspațiu vectorial al lui $\bigwedge(V)$ și $v \wedge v = 0$ pentru orice $v \in V$, unde prin $\wedge$ se notează înmulțirea în $\bigwedge(V)$; 2) Algebra $\bigwedge(V)$ este generată de elementul unitate împreună cu elementele lui V; 3) $\bigwedge(V)$ este un spațiu vectorial de dimensiune 2^n, unde n este dimensiunea lui V. Sin.: *algebră exterioară*. Explicităm, mai întîi, o construcție efectivă a **a.G.** $\bigwedge(V^*)$, unde $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ este dualul lui V, *i.e.* spațiul tuturor funcționalelor (formelor) liniare pe V. Amintim că dacă $W, V_1, \dots, V_p$ sînt spații vectoriale, o aplicație $f\colon V_1 \times \dots \times V_p \to W$ se numește *aplicație p-liniară* (sau *aplicație multiliniară de grad p*) dacă, pentru orice $i \in \{1, \dots, p\}$ și orice sistem de vectori $v_j \in V_j$, $j \neq i$, aplicația parțială

$$V_i \ni v \longmapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_p) \in W$$

este liniară; se utilizează termenul de *aplicație biliniară* pentru o aplicație multiliniară de grad $p = 2$. Pentru orice număr natural p se pune $V^p := V \times \dots \times V$ (de p ori). Se numește *p-tensor covariant* (sau *tensor covariant de grad p*, sau *funcțională multiliniară de grad p*, sau *formă p-liniară*) pe V orice aplicație p-liniară $f\colon V^p \to \mathbb{R}$. Mulțimea tuturor p-tensorilor covarianți pe spațiul vectorial V are o structură evidentă de spațiu vectorial; acest spațiu vectorial se notează prin $T^p(V^*)$ și se numește a *p-a putere tensorială* a lui V^*. Avem $T^1(V^*) = V^*$ și se pune, prin definiție, $T^0(V^*) := \mathbb{R}$ (*i.e.* un tensor covariant de grad zero pe V este, prin definiție, un număr real). În fine, se pune

$$T(V^*) := \bigoplus_{p \geqslant 0} T^p(V^*) \text{ (suma directă de spații vectoriale).}$$

Dacă p și q sînt numere naturale, *produsul tensorial* a doi tensori covarianți $f \in T^p(V^*)$ și $g \in T^q(V^*)$ este tensorul covariant $f \otimes g \in T^{p+q}(V^*)$ definit prin

$$(f \otimes g)\,(v_1, \dots, v_{p+q}) = f(v_1, \dots, v_p)\, g(v_{p+1}, \dots, v_{p+q})$$

pentru $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$. Cînd $p = 0$, $f = c \in \mathbb{R}$ și se pune $f \otimes g = cg$; în mod similar se tratează cazul $q = 0$. Produsul tensorial este o operație biliniară și asociativă, dar necomutativă în grade $p, q \geqslant 1$. Această operație se extinde prin liniaritate la o înmulțire pe spațiul vectorial $T(V^*)$, care face din acest spațiu vectorial o $\mathbb{R}$-algebră, numită *algebră tensorială* a lui V^*. Pentru orice număr natural p, grupul S_p al permutărilor mulțimii $\{1, \dots, p\}$ acționează la stînga pe spațiul vectorial $T^p(V^*)$ prin aplicația $S_p \times T^p(V^*) \ni (\sigma, f) \longmapsto \sigma f \in T^p(V^*)$ definită prin

$$\sigma f(v_1, \dots, v_p) := f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

pentru orice p-uplu de vectori $v_1, \dots, v_p \in V$. Un p-tensor covariant f pe spațiul vectorial V se numește *alternat* (sau *exterior*) dacă $\sigma f = \varepsilon(\sigma) f$ pentru orice $\sigma \in S_p$, unde $\varepsilon(\sigma)$ este semnul permutării σ, *i.e.* $\varepsilon(\sigma) = 1$ cînd σ este pară și $\varepsilon(\sigma) = -1$ cînd σ este impară. Mulțimea tuturor p-tensorilor covarianți alternați pe V este un subspațiu vectorial al lui $T^p(V^*)$, care se notează prin $\bigwedge^p(V^*)$ și se numește *puterea exterioară de grad p* a lui V^*. Avem $\bigwedge^1(V^*) = T^1(V^*) = V^*$ și se pune, prin definiție, $\bigwedge^0(V^*) := T^0(V^*) = \mathbb{R}$. În fine, se pune

$$\bigwedge(V^*) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \bigwedge^p(V^*) \text{ (sumă directă de spații vectoriale).}$$

Pentru orice număr natural p avem o aplicație liniară Alt: $T^p(V^*) \to T^p(V^*)$, numită *aplicația de alternare*, definită prin

$$\mathrm{Alt}\,(f) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\, \sigma f.$$

Această aplicație are proprietățile următoare: 1) Pentru orice $f \in T^p(V^*)$, rezultă $\mathrm{Alt}\,(f) \in \bigwedge^p(V^*)$; 2) Dacă $f \in \bigwedge^p(V^*)$, atunci $\mathrm{Alt}\,(f) = f$; 3) $\mathrm{Alt}\,(\sigma f) = \varepsilon(\sigma)\,\mathrm{Alt}\,(f)$; 4) $\mathrm{Alt}\,(\mathrm{Alt}\,(f) \otimes g) = \mathrm{Alt}\,(f \otimes \mathrm{Alt}(g)) = \mathrm{Alt}\,(f \otimes g)$ pentru $f \in T^p(V^*)$ și $g \in T^q(V^*)$; 5) $\mathrm{Alt}\,(g \otimes f) = (-1)^{pq}\,\mathrm{Alt}\,(f \otimes g)$ pentru $f \in T^p(V^*)$ și $g \in T^q(V^*)$. Dacă p și q sînt numere naturale, *produsul exterior* a doi tensori alternați $f \in \bigwedge^p(V^*)$ și $g \in \bigwedge^q(V^*)$ este tensorul alternat $f \wedge g \in \bigwedge^{p+q}(V^*)$ definit prin

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\mathrm{Alt}(f \otimes g) = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma)\, \sigma(f \otimes g).$$

Cînd $p = 0$, $f = c \in \mathbb{R}$ și se pune $c \wedge g = cg$; în mod similar se tratează cazul $q = 0$. Produsul exterior este o operație biliniară, asociativă și, în plus, anticomutativă, *i.e.* $f \wedge g = (-1)^{pq}\, g \wedge f$ dacă f este de grad p și g de grad q; în particular, $f \wedge f = 0$ cînd f este de grad impar. Menționăm că dacă $f_1, \dots, f_N$ sînt tensori alternați pe V de grade $p_1, \dots, p_N$ respectiv, atunci

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_N = \frac{(p_1 + \dots + p_N)!}{p_1! \dots p_N!}\,\mathrm{Alt}\,(f_1 \otimes \dots \otimes f_N).$$

Produsul exterior se extinde prin liniaritate la o înmulțire pe spațiul vectorial $\bigwedge(V^*)$ și face din acest spațiu vectorial o $\mathbb{R}$-algebră, numită **a.G.** a lui V^*.

Teorema bazei. Dacă $f_1,\dots,f_n$ este un reper al lui V^*, atunci produsele exterioare de forma $f_{i_1}\wedge\dots\wedge f_{i_p}$ cu $1\leqslant i_1<\dots<i_p\leqslant n$ formează un reper în spațiul vectorial $\bigwedge^p(V^*)$; în particular acest spațiu vectorial are dimensiunea $\binom{n}{p}:=\frac{n!}{p!(n-p)!}$ cînd $0\leqslant p\leqslant n$ și $\binom{n}{p}:=0$ cînd $p>n$, deci spațiul vectorial $\bigwedge(V^*)$ este de dimensiune 2^n.
Dacă W este un alt spațiu vectorial de dimensiune finită, se asociază fiecărei aplicații liniare $A: W\to V$ un morfism de $\mathbb{R}$-algebre $A^*: \bigwedge(V^*)\to\bigwedge(W^*)$ definit, pentru orice $f\in\bigwedge^p(V^*)$, prin $A^*(f):=f\circ A^p$, unde $A^p:=A\times\dots\times A$ (de p ori), cînd $p\geqslant 1$ și $A^*(f):=f$ cînd $p=0$; tensorul alternat $A^*(f)$ are același grad cu f și se numește *imaginea inversă* a lui f prin aplicația liniară A. Aplicațiile $V\mapsto\bigwedge(V^*)$ și $A\mapsto A^*$ definesc un functor contravariant de la spații vectoriale de dimensiune finită la $\mathbb{R}$-algebre.
Teorema determinantului. Dacă A este un endomorfism al lui V, atunci, pentru orice n-tensor alternat f pe V, unde n este dimensiunea lui V, avem $A^*(f)=\det(A)f$.
(Amintim că determinantul $\det(A)$ al unui endomorfism A al lui V se definește folosind un reper al lui V care identifică V cu $\mathbb{R}^n$; definiția nu depinde de alegerea acestui reper.) Dăm în continuare o construcție a algebrei exterioare a lui V. Fie $V^{**}:=\mathrm{Hom}(V^*,\mathbb{R})$ dualul lui V^*; aplicația $V\ni v\mapsto v^{**}\in V^{**}$, definită prin $v^{**}(f):=f(v)$ pentru $f\in V^*$, este un izomorfism de spații vectoriale. Acest izomorfism se utilizează pentru a identifica spațiile vectoriale V și V^{**}. Vom defini deci algebra exterioară a lui V punînd $\bigwedge^p(V):=\bigwedge^p(V^{**})$ pentru orice $p\geqslant 0$ și deci $\bigwedge(V):=\bigwedge(V^{**})$. Aplicația canonică $\theta: V^{*p}\to\bigwedge^p(V^*)$ definită prin $\theta(f_1,\dots,f_p)=f_1\wedge\dots\wedge f_p$ este p-liniară alternată, *i.e.*

$$\theta(f_{\sigma(1)},\dots,f_{\sigma(p)})=\varepsilon(\sigma)\,\theta(f_1,\dots,f_p)$$

pentru orice $f_1,\dots,f_p\in V^*$ și $\sigma\in S_p$, iar aplicația $\theta^*:\bigwedge^p(V^*)^*\to\bigwedge^p(\check{V})$, definită prin $\varphi\mapsto\varphi\circ\theta$, $\varphi\in\bigwedge^p(V^*)^*$, este un izomorfism de spații vectoriale. Astfel spațiul vectorial $\bigwedge^p(V)$ este canonic izomorf cu dualul spațiului vectorial $\bigwedge^p(V^*)$. Există construcții mai generale care permit definirea algebrei tensoriale $T(M)$ și a algebrei exterioare $\bigwedge(M)$ pentru orice A-modul M, unde A este un inel comutativ cu element unitate, în rest arbitrar. Menționăm aici numai că se pot construi puterea exterioară $\bigwedge^p(V)$ și **a.G.** $\bigwedge(V)$ pentru un spațiu vectorial complex finit-dimensional V după modelul prezentat mai sus în cazul real. (*M. J.*)

algebră, spațiu liniar X înzestrat și cu o „operație de înmulțire a elementelor", *i.e.* o aplicație $(x,y)\to xy$ a lui $X\times X$ în X cu următoarele proprietăți: $x(yz)=(xy)z$; $x(y+z)=xy+xz$; $(y+z)x=yx+zx$; $(\alpha x)(\beta y)=(\alpha\beta)(xy)$, unde α,β sînt scalari. O **a.** X se spune că este o **a.** *reală* sau o **a.** *complexă*, după cum X este un spațiu liniar real sau un spațiu liniar complex. Se spune că o **a.** X este *comutativă* dacă $xy=yx$ oricare ar fi elementele x,y din X. Se numește **a.** *cu unitate* o **a.** X în care există un element u cu proprietatea: $xu=ux$ oricare ar fi $x\in X$. Cînd un astfel de element u există el este unic. Elementul u se numește *element unitate.* Într-o **a.** cu unitate un element x se spune că este *inversabil* dacă există un element x' astfel ca $x'x=xx'=u$, unde u este elementul unitate al **a.** Elementul x' se numește *inversul* lui x. Cînd un element x este inversabil, inversul său x' este unic și se notează x^{-1}. O submulțime G a unei **a.** X se numește *subalgebră* dacă din $x,y\in G$ rezultă că și elementele $x+y$, αx (unde α este un scalar oarecare) și xy aparțin lui G. Dacă A este o submulțime oarecare a **a.** X, cea mai mică subalgebră care conține A se numește *subalgebra generată de* A; ea este mulțimea tuturor elementelor $z\in X$ de forma $z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$, unde n este un număr natural oarecare, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ sînt scalari oarecare, iar fiecare element x_i este de forma

$$x_i=a_{i1}a_{i2}\dots a_{im_i},\quad a_{ij}\in A,\quad j=1,2,\dots,m_i.$$

Două **a.** X,Y (ambele reale sau ambele complexe) se numesc *izomorfe* dacă există o bijecție $h: X\to Y$ cu proprietățile:

$$h(x_1+x_2)=h(x_1)+h(x_2);$$

$$h(\alpha x)=\alpha h(x)\ (\alpha\ \text{scalar});\quad h(x_1x_2)=h(x_1)\,h(x_2).$$

Orice **a.** este izomorfă cu o subalgebră a unei **a.** cu unitate. Fie X o **a.** comutativă cu unitate. O submulțime E a **a.** X se numește *ideal* dacă din $x,y\in E$ rezultă că și elementele $x+y$ și xz aparțin lui E oricare ar fi $z\in X$. Un ideal E se numește *ideal nenul* dacă $E\neq\{0\}$ și se numește *ideal propriu* dacă $E\neq X$. Un ideal propriu E se numește *ideal maximal* dacă din $E\subset E'$, unde E' este un ideal propriu, rezultă $E=E'$. Orice ideal propriu este conținut într-un ideal maximal. Dacă **a.** X nu are ideale maximale nenule, atunci X este un corp. Dacă E este un ideal în **a.** X, atunci spațiul liniar cît X/E se organizează ca **a.** definind înmulțirea a două elemente oarecare $\hat{x},\hat{y}$ (unde $\hat{x}$ este clasa de echivalență determinată de elementul x din X) prin $\hat{x}\hat{y}=\widehat{xy}$. **A.** X/E se numește **a.** *cît* (a **a.** X prin E). Un ideal propriu E este maximal dacă și numai dacă **a.** cît X/E este un corp. (*R. C.*)

algebră Banach v. algebră normată

algebră Banach involutivă, algebră Banach complexă X în care s-a dat o aplicație $x\to x^*$ a lui X în X cu următoarele proprietăți: $(x+y)^*=x^*+y^*$; $(\alpha x)^*=\bar{\alpha}x^*$ (unde $\alpha\in\mathbb{C}$ iar $\bar{\alpha}$ este conjugatul lui α); $(xy)^*=y^*x^*$; $(x^*)^*=x$; $\|x^*\|=\|x\|$. Dacă X satisface condiția $\|xx^*\|=\|x\|^2$, atunci X se numește *C^*-algebră.* Aplicația $x\to x^*$ a lui X în X se numește *involuție.* Orice C^*-algebră, comutativă, unitară, este izomorfă cu algebra Banach $C_{\mathbb{C}}(T)$ a funcțiilor complexe continue definite pe un anumit spațiu compact T (în $C_{\mathbb{C}}(T)$ se consideră operațiile obișnuite și norma obișnuită: $\|x\|=\max\{|x(t)|\,|\,t\in T\}$, $x\in C_{\mathbb{C}}(t)$) (*teorema Gelfand-Naimark*).(*R. C*)

algebră Banach semisimplă v. radicalul unei algebre

algebră Banach unitară v. algebră normată

algebră Boole v. mulțime ordonată

algebră booleană v. mulțime ordonată

algebră comutativă v. algebră

algebră cu unitate v. algebră

algebră exterioară v. algebra Grassmann

algebră grupală Fie G un grup topologic local compact și $\mathcal{K}(G)=\{f:G\to\Gamma\,|\,f$ este continuă și are suport compact$\}$, unde Γ este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Notăm cu $\mathcal{M}^1(G)$ spațiul vectorial al măsurilor Radon mărginite pe G (v. **măsură Radon**). $\mathcal{M}^1(G)$ împreună cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire cu scalari, precum și cu operația de înmulțire dată de convoluție (*i.e.* produsul măsurilor mărginite m și n este $m*n$) devine algebră Banach cu element unitate ε_e (unde ε_e este măsura Dirac concentrată în e, elementul unitate al lui G). Această algebră este comutativă dacă și numai dacă G este grup comutativ. Norma pe $\mathcal{M}^1(G)$ este dată de $m\mapsto|||m|||:=\||m|\|$, unde $\|\ \|$ este norma obișnuită a măsurilor Radon mărginite. Avem relația $|||m*n|||\leqslant|||m|||\cdot|||n|||$, pentru orice m și n din $\mathcal{M}^1(G)$. Putem spune că $\mathcal{M}^1(G)$

este dualul spațiului normat $\mathcal{K}(G)$ înzestrat cu norma convergenței uniforme $f \mapsto \|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in G\}$. Vom considera acum o subalgebră a lui $\mathcal{M}^1(G)$. Anume, fie μ măsura Haar invariantă la stînga pe G. Pentru orice două funcții f și g din $\mathcal{L}^1(\mu)$ (v. **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)) convoluția lor $f * g$ este definită μ-a.p.t. și extinzînd-o peste tot putem scrie $f * g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Mai mult, dacă $f' = f$ și $g' = g$ μ-a.p.t. rezultă că $f' * g' = f * g$ μ-a.p.t. Vom putea defini atunci în mod neambiguu pentru $\widetilde{f}$ și $\widetilde{g}$ în $L^1(\mu)$ convoluția $\widetilde{f} * \widetilde{g} := \widetilde{f * g}$. În acest mod, $L^1(\mu)$ înzestrat cu operațiile: a) (Adunare) $\widetilde{f} + \widetilde{g} := \widetilde{f + g}$; b) (Înmulțire cu scalari) $a\widetilde{f} := \widetilde{af}$; c) (Înmulțire) $\widetilde{f} \cdot \widetilde{g} := \widetilde{f} * \widetilde{g}$, pentru $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ în $L^1(\mu)$ și a în Γ, devine algebră Banach. Norma este norma lui $L^1(\mu)$, deci $\|\widetilde{f}\| = \|\widetilde{f}\|_1$. Algebra $L^1(\mu)$ se numește **a. g. a** lui G (sau *algebra grupului* G). Dacă $\widetilde{f_1}$ este în $L^1(\mu)$, putem identifica $\widetilde{f}$ cu măsura Radon $m = f\mu$ din $\mathcal{M}^1(G)$ (v. **măsură Radon definită prin densități**). Așadar, avem injecția liniară $V: L^1(\mu) \to \mathcal{M}^1(G)$, $V(\widetilde{f}) = m = f\mu$, care este și izometrică ($\|\widetilde{f}\|_1 = |||m|||$). Identificînd $L^1(\mu)$ cu $V(L^1(\mu))$ putem scrie $L^1(\mu) \subset \mathcal{M}^1(G)$ și atunci se arată că $L^1(\mu)$ este un ideal bilateral în $\mathcal{M}^1(G)$. Următoarele afirmații sînt echivalente: 1) Algebra $L^1(\mu)$ are element unitate; 2) Grupul topologic G este discret. Așadar, în general, $L^1(\mu)$ nu are element unitate. Se arată însă că pentru orice vecinătate V a elementului unitate există o funcție u_V: $G \to [0, \infty)$ care este continuă, simetrică (*i.e.* $u_V(x^{-1}) = u_V(x)$ pentru orice x în G), are suportul inclus în V și $\int u_V(x)\, d\mu(x) = 1$. Familia $\{u_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ se numește *unitate aproximativă pentru convoluție*. Denumirea se justifică în cele ce urmează. În primul rînd, am notat prin $\mathcal{V}$ familia vecinătăților lui e și $\mathcal{V}$ devine mulțime dirijată cu ordinea dată de $V \leqslant W : \Leftrightarrow V \supset W$. În al doilea rînd, vom lua un număr $1 \leqslant p < \infty$ și un spațiu Banach X și vom constata că pentru orice $f \in \mathcal{L}^p_X(\mu)$, șirul generalizat $\{f * u_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ „converge" la f în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$. Mai precis, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui e astfel încît $\|f * u_V - f\|_p < \varepsilon$. (*I. C.*)

algebră normată, algebră X înzestrată cu o normă $\|\cdot\|$ care satisface condiția $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ oricare ar fi elementele $x, y \in X$. Dacă X este o **a.n.** și dacă X este complet ca spațiu liniar normat, atunci X se numește *algebră Banach*. Studiul **a.n.** începe în anul 1929, prin considerarea de către J. von Neumann a **a.n.** de operatori liniari și continui într-un spațiu Hilbert, și este continuat de F. J. Murray și J. von Neumann între anii 1936 și 1943. **A.n.** abstracte au fost studiate în 1936 de M. Nagumo. Între anii 1939—1941, I. M. Gelfand dezvoltă o teorie a **a.n.** comutative în care un rol important îl are noțiunea de ideal maximal. **A.n.** au fost generalizate în anul 1952 de R. Arens prin introducerea „algebrelor topologice". Se numește *algebră topologică* o algebră X înzestrată cu o topologie liniară pentru care aplicațiile $x \to xy_0$ și $y \to x_0 y$ ale lui X în X sînt continue oricare ar fi elementele $x_0, y_0 \in X$. Dacă X este o **a.n.**, atunci aplicația $(x, y) \to xy$ a lui $X \times X$ în X este continuă; n particular X este o algebră topologică. Două **a.n.** X și Y (ambele reale sau ambele complexe) se numesc *izomorfe* dacă există o bijecție $h: X \to Y$ cu următoarele proprietăți: $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$; $h(\alpha x) = \alpha h(x)$ (α scalar); $h(x_1 x_2) = h(x_1)\, h(x_2)$; $\|h(x)\| = \|x\|$. Se numește **a.n.** *unitară* (resp. *algebră Banach unitară*) orice **a.n.** (resp. *algebră Banach*) în care există un element unitate u cu $\|u\| = 1$. Se numește *caracter* al unei algebre Banach complexe, comutative, unitare X, orice funcțională liniară nenulă f pe X care este „mrltiplicativă", *i.e.* $f(xy) = f(x) f(y)$ oricare ar fi elementele $x, y \in X$. Dacă T este un spațiu compact, atunci spațiul Banach $C_\Gamma(T)$ al funcțiilor reale sau complexe continue definite pe T (cu norma obișnuită) (v. **spațiu liniar normat**) înzestrat cu operația obișnuită de înmulțire a funcțiilor este o algebră Banach comutativă, unitară. Fie X o algebră Banach complexă, comutativă, unitară. Dacă X^* este dualul spațiului Banach X, atunci mulțimea $\mathcal{F}(X)$ a caracterelor algebrei X este o submulțime a lui X^*. În raport cu urma topologiei slabe* $\sigma(X^*, X)$, spațiul topologic $\mathcal{F}(X)$ este compact. Fie $\Phi(X)$ mulțimea tuturor funcțiilor complexe φ_x definite pe $\mathcal{F}(X)$ prin $\varphi_x(f) = f(x)$, unde $x \in X$. Mulțimea $\Phi(X)$ este o algebră în raport cu operațiile obișnuite cu funcțiile. Dacă $\|x^2\| = \|x\|^2$ și $\overline{\varphi}_x \in \Phi(X)$ oricare ar fi $x \in X$, unde $\overline{\varphi}_x$ este conjugata lui φ_x, atunci **a.n.** X este izomorfă cu **a.n.** a funcțiilor complexe continue definite pe spațiul compact $\mathcal{F}(X)$. (*R. C.*)

algebră normată unitară v. **algebră normată**

algebră tensorială v. **algebra Grassmann**

algebră topologică v. **algebră normată**

alternativa lui Fredholm Fie X un spațiu Hilbert complex, $U \in \mathcal{L}(X)$ un operator compact, U^* adjunctul său și $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Atunci $(U - \lambda I)(X) = \{\mathrm{Ker}\,(U^* - \overline{\lambda} I)\}^{\perp}$, unde I este operatorul identitate iar $A^{\perp}$ este complementul ortogonal al mulțimii A. Afirmația este adevărată și dacă X este numai prehilbertian, fiind atunci necesar ca adjunctul U^* să existe și să fie compact. Se poate da o afirmație de acest gen și pentru spații Banach. Informația cuprinsă în egalitatea precedentă se poate descrie astfel: i) Dacă λ nu este în spectrul lui U, atunci ecuația $(U - \lambda I)(x) = y$ are soluție unică pentru orice $y \in X$; ii) Dacă λ aparține spectrului lui U, atunci ecuația $(U - \lambda I)(x) = y$ are soluție dacă și numai dacă y este ortogonal pe orice soluție a ecuației $(U^* - \overline{\lambda} I)(x) = \mathbf{0}$. În plus, pentru orice $\lambda \neq 0$, λ în spectrul lui U, subspațiile proprii $\mathrm{Ker}(U - \lambda I)$ și $\mathrm{Ker}\,(U^* - \overline{\lambda} I)$ au aceeași dimensiune (finită). Într-o prezentare mai sumară **a.F.** spune că ecuația $(U - \lambda I)(x) = y$ sau are soluție unică pentru orice $y \in X$, sau ecuația omogenă $(U - \lambda I)(x) = \mathbf{0}$ are cel puțin o soluție nenulă. Teorema admite o frumoasă extensie pentru funcții analitice. Fie D un domeniu în $\mathbb{C}$, X un spațiu Hilbert complex, $f: D \to \mathcal{L}(X)$ o funcție analitică astfel încît $f(z)$ să fie un operator compact pentru orice $z \in D$. Atunci sau $(f(z) - I)^{-1}$ nu există (în $\mathcal{L}(X)$) pentru orice $z \in D$, sau $(f(z) - I)^{-1}$ există pentru orice $z \in D \setminus A$, unde A este o submulțime discretă a lui D (fără puncte de acumulare în D). Dacă $z \in A$ atunci ecuația $f(z)(x) = x$ are soluții nenule în X. Ex.: Fie $X = \mathbb{C}[a, b]$, spațiul funcțiilor complexe continue definite pe $[a, b]$, organizat ca spațiu prehilbertian cu produsul scalar $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$. Fie $K(s, t): [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ o funcție continuă și operatorul integral U, cu nucleul K, definit prin

$$U(x) = z, \quad z(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt.$$

Operatorul U este atunci compact și U^* este operatorul integral definit de nucleul $\overline{K}(t, s)$. O ecuație de forma

$$\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = \lambda x(s) + y(s),$$

numită *ecuație integrală de tip Fredholm de speța a doua*, se poate studia cu **a.F.** care se enunță atunci astfel: sau ecuația neomogenă

$$\lambda x(s) + y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

are soluție unică pentru orice $y \in \mathbf{C}[a, b]$, sau ecuația omogenă

$$\lambda x(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

are soluții nenule și atunci ecuația neomogenă are soluție dacă și numai dacă $\int_a^b y(s)\, \overline{z(s)}\, ds = 0$ pentru orice z soluție a ecuației omogene. Afirmația are loc dacă $X = L^2[a, b]$, $K \in L^2[a, b] \times [a, b]$. Operatorul U se numește *operator Hilbert-Schmidt* iar K *nucleu Hilbert-Schmidt* (v. și **ecuații operatoriale liniare în spații Banach**). (*Gh. Gr.*)

analiză funcțională v. **spațiu liniar topologic**

analiză microlocală, termen generic prin care se înțelege ridicarea analizei de pe spațiul de bază la fibratul cotangent în vederea studiului singularităților distribuțiilor sau al hiperfuncțiilor. Toate considerentele în care apar fronturi de undă sau spectre singulare țin de **a.m.** (*G. G.*)

analiză vectorială Vom lucra în $\mathbf{R}^2$ sau $\mathbf{R}^3$. Un element u din $\mathbf{R}^2$ sau $\mathbf{R}^3$ se numește *vector* și o funcție cu valori în $\mathbf{R}^2$ sau $\mathbf{R}^3$ se numește *funcție vectorială*. Un element din $\mathbf{R}$ se numește *scalar* și o funcție cu valori în $\mathbf{R}$ se numește *funcție scalară*. Un vector u din $\mathbf{R}^2$ se notează prin $u = (u_x, u_y)$ și un vector v din $\mathbf{R}^3$ prin $v = (v_x, v_y, v_z)$, punîndu-se în evidență componentele scalare. Dacă $n = 2$, vectorul $u = (u_x, u_y)$ se scrie sub forma $u = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$, unde $\vec{i} = (1, 0)$ și $\vec{j} = (0, 1)$ sînt versorii canonici din $\mathbf{R}^2$. Dacă $n = 3$, vectorul $v = (v_x, v_y, v_z)$ se scrie sub forma $v = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, unde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ și $\vec{k} = (0, 0, 1)$ sînt versorii canonici din $\mathbf{R}^3$. *Produsul scalar* al vectorilor $m = m_x\vec{i} + m_y\vec{j}$ și $n = n_x\vec{i} + n_y\vec{j}$ din $\mathbf{R}^2$ (resp. $m = m_x\vec{i} + m_y\vec{j} + m_z\vec{k}$ și $n = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}$ din $\mathbf{R}^3$) este

$$m \cdot n = m_x n_x + m_y n_y \quad (\text{resp. } m \cdot n = m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z).$$

Produsul vectorial al vectorilor m și n de mai sus din $\mathbf{R}^3$ este

$$m \times n = (m_y n_z - m_z n_y)\vec{i} + (m_z n_x - m_x n_z)\vec{j} + (m_x n_y - m_y n_x)\vec{k}.$$

Formula se reține ușor dezvoltînd după elementele primei linii determinantul simbolic

$$m \times n = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix}.$$

Vom considera o mulțime oarecare D și o funcție vectorială F definită pe D. Dacă $F: D \to \mathbf{R}^2$, atunci vom scrie $F = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$, unde F_x și F_y sînt funcții scalare definite pe D, anume $F(h) = F_x(h)\vec{i} + F_y(h)\vec{j}$ pentru orice h în D. Similar, dacă $F: D \to \mathbf{R}^3$ scriem $F = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$. Funcțiile scalare F_x,

F_y (și F_z) se numesc *componentele scalare* ale funcției vectoriale F. În cazul cînd $D \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 1$ număr natural), vom spune că funcția vectorială F este derivabilă, integrabilă, de clasă C^m, dacă componentele sale scalare sînt respectiv derivabile, integrabile, de clasă C^m. Dacă I este un interval al dreptei reale și $F: I \to \mathbf{R}^2$ (resp. $F: I \to \mathbf{R}^3$) este o funcție derivabilă în punctul t_0 din I, putem defini derivata lui F în t_0 prin

$$F'(t_0) = F_x'(t_0)\vec{i} + F_y'(t_0)\vec{j} \quad (\text{resp. } F'(t_0) = F_x'(t_0)\vec{i} + F_y'(t_0)\vec{j} + F_z'(t_0)\vec{k}).$$

Similar, dacă F este integrabilă pe $[a, b] \subset I$, definim

$$\int_a^b F(t)\, dt = \left(\int_a^b F_x(t)\, dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b F_y(t)\, dt\right)\vec{j} \text{ etc.}$$

Dacă F și G sînt funcții vectoriale definite pe I și f este funcție scalară definită pe I, toate derivabile în t_0 din I, avem formulele:

a) $(fF)'(t_0) = f'(t_0)F(t_0) + f(t_0)F'(t_0)$;

b) $(F \cdot G)'(t_0) = F'(t_0) \cdot G(t_0) + F(t_0) \cdot G'(t_0)$;

c) $(F \times G)'(t_0) = F'(t_0) \times G(t_0) + F(t_0) \times G'(t_0)$.

În aceste formule, de exemplu, fF este o funcție vectorială, definită pe I și care ia în orice punct t valoarea următoare: $(fF)(t) := f(t)F(t)$ etc. Fie acum $D \subset \mathbf{R}^2$ sau $D \subset \mathbf{R}^3$ o mulțime nevidă. O funcție scalară $U: D \to \mathbf{R}$ se va numi *cîmp scalar*. O funcție vectorială $F: D \to \mathbf{R}^2$ (dacă $D \subset \mathbf{R}^2$) sau $F: D \to \mathbf{R}^3$ (dacă $D \subset \mathbf{R}^3$) se numește *cîmp vectorial*. Vom presupune în cele ce urmează că D este o mulțime deschisă și că lucrăm cu cîmpuri de clasă C^1. Un cîmp scalar U, ca mai sus, pune în evidență cîmpul vectorial grad $(U): D \to \mathbf{R}^2$ (dacă $D \subset \mathbf{R}^2$), numit *gradientul* lui U definit prin grad $(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}$ (resp. grad $(U): D \to \mathbf{R}^3$ definit prin grad $(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ dacă $D \subset \mathbf{R}^3$). Un cîmp vectorial $F: D \to \mathbf{R}^2$ (resp. $F: D \to \mathbf{R}^3$) pune în evidență cîmpul scalar div $(F): D \to \mathbf{R}$, numit *divergența* lui F. Anume, div $(F) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$ (dacă $D \subset \mathbf{R}^2$) sau div $(F) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ (dacă $D \subset \mathbf{R}^3$). În fine, un cîmp vectorial $F: D \to \mathbf{R}^3$ pune în evidență un alt cîmp vectorial rot $(F): D \to \mathbf{R}^3$, numit *rotorul* lui F. Anume,

$$\text{rot}\,(F) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Formula se reține ușor dacă dezvoltăm după prima linie determinantul simbolic

$$\text{rot}\,(F) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}.$$

Unii autori notează curl (F) în loc de rot (F). Subliniem că gradientul, divergența și rotorul unui cîmp au semnificații intrinseci, nelegate de sistemul de axe ales, ceea ce face ca aceste cîmpuri să fie larg utilizate în fizică. Un cîmp vectorial F se numește *cîmp potențial* dacă există un cîmp scalar U astfel încît $F = \text{grad}\,(U)$. Dacă mulțimea D este simplu conexă, condiția necesară și suficientă ca F să fie cîmp potențial este $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ identic pe D (în cazul cînd $D \subset \mathbb{R}^2$), respectiv rot $(F) \equiv 0$ (în cazul cînd $D \subset \mathbb{R}^3$). Un cîmp vectorial F se numește *cîmp solenoidal* dacă există un alt cîmp vectorial G astfel încît $F = \text{rot}\,(G)$. Dacă mulțimea D este simplu conexă, condiția necesară și suficientă ca F să fie cîmp solenoidal este ca div $(F) \equiv 0$. Se arată că dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ este simplu conexă, orice cîmp vectorial $F: D \to \mathbb{R}^3$ se poate scrie sub forma $F = F' + F''$, unde F' este un cîmp potențial și F'' un cîmp solenoidal. Să considerăm acum un drum rectificabil simplu și închis $d: [a, b] \to D$, precum și un cîmp vectorial $F: D \to \mathbb{R}^3$. Integrala curbilinie de al doilea tip $\int_d F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$ se numește *circulația vectorului (cîmpului) F de-a lungul drumului d*. Dacă S este o suprafață inclusă în D, integrala de suprafață de al doilea tip

$$\int_S F_x\,dy\,dz + F_y\,dz\,dx + F_z\,dx\,dy$$

se numește *fluxul vectorului (cîmpului) F prin suprafața S*. (*I. C.*)

aplicație v. **funcție**

aplicație conexă, aplicație $f: X \to Y$, unde X și Y sînt spații topologice, astfel încît dacă $A \subset X$ este conexă, atunci $f(A) \subset Y$ este de asemenea conexă. În cazul $X = Y = \mathbb{R}$ a.c. sînt echivalente cu funcțiile care au proprietatea lui Darboux. (*S. M.*)

aplicație de clasă C^r v. **model de varietate diferențiabilă**

aplicație diferențiabilă v. **varietate diferențiabilă**

aplicație (liniară) tangentă v. **spațiu tangent**

aplicație μ-proprie v. **dezintegrarea măsurilor, imagini de măsuri Radon**

aplicație olomorfă v. **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)

aplicație proprie v. **dezintegrarea măsurilor, imagini de măsuri Radon**

aproape peste tot (a.p.t.) v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan, prelungirea măsurilor Radon**

aproximații succesive, procedeu pentru demonstrarea existenței soluției problemei lui Cauchy, constînd din construcția unui șir de funcții care converge uniform către soluție; procedeul se aplică în general la ecuații funcționale de forma $x = f(x)$, a.s. construindu-se după regula $x_{k+1} = f(x_k)$; pentru ecuații diferențiale a.s. se construiesc după regula

$$x_{k+1}(t) = \hat{x} + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,ds, \quad x_0(t) = \hat{x}. \quad (A.\ H.)$$

argumentul unui număr complex v. **logaritmul complex**

aria unei suprafețe v. **integrala de suprafață**

aritmetica numerelor reale constructive Fie $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și $y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ numere reale constructive, K_x și K_y marginile canonice ale acestor două numere și $k = \max\,(K_x, K_y)$. Fie α rațional. Să punem $x + y = \{x_{2n} + y_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $xy = \{x_{2kn} y_{2kn}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\max\,(x, y) = \max\,\{(x_n, y_n)\}$ $-x = \{-x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha^* = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots)$. Se poate arăta că șirurile $x + y$, xy, $\max\,(x, y)$, $-x$ și α^* definesc numere reale constructive. (*S. M.*)

aritmetica numerelor reale constructive pozitive Fie $\mathbf{R}_0^+$ mulțimea numerelor reale constructive strict pozitive și $\mathbf{R}^+$ mulțimea numerelor reale constructive pozitive. Fie $\mathbf{R}^*$ oricare din mulțimile $\mathbf{R}_0^+$ și $\mathbf{R}^+$. Dacă $x, y \in \mathbf{R}^*$, atunci $x + y \in \mathbf{R}^*$, $xy \in \mathbf{R}^*$. Din $x \in \mathbf{R}^+$ și $y \in \mathbf{R}_0^+$ rezultă $x + y \in \mathbf{R}_0^+$. Din $x \in \mathbf{R}^+$ rezultă $|x| \in \mathbf{R}^+$. Dacă $x \in \mathbf{R}^*$, $y \in \mathbf{R}^*$, atunci $\max\,\{x, y\} \in \mathbf{R}^*$ și $\min\,\{x, y\} \in \mathbf{R}^*$. Obs. Un element din $\mathbf{R}_0^+$ constă într-un număr real $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și un întreg pozitiv n pentru care $x_n > 1/n$. (*S. M.*)

asociația unei familii de elemente v. **descompunere ortogonală 2**

atlas v. **varietate diferențiabilă, varietate analitică complexă**

atlas structural v. **varietate diferențiabilă, varietate analitică complexă**

atom al unei măsuri Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T și $m: \mathcal{C} \to X$ o măsură aditivă. Aici X poate fi $\overline{\mathbb{R}}$ sau un spațiu Banach. O mulțime $A \in \mathcal{C}$ se numește *atom* al lui m dacă: a) $m(A) \neq 0$ (în cazul $X = \overline{\mathbb{R}}$ trebuie să avem și $m(A)$ finit); b) Pentru orice $B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$, avem $m(B) = 0$ sau $m(B) = m(A)$. Vom spune că m este *măsură non-atomică* dacă în $\mathcal{C}$ nu există nici un atom al lui m. De exemplu, măsura Lebesgue considerată pe un interval oarecare din $\mathbf{R}^n$ este o măsură non-atomică. Vom spune că o măsură m este *pur atomică* dacă există o familie cel mult numărabilă de atomi mutual disjuncți $\{A_i\}_{i \in I}$ ai lui T astfel încît $T = \bigcup_{i \in I} A_i$. De exemplu, măsura cardinal card (măsura discretă) este o măsură pur atomică. Anume, $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$ și card $(\{n\}) = 1$, deci fiecare $\{n\}$ este atom al măsurii card. Dacă $\mathcal{T}$ este un trib de părți ale mulțimii nevide T și X este un spațiu Banach, se arată că următoarele afirmații sînt echivalente pentru o măsură numărabil aditivă $m: \mathcal{T} \to X$: a) Măsura m este non-atomică; b) Măsura m este *slab non-atomică, i.e.* pentru orice x' din dualul X' avem $x' \circ m$ non-atomică. În particular dacă $m: \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$ este o măsură numărabil aditivă, fie $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, unde $m_i: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ sînt componentele lui m definite prin $m_i = p_i \circ m$ (aici $p_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este proiecția canonică de ordin i). Rezultă că m este non-atomică dacă și numai dacă toate componentele $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sînt non-atomice. Fie $\mathcal{C}$ un clan de părți ale mulțimii nevide T și fie $m: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ o măsură aditivă. Se spune că o mulțime $A \in \mathcal{C}$ are *proprietatea lui Darboux* (față de m) sau că m este *mulțime cu proprietatea lui Darboux* (față de m) dacă pentru orice $0 \leqslant u \leqslant m(A)$ există $B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$, astfel încît $m(B) = u$. Se spune că *m are proprietatea lui Darboux* sau că *m este măsură cu proprietatea lui Darboux* dacă orice $A \in \mathcal{C}$ are proprietatea lui Darboux. Fie Σ un semitrib de părți ale mulțimii nevide T și $m: \Sigma \to \mathbb{R}_+$ o măsură numărabil aditivă finită. Dacă $E \in \Sigma$ este o mulțime cu proprietatea că nu există $B \in \Sigma$, $B \subset E$, B atom al lui m, rezultă că E are proprietatea lui Darboux. Condiția aceasta este numai suficientă, după cum se vede considerînd exemplul măsurii pur atomice $m: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}_+$, definită prin $m(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$, față de care $\mathbb{N}$ are proprietatea lui Darboux. Revenind la cazul general, observăm că pentru orice mulțime $E \in \Sigma$ cu $m(E) > 0$, mulțimea atomilor mutual disjuncți care sînt incluși în E este cel mult numărabilă. Să notăm această mulțime cu $\mathcal{A}$ și să presupunem că $\mathcal{A}$ este nevidă. Dacă $\mathcal{A}$ este finită, ea va conține S_1 atomi de măsură m egală cu $a_1 m(E)$, S_2 atomi de măsură egală cu $a_2 m(E), \ldots, S_n$ atomi de măsură egală cu $a_n m(E)$ cu

$a_1 > a_2 \dots > a_n$ și $\sum_{i=1}^{n} S_i a_i \leqslant 1$. Dacă $\mathscr{A}$ este infinită, ea va conține S_1 atomi de măsură $a_1 m(E)$, S_2 atomi de măsură $a_2 m(E), \dots, S_n$ atomi de măsură $a_n m(E), \dots$ cu $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ și $\sum_{i=1}^{\infty} S_i a_i \leqslant 1$.

Teorema lui S. Marcus Dacă $\mathscr{A}$ este nevidă, mulțimea E are proprietatea lui Darboux față de m dacă și numai dacă: 1) În cazul cînd $\mathscr{A}$ este finită, avem $a_p \leqslant 1 - \sum_{i=1}^{p} S_i a_i$ pentru $p = 1, 2, \dots, n-1$; 2) În cazul cînd $\mathscr{A}$ este infinită, avem $a_p \leqslant 1 - \sum_{i=1}^{p} S_i a_i$ pentru toate numerele naturale p. (*I. C.*)

axioma a doua de numărabilitate v. **bază pentru topologia τ**

axioma alegerii O tratare neaxiomatizată a teoriei mulțimilor duce la paradoxuri. Totuși, teoria naivă a mulțimilor este de cele mai multe ori suficientă pentru scopurile celorlalte ramuri ale matematicii. Ne vom plasa deci în cadrul teoriei naive a mulțimilor. **A.a.** afirmă că dacă A este o mulțime nevidă și $\{X_a\}_{a \in A}$ o familie de mulțimi nevide, există pentru fiecare a din A cîte un element x_a din X_a. **A.a.** este echivalentă cu propozițiile următoare: 1) Dacă o mulțime ordonată X are proprietatea că orice parte a sa total ordonată are majorant, atunci există un element maximal în X (*lema lui Zorn*). 2) Orice mulțime nevidă poate fi bine ordonată (*principiul bunei ordonări*). 3) Orice parte total ordonată a unei mulțimi ordonate este inclusă într-o mulțime total ordonată maximală (*lema lui Kuratowski*). 4) Dacă A este o mulțime nevidă și $\{X_a\}_{a \in A}$ este o familie de mulțimi nevide, două cîte două disjuncte, există o mulțime B cu proprietatea că mulțimile $B \cap X_a$ au cîte un singur element pentru orice a din A (*postulatul lui Zermelo*). (*I. C.*)

axioma infinitului v. **corpul numerelor reale**

axioma lui Tihonov v. **axiome de separare**

axioma T_i de separare v. **axiome de separare**

axiome de separare, proprietăți de separare cu mulțimi deschise sau cu funcții continue în unele clase de submulțimi ale unui spațiu topologic. Fie $\mathscr{X}$ un spațiu topologic:

Axioma T_0. Pentru orice două puncte distincte cel puțin unul dintre ele admite o vecinătate care nu conține celălalt punct.

Axioma T_1. Oricare ar fi două puncte distincte, fiecare admite o vecinătate care nu conține celălalt punct. (Această axiomă este echivalentă cu afirmația că orice punct este o mulțime închisă. Dacă este verificată axioma T_1 se spune că X este un *spațiu T_1*.)

Axioma T_2. Pentru orice două puncte distincte există vecinătăți disjuncte. (Un spațiu topologic în care este satisfăcută axioma T_2 se numește *spațiu topologic separat* sau *spațiu Hausdorff* (v. și **spațiu topologic separat**).)

Pentru **a.s.** care urmează denumirile nu sînt încă standard. Trebuie totuși remarcat că diversele accepțiuni ale noțiunilor de spațiu normal, regulat sau complet regulat diferă între ele doar prin prezența sau absența axiomei T_1.

Axioma T_3. Pentru orice punct x și orice mulțime închisă F astfel încît $x \notin F$ există mulțimile deschise și disjuncte G, H astfel încît $x \in G$ și $F \subset H$. (Un spațiu topologic separat în care este verificată axioma T_3 se numește *spațiu regulat* (v. și **spațiu topologic regulat**).)

Axioma lui Tihonov ($T_{3^1/_2}$). Pentru orice punct x și orice mulțime închisă F astfel încît $x \notin F$ există o funcție continuă $f\colon \mathscr{X} \to [0, 1]$ astfel încît $f(x) = 0$ și $f(F) = 1$. (Un spațiu topologic separat în care este satisfăcută axioma lui Tihonov se numește *spațiu (topologic) complet regulat* (v. și **structură uniformă, spațiu topologic complet regulat**).)

Axioma T_4. Pentru orice mulțimi închise și disjuncte A, B există mulțimile deschise și disjuncte G, H astfel încît $A \subset G$ și $B \subset H$. (Un spațiu topologic separat în care este verificată axioma T_4 se numește *spațiu normal* (v. și **spațiu normal**).)

Din axioma T_2 rezultă T_1, iar din T_1 rezultă T_0. Din axioma T_4 rezultă axioma lui Tihonov, iar din aceasta axioma T_3. Orice spațiu normal este complet regulat și orice spațiu complet regulat este regulat. (*Gh. Gr.*)

axiomele lui Peano v. **mulțimea numerelor naturale**

B

banda generată de o mulțime v. **spațiu liniar ordonat**
bandă (într-un spațiu liniar reticulat) v. **spațiu liniar ordonat**
bază a unui fibrat vectorial v. **fibrat vectorial**
bază algebrică v. **spațiu liniar**

bază de elemente pozitive (într-un spațiu liniar dirijat X), submulțime convexă B de elemente pozitive astfel ca orice element $x > \mathbf{0}$ din X să se reprezinte în mod unic sub forma $x = \alpha b$ cu $b \in B$ și $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Existența unei **b.e.p.** este echivalentă cu existența unei funcționale liniare f pe X care să fie „strict pozitivă", *i.e.* din $\mathbf{0} < x \in X$ să rezulte $f(x) > 0$. Dacă f este o funcțională liniară strict pozitivă pe X, atunci mulțimea

$$B = \{x \in X \mid x > \mathbf{0};\ \ f(x) = 1\}$$

este o **b.e.p.** în spațiul X. (*R. C.*)

bază de filtru v. **filtru**
bază de filtru convergent v. **filtru convergent**
bază de mulțimi deschise v. **bază pentru topologia** τ
bază de mulțimi mărginite v. **mulțime mărginită** (topologic)

bază de vecinătăți Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic, $x \in \mathcal{X}$ și $\mathcal{V}_x$ mulțimea vecinătăților punctului x. O familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_x$ se numește **b.v.** (sau *sistem fundamental de vecinătăți*) ale lui x dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$ există $B \in \mathcal{B}$ astfel încît $B \subset V$. Familia mulțimilor deschise care conțin punctul x este o **b.v.** pentru x. Dacă $\mathcal{X}$ este un spațiu metric și $x \in \mathcal{X}$, familia sferelor deschise cu centrul în x este o **b.v.** pentru punctul x. Fie τ_1 și τ_2 două topologii pe mulțimea $\mathcal{X}$, fie $x \in \mathcal{X}$ și $\mathcal{B}_x^1$, $\mathcal{B}_x^2$ **b.v.** ale lui x în cele două topologii. Se spune că $\mathcal{B}_x^1$ și $\mathcal{B}_x^2$ sînt *echivalente* dacă pentru orice $V \in \mathcal{B}_x^1$ există $W \in \mathcal{B}_x^2$ astfel ca $W \subset V$ și pentru orice $U \in \mathcal{B}_x^2$ există $S \in \mathcal{B}_x^1$ astfel ca $\subset$. Dacă pentru fiecare $x \in \mathcal{X}$ există în topologiile τ_1 și τ_2 **b.v.** echivalente, atunci cele două topologii coincid (v. **compararea topologiilor**). Fie $\mathcal{Y}$ o mulțime și $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ familia părților lui $\mathcal{Y}$. Fie $T: \mathcal{Y} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{Y}))$ astfel încît pentru orice $x \in \mathcal{Y}$, $T(x)$ are proprietățile: i) $x \in V$ pentru orice $V \in T(x)$; ii) Pentru orice $U, V \in T(x)$ există $W \in T(x)$ astfel încît $W \subset U \cap V$; iii) Pentru orice $V \in T(x)$ există $U \in T(x)$ astfel încît pentru orice $y \in U$ există $W \in T(y)$ astfel ca $W \subset V$. Atunci există, și este unică, o topologie τ pe $\mathcal{Y}$ astfel încît pentru orice $x \in \mathcal{Y}$, $T(x)$ este o **b.v.** ale lui x în această topologie. Se spune că această topologie a fost *generată cu ajutorul vecinătăților*. (*Gh. Gr.*)

bază ortonormală v. **spațiu Hilbert**
bază pentru o topologie v. **bază pentru topologia** τ

bază pentru topologia τ, familie $\mathcal{B}$ de mulțimi deschise în spațiul topologic $(\mathcal{X}, \tau)$ astfel încît orice mulțime deschisă este reuniunea unei familii de elemente din $\mathcal{B}$. Se spune uneori că $\mathcal{B}$ este o bază de mulțimi deschise pentru topologia τ. Familia $\mathcal{B}$, inclusă în τ, este **b.t.** τ dacă și numai dacă pentru orice $x \in \mathcal{X}$ și pentru orice vecinătate V a lui x există $B \in \mathcal{B}$ astfel încît $x \in B \subset V$. Fie $\mathcal{X}$ o mulțime și $\mathcal{B}$ o familie de părți ale lui $\mathcal{X}$. Familia $\mathcal{B}$ se numește *bază pentru o topologie* pe $\mathcal{X}$ dacă există o topologie τ pe $\mathcal{X}$ astfel încît $\mathcal{B}$

să fie o bază pentru τ. Familia $\mathcal{B}$ este o bază pentru o topologie dacă și numai dacă următoarele condiții sînt îndeplinite: i) $\bigcup \{B \mid B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{X}$; ii) Pentru orice $U, V \in \mathcal{B}$, mulțimea $U \cap V$ este reuniunea unei familii de elemente din $\mathcal{B}$. O familie $\mathcal{S}$ de mulțimi τ-deschise avînd proprietatea că familia intersecțiilor finite de mulțimi din $\mathcal{S}$ este o **b.t.** τ se numește *subbază pentru topologia* τ. Se spune că un spațiu topologic este cu *bază numărabilă* dacă există o bază numărabilă pentru topologia spațiului. Se mai spune, de asemenea, că într-un asemenea spațiu este îndeplinită *axioma a doua de numărabilitate*. Orice spațiu topologic cu bază numărabilă este separabil. Din orice acoperire deschisă a unui spațiu topologic cu bază numărabilă se poate extrage o subacoperire numărabilă (*teorema lui Lindelöf*). Orice spațiu metric separabil este cu bază numărabilă. Familia intervalelor deschise este o bază pentru topologia lui $\mathbb{R}$. (*Gh. Gr.*)

bază Schauder v. **spațiu liniar normat**
bază vectorială v. **spațiu liniar**
bijecție v. **funcție**
bilă v. **distanță, spațiu liniar normat**
bilă unitară deschisă v. **spațiu liniar normat**
bilă unitară închisă v. **spațiu liniar normat**
bord v. **domeniu**

C

C^*-algebră v. **algebră Banach involutivă**

capacitate Fie (E, τ) un spațiu topologic separat. O **c.** pe E este o aplicație $c: \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ (unde $\mathcal{P}(E)$ este mulțimea părților lui E) avînd proprietățile: 1) Aplicația c este crescătoare ($X \subset Y \Rightarrow c(X) \leqslant c(Y)$); 2) Dacă $\{K_n\}_n$ este un șir crescător de părți ale lui E avem $\lim c(K_n) = c\left(\bigcup_n K_n\right)$; 3) Dacă $\{K_n\}_n$ este un șir monoton descrescător de mulțimi compacte avem $\lim_n c(K_n) = c\left(\bigcap_n K_n\right)$. De exemplu, dacă $\mathcal{B}$ sînt borelienele lui E și $\mu: \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o măsură numărabil aditivă și finită putem defini **c.** $c: \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ prin $c(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \supset A,\ B \in \mathcal{B}\}$. Dacă F este un alt spațiu Hausdorff și $T: E \to F$ este continuă, atunci orice **c.** c pe F generează **c.** d pe E prin $d(A) = c(T(A))$. O mulțime $A \subset E$ se numește *c-capacitabilă* dacă $c(A) = \sup\{c(K) \mid K \subset A,\ K \text{ este compact}\}$. O mulțime $B \subset E$ care este c-capacitabilă pentru orice **c.** c se va numi *mulțime capacitabilă*. Pentru a da exemple de mulțimi capacitabile, introducem două noțiuni. O mulțime $B \subset E$ se numește *K-boreliană* dacă aparține clasei monotone generate de compactele lui E. O mulțime $B \subset E$ se numește *analitică* dacă există o funcție continuă $f: I \to E$ cu $f(I) = B$, unde I este mulțimea numerelor iraționale din intervalul $[0, 1]$. Se arată că o intersecție sau o reuniune numărabilă de mulțimi analitice este analitică și că orice submulțime boreliană a lui I (cu topologia indusă de $[0, 1]$) este analitică. Într-un spațiu metric secvențial compact mulțimile boreliene sînt analitice (v. și **mulțimi susliniene; mulțimi proiective; mulțimi analitice**). Pentru orice **c.** c pe E avem următoarele rezultate: 1) Orice mulțime K-boreliană este c-capacitabilă; 2) Orice mulțime analitică $B \subset E$ cu proprietatea că există un șir $\{K_n\}_n$ de mulțimi compacte ale lui E astfel încît $B \subset \bigcup_n K_n$ este c-capacitabilă. În particular, într-un spațiu metric σ-compact mulțimile boreliene sînt c-capacitabile. Fie acum o mulțime nevidă E și o clasă de părți $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ cu proprietatea că $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$ și pentru orice șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi din $\mathcal{K}$ avem $\bigcap_n A_n \in \mathcal{K}$. O funcție $m: \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ se numește *$\mathcal{K}$-capacitate* dacă are proprietățile: 1) Este crescătoare; 2) Pentru orice șir crescător $\{K_n\}_n$ de părți ale lui E avem $\lim_n c(K_n) = c\left(\bigcup_n K_n\right)$; 3) Pentru orice șir descrescător $\{K_n\}$ de mulțimi din $\mathcal{K}$ avem $\lim_n c(K_n) = c\left(\bigcap_n K_n\right)$. O mulțime $A \subset E$ se numește *c-$\mathcal{K}$-capacitabilă* dacă $c(A) = \sup\{c(K) \mid K \in \mathcal{K},\ K \subset A\}$. Se arată că mulțimile $\mathcal{K}$-susliniene sînt c-$\mathcal{K}$-capacitabile pentru orice **c.** c. (*I.C.*)

capacitate (în $\mathbb{R}^n$), noțiune (extinsă apoi la cazuri mult mai generale, v. **capacitate**) ce își are originea în teoria potențialului. Fie $B = B(x_0, R)$ o bilă în $\mathbb{R}^n$, iar $G(x, y)$ nucleul Green al bilei B; dacă μ este o măsură pe B, se numeşte potenţial Green al măsurii μ, funcţia superarmonică $(G\mu)(x) = \int_B G(x, y)\,d\mu(Y)$. Fie K o mulţime compactă conţinută în B; se notează cu $\mathcal{F} = \mathcal{F}_K$ mulţimea funcţiilor pozitive, superarmonice minorate de 1 pe K; fie $W_K = \inf\limits_{v \in \mathcal{F}_K} V$ şi V_K regularizata lui W_K care este deci o funcţie superarmonică; V_K apare ca cel mai mare potenţial Green al unei măsuri pozitive, cu suportul conţinut în K, majorat de 1 pe B. Masa totală a măsurii μ corespunzînd acestui potenţial se numeşte **c.** $c(K)$ a mulţimii K. Pentru o mulţime deschisă $\omega, \omega \subset B$, se defineşte **c.** sa $c(\omega) = \sup c(K)$, superiorul luîndu-se după toate mulţimile compacte K conţinute în B. În sfîrşit, pentru orice mulţime E inclusă în B, **c.** sa exterioară $C^*(E)$ se defineşte ca $\inf\limits_{\omega \supset E} C(\omega)$, cu ω deschisă, $\omega \subset B$. Bineînţeles **c.**, respectiv **c.** exterioară, are proprietăţile unei **c.** generale (v. **capacitate**). Mulţimile de **c.** nulă joacă un rol important în analiză. De pildă, are loc rezultatul următor (*teorema lui H. Cartan*). Pentru ca $E \subset B$ să fie polară este necesar şi suficient ca $c^*(E) = 0$ (reamintim că o mulţime E se numeşte polară dacă există o funcţie subarmonică neconstantă, astfel ca $E \subset \{x \mid \varphi(x) = -\infty\}$). Orice mulţime polară este de măsură Lebesgue nulă, dar reciproca este falsă; cu alte cuvinte, faptul pentru o mulţime de a avea **c.** nulă este mai fin decît acela de a fi de măsură Lebesgue nulă. Există de asemenea legături interesante între măsurile Hausdorff şi **c.** *(G. G.)*

capacitate (în $\mathbb{C}^n$), noţiune intim legată de structura complexă. Fie în $\mathbb{C}$ operatorii $d = \partial + \bar{\partial}$ şi $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$; atunci $dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$. Fie acum u o funcţie de clasă C^2 în $\mathbb{C}^n$. Se defineşte operatorul $(dd^c u)^k = \underbrace{dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u}_{k\text{-ori}}$, deci $(dd^c u)^k$ va fi o formă de tip (k, k). Pentru o funcţie plurisubarmonică u într-un domeniu $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, se poate defini

$$\int (dd^c u)^k \wedge \varphi = \int u (dd^c u)^{k-1}\, dd^c \varphi$$

(φ formă de tip $(n-k, n-k)$ cu suport în Ω) şi prin recurenţă se poate defini $(dd^c u)^k$ ca un curent de bigrad (k, k); acest curent rezultă pozitiv. Fie Ω un domeniu strict pseudoconvex în $\mathbb{C}^n$ (consideraţii asemănătoare se pot face înlocuind pe $\mathbb{C}^n$ cu o varietate Stein oarecare), $E \subset \Omega$; notăm cu $\mathcal{U}(E, \Omega) = \{u$ plurisubarmonică în Ω, $u \mid E \leqslant -1$, $u \mid \Omega \leqslant 0\}$ şi cu $\omega(w, E, \Omega) = \sup \{u(w), u \in \mathcal{U}(E, \Omega)\}$. Funcţia $\omega^*(z, E, \Omega) = \overline{\lim\limits_{w \to z}}\, \omega(w, E, \Omega)$ se numeşte $\mathcal{P}$-măsura mulţimii E relativ la Ω. Dacă K este o mulţime compactă inclusă în Ω se defineşte **c.** $c(K, \Omega)$ în raport cu Ω prin formula

$$c(K, \Omega) = \int_K (dd^c \omega^*(z, K, \Omega))^n.$$

În cazul unei mulţimi deschise $U \subset G$, $c(U, \Omega) = \sup\limits_K c(K, \Omega)$, K mulţime compactă inclusă în U, dar verificînd condiţia suplimentară (de pluriregularitate) $\omega^*(z, K, \Omega) \mid K = -1$. În cazul $n = 1$ se regăseşte noţiunea uzuală de **c.** în $\mathbb{R}^2$ (izomorf cu $\mathbb{C}$). Există legături între **c.** şi noţiunea de mulţime pluripolară. *(G. G.)*

capacitate spectrală, o aplicaţie F, definită pe o familie de părţi închise ale unui spaţiu topologic T cu valori subspaţii vectoriale închise ale unui spaţiu

Banach (sau, mai general, Fréchet) dat E, care verifică următoarele condiții: 1) $F(\emptyset)=\{0\}$; 2) $F(T)=E$; 3) Dacă $A_j\in\mathcal{F}$ și $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_j\in\mathcal{F}$, atunci $F\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)=$ $=\bigcap_{i=1}^{\infty} F(A_j)$; 4) Pentru orice acoperire deschisă $\{G_k\}_1^m$ finită a lui T, cu $\overline{G}_j\in\mathcal{F}$, $j=1,\ldots,m$, spațiul E se descompune astfel: $E=F(\overline{G}_1)+\ldots+F(\overline{G}_m)$, oricare ar fi m (dacă această ultimă proprietate are loc pentru un m fixat se spune că F este o m-capacitate spectrală). Despre familia $\mathcal{F}$ se presupune că este stabilită la intersecții finite, că mulțimea vidă și spațiul total aparțin lui $\mathcal{F}$ și, în sfîrșit, că pentru orice $F\in\mathcal{F}$ există G_j deschiși ce includ pe F astfel încît $\overline{G}_j\in\mathcal{F}$ și $\bigcap_i^{\infty} G_j=F$. Noțiunea de **c.s.** joacă un rol central în teoria descompunerilor spectrale ale sistemelor de operatori ce comută. Cel mai adesea, spațiul T este un compact din $\mathbf{C}$ sau $\mathbf{C}^n$. Astfel, dacă $T\in\mathcal{L}(E)$, cu E spațiu Banach, este un operator C-scalar, atunci operatorului T i se asociază în mod natural o c.s. în acest caz rolul spațiului topologic fiind mulțimea compactă $\sigma(T)$ (= spectrul operatorului T), iar spațiul $F(A)$ atașat oricărui închis A din $\sigma(T)$ este invariant la acțiunea lui $T|F(A)$ și spectrul lui T este inclus în A. C.s. joacă în acest caz rolul măsurii spectrale pentru operatorii normali. În general, unui sistem decompozabil $a=(a_1,\ldots,a_n)$ de operatori care comută se asociază o c.s. *(G. G.)*

capătul unui morfism v. **categorie**
caracter v. **algebră normată**
caracter pe un grup v. **grupul caracterelor unui grup comutativ**
categoria diagramelor v. **functor**
categoria grupurilor abeliene (Ab) v. **categorie**
categoria mulțimilor (Ens) v. **categorie**
categoria săgeților v. **functor**
categoria spațiilor topologice (Top) v. **categorie**

categorie, o ternă $\mathcal{C}$ formată din: 1) O clasă $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, numită *clasa obiectelor* lui $\mathcal{C}$; 2) Pentru orice pereche de obiecte A, B ale lui $\mathcal{C}$, o mulțime $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, numită mulțimea *morfismelor* de la A la B în $\mathcal{C}$; 3) Pentru orice ternă de obiecte A, B, C din $\mathcal{C}$, o aplicație $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$, numită *compunerea morfismelor* în $\mathcal{C}$ și notată $(u,v)\mapsto v\circ u$ (sau vu). Se presupun verificate următoarele axiome:
$\mathcal{C}1$) Dacă $(A,B)\neq(A',B')$, atunci mulțimile $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ și $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A',B')$ sînt disjuncte.
$\mathcal{C}2$) Compunerea morfismelor este asociativă, *i.e.* dacă A,B,C,D sînt obiecte în $\mathcal{C}$, $u\in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, $v\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ și $w\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$, atunci $w\circ(v\circ u)=(w\circ v)\circ u$.
$\mathcal{C}3$) Pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, există un morfism $\mathrm{id}_A\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ astfel încît $\mathrm{id}_A\circ u=u$ cînd $u\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A)$ și $v\circ\mathrm{id}_A=v$ cînd $v\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y)$, unde X și Y sînt obiecte arbitrare în $\mathcal{C}$.
Dacă $u\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, se spune că A este ***domeniul*** (sau ***sursa***) lui u și se notează $s(u)$, iar B *codomeniul* lui u (sau *capătul* lui u) și se notează $c(u)$; un morfism $u\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ se indică uneori printr-o săgeată $u\colon A\to B$ (sau $A\xrightarrow{u}B$); de aceea morfismele unei **c.** se mai numesc ***săgeți***. Elementul id_A cu proprietatea indicată în axioma $\mathcal{C}3$ este univoc determinat de A și se numește ***identitatea*** lui A. O **c.** $\mathcal{C}$ se numește ***mică*** dacă $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ este o mulțime, și ***finită*** dacă $\mathcal{C}$ are un număr finit de morfisme. Ex.: 1° **C.** ***mulțimilor*** **(Ens)**; obiectele acestei **c.** sînt mulțimile iar morfismele ei sînt aplicațiile de mulțimi. 2° **C.** ***spațiilor topologice*** **(Top)** cu obiecte spațiile topologice și cu morfisme aplicațiile continue. 3° **C.** ***grupurilor abeliene*** **(Ab)** ale cărei obiecte sînt grupurile abeliene și ale cărei morfisme sînt morfismele de grupuri. 4° O mulțime ***preordonată*** este o **c.** mică I cu proprietatea că, pentru orice pereche de obiecte i, j în I, mulțimea $\mathrm{Hom}_I(i,j)$ conține cel mult un element; se scrie $i\leqslant j$ cînd $\mathrm{Hom}_I(i,j)\neq\emptyset$. 5° Dacă M este un monoid cu element identitate e, se poate defini o **c.** $\mathcal{C}$ cu un singur obiect e punînd $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})=\{e\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(e,e)=M$ și luînd drept compunere a morfismelor legea de compoziție a lui M. 6° Fie $\mathcal{C}$ o **c.** și S un obiect în $\mathcal{C}$. Vom defini o **c.** $\mathcal{C}/S$ după cum urmează. Obiectele lui $\mathcal{C}/S$ sînt perechile de forma (X,p) cu X obiect în $\mathcal{C}$ și $p\colon X\to S$ morfism în $\mathcal{C}$. De asemenea, dacă (X,p) și (Y,q) sînt obiecte în $\mathcal{C}/S$, atunci un morfism $f\colon(X,p)\to(Y,q)$ în $\mathcal{C}/S$ este un morfism $f\colon X\to Y$ în $\mathcal{C}$ cu proprietatea că $p=q\circ f$. Se spune că $\mathcal{C}/S$ este obținută prin relativizarea la S a **c.** $\mathcal{C}$. Un obiect (X,p) al **c.** $\mathcal{C}/S$ se numește *obiect peste* S în $\mathcal{C}$ sau S-obiect în $\mathcal{C}$, iar p *proiecția* lui X în S. Evident, cînd $\mathcal{C}=$ **Ens**, se spune *mulțime peste* S, iar cînd $\mathcal{C}=$ **Top** se spune *spațiu topologic peste* S etc. 7° Fie $\mathcal{C}$ o **c. C.** *duală* (sau *opusă*) **c.** $\mathcal{C}$ este **c.** $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ definită după cum urmează:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})=\mathrm{Ob}(\mathcal{C})\text{ și }\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A),$$

iar dacă $u\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ și $v\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B)$, compunerea $v\circ u$ în C^{op} se definește ca fiind compunerea $u\circ v$ în $\mathcal{C}$. Evident $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}=\mathcal{C}$. Fie $\mathcal{C}$ o **c.** Un morfism $u\colon A\to B$ în $\mathcal{C}$ se numește *monomorfism* dacă pentru orice obiect X și orice cuplu de morfisme $f,g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A)$ astfel încît $u\circ f=u\circ g$, rezultă $f=g$. Dual, morfismul u se numește *epimorfism* dacă pentru orice obiect Y în $\mathcal{C}$ și orice pereche de morfisme $f,g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,Y)$ astfel încît $f\circ u=g\circ u$, rezultă $f=g$. Fiind dat morfismul $u\colon A\to B$ în $\mathcal{C}$, se spune că un morfism $v\colon B\to A$ este *invers la stînga* (resp. *invers la dreapta*) al lui u dacă $v\circ u=\mathrm{id}_A$ (resp. $u\circ v=\mathrm{id}_B$). Dacă u admite un invers la stînga, atunci u este un monomorfism; dual, dacă u admite un invers la dreapta, atunci u este un epimorfism. Morfismul $u\colon A\to B$ în $\mathcal{C}$ se numește *izomorfism* dacă există un morfism $v\colon B\to A$ care este simultan invers la stînga și invers la dreapta al lui u; v este atunci unic determinat, se numește *inversul* lui u și se notează u^{-1}. Fiind dată o **c.** $\mathcal{C}$, o **c.** $\mathcal{C}'$ este o *subcategorie* a lui $\mathcal{C}$ dacă: 1) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')\subset\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; 2) Pentru orice pereche de obiecte $A,B\in\mathcal{C}'$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A,B)\subset\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$; 3) Compunerea morfismelor în $\mathcal{C}'$ este indusă de compunerea morfismelor în $\mathcal{C}$. Subcategoria $\mathcal{C}'$ a lui $\mathcal{C}$ se numește *plină* dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ pentru orice cuplu de obiecte A, B din $\mathcal{C}'$. *(M. J.)*

centru, punct staționar (soluție constantă, punct de echilibru) al unui sistem dinamic $x'=f(x)$, caracterizat prin faptul că toate traiectoriile situate într-o vecinătate a acestui punct sînt curbe simple închise. Exemplul cel mai simplu îl reprezintă echilibrul stabil al unui pendul fără frecare. *(A. H.)*

centrul de greutate (al unei mulțimi compacte relativ la o măsură Radon) v. **integrala unei funcții vectoriale** (în raport cu o măsură Radon scalară)

ciclu limită, traiectorie periodică (traiectorie care este curbă simplă închisă) a unui sistem dinamic, cu proprietatea că există o vecinătate a ei care nu mai conține alte soluții periodice. Dacă **c. l.** este mulțime ω-limită pentru traiectoriile care intersectează o vecinătate a sa, el se numește *stabil*. Un **c.l.**

stabil modelează oscilațiile care nu sînt generate de excitații periodice exterioare (autooscilații). (*A. H.*)

circulația unui cîmp vectorial (de-a lungul unui drum) v. **analiză vectorială**

cîmp potențial v. **analiză vectorială**

cîmp solenoidal v. **analiză vectorială**

cîmp vectorial v. **analiză vectorială, fibratul tangent**

clan v. **clasă de mulțimi**

clan borelian v. **clasă de mulțimi**

clan de generatori (pentru un spațiu cu măsură) v. **spațiul metric asociat unui spațiu cu măsură**

clan ereditar v. **clasă de mulțimi**

clasa canonică (a unei suprafețe riemanniene) v. **divizor**

clasa unei forme diferențiale v. **formă diferențială** (în $\mathbb{R}^n$)

clasă de convergență Fie $\mathcal{X}$ o mulțime și $\mathcal{C}$ o familie formată din perechi (f, x), unde f este un șir generalizat în $\mathcal{X}$ iar $x \in \mathcal{X}$. Dacă $(f, x) \in \mathcal{C}$, se va spune că f converge $(\mathcal{C})$ către x și se va scrie $\mathcal{C}\text{-}\lim f = x$. O astfel de familie $\mathcal{C}$ se numește **c.c.** pe $\mathcal{X}$ dacă are următoarele proprietăți: i) Dacă $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este un șir generalizat în $\mathcal{X}$ și $x_\delta = x$ pentru orice $\delta \in \Delta$, atunci $\mathcal{C}\text{-}\lim\limits_{\delta \in \Delta} x_\delta = x$; ii) Dacă $\mathcal{C}\text{-}\lim\limits_{\delta \in \Delta} x_\delta = x$ și $\{y_i\}_{i \in I}$ este un subșir al lui $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, atunci $\mathcal{C}\text{-}\lim\limits_{i \in I} y_i = x$; iii) Dacă șirul generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ nu converge $(\mathcal{C})$ către x, există atunci un subșir generalizat al său care nu conține nici un subșir generalizat convergent $(\mathcal{C})$ către x; iv) Pentru orice mulțime dirijată Δ și orice familie $\{A_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ de mulțimi dirijate, fie $B = \{(\delta, a) \mid \delta \in \Delta, a \in A_\delta\}$. Dacă pentru $f: B \to \mathcal{X}$ există $x \in \mathcal{X}$ astfel ca $\mathcal{C}\text{-}\lim\limits_{\delta \in \Delta} \lim\limits_{a \in A_\delta} f(\delta, a) = x$, atunci $\mathcal{C}\text{-}\lim f \circ g = x$, unde $g: \Delta \times \prod\limits_{\delta \in \Delta} A_\delta \to B$ este definită prin $g(\delta, h) = (\delta, h(\delta))$ pe $\Delta \times \prod\limits_{\delta \in \Delta} A_\delta$ considerîndu-se ordinea produs. Fie $\mathcal{C}$ o **c.c.** pe mulțimea $\mathcal{X}$. Există atunci, și este unică, o topologie τ pe $\mathcal{X}$ astfel încît $\mathcal{C}$-convergența șirurilor generalizate este echivalentă cu convergența în topologia τ. Se spune că topologia τ a fost *generată de* **c.c.** $\mathcal{C}$. Unii autori numesc *spațiu cu convergență* o mulțime $\mathcal{X}$ pe care s-a dat o familie $\mathcal{C}$ avînd proprietățile i) și ii). Unei asemenea clase i se poate asocia de asemenea o topologie. Familia șirurilor generalizate convergente în raport cu această topologie este în general strict mai mare decît familia șirurilor $\mathcal{C}$-convergente. (*Gh. Gr.*)

clasă de mulțimi Fie T o mulțime nevidă (numită uneori și *mulțimea totală* sau *spațiul total*). O **c.m.** ale lui T este o parte $\mathcal{A}$ a mulțimii $\mathcal{P}(T)$, unde $\mathcal{P}(T)$ este mulțimea tuturor părților lui T. Sin.: *clasă de părți*. Vom considera numai **c.m.** nevide. Principalele **c.m.** folosite în teoria măsurii sînt următoarele:

semiclanul (*semiinelul*), o **c.m.** $\mathcal{A}$ cu proprietățile: 1) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$; 2) $A, B \in \mathcal{A}$ și $A \subset B \Rightarrow$ există $A = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = B$ mulțimi din $\mathcal{A}$ cu $A_{i+1} \setminus A_i \in \mathcal{A}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ex.: $\mathcal{A} = \{[a, b) \mid a \leqslant b\}$ este un semiclan de părți ale lui $\mathbb{R}$;

clanul (*inelul*), o **c.m.** $\mathcal{A}$ cu proprietatea $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ și $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Dacă $\mathcal{A}$ este clan atunci $\mathcal{A}$ este semiclan. Ex.: $\mathcal{A}$ = mulțimea tuturor reuniunilor finite de intervale de forma $[a, b)$ cu $a \leqslant b$ numere reale; $\mathcal{A}$ este clan de părți ale lui $\mathbb{R}$;

algebra (*corpul*), o **c.m.** $\mathcal{A}$ ale lui T care este clan și în plus $T \in \mathcal{A}$;

semitribul (δ-inelul) este un clan $\mathcal{A}$ cu proprietatea: pentru orice șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi $A_n \in \mathcal{A}$ avem $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Ex.: Mulțimea tuturor mulțimilor măsurabile de măsură finită dintr-un spațiu cu măsură este un semitrib (care în general nu este trib);

tribul (σ-*inelul*), o **c.m.** $\mathcal{A}$ cu proprietățile: 1) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$; 2) Pentru orice șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi $A_n \in \mathcal{A}$ avem $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in A$. Orice trib este semitrib. Ex.: Dacă T este o mulțime infinită, atunci $\mathcal{A} = \{A \subset T \mid A$ este cel mult numărabilă$\}$ este trib;

σ-*algebra* (*clanul borelian, corpul borelian*), o **c.m.** $\mathcal{A}$ ale lui T care este trib și în plus $T \in \mathcal{A}$;

π-*sistemul*, o **c.m.** $\mathcal{A}$ ale lui T cu proprietățile: 1) $A, B \in \mathcal{A}$ și $A \supset B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$; 2) Pentru orice șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi $A_n \in \mathcal{A}$ mutual disjuncte (*i.e.* $A_m \cap A_n = \varnothing$ dacă $m \neq n$) avem $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$; 3) $T \in \mathcal{A}$. Ex.: Dacă $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și $(T, \mathcal{T}, \nu)$ sînt spații cu măsură astfel încît $\mu(T)$ și $\nu(T)$ sînt finite, atunci $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{T} \mid \mu(A) = \nu(A)\}$ este π-sistem;

laticea, o **c.m.** $\mathcal{A}$ cu proprietățile: 1) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$; 2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$; 3) $\varnothing \in \mathcal{A}$. Ex.: Mulțimile compacte într-un spațiu topologic separat formează latice. Să considerăm o proprietate P pe care o pot avea sau nu **c.m.** ale lui T. Vom scrie $P(\mathcal{A})$ pentru a desemna faptul că $\mathcal{A}$ are proprietatea P. Să considerăm și o **c.m.** $\mathcal{A}$. Vom presupune că există cel puțin o **c.m.** $\mathcal{B}$ astfel încît $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ și $P(\mathcal{B})$. În aceste condiții vom numi (dacă există) **c.m.** *generată de* $\mathcal{A}$ *și proprietatea* P cea mai mică **c.m.** $\mathcal{B}$ ca mai sus și o vom nota prin $\mathrm{cl}_P(\mathcal{A})$. În mod explicit, $\mathrm{cl}_P(\mathcal{A})$ se caracterizează astfel: 1) $\mathrm{cl}_P(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}$; 2) $P(\mathrm{cl}_P(\mathcal{A}))$; 3) $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ și $P(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B} \supset \mathrm{cl}_P(\mathcal{A})$. Ex.: $\mathcal{A}$ este o **c.m.** oarecare și P este proprietatea de a fi clan, cu alte cuvinte $P(\mathcal{B})$ înseamnă că $\mathcal{B}$ este clan. Atunci $\mathrm{cl}_P(\mathcal{A})$ există și $\mathrm{cl}_P(\mathcal{A})$ se numește *clanul generat de* $\mathcal{A}$. De obicei se notează $\mathrm{cl}_P(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Așadar $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ este cel mai mic (în sensul incluziunii) dintre clanurile care includ pe $\mathcal{A}$, *i.e.*: 1) $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}$; 2) $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ este clan; 3) $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ este clan $\Rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Similar, se definesc *semiclanul generat de* $\mathcal{A}$, *algebra generată de* $\mathcal{A}$, *semitribul generat de* $\mathcal{A}$, *tribul generat de* $\mathcal{A}$, σ-*algebra generată de* $\mathcal{A}$, π-*sistemul generat de* $\mathcal{A}$. Dacă (T, τ) este un spațiu topologic, tribul generat de τ (*i.e.* tribul generat de mulțimile deschise) se numește *tribul mulțimilor boreliene ale lui* T, pe care îl vom nota prin $\mathcal{B}(T)$. De fapt, $\mathcal{B}(T)$ este o σ-algebră și se mai numește și σ-*algebra mulțimilor boreliene*. Se observă că $\mathcal{B}(T)$ = σ-algebra generată de clasa mulțimilor închise = tribul generat de mulțimile închise. Elementele lui $\mathcal{B}(T)$ se numesc *mulțimi boreliene* (sau *mulțimi Borel*, sau *mulțimi măsurabile Borel*). Se arată că: 1) Clanul generat de un semiclan $\mathcal{P}$ este clasa $\mathcal{C}(\mathcal{P}) = \left\{\bigcup\limits_{i \in I} A_i \mid \text{familia } \{A_i\}_{i \in I} \text{ este finită, mulțimile } A_i \in \mathcal{P} \text{ sînt mutual disjuncte}\right\}$; 2) Tribul generat de un semitrib $\mathcal{S}$ este clasa $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \mid \text{șirul } \{A_n\}_n \text{ este format cu mulțimi } A_n \in \mathcal{S}\right\}$; 3) Tribul (sau σ-algebra) generat de semiclanul $\mathcal{P} = \{[a, b) \mid a \leqslant b$ numere reale$\}$ coincide cu σ-algebra mulțimilor boreliene pe $\mathbb{R}$; 4) Tribul (sau σ-algebra) generat de semiclanul $\mathcal{P} = \left\{\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid a_i \leqslant b_i \text{ numere reale, } i = \right.$

$= 1, 2, \ldots, n\}$ coincide cu σ-algebra mulțimilor boreliene pe $\mathbb{R}^n$. Un șir de mulțimi $\{A_n\}_n$ se numește *șir crescător de mulțimi* (resp. *șir descrescător de mulțimi*) dacă $A_n \subset A_{n+1}$ pentru orice n (resp. $A_n \supset A_{n+1}$ pentru orice n). Un șir de mulțimi care este crescător sau descrescător se numește *șir monoton de mulțimi*. *Limita unui șir monoton de mulțimi* $\{A_n\}_n$ se definește ca fiind $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (dacă $\{A_n\}_n$ este crescător) iar $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (dacă $\{A_n\}_n$ este descrescător). O **c.m.** $\mathcal{A}$ se numește *clasă monotonă* dacă are proprietatea că pentru orice șir monoton $\{A_n\}_n$ de mulțimi $A_n \in \mathcal{A}$ avem $\lim A_n \in \mathcal{A}$. Pentru orice **c.m.** $\mathcal{A}$ există clasa monotonă generată de $\mathcal{A}$, notată $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Anume, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ are proprietățile: 1) $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}$; 2) $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ este clasă monotonă; 3) $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ este clasă monotonă $\Rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Se arată că pentru orice clan $\mathcal{A}$, tribul generat de $\mathcal{A}$ coincide cu clasa monotonă generată de $\mathcal{A}$. Dacă $\mathcal{A}$ este o **c.m.** ale lui T, notăm cu $\mathcal{A}_\lambda$ *clasa locală generată de* $\mathcal{A}$, *i.e.* $\mathcal{A}_\lambda = \{B \subset T \mid B \cap A \in \mathcal{A}$ pentru orice $A \in \mathcal{A}\}$. Dacă $\mathcal{A}$ este clan, atunci $\mathcal{A}_\lambda$ este algebră, iar dacă $\mathcal{A}$ este semitrib, atunci $\mathcal{A}_\lambda$ este σ-algebră. O **c.m.** $\mathcal{A}$ se numește *clasă ereditară* dacă are următoarea proprietate: dacă $A \in \mathcal{A}$ și $B \subset A$, atunci $B \in \mathcal{A}$. În particular, putem vorbi de *clanuri ereditare, triburi ereditare.* Mai precis, un *clan ereditar* este un clan care este în același timp și clasă ereditară. Similar, un *trib ereditar* este un trib care este în același timp și clasă ereditară. Putem considera o **c.m.** $\mathcal{B}$ și cu ajutorul ei putem construi:

clanul ereditar generat de $\mathcal{B}$, notat $\mathcal{HC}(\mathcal{B})$, care este cea mai mică clasă $\mathcal{A}$ avînd proprietățile: $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ este clan și $\mathcal{A}$ este clasă ereditară. Se arată că $\mathcal{HC}(\mathcal{B}) = \left\{A \subset T \mid \text{există o familie finită } \{A_i\}_{i \in F},\ A_i \in \mathcal{B}, \text{ astfel încît } A \subset \bigcup_{i \in F} A_i\right\}$.

tribul ereditar generat de $\mathcal{B}$, notat $\mathcal{H}(\mathcal{B})$, care este cea mai mică clasă $\mathcal{A}$ avînd proprietățile: $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ este trib și $\mathcal{A}$ este clasă ereditară. Se arată că $\mathcal{H}(\mathcal{B}) = \left\{A \subset T \mid \text{există o familie cel mult numărabilă } \{A_i\}_{i \in M},\ A_i \in \mathcal{B}, \text{ astfel încît } A \subset \bigcup_{i \in M} A_i\right\}$. (*I. C.*)

clasă de părți v. **clasă de mulțimi**
clasă ereditară v. **clasă de mulțimi**
clasă locală generată de o clasă de mulțimi v. **clasă de mulțimi**
clasă multiplicativă v. **integrala Kolmogorov**
clasă semicompactă v. **măsură pe spațiu produs**

clasificarea lui Baire Se referă la funcțiile definite pe un spațiu topologic și cu valori într-un spațiu topologic. Funcțiile continue sînt considerate de clasă zero. Prin inducție completă se definesc funcțiile de clasă n (ca limite de funcții de clasă $n - 1$) iar prin inducție transfinită se definesc funcțiile de clasă transfinită α de orice putere numărabilă. Pentru funcții reale de o variabilă reală s-a putut demonstra, pentru orice număr natural n, existența unei funcții de clasă Baire egală cu n, care nu este de clasă $n - 1$. Pentru funcțiile reale de una sau mai multe variabile reale, clasa Baire se păstrează prin convergența uniformă. (*S. M.*)

clin, submulțime E a unui spațiu liniar X cu proprietățile: dacă $x, y \in E$, atunci $x + y \in E$; dacă $x \in E$ și $0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha x \in E$. Unii autori o numesc *con* sau *con convex* (cu vîrful 0 și conținînd 0). (*R. C*)

codimensiune finită v. **spațiu liniar**

coeficienți Fourier v. **spațiu Hilbert, dezvoltarea Fourier a funcțiilor reale periodice**

coeficienții Newton-Côtes v. **formula Newton-Côtes**

cofunctor v. **functor**

comandă v. **sistem dinamic**

combinație liniară v. **spațiu liniar**

compact v. **spațiu topologic compact**

compact polinomial convex v. **domeniu Runge**

compactificare Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic separat. Se spune că spațiul topologic compact $\mathcal{Y}$ este o **c.** a lui $\mathcal{X}$ dacă $\mathcal{X}$ este homeomorf cu un subspațiu dens al lui $\mathcal{Y}$. Mai exact, o **c.** a lui $\mathcal{X}$ este o pereche $(\varphi, \mathcal{Y})$ în care $\mathcal{Y}$ este un spațiu compact iar φ este un homeomorfism între $\mathcal{X}$ și un subspațiu dens al lui $\mathcal{Y}$. Deoarece orice spațiu compact este normal și orice subspațiu al unui spațiu normal este complet regulat rezultă că nu toate spațiile topologice admit **c.** Un spațiu topologic separat care admite o **c.** se numește *compactificabil*. Observația precedentă este de fapt mai completă căci un spațiu este compactificabil dacă și numai dacă este complet regulat. Două **c.** ale lui $\mathcal{X}$, $(\varphi, \mathcal{Y})$ și $(\Psi, \mathcal{Z})$, se spune că sînt *egale* (sau *echivalente*) dacă există $h: \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ un homeomorfism așa ca $h \circ \varphi = \Psi$. Dacă există aplicația continuă $h: \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ astfel ca $h \circ \varphi = \Psi$, se spune că $(\varphi, \mathcal{Y})$ este *mai mică* decît $(\Psi, \mathcal{Z})$, și se notează $(\varphi, \mathcal{Y}) \leqslant (\Psi, \mathcal{Z})$. Relația introdusă este o relație de ordine în mulțimea **c.** lui $\mathcal{X}$. Se numește **c.** *cu un punct* (sau **c.** *Alexandrov*) a spațiului $\mathcal{X}$, un spațiu compact $\tilde{\mathcal{X}}$ astfel încît $\mathcal{X}$ să fie un subspațiu dens al lui $\tilde{\mathcal{X}}$ și $\tilde{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{X}$ să se reducă la un punct.
Teorema lui Alexandrov. Un spațiu topologic separat este compactificabil cu un punct dacă și numai dacă este local compact.
Fie $\mathcal{X}$ un spațiu complet regulat. Există atunci o **c.** $(\varphi, \mathcal{Y})$ a lui $\mathcal{X}$ astfel încît pentru orice funcție continuă și mărginită $f: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ există, și este unică, o funcție continuă și mărginită $g: \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ astfel ca g să fie o prelungire a lui $f \circ \varphi^{-1}$ (pe scurt, o prelungire a lui f, dacă se identifică $\mathcal{X}$ cu $\varphi(\mathcal{X})$) astfel încît $\sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)| = \sup_{y \in \mathcal{Y}} |g(y)|$. Această **c.** se numește **c.** *Stone-Čech*. (Orice două asemenea **c.** sînt echivalente.) În raport cu ordinea introdusă, **c.** Stone-Čech este cea mai mare **c.** a lui $\mathcal{X}$. Dacă $\mathcal{X}$ este local compact, **c.** Alexandrov este cea mai mică **c.** a lui $\mathcal{X}$. (*Gh. Gr.*)

compactificare cu un punct v. **compactificare**

compactificare Stone-Čech v. **compactificare**

compactificarea lui Alexandrov v. **compactificare, frontiera ideală**

compactificarea Kerékjártó-Stoilow v. **frontiera ideală**

compararea convergenței sau divergenței a două serii Fie r_n și r_n' resturile de ordinul n ale celor două serii. Convergența are aceeași viteză dacă $0 < \liminf (|r_n|/|r_n'|) \leqslant \limsup (|r_n|/|r_n'|) < \infty$. Dacă prima inegalitate este înlocuită cu $=$, prima serie converge cel puțin la fel de repede ca și a doua. Dacă, în particular, $\lim (|r_n|/|r_n'|) = 0$, prima serie converge strict mai repede decît a doua. Dacă în prima definiție înlocuim ultima inegalitate prin $=$, prima serie converge cel puțin tot atît de încet ca și a doua. Dacă în particular $\lim (|r_n| / |r_n'|) = \infty$, atunci prima serie converge strict mai încet decît a doua. Condiții similare pentru compararea divergenței a două serii (v. și **serie numerică**). (*S. M.*)

compararea topologiilor Fie $\mathcal{X}$ o mulțime, τ_1 și τ_2 două topologii pe $\mathcal{X}$, generate, respectiv, de familiile de mulțimi deschise $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$. Se spune că τ_2 este *mai fină* decît τ_1 (sau că τ_1 este *mai puțin fină* decît τ_2) dacă orice mulțime τ_1-deschisă este τ_2-deschisă (deci dacă $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$). Se notează $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Se mai spune în acest caz că τ_2 este *mai tare* decît τ_1 (sau că τ_1 este *mai slabă* decît τ_2). Afirmațiile următoare sînt echivalente: i) $\tau_1 \leqslant \tau_2$; ii) Aplicația identică $i(x) = x$ definită pe $(\mathcal{X}, \tau_2)$ cu valori în $(\mathcal{X}, \tau_1)$ este continuă; iii) Pentru orice $x \in \mathcal{X}$, orice vecinătate a lui x în topologia τ_1 este o vecinătate a lui x în topologia τ_2; iv) Pentru orice $A \subset \mathcal{X}$, închiderea lui A în τ_1 conține închiderea lui A în τ_2; v) Orice mulțime închisă în τ_1 este închisă în τ_2. În raport cu această ordine, mulțimea topologiilor pe $\mathcal{X}$ este o latice completă cu cel mai mic și cel mai mare element. Cel mai mic element este topologia indiscretă, iar cel mai mare element este topologia discretă. Fie $\{\tau_i\}_{i \in I}$ o familie de topologii pe $\mathcal{X}$, $\mathcal{T}_i$ familia mulțimilor deschise în τ_i, $i \in I$. Marginea inferioară a familiei $\{\tau_i\}_{i \in I}$ este topologia în care familia mulțimilor deschise este $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$. Marginea superioară a familiei $\{\tau_i\}_{i \in I}$ este topologia în care $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ este o subbază. (*Gh. Gr.*)

complement ortogonal (într-un spațiu Hilbert) v. **spațiu Hilbert**

complement ortogonal (într-un spațiu liniar reticulat) v. **spațiu liniar ordonat**

completarea unei măsuri v. **extinderea măsurilor pozitive aditive definite pe un clan**

completatul unui spațiu liniar normat v. **spațiul liniar normat**

completatul unui spațiu liniar topologic separat X, spațiu liniar topologic separat și complet $\widetilde{X}$ astfel ca X să fie izomorf (ca spațiu liniar topologic) cu un subspațiu liniar topologic dens al spațiului $\widetilde{X}$. Un astfel de spațiu $\widetilde{X}$ există, și este unic, cu excepția unui **izomorfism**. O metodă de a construi **c. s.l.t.s.** X este cea care urmează: Fie $\mathcal{W}$ o **bază** de **vecinătăți** ale originii în spațiul X și să ordonăm $\mathcal{W}$ punînd $V_1 \leqslant V_2 \Leftrightarrow V_1 \supset V_2$. Fie Y mulțimea tuturor șirurilor generalizate Cauchy de forma $\{a_V\}_{V \in \mathcal{W}}$ cu $a_V \in X$. Mulțimea Y este un spațiu liniar cu operațiile:

$$\{a_V\}_{V \in \mathcal{W}} + \{b_V\}_{V \in \mathcal{W}} = \{a_V + b_V\}_{V \in \mathcal{W}};$$

$$\lambda \{a_V\}_{V \in \mathcal{W}} = \{\lambda a_V\}_{V \in \mathcal{W}},$$

unde λ este scalar. Pentru orice $W \in \mathcal{W}$ fie $\widehat{W}$ mulțimea tuturor elementelor $\hat{a} \in Y$ cu $\hat{a} = \{a_V\}_{V \in \mathcal{W}}$ pentru care există $V_0 \in \mathcal{W}$ astfel ca $a_V \in W$ dacă $V \geqslant V_0$. Atunci sistemul $\{\widehat{\mathcal{W}} \mid \mathcal{W} \in \mathcal{W}\}$ este o bază de vecinătăți ale originii pentru o topologie liniară pe Y. Punînd $G = \bigcap \{\widehat{W} \mid W \in \mathcal{W}\}$ obținem un subspațiu liniar închis (închiderea elementului nul în spațiul Y). Spațiul liniar topologic cît $\widetilde{X} = Y/G$ este completatul lui X. (*R. C.*)

completatul unui spațiu metric v. **spațiu metric complet**

completatul unui spațiu uniform v. **șir generalizat Cauchy**

complexificatul unui fibrat vectorial v. **fibratul tangent complex**

complexul Cauchy-Riemann tangențial Fie Ω o mulțime deschisă din $\mathbf{C}^n$, $\partial\Omega$ frontiera sa, presupusă netedă. Operatorul Cauchy-Riemann tangențial $\bar{\partial}_b$ este operatorul indus pe frontiera $\partial\Omega$ de către operatorul Cauchy-Riemann. Acesta se poate descrie explicit astfel: Fie φ o formă de tip (p,q) ce provine din restricția la $\partial\Omega$ a unei forme de tip (p, q) cu coeficienți C^∞ în Ω. Fie φ' o astfel de formă, deci $\varphi' \mid \partial\Omega = \varphi$, $\bar{\partial}_b\varphi$ este definit ca proiecția ortogonală a lui $\bar{\partial}\varphi' \mid \partial\Omega$ pe spațiul formelor de tip $(p, q+1)$ ce provin din forme C^∞ din Ω și această definiție nu depinde de alegerea lui φ'. Se obține astfel un complex, numit **c.C.R.t.** Soluțiile ecuației $\bar{\partial}_b u = 0$ se numesc *funcții* (sau *forme*) *Cauchy-Riemann* și se bucură de unele proprietăți remarcabile (de exemplu funcțiile Cauchy-Riemann formează o algebră). O problemă actuală este studiul prelungibilității analitice a funcțiilor Cauchy-Riemann. Primul rezultat important în această direcție fiind teorema de prelungibilitate a lui H. Lewy. Coomologiile asociate **c.C.R.t.** intervin în mod natural în teoria twistorilor și în aplicațiile sale la rezolvarea ecuațiilor Yang-Mills. (*G. G.*)

complexul de Rham v. **formă diferențială** (pe o varietate diferențiabilă)

complexul Dolbeault v. **formă diferențială** (pe o varietate complexă)

componentă a unui spațiu liniar reticulat X, submulțime G a lui X cu proprietatea: $G + G^{\perp} = X$ (unde $G^{\perp}$ este complementul ortogonal al mulțimii G). Orice element $x \in X$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = x' + x''$ cu $x' \in G$ și $x'' \in G^{\perp}$. Orice componentă G este o bandă și are loc egalitatea $(G^{\perp})^{\perp} = G$. O bandă G este o componentă dacă și numai dacă pentru orice element pozitiv $x \in X$ există elementul x' dat de formula $x' = \sup \{y \in G \mid 0 \leqslant y \leqslant x\}$. În particular, într-un spațiu liniar complet reticulat orice bandă este o componentă. Dacă v este un element oarecare al spațiului liniar reticulat X iar G este banda generată de v, atunci G este o componentă dacă și numai dacă pentru orice element pozitiv $x \in X$ există elementul x' dat de formula $x' = \bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} (x \wedge n \mid v \mid)$. În particular, într-un spațiu liniar σ-reticulat banda generată de un element oarecare v este o componentă și coincide cu mulțimea $(\{v\}^{\perp})^{\perp}$. Dacă $\{G_j\}_{j \in J}$ este o familie totală de componente a unui spațiu liniar reticulat X, atunci X este izomorf (ca spațiu liniar ordonat) cu un subspațiu liniar ordonat al spațiului liniar ordonat produs $\prod\limits_{j \in J} G_j$. (*R. C.*)

componentă scalară (a unei funcții vectoriale) v. **analiză vectorială**

con, clin E într-un spațiu liniar X cu proprietatea: $E \cap (-E) = \{0\}$. Unii autori numesc astfel de clin, un **c.** *propriu*, utilizînd denumirea de **c.** pentru clin. De asemenea, unii autori numesc. **c.** (cu vîrful 0) orice submulțime E a unui spațiu liniar avînd proprietatea: $x \in E$, $0 < \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in E$. (*R. C*).

condiția lui Levi v. **pseudoconvexitate**

condiția lui Lipschitz Funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface **c.L.** dacă există o constantă k cu proprietatea că pentru orice pereche $x, y \in [a, b]$ avem $|f(x) - f(y)| \leqslant k \, |x - y|$. Orice funcție cu derivată mărginită satisface **c.L.** iar aceasta din urmă implică continuitatea absolută. (*S. M.*)

condiția lui Riesz, condiție îndeplinită de anumite spații liniare ordonate, care constă în faptul că dacă pentru trei elemente pozitive oarecare x_1, x_2, y are loc inegalitatea $y \leqslant x_1 + x_2$, atunci există elementele pozitive y_1, y_2 astfel ca $y = y_1 + y_2$ și $y_i \leqslant x_i$, $i = 1, 2$. Dacă X este un spațiu ordonat, următoarele condiții sînt echivalente: 1) Spațiul X satisface **c.R.**; 2) Dacă x_1, x_2, y_1, y_2 sînt elemente pozitive astfel ca $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, atunci există elementele pozitive z_{ij}, $i, j = 1, 2$, astfel ca $x_i = z_{i1} + z_{i2}$ și $y_j = z_{1j} + z_{2j}$; 3) Mulțimea ordonată X are proprietatea interpolatorie; 4) Pentru orice elemente pozitive a, b, c, d cu $a \leqslant b$ și $c \leqslant d$ are loc egalitatea $[a + c, b + d] = [a, b] + [c, d]$ (segmentele fiind în sensul ordinei). Orice spațiu liniar reticulat satisface **c.R.** Mulțimea funcțiilor continue $x\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ care satisfac condiția $x(-1) + x(1) = x(0)$, înzestrată cu operațiile obișnuite și cu ordinea punctuală, este un spațiu liniar dirijat care satisface **c.R.** dar care nu este un spațiu liniar reticulat. (*R. C.*)

conjugatul unui număr complex v. **corpul numerelor complexe**

conjugatul unui spațiu local convex X, mulțimea tuturor funcționalelor liniare și continue definite pe X. Se notează X^* sau X^*_τ (unde τ este topologia spațiului X) sau X'. Sin.: *dualul* lui X. Cu operațiile obișnuite cu funcționalele (*i.e.* dacă $f, g \in X^*$ iar λ este un scalar, atunci $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in X$), mulțimea X^* este un spațiu liniar. Dacă X este un spațiu local convex separat, atunci pentru orice element nenul $x_0 \in X$ există $f \in X^*$ astfel ca $f(x_0) \neq 0$. Pentru un spațiu local convex separat X topologia local convexă definită pe X^* de familia $\{q_x\}_{x \in X}$ a seminormelor date de formula $q_x(f) = |f(x)|$, $f \in X^*$, este separată. Această topologie se notează $\sigma(X^*, X)$ și se numește *topologia slabă** pe X^* (ea fiind topologia slabă pe X^* în raport cu sistemul dual $\langle X, X^* \rangle$, unde $\langle x, f \rangle = f(x)$ (v. **sistem dual de spații liniare**). Dacă W este o vecinătate echilibrată și convexă a originii în spațiul local convex separat X, atunci mulțimea $\{f \in X^* \mid |f(x)| \leq 1,\ \forall x \in W\}$ (*i.e.* polara W^0 a lui W în raport cu sistemul dual $\langle X, X^* \rangle$) este compactă în topologia $\sigma(X^*, X)$ (*teorema Alaoglu-Bourbaki*). Dacă X este un spațiu liniar normat, atunci conjugatul său X^* este spațiu Banach în raport cu norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid \|x\| \leq 1\},\ f \in X^*.$$

În acest caz, din teorema Alaoglu-Bourbaki rezultă că sfera unitate închisă în X^* este compactă în topologia $\sigma(X^*, X)$. Dacă X este un spațiu Banach, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un șir cu valori în X^*, iar $f \in X^*$, atunci pentru ca $f = \lim_n f_n$ în topologia $\sigma(X^*, X)$ este necesar și suficient ca următoarele două condiții să fie satisfăcute: 1) Șirul $\{\|f_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit; 2) Există o submulțime A a lui X astfel ca subspațiul liniar generat de A să fie dens în X, iar $f(x) = \lim_n f_n(x)$, $\forall x \in A$. (*R. C.*)

continuitate absolută I. *Cazul măsurilor cu semn.* Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{T}$ o σ-algebră de părți ale lui T. Se consideră și două măsuri cu semn $\mu, \nu: \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$. Se spune că ν este *absolut continuă în raport cu* μ (în scris $\nu \ll \mu$) dacă pentru orice mulțime A din $\mathcal{T}$ cu $|\nu|(A) < \infty$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi $B \in \mathcal{T}$ cu $B \subset A$ și $|\mu|(B) < \delta$ avem $|\nu|(B) < \varepsilon$. Aici $|\mu|$ este modulul lui A etc. Echivalent: măsura ν este *absolut continuă de tip* 0-0 *în raport cu* μ, *i.e.* pentru orice $A \in \mathcal{T}$ cu $|\nu|(A) < \infty$ avem $|\mu|(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. În cazul particular cînd $\mu, \nu: \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sînt măsuri pozitive rezultă că $\nu \ll \mu$ dacă și numai dacă pentru orice mulțime A din $\mathcal{T}$ cu $\nu(A) < \infty$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi $B \in \mathcal{T}$ cu $B \subset A$ și $\mu(B) < \delta$ avem $\nu(B) < \varepsilon$. Dacă în plus măsura ν este σ-finită, atunci $\nu \ll \mu$ dacă și numai dacă pentru orice A din $\mathcal{T}$ cu $\mu(A) = 0$ avem $\nu(A) = 0$.
II. *Extensie.* Vom considera două clanuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ de părți ale unei mulțimi nevide T și o clasă de părți $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, precum și două măsuri aditive m și n definite, prima pe $\mathcal{C}_1$, a doua pe $\mathcal{C}_2$ cu valori, fiecare, sau într-un spațiu normat sau în $\overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că m este *absolut continuă* în *raport cu* n pe $\mathcal{C}$ dacă pentru orice A din $\mathcal{C}$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea: oricare ar fi $B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ cu $\tilde{\tilde{n}}(B) < \delta$ avem $\tilde{\tilde{m}}(B) < \varepsilon$, ceea ce este echivalent cu a spune că $|m(B)| < \varepsilon$ dacă m ia valori în $\overline{\mathbb{R}}$ sau $\|m(B)\| < \varepsilon$ dacă m ia valori într-un spațiu Banach. Dacă $\mathcal{T}$ este un trib de părți ale mulțimii nevide T, X un spațiu Banach, $m: \mathcal{T} \to X$ o măsură numărabil aditivă și $\mu: \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură numărabil aditivă pozitivă, atunci următoarele afirmații sînt echivalente: 1) Măsura m este absolut continuă în raport cu μ; 2) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) < \delta$ avem $\|m(A)\| < \varepsilon$; 3) Pentru orice A din $\mathcal{T}$ cu $\mu(A) = 0$ avem $m(A) = 0$ (echivalent $\tilde{\tilde{m}}(A) = 0$). Să consemnăm și faptul că dacă $\mathcal{C}$ este un clan de părți ale lui T, X un spațiu Banach, $m: \mathcal{C} \to X$ măsură aditivă și $\mu: \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură pozitivă numărabil aditivă și finită, atunci $m \ll \mu$ implică m numărabil aditivă. Dacă în plus μ este non-atomică, atunci m este și ea non-atomică. Două măsuri m și n se numesc *echivalente* dacă $m \ll n$ și $n \ll m$. Fie X un spațiu Banach, $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T și $m: \mathcal{C} \to X$ o măsură aditivă. O măsură aditivă și pozitivă $\mu: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ se numește *măsură control pentru* m dacă este echivalentă cu m. Fie $\mathcal{T}$ un trib de părți ale lui T, X un spațiu Banach și $m: \mathcal{T} \to X$ o măsură vectorială numărabil aditivă. Atunci există o măsură control pentru m cu proprietatea $m \ll \mu \leq \tilde{\tilde{m}}$ (*teorema Bartle-Dunford-Schwartz* sau *teorema de existență a măsurii control*). O precizare a acestei teoreme este *teorema lui Ribakov* care afirmă că există x' în dualul X^* al lui X astfel încît $|x' \circ m|$ să fie măsură control pentru m. (*I. C.*)

continuitate aproximativă Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este aproximativ continuă în $x \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$, interval) dacă există o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ pentru care x este punct de densitate, astfel încît restricția $f \mid A$ este continuă în x. Funcția f este aproximativ continuă a.p.t. pe I dacă și numai dacă f este măsurabilă Lebesgue pe I. (*S. M.*)

continuitate bidimensională Fie f definită pentru $a_1 \leq x \leq b_1$, $a_2 \leq y \leq b_2$, cu valori reale. Funcția f este bidimensional continuă în punctul p dacă $\lim_{p' \to p} \Delta_2(f;\ p, p') = 0$ (v. **diferență bidimensională**). Dacă p are coordonatele (x, y), atunci condiția revine la $\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \Delta_2 f(x, y) = 0$. Continuitatea implică c.b. dar reciproca nu este adevărată. (*S. M.*)

continuitate constructivă Funcția reală f definită pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}$ este continuă constructiv pe I dacă există o funcție constructivă $\omega(\varepsilon) > 0$ definită pentru $\varepsilon > 0$ astfel încît din $x, y \in I$, $|x - y| \leq \omega(\varepsilon)$ să rezulte $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Aici I este un interval de numere reale constructive. (*S. M.*)

continuitate și derivată preponderentă Fie $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și fie $a \in I$. Dacă există o mulțime măsurabilă Lebesgue $E \subset I$ astfel încît, notînd cu m măsura Lebesgue, avem

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{m(E \cap (a, a+h))}{h} > \frac{1}{2},$$

$$\liminf_{h \to 0-} \frac{m(E \cap (a+h, a))}{-h} > \frac{1}{2},$$

și dacă $\lim_{x \to a,\ x \in E} f(x) = f(a)$, atunci f este *preponderent continuă în a*. Înlocuind ultima condiție prin $\lim_{h \to 0,\ a+h \in E} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ există, numim limita astfel obținută *derivata preponderentă* a lui f în a și o notăm $f'_{pr}(a)$. O funcție preponderent continuă este de prima clasă Baire și are proprietatea lui Darboux. Dacă f este continuă, atunci f'_{pr} este Darboux de prima clasă Baire. (*S. M.*)

contracție, aplicație g definită pe un spațiu metric $(\mathcal{X}, d)$ cu valori în același spațiu, pentru care există $q \in (0, 1)$ astfel încît $d(g(x), g(y)) \leq q d(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathcal{X}$. Se spune uneori că g este o *q-contracție*.

Principiul c. Dacă $(\mathcal{X}, d)$ este un spațiu metric complet iar g este o q-contracție pe $\mathcal{X}$, atunci există, și este unic, elementul $x^* \in \mathcal{X}$ astfel încît $g(x^*) = x^*$. Pentru orice $x^{(0)} \in \mathcal{X}$ șirul construit prin $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$ converge către x^* și

$$d(x^*, x^{(n)}) \leqslant \frac{q}{1-q}\, d(x^{(n-1)}, x^{(n)}) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, d(x^{(0)}, x^{(1)}). \quad (Gh.\ Gr.)$$

conul lui Filippov v. **problema lui Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale**

conul pozitiv v. **spațiu liniar ordonat**

convergența cu regulator v. **convergența în sensul ordinei**

convergența individuală v. **convergența în sensul ordinei**

convergența în sensul ordinei Fie X o mulțime ordonată, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de elemente din X și x un element din X. Se spune că șirul **c.s.o.** către x dacă există două șiruri $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din X astfel ca $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $a_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\uparrow} x$ (*i. e.* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots$ și $x = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n$) iar $b_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\downarrow} x$ (*i.e.* $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots$ și $x = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} b_n$). Se mai spune că șirul (o)-converge (sau că este (o)-*convergent*) către x. Elementul x se numește (o)-*limita* șirului și se notează $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$. El este unic. Dacă $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$ și $y = (o)\text{-}\lim_n y_n$, iar $x_n \leqslant y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $x \leqslant y$. Dacă șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (o)-converge către un element x, atunci orice subșir (o)-converge către același element. Dacă $x = (o)\text{-}\lim_n y_n = (o)\text{-}\lim_n z_n$ și $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$. Dacă $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de elemente din X, elementul $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{j\geqslant n} x_j$ (dacă există) se numește *limita inferioară* a șirului și se notează $\underline{\lim}_n x_n$; elementul $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{j\geqslant n} x_j$ (dacă există) se numește *limita superioară* a șirului și se notează $\overline{\lim}_n x_n$. Pentru ca $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$ într-o latice relativ σ-completă, este necesar și suficient ca șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ să fie mărginit și ca $\underline{\lim}_n x_n = \overline{\lim}_n x_n = x$. Dacă X este un spațiu liniar ordonat, atunci din $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$ și $y = (o)\text{-}\lim_n y_n$ rezultă $\alpha x + \beta y = (o)\text{-}\lim_n (\alpha x_n + \beta y_n)$ oricare ar fi numerele reale α, β. Dacă X este un spațiu liniar reticulat, atunci $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$ dacă și numai dacă există un șir $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din X astfel ca $v_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\downarrow} 0$ și $|x_n - x| \leqslant v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dacă $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$ și $y = (o)\text{-}\lim_n y_n$ într-un spațiu liniar reticulat, atunci $x \wedge y = (o)\text{-}\lim_n x_n \wedge y_n$ și $x \vee y = (o)\text{-}\lim_n x_n \vee y_n$. Dacă $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$ într-un spațiu liniar reticulat arhimedian și dacă $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de numere reale convergent către un număr λ, atunci $\lambda x = (o)\text{-}\lim_n \lambda_n x_n$. Dacă X este un spațiu liniar σ-reticulat, un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din X este (o)-convergent (către un anumit element) dacă și numai dacă există un șir $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din X astfel ca $v_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\downarrow} 0$ și $|x_i - x_j| \leqslant v_n$ dacă $i, j \geqslant n$. Într-un spațiu liniar σ-reticulat prezintă interes și un tip de convergență numită *convergență individuală*. Un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente dintr-un spațiu liniar σ-reticulat X converge individual către un element x, dacă $(x \wedge a) \vee b = (o)\text{-}\lim_n (x_n \wedge a) \vee b$ oricare ar fi elementele $a, b \in X$. Pentru ca șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ să conveargă individual către un element x, este necesar și suficient ca $x \vee a = \underline{\lim}_n (x_n \vee a)$ și $x \wedge a = \overline{\lim}_n (x_n \wedge a)$, $\forall a \in X$. Se notează $x = \text{ind-}\lim_n x_n$ și se spune că x este *limita individuală* a șirului. În cazul șirurilor generalizate cu valori într-o mulțime ordonată, se pot defini diferite tipuri de convergență care generalizează (o)-convergența șirurilor ordinare. În cazul unui spațiu liniar reticulat X, un rol important îl are următoarea convergență. Fie $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ un șir generalizat cu valori în X. Prin definiție, șirul generalizat (ω)-*converge* (sau este (ω)-*convergent*) către un element x, dacă există un șir generalizat $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ cu valori în X cu proprietățile: $v_\lambda \underset{\lambda\in\Lambda}{\downarrow} 0$ (*i.e.* din $\lambda' \leqslant \lambda''$ rezultă $v_{\lambda''} \leqslant v_{\lambda'}$, iar $0 = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$) și pentru orice $\lambda \in \Lambda$ există $\delta_0 \in \Delta$ astfel ca $|x_\delta - x| \leqslant v_\lambda$ dacă $\delta \geqslant \delta_0$. Elementul x se numește (ω)-*limita* șirului generalizat și se notează $x = (\omega)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta$. El este unic. Fie acum X un spațiu liniar reticulat arhimedian, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de elemente din X și x un element din X. Se spune că șirul *converge cu regulator* către x dacă există un element $v > 0$ din X, iar pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_0 astfel ca $|x_n - x| \leqslant \varepsilon v$ dacă $n \geqslant n_0$. Elementul x se numește (ρ)-*limita* șirului și se notează $x = (\rho)\text{-}\lim_n x_n$. El este unic. Elementul v se numește *regulator de convergență*. Convergența cu regulator se mai numește și (ρ)-*convergență*. Un șir (ρ)-convergent către un element x este și (o)-convergent către același element. Reciproca nu este adevărată. Convergența cu regulator se definește în mod analog și pentru șiruri generalizate. (*R. C.*)

convergență a.p.t. v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**

convergență aproape sigură v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**

convergență aproape uniformă v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**

convergență asimptotică v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**

convergență constructivă Șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale converge constructiv către numărul real x_0 dacă pentru orice k întreg pozitiv există un număr natural m_k astfel încît din $n \geqslant m_k$ rezultă $|x_n - x_0| \leqslant 1/k$. Numărul x_0 este limita constructivă a șirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; ea este unic determinată. Un șir de numere reale converge constructiv dacă și numai dacă este un șir Cauchy constructiv. (*S. M.*)

convergență continuă Fie $f_n : X \to \mathbb{R}$, $X =$ spațiu metric. Șirul $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuu în x_0 din X dacă există un număr real $f(x_0)$ cu proprietatea că din $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, rezultă $f_n(x_n) \to f(x_0)$. Dacă funcțiile f_n sînt continue iar X este compact, atunci c.c. este echivalentă cu convergența uniformă (H. Hahn). (*S. M.*)

convergență cvasiuniformă Arzela-Borel Fie (X, ρ) și (Y, σ) două spații metrice. Șirul $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \to Y$, converge cvasiuniform către $f : X \to Y$ pe X dacă $\{f_n\}$ converge către f pe X și dacă oricărei perechi de numere pozitive (ε, N) îi corespunde un număr pozitiv $N' > N$, astfel încît pentru orice $x \in X$

avem $\sigma(f(x), f_{n_x}(x)) < \varepsilon$, unde n_x este un număr natural cuprins între N și N', depinzînd de x. (*S. M.*)

convergență cvasiuniformă Arzela-Gagaev-Alexandrov Fie (X, ρ) și (Y, σ) două spații metrice. Șirul $\{f_n\}_n$, $f_n: X \to Y$, converge cvasiuniform pe X către $f: X \to Y$ dacă $\{f_n\}$ converge* către f pe X și dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un șir (finit sau nu) de numere naturale $n_1 < n_2 < \ldots < n_p < n_{p+1} < \ldots$ și un șir de mulțimi deschise $G_1, G_2, \ldots, G_p, G_{p+1}, \ldots$ care realizează o acoperire a spațiului X, astfel încît pentru $x \in G_p$ avem $\sigma(f(x), f_{n_p}(x)) < \varepsilon$, $p = 1, 2, \ldots$ (*S. M.*)

convergență cvasiuniformă Arzela-Hobson Fie (X, ρ) și (Y, σ) două spații metrice. Șirul $\{f_n\}$, $f_n: X \to Y$, converge cvasiuniform pe X către $f: X \to Y$ dacă $\{f_n\}$ converge către f pe X și dacă la orice pereche de numere pozitive (ε, m) corespunde un sistem finit de numere naturale $n_1, n_2, \ldots, n_p$ mai mari decît m precum și un sistem de tot atîtea mulțimi deschise $G_1, G_2, \ldots, G_p$ astfel încît $X = \bigcup_{i=1}^{p} G_i$ și $\sigma(f(x), f_{n_i}(x)) < \varepsilon$ pentru orice $x \in G_i$. **c.c.A.H.** implică atît convergența cvasiuniformă Arzela-Borel cît și convergența cvasiuniformă Arzela-Gagaev-Alexandrov. Dacă funcțiile f_n sînt continue* iar spațiul X este compact*, atunci cele trei tipuri de convergență cvasiuniformă sînt echivalente, fiecare fiind necesară și suficientă ca funcția f să fie continuă. (*S. M.*)

convergență în măsură v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**

convergență în medie v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**

convergență în medie de ordin p v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**

convergență normală Fie S o mulțime, F un spațiu Banach și $B(S, F)$ mulțimea tuturor funcțiilor mărginite definite pe S cu valori în F. Pentru orice $f \in B(S, F)$ se pune $\|f\|_S = \sup_{s \in S} \|f(s)\|$. Evident, $B(S, F)$ este un spațiu vectorial, operațiile de adunare și înmulțire scalară în $B(S, F)$ fiind induse de operațiile corespunzătoare din F, $\|\cdot\|_S$ este o normă pe $B(S, F)$ și, înzestrat cu această normă, $B(S, F)$ este un spațiu Banach. Fiind dat un șir de funcții $f_n: S \to F$, $n \geqslant 0$, se spune că seria de funcții $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ este *normal convergentă* dacă satisface condițiile următoare: 1) $f_n \in B(S, F)$ pentru orice $n \geqslant 0$; 2) $\sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|_S < \infty$. **C.n.** a unei serii de funcții $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ implică convergența ei uniformă (pe S). Mai general, se spune că seria de funcții $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ este *normal convergentă pe mulțimea* $A \subset S$ dacă seria de funcții $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ este normal convergentă, unde $g_n = f_n \mid A$. Ex.: Dacă S este un spațiu topologic și $F = \mathbb{C}$, corpul valuat al numerelor complexe, se utilizează frecvent noțiunea de *serie normal convergentă pe orice mulțime compactă* din S. (*M. J.*)

convergență punctuală v. **șir de funcții, serie de funcții**

convergență uniformă v. **șir de funcții, serie de funcții**

(o)-convergență v. **convergența în sensul ordinei**

(ω)-convergență v. **convergența în sensul ordinei**

ρ-convergență v. **convergență în sensul ordinei**

convexitate reală v. **pseudoconvexitate**

convoluția a două distribuții v. **distribuție**

convoluția a două funcții Fie X, Y, Z spații Banach și o aplicație biliniară $X \times Y \to Z$, notată prin $(x, y) \mapsto xy \in Z$ cu proprietatea $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ pentru orice x în X și y în Y. Dacă $X = Y = Z =$ corpul scalarilor (reali sau complecși), atunci aplicația $(x, y) \mapsto xy$ este înmulțirea obișnuită. Fie și G un grup local compact separat cu măsura Haar invariantă la stînga μ. Fie, de asemenea, două funcții $f: G \setminus U \to X$ și $g: G \setminus V \to Y$, unde U și V sînt mulțimi μ-neglijabile. Vom presupune că f și g sînt local μ-integrabile și vom nota $m = f\mu$ și $n = g\mu$ (v. **măsură Radon definită prin densități**). Dacă există, convoluția $m * g$ se definește prin

$$(m * g)(y) = \int g(x^{-1}y)\, \mathrm{d}m(x) = \int f(x)\, g(x^{-1}y)\, \mathrm{d}\mu(x) \in Z.$$

Similar, dacă există, convoluția $f * n$ se definește prin

$$(f * n)(y) = \int f(yx^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, \mathrm{d}n(x) = \int f(yx^{-1})\, g(x)\, \Delta(x^{-1})\, \mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \int f(yx)\, g(x^{-1})\, \mathrm{d}\mu(x),$$

deci $(m * g)(y) = (f * n)(y)$ (v. **convoluția unei măsuri Radon cu o funcție**). În virtutea acestei observații, dacă mulțimea $A = \{y \in G \mid$ funcția definită pe G cu valori în Z prin $x \mapsto f(x)\, g(x^{-1}y)$ este μ-integrabilă$\}$ este nevidă, vom numi funcția $f * g: A \to Z$ definită prin

$$(f * g)(y) = \int f(x)\, g(x^{-1}y)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int f(yx)\, g(x^{-1})\, \mathrm{d}\mu(x)$$

convoluția funcțiilor f și g (sau *produsul de convoluție* al funcțiilor f și g). Avem deci $(f\mu) * g = f * (g\mu) = f * g$ și $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) \cdot \operatorname{supp}(g)}$. Am notat, pentru A și B incluse în G, $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ și $\overline{AB}$ este aderența lui AB. Dacă G este unimodular, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ și $(1/p) + (1/q) = 1$, atunci pentru orice $f \in \mathcal{L}^p_X(\mu)$ și $g \in \mathcal{L}^q_Y(\mu)$ funcția $f * g$ este definită peste tot pe G și ia valori în Z. În plus, produsul de convoluție $(f\mu) * (g\mu)$ (v. **convoluția măsurilor Radon**) există și avem $(f\mu) * (g\mu) = (f * g)\,\mu$. În plus, funcția $f * g$ este continuă și mărginită și $\|f * g\| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, unde $\|f * g\| = \sup\{|f * g|(x) \mid x \in G\}$). Putem defini și $f * g * h$ prin relația $(f * g) * h = f * (g * h)$, care are loc în anumite condiții. Ex.: Dacă grupul local compact este $G = \mathbb{R}^n$ cu operația de adunare, iar măsura Haar μ este măsura Lebesgue, considerăm două funcții $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ și $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Atunci $f * g$ este definită μ-a.p.t.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, g(y)\, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x - y)\, \mathrm{d}\mu(y).$$

Se mai scrie:

$$(f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)\, g(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2 \ldots \mathrm{d}y_n.$$

În plus, funcția $f * g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dacă $n = 1$, se mai scrie $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$. (*I. C.*)

convoluția măsurilor Radon Fie X, Y, Z trei spații Banach și G un grup local compact separat. Vom considera și o aplicație biliniară continuă definită pe $X \times Y$ cu valori în Z, notată astfel: dacă x este în X şi y în Y, atunci valoarea aplicaţiei în $(x, y) \in X \times Y$ este $xy \in Z$. Se presupune că $\| xy \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$ pentru orice (x, y) în $X \times Y$. Dacă X, Y şi Z sînt corpul scalarilor Γ reali sau complecşi, aplicaţia de mai sus este înmulţirea obişnuită. Se mai consideră şi două măsuri Radon dominate (v. **măsură Radon vectorială**), anume $m: \mathcal{K}(G) \to X$, $n: \mathcal{K}(G) \to Y$ (unde $\mathcal{K}(G)$ este spaţiul funcţiilor numerice continue cu suport compact). Integrala folosită va fi integrala esenţială (v. **integrala superioară esenţială** (în raport cu o măsură Radon)). Vom spune că produsul de convoluţie al măsurilor m şi n există dacă pentru orice f din $\mathcal{K}(G)$, funcţia $h: G \times G \to \Gamma$ = corpul scalarilor, definită prin $h(x, y) = f(xy)$, este $|m| \otimes |n|$-integrabilă (v. **măsura Radon produs**). În acest caz, se constată că h este $m \otimes n$-integrabilă. Măsura Radon

$$u: \mathcal{K}(G) \to Z, \quad u(f) = \int h(x, y) \, \mathrm{d}(m \otimes n)(x, y)$$

se numeşte *convoluţia măsurilor m şi n* (sau *produsul de convoluţie al măsurilor m şi n*) şi se notează $m * n$. Se arată că u este dominată de măsura Radon pozitivă $v: \mathcal{K}(G) \to \Gamma$,

$$v(f) = \int h(x, y) \, \mathrm{d}(|m| \otimes |n|)(x, y),$$

deci $|m * n| \leqslant |m| * |n|$ (v. **măsură Radon vectorială**). În general, produsul de convoluţie a două măsuri Radon arbitrare nu există, dar dacă una din ele are suport compact (sau amîndouă sînt mărginite) această existenţă este garantată. (*I. C.*)

convoluţia unei măsuri Radon cu o funcţie Fie X, Y, Z spaţii Banach şi o aplicaţie biliniară $X \times Y \to Z$, notată prin $(x, y) \mapsto xy \in Z$, astfel încît $\| xy \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$ pentru orice $x \in X$ şi $y \in Y$. În particular, dacă $X = Y = Z = \Gamma$ = corpul scalarilor reali sau complecşi, aplicaţia biliniară $(x, y) \mapsto xy$ este înmulţirea obişnuită. Fie şi G un grup local compact separat. Vom considera o măsură dominată $m: \mathcal{K}(G) \to X$ (v. **măsură Radon vectorială**) şi $f: G \to Y$ o funcţie care este local integrabilă în raport cu măsura Haar μ invariantă la stînga pe G. Vom nota prin Δ funcţia modulară a lui G (v. **măsura (Radon) Haar.** Se pune problema existenţei convoluţiilor $m * n$ şi $n * m$, unde $n = f\mu$ (v. **măsură Radon definită prin densităţi**), ceea ce se realizează automat dacă m sau f au suport compact. Dacă mulţimea A a punctelor y din G astfel încît funcţia definită pe G prin $x \mapsto f(x^{-1}y)$ este m-integrabilă este o mulţime nevidă, atunci funcţia $m * f: A \to Z$ definită prin

$$(m * f)(y) = \int f(x^{-1}y) \, \mathrm{d}m(x)$$

se numeşte *convoluţia măsurii Radon m cu funcţia f* (sau *produsul de convoluţie al lui m cu f*). Dacă mulţimea B a punctelor y din G pentru care funcţia definită pe G prin $x \mapsto f(yx^{-1}) \Delta(x^{-1})$ este m-integrabilă este o mulţime nevidă, atunci funcţia $f * m: B \to Z$ definită prin

$$(f * m)(y) = \int f(yx^{-1}) \Delta(x^{-1}) \, \mathrm{d}m(x)$$

se numeşte *convoluţia funcţiei f cu măsura Radon m* (sau *produsul de convoluţie al lui f cu m*). De exemplu, cu notaţiile de la **măsura (Radon) Haar**, cu $\varepsilon_t * f = f_{t^{-1}}$ şi $f * \varepsilon_t = f^t \Delta(t^{-1})$ pentru orice t în G (aici ε_t este măsura lui Dirac concentrată în $t \in G$). Dacă m este mărginită (v. **măsură Radon**) şi f este o funcţie boreliană mărginită, rezultă că $m * f$ este definită peste tot. În particular, dacă m are suport compact şi f este o funcţie boreliană mărginită, rezultă că există şi măsurile $m * (f\mu)$ şi $(f\mu) * m$. Acum să presupunem că m este mărginită şi f este local μ-integrabilă. Presupunînd că măsura $m * (f\mu)$ există şi că funcţia definită pe $G \times G$ prin $(x, y) \mapsto f(x^{-1}y)$ este $|m| \otimes (f\mu)$-măsurabilă (în particular, aceasta se realizează dacă f este boreliană), rezultă că funcţia $x \mapsto f(x^{-1}y)$ este m-integrabilă pentru μ-aproape orice y din G. Atunci funcţia definită μ-a.p.t. cu valori în Z prin $(m * f)(y) = \int f(x^{-1}y) \, \mathrm{d}m(x)$ este local μ-integrabilă şi avem relaţia $m * (f\mu) = (m * f)\mu$. Similar, dacă măsura $(f\mu) * m$ există şi funcţia definită pe $G \times G$ prin $(x, y) \mapsto f(yx^{-1})$ este $(f\mu) \otimes |m|$-măsurabilă (în particular, aceasta se realizează dacă f este boreliană), rezultă că funcţia $x \mapsto f(yx^{-1}) \Delta(x^{-1})$ este m-integrabilă pentru μ-aproape orice y din G. Atunci funcţia definită μ-a.p.t. cu valori în Z prin

$$(f * m)(y) = \int f(yx^{-1}) \Delta(x^{-1}) \, \mathrm{d}m(x)$$

este local μ-integrabilă şi avem relaţia $(f\mu) * m = (f * m)\mu$. Să remarcăm că dacă m este mărginită şi $f \in \mathcal{L}^p_Y(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, atunci convoluţiile $m * (f\mu)$ şi $(f\mu) * m$ există. Dacă, în plus, funcţia definită pe $G \times G$ cu valori în Y prin $(x, y) \mapsto f(x^{-1}y)$ (resp. $(x, y) \mapsto f(yx^{-1})$ este $|m| \otimes \mu$-măsurabilă, atunci $m * f$ (resp. $f * m$) este definită μ-a.p.t., avem $m * f \in \mathcal{L}^p_Z(\mu)$ (resp. $f * m \in \mathcal{L}^p_Z(\mu)$) şi subzistă formula $m * (f\mu) = (m * f)\mu$ (resp. $(f\mu) * m = (f * m)\mu$). Dacă m este mărginită şi f este continuă şi mărginită, atunci $m * f$ este continuă şi mărginită. Dacă, în plus, G este unimodular sau m are suport compact, atunci $f * m$ este continuă şi mărginită. În general, suportul lui $m * f$ (resp. $f * m$) este inclus în $\overline{\mathrm{supp}\,(m) \cdot \mathrm{supp}\,(f)}$ (resp. în $\overline{\mathrm{supp}\,(f) \cdot \mathrm{supp}\,(m)}$). Am notat $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ pentru orice A şi B incluse în G, iar $\overline{AB}$ este **aderenţa lui** AB. (*I. C.*)

coomologia fascicolelor Prin fascicol vom înţelege aici un fascicol de grupuri abeline. Fie X un spaţiu topologic; notăm prin $\mathbf{Ab}(X)$ categoria fascicolelor pe X. Considerăm functorul $\Gamma_X: \mathbf{Ab}(X) \to \mathbf{Ab}$ definit prin $\Gamma_X(\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$ şi $\Gamma_X(\theta) := \theta_X$ pentru orice facsicol $\mathcal{F}$ pe X şi orice morfism θ din $\mathbf{Ab}(X)$. Acest functor este *exact la stînga, i.e.* şirul de grupuri abeliene $0 \to \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{F}''(X)$ este exact oricare ar fi şirul exact de fascicole $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \to 0$. În general Γ_X nu este un functor exact, *i.e.* aplicaţia β_X nu este surjectivă pentru X şi $\mathcal{F}'$ arbitrari. Un contraexemplu este furnizat de planul complex puncturat $X = \mathbb{C}^* (= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ şi şirul exact de fascicole $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^* \to 1$, unde, pentru orice mulţime deschisă U în $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Z}(U)$ este grupul tuturor aplicaţiilor local constante de la U în $\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}(U)$ este grupul aditiv al tuturor funcţiilor olomorfe pe U, $\mathcal{O}^*(U)$ grupul multiplicativ al funcţiilor olomorfe şi fără zerouri pe U, α_U aplicaţia de incluziune şi β_U aplicaţia $\mathcal{O}(U) \ni f \mapsto e^{2\pi i f} \in \mathcal{O}^*(U)$. **C.f.** investighează acest fenomen cu ajutorul unor **invarianţi** care controlează abaterea de la exactitate a functorului Γ_X. Aceşti **invarianţi** sînt grupurile de coomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ ale spaţiului topologic X cu coeficienţi în fascicolul $\mathcal{F}$, $q \geqslant 0$. Teoriile clasice de coomologie tratează **situaţii** specifice (coomologie singulară, coomologie Alexander, coomologie de Rham) sau sînt aplicabile numai în cazul X paracompact (coomologie Čech).

Definiția generală a fost obținută abia în 1955 în mod independent de A. Grothendieck și R. Godement. În teoria lui Grothendieck grupurile de coomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ sînt interpretate în contextul mai general al teoriei functorilor derivați în categorii abeliene. Pe de altă parte definiția lui Godement este neașteptat de simplă și naturală. Ambele definiții folosesc pentru construcția grupurilor $H^q(X, \mathcal{F})$ anumite rezoluții ale lui $\mathcal{F}$. Se numește *rezoluție* a fascicolului $\mathcal{F}$ orice șir exact de fascicole și morfisme de fascicole de forma

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d^1} \dots \to \mathcal{L}^q \xrightarrow{d^q} \dots$$

În cele ce urmează vom prezenta definiția lui Godement, care utilizează așa-numita rezoluție canonică. Se numește *fascicol flasc* pe X orice fascicol $\mathcal{L}$ avînd proprietatea că aplicația de restricție $\rho_U^X : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(U)$ este surjectivă pentru orice mulțime deschisă U a lui X. De exemplu, dacă topologia lui X este discretă, atunci orice fascicol pe X este flasc. Important este însă faptul că, pentru X arbitrar, orice fascicol poate fi scufundat într-un fascicol flasc; mai precis, există un fascicol flasc $\widetilde{\mathcal{F}}$ și un monomorfism de fascicole $\varepsilon : \mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}$, canonic asociate lui $\mathcal{F}$. Anume, pentru orice submulțime deschisă U a lui X, $\widetilde{\mathcal{F}}(U) := \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$, unde $\mathcal{F}_x$ este fibra lui $\mathcal{F}$ în punctul x (aplicațiile de restricție ρ_V^U ale lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ fiind proiecțiile canonice evidente) iar ε_U este aplicația $\mathcal{F}(U) \ni s \mapsto \{s_x\}_{x \in U} \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$, unde s_x este germenul definit de secțiunea s în punctul x. *Rezoluția canonică* a lui Godement se construiește acum inductiv după cum urmează: se pune mai întîi $\mathcal{L}^0 := \widetilde{\mathcal{F}}$, fascicolul flasc asociat lui $\mathcal{F}$, și $\varepsilon : \mathcal{F} \to \mathcal{L}^0$ monomorfismul canonic. Apoi, dacă fascicolele $\mathcal{L}^0, \dots, \mathcal{L}^q$ și morfismele $\varepsilon, d^0, \dots, d^{q-1}$ au fost deja construite, se pune $\mathcal{F}^q := \operatorname{Coker} d^{q-1}$, $\mathcal{L}^{q+1} := \widetilde{\mathcal{F}}^q$ și $d^q := \varepsilon^q \cdot \pi^q$, unde $\pi^q : \mathcal{L}^q \to \mathcal{F}^q$ și $\varepsilon^q : \mathcal{F}^q \to \mathcal{L}^{q+1}$ sînt morfisme canonice. Notăm că rezoluția canonică a lui $\mathcal{F}$ este o *rezoluție flască*, *i.e.* toate fascicolele $\mathcal{L}^q$ sînt flasce, $q \geqslant 0$. *Grupurile de coomologie* ale lui X cu coeficienți în fascicolul $\mathcal{F}$ se definesc prin $H^q(X, \mathcal{F}) := \operatorname{Ker} d_X^q / \operatorname{Im} d_X^{q-1}$, unde

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \dots \to \mathcal{L}^q \xrightarrow{d^q} \dots$$

este rezoluția canonică a lui $\mathcal{F}$ și $d^{-1} := 0$.
Teoremă. 1) Dacă $\varphi : X \to Y$ este un omeomorfism, atunci $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(Y, \varphi_* \mathcal{F})$, $q \geqslant 0$, unde $\varphi_* \mathcal{F}$ este imaginea directă a lui $\mathcal{F}$ prin φ (deci grupurile de coomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ sînt invariați ai perechii $(X, \mathcal{F})$); 2) Acocierea $\mathbf{Ab}(X) \ni \mathcal{F} \mapsto H^q(X, \mathcal{F}) \in \mathbf{Ab}$ este un functor aditiv pentru orice $q \geqslant 0$; 3) $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$; 4) Pentru orice șir exact $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ de fascicole pe X avem un șir lung exact

$$0 \to \mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X) \xrightarrow{\partial^1} H^1(X, \mathcal{F}') \to H^1(X, \mathcal{F}) \to$$
$$\to H^1(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\partial^2} H^2(X, \mathcal{F}') \to \dots$$

care depinde functorial de șirul exact $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to 0$; 5) $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pentru $q \geqslant 1$ dacă $\mathcal{F}$ este un fascicol flasc.
O problemă importantă în teoria **c.f.** este găsirea, în diverse situații, de procedee de calcul ale grupurilor de coomologie. Unul din aceste procedee constă în utilizarea de rezoluții aciclice. Un fascicol $\mathcal{L}$ se numește *aciclic* cînd $H^q(X, \mathcal{L}) = 0$ pentru $q \geqslant 1$; de exemplu, fascicolele flasce sînt aciclice. O rezoluție

a lui $\mathcal{F}$ se spune că este aciclică dacă fascicolele $\mathcal{L}^q$, $q \geqslant 0$, care intervin în această rezoluție sînt toate aciclice.
Teorema lui de Rham abstractă. Dacă

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \dots \to \mathcal{L}^q \xrightarrow{d^q} \dots$$

este o rezoluție aciclică a lui $\mathcal{F}$, atunci există izomorfisme naturale $H^q(X, \mathcal{F}) \simeq \operatorname{Ker} d_X^q / \operatorname{Im} d_X^{q-1}$.
În cazul X paracompact există o clasă importantă de fascicole aciclice, și anume fascicolele moi. Se numește *fascicol moale* (sau *leneș*) pe spațiul paracompact X orice fascicol $\mathcal{F}$ pe X avînd proprietatea că, pentru orice submulțime închisă A a lui X, aplicația de restricție $\rho_A^X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(A)$ este surjectivă, unde

$$\mathcal{F}(A) := \varinjlim_{U \supset A} \mathcal{F}(U) \quad \text{și} \quad \rho_A^X := \varinjlim_{U \supset A} \rho_U^X.$$

Aceasta înseamnă că, pentru orice vecinătate deschisă U a lui A în X și orice secțiune $s \in \mathcal{F}(U)$, există o secțiune $t \in \mathcal{F}(X)$ astfel încît $t_x = s_x$ cînd $x \in A$. Evident orice fascicol flasc pe spațiul paracompact X este un fascicol moale. Ca aplicații ale teoremei lui de Rham abstracte se pot obține două teoreme de importanță fundamentală în matematica modernă: *teorema lui de Rham* (v. **formă diferențială** (pe o varietate diferențiabilă)) și *teorema lui Dolbeault* (v. **formă diferențială** (pe o varietate complexă)). (*M. J.*)

corp Banach, algebră Banach care este și un corp. Dacă X este o algebră Banach complexă comutativă unitară și dacă X este un corp, atunci X este izomorfă cu algebra numerelor complexe (*teorema Gelfand-Mazur*). Dacă într-o algebră Banach complexă unitară X, norma satisface condiția $\| xy \| = \| x \| \cdot \| y \|$ oricare ar fi elementele x, y, atunci X este un **c.B.** (*R. C.*)

corp borelian v. **clasă de mulțimi**

corp ordonat arhimedian v. **corpul numerelor reale**

corp valuat v. **valoarea absolută, corpul numerelor reale**

corp topologic v. **corpul numerelor reale**

corpul numerelor complexe, un corp comutativ C satisfăcînd condițiile următoare: 1) Corpul numerelor reale $\mathbb{R}$ este un subcorp al lui C; 2) Ecuația $z^2 + 1 = 0$ are rădăcini în C; 3) Pentru orice corp C' cu proprietățile 1) și 2), există un unic morfism de corpuri $\varphi : C \to C'$ care lasă fixe numerele reale.
Teorema de unicitate. Dacă C și C' sînt două corpuri ale numerelor complexe, atunci există un unic izomorfism $\theta : C \to C'$ care lasă fixe numerele reale. (Rezultă imediat din condiția 3)).
Teorema de existență. Există un corp al numerelor complexe. Ex.: Există diverse modele „naturale" pentru **c.n.c.** Un model este corpul $C := \mathbb{R}[x] / (1 + x^2)$, unde $\mathbb{R}[x]$ este inelul polinoamelor în nedeterminata x și cu coeficienți numere reale, iar $(1 + x^2)$ idealul generat în acest inel de polinomul $1 + x^2$. Un alt model este corpul C' al tuturor matricilor de forma

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

cu operațiile de adunare și înmulțire de matrici în sens uzual. În cele ce urmează, vom descrie modelul geometric, utilizat în mod curent în geometrie și analiză. Considerăm planul numeric real $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Elementele lui $\mathbb{R}^2$.

pe care le numim vectori, sînt perechile ordonate $z = (x, y)$ de numere reale x, y. Operațiile vectoriale în $\mathbb{R}^2$ se definesc prin egalitățile:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \text{ pentru } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } (x', y') \in \mathbb{R}^2;$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \text{ pentru } \lambda \in \mathbb{R} \text{ și } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vom defini acum o a treia operație în $\mathbb{R}^2$, anume înmulțirea complexă:

$$(x, y)\,(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y), \text{ pentru } (x, y) \text{ și } (x', y') \in \mathbb{R}^2.$$

În particular, pentru orice număr real λ și orice pereche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avem $\lambda(x, y) = (\lambda, 0)(x, y)$, *i.e.* înmulțirea scalară în $\mathbb{R}^2$ este un caz particular de înmulțire complexă. Este imediat faptul că $\mathbb{R}^2$ împreună cu operațiile de adunare vectorială și înmulțire complexă definite mai sus este un corp. Acest corp va fi notat prin $\mathbb{C}$ și va fi numit c.n.c.; elementele acestui corp sînt deci *numerele complexe*. Pentru a justifica axiomatic această definiție, să observăm mai întîi că aplicația injectivă $j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin $j(x) = (x, 0)$, este un morfism de corpuri. Se convine atunci să se identifice numărul real x cu numărul complex $j(x)$; cu această identificare $\mathbb{R}$ apare ca subcorp al lui $\mathbb{C}$. Apoi, dacă se notează prin i numărul complex $(0, 1)$, numit *unitatea imaginară*, se verifică ușor că $i^2 + 1 = 0$, deci ecuația $z^2 + 1 = 0$ are rădăcini în $\mathbb{C}$, și anume $z = \pm i$. În fine, este ușor de văzut că $\mathbb{C}$ verifică și condiția universală 3), deci $\mathbb{C}$ este într-adevăr un corp al numerelor complexe în accepție axiomatică. *Teorema fundamentală a algebrei.* Pentru orice polinom

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

de grad $n \geqslant 1$ și cu coeficienți în $\mathbb{C}$, ecuația $P(z) = 0$ are cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C}$ (și deci exact n rădăcini).
Deoarece orice număr real x este identificat cu numărul complex $j(x) = (x, 0)$, se vede că orice număr complex $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ admite scrierea unică: $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Pentru orice număr complex $z = (x, y) = x + iy$, x se numește *partea reală* a lui z, iar y *partea imaginară* a lui z; se notează:

$$\text{Re } z : = x \text{ și Im } z : = y \text{ (sau, respectiv, re } z \text{ și im } z).$$

Numărul complex z se numește *pur real* (sau, simplu, *număr real*) cînd Im $z = 0$ și *pur imaginar* cînd Re $z = 0$. Pentru orice număr complex $z = x + iy$, *conjugatul* lui z este numărul complex $\bar{z} : = x - iy$. *Conjugarea complexă* este aplicația $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $c(z) : = \bar{z}$. Este clar că aplicația c este un endomorfism al corpului $\mathbb{C}$, *i.e.* : $c(z + z') = c(z) + c(z')$, $c(zz') = c(z)\,c(z')$, $z, z' \in \mathbb{C}$; $c(1) = 1$. În plus, $c \circ c = \mathrm{id}$, deci c este o aplicație bijectivă și $c^{-1} = c$; c este deci o aplicație involutivă. De asemenea, $c(z) = z$ dacă și numai dacă z este real. În particular, c lasă fixe punctele reale și, cu excepția identității lui $\mathbb{C}$, este singurul endomorfism al lui $\mathbb{C}$ cu această proprietate. Pentru orice număr complex $z = x + iy$, *modulul* lui z (sau *valoarea absolută*, sau *norma euclidiană*) a lui z este numărul real pozitiv z definit prin egalitatea : $|z|^2 : = z\bar{z} = x^2 + y^2$. Avem: $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$; $|zz'| = |z|\,|z'|$ și $|1| = 1$. În particular, $|z| \geqslant 0$ pentru orice z. Astfel $\mathbb{C}$ este un corp valuat (cu norma euclidiană), în particular un corp topologic; acest corp topologic este conex, local conex, local compact și cu bază numărabilă. Corpul valuat $\mathbb{C}$ este deci planul numeric real $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu înmulțirea complexă și cu norma euclidiană, deci esențial același lucru cu *planul euclidian înzestrat cu înmulțirea complexă*; termenul curent folosit pentru această noțiune este acela de *plan complex*. Pentru z pur real, norma

euclidiană a numărului complex z coincide cu norma euclidiană a numărului real z, *i.e.* $\mathbb{R}$ este un subcorp valuat al corpului valuat $\mathbb{C}$. Structura de corp valuat a lui $\mathbb{C}$ este semnificativă în analiză și permite definirea unor noțiuni importante: spațiu normat complex, spațiu Banach complex, spațiu Hilbert complex etc. (*M. J.*)

corpul numerelor reale Prin corp se va înțelege un corp comutativ. Definiția axiomatică a c.n.r., datorată lui Hilbert, consideră c.n.r. drept un corp ordonat satisfăcînd o condiție suplimentară de completitudine. Un *corp ordonat* este un corp K în care este dată o mulțime P de elemente din K, satisfăcînd axiomele următoare: a) $0 \notin P$; b) Dacă $x \in K$ și $x \neq 0$, atunci $x \in P$ sau $-x \in P$; c) Dacă $x, y \in P$, atunci $x + y \in P$ și $xy \in P$. Corpul numerelor raționale $\mathbb{Q}$, împreună cu $P : = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, este un corp ordonat. Fie K un corp ordonat și P mulțimea elementelor sale strict pozitive. Se scrie $x < y$ sau $y > x$ cînd $y - x \in P$, și $x \leqslant y$ sau $y \geqslant x$ cînd $x < y$ sau $x = y$. Relația „$\leqslant$" este o relație de ordine totală în K. Se spune că un element $x \in K$ este *strict negativ* cînd $x < 0$ (sau, echivalent, $-x > 0$). Se spune că elementul $x \in K$ este *pozitiv* cînd $x \geqslant 0$ și *negativ* cînd $x \leqslant 0$. Corpul ordonat K se numește *arhimedian* dacă pentru orice cuplu de elemente $x, y \in P$, există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $nx > y$. Ex.: Corpul ordonat $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale este arhimedian. Prin *morfism de corpuri ordonate* de la corpul ordonat K la corpul ordonat K' se înțelege o aplicație $\varphi : K \to K'$ astfel încît: a) φ este crescătoare; b) φ este morfism de corpuri, *i.e.* $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $\varphi(1) = 1$. Morfismul de corpuri ordonate φ se numește *izomorfism de corpuri ordonate* dacă φ este o aplicație bijectivă. Prin definiție (Hilbert), un *corp al numerelor reale* este un corp ordonat complet, *i.e.* un corp ordonat R cu proprietatea că orice mulțime nevidă majorată în R are margine superioară. Menționăm că orice corp al numerelor reale este un corp arhimedian. *Teoremă.* 1) Există un corp al numerelor reale; 2) Dacă R și R' sînt două corpuri ale numerelor reale, există un unic izomorfism de corpuri ordonate $\varphi : R \to R'$.

Teorema de existență trebuie înțeleasă în sensul următor: Există un corp al numerelor reale în ipoteza că există o mulțime a numerelor naturale, *i.e.* o mulțime $\mathbb{N}$ satisfăcînd axiomele lui Peano. Cum reciproca este imediată, rezultă că existența unui corp al numerelor reale este echivalentă cu existența mulțimii numerelor naturale sau, în alți termeni, axiomele numerelor reale conținute în definiția lui Hilbert sînt echivalente cu axiomele lui Peano. Pe de altă parte, pentru existența mulțimii $\mathbb{N}$ a numerelor naturale se face apel la așa-numita „axiomă a infinitului" care este una din ipotezele tulburătoare ale matematicii. Demonstrația teoremei de existență constă în construirea unui model concret pentru c.n.r. Modelul pe care-l propunem aici este o variantă a celui clasic al lui Dedekind și a fost sugerat, printre alții, de Littlewood. Deoarece se presupune că există o mulțime $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, există de asemenea un corp $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale; trecerea de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{Q}$ se face prin operații simple de algebră elementară. Fie $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ mulțimea părților lui $\mathbb{Q}$ și fie $\mathbb{R}$ mulțimea tuturor elementelor $x \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ satisfăcînd condițiile următoare: a) x este o mulțime nevidă și majorată; b) x nu are un cel mai mare element; c) Dacă $r \in x$, $r' \in \mathbb{Q}$ și $r' \leqslant r$, atunci $r' \in x$. Mulțimea $\mathbb{R}$ se ordonează prin relația de ordine a lui $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, *i.e.* prin incluziune de mulțimi. Aplicația $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definită, pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, prin egalitatea $j(r) = \{\rho \in \mathbb{Q} \mid \rho < r\}$ este injectivă și crescătoare. Vom defini acum două legi de compoziție în $\mathbb{R}$, o adunare și o înmulțire. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, *suma* $x + y$ se definește prin egalitatea $x + y : = \{r + r' \mid r \in x, r' \in y\}$. Notăm că opusul $-x$ al unui element x din $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea precedentă se calculează prin $-x = j(-r)$ cînd $x = j(r)$ pentru un $r \in \mathbb{Q}$ și prin $-x = \{r \in \mathbb{Q} \mid r + r' < 0$ pentru $\forall r' \in x\}$ cînd $x \notin j(\mathbb{Q})$. *Produsul* xy a două elemente $x, y \in \mathbb{R}$ se definește în mai multe etape. Dacă unul cel puțin din elementele x și y este egal cu $j(0)$, se pune $xy = 0$. Dacă $x > j(0)$ și $y > j(0)$, se pune

$$xy := \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant 0 \text{ sau există } r' \in x \text{ și } r'' \in y \text{ astfel încît } r' > 0,\ r'' > 0 \text{ și } r'r'' = r\}.$$

Dacă $x < j(0)$ și $y > j(0)$ se pune $xy := -(-x)y$. Dacă $x > j(0)$ și $y < j(0)$ se pune $xy := -x(-y)$. În fine, dacă $x < j(0)$ și $y < j(0)$ se pune $xy := (-x)(-y)$. Corpul $\mathbb{R}$ înzestrat cu adunarea și înmulțirea definite mai sus este un corp al numerelor reale, *i.e.* satisface axiomele lui Hilbert. Vom conveni să considerăm acest corp $\mathbb{R}$ drept **c.n.r.**; elementele lui $\mathbb{R}$ le vom numi *numere reale*. Aplicația $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definită mai sus este un morfism injectiv de corpuri ordonate, *i.e.* induce un izomorfism de corpuri ordonate între corpul $\mathbb{Q}$ și un subcorp ordonat $j(\mathbb{Q})$ al lui $\mathbb{R}$. Pentru orice $r \in \mathbb{Q}$ se convine să se identifice numărul rațional r cu numărul real $j(r)$, *i.e.* să se considere corpul ordonat $\mathbb{Q}$ drept un subcorp ordonat al lui $\mathbb{R}$. Pentru orice număr real x, *modulul* (sau *valoarea absolută* sau *norma euclidiană*) a lui x este numărul real pozitiv x definit prin $|x| := \max(x, -x)$. Avem proprietățile următoare: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; $|xy| = |x|\,|y|$; $|1| = 1$. Astfel $\mathbb{R}$ este un corp valuat (cu valoarea absolută euclidiană), în particular un corp topologic; acest corp topologic este conex, local conex, local compact și cu bază numărabilă. Considerat ca spațiu topologic și ca mulțime ordonată $\mathbb{R}$ se numește *dreapta reală* (sau *dreapta numerică reală*). Obs. O construcție alternativă a **c.n.r.**, datorată lui G. Cantor, se obține folosind șiruri Cauchy de numere raționale. Un șir $\{r_\nu\}_\nu$ de numere raționale se numește *șir Cauchy* dacă, pentru orice număr rațional $\varepsilon > 0$, există $\nu_0 \in \mathbb{N}$, astfel încît $|r_\nu - r_{\nu'}| < \varepsilon$ cînd $\nu, \nu' \geqslant \nu_0$. Două astfel de șiruri Cauchy $\{r_\nu\}_\nu$ și $\{r'_\nu\}_\nu$ se numesc *echivalente* dacă șirul $\{r_\nu - r'_\nu\}_\nu$ converge la 0, *i.e.* pentru orice număr rațional $\varepsilon > 0$, există $\nu_0 \in \mathbb{N}$, astfel încît $|r_\nu - r'_\nu| < \varepsilon$ cînd $\nu \geqslant \nu_0$. Mulțimea tuturor claselor de echivalență de șiruri Cauchy de numere raționale are o structură evidentă de corp ordonat complet, deci canonic izomorf cu **c.n.r.** (*M. J.*).

corpul R* din analiza nonstandard Fie $R(\mathbb{N})$ inelul aplicațiilor lui $\mathbb{N}$ în $\mathbb{R}$. Submulțimea $F(\mathbb{N})$ a lui $R(\mathbb{N})$ a aplicațiilor cu suport finit (*i.e.* nule pe complementara unei mulțimi finite) formează un ideal în $R(\mathbb{N})$. Conform lemei lui Zorn, există în $R(\mathbb{N})$ un ideal maximal M care conține pe $F(\mathbb{N})$. Factorizarea lui $R(\mathbb{N})$ prin M conduce la corpul $\mathbf{R}^*$ nearhimedian și necomplet, care conține strict pe $\mathbb{R}$. Trecerea de la $\mathbb{R}$ la $\mathbf{R}^*$ este similară trecerii de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$. Într-adevăr, un număr din $\mathbf{R}^*$ este o clasă de șiruri echivalente de numere reale, două șiruri fiind echivalente dacă diferă printr-un șir din idealul maximal M (v. **numere și funcții în analiza nonstandard**). (*S. M.*)

corpul scalarilor v. **spațiu liniar**

criteriul de comutativitate al lui Schwarz v. **diferențiala funcțiilor numerice**

criteriul de comutativitate al lui Young v. **diferențiala funcțiilor numerice**

criteriul de semiconvergență al lui Abel (în cazul seriilor) Fiind date șirurile de numere complexe $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$ și $\{v_n\}_{n \geqslant 0}$, fie $u'_n := u_{n+1} - u_n$ și $V_n := v_0 + \ldots + v_n$ pentru $n \geqslant 0$. Presupunem că sînt verificate condițiile următoare: 1) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$; 2) $\sum\limits_{n \geqslant 0} |u'_n| < \infty$; 3) Șirul $\{V_n\}_{n \geqslant 0}$ este mărginit.

Atunci seria $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n v_n$ este convergentă (în general, numai semiconvergentă) și are loc egalitatea $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n v_n = -\sum\limits_{n \geqslant 0} u'_n V_n$, în particular inegalitatea

$$\Big|\sum_{n \geqslant 0} u_n v_n\Big| \leqslant M \sum_{n \geqslant 0} |u'_n|, \text{ unde } M := \sup_{n \geqslant 0} |V_n|.$$

Ex.: Considerăm seria $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ Dacă punem $u_n = \frac{1}{n}$ și $v_n = (-1)^{n-1}$, se vede că sînt verificate condițiile criteriului lui Abel, deci seria $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ este convergentă. (*M. J.*)

criteriul de semiconvergență al lui Abel (pentru integrale improprii) Fie $I = [a, b)$, unde $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, și fie u și v două funcții complexe pe I astfel încît: 1) $\lim\limits_{I \ni x \to b} u(x) = 0$; 2) $u \in C^1(I)$ și derivata u' a lui u este o funcție (absolut) integrabilă pe I; 3) Funcția v este continuă și cu primitivă mărginită pe I. Atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$ este convergentă și are loc identitatea

$$\int_a^{b-0} u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = -\int_a^b u'(x)\, V(x)\, \mathrm{d}x,$$

unde $V(x) := \int_a^x v(t)\, dt$, $x \in I$, în particular inegalitatea

$$\left|\int_a^{b-0} u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant M \int_a^b |u'(x)|\, \mathrm{d}x, \text{ unde } M := \sup_{x \in I} |V(x)|.$$

Ex.: Considerăm integrala improprie $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$, unde funcția $\frac{\sin x}{x}$ se consideră egală cu 1 în punctul $x = 0$. Este suficient să stabilim convergența integralei pe mulțimea $I = [1, \infty)$. Dar în acest interval sînt îndeplinite condițiile teoremei precedente pentru $u(x) = \frac{1}{x}$ și $v(x) = \sin x$. Astfel integrala improprie $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ este convergentă, deci la fel este integrala improprie $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$. (*M.J.*)

criteriul lui Cauchy de existență a limitei v. **șir numeric**

cub (centrat într-un punct) v. **derivarea măsurilor**

curbă (în $\mathbb{R}^n$), o clasă de drumuri în $\mathbb{R}^n$ echivalente. **C.** este simplă, închisă, respectiv rectificabilă, după cum drumurile din ea sînt simple, închise, respectiv rectificabile. (*S.M.*)

curbă bicaracteristică *Ecuația Hamilton-Jacobi și integrarea sa.* Fie $p = p(x, \xi)$ o funcție definită pe fibratul cotangent $T^*(\mathbb{R}^n)$,

$$H_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

cîmpul hamiltonian de vectori asociat lui p. Ecuațiile care definesc curbele integrale ale lui H_p,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial p(x, \xi)}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}(x, \xi), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

se numesc *ecuațiile lui Hamilton.* Funcția p este constantă pe aceste curbe, situate în fibratul cotangent și în caz că se anulează pe o astfel de curbă, aceasta se va numi *bicaracteristică* (sau *bandă bicaracteristică*). Proiecția unei bicaracteristici pe bază se numește **c.b.** O bicaracteristică apare deci ca o aplicație $C^\infty: I \to T^*(\mathbb{R}^n)$, I fiind un interval de pe dreapta reală. Soluțiile ecuațiilor lui Hamilton care nu se pot prelungi în afara intervalului I se numesc *bicaracteristici maximale*, iar proiecțiile lor **c.b.** *maximale. Ecuația caracteristică* (denumită și *ecuația Hamilton-Jacobi*) este ecuația $p(x, \operatorname{grad} \varphi(x)) = 0$, iar suprafața $\varphi(x) = c$ este caracteristică în punctul x dacă funcția φ verifică ecuația caracteristică în acel punct. Sub formă analitică, teorema de existență a soluțiilor ecuației Hamilton-Jacobi este următoarea: Dacă $p(0, \eta) = 0$, unde $(0, \eta)$ este un vector cotangent iar $\dfrac{\partial p(0, \eta)}{\partial \eta_n} \neq 0$ și dacă ψ este o funcție indefinit derivabilă în $\mathbb{R}^{n-1}$ astfel ca $\dfrac{\partial \psi(0)}{\partial x_i} = \eta_i$, $i < n$, atunci există o vecinătate a originii în $\mathbb{R}^n$ și o soluție unică φ (deci $p(x, \operatorname{grad} \varphi(x)) = 0$ în această vecinătate) verificînd condițiile inițiale

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} = \eta.$$

Sub formă geometrică acest enunț revine la faptul că dacă o subvarietate S_0 de dimensiune $n - 1$ din fibratul cotangent nu este tangentă la H_p în nici un punct al său, dacă p se anulează pe S_0 și dacă forma $\sigma = \sum_j d\xi_j \wedge dx_j$ restrînsă la S_0 nu este nulă, atunci reuniunea bicaracteristicilor lui p ce pleacă din S_0 generează o suprafață n-dimensională caracteristică în fiecare punct. În teoria ecuațiilor cu derivate parțiale această teoremă se aplică funcțiilor $p(x, \xi)$ ce sînt simboluri principale de operatori diferențiali (sau pseudodiferențiali). Forma σ se numește *forma simplectică* (sau *2-forma fundamentală*). Aceleași definiții și rezultate se obțin atunci cînd se consideră funcția p definită pe $T^*(X)$, X fiind o varietate diferențiabilă; cîmpul hamiltonian H_p se definește invariant prin:

$$\langle t, dp \rangle = \sigma(t, H_p) \text{ pentru orice } t \in T(T^*(X)). \quad (G.\,G.)$$

curbă eliptică v. **latice de perioade, funcție modulară**

curbă integrală v. **fibratul tangent**

curentul definit de un sistem de ecuații diferențiale, aplicația care asociază punctului inițial (t_0, x_0) și argumentului t, valoarea în t a soluției determinate de condițiile inițiale considerate. Pentru sisteme de forma $x' = f(x)$ curentul x are proprietatea că $x(t; t_0, x_0) = y(t - t_0, x_0)$ și y definește un grup de transformări cu un parametru $y(t, x_0) = T_t(x_0)$, $T_t(T_s(x_0)) = T_{t+s}(x_0)$, $T_0(x_0) = x_0$ pentru orice x_0. *(A. H.)*

cuvînt v. **monoid**

cvasiintegrala unei funcții (în raport cu o măsură Radon) v. **integrala superioară și integrala inferioară** (în raport cu o măsură Radon)

cvasinormă, funcțională reală q definită pe un spațiu liniar X, satisfăcînd condițiile: $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$; $q(-x) = q(x)$. Dacă q este o **c.** pe spațiul liniar X, atunci formula $d(x, y) = q(x - y)$ definește în X o distanță invariantă la translație (*i.e.* $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, $\forall x, y, z \in X$). Ea se numește *distanța asociată* **c.** q. Reciproc, dacă d este o distanță invariantă la translație într-un spațiu liniar X, atunci formula $q(x) = d(x, 0)$ definește o **c.** pe spațiul X. Prin *topologia definită de o* **c.** se înțelege topologia definită de distanța asociată **c.** Această topologie nu este întotdeauna o topologie liniară. De exemplu, considerînd spațiul liniar $C(\mathbb{R})$ al funcțiilor reale continue definite pe dreapta reală, formula

$$q(x) = \sup \{ \, | x(t) | \, (1 + | x(t) |)^{-1} \mid t \in \mathbb{R} \}, \quad x \in C(\mathbb{R})$$

definește o **c.** pe $C(\mathbb{R})$ dar topologia dată de această **c.** nu este liniară. *(R. C.)*

cvasivariația unei măsuri v. **variație; semivariație; cvasivariație**

D

densitate a unei mulțimi într-un punct v. **punct Lebesgue al unei funcții**

densitate de distribuție v. **măsură gaussiană**

densitate de repartiție v. **măsură gaussiană**

densitatea unei măsuri Radon vectoriale (în raport cu o măsură Radon pozitivă) v. **măsură Radon vectorială**

dependență funcțională Fie E o mulțime nevidă și $u: E \to \mathbb{R}$ o funcție. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_m: E \to \mathbb{R}$ alte m funcții, $m \geqslant 1$. Vom spune că *u depinde de funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ pe o submulțime nevidă $A \subset E$* dacă există o mulțime $B \subset \mathbb{R}^m$ astfel încît $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \in B$ pentru orice $x \in A$ și există o funcție $U: B \to \mathbb{R}$ astfel încît $u(x) = U(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ pentru orice x din A. Ex.: 1° Fie E o mulțime nevidă și fie $u: E \to \mathbb{R}$ o funcție oarecare. Vom considera o funcție injectivă oarecare $f: E \to \mathbb{R}$. Atunci u depinde de f pe E. 2° Fie $f, g, h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x, y, z) = x + y + z$ și $h(x, y, z) = yz + zx + xy$. Atunci f depinde de g și h pe $\mathbb{R}^3$, h depinde de f și g pe $\mathbb{R}^3$, dar g nu depinde de f și h pe $\mathbb{R}^3$. Revenim la cazul general și considerăm o mulțime nevidă E, precum și m funcții $f_1, f_2, \ldots, f_m: E \to \mathbb{R}$, $m \geqslant 1$. Se spune că $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt în **d.f.** pe o mulțime nevidă $A \subset E$ dacă cel puțin una din ele depinde de celelalte pe mulțimea A. Dacă E este un spațiu topologic, vom spune că funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt *independente* într-un punct a din E dacă pentru orice vecinătate V a lui a nici una din ele nu depinde de celelalte pe V. În același context, vom spune că $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt independente pe o mulțime $F \subset E$ dacă sînt independente în orice punct din F. Se arată că dacă $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt în **d.f.** pe o mulțime $A \subset E$, atunci mulțimea $\{(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^m$ nu are puncte interioare. Vom considera că E este o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, a este un punct interior al lui E, iar funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$: $E \to \mathbb{R}$ au derivate parțiale continue pe o vecinătate a lui a. Dacă rangul matricii $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ este exact m, atunci funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt independente în a. Dacă rangul matricii de mai sus este $r < m$, atunci există o vecinătate U a lui a astfel încît printre cele m funcții $f_1, f_2, \ldots, f_m$ să existe r funcții independente pe U, iar celelalte $m - r$ funcții să depindă de ele pe U. În particular, dacă $m > n$, funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ nu pot fi independente în nici un punct. (*I.C.*)

derivare în algebra $C^k_{M;a}$ v. **spațiu tangent**

derivare numerică, capitol al analizei numerice care se ocupă cu aproximarea derivatei funcțiilor numerice. Cel mai utilizat procedeu este aproximarea derivatei f' prin derivata unui polinom de interpolare. Derivînd oricare din formulele de reprezentare a polinomului de interpolare se obține o formulă de **d.n.** Pentru evaluarea erorii se folosesc rezultatele de la interpolare. Are loc, spre exemplu, următoarea teoremă: Fie

$$f: [a, b] \to \mathbb{R}, \quad (x_1 \ldots x_n) \in [a, b]^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dacă f este de clasă C^{n+k}, atunci pentru orice $x \in [a, b]$ și pentru orice $i \in \{0, \ldots, k\}$ există ξ_i în acoperirea convexă a mulțimii $\{x_1, \ldots, x_n, x\}$ astfel ca:

$$f^{(k)}(x) - P^{(k)}(f; x_1, \ldots, x_n; x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{i\,!}{(n + i)\,!} C_k^i f^{(n+i)}(\xi_i)\, \omega^{(k-i)}(x),$$

unde $\omega(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$. (*Gh.Gr.*)

derivarea funcțiilor monotone Dacă f este o funcție monotonă definită pe un interval $I \subset \mathbb{R}$, atunci f este derivabilă a.p.t. (*i.e.* mulțimea $\{x \in I \mid f$ nu este derivabilă în $x\}$ este neglijabilă în raport cu măsura Lebesgue pe I) (*teorema lui Lebesgue*). Se mai arată că funcția $g: I \to \overline{\mathbb{R}}$, dată prin $g(x) = f'(x)$ dacă f are derivată în punctul x și $g(x)$ este arbitrar dacă x nu are derivată în x, este măsurabilă Lebesgue. Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este crescătoare, atunci funcția g este integrabilă Lebesgue și avem $\int g \, \mathrm{d}\mu \leqslant f(b) - f(a)$, unde μ este măsura Lebesgue pe $[a, b]$. Dacă numim o astfel de funcție g o *derivată* a lui f și notăm $g = f'$, ultima formulă se scrie $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a)$. Inegalitatea reciprocă nu are loc în general; ea are loc pentru funcții absolut continue. Fie $\{f_n\}_n$ un șir de funcții reale definite pe $[a, b]$, toate monotone de același sens. Se presupune că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă și fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ suma ei (care este monotonă de același sens). Atunci avem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$ a.p.t. în raport cu măsura Lebesgue (*teorema lui Fubini asupra derivării seriilor de funcții*). (*I.C.*)

derivarea măsurilor Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură σ-finită. Vom numi *rețea în T* (relativ la μ) un șir $\mathcal{N} = \{A_n\}_n$ de mulțimi din $\mathcal{T}$, mutual disjuncte, cu $\bigcup_n A_n = T$ (se mai numește și *partiție a lui T*). Un șir monoton de rețele este un șir $\{\mathcal{N}_n\}_n$ de rețele cu proprietatea că pentru orice număr natural n avem: oricare ar fi A din $\mathcal{N}_{n+1}$, există B din $\mathcal{N}_n$ astfel încît $A \subset B$. Un *șir regulat* (relativ la μ) *de rețele* este un șir $\{\mathcal{N}_n\}_n$ de rețele cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice mulțime E din $\mathcal{T}$ există un șir $\{A_k\}_k$ de elemente din $\bigcup_n \mathcal{N}_n$ astfel încît $\mu\left(E \setminus \left(\bigcup_k A_k\right)\right) = 0$ și $\mu\left(\left(\bigcup_k A_k\right) \setminus E\right) < \varepsilon$ (este suficient ca proprietatea să aibă loc pentru mulțimile E de măsură finită aparținînd unui semiclan care generează pe $\mathcal{T}$). În cazul particular cînd T este o mulțime măsurabilă în $\mathbb{R}^k$ și μ este măsura Lebesgue pe T, un șir $\{\mathcal{N}_n\}_n$ de rețele se va numi *șir indefinit de fin* dacă pentru orice x din T și orice $\varepsilon > 0$ există A în $\bigcup_n \mathcal{N}_n$ astfel încît $x \in A$ și diametrul lui A este mai mic decît ε (v. **măsura Hausdorff**). Orice șir indefinit de fin este regulat relativ la măsura Lebesgue. Vom considera un șir monoton de rețele $\{\mathcal{N}_n\}_n$ și funcția de mulțime $\sigma: \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$, unde $\mathcal{T}$ este o σ-algebră pe T cu proprietatea că $\bigcup_n \mathcal{N}_n \subset \mathcal{T}$ și se presupune că $\sigma(A)$ este finit dacă $\mu(A)$ este finit. Definim pentru orice număr natural n funcția $d_n: T \to \overline{\mathbb{R}}$. Definiția se bazează pe faptul că pentru orice x din T există o unică A din $\mathcal{N}_n$ cu $x \in A$. Vom pune atunci $d_n(x) = \sigma(A)/\mu(A)$, făcînd convențiile: a) $d_n(x) = \infty$, dacă $\mu(A) = 0$ și $\sigma(A) \geqslant 0$; b) $d_n(x) = -\infty$ dacă $\mu(A) = 0$ și $\sigma(A) < 0$. Pentru orice x din T definim *derivata superioară* (resp. *inferioară*) a lui σ în x în raport cu μ prin $\overline{D}\sigma(x) = \limsup_n d_n(x)$ (resp. prin $\underline{D}\sigma(x) = \liminf_n d_n(x)$). Dacă $-\infty < \underline{D}\sigma(x) = \overline{D}\sigma(x) < \infty$, vom spune că σ este ***diferențiabilă*** (sau ***derivabilă***) *în x relativ la μ și $\{\mathcal{N}_n\}_n$*. Vom nota valoarea comună $\overline{D}\sigma(x) = \underline{D}\sigma(x)$ prin $D\sigma(x)$ și vom numi pe $D\sigma(x)$ *derivata lui σ în x relativ la μ și $\{\mathcal{N}_n\}_n$*.

Teorema de densitate (varianta I). Fie $\{\mathcal{N}_n\}_n$ un şir monoton şi regulat (relativ la μ) de rețele și $F \in \mathcal{T}$. Definim ν: $\mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ prin $\nu(A) = \mu(A \cap F) = \int_A \varphi_F \, d\mu$. Atunci avem $D\nu(x) = \varphi_F(x)$ ν-a.p.t., unde φ_F este funcția caracteristică a lui F.

Teorema de diferențiere (de derivare) a integralei nedefinite (varianta I). Fie $\{\mathcal{N}_n\}_n$ un şir monoton şi regulat (relativ la μ) de rețele și $f: T \to \mathbb{R}$ o funcție μ-integrabilă. Definim $\sigma: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $\sigma(E) = \int_E f \, d\mu$. Atunci $D\sigma(x) = f(x)$ μ-a.p.t.

În ceea ce privește legătura cu teorema Radon-Nikodym și teorema de descompunere a lui Lebesgue se arată că: dacă $\nu: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ este o măsură numărabil aditivă reală și $\nu = \nu_1 + \nu_2$ este descompunerea sa Lebesgue relativ la μ, unde ν_1 este absolut continuă în raport cu μ și măsurile ν_2 și μ sînt singulare, ν_2 fiind concentrată pe mulțimea μ-neglijabilă $H \in \mathcal{T}$, avem pentru orice E din $\mathcal{T}$ relația $\nu(E) = \nu(H \cap E) + \int_E D\nu_1(x) \, d\mu(x)$. Aici $D\nu_1$ este derivata lui ν_1 în raport cu μ, relativ la orice şir monoton şi regulat (relativ la μ) de rețele $\{\mathcal{N}_n\}_n$ (*teorema de diferențiere (de derivare) a măsurilor*) (varianta I). Acum vom considera un caz particular, anume: T este o mulțime deschisă nevidă inclusă în $\mathbb{R}^k$, $\mathcal{T}$ este mulțimea părților măsurabile Lebesgue ale lui T și μ este măsura Lebesgue pe T. În acest caz se poate renunța la specificarea rețelei după care se face derivarea. Dacă $x \in T$, vom numi *cub centrat în x* un interval de forma $\prod_{i=1}^{k} [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ inclus în T, unde ε este număr strict pozitiv. Vom mai considera o σ-algebră Σ de mulțimi măsurabile Lebesgue care include mulțimile boreliene ale lui T. Vom spune că un şir $\{E_n\}_n$ de mulțimi din Σ ***tinde regulat la x din T*** dacă: a) $\mu(E_n) > 0$ pentru orice n; b) Există un număr $1 \leqslant a < \infty$ și un şir $\{K_n\}_n$ de cuburi centrate în x astfel încît $E_n \subset K_n$ și $\mu(K_n)/\mu(E_n) \leqslant a$ pentru orice n; c) $\delta(E_n) \to 0$, unde $\delta(E_n)$ este diametrul lui E_n. De exemplu, pentru $k = 1$, putem lua $E_n = [x - a_n, x + a_n]$, sau $E_n = [x, x + a_n]$, sau $E_n = [x - a_n, x]$, unde $\{a_n\}$ este un şir de numere strict pozitive care tinde la zero. Fie acum și $\sigma: \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ o măsură numărabil aditivă cu $\sigma(E)$ finit dacă $\mu(E)$ este finit și x în T. *Derivata superioară regulată a lui σ în x* este $\overline{D}_r\sigma(x) = \sup_{E_n} \limsup_n \sigma(E_n)/\mu(E_n)$, iar *derivata inferioară regulată a lui σ în x* este $\underline{D}_r\sigma(x) = \inf_{E_n} \liminf_n \sigma(E_n)/\mu(E_n)$, unde superiorul sau inferiorul se ia după toate şirurile $\{E_n\}_n$ care tind regulat la x. Dacă $-\infty < \underline{D}_r\sigma(x) = \overline{D}_r\sigma(x) < \infty$, atunci vom nota $D_r\sigma(x) = \underline{D}_r\sigma(x) = \overline{D}_r\sigma(x)$ și vom spune că σ este *diferențiabilă (derivabilă) regulat în x* iar

$D_r\sigma(x)$ se va numi *derivata regulată a lui σ în x* (sau *derivata lui σ în x*). În acest caz avem $D_r\sigma(x) = \lim_n \sigma(E_n)/\mu(E_n)$, unde $\{E_n\}_n$ este un şir oarecare care tinde regulat la x.

Teorema de densitate (varianta II). Fie $F \in \Sigma$. Definim $\nu: \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ prin $\sigma(A) = \mu(A \cap F) = \int_A \varphi_F \, d\mu$. Atunci avem $D_r\nu(x) = \varphi_F(x)$ μ-a.p.t.

Teorema de diferențiere (de derivare) a integralei nedefinite (varianta II). Fie $f: T \to \mathbb{R}$ o funcție μ-integrabilă și $\sigma: \Sigma \to \mathbb{R}$, $\sigma(A) = \int_A f \, d\mu$. Atunci $D_r\sigma(x) = f(x)$ μ-a.p.t. pe T.

În cazul unei măsuri numărabil aditive $\sigma: \Sigma \to \mathbb{R}$, $D_r\sigma(x)$ există și este finită μ-aproape pentru orice x în T și există o mulțime $H \in \Sigma$ cu $\mu(H) = 0$ astfel încît $\sigma(A) = \sigma(A \cap H) + \int_A D_r\sigma(x) \, d\mu(x)$ pentru orice A din Σ (*teorema de diferențiere (de derivare) a măsurilor*) (varianta II). (*I. C.*)

derivata aproximativă Fie S o mulțime măsurabilă din $\mathbb{R}$. Un punct x din $\mathbb{R}$ este de densitate pentru S dacă $\lim(m(S \cap I)/m(I)) = 1$ pentru $m(I) \to 0$, unde m desemnează măsura Lebesgue, iar I este un interval centrat în x. O funcție reală f definită pe o vecinătate a lui x este derivabilă aproximativ în x dacă există o mulțime S pentru care x este punct de densitate, astfel încît $\lim((f(y) - f(x))/(y - x))$ pentru $y \to x$, $y \in S$, există și este finită. Valoarea limitei este d.a. a lui f în x. Sin.: *derivată asimptotică*. A fost introdusă de A. Denjoy și A.I. Hincin. (*S.M.*)

derivata areolară (în punctul z_0, a funcției complexe f de variabilă complexă z), limita

$$\frac{Df}{D\omega} = \lim \frac{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c^z f(z) \, dz}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_d d\omega}$$

cînd domeniul d conținînd pe z_0 se află cuprins într-un disc cu centrul în z_0 și de rază tinzînd la zero, la numărător aflîndu-se integrala lui Cauchy a funcției (într-un domeniu $D \supset d$) f pe curba închisă și rectificabilă c care delimitează domeniul d iar la numitor aria acestui domeniu. Dacă f nu îndeplinește condițiile de monogeneitate ale lui Cauchy, **d.a.** măsoară gradul de neolomorfie al funcției f în z_0. Noțiunea a fost introdusă în 1912 de matematicianul român Dimitrie Pompeiu. (*S. M.*)

derivata calitativă, limita calitativă (dacă există) a raportului $(f(x) - f(a))/(x - a)$. Existența ei în fiecare punct al unui interval $I \subset \mathbb{R}$ implică existența derivatei ordinare pe I și egalitatea lor, de îndată ce f este continuă pe I. Dacă o funcție reală de prima clasă Baire, cu proprietatea lui Darboux, admite **d.c.** finită sau infinită, cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile, și dacă această derivată este pozitivă a.p.t. pe intervalul I, atunci funcția este continuă și crescătoare pe I. (*S. M.*)

derivata congruentă Fie Q o parte a lui $\mathbb{R}$ care nu conține pe zero dar care se acumulează în zero. Fie $f: I \to \mathbb{R}$. Derivata Q-congruentă a lui f în $a \in I$ este limita (dacă există)

$$f'_Q(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in Q}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A fost introdusă de Sindalovski, care a arătat că în condiții adecvate pentru Q se poate obține un analog al teoremei Denjoy-Young-Saks. (*S. M.*)

derivata exterioară v. **formă diferențială** (în $\mathbb{R}^n$), **formă diferențială** (pe o varietate diferențiabilă)

derivata Fréchet Fie X și Y spații liniare normate (cu același corp al scalarilor) și $\mathcal{L}(X, Y)$ mulțimea operatorilor liniari și continui care aplică X în Y. Dacă A este o vecinătate a unui punct x_0 din X, un operator $U: A \to Y$ se spune că este un *operator derivabil* (sau *diferențiabil*) *Fréchet în punctul* x_0 dacă există $V \in \mathcal{L}(X, Y)$ astfel ca

$$\lim_{\|z\| \to 0} \frac{\|U(x_0 + z) - U(x_0) - V(z)\|}{\|z\|} = 0.$$

Operatorul V este unic, se notează $U'(x_0)$ și se numește **d.F.** în x_0 a lui U. Pentru orice $z \in X$, elementul $(U'(x_0))(z)$ se numește *diferențiala Fréchet* a lui U în x_0 și se notează $dU(x_0; z)$. Dacă $E \subset X$ este o mulțime deschisă și dacă $U: E \to Y$ este un operator derivabil Fréchet în orice punct $x \in E$, atunci se spune că U este *derivabil Fréchet pe E*. Aplicația $x \to U'(x)$ se numește **d.F.** a lui U pe E și se notează U'. Dacă U este un operator derivabil Fréchet într-un punct x_0, atunci U este continuu în punctul x_0. Dacă $U: X \to Y$ este diferențiabil Fréchet într-un punct x_0, atunci U este diferențiabil Gâteaux în x_0 și pentru orice $z \in X$, $dU(x_0; z) = \delta U(x_0; z)$ (în membrul drept fiind diferențiala Gâteaux). Dacă $U \in \mathcal{L}(X, Y)$, atunci U este derivabil Fréchet pe X și $U'(x) = U$ pentru orice $x \in X$. (*R. C.*)

derivata Fréchet la dreapta (la stînga) v. **derivata Fréchet laterală**

derivata Fréchet laterală Fie X un spațiu liniar dirijat care este și un spațiu Banach în care conul pozitiv este închis în topologia normei. Fie $\mathcal{L}(X)$ mulțimea operatorilor liniari care aplică X în X și care sînt continui în topologia normei. O submulțime A a lui X se numește *vecinătate la dreapta* (resp. *la stînga*) a unui punct x_0 din X dacă există un număr $\varepsilon > 0$ astfel ca $x_0 + \varepsilon S_+ \subset A$ (resp. $x_0 - \varepsilon S_+ \subset A$), unde S_+ este mulțimea elementelor pozitive ale sferei unitate deschise din X. O submulțime E a lui X se numește *mulțime deschisă la dreapta* (resp. *la stînga*) dacă este o vecinătate la dreapta (resp. la stînga) a oricărui punct al său. Dacă A este o vecinătate la dreapta a unui punct x_0, un operator $U: A \to X$ se spune că este un *operator derivabil Fréchet la dreapta în punctul* x_0 dacă există $V \in \mathcal{L}(X)$ astfel ca

$$\lim_{\substack{\|z\| \to 0 \\ z > 0}} \frac{\|U(x_0 + z) - U(x_0) - V(z)\|}{\|z\|} = 0.$$

Operatorul V este unic, se notează $U'_d(x_0)$ și se numește *derivata Fréchet la dreapta a lui U în* x_0. Dacă E este o mulțime deschisă la dreapta, un operator $U: E \to X$ se spune că este un *operator derivabil Fréchet la dreapta pe E*, dacă U este derivabil Fréchet la dreapta în orice punct al mulțimii E. Aplicația $x \to U'_d(x)$ a lui E în $\mathcal{L}(X)$ se numește *derivata Fréchet la dreapta a lui U pe E* și se notează U'_d. În mod analog se definesc noțiunile de *operator derivabil Fréchet la stînga* într-un punct sau pe o mulțime deschisă la stînga, precum și derivatele corespunzătoare $U'_s(x_0)$, U'_s. Derivatele Fréchet la dreapta și la stînga (într-un punct sau pe o mulțime deschisă la dreapta, resp. la stînga) se numesc **d.F.l.** (*R. C.*)

derivata generalizată Fie T o mulțime deschisă pe dreapta reală, Γ unul din corpurile $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ și φ, ψ două funcții local integrabile care aplică T în Γ.

Dacă f, g sînt respectiv distribuțiile definite de φ, ψ și dacă g este derivata distribuției f, se spune că ψ este **d.g.** a funcției φ. Aceasta înseamnă că:

$$\int_T \psi(t)\, x(t)\, dt = -\int_T \varphi(t)\, x'(t)\, dt, \qquad \forall x \in \mathcal{D}_\Gamma(T)$$

(pentru notații v. **distribuție**). Într-un mod evident se definesc derivatele parțiale de ordin oarecare în cazul $T \subset \mathbb{R}^m$. (*R. C.*)

derivata inferioară a unei măsuri (într-un punct în raport cu o măsură) v. **derivata măsurilor**

derivata inferioară regulată a unei măsuri (într-un punct în raport cu o măsură) v. **derivata măsurilor**

derivata lui Császár Fie $\mathcal{S}$ o familie de submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ cu proprietățile: Dacă $S \in \mathcal{S}$ și $T \subset S$, atunci $T \in \mathcal{S}$; Dacă $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ este un șir de mulțimi din $\mathcal{S}$, atunci $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ aparține lui $\mathcal{S}$. Fie $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Punem

$$\sup_{x \in E} F_{\mathcal{S}}(x) = \inf \{y;\ \{x;\ F(x) > y,\quad x \in E\} \in \mathcal{S}\}$$

și definim analog pe $\inf_{x \in E} F_{\mathcal{S}}(x)$. Punem apoi $\limsup_{x \to x_0} F_{\mathcal{S}}(x) = \lim_{x \to x_0} \Big(\sup_{x_0 - h < x_0 < x_0 + h} F_{\mathcal{S}}(x)\Big)$ și definim analog pe $\liminf_{x \to x_0} F_{\mathcal{S}}(x)$ și $\lim_{x \to x_0} F_{\mathcal{S}}(x)$. Luînd în rolul lui $F(x)$ raportul din definiția derivatei lui $F(x)$, obținem ceea ce vom numi $\mathcal{S}$-derivatele extreme și $\mathcal{S}$-*derivata lui F* în x_0 *în sensul lui Császár*. Derivata ordinară și derivata calitativă sînt cazuri particulare obținute pentru $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$ și respectiv $\mathcal{S}$ = clasa mulțimilor de prima categorie Baire în $\mathbb{R}$. Se obține un analog pentru numere $\mathcal{S}$-derivate al teoremei Denjoy-Young-Saks. (*S.M.*)

derivata lui Garg Fie I un interval deschis din $\mathbb{R}$ și fie $f: I \to \mathbb{R}$. Funcția f este slab derivabilă în x_0 dacă $\alpha = \min(D^-f(x_0), D^+f(x_0)) \leqslant \max\{D_-f(x_0), D_+f(x_0)\} = \beta$. Orice număr γ cu proprietatea $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$ este o *derivată slabă în sensul lui Garg* a lui f în x_0. În mod analog, dacă $D^+f(x_0) \leqslant \gamma \leqslant D_-f(x_0)$ sau $D^-f(x_0) \leqslant \gamma \leqslant D_+f(x_0)$, atunci γ este o *semiderivată în sensul lui Garg* a lui f în x_0 (semiderivată superioară dacă avem primele inegalități, inferioară dacă le avem pe celelalte). Orice funcție continuă admite o semiderivată finită în punctele unei mulțimi dense în I. (*S.M.*)

derivata lui Pompeiu Fie f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x - a_n)^{\frac{1}{3}}$ iar $\{a_n\}_n$ este un șir format cu numerele raționale din $[0, 1]$. Funcția f este continuă și strict crescătoare. Inversa g a lui f este derivabilă, cu derivată g' mărginită. Funcția g' este **d.P.** și are proprietatea că zerourile ei formează o mulțime densă, a cărei complementară este de asemenea densă în intervalul de definiție. (*S.M.*)

derivata parametrică a lui Tolstov $f: I \to \mathbb{R}$ este derivata parametrică a lui $F: I \to \mathbb{R}$ dacă există $\varphi: J \to \mathbb{R}$ diferențiabilă astfel încît compunerea $F \circ \varphi$ este diferențiabilă pe J iar $x = \varphi(t)$, $y = F(\varphi(t))$ constituie o reprezentare parametrică a lui $y = F(x)$ cu proprietatea $dy = f(x)\, dx$ pentru orice $x \in I$ (I și J sînt intervale din $\mathbb{R}$). Pentru ca f finită pe $[a, b)$ să fie derivată parametrică a funcției $y = F(x)$ este necesar și suficient ca f să fie integrabilă Denjoy-Perron și $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. (*S.M.*)

derivata parțială Se consideră un număr natural $n \geqslant 2$ și o mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ care are un punct interior $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție. Fixăm un număr natural $1 \leqslant i \leqslant n$ și formăm mulțimea $A_{a(i)} = \{x \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in A\}$ care are pe a_i ca punct interior. Definim funcția $f_{a(i)}: A_{a(i)} \to \mathbb{R}$ dată prin $f_{a(i)}(x) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Dacă $f_{a(i)}$ este derivabilă în punctul a_i spunem că f este derivabilă parțial în raport cu x_i în punctul a și notăm derivata lui $f_{a(i)}$ în a_i prin $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau $f'_{x_i}(a)$ sau $D_{x_i}f(a)$. Practic, calculul se face după formula

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x \to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, \ldots, a_n)}{x - a_i}.$$

Numărul $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se numește **d.p.** a lui f în raport cu x_i în punctul a. Cu alte cuvinte, se fixează variabilele x_j cu $j \neq i$, luînd $x_j = a_j$, se consideră astfel f ca funcție numai de variabila reală x_i și se derivează această funcție de x_i în $x_i = a_i$. De exemplu, dacă $n = 2$, vom scrie $(x_1, x_2) = (x, y)$ și $(a_1, a_2) = (\alpha, \beta)$. Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x, \beta) - f(\alpha, \beta)}{x - \alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = \lim_{y \to \beta} \frac{f(\alpha, y) - f(\alpha, \beta)}{y - \beta}.$$

Putem considera mulțimea $A_i = \{a \in A \mid f$ este derivabilă parțial în raport cu x_i în $a\}$ și *funcția* **d.p.** $\frac{\partial f}{\partial x_i}: A_i \to \mathbb{R}$ definită astfel: valoarea funcției $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în punctul a este $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. (Cu alte cuvinte, avem funcția $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$). Dacă a este punct interior lui A_i și funcția $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este derivabilă parțial în raport cu x_j în a, vom nota **d.p.** a lui $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în raport cu x_j în a prin $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ sau $f''_{x_i x_j}(a)$ sau $D_{x_i x_j}(a)$. În cazul cînd $i = j$ se mai scrie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ sau $f''_{x_i^2}(a)$ sau $D_{x_i^2}(a)$. Numim, în general, pe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$. **d.p.** *de ordin doi* a funcției f. Putem continua, scriind $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a)$ sau $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i}(a)$ etc. Se folosesc și notații de tipul $D^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} f(a)$ pentru a desemna o **d.p.** de ordin $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, anume de ordin m_i în raport cu variabila x_i (v. și **diferențiala funcțiilor numerice**). (*I.C.*)

derivata Radon-Nikodym (a unei măsuri în raport cu altă măsură) v. **teorema Radon-Nikodym**

derivata regulată (a unei măsuri) v. **derivarea măsurilor**

derivata secundă directă Fie $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ și $x \in (a, b)$. **D.s.d.** a lui f în x este

$$D^2 f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}.$$

A fost pusă în evidență de cercetările lui Riemann asupra seriilor trigonometrice. Sin.: *derivata a doua directă simetrică* sau *derivata lui H. Schwartz*. Acesta din urmă a arătat că dacă f este continuă și are o **d.s.d.** simetrică egală cu zero, atunci f este o funcție liniară pe (a, b). (*S.M.*)

derivata selectivă Fie I_0 un interval fixat în $\mathbb{R}$. Din fiecare interval închis $I \subset I_0$ alegem un punct p_I interior lui I. Mulțimea punctelor astfel alese constituie selecția S. Pentru $x \in I_0$ și pentru o selecție dată S, definim **d.s.** a lui f în x prin limita (dacă există)

$$sf'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_{[x,\, x+h]}) - f(x)}{p_{[x,\, x+h]} - x}.$$

(Deoarece h poate fi și negativ, folosim notația $[x, x + h]$ pentru intervalul determinat de x și $x + h$, chiar și atunci cînd $h < 0$.) **D.s.** a fost introdusă în 1977 de O'Malley, care a demonstrat că dacă f este definită pe I_0 și admite **d.s.** finită sf' printr-o aceeași selecție S în fiecare punct din I_0, atunci: a) f are proprietatea lui Darboux; b) f este aproximativ derivabilă a.p.t. și $f'_{ap} = sf'$ a.p.t. pe I_0; c) Există o mulțime deschisă densă în I_0 pe care f este continuă și f este derivabilă a.p.t.; d) sf' are proprietatea lui Darboux, este de a doua clasă Baire și este continuă în punctele unei mulțimi dense. (*S.M.*)

derivata simetrică Fie $f: I \to \mathbb{R}$ și fie $a \in \operatorname{int} I$, unde I este un interval inclus în $\mathbb{R}$. **D.s.** a lui f în a este limita (în ipoteza că există)

$$f'_s(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

Dacă $f'_s(a)$ este finită se spune că f este derivabilă simetric în a. **D.s.** a fost introdusă în teoria seriilor trigonometrice și în legătură cu comportatea la frontieră a funcțiilor armonice. Derivabilitatea ordinară implică derivabilitatea simetrică, reciproca nefiind adevărată. Dacă însă f este măsurabilă Lebesgue, iar f'_s există a.p.t. în punctele unei mulțimi măsurabile Lebesgue E, atunci derivata ordinară a lui f există și ea a.p.t. pe E. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă pe I, iar f'_s există peste tot pe I, atunci derivata ordinară există în toate punctele din I, cu excepția unei mulțimi de prima categorie Baire. (*S. M.*)

derivata superioară a unei măsuri (într-un punct în raport cu o măsură) v. **derivarea măsurilor**

derivata superioară regulată a unei măsuri (într-un punct în raport cu o măsură) v. **derivarea măsurilor**

derivata unei distribuții v. **distribuție**

derivata unei funcții olomorfe v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă)

derivata unei funcții reale Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fie $a \in A$ un punct de acumulare pentru A. Dacă există, finită sau infinită, limita în a a funcției $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, atunci valoarea limitei se numește *derivata* lui f în a. Dacă derivata lui f în a este finită, atunci funcția f se numește *derivabilă în punctul a*. Dacă a este punct de acumulare la stînga (resp. la dreapta) și dacă există limita la stînga (resp. la dreapta) în a a funcției de mai sus, valoarea, finită sau infinită, a limitei se numește *derivata la stînga* (resp. *la dreapta*) a lui f în a.

Derivata se notează $f'(a)$ iar derivatele la stînga şi la dreapta, respectiv, $f'_-(a)$ şi $f'_+(a)$. (*S.M.*)

descompunere ortogonală 1 Fie X un spaţiu Hilbert. Două submulţimi A, B ale lui X se numesc *ortogonale* dacă $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. Se numeşte **d.o.** a spaţiului X orice familie $\{E_j\}_{j\in J}$ de subspaţii liniare închise, ortogonale două cîte două, astfel ca subspaţiul liniar închis generat de $\bigcup_{j\in J} E_j$ să coincidă cu X. În acest caz orice element x al spaţiului X se reprezintă sub forma $x = \mathop{\mathbf{S}}_{j\in J} x_j$ cu $x_j\in E_j$ (v. **familie sumabilă de elemente**). 2 Fie X un spaţiu liniar reticulat. Două submulţimi A, B ale lui X se numesc *ortogonale* dacă $|x| \wedge |y| = 0$, $\forall x\in A$, $\forall y\in B$. Dacă $\{x_j\}_{j\in J}$ este o familie de elemente din X, elementul

$$z = \bigvee_{j\in J}(x_j)_+ - \bigvee_{j\in J}(x_j)_-,$$

dacă există, se numeşte *asociaţia familiei de elemente* şi se notează $z = \coprod_{j\in J} x_j$. Se numeşte **d.o.** a spaţiului X orice familie $\{G_j\}_{j\in J}$ de componente ale lui X, ortogonale două cîte două astfel ca mulţimea $\bigcup_{j\in J} G_j$ să fie totală în X. În acest caz orice element x al spaţiului X se reprezintă sub forma $x = \coprod_{j\in J} x_j$ cu $x_j\in G_j$ dacă şi numai dacă $x_j = [G_j]\,x$ (proiecţia lui x pe G_j). (*R.C.*)

descompunerea canonică a unui operator spectral v. **măsură spectrală**

descompunerea distribuţiei δ în unde plane Pentru distribuţia δ a lui Dirac au loc următoarele descompuneri în „unde plane": Dacă n este impar,

$$\delta(x_1,\dots,x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1x_1+\dots+\omega_nx_n)\,d\omega;$$

Dacă n este par,

$$\delta(x_1,\dots,x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int_\Omega(\omega_1x_1+\dots+\omega_nx_n)^{-n}\,d\omega,$$

unde Ω este sfera unitate centrată în origine în spaţiul $\mathbb{R}^n$ iar $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$ un punct de pe această sferă şi $d\omega$ elementul de arie al sferei. Aceste dezvoltări joacă un rol însemnat în studiul aşa-numitelor distribuţii omogene şi al ecuaţiilor cu derivate parţiale omogene liniare. Pentru acestea din urmă se utilizează descompunerile de mai sus ale distribuţiei δ pentru a calcula soluţiile lor fundamentale. (*G.G.*)

descompunerea Hahn a unei măsuri v. **măsuri pozitive şi măsuri cu semn**

descompunerea Jordan a unei măsuri v. **măsuri pozitive şi măsuri cu semn**

descompunerea Lebesgue a unei măsuri (în raport cu altă măsură) v. **teorema de descompunere a lui Lebesgue**

determinaţia principală (a argumentului unui număr complex) v. **logaritmul complex**

determinaţia principală (a logaritmului unui număr complex) v. **logaritmul complex**

dezintegrarea măsurilor Fie T şi S două spaţii local compacte cu $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{S}$) semitribul părţilor boreliene relativ compacte ale lui T (resp. S). Vom

nota cu Γ corpul numerelor reale sau complexe, $M(T) = \{\mu: \mathcal{T}\to\Gamma \mid \mu$ este măsură boreliană regulată şi mărginită$\}$, $M_+(T) = \{\mu\in M(T)\mid\mu$ este pozitivă$\}$ şi $\mathcal{K}(T) = \{f: T\to\Gamma \mid f$ este continuă şi are suport compact$\}$ care devine spaţiu normat cu norma $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t\in T\}$. Dualul lui $\mathcal{K}(T)$ cu această normă se identifică (v. **teorema de reprezentare a lui Riesz**) cu spaţiul $M(T)$. Anume, o funcţională liniară şi continuă $x': \mathcal{K}(T)\to\Gamma$ corespunde unei măsuri $\mu\in M(T)$ prin relaţia $x'(f) = \int f\,d\mu := (f,\mu)$ pentru orice $f\in\mathcal{K}(T)$. Integrala se calculează în mod canonic (v. **funcţie total măsurabilă**). Prin această corespondenţă funcţionalele x' pozitive (*i.e.* $x'(f)\geqslant 0$ pentru orice $f\geqslant 0$ din $\mathcal{K}(T)$) se identifică cu măsurile $\mu\in M_+(T)$. Vom considera o măsură boreliană regulată şi pozitivă $\nu:\mathcal{S}\to\mathbb{R}_+$ şi o aplicaţie $\lambda: S\to M_+(T)$ (vom nota pentru orice s în S valoarea $\lambda(s)$ prin λ_s) astfel încît pentru orice funcţie $f\in\mathcal{K}(T)$, aplicaţia $g: S\to\Gamma$, $g(s) = (f,\lambda_s)$, să fie funcţie ν-integrabilă. Atunci putem defini $V:\mathcal{K}(T)\to\Gamma$ prin $V(f) = \int(f,\lambda_s)\,d\nu(s)$. Se observă că V este o aplicaţie liniară şi pozitivă, deci (v. **teorema de reprezentare a lui Riesz**) V se identifică cu o măsură boreliană regulată şi pozitivă $\mu\in M_+(T)$. Anume, $V(f) = (f,\mu)$ pentru orice $f\in\mathcal{K}(T)$. Vom scrie $\mu = \int\lambda(s)\,d\nu(s)$ şi vom numi pe μ *integrala familiei de măsuri* $\{\lambda_s\}_{s\in S}$ *în raport cu* ν. Pentru a putea da o teoremă care să răspundă la problema inversă, să numim *aplicaţie μ-proprie* o funcţie continuă $p: T\to S$ cu proprietatea că pentru orice $A\in\mathcal{S}$ mulţimea $p^{-1}(A)$ este μ-integrabilă.

Teorema de dezintegrare a măsurilor. Fie T un spaţiu local compact şi $\mu\in M_+(T)$. Se presupune că există un spaţiu local compact S şi o aplicaţie μ-proprie $p: T\to S$ astfel încît *imaginea lui μ prin p*, anume măsura $p(\mu):\mathcal{S}\to\mathbb{R}_+$, $p(\mu)(A) = \mu(p^{-1}(A))$ (v. şi **imaginea unei măsuri printr-o aplicaţie, schimbarea de variabilă abstractă**) are următoarele proprietăţi: a) Măsura nenulă $p(\mu)$ este în $M_+(S)$; b) Există $\nu\in M_+(S)$ astfel încît $p(\mu)$ este absolut continuă în raport cu ν, în sensul că există o funcţie ν-măsurabilă pozitivă $\varphi: S\to\mathbb{R}_+$, cu proprietatea că $p(\mu)(A) = \int_A\varphi(s)\,d\nu(s)$, pentru orice $A\in\mathcal{S}$. Se mai presupune că există un lifting pe $\mathcal{L}^\infty(\nu)$. Atunci există o funcţie $\lambda: S\to M_+(T)$ cu proprietăţile mai sus menţionate şi astfel încît $\mu = \int\lambda(s)\,d\nu(s)$. În plus, $|\varphi(s)| = \lambda_s(S)$ pentru ν-aproape orice s în S. Dacă pe $\mathcal{L}^\infty(\nu)$ există chiar un lifting tare, rezultă că λ_s este concentrată pe mulţimea $p^{-1}(\{s\})$ pentru ν-aproape orice s în S. (*I.C.*)

dezintegrarea măsurilor Radon Fie T şi X spaţii local compacte cu bază numărabilă, μ o măsură Radon pozitivă pe T şi $p: T\to X$ o aplicaţie μ-proprie. Vom nota prin $\nu = p(\mu)$ imaginea lui μ prin p. În aceste condiţii există o familie ν-concordantă $\{\lambda_x\}_{x\in X}$ de măsuri pozitive pe T care sînt mărginite şi astfel încît: a) $\|\lambda_x\| = 1$ pentru orice x din $p(T)$; b) λ_x este concentrată pe $p^{-1}(\{x\})$ pentru orice x din X; c) $\mu = \int\lambda_x\,d\nu(x)$. În plus, dacă $\{\lambda'_x\}_{x\in X}$ este o altă familie de măsuri Radon pozitive pe T avînd proprietăţile b) şi c), rezultă că $\lambda'_x = \lambda_x$ ν-aproape pentru orice x din X. (*I.C.*)

dezvoltare Laurent v. **funcţie olomorfă pe o coroană circulară**

dezvoltarea Fourier a funcțiilor reale periodice Fie $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție periodică de perioadă 2π, integrabilă pe segmentul $[-\pi, \pi]$. Fie

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

cu $n \in \mathrm{N}$. Numerele $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$, $n \in \mathrm{N}$, se numesc *coeficienții Fourier* ai funcției x iar seria trigonometrică, nu neapărat convergentă,

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) \tag{1}$$

se numește *seria Fourier* asociată funcției x. Să presupunem acum că există o diviziune $-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \pi$ a segmentului $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția x să fie derivabilă în fiecare interval (t_{j-1}, t_j) și să existe limitele laterale $x(t_{j-1}+0)$, $x(t_j - 0)$, $x'(t_{j-1}+0)$, $x'(t_j - 0)$, unde x' este derivata lui x. Atunci seria Fourier asociată funcției x este convergentă în orice punct $t \in \mathbb{R}$ și are suma $\frac{1}{2}(x(t+0) + x(t-0))$. În particular, seria Fourier este egală cu $x(t)$ în orice punct t în care funcția este continuă. În acest caz, spunem că funcția x are o *dezvoltare Fourier* în punctele respective. (*R.C.*)

dezvoltări asimptotice Fie $f_n: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, și x_0 (finit sau infinit) un punct de acumulare pentru I; șirul $\{f_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ se numește *șir asimptotic* pe I pentru $x \to x_0$ dacă, pentru orice $n \in \mathrm{N}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 0$. În mod analog se formulează definiția dacă $f_n: D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, iar z_0 este un punct de acumulare pentru D. Fie $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ un șir asimptotic pe I pentru $x \to x_0$ și f definită pe I cu valori reale; seria formală $\sum\limits_n a_n f_n$ se numește *dezvoltare asimptotică* a funcției f pentru $x \to x_0$ pînă la ordinul N dacă

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{n=1}^{N} a_n f_n(x)}{f_N(x)} = 0.$$

Dacă seria formală $\sum\limits_n a_n f_n$ este o dezvoltare asimptotică a funcției f pentru orice ordin N, ea reprezintă o dezvoltare asimptotică a funcției f. În aceste definiții nu se presupune convergența seriei $\sum\limits_n a_n f_n$. Definițiile se formulează analog pentru funcții de variabilă complexă cu valori complexe. Exemple importante de șiruri asimptotice:

1) $f_n(x) = (x - x_0)^n$, $x \to x_0$;
2) $f_n(x) = x^{-n}$, $x \to \infty$;
3) $f_n(x) = x^{-k_n}$, $k_{n+1} > k_n$ pentru orice n, $x \to \infty$;
4) $f_n(x) = x^{-k_n} \exp(x)$, $k_{n+1} > k_n$ pentru orice n, $x \to \infty$;
5) $f_n(x) = x^{-kn} \exp(-nx)$, $x \to \infty$.

Dacă este fixat șirul asimptotic, dezvoltarea asimptotică a unei funcții este unică dar o funcție poate avea **d.a.** după două șiruri diferite. **D.a.** furnizează

proceduri de descriere aproximativă a comportării funcțiilor în vecinătatea unui punct de acumulare al domeniului de definiție. (*A.H.*)

diagramă v. **functor.**

diametrul unei mulțimi v. **distanță, măsură Hausdorff**

difeomorfism v. **model de varietate diferențiabilă, varietate diferențiabilă**

diferență bidimensională Fie f o funcție reală definită pentru $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$. **D.b.** a lui f în (x, y) este expresia

$$\Delta_2 f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y).$$

Putem privi pe $\Delta_2 f(x, y)$ ca o funcție de interval bidimensional, în cazul de față valoarea argumentului fiind intervalul avînd drept două dintre vîrfuri punctele de coordonate (x, y) și $(x+h, y+k)$. Se arată că variația bidimensională a unor funcții este o funcție aditivă de interval. Prin $\Delta_2(f; p, p')$ notăm **d.b.** asociată intervalului avînd ca vîrfuri opuse pe p și p'. (*S.M.*)

diferență divizată, coeficientul lui x^{n-1} din polinomul de interpolare $P(f; x_1, \ldots, x_n; x)$. Se face de obicei precizarea că este vorba de **d.d.** asociată funcției f și nodurilor $x_1, \ldots, x_n$ (v. și **interpolare**). (*Gh.Gr.*)

diferențiala Fie M o varietate diferențiabilă de clasă C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$; U o submulțime deschisă a lui M, a un punct din U și $f = (f_1, \ldots, f_m): U \to \mathbb{R}^m$ o aplicație de clasă C^1, *i.e.* $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, unde m este un număr natural. **D** lui f în punctul a este aplicația liniară $\mathrm{d}f_a: T(M)_a \to \mathbb{R}^m$, notată și $\mathrm{d}(f)_a$, definită prin

$$\mathrm{d}f_a(v) = (v(f_{1,a}), \ldots, v(f_{m,a})),$$

unde $f_{i,a}$ este germenul definit de funcția f_i în punctul a. Se observă că $\mathrm{d}f_a = (\mathrm{d}f_{1,a}, \ldots, \mathrm{d}f_{m,a})$, unde $\mathrm{d}f_{i,a} = (\mathrm{d}f_i)_a$. În cazul $m=2$, dacă se înlocuiește $\mathbb{R}^2$ prin $\mathbb{C}$ și se utilizează notația complexă, avem $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$ și $\mathrm{d}f_a = \mathrm{d}f_{1,a} + \mathrm{i}\,\mathrm{d}f_{2,a}$. Dacă $(x_1, \ldots, x_n)$ este un sistem de coordonate locale pe M cu domeniu conținînd punctul a, rezultă $\mathrm{d}f_a\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(a)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, în particular $\mathrm{d}x_{i,a}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(a)\right) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Kronecker), unde $\mathrm{d}x_{i,a} = (\mathrm{d}x_i)_a$ este **d.** funcției coordonate x_i în punctul a; astfel n-uplul $(\mathrm{d}x_{1,a}, \ldots, \mathrm{d}x_{n,a})$ este un reper al spațiului cotangent $T(M)_a^*$, în fapt dualul reperului $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a)\right)$ al spațiului tangent $T(M)_a$, iar **d.** aplicației f în punctul a se scrie

$$\mathrm{d}f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,\mathrm{d}x_{i,a}.$$

Dacă $f, g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, rezultă $\mathrm{d}(f+g)_a = \mathrm{d}f_a + \mathrm{d}g_a$, iar dacă $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ și $\Phi \in C^1(U)$, avem

$$\mathrm{d}(\Phi f)_a = f(a)\,\mathrm{d}\Phi_a + \Phi(a)\,\mathrm{d}f_a \quad (\textit{formula lui Leibniz}),$$

i.e.

$$\mathrm{d}(\Phi f)_a(v) = f(a)\,\mathrm{d}\Phi_a(v) + \Phi(a)\,\mathrm{d}f_a(v), \quad v \in T(M)_a.$$

Legătura între **d.** lui f în punctul a și aplicația liniară tangentă $f_{*,a}$ a lui f în punctul a este dată de egalitatea $\mathrm{d}f_a = \tau_{f(a)} \circ f_{*,a}$, unde $\tau_{f(a)}: T(\mathbb{R}^m)_a \to \mathbb{R}^m$ este aplicația liniară bijectivă care duce reperul $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}(f(a)), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_m}(f(a))\right)$ al spațiului tangent $T(\mathbb{R}^m)_{f(a)}$, definit de coordonatele carteziene $y_1, \ldots, y_m$ ale lui $\mathbb{R}^m$, în reperul canonic $(e_1, \ldots, e_m)$ al lui $\mathbb{R}^m$. Deoarece $\tau_{f(a)}$ este un izomorfism de spaţii vectoriale reale, **d.** df_a poate înlocui aplicaţia liniară tangentă $f_{*,a}$ în studiul local al aplicaţiei f. (*M.J.*)

diferenţiala de ordin n a unei funcţii (într-un punct) v. **diferenţiala, diferenţiala funcţiilor numerice**

diferenţiala funcţiilor numerice I. *Cazul funcţiilor de o variabilă.* Fie I un interval al dreptei reale, a un punct interior lui I şi $f : I \to \mathbb{R}$. Se spune că f este *diferenţiabilă în* a dacă există un număr real A şi o funcţie $\omega : I \to \mathbb{R}$ continuă în a, cu $\omega(a) = 0$, astfel încît $f(x) - f(a) = A(x - a) + \omega(x)\,|x - a|$ pentru orice x în I. Se arată că f este diferenţiabilă în a dacă şi numai dacă f este derivabilă în a şi în acest caz $A = f'(a)$. Aplicaţia liniară $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $T(t) = At = f'(a)\,t$, se numeşte *diferenţiala* lui f în a şi se notează prin $T = df(a)$ sau $Df(a)$. Aşadar, $df(a) = f'(a)\,1_{\mathbb{R}}$, unde $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $1_{\mathbb{R}}(t) = t$. Prin urmare, dacă f este diferenţiabilă în a, putem aproxima „creşterea funcţiei f", anume $\Delta f = f(x) - f(a)$, prin „creşterea liniară a variabilei", anume $df(a)\,(x - a) = f'(a)\,\Delta x$ şi scriem $\Delta f \cong f'(a)\,\Delta x$ (s-a notat prin Δx „creşterea variabilei", anume $x - a$). Această aproximare este „bună" în vecinătatea lui a, *i.e.* atunci cînd $|x - a|$ este mic. Funcţia $1_I : I \to \mathbb{R}$, dată prin $1_I(x) = x$, este diferenţiabilă în orice punct interior a, şi anume $d1_I(a) = 1_{\mathbb{R}}$. Din acest motiv se obişnuieşte să se noteze $1_{\mathbb{R}} = dx$. Rezultă că dacă f este diferenţiabilă în a, avem $df(a) = f'(a)\,1_{\mathbb{R}} = f'(a)\,dx$. Notaţia $df(a) = f'(a)\,dx$ este tradiţională. În mod similar, dacă f este de n ori derivabilă în punctul interior a din I (unde $n \geqslant 2$ este un număr natural), vom spune că f este *diferenţiabilă de n ori* în a. În acest caz aplicaţia n-liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin $T(t_1, t_2, \dots, t_n) = f^{(n)}(a)\,(t_1, t_2, \dots, t_n)$, se numeşte *diferenţiala de ordin n* a lui f în a (sau *diferenţiala a n-a* a lui f în a). Se notează $T = d^n f(a)$. Notaţia tradiţională este $d^n f(a) = f^{(n)}(a)\,dx^n$.

II. *Cazul funcţiilor de mai multe variabile.* Fie X o mulţime inclusă în $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$ natural), a un punct interior lui X şi $f : X \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este *diferenţiabilă* în a dacă există n numere reale $A_1, A_2, \dots, A_n$ şi o funcţie $\omega : X \to \mathbb{R}$, continuă în a, cu $\omega(a) = 0$, astfel încît

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) + \omega(x)\,\|x - a\|,$$

pentru orice x în X. Am notat $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ şi $\|x - a\|$ este distanţa euclidiană între x şi a, *i.e.*

$$\|x - a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}.$$

Se arată că dacă f este diferenţiabilă în a, atunci f este continuă în a, are derivate parţiale în raport cu variabilele $x_1, x_2, \dots, x_n$ în a şi $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$T(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,t_i,$$

se numeşte *diferenţiala* lui f în a (sau *diferenţiala de ordin* 1 a lui f în a), şi se notează prin $df(a)$ sau $Df(a)$. Notaţia tradiţională este $df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,dx_i$. Şi în acest caz, dacă f este diferenţiabilă în a, putem aproxima „creşterea funcţiei f", *i.e.* $\Delta f = f(x) - f(a)$, prin „creşterea liniară a variabilei", anume

$df(a)\,(x - a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,(x_i - a_i)$ şi scriem $\Delta f \cong df(a)\,(\Delta x)$ (unde $\Delta x = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$ este „creşterea variabilei"). Aproximaţia este „bună" în vecinătatea lui a. Definiţia diferenţiabilităţii de ordin superior lui 1 se face inductiv, după cum urmează. În acelaşi cadru, vom spune că f *este diferenţiabilă de n ori* în a ($n \geqslant 2$ natural), dacă există o vecinătate deschisă V a lui a, $V \subset X$, cu proprietatea că în orice punct din V există toate derivatele parţiale de ordin $n - 1$ şi toate funcţiile derivate parţiale de ordin $n - 1$ definite pe V sînt diferenţiabile în a. În particular, se arată că dacă toate derivatele parţiale de ordin n există într-o vecinătate a lui a şi toate funcţiile derivate parţiale de ordin n sînt continue în a, rezultă că f este diferenţiabilă de n ori în a (rezultat valabil şi pentru $n = 1$). Pentru $n = 2$, *diferenţiala de ordin* 2 a lui f în a (sau *diferenţiala a doua* a lui f în a) este aplicaţia biliniară $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin $T(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\,u_i v_j$ şi se notează prin $T = d^2 f(a)$ sau $D^2 f(a)$. (Am notat $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ şi $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.) *Criteriul de comutativitate al lui Young*: $d^2 f(a)$ este aplicaţie biliniară simetrică, *i.e.* $T(u, v) = T(v, u)$ pentru orice u şi v din $\mathbb{R}^n$. Cu alte cuvinte, derivatele parţiale mixte ale unei funcţii diferenţiabile de două ori în a sînt comutative, *i.e.* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ pentru orice $i \neq j$. Un rezultat similar este *criteriul de comutativitate al lui Schwarz*: Dacă există o vecinătate deschisă V a lui a inclusă în X astfel încît pentru orice punct x din V există toate derivatele parţiale mixte de ordin doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, $i \neq j$, şi dacă toate funcţiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ astfel definite pe V sînt continue în a, rezultă că avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ pentru orice $i \neq j$. În mod similar, pentru orice număr natural p, dacă f este diferenţiabilă de p ori în a, *diferenţiala de ordin p* a lui f în a este aplicaţia p-liniară (simetrică!) $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dată prin

$$T(u^1, u^2, \dots, u^p) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p = 1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a)\,u^1_{i_1} u^2_{i_2} \dots u^p_{i_p}$$

(ordinea de derivare nu contează), unde am notat: $u^1 = (u^1_1, u^1_2, \dots, u^1_n)$, $u^2 = (u^2_1, u^2_2, \dots, u^2_n)$, ... Cu această ocazie semnalăm şi o notaţie foarte des folosită, în baza comutativităţii derivatelor parţiale mixte. Anume, se consideră o funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă de p ori în a, ca mai sus, şi un multiindice de derivare, *i.e.* un element $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, unde $m_1, m_2, \dots, m_n$ sînt numere naturale şi $m_1 + m_2 + \dots + m_n = t \leqslant p$. Notăm $D^m f(a) = \frac{\partial^t f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}(a)$ (derivarea se face de m_i ori în raport cu x_i, $i = 1, 2, \dots, n$; dacă $m_i = 0$, înseamnă că nu derivăm în raport cu x_i). În particular $D^0 f(a) = f(a)$, unde 0 este multiindicele $(0, 0, \dots, 0)$. Uneori se scrie $\partial^m f(a)$ în loc de $D^m f(a)$.

III. *Cazul funcţiilor vectoriale.* Dacă E şi F sînt două spaţii normate, să considerăm o mulţime $X \subset E$, un punct interior a al lui E şi o funcţie $f : X \to F$. În cazul particular cînd $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, şi $F = \mathbb{R}$, a spune că f este diferențiabilă în a revine la a spune că f este diferențiabilă Fréchet în a (v. **derivata Fréchet**) și în acest caz $\mathrm{d}f(a)$ coincide cu diferențiala Fréchet a lui f în a. Revenind la cazul general, dacă f este diferențiabilă în orice punct al unei vecinătăți deschise $V \subset X$ a lui a, putem defini *aplicația diferențială* (de ordin 1) $\mathrm{d}f : V \to \mathscr{L}(E, F) = \{T: E \to F \mid T$ liniară și continuă$\}$ definită astfel: valoarea aplicației $\mathrm{d}f$ în x este $\mathrm{d}f(x)$. Dacă $\mathrm{d}f$ este diferențiabilă Fréchet în a spunem că f este *diferențiabilă de două ori* în a și notăm valoarea diferențialei Fréchet a lui $\mathrm{d}f$ în a prin $\mathrm{d}^2f(a)$ = *diferențiala de ordin* 2 a lui f în a (sau *diferențiala a doua* a lui f în a). Așadar, $\mathrm{d}^2f(a) : E \to \mathscr{L}(E, F)$ este o aplicație liniară și continuă, deci $\mathrm{d}^2f(a) \in \mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, F))$. Spațiile normate $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, F))$ și $\mathscr{L}_2(E, F) = \{T: E\times E \to F \mid T$ este biliniară și continuă$\}$ sînt izomorfe prin aplicația $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, F)) \ni H \mapsto T \in \mathscr{L}_2(E, F)$ definită de $T(u, v) = (H(u))\,(v)$ pentru orice u din E și v din F. Atunci $\mathrm{d}^2f(a)$ se identifică cu aplicația biliniară $\overset{\frown}{\mathrm{d}^2f(a)} : E \times E \to F$ dată prin $\overset{\frown}{\mathrm{d}^2f(a)}\,(u, v) = (\mathrm{d}^2f(a)\,(u))\,(v)$. *Criteriul de comutativitate abstract al lui Young* afirmă că aplicația $\overset{\frown}{\mathrm{d}^2f(a)}$ este simetrică (*I.C.*)

diferențiala Gâteaux Fie X un spațiu liniar și Y un spațiu liniar topologic cu același corp Γ al scalarilor ca X. Fie $U: X \to Y$ un operator oarecare și x_0, $z \in X$. Dacă există $y_0 \in Y$ astfel ca

$$y_0 = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\in\Gamma}} \frac{U(x_0 + \lambda z) - U(x_0)}{\lambda},$$

atunci se spune că este U un *operator diferențiabil Gâteaux* **în punctul** x_0, după direcția z. Elementul y_0 se notează $\delta U(x_0; z)$ și se numește **d.G. a** lui U în punctul x_0, după direcția z. Dacă există $\delta U(x_0; z)$, atunci pentru orice $\lambda \in \Gamma$ există $\delta U(x_0; \lambda z)$ și $\delta U(x_0; \lambda z) = \lambda\delta U(x_0; z)$. (*R.C.*)

diferențiala unei funcții (într-un punct) v. **diferențiala funcțiilor numerice**

diferențială totală exactă, expresie de forma $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$, astfel încît exită o funcție reală F diferențiabilă * într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \quad \text{în } \mathbb{R}^2.$$

Fie P și Q continue într-un domeniu simplu conex D, cu $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ și $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ continue în D. Necesar și suficient ca $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ să fie o **d.t.e.** în D este ca $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ în D. Extensie în $\mathbb{R}^n$. Pentru $\mathbb{R}^3$ se adaugă egalitățile:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{și} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (S.M.)$$

diferențiere constructivă Fie f, g continue constructiv pe intervalul I compact constructiv. Să presupunem că există o funcție $\delta(\varepsilon)$ strict pozitivă și constructivă pentru $\varepsilon > 0$ astfel încît, pentru $x, y \in I$ și $|y - x| \leqslant \delta(\varepsilon)$, să avem $|f(y) - f(x) - g(x)\,(y - x)| \leqslant \varepsilon\,|y - x|$. În acest caz, f este diferențiabilă constructiv pe I, iar g este derivata constructivă a lui f pe I. (*S.M.*)

dimensiune algebrică v. **spațiu liniar.**

dimensiune hilbertiană (a unui spațiu Hilbert X), marginea inferioară a numerelor cardinale ale submulțimilor dense ale lui X. În cazul unui spațiu Hilbert de dimensiune algebrică infinită, **d.h.** este egală cu numărul cardinal al unei baze ortonormale oarecare. (*R.C.*)

dinamică diferențiabilă v. **sistem dinamic**

dinamică topologică v. **sistem dinamic**

discontinuitate de a doua speță Un punct de discontinuitate a al funcției $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de a doua speță dacă nu este un punct de discontinuitate de prima speță. Discontinuitățile unei funcții cu proprietatea lui Darboux sînt toate de a doua speță. Discontinuitățile unei funcții convexe Jensen pe un interval deschis din $\mathbb{R}$ sînt de a doua speță. (*S.M.*)

discontinuitate de prima speță Fie: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I =$ interval. Punctul $a \in I$ este de **d.p.s.** pentru f dacă există limita la stînga $f(a-0)$ și limita la dreapta $f(a+0)$, dar cel puțin una dintre ele este diferită de $f(a)$. La extremitățile lui I intervine numai una dintre limite. Punctele de discontinuitate ale unei funcții cu variație mărginită sînt de prima speță. Conform unei teoreme a lui Al. Froda, punctele de discontinuitate de prima speță formează o mulțime numărabilă. (*S.M.*)

distanța dintre două mulțimi v. **distanță**

distanța lui Hausdorff v. **distanță, măsură exterioară**

distanță Se numește **d.** pe mulțimea $\mathcal{X}$ orice aplicație d definită pe $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ cu valori reale pozitive avînd proprietățile: i) $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$; ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in \mathcal{X}$; iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ pentru orice $x, y, z \in \mathcal{X}$. Sin:. *metrică.* Se numește *spațiu metric* orice pereche $(\mathcal{X}, d)$ în care $\mathcal{X}$ este o mulțime, iar d o **d.** pe $\mathcal{X}$. Dacă nu există posibilitatea unei confuzii, nu se mai precizează **d.** și se spune „spațiul metric $\mathcal{X}$". Fie $(\mathcal{X}, d)$ un spațiu metric. Fie A, B două submulțimi nevide ale lui $\mathcal{X}$. Se numește **d.** *dintre* A și B numărul $d(A, B) = \inf\limits_{x \in A,\, y \in B} d(x, y)$. Dacă $A = \{x\}$, se notează $d(x, B)$ și se numește **d.** *dintre* x și B. De remarcat că aplicația astfel construită nu este o **d.** pe mulțimea părților lui $\mathcal{X}$. Pentru $x \in X$ și $r > 0$, mulțimea $S(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$ se numește *sferă* (sau *bilă*) *deschisă* de centru x și rază r. Mai general, pentru $A \subset X$, mulțimea $S(A, r) = \{x \mid d(x, A) < r\}$ se numește *sferă deschisă* cu centrul în A și de rază r. Mulțimea $\bar{S}(A, r) = \{x \mid d(x, A) \leqslant r\}$ se numește *sferă închisă* centrată în A și de rază r. Există, și este unică, o topologie pe $\mathcal{X}$ astfel încît, pentru orice $x \in \mathcal{X}$, familia sferelor deschise cu centrul în x să fie o bază de vecinătăți ale lui x. Se spune că această topologie este *generată de* **d.** d. Dacă nu apar alte precizări, orice considerații topologice pe spațiul metric $(\mathcal{X}, d)$ se fac relativ la topologia generată de **d.**d. La nivelul noțiunilor, unele din caracterizările ce urmează se pot lua ca definiții într-o abordare ce nu presupune cunoștințe anterioare de topologie. O mulțime V este *vecinătate* a punctului x dacă și numai dacă există o sferă deschisă cu centrul în x, inclusă în V. Orice sferă centrată în x este o vecinătate a lui x. Familia sferelor $\left\{S\left(x, \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ este o bază de vecinătăți ale punctului x și deci într-un spațiu metric este verificată prima axiomă de numărabilitate. Pentru orice două puncte distincte x, y, sferele $S(x, r)$ și $S(y, r)$, unde $r = \frac{1}{2} d(x, y)$, sînt vecinătăți disjuncte ale punctelor x, y și deci un spațiu metric este un spațiu topologic separat. O mulțime A este deschisă în spațiul metric X dacă și numai dacă pentru orice $x \in A$ există o sferă $S(x, r)$ inclusă în A (sau dacă și numai dacă A este o reuniune de sfere deschise). Orice sferă deschisă este o mulțime deschisă. Un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $\mathcal{X}$ converge către $x \in \mathcal{X}$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$. Punctul x se numește ***limita*** șirului $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Un punct $x \in \mathcal{X}$ este *aderent* mulțimii $A \subset \mathcal{X}$ dacă și numai dacă există un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din A, convergent către x. Punctul x este aderent mulțimii A dacă și numai dacă $d(x, A) = 0$. Mulțimea A este închisă în spațiul metric $\mathcal{X}$ dacă și numai dacă limita oricărui șir convergent de elemente din A aparține lui A. Orice sferă închisă este o mulțime închisă. Închiderea unei sfere deschise nu coincide întotdeauna cu sfera închisă cu același centru și rază (v. Ex. 2°). Familia de sfere închise $\left\{\bar{S}\left(x, \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ este încă o bază de vecinătăți ale punctului x și deci orice spațiu metric este regulat. O mulțime A a spațiului metric $(\mathcal{X}, d)$ se numește *mărginită* dacă există $M > 0$ astfel ca $d(x, y) \leqslant M$ pentru orice $x, y \in A$. O mulțime este deci mărginită dacă și numai dacă este inclusă într-o sferă. Această proprietate nu este uneori revelatoare căc există spații metrice în care orice mulțime este mărginită (v. Ex. 2°—3°).i Numărul

$$\delta(A) = \begin{cases} \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\} & \text{dacă } A \text{ este mărginită,} \\ +\infty & \text{dacă } A \text{ nu este mărginită,} \end{cases}$$

se numește *diametrul* mulțimii A. Șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $\mathcal{X}$ este *Cauchy* (sau *fundamental*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pentru orice $n, m \geqslant n_\varepsilon$ (v. și **șir generalizat Cauchy**). Un spațiu metric este complet dacă și numai dacă orice șir Cauchy de elemente din spațiu este convergent (v. și **spațiu metric complet**). Fie A și B submulțimi ale spațiului metric $\mathcal{X}$. Mulțimea A se numește *ε-rețea* pentru B dacă pentru orice $x \in B$ există $y \in A$ astfel ca $d(x, y) < \varepsilon$. O mulțime $M \subset \mathcal{X}$ se numește *total mărginită* (sau *precompactă*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o ε-rețea finită pentru M. Un spațiu metric $\mathcal{X}$ este precompact dacă și numai dacă din orice șir de elemente din $\mathcal{X}$ se poate extrage un subșir Cauchy. Orice spațiu metric precompact este separabil. Două **d.** d_1 și d_2 pe mulțimea $\mathcal{X}$ se numesc *echivalente* dacă aplicația identică $I(x) = x$, definită pe $(\mathcal{X}, d_1)$ cu valori în $(\mathcal{X}, d_2)$, este un homeomorfism. Altfel spus, distanțele d_1 și d_2 sînt echivalente dacă generează aceeași topologie pe $\mathcal{X}$. Fie $(\mathcal{X}, d)$ și $(\mathcal{Y}, \rho)$ două spații metrice. O funcție f definită pe $\mathcal{X}$ cu valori în $\mathcal{Y}$ se numește *izometrie* dacă $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathcal{X}$. Dacă f este o bijecție, aplicația inversă f^{-1} este o izometrie a lui $\mathcal{Y}$ pe $\mathcal{X}$. Două spații metrice se numesc izomorfe dacă există o izometrie bijectivă a unuia pe celălalt. Dacă A este o submulțime (nevidă) a spațiului metric $(\mathcal{X}, d)$, atunci restricția aplicației d la $A \times A$ este o **d.** pe A, numită **d.** *indusă* (din X), iar mulțimea A înzestrată cu această **d.** se numește *subspațiu al spațiului metric* $\mathcal{X}$. Cu topologia generată de **d.** indusă, A este un subspațiu al spațiului topologic $\mathcal{X}$. Un spațiu topologic $(\mathcal{X}, \tau)$ se numește *metrizabil* dacă există o **d.** d pe $\mathcal{X}$ astfel încît τ să coincidă cu topologia generată de **d.**d (v. și **spațiu topologic metrizabil**). Ex.: 1° Fie $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Aplicația d_2 este o **d.** pe $\mathbb{R}^n$, numită **d.** *euclidiană*. Sînt de asemenea uzuale pe $\mathbb{R}^n$ următoarele **d.**:

$$d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|, \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Toate aceste **d.** sînt echivalente și definesc pe $\mathbb{R}^n$ o structură de spațiu topologic complet (topologia generată se numește *topologia obișnuită* a lui $\mathbb{R}^n$). 2°. Fie $\mathcal{X}$

o mulțime și pe $\mathcal{X}$ **d.** definită prin: $d(x, x) = 0$ și $d(x, y) = 1$ dacă $x \neq y$. Topologia generată de această **d.** este *topologia discretă*. Sfera deschisă de centru x și rază 1 este mulțimea $\{x\}$; sfera închisă de centru x și rază 1 este întreg spațiul iar închiderea oricărei sfere deschise este ea însăși. 3° Dacă $\{(\mathcal{X}_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de spații metrice, atunci spațiul topologic produs $\mathcal{X} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$ este metrizabil, topologia sa fiind generată de **d.**

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

unde $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}$. 4° Fie $(\mathcal{X}, d)$ un spațiu metric și $\mathcal{F}$ **familia** mulțimilor închise din $\mathcal{X}$. Aplicația

$$\rho_H(A, B) = \inf \{r > 0 \mid A \subset S(B, r), B \subset S(A, r)\}$$

este o **d** pe $\mathcal{F}$, numită **d.** *lui Hausdorff*. Are loc:

$$\rho_H(A, B) = \sup_{x \in A,\ y \in B} \{d(x, A),\ d(x, B)\}.$$

Prin $x \to \{x\}$ spațiul $(\mathcal{X}, d)$ este izomorf cu un subspațiu al lui $(\mathcal{F}, \rho)$. (*Gh.Gr.*)

distribuția lui Dirac v. **distribuție**

distribuție Să considerăm spațiul $\mathbb{R}^m$ cu topologia obișnuită și fie T o parte deschisă a lui $\mathbb{R}^m$. Pentru $k = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m) \in \mathbb{N}_0^m$, unde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, vom nota $\nu(k) = \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j$. Pentru o funcție $x : T \to \Gamma$, unde Γ este mulțimea numerelor reale sau complexe, vom nota cu $\mathrm{D}^k x$ derivata funcției x (dacă există), *i.e.* dacă $t = (\tau_1, \ldots, \tau_m) \in T$, atunci

$$\mathrm{D}^k x(t) = \frac{\partial^{\nu(k)} x(\tau_1, \ldots, \tau_m)}{\partial \tau_1^{\varkappa_1} \ldots \partial \tau_m^{\varkappa_m}}$$

Se notează cu $C_\Gamma^\infty(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor $x: T \to \Gamma$ pentru care $\mathrm{D}^k x$ există și este continuă pentru orice $k \in \mathbb{N}_0^m$. Mulțimea $C_\Gamma^\infty(T)$ este un spațiu liniar în raport cu operațiile obișnuite cu funcțiile. Dacă A este o parte compactă a spațiului T iar $j \in \mathbb{N}_0$, atunci formula

$$p_{Aj}(x) = \sup \{|\mathrm{D}^k x(t)| \mid \nu(k) \leqslant j, \quad t \in A\}$$

definește o seminormă pe $C_\Gamma^\infty(T)$. Se consideră pe spațiul liniar $C_\Gamma^\infty(T)$ topologia local convexă separată definită de mulțimea tuturor seminormelor p_{Aj}. Pentru orice parte compactă $A \subset T$, se notează cu $\mathcal{D}_\Gamma(T; A)$ mulțimea elementelor $x \in C_\Gamma^\infty(T)$ astfel ca funcția x să aibă suportul conținut în A. Se consideră pe spațiul liniar $\mathcal{D}_\Gamma(T; A)$ topologia local convexă separată definită de familia $\{p_{Aj}\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ de seminorme. Se notează cu $\mathcal{D}_\Gamma(T)$ limita inductivă a spațiilor $\mathcal{D}_\Gamma(T; A)$. Spațiul $\mathcal{D}_\Gamma(T)$ este bornologic. În acest spațiu, un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente converge către $\mathbf{0}$ dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele două condiţii: 1) Există o submulţime compactă A a lui T astfel ca suportul funcţiei x_n să fie conţinut în A pentru orice $n \in \mathbb{N}$; 2) Pentru orice $k \in \mathbb{N}_0^m$ şirul $\{D^k x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către zero. Se numeşte **d.** orice funcţională liniară şi continuă f pe spaţiul $\mathcal{D}_\Gamma(T)$. Se mai spune că f este o **d.** pe T; funcţionala f se numeşte **d.** *reală* sau **d.** *complexă* după cum Γ este corpul numerelor reale sau complexe. Pentru ca o funcţională liniară f pe spaţiul $\mathcal{D}_\Gamma(T)$ să fie o **d.** este necesar şi suficient ca pentru orice submulţime compactă A a lui T să existe $j \in \mathbb{N}_0$ şi un număr real $\mu > 0$ astfel ca $|f(x)| \leqslant \mu p_{Aj}(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_\Gamma(T; A)$. Dacă $\varphi : T \to \Gamma$ este o funcţie local integrabilă Lebesgue, atunci formula

$$f(x) = \int_T \varphi(t)\, x(t)\, \mathrm{d}t, \quad x \in \mathcal{D}_\Gamma(T),$$

defineşte o **d.** pe T, numită **d.** *de tip funcţie*; se mai spune că **d.** f este definită de funcţia φ. Dacă f_1 şi f_2 sînt **d.** definite respectiv de funcţiile φ_1 şi φ_2, atunci $f_1 = f_2$ dacă şi numai dacă φ_1 şi φ_2 sînt egale a.p.t. Se numeşte **d.** *lui Dirac* concentrată într-un punct $a \in T$, **d.** δ_a dată de formula $\delta_a(x) = x(a)$, $\forall x \in D_\Gamma(T)$. Dacă $a = 0$ se notează δ în loc de δ_0. **D.** lui Dirac nu este de tip funcţie. Se spune că o **d.** f se anulează pe o submulţime deschisă A a lui T dacă $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in \mathcal{D}_\Gamma(T)$ cu suportul conţinut în A. Dacă $\{A_j\}_{j \in J}$ este o familie oarecare de submulţimi deschise ale lui T şi dacă o **d.** f se anulează pe fiecare mulţime A_j, atunci f se anulează pe $\bigcup_{j \in J} A_j$. Dacă f este o **d.** pe T, se numeşte *suportul* **d.** f, şi se notează supp f sau spt f, cea mai mică mulţime închisă $B \subset T$ astfel ca f să se anuleze pe $\complement B$. Dacă **d.** f are suport compact, atunci există o funcţională liniară şi continuă g, şi numai una, pe spaţiul $C_\Gamma^\infty(T)$ cu următoarele proprietăţi: 1) $g(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_\Gamma(T)$; 2) Dacă A este o submulţime deschisă a lui T astfel ca supp $f \subset A$ şi dacă $x \in C_\Gamma^\infty(T)$ iar $x(t) = 0$, $\forall t \in A$, atunci $g(x) = 0$. Să presupunem acum $m = 1$, deci $T \subset \mathbb{R}$, şi fie f o **d.** pe T. Se numeşte *derivata* **d.** f, **d.** f' dată de formula $f'(x) = -f(x')$, $\forall x \in \mathcal{D}_\Gamma(T)$, unde x' este derivata funcţiei x. Dacă f şi g sînt **d.** pe T, iar α, $\beta \in \Gamma$, atunci $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$. Dacă f este **d.** definită de o funcţie $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care are derivata continuă, atunci **d.** f' este definită de funcţia φ', derivata funcţiei φ. Dacă însă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie care admite derivată continuă, cu excepţia unei mulţimi $A = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ în care funcţia φ admite salturile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, atunci notînd cu f **d.** definită de φ şi f_1 **d.** definită de φ', are loc egalitatea $f' = f_1 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta t_j$. Mai general, se poate înlocui mulţimea finită A printr-o mulţime oarecare de puncte izolate. **D.** f dată de formula

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t| \geqslant \varepsilon} \frac{x(t)}{t}\, \mathrm{d}t, \quad x \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}),$$

nu este de tip funcţie. Ea reprezintă derivata **d.** g dată de formula

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t| \geqslant \varepsilon} (\ln |t|)\, x(t)\, \mathrm{d}t, \quad x \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}).$$

În cazul $T \subset \mathbb{R}^m$, cu $m \in \mathbb{N}$ oarecare, dacă f este o **d.** pe T şi dacă pentru $t \in T$ punem $t = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, atunci *derivata parţială* $\partial f / \partial \tau_j$ se defineşte prin formula

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_j}\right)(x) = -f\left(\frac{\partial x}{\partial \tau_j}\right), \quad \forall x \in \mathcal{D}_\Gamma(T).$$

Mai general, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}_0^m$,

$$(D^k f)(x) = (-1)^{\nu(k)} f(D^k x), \quad \forall x \in \mathcal{D}_\Gamma(T).$$

Dacă f este o **d.** pe T iar $x \in \mathcal{D}_\Gamma(T)$, se utilizează şi notaţia (f, x) pentru $f(x)$. Dacă f este o **d.** pe $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ iar $z \in \mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ şi dacă pentru $s \in \mathbb{R}^n$ punem $z_s(t) = z(t, s)$, $\forall t \in \mathbb{R}^m$, atunci $z_s \in \mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ şi se notează $(f(t), z(t, s)) = (f, z_s)$. Punînd $y(s) = (f(t), z(t, s))$ avem $y \in \mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^n)$. **D.** $f \times g$ pe $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dată de formula $(f \times g, z) = (g(s), (f(t), z(t, s)))$, $z \in \mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ (*i.e.* $(f \times g, z) = (g; y)$) se numeşte *produsul direct* al **d.** f, g. Operaţia dată de produsul direct este comutativă şi asociativă. Dacă f, g sînt **d.** pe $\mathbb{R}^m$ dintre care cel puţin una are suport compact, atunci **d.** $f * g$ pe $\mathbb{R}^m$ dată de formula

$$(f * g, x) = (g(s), (f(t), x(t + s))), \quad x \in \mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m),$$

se numeşte *convoluţia* **d.** f, g. Avem deci

$$(f * g, x) = ((f \times g)(t, s), x(t + s)), \quad x \in \mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m).$$

Operaţia de convoluţie este comutativă, iar pentru trei **d.** (dintre care cel puţin două au suport compact) este asociativă. Avem, de asemenea, $f * \delta = f$, oricare ar fi **d.** f pe $\mathbb{R}^m$. Teoria **d.** a apărut datorită unor probleme puse în diverse domenii ale matematicii sau în fizica modernă. În studiul ecuaţiilor diferenţiale liniare de tip hiperbolic, J. Hadamard a fost condus în anul 1932 la considerarea unor „integrale divergente", iar S. L. Sobolev a introdus în 1936 noţiunea de „soluţie generalizată" a unei ecuaţii de tip hiperbolic. S. Bochner a considerat „derivate" pentru funcţii continue nederivabile în sensul obişnuit al analizei clasice. În mecanica cuantică, P.A.M. Dirac a introdus „funcţia δ" definită prin următoarele condiţii, contradictorii din punct de vedere al teoriei integralei: $\delta(t) = 0$ dacă $0 \neq t \in \mathbb{R}$, $\delta(0) = +\infty$, iar integrala funcţiei δ pe $\mathbb{R}$ este egală cu 1. Utilizarea noţiunii de **d.** a dat un sens matematic acestei „funcţii". Teoria **d.** a fost fundamentată în special de matematicianul L. Schwartz. (*R.C.*)

distribuţie de ordin finit Fie T o submulţime deschisă a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^m$. Dacă $j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ iar A este o parte compactă a lui T, vom nota cu $\mathcal{D}_\Gamma^j(T; A)$ mulţimea funcţiilor $x : T \to \Gamma$, cu $\Gamma = \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$), de clasă C^j şi supp $x \subset A$. Vom considera în $\mathcal{D}_\Gamma^j(T; A)$ operaţiile obişnuite cu funcţiile şi norma

$$\|x\| = \sup\{|D^k x(t)| \mid \nu(k) \leqslant j;\ t \in A\},$$

unde $k = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m) \in \mathbb{N}_0^m$ iar $\nu(k) = \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j$. Fie $\mathcal{D}_\Gamma^j(T)$ limita inductivă a spaţiilor $\mathcal{D}_\Gamma^j(T; A)$. O distribuţie f pe T se spune că este de *ordin finit* dacă există $j \in \mathbb{N}_0$

astfel ca f să poată fi prelungită într-o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathcal{D}_\Gamma^j(T)$. Cel mai mic număr j cu proprietatea precedentă se numește *ordinul distribuției* f. Distribuțiile de ordin zero se mai numesc și *măsuri*. Orice distribuție cu suport compact este o **d.o.f.** (*R.C.*)

distribuție de tip funcție v. **distribuție**

distribuție temperată Dacă $t = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m$ iar $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$, unde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, se va nota $t^a = \tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_m^{\alpha_m}$. Dacă $x \in C_\Gamma^\infty(\mathbb{R}^m)$ (pentru notații v. **distribuție**) și dacă pentru orice a, $k \in \mathbb{N}_0^m$ există $\lambda_{ak} \in \mathbb{R}$ astfel ca $|t^a D^k x(t)| \leqslant \lambda_{ak}$, $\forall t \in \mathbb{R}^m$ (unde D^k este operația de derivare) se spune că x este o *funcție care descrește rapid*. Fie $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ mulțimea tuturor funcțiilor $x : \mathbb{R}^m \to \Gamma$ (unde Γ este mulțimea numerelor reale sau complexe) care descresc rapid. Această mulțime este un spațiu liniar în raport cu operațiile obișnuite cu funcțiile. Pe acest spațiu liniar se consideră topologia definită de mulțimea tuturor seminormelor $p_{\varphi k}$ de forma

$$p_{\varphi k}(x) = \sup \{|\varphi(t)\, D^k x(t)| \mid t \in \mathbb{R}^m\},$$

unde φ este un polinom oarecare iar $k \in \mathbb{N}_0^m$. Mulțimea $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ (pentru notații v. **distribuție**) este densă în spațiul $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ iar topologia spațiului $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ este mai fină ca topologia indusă de cea din spațiul $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$. Prin urmare, dacă g este o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$, atunci restricția funcționalei g la spațiul $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ este o distribuție. Dacă g_1 și g_2 sînt două funcționale liniare și continue pe spațiul $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ iar f_1 și f_2 sînt respectiv restricțiile lor la spațiul $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ și dacă $g_1 \neq g_2$, atunci $f_1 \neq f_2$. O funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbb{R}^m)$ se numește **d.t.** Orice distribuție cu suport compact se prelungește în mod unic pînă la o **d.t.** Dacă x este o funcție complexă pe $\mathbb{R}^m$, care descrește rapid, atunci și transformata sa Fourier $\widetilde{x}$ este o funcție care descrește rapid. Dacă f este o **d.t.** pe $\mathbb{R}^m$, se numește *transformata Fourier* a distribuției f, distribuția $\widetilde{f}$ dată de formula $(\widetilde{f}, x) = (f, \widetilde{x})$, $\forall x \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^m)$. Dacă f este o distribuție pe $\mathbb{R}^m$, cu suport compact, atunci transformata sa Fourier $\widetilde{f}$ este distribuția definită de funcția

$$\psi(s) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} (f(t),\ e^{-i<s,\,t>}),\quad s \in \mathbb{R}^m,$$

unde $<.,.>$ este produsul scalar care generează norma euclidiană în $\mathbb{R}^m$. (*R.C.*)

divergență v. **analiză vectorială, integrare pe o varietate riemanniană orientată**

divizor Fie X o suprafață riemanniană compactă. Se notează $\mathrm{Div}(X)$ grupul abelian liber generat de X, *i.e.* mulțimea tuturor aplicațiilor $D : X \to \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $D(x) = 0$, cu excepția unui număr finit de puncte $x \in X$; legea de compoziție în grupul $\mathrm{Div}(X)$ este notată aditiv și este indusă de adunarea lui $\mathbb{Z}$. Orice element $D \in \mathrm{Div}(X)$ se numește **d.** al lui X (sau **d.** pe X). Relația de ordine a lui $\mathbb{Z}$ induce o relație de ordine pe grupul $\mathrm{Div}(X)$ definită prin $D \leqslant D'$ dacă și numai dacă $D(x) \leqslant D'(x)$ pentru orice $x \in X$. Această relație de ordine este compatibilă cu adunarea, deci grupul $\mathrm{Div}(X)$ înzestrat cu această relație de ordine este un grup ordonat; elementele pozitive ale acestui grup ordonat se numesc **d.** *pozitivi* ai lui X. Pentru orice **d.** D pe X, *gradul lui* D se definește prin $\deg(D) := \sum_{x \in X} D(x)$. Aplicația $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ astfel

definită este surjectivă și este un morfism de grupuri. Nucleul acestui morfism este un subgrup $\mathrm{Div}^\circ(X)$ al grupului $\mathrm{Div}(X)$; elementele acestui subgrup sînt **d.** *de grad zero*. Ex.: 1° Fie $a \in X$; vom nota prin aceeași literă a **d.** definit prin $a(x) := 1$ cînd $x = a$ și $a(x) := 0$ cînd $x \neq a$. 2° Fie f o funcție meromorfă care nu se anulează identic pe X (*i.e.* este diferită de elementul 0 al corpului funcțiilor meromorfe pe X). Vom defini un **d.** (f) după cum urmează. Fie x un punct din X și z un parametru local definit pe o vecinătate a lui x și cu proprietatea că $z(x) = 0$. Atunci, pe o vecinătate a lui x, f admite scrierea unică $f = z^\nu g$, cu $\nu \in \mathbb{Z}$, g o funcție olomorfă pe o vecinătate a lui x și $g(x) \neq 0$. Întregul ν astfel obținut depinde numai de f și x (*i.e.* nu depinde de alegerea parametrului local z) și va fi notat $(f)(x)$. Aplicația $X \ni x \mapsto (f)(x) \in \mathbb{Z}$ este un **d.** pe X. 3° Fie ω o diferențială meromorfă pe X care nu se anulează identic pe X. Vom defini un **d.** (ω) după cum urmează. Fie x un punct din X și z un parametru local definit pe o vecinătate a lui x și astfel încît $z(x) = 0$. Atunci pe o vecinătate a lui x, forma diferențială ω admite scrierea unică $\omega = z^\nu g\, dz$, cu $\nu \in \mathbb{Z}$, g o funcție olomorfă pe o vecinătate a lui x și $g(x) \neq 0$. Întregul ν astfel definit depinde numai de ω și x și se notează $(\omega)(x)$. Aplicația $X \ni x \mapsto (\omega)(x) \in \mathbb{Z}$ este un **d.** Fie $\mathcal{M}(X)$ corpul funcțiilor meromorfe pe X. Aplicația $f \mapsto (f)$ de la grupul multiplicativ $\mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ în grupul aditiv $\mathrm{Div}(X)$ este un morfism de grupuri. Imaginea acestui morfism este un subgrup al lui $\mathrm{Div}(X)$, notat $\mathrm{P}(X)$; elementele lui $\mathrm{P}(X)$ se numesc **d.** *principali* ai lui X. Grupul cît $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{P}(X)$ se numește *grupul claselor de* **d.** ai lui X (sau *grupul lui Picard al* lui X) și se notează $\mathrm{Pic}(X)$ (sau $\mathrm{Cl}(X)$). Doi **d.** D, D' pe X se numesc (*liniar*) *echivalenți* dacă ei aparțin aceleiași clase în $\mathrm{Pic}(X)$, *i.e.* dacă diferența $D - D'$ este un **d.** principal. Este clar că **d.** de forma (ω), unde ω este o diferențială meromorfă pe X, formează o clasă de echivalență, *i.e.* un element în grupul lui Picard $\mathrm{Pic}(X)$; această clasă se numește *clasa canonică* a suprafeței X și se notează prin litera K. Pentru orice **d.** D, funcțiile meromorfe f pe X, cu proprietatea că $(f) + D \geqslant 0$, împreună cu funcția $f = 0$, formează un spațiu vectorial complex notat $\mathcal{L}(D)$. Se arată că acest spațiu vectorial complex $\mathcal{L}(D)$ are dimensiune finită care se notează $l(D)$. Se arată, de asemenea, că funcțiile $\deg(D)$ și $l(D)$ sînt constante pe fiecare clasă de echivalență, *i.e.* dacă D și D' sînt **d.** echivalenți, atunci $\deg(D) = \deg(D')$ și $l(D) = l(D')$.

Teorema Riemann-Roch. Pentru orice suprafață riemanniană compactă X și orice **d.** D în X are loc formula

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) - g + 1,$$

unde g este genul suprafeței X.

Genul unei suprafețe riemanniene compacte X este un număr întreg $g \geqslant 0$ definit prin $2g := \dim H^1(X, \mathbb{C})$ pentru structura de spațiu vectorial complex a lui $H^1(X, \mathbb{C})$ (v. **coomologia fascicolelor, formă diferențială pe o varietate diferențiabilă**); notăm că g este un invariant topologic al lui X și că $H^1(X, \mathbb{Z})$ este un grup liber cu $2g$ generatori. Importanța fundamentală a teoremei Riemann-Roch pentru teoria suprafețelor riemanniene compacte va fi ilustrată prin corolarele următoare:

Corolarul 1. $\deg(K) = 2g - 2$ și $l(K) = g$.

Corolarul 2. Diferențialele de prima speță formează un spațiu vectorial complex Ω de dimensiune g.

Corolarul 3. Dacă $\deg D > 2g - 2$, atunci $\deg(K - D) < 0$ și $l(K - D) = 0$.

Corolarul 4. Dacă $g = 0$, atunci, pentru orice punct $a \in X$, există o funcție f avînd un pol de ordin 1 în punctul a și olomorfă în rest. În particular, aplicația $f : X \to \widetilde{\mathbb{C}}$ este un izomorfism analitic. (Astfel, orice suprafață riemanniană de gen zero este analitic izomorfă cu sfera lui Riemann.)

Corolarul 5. Dacă $\deg(D) \geqslant 2g + 1$ și dacă $f_0, \ldots, f_N$ este o bază a spațiului vectorial $\mathcal{L}(D)$, atunci aplicația $[f_0 : \ldots : f_N] : X \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ este o scufundare. Pentru definirea aplicației din enunțul precedent se procedează după cum urmează. Fie $x \in X$ și z un parametru local pe o vecinătate a lui x astfel încît $z(x) = 0$. Atunci, există ν întreg astfel încît $f_i = z^\nu g_i$, $i = 0, \ldots, N$, în vecinătatea lui x, cu g_i funcție olomorfă pe o vecinătate a lui x și cu cel puțin un $g_i(x)$ diferit de zero. Se pune atunci, prin definiție,

$$[f_0 : \ldots : f_N]\,(x) := [g_0(x) : \ldots : g_N(x)].$$

Din Corolarul 5 rezultă că orice suprafață riemanniană compactă este o varietate proiectivă. Mai precis, se arată că orice suprafață riemanniană compactă admite o scufundare olomorfă în $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Fie X o suprafață riemanniană compactă, $x_0 \in X$ un punct fixat și $\pi_1(X, x_0)$ grupul fundamental al spațiului „punctat" (X, x_0). Fie Ω spațiul vectorial complex al diferențialelor de prima speță pe X și Ω^* dualul complex al lui Ω; după Corolarul 2, Ω^* este de dimensiune g. Considerăm aplicația $h\colon \pi_1(X, x_0) \to \Omega^*$ definită prin

$$h(\alpha)\,(\omega) := \int_\alpha \omega, \quad \alpha \in \pi_1(X, x_0), \quad \omega \in \Omega.$$

Este clar că h este un morfism de grupuri. Vom nota imaginea acestui morfism prin Γ. Există un unic morfism de grupuri $j : \mathrm{Div}(X) \to \Omega^*/\Gamma$ cu proprietatea că $j(x)\,(\omega) = \int_\alpha \omega$ pentru orice $x \in X$ și $\omega \in \Omega$, unde α este un drum pe X cu originea în punctul x_0 și cu extremitatea în punctul x.

Teorema lui Abel. Γ este o latice de perioade în Ω^* iar aplicația j induce un izomorfism de grupuri $j : \mathrm{Pic}^0(X) \to \Omega^*/\Gamma$, unde $\mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Div}^0(X)/\mathrm{P}(X)$. Obs. Ω^*/Γ este un tor complex de dimensiune g (unde g este genul lui X) numit *varietatea lui Jacobi* (sau *jacobiana lui X*) și notat $\mathrm{Jac}(X)$; se arată că $\mathrm{Jac}(X)$ este o varietate abeliană. (*M.J.*).

domeniu 1 Dacă M este o varietate diferențiabilă de clasă C^r cu $r \geqslant 1$, un **d.** de clasă C^k pe M, unde $1 \leqslant k \leqslant r$, este o submulțime D a lui M cu proprietatea că, pentru orice punct $a \in D \setminus \mathring{D}$, există o vecinătate deschisă U a lui a în M și o submersie reală $f \in C^k(U)$ astfel încît $U \cap D = \{x \in U \mid f(x) \leqslant 0\}$. Dacă D este un **d.** pe M, mulțimea $B := D \setminus \mathring{D}$ este o parte a frontierei topologice a lui D, numită *bordul* sau *frontiera diferențiabilă* a lui D și notată, de asemenea, prin ∂D. Pentru ca o mulțime D a lui M să fie un **d.** de clasă C^k pe M este necesar și suficient să fie îndeplinite următoarele două condiții: 1) D este o submulțime local închisă a lui M și $D \subset \overline{\mathring{D}}$, închiderea interiorului lui D; 2) $B := D \setminus \mathring{D}$ este o subvarietate diferențiabilă de clasă C^k a lui M. Fie D un **d.** de clasă C^1 pe M, $j : B \to M$ aplicația de incluziune și $x \in B$. Un vector tangent $v \in T(M)_x \setminus j_{*,x}(T(B)_x)$ se numește *exterior* (resp. *interior*) lui D în punctul x dacă v este vectorul viteză la momentul $t = 0$ al unui drum $\gamma \in C^1(I_\varepsilon, M)$, cu $\gamma(0) = x$, astfel încît $\gamma(t) \in M \setminus D$ (resp. $\gamma(t) \in \mathring{D}$) pentru $t > 0$. Dacă $f \in C^1(U)$ este o submersie ca în definiția **d.** și $x \in U \cap B$, atunci $v \in T(M)_x$ este un vector exterior (resp. interior) lui D în punctul x dacă și numai dacă $df_x(v) > 0$ (resp. $df_x(v) < 0$), unde df_x este diferențiala lui f în punctul x. Presupunem acum că M este o varietate orientată și că D este un **d.** de clasă C^1 pe M. Atunci există o unică orientare pe B, numită *orientarea bord* a lui B, cu proprietatea următoare: dacă x este un punct din B, $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ un reper al lui

$T(B)_x$ și v un vector tangent exterior lui D în punctul x, atunci $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ este un reper pozitiv al lui $T(B)_x$ pentru orientarea bord dacă și numai dacă $(v, j_{*,x}\, e_1, \ldots, j_{*,x}\, e_{n-1})$ este un reper pozitiv al lui $T(M)_x$ pentru orientarea structurală a lui M. În absența oricărei alte precizări, bordul B al unui **d.** D de clasă C^1 al unei varietăți diferențiabile orientate M se consideră orientat cu orientarea bord; varietatea diferențiabilă B înzestrată cu această orientare se mai numește *bordul orientat* al lui D. **2** Mulțime deschisă și conexă într-un spațiu topologic. În $\mathbb{R}$ **d.** sînt intervale deschise. În $\mathbb{R}^n$ avem următoarea proprietate: dacă D este un **d.**, atunci orice două puncte a și b din D pot fi unite printr-un drum poligonal. **3 D.** unei funcții, **d.** de definiție al acelei funcții. (*M.J.*)

domeniu de olomorfie Fie Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{C}^n$. Pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$, se notează prin $\hat{K}_\Omega$ mulțimea tuturor punctelor $z \in \Omega$ cu proprietatea că $|f(z)| \leqslant \sup_{\hat{K}} |f|$ oricare ar fi $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (mulțimea funcțiilor olomorfe pe Ω). Se observă că avem $\hat{K}_\Omega \subset \mathrm{co}(K)$; în particular $\hat{K}_\Omega$ este mărginită. Mulțimea deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ se numește *olomorf-convexă* dacă, pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$, mulțimea $\hat{K}_\Omega$ este de asemenea compactă. Ω se numește **d.o.** (în $\mathbb{C}^n$) dacă nu există nici o pereche de mulțimi deschise Ω_1 și Ω_2 în $\mathbb{C}^n$ cu proprietățile următoare: a) Ω_1 este nevidă și este conținută în $\Omega \cap \Omega_2$; b) Ω_2 este conexă și nu este conținută în Ω; c) Pentru orice funcție $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ există o funcție $f_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ astfel încît $f_2 = f$ pe Ω_1. Cînd ultima condiție este cerută pentru o funcție dată $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, o vom nota prin c_f). Vom spune că mulțimea deschisă Ω în $\mathbb{C}^n$ este *domeniul natural de existență* al funcției $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ dacă nu există nici o pereche de mulțimi deschise Ω_1 și Ω_2 în $\mathbb{C}^n$ satisfăcînd condițiile a), b) și c_f).
Teorema lui Cartan-Thullen. Condițiile următoare asupra unei submulțimi deschise Ω a lui $\mathbb{C}^n$ sînt echivalente: i) Ω este **d.o.**; ii) Ω este olomorf-convexă; iii) Există $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ astfel încît Ω să fie domeniul natural de existență al funcției f.
Ex.: 1° Orice mulțime deschisă în $\mathbb{C}$ (deci cazul $n = 1$) este un **d.o.** 2° Dacă Ω_1 și Ω_2 sînt două **d.o.** în $\mathbb{C}^p$ și $\mathbb{C}^q$, respectiv, atunci $\Omega_1 \times \Omega_2$ este un **d.o.** în $\mathbb{C}^{p+q}$. 3° Orice mulțime deschisă și convexă în $\mathbb{C}^n$ este un **d.o.** 4° Fie $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ și $\Omega' \subset \mathbb{C}^p$ mulțimi deschise iar $f : \Omega \to \mathbb{C}^p$ o aplicație olomorfă. Dacă Ω și Ω' sînt **d.o.** sau dacă Ω' este **d.o.** și $f^{-1}(\Omega')$ o mulțime relativ compactă în Ω, atunci $f^{-1}(\Omega')$ este un **d.o.** 5° Orice intersecție finită de **d.o.** este un **d.o.** Ca un contraexemplu menționăm că $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ nu este un **d.o.** cînd $n \geqslant 2$ (*teorema de prelungire a lui Hartogs*). Notăm că, în virtutea teoremei lui Cartan-Thullen, o mulțime deschisă Ω în $\mathbb{C}^n$ este un **d.o.** dacă și numai dacă este o varietate Stein. (*M.J.*)

domeniu de olomorfie (peste $\mathbb{C}^n$) v. **înfășurătoare de olomorfie**

domeniu fundamental al grupului modular v. **funcție modulară**

domeniu natural de existență al unei funcții olomorfe v. **domeniu de olomorfie**

domeniu pseudoconvex v. **pseudoconvexitate**

domeniu Riemann v. **înfășurătoare de olomorfie**

domeniu Runge (în $\mathbb{C}^n$) O funcție complexă P pe $\mathbb{C}^n$ se numește *polinom* $\mathbb{C}$*-analitic* dacă există un număr natural k și numere complexe a_α definite pentru $\alpha \in \{\mathrm{N} \cup 0\}^n$ și $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k$ astfel încît $P(z) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha z^\alpha$, unde $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ pentru $z = (z_1, \ldots, z_n)$ și $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Pentru orice mulțime compactă K în $\mathbb{C}^n$, se notează $\tilde{K}$ mulțimea tuturor punctelor $z \in \mathbb{C}^n$ cu proprie tatea că $|F(z)| \leqslant \sup\limits_K |F|$ oricare ar fi polinomul $\mathbb{C}$-analitic F în $\mathbb{C}^n$. Mulțimea compactă K se numește *polinomial convexă* cînd $K = \widetilde{K}$. O mulțime deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ se numește **d.R.** dacă mulțimea $\widetilde{K}$ este conținută în Ω pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$. Deoarece $\hat{K}_\Omega \subset \widetilde{K}$ (v. **domeniu de olomorfie**) rezultă că orice **d.R.** în $\mathbb{C}^n$ este un domeniu de olomorfie. Ex.: Dacă $P_1, \dots, P_N$ sînt polinoame $\mathbb{C}$-analitice în $\mathbb{C}^n$, atunci mulțimea

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |P_\nu(z)| < 1, \quad \nu = 1, \dots, N\}$$

este un **d.R.** în $\mathbb{C}^n$. O mulțime compactă $K \subset \mathbb{C}^n$ se numește *poliedru polinomial* dacă există un număr finit de polinoame $\mathbb{C}$-analitice $P_1, \dots, P_N$ astfel încît

$$K = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |P_\nu(z)| \leqslant 1, \quad \nu = 1, \dots, N\}.$$

Orice poliedru polinomial este un compact polinomial convex. Pe de altă parte, pentru orice compact polinomial convex K, poliedrele polinomiale L astfel încît $K \subset \mathring{L}$ formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui K. În fine, pentru orice **d.R.** Ω, există un șir crescător $\{K_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ de mulțimi compacte polinomial convexe K_ν astfel încît $K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$ și $\Omega = \bigcup\limits_{\nu \in \mathbb{N}} K_\nu$.

Teorema de aproximare. Un domeniu de olomorfie Ω este un **d.R.** în $\mathbb{C}^n$ dacă și numai dacă polinoamele $\mathbb{C}$-analitice sînt dense în spațiul $\mathcal{O}(\Omega)$ pentru topologia convergenței uniforme pe mulțimile compacte ale lui Ω.

Teorema de existență pentru operatorul $\bar{\partial}$. Fie Ω un **d.R.** și f o $(p, q + 1)$-formă diferențială de clasă C^∞ pe Ω astfel încît $\bar{\partial} f = 0$. Atunci există o (p, q)-formă diferențială u de clasă C^∞ pe Ω astfel încît $\bar{\partial} u = f$.

Folosind teorema lui Dolbeault, teorema precedentă poate fi interpretată ca o teoremă de anulare analitică, și anume că, pentru orice **d.R.** Ω în $\mathbb{C}^n$, $H^q(\Omega, \Omega^{(p)}) = 0$ cînd $q \geqslant 1$ (v. **formă diferențială** (pe o variantă complexă)).

Teorema de anulare topologică. Dacă Ω este un **d.R.** în $\mathbb{C}^n$, atunci $H^q(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ cînd $q \geqslant n$.

Din teorema de anulare topologică combinată cu teorema de aproximare a lui Runge în $\mathbb{C}$ rezultă că o mulțime deschisă Ω în $\mathbb{C}$ este un **d.R.** dacă și numai dacă fiecare componentă conexă a lui Ω este simplu conexă. Astfel, pentru $n = 1$, **d.R.** admit o caracterizare topologică. (*M.J.*)

domeniul de convergență al unei serii de puteri v. **serie de puteri**

dreapta reală v. **corpul numerelor reale**

dreapta reală extinsă Dreapta reală $\mathbb{R}$ nu are un cel mai mic element și un cel mai mare element. Pentru a remedia această deficiență se introduc două elemente ideale, $-\infty$ și ∞, străine de $\mathbb{R}$, cu statut de cel mai mic element pentru $-\infty$ și de cel mai mare element pentru ∞ în mulțimea $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Ținînd seama de definiția noastră pentru mulțimea $\mathbb{R}$, cel mai simplu este să considerăm $\overline{\mathbb{R}}$ ca fiind mulțimea părților $x \subset \mathbb{Q}$ satisfăcînd condițiile b) și c) din definiția lui $\mathbb{R}$ (v. **corpul numerelor reale**). Această mulțime $\overline{\mathbb{R}}$ se ordonează prin incluziune de mulțimi, la fel ca $\mathbb{R}$, și avem $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\varnothing, \mathbb{Q}\}$, unde mulțimea vidă $\varnothing$ este cel mai mic element, iar mulțimea totală $\mathbb{Q}$ cel mai mare element în $\overline{\mathbb{R}}$. De aceea, este convenabil să punem, prin definiție, $-\infty := \varnothing$ și $\infty := \mathbb{Q}$. O mulțime $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ se numește *mulțime deschisă* dacă satisface condițiile următoare: 1) $U \cap \mathbb{R}$ este o mulțime deschisă în $\mathbb{R}$; 2) Dacă $-\infty \in U$, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încît $x \in U$ pentru orice

număr real $x < c$; 3) Dacă $\infty \in U$, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încît $x \in U$ pentru orice număr real $x > c$. Mulțimile deschise în $\overline{\mathbb{R}}$ formează o topologie, numită *topologia canonică* a lui $\overline{\mathbb{R}}$; cînd considerăm $\overline{\mathbb{R}}$ ca spațiu topologic se are în vedere topologia canonică. Aplicația $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ definită prin $\varphi(-\infty) := -1$, $\varphi(\infty) := 1$ și $\varphi(x) := \dfrac{x}{1 + |x|}$ pentru $x \in \mathbb{R}$ este un omeomorfism. Rezultă că spațiul topologic $\overline{\mathbb{R}}$ este conex, local conex, compact și cu bază numărabilă, iar $\mathbb{R}$ este o submulțime deschisă densă a lui $\overline{\mathbb{R}}$; astfel $\overline{\mathbb{R}}$ este o compactificare local conexă a lui $\mathbb{R}$. Mulțimea ordonată $\overline{\mathbb{R}}$ înzestrată cu topologia canonică se numește **d.r.e.** (sau *dreapta reală încheiată*). (*M.J.*)

dreapta reală încheiată, v. **dreapta reală extinsă**

dreaptă (într-un spațiu liniar) v. **varietate liniară**

drum v. **omotopie, drumuri omotope** (în $\mathbb{C}$)

drum (în $\mathbb{R}^n$), orice aplicație continuă a intervalului compact $[a, b]$ în $\mathbb{R}^n$. Pentru $n = 2$ obținem un drum în plan, dat de o reprezentare parametrică scalară de forma $x = f(t)$, $y = g(t)$, f și g continue pe $[a, b]$. Mulțimea punctelor de coordonate $(f(t), g(t))$, $t \in [a, b]$, constituie imaginea drumului. (*S. M.*)

drum de clasă C^1 v. **integrala curbilinie** (în $\mathbb{R}^n$)

drum închis, drum $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ cu proprietatea $r(a) = r(b)$. Ex.: $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$, $a = 0$, $b = 2\pi$. (*S.M.*)

drum rectificabil, drum $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că mulțimea $\{l_\Delta(r)\}$ este majorată ($l_\Delta(r) = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n-1} (r(t_{i+1}) - r(t_i))}$, unde $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b\}$, iar $r(t_{i+1}) - r(t_i)$ este distanța euclidiană de la $r(t_i)$ la $r(t_{i+1})$). Numărul $\sup\limits_\Delta \{l_\Delta(r)\}$ se numește *lungimea* drumului r. (*S.M.*)

drum simplu, drum $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că nu există $x \neq y$ cu $a < x < y \leqslant b$ sau $a \leqslant x < y < b$ astfel încît $r(x) = r(y)$. (*S.M.*)

drumuri echivalente v. **echivalența a două drumuri**

drumuri omotope (în $\mathbb{C}$) Fie D un domeniu în planul complex $\mathbb{C}$. Se numește *drum* în D orice aplicație continuă $\lambda : [0, 1] \to D$. Punctul $\lambda(0)$ se numește *originea drumului* iar punctul $\lambda(1)$ *capătul drumului* λ. Imaginea segmentului $[0, 1]$ prin aplicația λ se numește *suportul* (sau *imaginea*) *drumului* λ. Drumul λ se numește *închis* dacă $\lambda(0) = \lambda(1)$. Pentru $x, y \in D$, fie $\mathcal{L}(x, y)$ mulțimea drumurilor în D care au originea în x și capătul în y. Fie λ, μ drumuri în D. Se numește *deformare continuă a drumului λ în drumul μ*, o aplicație continuă $F : [0, 1] \times [0, 1] \to D$ astfel încît: $F(t, 0) = \lambda(t)$; $F(t, 1) = \mu(t)$; $F(0, s) = \lambda(0) = \mu(0)$; $F(1, s) = \lambda(1) = \mu(1)$ pentru orice $t, s \in [0, 1]$. Fie $x, y \in D$ și $\lambda, \mu \in \mathcal{L}(x, y)$. Drumul λ se numește *omotop* în D cu drumul μ, și se scrie $\lambda \sim \mu$, dacă există o deformare continuă a lui λ în μ. Relația de omotopie este o relație de echivalență în $\mathcal{L}(x, y)$. Dacă $\lambda \in \mathcal{L}(x, y)$ și $\mu \in \mathcal{L}(y, z)$, drumul definit prin $\lambda\mu(t) = \lambda(2t)$ dacă $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ și $\lambda\mu(t) = \mu(2t - 1)$ dacă $1/2 \leqslant t \leqslant 1$ se numește *compunerea drumului λ cu drumul μ*. Dacă $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{L}(x, y)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}(y, z)$ și $\lambda_1 \sim \lambda_2$, $\mu_1 \sim \mu_2$, atunci $\lambda_1\mu_1 \sim \lambda_2\mu_2$. Pentru $\lambda \in \mathcal{L}(x, y)$ se notează λ^{-1} drumul definit prin $\lambda^{-1}(t) = \lambda(1 - t)$ și se numește *inversul drumului* λ. Pentru orice $x \in D$ se notează cu e_x drumul definit prin $e_x(t) = x$, $\forall t \in [0, 1]$. Un drum $\lambda \in \mathcal{L}(x, x)$ se numește *omotop cu zero* dacă $\lambda \sim e_x$. Un domeniu $D \subset \mathbb{C}$ se numește *simplu conex* dacă orice drum închis în D este omotop cu zero. Fie $\delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ o diviziune a segmentului $[0, 1]$ și fie λ un drum în D. Pentru fiecare $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, fie λ_k drumul cu originea $\lambda(t_k)$ şi capătul $\lambda(t_{k+1})$ definit prin $\lambda_k(t) = \lambda((1-t)\,t_k + tt_{k+1})$. Sistemul de drumuri $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ astfel obţinut se numeşte *descompunere a drumului* λ *asociată diviziunii* δ. Drumul λ este omotop cu $\lambda_0\lambda_1 ... \lambda_{n-1}$. Pentru $a, b \in \mathbb{C}$, drumul $t \to (1-t)a+tb$, care are ca suport segmentul $[a, b]$, se numeşte *drum liniar* şi se notează tot cu $[a, b]$. Un drum care se poate descompune într-o familie de drumuri liniare se numeşte *drum poligonal*. O mulţime D se numeşte *stelată relativ la* $a \in D$ dacă $[a, x] \subset D$ pentru orice $x \in D$. Un domeniu $D \subset \mathbb{C}$ care este stelat în raport cu unul din punctele sale este simplu conex. (*Gh.Gr.*)

dualul unui fibrat vectorial Dacă M este o varietate diferenţiabilă de clasă C^r şi E un fibrat vectorial real de clasă C^r peste M, dualul lui E este fibratul vectorial real E^* de clasă C^r peste M cu proprietăţile următoare: 1) Pentru orice punct $x \in M$, $E_x^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_x, \mathbb{R})$, *dualul* spaţiului vectorial E_x; 2) Pentru orice submulţime deschisă U a lui M şi orice reper $(e_1, ..., e_p)$ al lui E peste U, $(f_1, ..., f_p)$ este un reper al lui E^* peste U, unde $f_i(x)$ este forma liniară pe E_x definită prin $\langle f_i(x), e_j(x)\rangle = \delta_{ij}$ (simbolul lui Kronecker), $x \in U$, $i, j = 1, ..., n$. În mod similar se defineşte dualul E^* al unui fibrat vectorial complex E peste M cu deosebirea că aici $E_x^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_x, \mathbb{C})$, *i.e.* E_x^* este dualul complex al spaţiului vectorial complex E_x. *Fibratul cotangent* $T(M)^*$ al lui M este, prin definiţie, dualul fibratului tangent $T(M)$. Similar, *fibratul cotangent complex* $T_{\mathbb{C}}(M)^*$ al lui M se defineşte ca fiind dualul fibratului tangent complex $T_{\mathbb{C}}(M)$. Dacă $\alpha = (x_1, ..., x_n)$ este o hartă locală a lui M, rezultă că $(dx_1, ..., dx_n)$ este un reper peste U_α al fibratului cotangent şi al fibratului cotangent complex. (*M.J.*)

dualul unui spaţiu local convex v. **conjugatul unui spaţiu local convex**

E

echivalenţa a două drumuri Drumurile $r: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ şi $r': [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ sînt echivalente dacă există un homeomorfism $h: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ astfel încît $r'(\tau) = r(h(\tau))$ pentru orice $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Se arată că fiecare dintre proprietăţile de a fi drum simplu, drum închis sau drum rectificabil este invariantă prin relaţia de echivalenţă. O clasă de echivalenţă de drumuri se numeşte *curbă* (în $\mathbb{R}^n$). (*S.M.*)

echivalenţă de categorii v. **functor**

echivalenţă omotopică v. **omotopie**

ecuaţia căldurii, ecuaţia $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = F(x, t)$, unde $u = u(x, t): \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, Ω fiind o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, iar Δ_n operatorul lui Laplace în raport cu variabilele spaţiale $x_1, ..., x_n$. Pentru $n = 1, 2$ sau 3 această ecuaţie descrie (în mod idealizat) propagarea căldurii într-o bară, respectiv pe o placă, într-un mediu omogen din spaţiu, $u(x, t)$ reprezentînd în acest caz temperatura în punctul x şi la momentul $t \geqslant 0$. **E.c.** este cea mai simplă şi una dintre cele mai importante ecuaţii de tip parabolic. Funcţiile care verifică **e.c.** se mai numesc şi *funcţii calorice* şi se bucură de unele proprietăţi specifice, dintre care cele mai importante sînt regularitatea şi principiul de maxim şi de minim. Problemele naturale care se ataşează **e.c.** sînt: 1) *Problema mixtă*. Dacă Ω este un domeniu din $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ frontiera sa, se dau: i) Condiţiile iniţiale $u(x, 0) = f(x)$ pentru $x \in \overline{\Omega}$ (deci, în interpretarea fizică, $x \to f(x)$ reprezintă distribuţia iniţială a temperaturii în Ω; ii) Condiţii la frontieră, de exemplu, a) $u(x, t) = g(x, t)$, $\forall x \in \partial\Omega$, $t \geqslant 0$, b) $\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = g(x, t)$, $\forall x \in \partial\Omega$, $t \geqslant 0$, cu α, β funcţii date pe $\partial\Omega \times [0, \infty)$. 2) *Problema lui Cauchy*. Se dă $u(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ (eventual cu unele condiţii de comportare la infinit). Soluţia fundamentală a **e.c.** este distribuţia

$$E(x, t) = (2\sqrt{\pi t}\,)^{-n}\, H(t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

unde $H(t)$ este funcţia lui Heaviside, iar $|x|$ norma euclidiană a lui x. Această soluţie fundamentală este invariantă la rotaţii şi este de clasă C^∞ în $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Din această ultimă proprietate se deduce hipoelipticitatea operatorului căldurii. Cu ajutorul soluţiei fundamentale se poate exprima soluţia problemei lui Cauchy. Pentru ecuaţia omogenă $(F(x, t) \equiv 0)$ soluţia problemei lui Cauchy (cu data iniţială $f(x)$) este

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y, t) f(y)\, dy \quad (t > 0) \quad (\textit{formula lui Poisson}).$$

Se cere ca f să fie continuă şi mărginită. Soluţia rezultă continuă pe $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, cu derivatele $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ şi $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i x_j}$, $i, j = 1, ..., n$, continue pe $\mathbb{R}^n \times (0, T]$.

Soluția ecuației neomogene este dată de formula

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y, t) f(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y, t-\tau) F(y, \tau)\, dy\, d\tau;$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T).$$

Despre data inițială f se cere doar ca ea să fie continuă și mărginită iar despre membrul drept F să fie continuu mărginit iar derivatele $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, să existe, să fie continue și mărginite pe $\mathbb{R}^n \times [0, T]$. În general, dacă nu se impun condiții suplimentare, problema lui Cauchy pentru **e.c.** poate să nu aibă soluții unice. Studiul unicității problemei lui Cauchy a condus independent pe T. Carleman, M. Nicolescu și A. N. Tihonov la noțiunea importantă de clasă de unicitate pentru problema lui Cauchy; ei au determinat (prin condiții de creștere la infinit) astfel de clase. Problema lui Cauchy este corect pusă pentru **e.c.**, dar fenomenul specific care apare este „viteza de propagare infinită". Funcțiile calorice verifică și un principiu de maxim și minim foarte important, anume dacă u verifică **e.c.** omogenă pe $\mathbb{R}^n \times (0, T)$, dacă este continuă și mărginită pe $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ și dacă $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $i = 1, \ldots, n$, există și sînt continue pe $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, atunci $\sup\limits_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} u(x, 0)$ și $\min\limits_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \min\limits_{\mathbb{R}^n} u(x, 0)$. Acest principiu asigură unicitatea soluției problemei mixte, precum și (în aceleași condiții privind soluțiile) dependența continuă de date. În ceea ce privește existența soluției problemei mixte, cu ajutorul metodei separării variabilelor aceasta se poate demonstra în numeroase cazuri. **E.c.** pe varietăți ($\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ cu Δ = operatorul lui Laplace-Beltrami) intervine în numeroase probleme, de exemplu în demonstrația teoremei indicelui a lui Atiyah-Singer. *(G.G.)*

ecuația funcțională a lui Riemann v. **funcția** ζ

ecuația Klein-Gordon Dacă $x_0 = ct$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ (c = viteza luminii), funcția de undă $\varphi(x_0, x)$ care descrie comportarea unei particule relativiste, libere pseudoscalară de masă m_0, verifică **e.K.G.** $(\Box + m_0^2)\varphi = 0$. În cazul particulei relativiste libere de spin 1/2 de masă m_0, de exemplu electronul, protonul, neutronul etc., descrierea este făcută de funcția de undă (spinorială) $\Psi(x_0, x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ care verifică ecuația lui Dirac

$$\left(\mathrm{i} \sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right) \Psi(x_0, x) = 0,$$

unde I este matricea unitate, iar γ^k matricile date de:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuația lui Dirac se poate obține prin factorizarea matricială a **e.K.G.**:

$$\left(\mathrm{i} \sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right)\left(\mathrm{i} \sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} + m_0 I\right) = -(\Box + m_0^2)\, I. \quad (G.G.)$$

ecuația lui Airy v. **funcții speciale definite cu ajutorul unor ecuații diferențiale**

ecuația lui Bernoulli, ecuație diferențială de forma $y' = a(x)\,y + b(x)\,y^\alpha$, α real, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 0$; dacă y este soluție a unei **e.B.**, atunci z definită prin $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$ este soluție a unei ecuații afine. *(A.H.)*

ecuația lui Clairaut, ecuație de forma $y = xy' + \varphi(y')$; soluția generală este $y = cx + \varphi(c)$, iar soluția singulară se obține prin eliminarea lui λ în sistemul $y = x\lambda + \varphi(\lambda)$, $x + \varphi'(\lambda) = 0$. *(Gh.Gr.)*

ecuația lui Dirac v. **ecuația Klein-Gordon**

ecuația lui Gauss, ecuația diferențială $z(1-z)\,w'' + [\gamma - [\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0$. O soluție *olomorfă* în cercul $|z| < 1$ este seria hipergeometrică

$$F'(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n.$$

Seria hipergeometrică se reduce în situații particulare la seriile care reprezintă funcții elementare uzuale:

$$F(-m, \beta, \beta, -x) = (1+x)^m; \quad F(1, \beta, \beta, x) = 1/(1-x);$$

$$xF(1, 1, 2, -x) = \ln(1+x); \quad \lim_{\beta \to \infty} F(1, \beta, 1, x/\beta) = \exp(-x);$$

$$xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) = \arcsin x; \quad xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right) = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Cu ajutorul seriei hipergeometrice se pot reprezenta și unele funcții speciale. Seria hipergeometrică se poate reprezenta și cu ajutorul unor integrale; de exemplu,

$$\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\, dt. \quad (A.H.)$$

ecuația lui Helmholtz, ecuația $\Delta u + k^2 u = -f(x)$. Apare în mod natura astfel: dacă se consideră ecuația undelor neomogenă

$$\Box_a u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x, t) = a^2 f(x)\, e^{\mathrm{i}\omega t},$$

și dacă se caută o soluție cu aceeași perioadă dar de amplitudine necunoscută, *i.e.* $u(x, t) = u(x)\, e^{\mathrm{i}\omega t}$, atunci funcția $u(x)$ trebuie să verifice **e.H.** cu $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$.

Pentru $n = 1$, distribuțiile

$$E_3(x) = -\frac{e^{\mathrm{i}k|x|}}{4\pi|x|} \quad \text{și} \quad \bar{E}_3(x) = -\frac{e^{-\mathrm{i}k|x|}}{4\pi|x|}$$

sînt soluții fundamentale ale **e.H.** Pentru $n = 2$, soluția fundamentală $E_2(x)$ este transformata Fourier inversă a distribuției $\dfrac{1}{k^2+\mathrm{i}\,0-|\xi|^2}$ și se poate exprima cu ajutorul funcțiilor lui Hankel. Pentru $n = 1$,

$$E_1(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}, \quad \bar{E}_1(x) = -\frac{1}{2\mathrm{i}k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|x|}$$

sînt soluții fundamentale. Pentru a avea asigurată unicitatea soluției în domenii nemărginite (complementare de deschiși, relativ compacți) se consideră doar soluții ce verifică condițiile lui Sommerfeld:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} \pm \mathrm{i}ku(x) = O(|x|^{-1}) \quad \text{pentru } |x| \to \infty.$$

Aceste condiții au o interpretare fizică simplă, legată de așa-numitul „principiul amplitudinii limită". Pentru **e.H.** se pun în mod natural problemele lui Dirichlet și Neumann (interioare și exterioare, în ultimul caz cerîndu-se îndeplinite condițiile lui Somerfeld). Soluțiile acestor probleme se obțin cu ajutorul unor potențiali (de dublu strat în cazul problemei lui Dirichlet, de simplu strat în cazul problemei lui Neumann). Neunicitatea (resp. unicitatea) soluțiilor este legată de faptul că $\lambda = k^2$ este sau nu valoare proprie pentru problema lui Dirichlet sau Neumann interioară pentru ecuația lui Laplace. *(G.G.)*

ecuația lui Laplace, ecuația $\Delta u = 0$, unde $\Delta u = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u$ este operatorul lui Laplace. Este cea mai simplă și cea mai importantă ecuație de tip eliptic. Dacă considerăm un cîmp vectorial v ce derivă dintr-un potențial, $v = -\operatorname{grad} u$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, atunci $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\operatorname{div} v$ și sub această formă apare în studiul cîmpurilor (electric, gravitațional etc.). În cazul $n = 2$, **e.L.** este în strînsă relație cu teoria funcțiilor olomorfe; partea reală și imaginară a unei astfel de funcții sînt funcții armonice conjugate. Soluția fundamentală a **e.L.** este

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \log |x|, \quad E_n = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} |x|^{-n+2} \quad \text{pentru } n \geqslant 3,$$

unde $|x|$ este norma euclidiană, iar σ_n aria sferei unitate în $\mathbb{R}^n$. Această soluție fundamentală este invariantă la rotații, iar orice altă soluție fundamentală invariantă la rotații diferă de aceasta printr-o constantă aditivă. Ea este definită de o funcție local integrabilă; din forma ei se deduce că operatorul Laplace este analitic-hipoeliptic. **E.L.** îi corespund în mod natural următoarele probleme de limită: 1) *Problema lui Dirichlet.* Fie Ω un deschis în $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ frontiera sa; problema lui Dirichlet constă în a căuta u armonică în Ω astfel încît pe $\partial\Omega$ u să ia valori date. 2) *Problema lui Neumann.* A se găsi u armonică în Ω astfel ca pe $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ să ia valori date. 3) *Problema mixtă.* A se găsi u armonică în Ω, care să verifice pe $\partial\Omega$ relația $\alpha \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta u = g$, unde α, β, g sînt funcții date pe $\partial\Omega$, cu $\alpha \neq 0$. Problema lui Cauchy însă nu este corect pusă pentru **e.L.** *(G.G.)*

ecuația lui Poisson, ecuația lui Laplace neomogenă, *i.e.* $\Delta u = -f$. Pentru **e.P.** se pun în mod natural aceleași probleme la limită ca pentru ecuația lui

Laplace. Presupunem $n = 3$. În acest caz, potențialul $V = \dfrac{1}{|x|} * \rho = -4\pi E_3 * \rho$ verifică **e.P.** $\Delta V = -4\pi\rho$ (în sensul distribuțiilor dacă ρ este o distribuție pentru care convoluția are sens; în sens clasic dacă ρ este continuă, de exemplu). Dacă presupunem $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (în cazul problemei interioare) și $u \in C^2(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega}_1)$, unde $\Omega_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, cu $u(\infty) = 0$ pentru problemele exterioare, schimbarea de funcție $u = v + V$, cu $V(x) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_\Omega \frac{f(y)\,\mathrm{d}y}{|x-y|}$, reduce problemele la limită pentru **e.P.** la cele corespunzătoare ecuației lui Laplace, presupunînd că $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Soluția **e.P.** (în clasa distribuțiilor nule la infinit) este unică. De asemenea, soluția problemei lui Dirichlet interioară (sau exterioară) pentru **e.P.** este unică și depinde continuu de datele inițiale. În cazul problemei lui Neumann, cu unele condiții de regularitate impuse frontierei $\partial\Omega$, au loc rezultatele: i) Soluția (dacă există) a problemei lui Neumann interioare este unică cu aproximația unei constante aditive; ii) Condiția necesară de existență a soluției problemei lui Neumann interioare este

$$\int_{\partial\Omega} u_1\,\mathrm{d}\tau + \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}v = 0, \quad \text{unde} \quad u_1 = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}};$$

iii) Pentru $\partial\Omega$ suficient de regulată, soluția problemei lui Neumann exterioare este unică. *(G.G.)*

ecuația lui Riccati 1 Ecuație diferențială de forma $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$; dacă y_0 este o soluție a ecuației, y o altă soluție, funcția z definită prin $z(x) = y(x) - y_0(x)$ este soluție a unei ecuații Bernoulli; această proprietate permite reprezentarea oricărei soluții cu ajutorul unei soluții particulare y_0. **2** Un sistem de ecuații diferențiale de forma $Y' = YA(x)\,Y + B_1(x)\,Y + YB_2(x) + C(x)$, unde $A(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $C(x)$ sînt matrici pătrate. Un caz particular important care apare în calculul variațiilor și în teoria sistemelor comandate optimal este cel în care $A(x)$ și $C(x)$ sînt matrici simetrice iar $B_2(x)$ este transpusa matricii $B_1(x)$. *(A.H.)*

ecuația lui Schrödinger Operatorul diferențial $u \to \left(\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u$ se numește *operatorul lui Schrödinger*; el este important în fizică. De pildă, dacă o particulă de masă m_0 se mișcă sub influența unui cîmp de forțe exterioare dat de un potențial $V(x)$ și dacă $\psi(x, t)$ este funcția de undă a acestei particule, deci $|\psi(x, t)|^2$ este probabilitatea ca particula să se găsească în vecinătatea $U(x)$ a lui x la momentul t, volumul lui $U(x)$ fiind $\mathrm{d}x$, atunci ψ verifică **e.S.**

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta_x \psi + V\psi,$$

unde $\hbar$ este constanta lui Planck. Operatorul lui Schrödinger nu este însă invariant la grupul lui Lorentz. Soluția fundamentală a operatorului Schrödinger este

$$E = H(t) \exp\left[-\mathrm{i}(n-2)\,\frac{\pi}{4}\right] (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\mathrm{i}t}\right).$$

Această soluție fundamentală este invariantă la rotații (în variabilele spațiale și este analitică în complementara hiperplanului $t = 0$, dar nu este nici măcar local integrabilă în vecinătatea oricărui punct $(x, 0)$, exceptînd cazul $n = 1$. Ca atare operatorul Schrödinger nu este hipoeliptic. Operatorul lui Schrödinger (pentru diferite potențiale V) este studiat din diferite puncte de vedere în legătura cu probleme de difuzie. *(G.G.)*

ecuația Monge-Ampère, ecuație diferențială cu derivate parțiale neliniare de ordin 2 de forma

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi, \quad \text{unde}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

ale căror coeficienți depind de variabilele x, y, de funcția necunoscută $z = z(x, y)$ și de derivabilele sale de ordin 1, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Tipul **e.M.A.** este dat de semnul expresiei $\varphi + ac - b^2 = \Delta$. Dacă $\Delta > 0$ ecuația este de tip eliptic; cînd $\Delta < 0$ ecuația este de tip hiperbolic și pentru $\Delta = 0$ ecuația este de tip parabolic. Aceste ecuații, mai ales cele de tip eliptic, sînt importante în diferite probleme de geometrie. Teoria clasică, dezvoltată de Monge, Ampère, apoi de Darboux și Goursat, a căpătat în ultimele decenii noi dezvoltări, datorate introducerii unei noțiuni corespunzătoare de soluție generalizată despre care se poate arăta că, în condiții suficient de generale, este regulată. Pentru **e.M.A.** tare eliptice (cele pentru care $\varphi > 0$ și forma $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ este nenegativă) se poate rezolva în mod unic problema lui Dirichlet; există și alte rezultate de existență. Analogul în cazul complex al **e.M.A.** intervine frecvent în probleme ale analizei complexe și constituie un subiect în care numeroase probleme sînt încă deschise. *(G.G.)*

ecuația undelor, ecuația $\square_a u = \left(\frac{\partial}{\partial t^2} - a^2\Delta_n u\right) = f(x, t)$, unde $u = u(x, t)\colon \overline{\Omega}\times[0, \infty) \to \mathbb{R}$, Ω domeniu în $\mathbb{R}^n$, iar Δ_n este laplacianul în raport cu variabilele spațiale $x_1, ..., x_n$. Operatorul $\square_a$ se numeșe *operatorul lui d'Alembert*. **E.u.** apare în studiul fenomenelor de propagare a undelor, de pildă, în cazul $n = 1$ soluțiile sale descriu oscilațiile unei coarde vibrante. Este o ecuație de tip hiperbolic, iar problemele naturale care i se atașează sînt problema lui Cauchy și probleme mixte. În mod natural, ecuația nefiind hipoeliptică apar soluții generalizate. Soluția fundamentală E_n se poate exprima ca o transformată Fourier inversă parțială (în raport cu variabilele spațiale)

$$E_n(x, t) = H(t)\, F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|\, t}{a|\xi|}\right];$$

aici $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ este variabila duală variabilelor spațiale $(x_1, ..., x_n) = x$. În particular se obține:

$$E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|); \quad E_2(x, t) = \frac{H(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}};$$

$$E_3(x, t) = \frac{H(t)}{2\pi a}\, \delta(a^2t^2 - |x|^2),$$

unde δ este distribuția lui Dirac iar H funcția lui Heaviside. Distribuțiile E_1 și E_2 sînt local integrabile și au ca suport închiderea conului $\Gamma_+ = \{(x, t) |\ |x| < at\}$, iar suportul lui E_3 este chiar frontiera acestui con. Dacă f este o distribuție din $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^{n+1})$ avînd suportul conținut în semispațiul $t \geq 0$, distribuția $V_n = E_n * f$ se numește *potențial întîrziat de densitate* f și verifică **e.u.** $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n\right) V_n = f$. Dacă f este local integrabilă, atunci V_n rezultă local integrabilă. Problema lui Cauchy generalizată (pentru **e.u.**) constă în a găsi o distribuție $u \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^{n+1})$ care să verifice ecuația $\square_a u = F(x, t)$, unde $F \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^{n+1})$ și se anulează pentru $t < 0$ astfel ca u să se anuleze pentru $t < 0$. Această soluție există și este dată de $u = E_n * F$. În particular, soluția problemei lui Cauchy clasice $\square_a u = f(x, t)$, $u(x, 0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ cu f continuă pe $\{(t, x) \mid t \geq 0\}$, $u \in C'(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C(\mathbb{R}^n)$ devine, prelungind pentru $t<0$ pe u și f prin 0 și notînd cu $\widetilde{u}$, respectiv $\widetilde{f}$, funcțiile astfel obținute, soluția ecuației

$$\square_a \widetilde{u} = \widetilde{f}(x, t) + u_0(x)\,\delta'(t) + u_1(x)\,\delta(t).$$

Distribuțiile $V_n^{(0)} = E_n * u_1(x)\,\delta(t)$, respectiv $V_n^{(1)} = E_n * u_0(x)\,\delta'(t)$, $n = 1, 2, 3$, se numesc *potențialele întîrziate de simplu* (resp. *de dublu*) *strat* de densitate u_1, respectiv u_0. Dacă u_1 este local integrabilă în $\mathbb{R}^n$, atunci V_n^0 rezultă local integrabil în $\mathbb{R}^n$. Potențialele $V_n^{(0)}$ și $V_n^{(1)}$ sînt de clasă C^∞, în raport cu variabila temporală pe $[0, \infty)$ și verifică următoarele condiții:

$$V_n^{(0)}(x, t) \to 0, \quad \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t} \to u_1(x) \quad \text{în} \quad \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n) \quad \text{pentru } t \to \infty;$$

$$V_n^{(1)}(x, t) \to u_0(x), \quad \frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t} \to 0 \quad \text{în} \quad \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n).$$

Cu ajutorul acestor potențiale, explicitate, se obțin formulele ce dau soluția problemei lui Cauchy clasice în cazul ecuației neomogene. Pentru $n = 1$ soluția este

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau)\, dy\, d\tau \quad (\textit{formula lui d'Alembert}).$$

Pentru $n = 2$ avem

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(x;\, at)} \frac{u_0(y)\, dy}{\sqrt{a^2t^2 - |x - y|^2}} + \frac{1}{2\pi a}\int_{B(x;\, at)} \frac{u_1(y)\, dy}{\sqrt{a^2t^2 - |x - y|^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \int_{B(x;\, a(t-\tau))} \frac{f(y, \tau)\, dy\, d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - |x - y|^2}} \quad (\textit{formula lui Poisson}).$$

Pentru $n = 3$ se obține

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int_{S(x;\, at)} u_0(y)\, dS\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S(x;\, at)} u_1(y)\, dS +$$

$$+ \frac{1}{4a^2}\int_{B(x;\, at)} \frac{f\left(y, t - \left|\frac{x - y}{a}\right|\right)}{|x - y|}\, dy \quad (\textit{formula lui Kirchoff}).$$

unde s-a notat cu $B(x; at)$, respectiv $S(x; at)$, bila (în cazul $n=2$ discul) de centru x și raza at, respectiv sfera de centru x și rază at. În aceste formule s-a presupus $f\in C^2(t\geqslant 0)$, $u_0\in C^3(\mathbb{R}^n)$, $u_1\in C^2(\mathbb{R}^n)$ pentru $n=3, 2$, iar pentru $n=1$, $f\in C^1(t\geqslant 0)$, $u_0\in C^2(\mathbb{R}^1)$, $u_1\in C^1(\mathbb{R}^1)$. Din formulele de mai sus se vede că, în cazul $n=3$, soluția într-un punct (x, t) depinde doar de valorile pe care le au datele inițiale pe sfera de rază at, dar că în cazul $n=2$ intervin valorile datelor inițiale de pe întreaga intersecție a conului caracteristic cu planul $t=0$. În primul caz se spune că este valabil principiul lui Huyghens, iar în al doilea că apar fenomene de difuzie. În ceea ce privește problema mixtă pentru **e.u.**, se consideră o mulțime deschisă mărginită Ω din $\mathbb{R}^n$, cu $\partial\Omega$ de clasă C^1, și se consideră soluții $u\in C^2(\Omega\times[0, T])\cap C^1(\overline{\Omega}\times[0, T])$ ale ecuației $\square_a u = F(x, t)$, $(x, t)\in\Omega\times(0, T]$, ce verifică condițiile inițiale $u(x, 0)=f(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=g(x)$, $x\in\overline{\Omega}$, și o condiție la limită $\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}=0$, $x\in\partial\Omega$, $t\in[0, T]$, cu $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$ funcții pozitive. Unicitatea și dependența continuă de datele inițiale se demonstrează utilizînd așa-numitele inegalități energetice. Existența se demonstrează adesea utilizînd metoda separării variabilelor. *(G.G.)*

ecuație cu derivate parțiale liniare de ordin 1, ecuație de forma

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R \quad (*)$$

în care coeficienții $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ depind de variabilele $x_1, \ldots, x_n$ și eventual de funcția necunoscută $z=z(x_1, \ldots, x_n)$. În cazul $R=0$ ecuația se numește *omogenă*. Acestei ecuații i se asociază sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{P_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{P_2}=\ldots=\frac{\mathrm{d}x_n}{P_n} \quad (**)$$

în ipoteza că $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nu depind de funcția necunoscută z. Problema integrării ecuației cu derivate parțiale și cea a integrării acestui sistem sînt echivalente. Mai precis, dacă $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ sînt integrale prime ale sistemului diferențial $(**)$, atunci $\psi_1=C_1, \ldots, \psi_{n-1}=C_{n-1}$, unde $C_1, \ldots, C_{n-1}$ sînt constante arbitrare, sînt soluții ale ecuației și dacă cele $n-1$ integrale prime sînt independente, atunci soluția generală a ecuației cu derivate parțiale este de forma $f=\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$, cu Φ funcție derivabilă arbitrară. Cazul neomogen se reduce la cel omogen, căutînd soluția sub formă implicită, $V(z, x_1, \ldots, x_n)=0$ cu funcția necunoscută V, care va satisface ecuația omogenă

$$P_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+\ldots+P_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+R\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Se poate da o interpretare geometrică a acestor considerente: orice varietate integrală a ecuației $(*)$ este generată de curbe caracteristice, *i.e.* de soluții ale sistemului $(**)$. *(G.G.)*

ecuație cu diferențe finite, ecuație de forma $x(t+h)=F(t, x(t))$. Apar în rezolvarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale; ecuației $x'=f(t, x)$ i se asociază în mod natural **e.d.f.** $x(t+h)=x(t)+hf(t, x(t))$; proceduri de rezolvare aproximativă mai fine conduc la **e.d.f.** de ordin superior cu mai mulți pași. *(A.H.)*

ecuație cu diferențiale totale O funcție $y: G_0\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ se numește *soluție* a **e.d.t.** $\mathrm{d}y=\sum\limits_{j=1}^{m} b_j(x, y)\,\mathrm{d}x^j$ definită de funcțiile $b_j: G_1\times I\to\mathbb{R}$, $G_0\subset G_1\subset\mathbb{R}^m$, dacă $y(G_0)\subset I$, y este diferențiabilă și $(\partial_j y)(x)=b_j(x, y(x))$ ($(\partial_j y)(x)$ este derivata parțială a funcției y în raport cu variabila de pe poziția j, calculată în punctul x). O funcție $y: G_0\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ se numește soluție a sistemului de **e.d.t.** $\mathrm{d}y=B(x, y)\,\mathrm{d}x$ definit de funcția $B: G_1\times G_2\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathcal{M}_{n\times m}$ ($\mathcal{M}_{n\times m}$ este mulțimea matricilor cu n linii și m coloane cu elemente reale) dacă $y(G_0)\subset G_2$, y este diferențiabilă și $(\mathrm{D}y)(x)=B(x, y(x))$, unde $(\mathrm{D}y)(x)\in\mathcal{M}_{n\times m}$ este derivata Fréchet a funcției y în punctul x (aplicația liniară de la $\mathbb{R}^m$ la $\mathbb{R}^n$ este identificată cu matricea care i se asociază cînd se consideră bazele naturale în $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^m$). O **e.d.t.** este un caz particular de sistem cu diferențiale totale pentru $n=1$; dacă $m=1$ sistemul cu diferențiale totale devine un sistem de ecuații diferențiale ordinare. Un sistem de **e.d.t.** se numește *complet integrabil* în $G_1\times G_2$ dacă pentru orice $(x_0, y_0)\in G_1\times G_2$ există o soluție cu proprietatea $y(x_0)=y_0$. Dacă B este de clasă C^1, condiția necesară și suficientă ca sistemul definit de B să fie complet integrabil în $G_1\times G_2$ este ca, pentru orice $(x, y)\in G_1\times G_2$, să fie verificate condițiile:

$$(\partial_k b_i^j)(x, y)+\sum_{l=1}^{n}(\partial_{m+l} b_i^j)(x, y)\, b_k^l(x, y)=(\partial_i b_k^j)(x, y)+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}(\partial_{m+l} b_k^j)(x, y)\, b_i^l(x, y)$$

pentru $i=1, \ldots, m$, $k=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$. Aici $b_i^j(x, y)$ este elementul din linia i și coloana j al matricii $B(x, y)$, iar ∂_k înseamnă derivata parțială în raport cu variabila de pe poziția k (deci ∂_{m+l}) înseamnă derivata parțială în raport cu variabila de pe poziția $m+l$, deci în raport cu coordonata l a variabilei din G_2). *(A.H.)*

ecuație cu diferențiale totale exacte Considerăm o ecuație diferențială de forma $y'=-\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, unde P și Q sînt funcții reale continue definite pe o mulțime deschisă D inclusă în $\mathbb{R}^2$ și Q nu se anulează pe D. Ecuația mai poate fi scrisă sub forma $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, *i.e.* $P(x, y)\,\mathrm{d}x+Q(x, y)\,\mathrm{d}y$. Dacă există o funcție diferențiabilă $U: D\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că diferențiala lui U este $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ $\left(i.e.\ \dfrac{\partial U}{\partial x}=P \text{ și } \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q\right)$, atunci se spune că ecuația diferențială $P(x, y)\,\mathrm{d}x+Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ (sau, echivalent, ecuația inițială) este o *ecuație diferențială cu diferențiale totale exacte*. Dacă D este simplu conexă și P, Q sînt funcții de clasă C^1, atunci ecuația este cu diferențiale totale exacte dacă și numai dacă $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ în D. În acest caz se determină ușor o funcție U, ca mai sus, care este o integrală primă a ecuației noastre. Soluția generală a ecuației este dată de relația $U(x, y)=C$ (unde C este o constantă reală arbitrară), rezolvînd în raport cu y această ecuație și obținînd soluția y ca funcție de x (și C). De obicei, o ecuație de forma $P(x, y)\,\mathrm{d}x+Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ nu este cu diferențiale totale exacte. În cele ce urmează vom presupune că D este simplu conex şi P, Q sînt funcţii de clasă C^1. Un *factor integrant* (sau *multiplicator al lui Euler*) al ecuaţiei iniţiale este o funcţie de clasă C^1, $f\colon D \to \mathbb{R}$ care are proprietatea că ecuaţia $f(x, y)\,P(x, y)\,\mathrm{d}x + f(x, y)\,Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ este **e.d.t.e.** Un factor integrant este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale $P\dfrac{\partial f}{\partial y} - Q\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) f$. Dacă funcţia $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)/Q$ depinde numai de x, ecuaţia iniţială admite un factor integrant care este funcţie numai de x şi se găseşte imediat. Similar, dacă P nu se anulează în D şi funcţia $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)/P$ depinde numai de y, există un factor integrant care depinde numai de y. (*I.C.*)

ecuaţie de tip eliptic v. **reducerea la forma canonică şi clasificarea ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare, cvasiliniare de ordin 2**

ecuaţie de tip Fuchs v. **punct singular** (al soluţiei unei ecuaţii diferenţiale liniare)

ecuaţie de tip hiperbolic v. **reducerea la forma canonică şi clasificarea ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare, cvasiliniare de ordin 2**

ecuaţie de tip parabolic v. **reducerea la forma canonică şi clasificarea ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare, cvasiliniare de ordin 2**

ecuaţie diferenţială afină, ecuaţie de forma $y' = a(x)\,y + b(x)$; dacă y_1 şi y_2 sînt soluţii ale unei ecuaţii afine, funcţia $y = y_1 - y_2$ este soluţie a unei ecuaţii diferenţiale liniare. (*A. H.*)

ecuaţie diferenţială cu variabile separate, ecuaţie de forma $y' = f(x)\,g(y)$. Dacă f şi g sînt continue şi $g(y_0) \neq 0$, soluţia y pentru care $y(x_0) = y_0$ verifică relaţia

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t. \quad (A.H.)$$

ecuaţie diferenţială liniară, ecuaţie de forma $y' = a(x)y$; dacă a este o funcţie continuă, soluţia care în punctul x_0 ia valoarea y_0 este dată de formula $y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) y_0$. (*A.H.*)

ecuaţie diferenţială omogenă, ecuaţie diferenţială de forma $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, unde $f\colon I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă (I este un interval al dreptei reale şi $0 \notin I$). Rezolvarea acestei ecuaţii se face cu ajutorul substituţiei $\dfrac{y}{x} = u$. Se obţine ecuaţia cu variabile separabile $u' = \dfrac{1}{x}\,(f(u) - u)$, care se rezolvă după metodele obişnuite dacă ecuaţia $f(z) - z = 0$ nu are soluţii în I. Dacă ecuaţia $f(z) - z$ are soluţii în I, atunci pentru orice astfel de soluţie z_0 funcţia $d\colon I \to \mathbb{R}$, definită prin $d(x) = z_0 x$, este soluţie a ecuaţiei iniţiale. (*I.C.*)

ecuaţie fără soluţie În contrast cu ecuaţiile cu derivate parţiale liniare cu coeficienţi constanţi, care admit întotdeauna soluţii, existenţa (chiar locală) a soluţiilor pentru ecuaţiile liniare cu coeficienţi variabili nu este asigurată. Primul exemplu este cel al lui H. Lewy. În $\mathbb{R}^3$ se consideră operatorul

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \mathrm{i}(x_1 + x_2)\frac{\partial}{\partial x_3}\,.$$

Ecuaţia $Lu = f$ nu are soluţii (în distribuţii) în nici o vecinătate a originii în $\mathbb{R}^3$ dacă f nu este real analitică. Operatorul lui Lewy apare ca operatorul Cauchy-Riemann tangenţial corespunzător unui paraboloid în $\mathbb{C}^2$. Alt operator interesant este operatorul lui Mizohata: $M_k = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}x_1^k\dfrac{\partial}{\partial x_2}$. Acest operator are proprietatea că, pentru k par, ecuaţia $M_k u = f$ este local rezolubilă dar pentru k impar $M_k u = f$ nu este local rezolubilă. Lui Nirenberg i se datorează un exemplu de operator liniar N, de ordin 1, în $\mathbb{R}^3$ pentru care ecuaţia $Nu = 0$ are ca soluţii doar constantele. Operatorul N se poate scrie sub forma $N = P_1 + \mathrm{i}P_2$, cu P_1, P_2 operatori de ordin 1 şi P_1, P_2 şi $[P_1, P_2] = P_1P_2 - P_2P_1$ liniar independenţi. Operatorii lui Lewy şi Mizohata sînt operatori care intervin în mod natural (v. **transformarea operatorilor diferenţiali**). (*G.G.*)

ecuaţie liniară abstractă de evoluţie, ecuaţie de forma $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)\,u(t)$, $t \in [a, b]$, unde $A(t)$ este un operator liniar, în general nemărginit, definit pentru fiecare $t \in [a, b]$ pe $D(A(t)) \subset X$, $D(A(t))$ dens în X, cu valori în X, X fiind un spaţiu Banach. Se poate considera şi ecuaţia neomogenă asociată. Pentru aceste ecuaţii se studiază problema lui Cauchy, *i.e.* se caută o soluţie $t \to u(t)$ care pentru $t = a$ să aibă o valoare dată, element al spaţiului X. Alegînd spaţiul X în mod convenabil, în aplicaţii problema lui Cauchy abstractă corespunde unor probleme mixte (v. **problemă mixtă parabolică, problemă mixtă hiperbolică**). Dacă $A(t) = A$ nu depinde de t, un rezultat tipic este următorul: Problema lui Cauchy abstractă $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au(t)$ este corect pusă dacă şi numai dacă A este generatorul infinitezimal al unui semigrup T de clasă C_0 pe spaţiul X, soluţia în acest caz fiind dată de $u(t) = T(t)f$ pentru $t \in \mathbb{R}_+$. Prin problema lui Cauchy corect pusă se înţelege că, pentru orice $f \in D(A)$, există o unică soluţie $u \in C^1(\mathbb{R}_+, X) \cap C(\mathbb{R}_+, D(A))$ a ecuaţiei $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au(t)$ cu $u(0) = f$. Un semigrup de clasă C_0 este un semigrup $T(t)$ astfel încît $T(\cdot)f \in C(\mathbb{R}_+, X)$. Generatorii infinitezimali ai semigrupurilor de clasă C_0 sînt caracterizaţi de teorema Hille-Yosida. În cazul în care $A(t)$ depinde de t şi, mai ales, dacă domeniile $D((A)(t))$ depind efectiv de t, situaţia este mult mai complicată. Se cunosc diferite rezultate de existenţă locală, de unicitate, legate de asemenea de teoria semigrupurilor de operatori. În cazul neomogen, există metode de a reduce problema la cazul omogen, utilizîndu-se teoria semigrupurilor olomorfe. În sfîrşit, s-au dovedit utile rezultate de tipul următor: Fie $\{E_s\}$, $s \in [0, 1]$, o familie de spaţii Banach, astfel ca pentru $s' < s$, $E_s \subset E_{s'}$ şi norma în E_s să nu fie mai mică decît cea indusă de $E_{s'}$ pe E_s. Fie apoi $t \to A(t)$ o funcţie continuă de t cu valori în spaţiul operatorilor liniari mărginiţi de la E_s la $E_{s'}$ ($|t| < T$) astfel încît $\|A(t)\| \leqslant \dfrac{C}{s - s'}$ cu $0 \leqslant s' < s \leqslant 1$, constanta C fiind independentă de t, s şi s'. Atunci ecuaţia $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)u + f(t)$, f continuă în raport cu t cu valori în E_1, are o soluţie unică, definită pe $|t| < \dfrac{1}{Ce}$ cu valori în E_0 care este diferenţiabilă în t pentru $|t| < \dfrac{1 - s}{Ce}$ cu valori în E_s şi care verifică condiţia iniţială $u|_{t=0} = u_0$, $u_0 \in E_1$. (*G.G.*)

ecuație neliniară cu derivate parțiale, ecuație de forma

$$F(x, \ldots, D^j u, \ldots) = 0 \quad \text{cu} \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

În cazul ecuațiilor liniare de ordin 1 rezolvarea acestor ecuații se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale ordinare. În cazul cvasiliniar de ordin 1, deci cazul în care derivatele apar liniar, rezolvarea este de asemenea clasică. Numeroase ecuații neliniare apar în diferite probleme de natură geometrică, sau în probleme de fizică, și studiul lor ridică în general dificultăți serioase, neexistînd o teorie generală. (*G. G.*)

ecuație operatorială liniară în spații Banach Fie X un spațiu Banach și $\mathcal{L}(X)$ spațiul Banach (cu norma obișnuită) al operatorilor liniari și continui care aplică X în X. O ecuație operatorială liniară în spațiul X este o ecuație de forma $x = U(x) + y$ cu $U \in \mathcal{L}(X)$ și $y \in X$ iar x fiind „element necunoscut". Un element x care verifică ecuația precedentă se numește *soluție*. Dacă $\|U\| < 1$, atunci ecuația are o soluție unică x^*. Pentru orice element $x_0 \in X$, punînd $x_n = U(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, avem $x^* = \lim\limits_n x_n$. Ecuația precedentă se poate scrie și sub forma $(I - U)(x) = y$, unde I este operatorul identitate pe X. Cu condiția $\|U\| < 1$ rezultă $(I - U)(X) = X$, operatorul $I - U$ este inversabil și $(I - U)^{-1}(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} U^n(y)$, unde $U^0 = I$, $U^1 = U$ iar $U^n = U^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. În anumite cazuri, se „aproximează" soluția unei ecuații de forma $(I - U)(x) = y$ (cu $U \in \mathcal{L}(X)$ și $y \in X$) cu soluția unei alte ecuații de forma $(I - V)(x) = y$ cu $V \in \mathcal{L}(X)$ pentru care se cunoaște un număr $\lambda > 0$ astfel ca $\|U - V\| \leqslant \lambda$. În acest caz, dacă $(I - U)(X) = X$ și dacă operatorul $I - U$ are un invers satisfăcînd condiția $\|(I - U)^{-1}\| < \lambda^{-1}$, atunci $(I - V)(X) = X$ iar $I - V$ are un invers continuu. Dacă pentru un anumit element $y \in X$ avem $x' = (I - U)^{-1}(y)$ și $x'' = (I - V)^{-1}(y)$, atunci $\|x' - x''\| \leqslant \lambda \|(I - V)^{-1}\| \cdot \|x'\|$. Dacă în plus există un număr real ρ astfel ca $\|(I - V)^{-1}\| \leqslant \rho < \lambda^{-1}$, atunci $\|x' - x''\| \leqslant \lambda\rho(1 - \lambda\rho)^{-1} \|x''\|$. Rezultatele precedente se pot, în particular, aplica la ecuații integrale liniare. O *ecuație integrală de tip Fredholm* este de forma

$$x(s) = \int_0^1 \varphi(s, t)\, x(t)\, dt + y(s), \tag{1}$$

unde $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă dată (numită *nucleul ecuației*) iar $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este de asemenea o funcție continuă dată. Funcția $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă „necunoscută". Segmentul $[0, 1]$ se poate înlocui, la o ecuație integrală, și cu un segment oarecare. Dacă punem $X = C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ (spațiul funcțiilor reale continue pe $[0, 1]$) cu norma obișnuită (v. **spațiu liniar normat**) și $(U(x))(s) = \int_0^1 \varphi(s, t)\, x(t)\, dt$, atunci $U \in \mathcal{L}(X)$ și ecuația (1) devine $x = U(x) + y$. Dacă $\max\{|\varphi(s, t)| \mid s, t \in [0, 1]\} < 1$, atunci ecuația integrală are o soluție unică. Să considerăm acum o ecuație integrală de forma

$$x(s) = \int_0^1 \psi(s, t)\, x(t)\, dt + y(s), \tag{2}$$

unde nucleul ψ este de forma $\psi(s, t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(s)\, b_j(t)$. În acest caz se spune că ecuația are „nucleu degenerat". Soluția ecuației (2) este de forma $x(s) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j a_j(s) + y(s)$, unde ξ_j verifică sistemul de ecuații $\xi_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i + \beta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, cu $\alpha_{ji} = \int_0^1 b_j(t)\, a_i(t)\, dt$, $\beta_j = \int_0^1 b_j(t)\, x(t)\, dt$. Punînd $(V(x))(s) = \int_0^1 \psi(s, t)\, x(t)\, dt$ ecuația (2) este de forma $x = V(x) + y$ în spațiul $X = C_{\mathbb{R}}([0, 1])$. Dacă $|\varphi(s, t) - \psi(s, t)| \leqslant \lambda$, $\forall s, t \in [0, 1]$, atunci $\|U - V\| \leqslant \lambda$ și ecuația (2) se poate considera ca „ecuație aproximantă" pentru ecuația (1). Se pot aplica rezultatele prezentate pentru ecuații operatoriale. (*R.C.*)

ecuațiile Cauchy-Riemann v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă), **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)

ecuațiile lui Painlevé v. **transcendentele lui Painlevé**

ecuațiile Navier-Stokes, ecuațiile fundamentale ale mișcării fluidelor vîscoase. Într-un sistem de axe rectangular ele se scriu sub forma:

$$\rho \frac{du}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\omega\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right];$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\omega\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right];$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\omega\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right];$$

$$\frac{\partial\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

unde ω este vectorul viteză de componente u, v, w; p = presiunea, ρ = densitatea, μ = coeficientul de viscozitate, X, Y, Z sînt componentele forței masice, iar $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \omega \operatorname{grad}\omega$. Aceste ecuații se pot simplifica în unele cazuri, dar studiul lor matematic ridică numeroase probleme, unele încă deschise. Din cauza importanței lor în aplicații s-a dezvoltat o bogată tematică legată de problemele numerice ale aproximării soluțiilor acestor ecuații. (*G.G.*)

element analitic v. **prelungire analitică**

element axial v. **spațiu liniar ordonat**

element difuz v. **element discret**

element discret (într-un spaţiu liniar reticulat), element c avînd proprietatea că din relaţiile $0 \leqslant a \leqslant |c|$, $0 \leqslant b \leqslant |c|$ şi $a \perp b$ rezultă că cel puţin unul din elementele a, b este nul. Dacă X este un spaţiu liniar reticulat arhimedian iar c este un element discret al lui X, atunci din inegalităţile $0 \leqslant x \leqslant |c|$ rezultă că există un număr real λ astfel ca $x = \lambda c$; banda generată în X de elementul c coincide cu subspaţiul liniar generat de c şi este o componentă. Dacă X este un spaţiu liniar σ-reticulat iar $0 \neq c \in X$, atunci următoarele condiţii sînt echivalente: 1) Elementul c este discret; 2) Dacă $c = a + b$ iar $a \perp b$, atunci cel puţin unul din elementele a, b este nul; 3) Proiectorul $[c]$ generat de elementul c este minimal (*i.e.* nu există un proiector $[G]$ astfel ca $0 < [G] < [c]$). Un element z al unui spaţiu liniar reticulat X se numeşte *element difuz* dacă nu există un **e.d.** $c \in X$ astfel ca $0 < c \leqslant |z|$. Un spaţiu liniar complet reticulat care coincide cu banda generată de mulţimea **e.d.** se numeşte *spaţiu atomic* (sau *spaţiu discret*). Un spaţiu liniar complet reticulat se numeşte *spaţiu continuu* dacă nu conţine nici un **e.d.** nenul; deci orice element nenul este difuz. (*R.C.*)

element frontieră Dacă X este un spaţiu local compact, conex şi local conex, se numeşte **e.f.** al lui X orice filtru pe X cu proprietăţile următoare: 1) γ converge la frontiera ideală a lui X, *i.e.*, pentru orice compact $K \subset X$, există $A \in \gamma$ astfel încît $A \cap K = \varnothing$; 2) Pentru orice mulţime $A \in \gamma$, există un compact $K \subset X$ şi o componentă conexă $U \in \gamma$ a lui $X \setminus K$ astfel încît $U \subset A$. Fie ∂X mulţimea tuturor **e.f.** ale lui X. Considerăm mulţimea $\hat{X} = X \cup \partial X$ şi introducem o topologie pe X după cum urmează. O mulţime $A \subset \hat{X}$ se numeşte *deschisă* în X dacă mulţimea $A \cap X$ este deschisă în X şi $A \cap X \in \gamma$ pentru orice filtru $\gamma \in A \cap \partial X$. Mulţimile deschise ale lui $\hat{X}$ formează o topologie pe X; vom înzestra $\hat{X}$ cu această topologie. Atunci spaţiul topologic $\hat{X}$ este compact şi local conex, iar X o mulţime deschisă şi densă în $\hat{X}$. Se spune că $\hat{X}$ este *compactificarea Kerékjártó-Stoilow* a lui X şi că X este *frontiera ideală Kerékjártó-Stoilow* a lui X. (*M.J.*)

element maximal v. **mulţime ordonată**

element mărginit v. **spaţiu liniar reticulat cu unitate**

element minimal v. **mulţime ordonată**

element negativ v. **spaţiu liniar ordonat**

element pozitiv v. **spaţiu liniar ordonat**

element propriu v. **număr propriu**

element simplu v. **spaţiu liniar reticulat cu unitate**

element unitar v. **spaţiu liniar reticulat cu unitate**

elemente ortogonale (într-un spaţiu Hilbert) v. **spaţiu Hilbert**

elemente ortogonale (într-un spaţiu liniar reticulat) v. **spaţiu liniar ordonat**

elementul de volum v. **forma volum**

epimorfism v. **categorie**

eroare Dacă într-un calcul înlocuim numărul real a prin numărul real a^* spunem că l-am aproximat pe a prin a^* iar diferenţa $a - a^*$ o numim **e.** *absolută* cu care l-am aproximat pe a prin a^*. Deoarece numărul a este în asemenea consideraţii necunoscut, se găseşte de obicei un majorant al modulului **e.** absolute: $\Delta a^* \geqslant |a - a^*|$. Cu cît Δa^* este mai mic, cu atît aproximarea lui a prin a^* este mai bună. Se spune că a este egal cu a^*, cu **e.** Δa^*, se scrie $a \approx a^* \pm \pm \Delta a^*$, ceea ce înseamnă: $a^* - \Delta a^* \leqslant a \leqslant a^* + \Delta a^*$. Uneori, **e.** absolută nu este relevantă pentru aprecierea nivelului de aproximare. Se poate folosi atunci **e.** *relativă* definită de numărul $\dfrac{a - a^*}{|a^*|}$. **E.** relativă se calculează de obicei în procente. Ca şi la **e.** absolută, nivelul de aproximare se apreciază prin intermediul unui majorant al valorii absolute a **e.** relative. Uneori, prin **e.** absolută se înţelege $|a - a^*|$ iar prin **e.** relativă $\dfrac{|a - a^*|}{|a^*|}$. Dacă a şi a^* sînt vectori într-un spaţiu liniar normat **e.** este diferenţa $a - a^*$. Evaluarea nivelului de aproximare al lui a prin a^* se face atunci printr-un majorant al distanţei dintre a şi a^* ($\|a - a^*\|$). Din punct de vedere al modului de apariţie, se întîlnesc: **e.** de problemă, **e.** de metodă (rest), **e.** de rotunjire. **E.** de problemă apare datorită modelării matematice a unui fenomen: dacă a reprezintă evaluarea cantitativă (număr, vector) a unui fenomen iar a^* valoarea corespunzătoare printr-o descriere matematică a fenomenului, atunci diferenţa $a - a^*$ se numeşte **e.** *de problemă*. **E.** *de metodă* (*rest*) este diferenţa $a - a^*$, unde a este un număr sau un vector reprezentînd valoarea unei funcţii, soluţia unei ecuaţii etc., iar a^* valoarea corespunzătoare obţinută printr-o metodă (numerică) de aproximare a funcţiei, de rezolvare a ecuaţiei. Prin „evaluarea erorii" sau „evaluarea restului" se înţelege găsirea unui majorant al modulului (normei) **e.** de metodă (v., spre exemplu, evaluarea restului la **formula lui Taylor**, **metoda lui Jacobi** etc.). **E.** *de rotunjire* apare datorită aproximării unui număr real cu o fracţie zecimală finită. Se numeşte **e.** *de rotunjire la zecimala de ordin* n, diferenţa dintre numărul a şi aproximarea sa a^*, unde a^* este o fracţie zecimală finită, cu n zecimale, astfel încît $|a - a^*| < 10^{-n}$. Există două modalităţi uzuale de aproximare prin rotunjire la zecimala de ordin n. Aproximarea numărului a, scris ca fracţie zecimală cu cel puţin $n + 1$ zecimale, se poate face prin rotunjire la zecimala de ordin n, considerînd pe a^* ca fiind fracţia zecimală finită obţinută din a în care se înlocuiesc cu zero zecimalele începînd cu cea de ordin $n + 1$. Într-un al doilea mod, aproximarea numărului real a prin rotunjire la zecimala de ordin n se face aproximîndu-l cu a^*, unde a^* este o fracţie zecimală finită, cu n zecimale, astfel încît $|a - a^*| \leqslant \dfrac{1}{2} 10^{-n}$. Aproximările precedente prin rotunjire se pot face şi în cazul în care se consideră numere reale reprezentate într-o bază oarecare. (*Gh.Gr.*)

extensia Carathéodory-Hahn a unei măsuri v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

extensia Dedekind (a unui spaţiu liniar reticulat arhimedian X), spaţiu liniar complet reticulat $\widetilde{X}$ cu următoarele proprietăţi: 1) Spaţiul X este izomorf (ca spaţiu liniar ordonat) cu un subspaţiu liniar ordonat al spaţiului $\widetilde{X}$; 2) Pentru orice element $y \in \widetilde{X}$ există $A \subset X$ şi $B \subset X$ astfel ca $y = \sup A = \inf B$ (cînd se identifică X cu imaginea sa în $\widetilde{X}$ prin izomorfism). Spaţiul $\widetilde{X}$ este unic, cu excepţia unui izomorfism. El se construieşte după cum urmează. Să notăm cu $i(A)$ mulţimea minorantelor unei submulţimi A a lui X şi cu $s(A)$ mulţimea majorantelor lui A. Fie $\widetilde{X}$ mulţimea tuturor submulţimilor nevide şi majorate $A \subset X$ care au proprietatea că $A = i(s(A))$. Ordonăm $\widetilde{X}$ prin incluziune, *i.e.* $A_1 \leqslant A_2 \Leftrightarrow A_1 \subset A_2$. Definim în mulţimea $\widetilde{X}$ operaţia de adunare

$$A_1 + A_2 = i(s(\{x + y \mid x \in A_1,\ y \in A_2\}))$$

şi operaţia de înmulţire cu numere reale: $\alpha A = \{\alpha x \mid x \in A\}$ dacă $\alpha > 0$, $0A = i(0)$ şi $\alpha A = \{\alpha y \mid y \in s(A)\}$ dacă $\alpha < 0$. Atunci $\widetilde{X}$ devine un spaţiu liniar complet reticulat care reprezintă **e.D.** a lui X. Spaţiul X este izomorf cu subspaţiul $\{i(x) \mid x \in X\}$ al lui $\widetilde{X}$ prin aplicaţia $x \to i(x)$. (*R.C.*)

extensia Hahn a unei măsuri v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

extensia Lebesgue a unei măsuri v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

extensia măsurilor Radon v. **prelungirea măsurilor Radon pozitive**

extinderea măsurilor pozitive aditive definite pe un clan Vom considera un clan $\mathcal{C}$ de părți ale lui T și o măsură pozitivă aditivă $m: \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Vom vedea cum se extinde m la o măsură pozitivă și aditivă definită pe o algebră de părți ale lui T.
Cazul 1. Fie $\mathcal{CH}(\mathcal{C})$ clanul ereditar generat de $\mathcal{C}$, *i.e.* $\mathcal{CH}(\mathcal{C}) = \{A \subset T \mid$ există $B \in \mathcal{C}$, $B \supset A\}$. Definim funcția de mulțime $m^*: \mathcal{CH}(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ prin $m^*(A) = \inf\{m(B) \mid B \in \mathcal{C},\ B \supset A\}$. Numim m^* *măsura exterioară generată de măsura aditivă m* (*măsura exterioară indusă de măsura aditivă m*). Se arată că $m^*(\emptyset) = 0$, m^* crescătoare și subaditivă (deci m^* nu este în general o măsură exterioară). Se consideră clasa de părți $\mathcal{J}_0(m) = \{A \in \mathcal{CH}(\mathcal{C}) \mid m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ pentru orice $E \in \mathcal{CH}(\mathcal{C})\}$. O mulțime din $\mathcal{J}_0(m)$ se numește *mulțime m-măsurabilă* sau *mulțime măsurabilă în raport cu m*. Se arată că $\mathcal{J}_0(m)$ este un clan, $\mathcal{J}_0(m) \supset \mathcal{C}$ și restricția lui m^* la $\mathcal{J}_0(m)$ este măsură pozitivă aditivă care extinde pe m. Vom nota această măsură prin $\underline{m}^*$, deci $\underline{m}^*: \mathcal{J}_0(m) \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Dacă m este finită, atunci $\underline{m}^*$ este unica extensie pozitivă aditivă a lui m la $\mathcal{J}_0(m)$.
Cazul 2. Vom considera clasa locală generată de $\mathcal{J}_0(m)$, anume clasa $\mathcal{J}(m) = \{A \subset T \mid A \cap B \in \mathcal{J}_0(m)$ pentru orice $B \in \mathcal{J}_0(m)\}$ care este o algebră ce include pe $\mathcal{J}_0(m)$. Mulțimile din $\mathcal{J}(m)$ se numesc *mulțimi măsurabile Jordan în raport cu m* sau *mulțimi m-măsurabile Jordan*. Definim $m_{\mathcal{J}}^{**}: \mathcal{J}(m) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ prin $m_{\mathcal{J}}^{**}(A) = \sup\{m^*(B) \mid B \in \mathcal{J}_0(m),\ B \subset A\}$. Atunci $m_{\mathcal{J}}^{**}$ este o măsură aditivă pozitivă care extinde pe $\underline{m}^*$. Dacă $\mathcal{C}$ este chiar algebră, atunci $\mathcal{J}(m) = \mathcal{J}_0(m)$ și al doilea pas este superfluu.
Se arată că, pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $A \in \mathcal{J}(m)$ cu $m_{\mathcal{J}}^{**}(A) < \infty$, există $B \in \mathcal{C}$ cu $m_{\mathcal{J}}^{**}(A \Delta B) < \varepsilon$. Dacă $A \in \mathcal{J}_0(m)$, putem lua $B \supset A$. Legătura dintre extensia efectuată pentru o măsură pozitivă (numărabil aditivă) și o măsură pozitivă aditivă este următoarea: Dacă $\mathcal{C}$ este un clan și $m: \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este măsură pozitivă, atunci $\mathcal{J}_0(m) \subset \mathcal{T}(m)$ și $\mathcal{J}(m) \subset \tau(m)$ și avem $m^{**}(A) = m_{\mathcal{J}}^{**}(m)$ pentru orice $A \in \mathcal{J}(m)$ (v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**).
Ex.: *Măsura Jordan*. Vom numi *interval n-dimensional* (n natural, $n \geqslant 1$) o mulțime inclusă în $\mathbb{R}^n$ care este un produs de n intervale în $\mathbb{R}$. Dacă cele n intervale sînt mărginite, vom numi intervalul respectiv *interval n-dimensional mărginit*. Clasa $\mathcal{P}$ a tuturor intervalelor n-dimensionale mărginite formează un semiclan. Clanul $\mathcal{C}$ generat de $\mathcal{P}$ este format cu toate reuniunile finite de intervale n-dimensionale mutual disjuncte. O mulțime din $\mathcal{C}$ se numește *mulțime elementară*. Definim o funcție de mulțime $m: \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ prin $m\left(\prod_{i=1}^{n} J_i\right) = \prod_{i=1}^{n} l(J_i)$, unde $l(J_i)$ este lungimea intervalului J_i. Funcția de mulțime m este numărabil aditivă, deoarece coincide cu restricția măsurii Lebesgue n-dimensionale la $\mathcal{C}$. Obținem apoi (v. **extinderea măsurilor pozitive de la un semiclan la clanul generat**) extensia lui m la $\mathcal{C}$, extensie pe care o notăm cu μ. Măsura μ este o măsură numărabil aditivă finită. O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește *mulțime măsurabilă Jordan* dacă are proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există două mulțimi elementare U_ε și V_ε astfel încît $U_\varepsilon \subset A \subset V_\varepsilon$ și $\mu(V_\varepsilon \setminus U_\varepsilon) < \varepsilon$. Se arată că o mulțime este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă frontiera sa este măsurabilă Jordan și are măsura Jordan egală cu 0. Clasa mulțimilor măsurabile Jordan formează clan pe care îl vom nota cu $\mathcal{J}_n$. Se arată că mulțimile măsurabile Jordan sînt mulțimi măsurabile Lebesgue, nu și reciproc (de exemplu, în cazul $n = 1$, mulțimea numerelor raționale din intervalul $[0, 1]$ nu este măsurabilă Jordan dar este măsurabilă Lebesgue și are măsura Lebesgue egală cu zero). Cu notațiile anterioare, avem $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{J}_0(m)$. Dacă $\mathcal{M}_n$ este clanul ereditar al mulțimilor mărginite în $\mathbb{R}^n$ ($\mathcal{M}_n$ este clanul ereditar generat de $\mathcal{C}$), definim *măsura exterioară Jordan n-dimensională* (*măsura exterioară Jordan*) ca fiind funcția de mulțime $\lambda_n^*: \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\lambda_n^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \supset A,\ B \in \mathcal{C}\}$. Similar, *măsura interioară Jordan n-dimensională* (*măsura interioară Jordan*) este funcția de mulțime $(\lambda_n)_*: \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}_+$, $(\lambda_n)_*(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset A,\ B \in \mathcal{C}\}$. Se arată că următoarele afirmații sînt echivalente pentru o mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$: 1) $A \in \mathcal{J}_n$; 2) $A \in \mathcal{M}_n$ și $\lambda_n^*(A) = (\lambda_n)_*(A)$. *Măsura Jordan n-dimensională* (*măsura Jordan*) este funcția de mulțime $\lambda_n: \mathcal{J}_n \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\lambda_n(A) = \lambda_n^*(A) = (\lambda_n)_*(A)$. Deoarece λ_n este restricția măsurii Lebesgue n-dimensionale la $\mathcal{J}_n$ rezultă că λ_n este o măsură pozitivă finită. (*I.C.*)

extinderea măsurilor pozitive de la un semiclan la clanul generat Vom considera un semiclan $\mathcal{P}$ de părți ale lui T și o funcție de mulțime aditivă și pozitivă $m: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, deci și finit aditivă. Atunci m se extinde în mod unic la $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ = clanul generat de $\mathcal{P}$ în sensul că există o măsură pozitivă aditivă unică $\mu: \mathcal{C}(\mathcal{P}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietatea că $\mu(A) = m(A)$ pentru orice A din $\mathcal{P}$. Dacă m este numărabil aditivă rezultă că și μ este numărabil aditivă. Vom numi pe μ *extensia lui m la clanul generat de* $\mathcal{P}$. Extensia se face astfel: fiecare mulțime A din $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ este de forma $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, unde familia finită $\{A_i\}_{i \in I}$ este formată cu mulțimi $A_i \in \mathcal{P}$ mutual disjuncte. Punem $\mu(A) = \sum_{i \in I} m(A_i)$ și definiția este coerentă. Ex.: *Măsura Lebesgue-Stieltjes*. a) Cazul unidimensional. Mulțimea totală este $T = \mathbb{R}$, iar semiclanul $\mathcal{P}$ este format din mulțimea tuturor intervalelor de forma $[a, b)$, $a \leqslant b$. Se consideră și o funcție crescătoare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și se definește $m: \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ prin $m([a, b)) = f(b-0) - f(a-0)$ (unde $f(b-0)$ este limita la stînga a lui f în b etc.). Măsura μ se numește *măsura Lebesgue-Stieltjes generată de funcția crescătoare f* (este numărabil aditivă). În cazul cînd $f(x) = x$ pentru orice x obținem *măsura Lebesgue* (deci $m([a, b)) = b - a$). b) Cazul n-dimensional. Considerăm un număr natural $n > 1$ și n funcții crescătoare $f_1, f_2, \ldots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mulțimea totală este $T = \mathbb{R}^n$ și semiclanul $\mathcal{P}$ este format din mulțimea tuturor intervalelor n-dimensionale de forma $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_n, b_n)$ cu $a_i \leqslant b_i$. Măsura $m: \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ se definește prin $m([a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)) = (f(b_1 - 0) - f(a_1 - 0)) \cdot (f(b_2 - 0) - f(a_2 - 0)) \cdot \ldots \cdot (f(b_n - 0) - f(a_n - 0))$. Măsura μ se numește *măsura Lebesgue-Stieltjes n-dimensională generată de funcțiile crescătoare* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (este numărabil aditivă). În cazul cînd $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$, unde $f(x) = x$ pentru orice x, obținem *măsura Lebesgue n-dimensională* $\left(\text{deci } m\left(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\right)$. Definiția se poate da și în alt mod, anume: a) În cazul unidimensional semiclanul $\mathcal{P}$ este format din toate intervalele de forma $(a, b]$ și $m((a, b]) = f(b + 0) - f(a + 0)$; b) În cazul n-dimensional semiclanul $\mathcal{P}$ este format din toate intervalele n-dimensionale de forma $\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$ și

$$m\left(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} (f_i(b_i + 0) - f_i(a_i + 0)).$$

În cazul unidimensional, să considerăm o funcție crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și semiclanul $\mathcal{P} = \{[a, b) \mid a \leqslant b\}$, ca mai sus. Definind $m : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ prin $m([a, b)) = f(b) - f(a)$, se obține faptul că m este finit aditivă, dar nu este numărabil aditivă dacă f nu este continuă la stînga. De fapt, m este numărabil aditivă dacă și numai dacă f este continuă la stînga. Similar, dacă semiclanul $\mathcal{S} = \{(a, b] \mid a \leqslant b\}$, ca mai sus, și definim $m((a, b]) = f(b) - f(a)$, se obține faptul că m este finit aditivă, numărabil aditivitatea fiind echivalentă cu faptul că f este continuă la dreapta. Considerații similare se fac în cazul n-dimensional. În concluzie o funcție de mulțime aditivă (resp. numărabil aditivă) și pozitivă, definită pe un semiclan, poate fi considerată ca fiind o măsură definită pe un clan, utilizînd extensia sa. (*I.C.*)

extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan Vom considera un clan $\mathcal{C}$ de părți ale lui T și o măsură pozitivă (numărabil aditivă) $m : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Vom vedea cum se extinde m la o măsură pozitivă numărabil aditivă definită pe o σ-algebră de părți ale lui T.
Pasul 1. Notăm prin $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ tribul ereditar generat de $\mathcal{C}$ și considerăm măsura exterioară $m^* : \mathcal{H}(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ indusă de m. (v. **măsură exterioară**). Atunci, fie $\mathcal{T}(m)$ tribul părților m^*-măsurabile. Rezultă că $\mathcal{T}(m) \supset \mathcal{T}(\mathcal{C})$ = tribul generat de $\mathcal{C}$ și restricția lui m^* la $\mathcal{T}(m)$ este măsură pozitivă care extinde pe m (*teorema de extindere a lui Hahn* sau *teorema de extindere a lui Carathéodory-Hahn*). Vom nota această măsură prin $\underline{m}^*$, deci $\underline{m}^* : \mathcal{T}(m) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ extinde pe m. Se observă că $\underline{m}^*$ este o *măsură completă*, *i.e.* are proprietatea că $\{A \in \mathcal{T}(m) \mid \underline{m}^*(A) = 0\}$ este o clasă ereditară. De obicei, $\underline{m}^*$ se numește *extensia Hahn* (sau *extensia Carathéodory-Hahn*) a lui m. Dacă $\mathcal{C}$ este trib și m este completă, pasul 1 este superfluu, deoarece $\mathcal{T}(m) = \mathcal{C}$.
Se arată că dacă $m : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o măsură aditivă, atunci clasele de mulțimi $\mathcal{C}_c = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{C}$ și există $M \in \mathcal{C}$ cu $m(M) = 0$ și $M \supset N\}$, $\mathcal{C}_\Delta = \{A \,\Delta\, N \mid A \in \mathcal{C}$ și există $M \in \mathcal{C}$ cu $m(M) = 0$ și $M \supset N\}$ coincid. Măsura aditivă $m_c : \mathcal{C}_c \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $m_c(A \cup N) = m(A)$ (sau $m_c(A \,\Delta\, N) = m(A)$, definiția este coerentă) se numește *completarea măsurii m*. Dacă $\mathcal{C}$ este trib și $m : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este numărabil aditivă, atunci $\underline{m}^*$ coincide cu completarea lui m. În acest caz $\underline{m}^*$ se mai numește și *extensia Lebesgue* a lui m.
Pasul 2. Acest pas este superfluu dacă mulțimea T este reuniunea unui șir de mulțimi din $\mathcal{C}$. Considerăm clasa $\tau(m)$, *i.e.* clasă locală generată de $\mathcal{T}(m)$, deci $\tau(m) = \{A \subset T \mid A \cap B \in \mathcal{T}(m)$ pentru orice B din $\mathcal{T}(m)\}$ care este o σ-algebră ce include pe $\mathcal{T}(m)$. Mulțimile din $\tau(m)$ se numesc *mulțimi măsurabile în raport cu măsura m* (*sau mulțimi m-măsurabile*). Subliniem faptul că unii autori se opresc la pasul 1 al extensiei și numesc mulțimile din $\mathcal{T}(m)$ *mulțimi m-măsurabile*. De asemenea, unii autori numesc mulțimile din $\tau(m)$ *mulțimi local măsurabile în raport cu măsura m* (*sau mulțimi local m-măsurabile*). Definim $m^{**} : \tau \to \overline{\mathbb{R}}_+$ prin $m^{**}(A) = \sup\{m^*(B) \mid B \subset A,\ B \in \mathcal{T}(m)\}$. Atunci m^{**} este o măsură pozitivă care extinde pe $\underline{m}^*$. Dacă există un șir $\{T_n\}_n$ de mulțimi din $\mathcal{C}$ cu proprietatea că $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = T$, atunci $\tau(m) = \mathcal{T}(m)$ și pasul 2 este superfluu, deoarece $\underline{m}^* = m^{**}$.
O mulțime m-măsurabilă E cu proprietatea că $m^{**}(E) = 0$ se numește *mulțime m-neglijabilă în raport cu măsura m* (sau *mulțime m-neglijabilă*). Subliniem faptul că unii autori se opresc la pasul 1 și numesc *mulțime m-neglijabilă* o mulțime $E \in \mathcal{T}(m)$ cu proprietatea $m^*(E) = 0$. De asemenea, unii autori numesc mulțimile m-neglijabile *mulțimi local neglijabile în raport cu măsura m* (sau *mulțimi local m-neglijabile*). Mulțimile m-neglijabile formează un trib ereditar, deci m^{**} este măsură completă. Dacă pentru fiecare $t \in T$ avem cîte o propoziție $P(t)$ care este adevărată pentru toate punctele t din T, cu excepția punctelor unei mulțimi neglijabile M, spunem că *proprietatea* $P(t)$ *are loc a.p.t. în raport cu măsura m* sau $P(t)$ *are loc m-a.p.t.* O mulțime $A \in \tau(m)$ pentru care $m^{**}(A) < \infty$ se numește *mulțime m-integrabilă*. Mulțimea părților m-integrabile este *semitrib*. În concluzie, orice măsură pozitivă (numărabil aditivă) poate fi extinsă la o σ-algebră și extinderea sa este o măsură completă. Este deci natural ca măsurile pozitive (numărabil aditive) să fie considerate ca fiind definite în acest mod. De asemenea, domeniul natural de definiție al măsurilor pozitive și finite este semitribul. Numim *spațiu cu măsură* un triplet $(T, \mathcal{T}, \mu)$, unde T este o mulțime nevidă, $\mathcal{T}$ este o σ-algebră de părți ale mulțimii T și $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o măsură pozitivă, numărabil aditivă, care este și completă. Unii autori impun asupra lui $\mathcal{T}$ condiția mai slabă ca $\mathcal{T}$ să fie numai trib cu proprietatea că reuniunea tuturor mulțimilor din $\mathcal{T}$ să fie egală cu întreg spațiul T.) Pornind în acest mod (*i.e.* cu un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ dat), vom numi o mulțime $A \in \mathcal{T}$, *mulțime μ-măsurabilă* (sau *mulțime măsurabilă în raport* μ). De asemenea, în același cadru, vom numi o mulțime $A \in \mathcal{T}$ cu proprietatea că $\mu(A) = 0$, *mulțime μ-neglijabilă* (sau *mulțime neglijabilă în raport cu* μ). Un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ se numește *spațiu cu măsură finită* (resp. *spațiu cu măsură σ-finită*, resp. *spațiu cu măsură total σ-finită*) dacă măsura μ este funcție de mulțime finită (resp. σ-finită, resp. total σ-finită). Un *spațiu măsurabil* este un cuplu $(T, \mathcal{T})$, unde T este o mulțime nevidă și $\mathcal{T}$ o σ-algebră de părți ale lui T. (Unii autori impun condiția mai slabă ca reuniunea tuturor mulțimilor lui $\mathcal{T}$ să fie întreg spațiul T.) O mulțime A din $\mathcal{T}$ se numește *mulțime măsurabilă*. O prezentare alternativă a extensiei este următoarea. Se consideră un trib $\mathcal{T}$ de părți ale lui T și o măsură numărabil aditivă σ-finită $m : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. *Măsura interioară indusă de m* (sau *măsura interioară generată de m*) este funcția de mulțime $m_* : \mathcal{H}(\mathcal{T}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $m_*(A) = \sup\{m(B) \mid B \subset A,\ B \in \mathcal{T}\}$ (aici $\mathcal{H}(\mathcal{T})$ = tribul ereditar generat de $\mathcal{T}$). Se arată că $m_*(\emptyset) = 0$, m_* este crescătoare și numărabil superaditivă. În plus, pentru fiecare mulțime $A \in \mathcal{H}(\mathcal{T})$, există un *nucleu măsurabil*, *i.e.* o mulțime $K \in \mathcal{T}$ pentru care: a) $K \subset A$; b) Pentru orice $B \in \mathcal{T}$, $B \subset A \setminus K$, avem $m(B) = 0$. Dacă $(T, \mathcal{T}, \mu)$ este un spațiu cu măsură σ-finită, o mulțime $T_0 \subset T$ se numește *mulțime masivă* dacă $\mu_*(A \setminus T_0) = 0$ pentru orice $A \in \mathcal{T}$. Ex.: *Măsura Lebesgue-Stieltjes*. Se consideră măsura Lebesgue-Stieltjes definită pe clanul reuniunilor de intervale (v. **extinderea măsurilor pozitive de la un semiclan la clanul generat**). Atît în cazul unidimensional, cît și în cel n-dimensional este necesar numai pasul 1 al extensiei, pasul 2 fiind superfluu. Măsura astfel obținută ca extensie, deci $\lambda : \mathcal{T}(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, se numește *măsura Lebesgue-Stieltjes generată de funcția crescătoare f* (în cazul unidimensional) sau *măsura Lebesgue-Stieltjes n-dimensională generată de funcțiile crescătoare* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (în cazul n-dimensional). Dacă $f(x) = x$ pentru orice x în $\mathbb{R}$ (în cazul unidimensional) obținem *măsura Lebesgue*, iar dacă $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$ (în cazul n-dimensional) obținem *măsura Lebesgue n-dimensională* (uneori se numește, pur și simplu, *măsura Lebesgue*). În cazul măsurii Lebesgue μ, o mulțime din $\mathcal{T}(\mu)$ se numește *mulțime măsurabilă Lebesgue*, iar măsura exterioară generată de μ se numește *măsura exterioară Lebesgue*. Orice mulțime măsurabilă Borel este mulțime măsurabilă Lebesgue, nu și reciproc. Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ este mulțime măsurabilă Lebesgue, atunci restricția măsurii Lebesgue la mulțimea A se numește *măsura Lebesgue pe A*. (*I.C.*)

extinderea măsurilor Radon v. **prelungirea măsurilor Radon pozitive**

extinderea măsurilor vectoriale I. *Extinderea măsurilor definite pe un semiclan.* Fie $\mathcal{P}$ un semiclan de părți ale mulțimii T și X un spațiu Banach. Se consideră $m : \mathcal{P} \to X$, care este măsură aditivă. Dacă $\mathcal{C}$ este clanul generat de $\mathcal{P}$ (v. **clasă de mulțimi**), atunci m se extinde în mod unic la $\mathcal{C}$. Anume, această extensie este $n : \mathcal{C} \to X$, definită prin $n(A) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i)$, unde $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, cu $A_i \in \mathcal{P}$, A_i mutual disjuncte. Dacă m este numărabil aditivă, rezultă că și n este numărabil aditivă. II. *Extinderea măsurilor definite pe un clan.* Fie $\mathcal{C}$ un clan de părți ale mulțimii T și X un spațiu Banach. Vom considera și un alt clan $\mathcal{K}$ de părți ale lui T, $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$. Fie $\mu : \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ o funcție de mulțime finită, subaditivă, crescătoare cu $\mu(\varnothing) = 0$. Ea definește pe $\mathcal{K}$ *semimetrica* (sau *semidistanța*) *Fréchet-Nikodym* $\rho_\mu \to \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ dată prin $\rho_\mu(A, B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$. Fie de asemenea o măsură aditivă $m : \mathcal{C} \to X$ cu proprietatea că $\|m(A)\| \leqslant \mu(A)$ pentru orice A din $\mathcal{C}$. Atunci m este uniform continuă pe $\mathcal{C}$ cu semimetrica indusă de ρ_μ. Dacă $\mathcal{C}$ este dens în $\mathcal{K}$ pentru această semimetrică, rezultă că există o unică măsură aditivă $m_1 : \mathcal{K} \to X$ care este o extensie a lui m și astfel încît $\|m_1(A)\| \leqslant \mu(A)$ pentru orice A din $\mathcal{K}$. Dacă μ este aditivă, atunci m_1 este cu variație finită și modulul său $|m_1|$ este o extensie a lui $|m|$, iar dacă μ este chiar numărabil aditivă, atunci și m_1 este numărabil aditivă. În consecință, să considerăm un clan $\mathcal{C}$ de părți ale mulțimii T, un spațiu Banach X și o măsură aditivă $m : \mathcal{C} \to X$ cu variație finită. Fie

$$\textstyle\sum_J(m) = \{A \subset T \mid A \in J(m) \quad \text{și} \quad |m|_J^{**}(A) < \infty\}$$

(v. **extinderea măsurilor pozitive aditive pe un clan**). Vom considera un clan $\mathcal{K}$ de părți ale lui T astfel încît $\mathcal{C} \subset \mathcal{K} \subset \sum_J(|m|)$. Atunci m se extinde în mod unic la o măsură aditivă cu variație finită $m_1 : \mathcal{K} \to X$ și avem $|m_1|(A) = |m|_J^{**}(A)$ pentru orice A din $\mathcal{K}$. Similar, considerăm un clan $\mathcal{C}$ de părți ale lui T, un spațiu Banach X și o măsură numărabil aditivă $m : \mathcal{C} \to X$ cu variație finită. Fie $\sum(|m|) = \{A \subset T \mid A \in \tau(|m|) \text{ și } |m|^{**}(A) < \infty\}$ (v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**). Vom considera un clan $\mathcal{K}$ de părți ale lui T astfel încît $\mathcal{C} \subset \mathcal{K} \subset \sum(|m|)$. Atunci m se extinde în mod unic la o măsură vectorială numărabil aditivă cu variație finită $m_1 : \mathcal{K} \to X$ și avem $\tau(|m|) = \tau(|m_1|)$. Problema extinderii unei măsuri vectoriale numărabil aditive de la un clan la tribul generat este rezolvată complet cu ajutorul următorului rezultat fundamental: *Teorema Carathéodory-Hahn-Kluvanek* (sau *teorema de extindere a lui Kluvanek*). Fie $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T, $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ tribul generat de $\mathcal{C}$, X un spațiu Banach și $m : \mathcal{C} \to X$ o măsură numărabil aditivă. Există o extensie numărabil aditivă $n : \mathcal{T}(\mathcal{C}) \to X$ a lui m (în mod necesar n este unic determinată) dacă și numai dacă m este s-aditivă (v. **măsură vectorială**). (*I.C.*)

extrapolare v. **interpolare**

extreme condiționate Fie A o mulțime nevidă inclusă într-un spațiu topologic și $f : A \to \mathbb{R}$. Fie B o submulțime nevidă a lui A. Un punct $a \in B$ care are proprietatea că restricția lui f la B are în a un punct de extrem local se numește *punct de* **e.c.** *de B pentru f* (putînd fi *punct de maxim condiționat* sau *punct de minim condiționat*). Valoarea $f(a)$ se numește **e.c.** *de B pentru f* (putînd fi *maxim condiționat* sau *minim condiționat*). În continuare vom presupune că $n \geqslant 2$ este un număr natural, $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție cu derivate parțiale continue. Vom considera și un număr natural $1 \leqslant K < n$ și funcțiile $F_1, F_2, \ldots, F_k : A \to \mathbb{R}$ care au derivate parțiale continue. Mulțimea $B \subset A$ va fi mulțimea următoare: $B = \{x \in A \mid F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_K(x) = 0\}$. Un punct de **e.c.** de B pentru f se mai numește și *punct de extrem cu legături pentru* f, iar valoarea $f(a)$ se numește *extrem cu legături pentru* f. Să considerăm un punct a din B pentru care matricea $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i \leqslant K,\, 1 \leqslant j \leqslant n}$ are rangul K. Atunci, dacă a este punct de e.c. de B pentru f, rezultă că există K numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K$ (numite *multiplicatorii lui Lagrange*) cu proprietatea că a este punct staționar pentru funcția $F = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_K F_K$ $\left(i.e.\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(a) = 0\right)$. Reciproca este falsă. În cazul particular cînd f și $F_1, F_2, \ldots, F_K$ au derivate parțiale de ordinul al doilea continue pe A, vom obține rezultate suplimentare, după cum urmează. Fie a un punct staționar pentru F, unde F este exprimat cu multiplicatorii lui Lagrange. Diferențiem formal în relațiile de legătură $F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_K(x) = 0$ și obținem sistemul de K ecuații $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\, dx_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, K$, cu necunoscutele $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Cum matricea sistemului are rangul K, putem rezolva acest sistem cu regula lui Cramer, exprimînd K necunoscute în funcție de celelalte $n-K$ necunoscute în mod unic. Renumerotînd, putem presupune că am exprimat pe dx_{n-K+1}, $dx_{n-K+2}, \ldots, dx_n$ în funcție de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-k}$. Înlocuim aceste expresii în forma pătratică $\sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, dx_i\, dx_j$, obținînd forma pătratică $\sum_{i,\, j=1}^{n-K} A_{ij}\, dx_i\, dx_j$. Dacă matricea $(A_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n-K}$ este pozitiv (resp. negativ) definită, atunci a este punct de minim (resp. de maxim) pentru f. (*I.C.*)

extreme locale Fie A o mulțime inclusă într-un spațiu topologic și $f: A \to \mathbb{R}$. Un punct a din A se numește *punct de maxim* (resp. *minim*) *local* pentru f dacă există o vecinătate V a lui a cu proprietatea că $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$) pentru orice x din $V \cap A$. Valoarea $f(a)$ se numește *maxim* (resp. *minim*) *local* al lui f. Un punct de maxim sau de minim local se numește *punct de extrem local* pentru f și valoarea lui f în acel punct se numește **e.l.** al lui f. În cazul particular cînd A este o mulțime inclusă în $\mathbb{R}^n$ și f diferențiabilă în a, avem rezultate mai precise, cu caracter practic. Vom considera cazul $n \geqslant 2$. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ și a un punct interior lui A. Dacă f este diferențiabilă în a și a este punct de **e.l.** pentru f, atunci a este *punct staționar* pentru f, *i.e.* avem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Reciproca este falsă. Presupunînd, în plus, că f admite derivate parțiale continue de ordinul al doilea într-o vecinătate a punctului staționar a, se obține următorul rezultat suplimentar: 1) Dacă matricea hessiană $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ este pozitiv (resp. negativ) definită, atunci a este punct de minim (resp. maxim) local pentru f. 2) Dacă matricea hessiană de mai sus este nedefinită, atunci a nu este punct de **e.l.** pentru f. În particular, în cazul $n=2$, considerăm o funcție $f: A \to \mathbb{R}$ și un punct (x_0, y_0) interior lui A, pentru care $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Presupunem că f are derivate parțiale continue într-o vecinătate a lui (x_0, y_0) și notăm:

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2.$$

Dacă $D > 0$, atunci (x_0, y_0) este punct de **e.l.** pentru f, și anume: în cazul $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ $\left(\text{echivalent, } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0\right)$, (x_0, y_0) este punct de minim ocal; în cazul $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ $\left(\text{echivalent, } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0\right)$, (x_0, y_0) este punct de maxim local. Dacă $D < 0$, punctul (x_0, y_0) nu este punct de e.l. (*I.C.*)

F

factor integrant v. **ecuație cu diferențiale totale exacte**

factori elementari ai lui Weierstrass v. **funcție întreagă**

familie compozabilă de distribuții, familie $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de distribuții (pe $\mathbb{R}$) pentru care următoarele condiții sînt verificate: i) Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, punînd $\psi(t) = (f_t, \varphi)$, atunci $\psi \in \mathcal{D}$; ii) Dacă $\varphi_n \in \mathcal{D}$ și $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, punînd $\psi_n(t) = (f_t, \varphi_n)$, atunci $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Dacă F este o **f.c.d.** se introduce operația de compoziție $y = F \circ x$ unde $(y, \varphi) = (x(s), (f_s(t), \varphi(t)))$. Dacă $g \in \mathcal{D}^*$ și $F = \{g^s\}_{s \in \mathbb{R}}$, unde g^s este translația cu s a lui g, atunci F este **f.c.d** dacă și numai dacă g este convolutibilă; atunci $F \circ x = g * x$. Noțiunea a fost introdusă în 1964 de Romulus Cristescu. (*Gh.Gr.*)

familie concordantă de măsuri Radon Fie T un spațiu local compact, μ o măsură pozitivă pe T și X un alt spațiu local compact. Vom considera spațiul vectorial $\mathcal{M}(X)$ al măsurilor Radon pe X. Fie, de asemenea, o familie $V: T \mapsto \mathcal{M}(X)$ pentru care vom nota $V(t) = \lambda_t$, unde $t \in T$ este arbitrar. Așadar, identificăm funcția V cu familia de măsuri Radon $\{\lambda_t\}_{t \in T}$. Vom presupune că toate măsurile Radon λ_t sînt pozitive. Să presupunem acum că pentru orice funcție f continuă cu suport compact pe X, aplicația numerică definită pe T prin $t \mapsto \lambda_t(f)$ este esențial μ-integrabilă. Obținem măsura Radon pozitivă ν pe X, definită prin $\nu(f) = \int \lambda_t(f)\, d\mu(t)$ pentru orice f continuă cu suport compact pe X. Măsura Radon ν se numește *integrala familiei de măsuri* $\{\lambda_t\}_{t \in T}$. De exemplu, dacă T este mulțime finită, integrala oricărei familii $\{\lambda_t\}_{t \in T}$ este $\sum_{t \in T} \mu(\{t\})\, \lambda_t$. Familia $\{\lambda_t\}_{t \in T}$ se numește *familie de măsuri Radon concordantă cu* μ (sau *familie μ-concordantă*) dacă: 1) Pentru orice funcție f continuă cu suport compact pe X, funcția definită pe T prin $t \mapsto \lambda_t(f)$ este esențial μ-integrabilă; 2) Aplicația V (cu care se identifică familia $\{\lambda_t\}_{t \in T}$) este μ-măsurabilă dacă pe $\mathcal{M}(X)$ vom considera topologia vagă. (*I.C.*)

familie de mulțimi densă (în raport cu o măsură Radon) Fie T un spațiu local compact, μ o măsură Radon pozitivă pe T și A o parte μ-măsurabilă a lui T. O familie $\mathcal{A}$ de submulțimi compacte ale lui A se numește *familie de mulțimi μ-densă în A* dacă are proprietățile: 1) Pentru orice $A_1, A_2, \ldots, A_n$ din $\mathcal{A}$, avem $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$; 2) Pentru orice B în $\mathcal{A}$ și orice mulțime închisă $D \subset B$, mulțimea D este în $\mathcal{A}$; 3) O mulțime $B \subset A$ este local μ-neglijabilă dacă și numai dacă $B \cap K$ este μ-neglijabilă pentru orice K în $\mathcal{A}$. O **familie** de mulțimi μ-densă în T se numește *familie μ-densă*. Dacă $A \subset T$ este μ-măsurabilă, G este un spațiu topologic și $f: A \to G$, atunci: a) Dacă f este μ-măsurabilă, familia $\{K \subset A \mid K$ este compact și restricția lui f la K este continuă$\}$ este μ-densă în A; b) Dacă există o familie $\mathcal{A}$ care este μ-densă în A

astfel încît restricţia lui f la K este continuă, pentru orice $K \in \mathcal{A}$, atunci f este μ-măsurabilă. (*I.C.*)

familie de mulţimi local numărabilă Fie T un spaţiu local compact. O familie $\mathcal{A}$ de părţi ale lui T se numeşte *familie de mulţimi local numărabilă* dacă pentru orice t din T există o vecinătate V a lui t cu proprietatea că mulţimea $\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V$ este nevidă$\}$ este cel mult numărabilă. Se arată că dacă μ este o măsură Radon pozitivă pe T, există o familie $\mathcal{A}$ de mulţimi local numărabilă, formată din mulţimi compacte mutual disjuncte şi astfel încît $T \setminus \left(\bigcup_{K \in \mathcal{A}} K \right)$ este local μ-neglijabilă. Dacă $\bigcup_{K \in \mathcal{A}} K = B$ se arată că B este μ-măsurabilă şi atunci o funcţie $g: B \to X$, unde X este spaţiu topologic, este μ_B-măsurabilă dacă şi numai dacă pentru orice K din $\mathcal{A}$ avem că restricţia lui g la K este μ_K-măsurabilă; aici μ_B este măsura indusă de μ pe B etc. (*I.C.*)

familie local finită de mulţimi O familie $\{A_i\}_{i \in I}$ de părţi ale spaţiului topologic $\mathcal{X}$ se numeşte *local finită* dacă pentru orice $x \in \mathcal{X}$ există o vecinătate V a lui x astfel încît mulţimea $\{i \in I \mid V \cap A_i \neq \emptyset\}$ să fie finită. O familie de părţi ale spaţiului topologic $\mathcal{X}$ se numeşte *σ-local finită* dacă este o reuniune numărabilă de familii local finite. (*Gr.Gr.*)

familie normală de funcţii, o familie de aplicaţii continue ale spaţiului compact X în $\mathbb{R}$ cu proprietatea că orice şir de funcţii din familie conţine un subşir care tinde uniform către o funcţie continuă pe X sau către $+\infty$, sau $-\infty$. Orice familie de funcţii convexe pe intervalul compact J, egal mărginite superior pe acest interval, este normală pe orice interval compact conţinut în interiorul lui J. (*S.M.*)

familie ortonormală v. **spaţiu Hilbert**

familie sumabilă de elemente (într-un spaţiu Banach), familie $\{x_j\}_{j \in J}$ de elemente pentru care există un element x cu proprietatea: pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o parte finită J_ε a mulţimii J astfel încît $\left\| \sum_{j \in J} x_j - x \right\| < \varepsilon$ oricare ar fi submulţimea finită H a lui J astfel ca $H \supset J_\varepsilon$. Elementul x se numeşte *suma familiei* şi se notează $x = \mathop{\mathrm{S}}_{j \in J} x_j$. Dacă $\{x_j\}_{j \in J}$ este o familie de elemente cu mulţime infinită de indici, atunci pentru ca familia să fie sumabilă este necesar şi suficient ca pentru orice număr $\varepsilon > 0$ să existe o parte finită J_ε a lui J astfel ca $\left\| \sum_{j \in H} x_j \right\| < \varepsilon$ oricare ar fi submulţimea finită H a lui J disjunctă de J_ε. În particular rezultă că mulţimea elementelor nenule ale unei familii sumabile este cel mult numărabilă. O familie $\{x_j\}_{j \in J}$ de elemente ale unui spaţiu Banach se spune că este *absolut sumabilă* dacă familia $\{\|x_j\|\}_{j \in J}$ este sumabilă. Într-un spaţiu Banach, orice familie absolută sumabilă de elemente este sumabilă. Dacă un şir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente ale unui spaţiu Banach reprezintă o familie sumabilă, atunci seria formată cu termenii şirului este convergentă şi suma seriei coincide cu $\mathop{\mathrm{S}}_{n \in \mathbb{N}} x_n$. (*R.C.*)

familie sumabilă de măsuri Radon pozitive Fie X un spaţiu local compact şi $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o familie de măsuri Radon pozitive pe X. Familia $\{\lambda_\alpha\}_\alpha$ se numeşte *sumabilă* dacă pentru orice funcţie continuă cu suport compact pe X familia de numere $\left\{ \int f \,\mathrm{d}\lambda_\alpha \right\}_\alpha$ este sumabilă, ceea ce este echivalent cu a spune că pentru orice funcţie pozitivă, continuă cu suport compact f pe X avem $\sum_{\alpha \in A} \int f \,\mathrm{d}\lambda_\alpha < \infty$. În aceste condiţii, *suma familiei* $\{\lambda_\alpha\}_\alpha$ este măsura Radon ν pe X definită prin $\nu(f) = \sum_{\alpha \in A} \int f \,\mathrm{d}\lambda_\alpha$. Se arată că dacă F este un spaţiu Banach şi $f: X \to F$ este ν-integrabilă, atunci f este λ_α-integrabilă pentru orice α, familia $\left\{ \int f \,\mathrm{d}\lambda_\alpha \right\}_\alpha$ este sumabilă în F şi $\int f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{\alpha \in A} \int f \,\mathrm{d}\lambda_\alpha$ (v. şi **măsură localizabilă**). (*I.C.*)

familie s-aditivă v. **măsură vectorială**

familie σ-aditivă v. **măsură vectorială**

familie uniform numărabil aditivă v. **măsură vectorială**

familie uniform tare aditivă v. **măsură vectorială**

fascicol Fie X un spaţiu topologic. Un prefascicol de mulţimi $\mathcal{F}$ pe X se numeşte **f.** (de mulţimi pe X) dacă satisface condiţiile următoare: 1) Mulţimea $\mathcal{F}(\emptyset)$ conţine un singur element; de regulă se ia $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$; 2) Fie $\{U_i\}_{i \in I}$ o familie de mulţimi în X, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ şi, pentru fiecare $i \in I$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$; dacă $\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ pentru toate perechile de indici i, $j \in I$, atunci există o unică secţiune $s \in \mathcal{F}(U)$ astfel încît $\rho^{U}_{U_i}(s) = s_i$ pentru toţi $i \in I$. Dacă $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ sînt **f.** de mulţimi pe X, un morfism de prefascicole de la $\mathcal{F}$ la $\mathcal{G}$ se numeşte *morfism de* **f.** de la $\mathcal{F}$ la $\mathcal{G}$. **F.** de mulţimi pe X şi morfismele lor formează o categorie, notată **Ens** (X). Evident **Ens** $(X) =$ **Ens** cînd spaţiul topologic X conţine un singur punct. Ex.: 1° Fie X un spaţiu topologic oarecare. Pentru orice mulţime deschisă $U \subset X$, notăm $C(U)$ mulţimea tuturor funcţiilor reale continue pe U. Dacă U şi V sînt mulţimi deschise în X şi $V \subset U$, notăm $\rho^U_V : C(U) \to C(V)$ aplicaţia de restricţie uzuală, *i.e.* aplicaţia $C(U) \ni f \mapsto f \mid V \in C(V)$. Evident, familia $C = \{C(U), \rho^U_V\}_{V \subset U}$ este un **f.** pe X. Pentru orice punct $x \in X$, elementele fibrei C_x se numesc *germeni de funcţii* (reale) *continue* în punctul x; **f.** C însuşi se numeşte **f.** *germenilor de funcţii* (reale) *continue* pe X. În mod similar se defineşte **f.** germenilor de aplicaţii continue pe X cu valori într-un spaţiu topologic arbitrar Y, în particular **f.** *germenilor de funcţii complexe continue* pe X. 2° Fie X o varietate diferenţiabilă de clasă C^∞. Pentru orice mulţime deschisă U în X, notăm prin $\mathcal{E}(U)$ mulţimea tuturor funcţiilor reale de clasă C^∞ pe U. Dacă U şi V sînt mulţimi deschise în X şi $V \subset U$, notăm prin $\rho^U_V : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(V)$ aplicaţia de restricţie uzuală. Evident, familia $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(U), \rho^U_V\}_{V \subset U}$ este un **f.** pe X. Pentru orice punct $x \in X$, elementele fibrei $\mathcal{E}_x$ se numesc *germeni de funcţii* de clasă C^∞ pe X în punctul x; **f.** $\mathcal{E}$ se numeşte **f.** *germenilor de funcţii de clasă* C^∞ pe X. În mod similar se defineşte **f.** *germenilor de funcţii de clasă* C^r pe X cînd X este o varietate diferenţiabilă de clasă C^r pentru un $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. 3° Fie X o varietate complexă. Pentru orice mulţime deschisă U în X, notăm prin $\mathcal{O}(U)$ mulţimea tuturor funcţiilor olomorfe pe U. Dacă U şi V sînt mulţimi deschise în X şi $V \subset U$, notăm prin $\rho^U_V : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ aplicaţia de restricţie uzuală. Evident, familia $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(U), \rho^U_V\}_{V \subset U}$ este un **f.** pe X. Pentru orice punct $x \in X$, elementele fibrei $\mathcal{O}_x$ se numesc *germeni de funcţii olomorfe* în punctul x; **f.** $\mathcal{O}$ se numeşte **f.** *germenilor de funcţii olomorfe* pe X. 4° Fie $X = \mathbb{R}^n$ şi, pentru orice mulţime deschisă U în X, $\mathcal{F}(U) := L^1(U, \mathrm{loc})$, *i.e.* mulţimea claselor de funcţii reale local integrabile în sensul lui Lebesgue. Aplicaţiile de restricţie se definesc ca în exemplele precedente. Este clar că $\mathcal{F}$ este atunci un **f.** de mulţimi pe $\mathbb{R}^n$. Să observăm că dacă în această definiți' înlocuim mulțimea $L^1(U, \text{loc})$ cu mulțimea $L^1(U)$ a funcțiilor integrabile obținem un prefascicol care nu este **f.** cînd $n \geqslant 1$. **5°** Fie X un spațiu topologic și A o mulțime nevidă. Pentru orice mulțime deschisă U în X, fie $\mathcal{F}(U)$ mulțimea tuturor aplicațiilor local constante $f : U \to A$. Aplicațiile de restricție ρ_V^U se definesc ca în exemplele precedente. Evident, familia $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U), \rho_V^U\}_{V \subset U}$ este un **f.** pe X, numit **f.** *constant de fibră A*. Să observăm de asemenea că, dacă în această definiție înlocuim mulțimea aplicațiilor local constante cu mulțimea aplicațiilor constante, se obține un prefascicol care în general nu este **f.** Se poate reține faptul că proprietățile cu caracter local furnizează **f.** în timp ce proprietățile cu caracter global furnizează prefascicole.

Fiind date două **f.** $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$ pe X, se spune că $\mathcal{F}'$ este un *subfascicol* al lui $\mathcal{F}$ dacă: 1) Pentru orice mulțime deschisă U în X, $\mathcal{F}'(U)$ este o submulțime a lui $\mathcal{F}(U)$; 2) Pentru orice pereche de mulțimi deschise U, V în X astfel încît $V \subset U$, aplicația $\rho_V^U(\mathcal{F}') : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}'(V)$ este indusă de aplicația $\rho_V^U(F') : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. Dacă $\mathcal{F}'$ este un subfascicol al lui $\mathcal{F}$, atunci familia $i = \{i_U\}_{U \in D(X)}$ unde i_U este incluziunea lui $\mathcal{F}'(U)$ în $\mathcal{F}(U)$ este un morfism de **f.** Fie $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ o familie de **f.** de mulțimi în X. *Produsul direct* al acestei familii este **f.** de mulțimi $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ pe X definit prin

$$\mathcal{F}(U) := \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \quad \text{și} \quad \rho_V^U(\mathcal{F}) := \prod_{i \in I} \rho_V^U(\mathcal{F}_i).$$

Fie $\varphi : X \to Y$ o aplicație continuă de spații topologice și $\mathcal{F}$ un **f.** de mulțimi pe X. *Imaginea directă* a **f.** $\mathcal{F}$ prin aplicația continuă φ este **f.** $\varphi_*\mathcal{F}$ pe Y definit prin

$$(\varphi_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(\varphi^{-1}(V)) \quad \text{și} \quad \rho_{V'}^V(\varphi_*\mathcal{F}) := \rho_{\varphi^{-1}(V')}^{\varphi^{-1}(V)}(\mathcal{F})$$

pentru V și V' mulțimi deschise în Y astfel încît $V' \subset V$. Imaginea directă se definește și pentru morfisme de **f.** Anume, dacă $\theta : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ este un morfism de **f.** de mulțimi pe X, $\varphi_*(\theta) : \varphi_*\mathcal{F}_1 \to \varphi_*\mathcal{F}_2$ este morfismul de **f.** pe Y definit prin $(\varphi_*\theta)_V = \theta_{\varphi^{-1}(V)}$, $V \in D(Y)$. Rezultă că imaginea directă este în fapt un functor $\varphi_* : \mathbf{Ens}(X) \to \mathbf{Ens}(Y)$. Orice **f.** de mulțimi $\mathcal{F}$ este în particular un prefascicol de mulțimi și deci fibra sa este definită pentru orice $x \in X$. Fie $\mathcal{F}$ un prefascicol de mulțimi pe X. Se definesc un **f.** de mulțimi $\mathcal{F}'$ pe X și un morfism $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ după cum urmează. Pentru orice mulțime deschisă U în X, $\mathcal{F}'(U)$ este mulțimea tuturor aplicațiilor $f : U \to \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ cu proprietatea că, pentru orice punct $a \in U$, există o vecinătate deschisă U_a a lui a în X și o secțiune $s \in \mathcal{F}(U_a)$ astfel încît $a \in U_a \subset U$ și astfel încît $f(x) = \rho_x^U(s)$ cînd $x \in U_a$; în particular, $f(x) \in \mathcal{F}_x$ pentru orice $x \in U$. Apoi, dacă U și V sînt două mulțimi deschise în X și $V \subset U$, $\rho_V^U(\mathcal{F}')$ este aplicația de restricție uzuală $f \mapsto f \mid V$. În fine, pentru orice mulțime deschisă U în X, $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ este aplicația care asociază oricărei secțiuni $s \in \mathcal{F}(U)$ funcția $f : U \to \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ definită prin $f(x) := \rho_x^U(s)$. Este clar că familia $\mathcal{F}' := \{\mathcal{F}'(U), \rho_V^U(\mathcal{F}')\}_{V \subset U}$, este un **f.** de mulțimi pe X și că familia $\alpha := \{\alpha_U\}_{U \in D(X)}$ este un morfism de la $\mathcal{F}$ la $\mathcal{F}'$. Se spune că $\mathcal{F}'$ este **f.** *asociat* prefascicolului $\mathcal{F}$ și că $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ este morfismul canonic. Pentru orice **f.** de mulțimi G pe X și orice morfism $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, există un unic morfism $\theta' : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}$ astfel încît $\theta = \theta' \circ \alpha$. Fie $\varphi : X \to Y$ o aplicație continuă de spații topologice și $\mathcal{G}$ un **f.** de mulțimi pe Y. Vom defini un **f.** de mulțimi $\mathcal{G}^*$ pe X și un morfism

$\alpha : \mathcal{G} \to \varphi_*\mathcal{G}^*$ după cum urmează. Pentru orice mulțime deschisă U în X, $\mathcal{G}^*(U)$ este mulțimea tuturor aplicațiilor $f : U \to \bigcup_{y \in Y} \mathcal{G}_y$ cu proprietatea că, pentru orice punct $a \in U$, există o mulțime deschisă U_a în X, o mulțime deschisă V în Y și o secțiune $t \in \mathcal{G}(V)$ astfel încît $a \in U_a \subset U$, $\varphi(a) \in V$ și $f(x) = \rho_{\varphi(x)}^V(t)$ cînd $x \in U_a \cap \varphi^{-1}(V)$. Aplicațiile de restricție $\rho_{U'}^U$ se definesc în mod evident. În fine, dacă V este o mulțime deschisă în Y, $\alpha_V : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}^*(\varphi^{-1}(V))$ este aplicația care asociază oricărei secțiuni $t \in \mathcal{G}(V)$ funcția $f : \varphi^{-1}(V) \to \bigcup_{y \in Y} \mathcal{G}_y$ definită prin $f(x) := \rho_{\varphi(x)}^U(t)$. Familia $\mathcal{G}^* := \{\mathcal{G}^*(U), \rho_{U'}^U\}_{U' \subset U \in D(X)}$ este un **f.** de mulțimi pe X iar familia $\alpha := \{\alpha_U\}_{U \in D(X)}$ un morfism de **f.** de la $\mathcal{G}$ în imaginea directă $\varphi_*\mathcal{G}^*$; **f.** $\mathcal{G}^*$ astfel definit se numește *imaginea inversă* a **f.** $\mathcal{G}$ prin aplicația continuă φ și se notează $\varphi^*\mathcal{G}$; morfismul $\alpha : \mathcal{G} \to \varphi_*\varphi^*\mathcal{G}$ se numește *morfismul canonic* (al imaginii inverse). Dacă X este un subspațiu topologic al lui Y și φ aplicația de incluziune, imaginea inversă a lui $\mathcal{G}$ prin φ se numește *restricția* lui $\mathcal{G}$ la X și se notează prin $\mathcal{G} \mid X$. Imaginea inversă are următoarea proprietate universală: pentru orice **f.** de mulțimi $\mathcal{F}$ pe X și orice morfism $\theta : \mathcal{G} \to \varphi_*\mathcal{F}$ există un unic morfism $\theta' : \varphi^*\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ astfel încît $\theta = \varphi_*(\theta') \circ \alpha$. Imaginea inversă poate fi definită și pentru morfisme. Anume, dacă $\theta : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ este un morfism de **f.** de mulțimi pe Y, proprietatea universală a imaginii inverse furnizează un unic morfism $\theta^* : \varphi^*\mathcal{G}_1 \to \varphi^*\mathcal{G}_2$ care face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\theta"'] & \varphi_*\varphi^*\mathcal{G}_1 \arrow[d, "\varphi_*(\theta^*)"] \\
\mathcal{G}_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & \varphi_*\varphi^*\mathcal{G}_2
\end{tikzcd}$$

și se pune $\varphi^*(\theta) := \theta^*$. Cu aceste definiții, se vede că imaginea inversă este un functor $\varphi^* : \mathbf{Ens}(Y) \to \mathbf{Ens}(X)$. Proprietatea universală a imaginii inverse poate fi interpretată în sensul că functorul φ^* este un adjunct la stînga al functorului φ_*, sau că functorul φ_* este un adjunct la dreapta al functorului φ^*. Fie $\varphi : X \to Y$ o aplicație continuă de spații topologice, $\mathcal{F}$ un **f.** de mulțimi pe X, $\mathcal{G}$ un **f.** de mulțimi pe Y și $\theta : \mathcal{G} \to \varphi_*\mathcal{F}$ un morfism de **f.** Din definiția fibrelor unui **f.** și proprietatea universală a limitei inductive rezultă că, pentru orice punct $x \in X$, există o unică aplicație $\theta_{\varphi, x} : \mathcal{G}_{\varphi(x)} \to \mathcal{F}_x$ care face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{(V)} \arrow[r, "\theta_V"] \arrow[d, "\rho_{\varphi(x)}^V"'] & \mathcal{F}(\varphi^{-1}(V)) \arrow[d, "\rho_x^{\varphi^{-1}(V)}"] \\
\mathcal{G}_{\varphi(x)} \arrow[r, "\theta_{\varphi,x}"] & \mathcal{F}_x
\end{tikzcd}$$

cînd $\varphi(x) \in V \in D(Y)$. Aplicația $\theta_{\varphi, x}$ se numește *fibra relativă* în punctul x a morfismului θ. Ea nu trebuie confundată cu fibra uzuală $\theta_y : \mathcal{G}_y \to (\varphi_*\mathcal{F})_y$, definită pentru orice $y \in Y$ și cu valori în mulțimea $(\varphi_*\mathcal{F})_y$. O proprietate importantă a imaginii inverse este că fibra relativă $\alpha_{\varphi, x}$ a morfismului structural $\alpha : \mathcal{G} \to \varphi_*\varphi^*\mathcal{G}$ este bijectivă pentru toate punctele $x \in X$. Se poate defini o noțiune de **f.** pe X cu valori într-o categorie $\mathcal{C}$ oarecare. Cazurile cele mai interesante sînt acelea în care $\mathcal{C}$ este o categorie esențială algebrică: mulțimi, grupuri (abeliene), inele, spații vectoriale, algebre etc. În aceste cazuri definiția este simplă. De pildă, un **f.** *de grupuri* pe X este un prefascicol de grupuri pe X care satisface condițiile 1) și 2), *i.e.* $\mathcal{F}$ este **f.** dacă este considerat ca prefascicol de mulțimi. O definiție analoagă funcționează pentru orice categorie algebrică; construcțiile indicate mai sus pentru **f.** de mulțimi se extind în mod natural la aceste cazuri. (*M.J.*)

fascicol analitic coerent v. **fascicol coerent**

fascicol coerent Fie $(X, \mathcal{O}_X)$ un spațiu inelat și $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modul. Dacă $s_1, \ldots, s_p$ sînt secțiuni globale în $\mathcal{F}$, există un unic morfism de $\mathcal{O}_X$-module $\varepsilon : \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{F}$ astfel încît $\varepsilon_X(1, 0, \ldots, 0) = s_1, \ldots, \varepsilon_X(0, \ldots, 0, 1) = s_p$. Fibrele acestui morfism ε sînt date de formulele

$$\varepsilon_x(c_1, \ldots, c_p) = \sum_{i=1}^{p} c_i s_{i,x}, \quad x \in X,$$

unde $c_1, \ldots, c_p \in \mathcal{O}_{X,x}$ iar $s_{i,x} = \rho_x^X(s_i)$ este germenul definit de secțiunea s_i în punctul x. Nucleul morfismului ε este un submodul al lui $\mathcal{O}_X^p$, numit *fascicolul de relații* între secțiunile $s_1, \ldots, s_p$ și notat $\mathcal{R}(s_1, \ldots, s_p)$. Un $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$ se numește *liber* (de rang finit) dacă există un întreg $p \geqslant 0$ și un izomorfism de $\mathcal{O}_X$-module $\varepsilon : \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{F}$; numărul întreg p este atunci unic determinat și se numește *rangul* lui $\mathcal{F}$. Fascicolul $\mathcal{F}$ se numește *local liber* dacă, pentru orice punct $a \in X$, există o mulțime deschisă $U \ni a$ în X astfel încît fascicolul $\mathcal{F} \mid U$ să fie liber. Un $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$ se numește *de tip finit* sau *(local) finit generat* dacă, pentru orice punct $a \in X$, există o mulțime deschisă $U \ni a$ în X și un epimorfism $\varepsilon : \mathcal{O}_U^p \to \mathcal{F} \mid U$ unde $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X \mid U$. Aceasta înseamnă că există un număr finit de secțiuni $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{F}(U)$, astfel încît, pentru orice punct $x \in X$, germenii $s_{1,x}, \ldots, s_{p,x}$ să genereze $\mathcal{F}_x$ ca $\mathcal{O}_{X,x}$-modul. Mai general, fiind dat un întreg $r \geqslant 0$, un $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$ se numește *r-coerent* dacă, pentru orice punct $a \in X$, există o mulțime deschisă $U \ni a$ în X și un șir exact de $\mathcal{O}_U$-module

$$\mathcal{L}_r \xrightarrow{d_r} \ldots \xrightarrow{d_1} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F} \mid U \longrightarrow 0,$$

unde $\mathcal{L}_i$ sînt $\mathcal{O}_U$-module libere de rang finit, *i.e.* $\mathcal{L}_i \simeq \mathcal{O}_U^{p_i}$ pentru un întreg $p_i \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, r$. În particular, $\mathcal{F}$ este 0-coerent dacă și numai dacă $\mathcal{F}$ este de tip finit; se spune de obicei *fascicol de prezentare finită* în loc de fascicol 1-coerent. Orice $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$ se consideră (-1)-coerent. Un $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$ se numește *coerent* dacă este r-coerent pentru orice $r \geqslant 0$.

Teorema șirului exact. Fie $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ un șir exact de $\mathcal{O}_X$-module și r un întreg $\geqslant -1$. a) Dacă $\mathcal{F}'$ și $\mathcal{F}''$ sînt r-coerente, atunci $\mathcal{F}$ este r-coerent. b) Dacă $\mathcal{F}$ este r-coerent și dacă $\mathcal{F}''$ este $(r+1)$-coerent, atunci $\mathcal{F}'$ este r-coerent. c) Dacă $\mathcal{F}'$ este r-coerent și dacă $\mathcal{F}$ este $(r+1)$-coerent, atunci $\mathcal{F}''$ este $(r+1)$-coerent. În particular, dacă două din fascicolele $\mathcal{F}', \mathcal{F}, \mathcal{F}''$ sînt coerente, cel de-al treilea este de asemenea coerent.

Lemă. Condițiile următoare sînt echivalente: i) Pentru orice mulțime deschisă U în X, orice ideal de tip finit $\mathcal{J}$ în $\mathcal{O}_U$ este de prezentare finită; ii) Pentru orice mulțime deschisă U în X, orice întreg $p \geqslant 0$ și orice morfism de $\mathcal{O}_U$-module $\theta : \mathcal{O}_U^p \to \mathcal{O}_U$, nucleul lui θ este un $\mathcal{O}_U$-modul de tip finit; iii) Pentru orice mulțime deschisă U în X, orice pereche de numere întregi $p, q \geqslant 0$ și orice morfism $\theta : \mathcal{O}_U^p \to \mathcal{O}_U^q$, nucleul lui θ este un $\mathcal{O}_U$-modul de tip finit; iv) Pentru orice mulțime deschisă U în X, orice $\mathcal{O}_U$-modul de prezentare finită este coerent; v) Pentru orice mulțime deschisă U în X, orice submodul de tip finit al unui $\mathcal{O}_U$-modul coerent este coerent.

Un spațiu inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ se numește *spațiu Oka* dacă satisface condițiile echivalente ale lemei precedente. Teorema următoare este una din teoremele fundamentale în teoria **f.c.** pe spații analitice (de dimensiune finită!).

Teorema de coerență a lui Oka. Orice spațiu analitic complex este un spațiu Oka. (În particular teorema are loc pentru varietăți complexe.) Pe spații Oka, **f.c.** au bune proprietăți de stabilitate. Exemple de astfel de proprietăți sînt date în următoarea

Teoremă. Fie $(X, \mathcal{O}_X)$ un spațiu Oka, iar $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ două $\mathcal{O}_X$-module coerente: a) Pentru orice morfism de $\mathcal{O}_X$-module $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, fascicolele Ker θ, Im θ, Coker θ și Coim θ sînt coerente; b) Produsul tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ este un **f.c.**; c) Fascicolul $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ este coerent.

Obs. Noțiunea de coerență prezentată aici aparține în esență lui A. Grothendieck. Există o noțiune alternativă de coerență datorată lui J. P. Serre. Un $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$ se numește *coerent în sensul lui Serre* dacă satisface condițiile următoare: 1) $\mathcal{F}$ este de tip finit; 2) Pentru orice mulțime deschisă U în X și orice morfism de $\mathcal{O}_U$-module $\varepsilon : \mathcal{O}_U^p \to \mathcal{F} \mid U$, nucleul Ker ε este un $\mathcal{O}_U$-modul de tip finit. În particular, se vede că spațiul inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ este un spațiu Oka dacă și numai dacă fascicolul său structural $\mathcal{O}_X$ este coerent în sensul lui Serre. **F.c.** au numeroase aplicații în analiza complexă atît în teoria locală cît și în cea globală (v. **spațiu $\mathbb{C}$-analitic, varietate Stein**). Notăm că, dacă $(X, \mathcal{O}_X)$ este un spațiu $\mathbb{C}$-analitic, se folosește termenul de *fascicol analitic* pe X pentru orice $\mathcal{O}_X$-modul și cel de *fascicol analitic coerent* pentru orice $\mathcal{O}_X$-modul coerent. Notăm, de asemenea, că pentru **f.c.** (în sensul lui Grothendieck) se mai folosește denumirea de *fascicol pseudocoerent*. (*M.J.*)

fascicol de ideale v. **spațiu inelat**

fascicol de mulțimi v. **fascicol**

fascicol de prezentare finită v. **fascicol coerent**

fascicol de relații v. **fascicol coerent**

fascicol de tip finit v. **fascicol coerent**

fascicol flasc v. **coomologia fascicolelor**

fascicol local liber v. **fascicol coerent**

fascicol moale v. **coomologia fascicolelor**

fascicol structural v. **spațiu inelat**

fibrat vectorial Fie M o varietate diferențiabilă de clasă C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, p un număr natural și k un număr întreg cuprins între 0 și r. Un **f.v.** *de rang p* și *clasă C^k* peste M este o varietate diferențiabilă E de clasă C^k, înzestrată cu o aplicație $\pi_E \in C^k(E, M)$ și cu cîte o structură de spațiu vectorial real pe fiecare din mulțimile $E_x := \pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$, satisfăcînd condiția următoare: pentru orice punct $a \in M$, există o vecinătate deschisă U a lui a în M și un C^k-difeomorfism $h : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^p$ astfel încît, pentru orice $x \in U$, $h(E_x) \subset \{x\} \times \mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^p$ iar aplicația $h_x : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^p$ indusă de h să fie liniară. În această situație, se spune că M este *baza*, E *spațiul total*, π_E *proiecția* și E_x *fibra* în punctul x, ale fibratului considerat. Ex.: 1° $E : M \times \mathbb{R}^p$ este un **f.v.** de clasă C^r peste M cu proiecția $\pi_E = \mathrm{pr}_1$ și fibre $E_x = \{x\} \times \mathbb{R}^p$, $x \in M$, numit *fibratul trivial* de rang p peste M. 2° Dacă E este un **f.v.** de clasă C^k și rang p peste M și U o submulțime deschisă a lui E, atunci $\pi_E^{-1}(U)$ este un **f.v.** de clasă C^k și rang p peste U avînd ca proiecție restricția la $\pi^{-1}(U)$ a lui π_E și ca fibre spațiile vectoriale E_x, $x \in U$. Dacă E și F sînt **f.v.** de clasă C^k peste M, un *morfism* de la E la F este o aplicație $f \in C^k(E, F)$ astfel încît, pentru orice punct $x \in E$, $f(E_x) \subset F_x$, iar aplicația $f_x : E_x \to F_x$, indusă de f, să fie liniară. **F.v.** și morfismele lor formează o categorie; izomorfismele acestei categorii se numesc *izomorfisme* de **f.v.** de clasă C^k peste M. Pentru ca un morfism f de la E în F să fie un izomorfism este necesar și suficient ca aplicația f să fie bijectivă. Fie E un **f.v.** de rang p și de clasă C^k peste M. Dacă A este o submulțime a lui E, prin *secțiune* a lui E peste A se înțelege o aplicație $s : A \to E$ astfel încît $\pi_E \circ s = \mathrm{id}$, *i.e.* astfel încît $s(x) \in E_x$ pentru orice $x \in A$; în cazul A o mulțime deschisă a lui M, secțiunea s se numește de clasă C^k dacă $s \in C^k(U, E)$. Dacă U este o submulțime deschisă a lui M, un p-uplu $e = (e_1, ..., e_p)$ de secțiuni de clasă C^k ale lui E peste U se numește *reper* al lui E peste U (sau, simplu, *reper local* al lui E) dacă $e(x) = (e_1(x), ..., e_p(x))$ este un reper al spațiului vectorial E_x oricare ar fi $x \in U$. Pentru orice m-uplu $e = (e_1, ..., e_m)$ de secțiuni de clasă C^k ale lui E peste U, aplicația

$$U \times \mathbb{R}^m \ni (x, v) \mapsto \sum_{i=1}^{m} v_i e_i(x) \in \pi_E^{-1}(U),$$

$x \in U$, $v = (v_1, ..., v_m) \in \mathbb{R}^m$, este un morfism de f.v. de clasă C^k peste U; e este un reper dacă și numai dacă această aplicație este bijectivă, ceea ce implică $m = p$. Se numește *trivializare* a lui E peste U (sau, simplu, *trivializare locală* a lui E) un izomorfism de **f.v.** de clasă C^k peste U de la $\pi_E^{-1}(U)$ la $U \times \mathbb{R}^p$. Rezultă că noțiunile de reper local și de trivializare locală sînt echivalente. Din definiția **f.v.** se vede că pentru orice punct $a \in M$, există o trivializare a lui M peste o vecinătate deschisă, convenabilă, a lui a, deci un reper al lui E peste această mulțime deschisă. Dacă s și t sînt secțiuni ale lui E peste o submulțime A a lui M, *suma* $s + t$ este secțiunea lui E peste A definită prin $(s + t)(x) := s(x) + t(x)$, $x \in A$. Similar, dacă s este o secțiune a lui E peste A și Φ o funcție reală definită pe A, *produsul* Φs este secțiunea lui E peste A definită prin $(\Phi s)(x) := \Phi(x) s(x)$. Dacă $e = (e_1, ..., e_p)$ este un reper în E peste U, orice secțiune s a lui E peste U admite scrierea unică $s = \sum_{i=1}^{p} \xi_i e_1$, unde $\xi_1, ..., \xi_p$ sînt funcții reale definite pe U, numite *componentele* lui s în reperul e; s este de clasă C^k dacă și numai dacă funcțiile ξ_i sînt de clasă C^k. Dacă e și e' sînt repere ale lui E peste U și U' respectiv, există o unică aplicație

$$g = (g_{ij}) \in C^k(U \cap U', \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}))$$

astfel încît $e' = eg$ cu înmulțire în sens de matrici, *i.e.* $e'_j(x) = \sum_{i=1}^{p} g_{ij}(x) e_i(x)$ pentru orice $x \in U \cap U'$ și $j = 1, ..., p$. Se spune că g este *matricea de tranziție* de la e la e'. Pentru construcția unui **f.v.** E pe varietatea diferențiabilă M este suficient să cunoaștem fibrele ca spații vectoriale și suficiente repere locale ale lui E, în sensul că domeniile lor să acopere pe M; se presupune, de asemenea, că matricele de tranziție dintre aceste repere sînt de clasă C^k (v. **fibratul tangent, fibratul dual, fibratul cotangent, produsul tensorial, puterea exterioară** (a unui fibrat vectorial), **imaginea inversă** (a unui fibrat vectorial)). Notăm că orice **f.v.** poate fi reconstituit din matricile de tranziție între reperele sale locale. Dacă în definițiile precedente se înlocuiește $\mathbb{R}$ prin $\mathbb{C}$ se obține noțiunea de **f.v.** complex de clasă C^k peste M, precum și noțiunile derivate corespunzătoare. (*M.J.*)

fibratul cotangent *v.* **dualul unui fibrat vectorial**

fibratul tangent Fie M o varietate diferențiabilă de clasă C^r cu $r \leq 1$. **F.t.** al lui M este fibratul vectorial real $T(M)$ de clasă C^{r-1} peste M cu proprietățile următoare: 1) Pentru orice punct $x \in M$, fibra lui $T(M)$ în punctul x

coincide ca spațiu vectorial cu spațiul tangent la M în punctul x; 2) Pentru orice hartă locală $\alpha = (x_1, ..., x_n)$ a lui M, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ este un reper al lui $T(M)$ peste domeniul lui α. (În particular, $T(M)$ este de rang n, unde n este dimensiunea varietății M.) Dacă N este o altă varietate diferențiabilă de clasă C^r și $\varphi \in C^r(M, N)$, atunci aplicația $\varphi_* : T(M) \to T(N)$ care se reduce la aplicația liniară tangentă $\varphi_{*,x}: T(M)_x \to T(N)_{\varphi(x)}$ pentru orice punct $x \in M$ este de clasă C^{r-1}. În fapt, asocierile $M \mapsto T(M)$ și $\varphi \mapsto \varphi_*$ definesc un functor de la varietăți diferențiabile de clasă C^r la varietăți diferențiabile de clasă C^{r-1}. Secțiunile în **f.t.** $T(M)$ se numesc *cîmpuri vectoriale* (uneori *cîmpuri vectoriale reale*). Dacă X este un cîmp vectorial pe M și $\alpha = (x_1, ..., x_n)$ o hartă locală a lui M, rezultă că $X \mid U_\alpha = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, unde $X_i = X_i(\alpha)$ sînt funcții reale definite pe U_α și numite *componentele* lui X în harta locală α. Dacă X este de clasă C^k, unde $0 \leq k \leq r - 1$, componentele sale $X_i(\alpha)$ sînt de clasă C^k pentru orice hartă locală α a lui X. Invers, dacă această ultimă condiție este îndeplinită de toate hărțile locale aparținînd unui atlas structural al lui M, atunci cîmpul X este de clasă C^k. Fie X un cîmp de clasă C^{r-1} pe M, unde r se presupune acum ≥ 2. Se numește *curbă integrală* a lui X orice aplicație $\gamma \in C^1(I, M)$, cu I interval deschis al dreptei reale, astfel încît $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, $t \in I$, unde $\gamma'(t)$ este vectorul tangent la γ în punctul $\gamma(t)$, *i.e.* $\gamma'(t) = \gamma_{*,t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(t)\right)$; rezultă $\gamma \in C^r(I, M)$. Se spune despre o curbă integrală γ că are drept *condiție inițială* (sau *start*) punctul x dacă $0 \in I$ și $\gamma(0) = x$. Pentru orice punct $x \in M$, există o unică curbă integrală $f_x \in C^r(J(x), M)$ a lui X cu startul în punctul x și cu proprietatea că, pentru orice curbă integrală $\gamma \in C^r(I, M)$ cu startul în punctul x, $I \subset J(x)$ și $\gamma = f_x \mid I$; f_x se numește *curba integrală maximală* cu startul în punctul x a lui X. Fie $D(X) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in J(x)\}$ și $f: D(X) \to M$ aplicația definită prin $f(t, x) := f_x(t)$, $(t, x) \in D(X)$; f se numește *fluxul integral* sau curentul cîmpului X.

Teoremă. Fluxul integral f al cîmpului X are proprietățile următoare: 1) $\{0\} \times M \subset D(X)$; 2) $D(X)$ este o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R} \times M$; 3) $f \in C^{r-1}(D(X), M)$; 4) Dacă $x \in M$, $s \in J(x)$ și $t \in J(f(s, x))$, atunci $s + t \in J(x)$ și $f(t, f(s, x)) = f(s + t, x)$; 5) Dacă $a \in M$, $t_\nu \in J(a)$ cu $\nu \in \mathbb{N}$, $\lim t_\nu = t_0 \in \mathbb{R}$ și $\lim f(t_\nu, a) = b \in M$, atunci $(t_0, b) \in D(X)$ și $f(t_0, a) = b$. Din 5) se deduce că dacă X este cu suport compact, atunci $D(X) = \mathbb{R} \times M$. Presupunem acum că M este de clasă C^∞. Se numește *grup cu un parametru de difeomorfisme* ale lui M orice aplicație $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ cu proprietățile următoare: 1) $f(0, x) = x$ pentru orice $x \in M$; 2) $f(t, f(s, x)) = f(s + t, x)$ pentru orice $s, t \in \mathbb{R}$ și $x \in M$. Dacă f este un grup cu un parametru de difeomorfisme ale lui M și $t \in \mathbb{R}$ atunci aplicația $f_t : M \to M$ definită prin $f_t(x) := f(t, x)$, $x \in M$, este un C^∞-difeomorfism și $f_t^{-1} = f_{-t}$. Dacă X este un cîmp vectorial de clasă C^∞ pe M și dacă $D(X) = \mathbb{R} \times M$, atunci fluxul integral f al lui X este un grup cu un parametru de difeomorfisme ale lui M. Invers, dacă f este un grup cu un parametru de difeomorfisme ale lui M, atunci există un unic cîmp vectorial X pe M astfel încît f să fie fluxul integral al lui X și avem $X(x) = f'_x(0)$ pentru orice punct $x \in M$. (*M.J.*)

fibratul tangent complex Dacă M este o varietate diferențiabilă de clasă C^r cu $r \geq 1$, **f.t.c.** al lui M este fibratul vectorial complex $T_{\mathbb{C}}(M)$, de clasă C^{r-1}, cu proprietățile următoare: 1) Pentru orice punct $x \in M$, fibra lui $T_{\mathbb{C}}(M)$ în punctul x coincide ca spațiu vectorial complex cu spațiul tangent complex al lui M în punctul x; 2) Pentru orice hartă locală $\alpha = (x_1, ..., x_n)$ a lui M, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ este un reper al lui $T_{\mathbb{C}}(M)$ peste domeniul lui α. Secţiunile în **f.t.c.** se numesc *cîmpuri vectoriale complexe*. Orice cîmp vectorial real poate fi interpretat de asemenea ca secţiune în **f.t.c.** şi anume o secţiune X în $T_{\mathbb{C}}(M)$ este un cîmp vectorial real dacă şi numai dacă $X(x) \in T(M)_x$ pentru orice punct x în domeniul lui X. Orice cîmp vectorial complex X se descompune în mod unic în $X = X_1 + iX_2$ cu X_1 şi X_2 cîmpuri vectoriale reale. Pentru o definiţie alternativă a **f.t.c.** se poate utiliza noţiunea de complexificat al unui fibrat vectorial real. Dacă E este un fibrat vectorial real de clasă C^r peste M, *complexificatul* lui E este fibratul vectorial complex $E \otimes \mathbb{C}$ de clasă C^r peste M cu proprietăţile următoare: 1) Pentru orice punct $x \in M$, $(E \otimes \mathbb{C})_x = E_x \otimes \mathbb{C}$ ca spaţii vectoriale complexe, structura de spaţiu vectorial complex pe $E_x \otimes \mathbb{C}$ fiind furnizată de al doilea factor; 2) Dacă $(e_1, ..., e_p)$ este un reper local al lui E, atunci $(e_1 \otimes 1, ..., e_p \otimes 1)$ este un reper local al lui $E \otimes \mathbb{C}$, unde $(e_i \otimes 1)(x) := e_i(x) \otimes 1$ pentru orice punct x în domeniul reperului $(e_1, ..., e_p)$, $i = 1, ..., p$. Există un izomorfism canonic de fibraţi vectoriali complecşi de clasă C^{r-1} peste M între $T_{\mathbb{C}}(M)$ şi complexificatul $T(M) \otimes \mathbb{C}$ al fibratului tangent real $T(M)$. (*M.J.*)

fibră v. **prefascicol, fascicol, fibrat vectorial**

fibră relativă v. **fascicol**

filtru (pe mulţimea $\mathcal{X}$), familie $\mathcal{F}$ de părţi ale lui $\mathcal{X}$, avînd proprietăţile: i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$; ii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$; iii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$; iv) $A \in \mathcal{F}$ şi $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$. O familie $\mathcal{B}$ de părţi ale lui $\mathcal{X}$ avînd proprietăţile i), ii) şi (*): Pentru orice $A, B \in \mathcal{B}$, există $C \in \mathcal{B}$ astfel încît $C \subset A \cap B$, se numeşte *bază de* **f.** în $\mathcal{X}$. Dacă $\mathcal{B}$ este o bază de **f.**, atunci familia $\mathcal{F} = \{F \mid$ există $B \in \mathcal{B}$ astfel ca $B \subset F\}$ este un **f.** în $\mathcal{X}$, numit **f.** *generat de* $\mathcal{B}$. Mulţimea tuturor **f.** pe $\mathcal{X}$, organizată ca mulţime ordonată cu relaţia de incluziune, este o mulţime inductiv ordonată. Elementele maximale ale acestei mulţimi se numesc *ultrafiltre* (v. şi **ultrafiltru**). Familia vecinătăţilor unui punct într-un spaţiu topologic este un **f.** Fie $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ un şir generalizat. Familia $\{A_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, unde $A_\delta = \{x_{\delta'} \mid \delta' \geqslant \delta\}$ este o bază de **f.** iar **f.** generat se numeşte **f.** *secţiunilor şirului* $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$. **F.** generat în $\mathbb{N}$ de baza $\{(n, n+1, ...) \mid n \in \mathbb{N}\}$ se numeşte **f.** *lui Cauchy*. (*Gh.Gr.*)

filtru Cauchy Fie $(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ un spaţiu uniform şi $\mathcal{F}$ un filtru în $\mathcal{X}$. Se spune că $\mathcal{F}$ este un **f.C.** dacă pentru orice împrejurime $V \in \mathcal{U}$ există $F \in \mathcal{F}$ astfel ca $F \times F \subset V$. Într-un spaţiu uniform orice filtru convergent este **f.C.** Un **f.C.** care are un punct aderent converge către acel punct. Un spaţiu uniform $\mathcal{X}$ este complet dacă şi numai dacă orice **f.C.** în $\mathcal{X}$ este convergent. (*Gh.Gr.*)

filtru convergent Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu topologic, $\mathcal{F}$ un filtru în $\mathcal{X}$ şi $x \in \mathcal{X}$. Se spune că filtrul $\mathcal{F}$ *converge* către x dacă $\mathcal{F}$ conţine familia vecinătăţilor lui x. Se spune atunci că x este *limita filtrului* $\mathcal{F}$. Fie $\mathcal{B}$ o bază de filtru în $\mathcal{X}$. Se spune că $\mathcal{B}$ *converge* către x dacă filtrul generat de $\mathcal{B}$ converge către x. Prin definiţie, punctul x este *aderent* lui $\mathcal{B}$ dacă x este aderent fiecărei mulţimi din $\mathcal{B}$. Punctul x este aderent filtrului $\mathcal{F}$ dacă şi numai dacă există un filtru $\mathcal{G}$ convergent către x şi aşa ca $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Ex.: 1° Familia vecinătăţilor unui punct este un **f.c.** către acel punct. 2° Fie în $\mathcal{X}$ şirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent către x. Familia $\{\{x_m \mid m \geqslant n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ este o bază de filtru care converge către x. 3° Familia vecinătăţilor închise ale punctului x este o bază de filtru pentru care x este punct aderent. Spaţiul $\mathcal{X}$ este separat dacă şi numai dacă x este singurul punct aderent al acestei baze pentru orice $x \in X$. (*Gh.Gr.*)

filtrul lui Cauchy v. **filtru**

filtrul secţiunilor v. **filtru**

flux integral v. **fibratul tangent**

fluxul unui cîmp vectorial (printr-o suprafaţă) v. **formula Gauss-Ostrogradski**

fluxul unui vector (printr-o suprafaţă) v. **formula Gauss-Ostrogradski**

focar, punct staţionar x_0 (soluţie constantă, punct de echilibru) al unui sistem dinamic în plan, $x' = f(x)$, $f: G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_0) = 0$, cu proprietatea că valorile proprii ale matricii $(Df)(x_0)$ (cu altă notaţie, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, matricea jacobiană) au părţile reale şi cele imaginare diferite de zero; dacă părţile reale sînt negative, traiectoriile care pleacă dintr-o vecinătate a lui x_0 se prezintă ca spirale care tind către x_0. Exemplul cel mai simplu îl constituie echilibrul stabil al unui pendul cu amortizare slabă. (*A.H.*)

forma volum Dacă M este o varietate riemanniană orientată de dimensiune n, **f.v.** (sau *elementul de volum*) pe M este n-forma diferenţială τ_M, unic determinată prin condiţia ca $\tau_{M,x}(e_1, ..., e_n) = 1$ pentru orice punct $x \in M$ şi orice reper ortonormal pozitiv $(e_1, ..., e_n)$ al spaţiului tangent $T(M)_x$. Dacă $\alpha = (x_1, ..., x_n)$ este o hartă locală pozitivă a lui M, atunci $\tau_M \mid U_\alpha = \sqrt{G}\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, unde G este determinantul matricii $(g_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ formată cu funcţiile reale g_{ij} pe U_α definite prin

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right\rangle_x.$$

Din această formulă se deduce în particular că forma diferenţială τ_M este de clasă C^{r-1} dacă varietatea M este de clasă C^r. (*M.J.*)

formă diferenţială (în $\mathbb{R}^n$) Pe varietatea diferenţiabilă $M = \mathbb{R}^n$ dispunem de un sistem de coordonate globale, şi anume coordonatele carteziene $x_1, ..., x_n$. Cîmpurile vectoriale $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ formează un reper global în fibratul tangent real $T(M)$ şi în fibratul tangent complex $T_{\mathbb{C}}(M)$, iar diferenţialele $dx_1, ..., dx_n$ un reper global în fibratul cotangent real $T(M)^*$ şi în fibratul cotangent complex $T_{\mathbb{C}}(M)^*$. Rezultă că, pentru orice întreg $p \geqslant 0$, produsele exterioare $dx^I := dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$, $I = (i_1, ..., i_p)$, $1 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n$, formează un reper global în fibratul vectorial real $\bigwedge^p T(M)^*$ şi în fibratul vectorial complex $\bigwedge^p T_{\mathbb{C}}(M)^*$. Acest reper global induce un izomorfism de fibraţi vectoriali reali $\bigwedge^p T(M)^* \simeq \mathbb{R}^n \times \bigwedge^p(\mathbb{R}^{n*})$ şi un izomorfism de fibraţi vectoriali complecşi $\bigwedge^p T_{\mathbb{C}}(M)^* \simeq \mathbb{R}^n \times \bigwedge^p(\mathbb{C}^{n*})$, de clasă C^∞, peste $\mathbb{R}^n$ unde $\mathbb{R}^{n*} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ şi $\mathbb{C}^{n*} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Dacă considerăm izomorfismele precedente ca identificări, secţiunile peste o submulţime deschisă U a lui $\mathbb{R}^n$ în $\bigwedge^p T(M)$ (resp. $\bigwedge^p T_{\mathbb{C}}(M)^*$) sînt aplicaţii de forma $U \ni x \mapsto (x, f(x))$, unde f este o aplicaţie de la U la $\bigwedge^p(\mathbb{R}^{n*})$ (resp. $\bigwedge^p(\mathbb{C}^{n*})$). Acest fapt permite să considerăm o **f.d.** reală de grad p pe U ca fiind, prin definiţie, o aplicaţie $f: U \to \bigwedge^p(\mathbb{R}^{n*})$ şi o **f.d.** complexă de grad p pe U ca o aplicaţie $f: U \to \bigwedge^p(\mathbb{C}^{n*})$; se foloseşte de asemenea termenul de p-formă diferenţială în loc de **f.d.** de grad p. **F.d.** reale de grad p pot fi identificate cu **f.d.** complexe de grad p care au proprietatea că $f_a(v_1, ..., v_p) \in \mathbb{R}$ pentru orice $a \in U$ cînd $(v_1, ..., v_p) \in T(M)_a \subset T_{\mathbb{C}}(M)_a$. De aceea în absenţa altei precizări prin **f.d.** se înţelege de obicei o **f.d.** complexă. Dacă f este o p-formă diferenţială pe U şi $x \in U$, se notează de regulă prin f_x, în loc de $f(x)$, valoarea lui f în punctul x.

Dacă f și g sînt p-forme diferențiale pe U și Φ o funcție complexă pe U, suma $f+g$ și produsul Φf sînt p-formele diferențiale definite prin $(f+g)_x = f_x + g_x$ și $(\Phi f)_x = \Phi(x) f_x$ pentru orice $x \in U$. Dacă f este o p-formă diferențială pe U și g o q-formă diferențială pe U, *produsul exterior* $f \wedge g$ este $(p+q)$-formă diferențială pe U definită prin $(f \wedge g)_x = f_x \wedge g_x$, $x \in U$. Produsul exterior este biliniar, asociativ, anticomutativ (v. **algebra Grassmann**). Orice **f.d.** de grad p pe U admite scrierea unică

$$f = \sum_{|I|=p}{}' f_I \,\mathrm{d}x^I,$$

unde f_I sînt funcții complexe pe U iar $\sum'$ înseamnă că sumarea se face numai după multiindici strict crescători de lungime p. **F.d.** f este reală dacă și numai dacă funcțiile f_I sînt toate reale. Pentru k un număr întreg $\geqslant 0$ sau $k = \infty$, o p-formă diferențială f se numește *de clasă* C^k dacă funcțiile f_I care apar în scrierea precedentă sînt toate de clasă C^k. *Derivata exterioară* $\mathrm{d}f$ a unei p-forme diferențiale f de clasă C^1 este $(p+1)$-forma diferențială definită prin formula

$$\mathrm{d}f := \sum_{|I|=p}{}' \mathrm{d}f_I \wedge \mathrm{d}x^I = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x^I = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

unde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ este p-forma diferențială definită prin

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \sum_{|I|=p}{}' \frac{\partial f_I}{\partial x_i} \mathrm{d}x^I.$$

Din definiție rezultă imediat că dacă forma f este de clasă C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, atunci $\mathrm{d}f$ este de clasă C^{k-1}. Operatorul de derivare exterioară d definit mai sus are proprietățile următoare: 1) d este un operator local, *i.e.* dacă U și V sînt mulțimi deschise în $\mathbb{R}^n$ și $V \subset U$, atunci $\mathrm{d}(f \mid V) = (\mathrm{d}f) \mid V$ pentru orice **f.d.** f de clasă C^1 pe U; 2) d este un operator $\mathbb{C}$-liniar; 3) $\mathrm{d}(f \wedge g) = \mathrm{d}f \wedge g + (-1)^p f \wedge \mathrm{d}g$ pentru f și g de clasă C^1, unde p este gradul lui f (*formula lui Leibniz* pentru operatorul d); 4) $\mathrm{d}^2 f = 0$ pentru f de clasă C^2, unde $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d} \circ \mathrm{d}$; 5) Pentru $k \geqslant 1$, dacă mulțimea U este C^{k+1}-difeomorfă cu $\mathbb{R}^n$, atunci, pentru orice $(p+1)$-formă diferențială f de clasă C^k pe U cu proprietatea că $\mathrm{d}f = 0$, există o p-formă diferențială ω de clasă C^k pe U astfel încît $\mathrm{d}\omega = f$ (*lema lui Poincaré*). (*M.J.*)

formă diferențială (pe o varietate complexă) Fie M o varietate complexă. Pentru orice punct $a \in M$ are loc descompunerea directă $T_{\mathbb{C}}(M)_a = T'(M)_a \oplus T''(M)_a$ (v. **spațiul tangent olomorf**). Prin trecere la dualul complex se obține descompunerea directă $T_{\mathbb{C}}(M)_a^* = T'(M)_a^* \oplus T''(M)_a^*$. Rezultă că, pentru orice număr întreg $r \geqslant 0$, există un izomorfism canonic de spații vectoriale complexe

$$\bigwedge^r T_{\mathbb{C}}(M)_a^* \simeq \bigoplus_{p+q=r} \bigwedge^p T'(M)_a^* \otimes \bigwedge^q T''(M)_a^*.$$

Un tensor $f \in \bigwedge^r T_{\mathbb{C}}(M)_a^*$ se numește de *tip* (p, q), unde, p și q sînt numere întregi $\geqslant 0$ și $p+q=r$, dacă imaginea sa prin izomorfismul precedent aparține spațiului vectorial $\bigwedge^p T'(M)_a^* \otimes \bigwedge^q T''(M)_a^*$, ceea ce se întîmplă atunci și numai atunci cînd $f(v_1, \ldots, v_r) = 0$ ori de cîte ori $p+1$ dintre vectorii $v_j \in T_{\mathbb{C}}(M)_a$ sînt olomorfi, sau $q+1$ dintre acești vectori sînt antiolomorfi. Tensorii de tip

(p, q) formează un subspațiu vectorial complex al lui $\bigwedge^r T_{\mathbb{C}}(M)_a^*$, canonic izomorf cu $\bigwedge^p T'(M)_a^* \otimes \bigwedge^q T''(M)_a^*$, notat $\bigwedge^{p,q} T(M)_a^*$. Rezultă că avem o descompunere directă

$$\bigwedge^r T_{\mathbb{C}}(M)_a^* = \bigoplus_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} T(M)_a^*,$$

i.e. orice tensor $f \in \bigwedge^r T_{\mathbb{C}}(M)_a$ se descompune în mod unic în $f = \sum_{p+q=r} f^{p,q}$, cu $f^{p,q} \in \bigwedge^{p,q} T(M)_a^*$; $f^{p,q}$ se numește *componenta de tip* (p, q) a lui f. Dacă $\alpha = (z_1, \ldots, z_n)$ este o hartă locală a lui M și $j \in \{1, \ldots, n\}$, se notează prin $\mathrm{d}z_j$ diferențiala funcției coordonate $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$ și prin $\mathrm{d}\bar{z}_j$ diferențiala funcției conjugate $\bar{z}_j := x_j - \mathrm{i}y_j$. Pentru orice punct $a \in U_\alpha$, $(\mathrm{d}z_{1,a}, \ldots, \mathrm{d}z_{n,a})$ este un reper al spațiului vectorial complex $T'(M)_a^*$ iar $(\mathrm{d}\bar{z}_{1,a}, \ldots, \mathrm{d}\bar{z}_{n,a})$ un reper al lui $T''(M)_a^*$, unde $\mathrm{d}z_{j,a} := (\mathrm{d}z_j)_a$ și $\mathrm{d}\bar{z}_{j,a} := (\mathrm{d}\bar{z}_j)_a$ sînt valorile în punctul a ale diferențialelor $\mathrm{d}z_j$ și $\mathrm{d}\bar{z}_j$ respectiv. Fie U o submulțime deschisă a lui M. O **f.d.** de grad r pe U, *i.e.* o secțiune f peste U în fibratul vectorial complex $\bigwedge^r T_{\mathbb{C}}(M)$, se numește **f.d.** *de tip* (p, q) sau (p, q)-*formă diferențială* dacă, pentru orice punct $a \in U$, tensorul f_a este de tip (p, q), unde f_a este valoarea lui f în punctul a. Dacă $\alpha = (z_1, \ldots, z_n)$ este o hartă locală a lui M, orice **f.d.** f de tip (p, q) definită pe U_α se scrie în mod unic ca

$$f = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}}{}' f_{I,J}\, \mathrm{d}z^I \wedge \mathrm{d}\bar{z}^J,$$

unde $f_{I,J}$ sînt funcții complexe definite pe U_α iar simbolul $\sum'_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}}$ înseamnă sumare după multiindici strict crescători I și J de lungime p și q respectiv. Pentru k fixat, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, (p, q)-forma diferențială f definită pe U_α este de clasă C^k dacă și numai dacă funcțiile $f_{I,J}$ care apar în scrierea precedentă a lui f sînt toate de clasă C^k. Orice **f.d.** de grad r pe U se descompune în mod unic în $f = \sum_{p+q=r} f^{p,q}$, unde $f^{p,q}$ este o **f.d.** de tip (p, q) pe U numită *componenta de tip* (p, q) a lui f; f este de clasă C^k dacă și numai dacă componentele sale sînt toate de clasă C^k. Descompunerea în tipuri a unei **f.d.** pe o varietate complexă M permite o descompunere a operatorului de derivare exterioară d într-o sumă de doi operatori, ∂ și $\bar{\partial}$, notați uneori d′ și d″ respectiv, după cum urmează. Fie f o **f.d.** de grad r și clasă C^1 pe o submulțime deschisă U a lui M. Dacă f este de tip (p, q), $p+q=r$, se pune $\partial f := (\mathrm{d}f)^{p+1,q}$ și $\bar{\partial} f := (\mathrm{d}f)^{p,q+1}$, *i.e.* ∂f este componenta de tip $(p+1, q)$ a lui $\mathrm{d}f$, iar $\bar{\partial} f$ componenta de tip $(p, q+1)$ a lui $\mathrm{d}f$. În cazul general, se pune

$$\partial f := \sum_{p+q=r} \partial(f^{p,q}) \quad \text{și} \quad \bar{\partial} f := \sum_{p+q=r} \bar{\partial}(f^{p,q}).$$

Notăm că **f.d.** ∂f și $\bar{\partial} f$ sînt de clasă C^{k-1} pe U dacă f este de clasă C^k, unde $k \geqslant 1$. Operatorii ∂ și $\bar{\partial}$ au proprietăți similare operatorului d, și anume: 1) ∂ și $\bar{\partial}$ sînt operatori locali, *i.e.* $\partial(f \mid V) = \partial f \mid V$ și similar pentru $\bar{\partial}$, unde V este o submulțime deschisă a lui U; 2) ∂ și $\bar{\partial}$ sînt operatori $\mathbb{C}$-liniari; 3) $\partial(f \wedge g) = \partial f \wedge g + (-1)^r f \wedge \partial g$ pentru f de grad r și o formulă similară pentru $\bar{\partial}$. În plus: 4) $d = \partial + \bar{\partial}$ și, pentru forme de clasă C^2, $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$;

5) Dacă M' este o altă varietate complexă și $\varphi: M' \to M$ o aplicație olomorfă, operatorul φ^* (imaginea inversă) păstrează tipul și comută cu operatorii ∂ și $\bar\partial$. **F.d.** de tip (p, q) și de clasă C^∞ definite pe submulțimile deschise ale lui M formează un fascicol de spații vectoriale complexe, notat $\mathcal{E}^{p,q}$. Deoarece $\bar\partial$ este un operator $\mathbb{C}$-liniar local și $\bar\partial^2 = 0$, șirul

$$0 \to \mathcal{E}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{p,q} \xrightarrow{\bar\partial} \dots$$

este un complex de fascicole de spații vectoriale pe M, numit *complexul Dolbeault* sau *Cauchy-Riemann* al lui M. Nucleul

$$\Omega^{(p)} : = \operatorname{Ker} (\mathcal{E}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{p,1})$$

este un subfascicol de spații vectoriale complexe al lui $\mathcal{E}^{p,0}$; secțiunile lui $\Omega^{(p)}$ se numesc **f.d.** *olomorfe de grad* p sau $(p, 0)$-*forme diferențiale olomorfe*. Dacă $\alpha = (z_1, \dots, z_n)$ este o hartă locală a lui M, o $(p, 0)$-formă diferențială f definită pe U_α este olomorfă dacă și numai dacă funcțiile f_I care apar în scrierea canonică $f = \sum'_{|I|=p} f_I \, dz^I$ sînt toate olomorfe. Notăm că $\mathcal{E}^{0,0} = \mathcal{E}$ este fascicolul germenilor de funcții de clasă C^∞ iar $\Omega^{(0)} = \mathcal{O}_M$, *i.e.* $\Omega^{(0)}$ este fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe M. Complexul Dolbeault considerat mai sus este în fapt o rezoluție a fascicolului $\Omega^{(p)}$. Mai precis, are loc următorul rezultat: *Lema lui Grothendieck*. Fie D un polidisc deschis în $\mathbb{C}^n$ și D' o submulțime deschisă relativ compactă a lui D. Atunci ecuația $\bar\partial u = f$ are o soluție $u \in \mathcal{E}^{p,q}(D')$ pentru orice **f.d.** $f \in \mathcal{E}^{p,q+1}(D)$ astfel încît $\bar\partial f = 0$.
Notăm că în demonstrația acestei leme operatorul integral al lui Pompeiu joacă un rol esențial. Notăm de asemenea că, folosind un procedeu de aproximare de tip Mittag-Leffler, se poate obține în lema lui Grothendieck o soluție $u \in \mathcal{E}^{p,q}(D)$, *i.e.* definită și satisfăcînd ecuația $\bar\partial u = f$ pe D întreg. Spațiile de $\bar\partial$-*coomologie* (sau de *coomologie Dolbeault*) $H^{p,q}(M)$ ale varietății complexe M presupusă aici paracompactă, se definesc prin

$$H^{p,q}(M) : = \{f \in \mathcal{E}^{p,q}(M) \mid \bar\partial f = 0\} / \{\bar\partial u \mid u \in \mathcal{E}^{p,q-1}(M)\},$$

unde, prin convenție, $\mathcal{E}^{p,-1} : = 0$. Ele indică abaterea de la exactitate a complexului de spații vectoriale

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \dots$$

Semnificația acestor spații de coomologie rezultă din teorema următoare (v. **coomologia fascicolelor**).
Teorema lui Dolbeault. Pentru orice varietate complexă paracompactă M, există izomorfisme canonice de spații vectoriale complexe $H^{p,q}(M) \simeq H^q(M, \Omega^{(p)})$. Lema lui Grothendieck afirmă deci în esență că $H^q(M, \Omega^{(p)}) = 0$ pentru $q \geqslant 1$ și $p \geqslant 0$ cînd varietatea complexă M este analitic izomorfă cu un polidisc deschis din $\mathbb{C}^n$. *(M.J.)*

formă diferențială (pe o varietate diferențiabilă) Fie M o varietate diferențiabilă de clasă C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, și U o submulțime deschisă a lui M. Prin **f.d.** pe U se înțelege în general o **f.d.** complexă așa cum apare în definiția următoare: Dacă p este un întreg $\geqslant 0$, o **f.d.** de grad p (sau *p-formă diferențială*) pe U este o secțiune peste U în fibratul vectorial complex $\bigwedge^p T_{\mathbb{C}}(M)^*$, a p-a putere exterioară a fibratului cotangent complex $T_{\mathbb{C}}(M)^*$. În cazul $p = 0$,

$\bigwedge^0 T_{\mathbb{C}}(M)^* = M \times \mathbb{C}$, fibratul trivial complex de rang 1 peste M, deci o **f.d.** de grad 0 pe U este o aplicație $\omega : U \to M \times \mathbb{C}$ astfel încît $\omega(x) = (x, f(x))$ pentru orice $x \in U$, unde f este o funcție complexă pe U; de aceea se convine ca prin 0-formă diferențială pe U să se înțeleagă o funcție complexă f pe U. Notăm că are sens să se vorbească de 0-formă diferențială de clasă C^k pentru orice întreg k astfel încît $0 \leqslant k \leqslant r$. Dacă însă $p \geqslant 1$, $\bigwedge^p T_{\mathbb{C}}(M)^*$ este un fibrat vectorial de clasă C^{r-1}, deci are sens noțiunea de **f.d.** de clasă C^k numai în cazul $0 \leqslant k \leqslant r - 1$. Deoarece $\bigwedge^1 T_{\mathbb{C}}(M)^* = T_{\mathbb{C}}(M)^*$, o 1-formă diferențială pe U este o secțiune în fibratul cotangent complex $T_{\mathbb{C}}(M)^*$; de pildă, pentru orice funcție $f \in C^1(U, \mathbb{C})$, diferențiala df a lui f este o 1-formă diferențială pe U (v. **diferențiala**). Dacă f este o p-formă diferențială pe U cu $p \geqslant 1$, valoarea lui f într-un punct $x \in U$ se notează uneori prin f_x în loc de $f(x)$. Dacă $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ este o hartă locală a lui M, atunci $(dx_1, \dots, dx_n)$ este un reper peste U_α în fibratul cotangent iar produsele exterioare $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant n$, formează pentru orice $p \geqslant 1$ un reper peste U_α în fibratul vectorial $\bigwedge^p T_{\mathbb{C}}(M)^*$ (v. **puterea exterioară** (a unui fibrat vectorial)). Rezultă că, pentru $p \geqslant 1$, orice p-formă diferențială f definită pe U_α admite scrierea unică

$$f = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} f_{i_1 \dots i_p} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

cu $f_{i_1, \dots, i_p}$ funcții complexe definite pe U_α; în notație simbolică formula precedentă se mai scrie

$$f = \sum_{|I|=p}{}' f_I \, dx^I,$$

unde $dx^I : = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ dacă $I = (i_1, \dots, i_p)$ iar $\sum'_{|I|=p}$ desemnează sumare după multiindici strict crescători de lungime p. **F.d.** f este de clasa C^k, unde $0 \leqslant k \leqslant r - 1$, dacă și numai dacă funcțiile f_I care apar în scrierea precedentă sînt toate de clasă C^k. Dintre operațiile cu **f.d.** se disting în special suma, produsul exterior (în particular, produsul uzual dintre o funcție și o **f.d.**), derivata exterioară și imaginea inversă. *Suma* a două p-forme diferențiale este un caz particular de sumă de secțiuni într-un fibrat vectorial. Dacă f și g sînt **f.d.** pe U de grad p și q respectiv, *produsul exterior* $f \wedge g$ este **f.d.** de grad $p + q$ definită prin $(f \wedge g)_x = f_x \wedge g_x$, $x \in U$; produsul exterior este biliniar, asociativ și anticomutativ (v. **algebra Grassmann**). Notăm că produsul exterior definit aici este compatibil cu produsele exterioare care apar în definiția fibratului vectorial $\bigwedge^p T_{\mathbb{C}}(M)^*$. Fie acum f o p-formă diferențială de clasă C^1 pe U. Dacă $p = 0$, f este o funcție complexă de clasă C^1 pe U și definim 1-forma diferențială df ca fiind diferențiala lui f în sens uzual. În cazul $p \geqslant 1$, există o unică $(p + 1)$-formă diferențială df pe U astfel încît, pentru orice hartă locală $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ cu domeniul U_α inclus în U, dacă $f \mid U_\alpha = \sum'_{|I|=p} f_I \, dx^I$, atunci

$$df \mid U_\alpha = \sum_{|I|=p}{}' df_I \wedge dx^I = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx^I = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

unde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : = \sum'_{|I|=p} \dfrac{\partial f_I}{d x_i} dx^I$. (Este suficient de altfel ca această condiție să fie îndeplinită pentru hărțile α aparținînd unui atlas structural dat al lui M.)

F.d. df de grad $p+1$ astfel definită se numeşte *derivata exterioară* a lui f; notăm că dacă f este de clasă C^k pe U, atunci df este de clasă C^{k-1}. Operatorul d de derivare exterioară are proprietăţile următoare: 1) d este un operator local, *i.e.* $d(f \mid V) = (df) \mid V$ pentru orice **f.d.** de clasă C^1 pe U şi orice submulţime deschisă V a lui U; 2) d este un operator $\mathbb{C}$-liniar; 3) $d(f \wedge g) = df \wedge g + (-1)^p f \wedge dg$ pentru f de grad p (*formula lui Leibniz pentru operatorul* d); 4) $d^2 f = 0$ pentru f de clasă C^2, unde $d^2 := d \circ d$; 5) În ipoteza $1 \leqslant k \leqslant r-1$, dacă mulţimea deschisă U este C^{k+1}-difeomorfă cu $\mathbb{R}^n$, atunci, pentru orice $(p+1)$-formă diferenţială f de clasă C^k pe U astfel încît $df = 0$, există o p-formă ω de clasă C^1 pe U astfel încît $d\omega = f$ (*lema lui Poincaré*). O p-formă diferenţială f de clasă C^1 pe U se numeşte *închisă* dacă $df = 0$; o $(p+1)$-formă diferenţială continuă f pe U se numeşte *exactă* dacă există o p-formă diferenţială ω de clasă C^1 pe U astfel încît $d\omega = f$. Notăm că în 4) se afirmă că orice **f.d.** exactă de clasă C^1 este închisă, iar din lema lui Poincaré rezultă că dacă U este C^{k+1}-difeomorfă cu $\mathbb{R}^n$, orice formă închisă de clasă C^k este exactă. Fie acum N o altă varietate diferenţiabilă de clasă C^r, $\varphi \in C^{k+1}(N, M)$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$, şi f o p-formă diferenţială pe U. Dacă $p = 0$, f este o funcţie complexă pe U şi, prin definiţie, *imaginea inversă* a lui f prin φ este funcţia compusă $f \circ \varphi$ definită pe mulţimea deschisă $V := \varphi^{-1}(U)$. În cazul $p \geqslant 1$ *imaginea inversă* a lui f prin φ este p-forma diferenţială g pe V definită prin

$$g_y(v_1, \ldots, v_p) := f_{\varphi(y)}(\varphi_{*,y} v_1, \ldots, \varphi_{*,y} v_p)$$

pentru orice $y \in V$ şi $v_1, \ldots, v_p \in T_{\mathbb{C}}(M)_y$. Pentru a desemna imaginea inversă a **f.d.** f prin aplicaţia diferenţială φ se foloseşte de obicei notaţia $\varphi^*(f)$. Operatorul φ^* astfel definit este $\mathbb{C}$-liniar şi comută cu produsul exterior şi cu derivata exterioară. Dacă $U = U_\alpha$ este domeniul unei hărţi locale $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ a lui M, p-forma diferenţială f pe U admite scrierea canonică $f = \sum'_{|I|=p} f_I \, dx^I$ iar din proprietăţile operatorului φ^* rezultă

$$\varphi^*(f) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n}' f_{i_1 \ldots i_p} \circ \varphi \, d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p},$$

unde $\varphi_i := x_i \circ \varphi = \varphi^*(x_i)$, deci o funcţie de clasă C^r definită pe V; în particular, dacă **f.d.** f este de clasă C^k pe U, atunci imaginea inversă $\varphi^*(f)$ este de clasă C^k pe V. **F.d.** au numeroase aplicaţii, de pildă ele permit calculul unor spaţii de coomologie (v. **coomologia fascicolelor**). Considerăm aici numai cazul unei varietăţi diferenţiabile paracompacte M de clasă C^∞. **F.d.** de grad p şi de clasă C^∞ pe submulţimi deschise ale lui M formează un fascicol de spaţii vectoriale complexe pe M, notat $\mathcal{E}^p$ (şi numit *fascicolul germenilor* de p-forme diferenţiale de clasă C^∞ pe M). Deoarece derivarea exterioară d este un operator $\mathbb{C}$-liniar local şi $d^2 = 0$, şirul

$$0 \to {}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^p \xrightarrow{d} \ldots$$

este un complex de fascicole de spaţii vectoriale, numit *complexul de Rham* al varietăţii M. Spaţiile vectoriale $\mathrm{Rh}^p(M)$, definite prin

$$\mathrm{Rh}^p(M) := \{f \in \mathcal{E}^p(M) \mid df = 0\} / \{d\omega \mid \omega \in \mathcal{E}^{p-1}(M)\}$$

cînd $p \geqslant 1$ şi prin $\mathrm{Rh}^0(M) = \{f \in \mathcal{E}^0(M) \mid df = 0\}$ în cazul $p = 0$, se numesc *spaţiile de coomologie de Rham*, sau *spaţiile de coomologie diferenţială* ale varietăţii M. Importanţa spaţiilor de coomologie de Rham ale unei varietăţi diferenţiabile paracompacte rezultă din teorema următoare (care implică în particular că aceste spaţii de coomologie sînt invarianţi topologici ai varietăţii M).

Teorema lui de Rham. Pentru orice varietate diferenţiabilă paracompactă M de clasă C^∞ şi orice întreg $p \geqslant 0$ există un izomorfism canonic de spaţii vectoriale complexe $\mathrm{Rh}^p(M) \simeq H^p(M; \mathbb{C})$.

O p-formă diferenţială f pe o submulţime deschisă U a unei varietăţi diferenţiabile M de clasă C^r se numeşte *reală* dacă $f_x(v_1, \ldots, v_p)$ este un număr real cînd $v_1, \ldots, v_p \in T(M)_x$ pentru orice $x \in U$. Orice p-formă diferenţială complexă f se descompune în mod unic în $f = f' + if''$ cu f' şi f'' p-forme diferenţiale reale. **F.d.** f este reală dacă şi numai dacă pentru orice hartă locală $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ funcţiile f_I care apar în formula $f \mid U_\alpha = \sum'_{|I|=p} f_I \, dx^I$ sînt toate reale. (De altfel, este suficient ca această condiţie să fie îndeplinită pentru hărţile α aparţinînd unui atlas structural al varietăţii diferenţiabile M.) Notăm că se poate obţine o teorie autonomă a **f.d.** reale după modelul prezentat mai sus în cazul complex, cu deosebirea că se lucrează cu fibratul cotangent real $T(M)^*$ în locul fibratului cotangent complex $T_{\mathbb{C}}(M)^*$. (*M.J.*)

formă diferenţială de tip (p, q) v. **formă diferenţială** (pe o varietate complexă)

formă diferenţială exactă v. **formă diferenţială** (pe o varietate diferenţiabilă)

formă diferenţială închisă v. **formă diferenţială** (pe o varietate diferenţiabilă)

formă diferenţială olomorfă v. **formă diferenţială** (pe o varietate complexă)

formă modulară v. **funcţie modulară**

formula Bochner-Martinelli Dacă ω este forma diferenţială de tip $(n, n-1)$ pe $\mathbb{C}^n$, definită prin

$$\omega(z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{z}_k \, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n,$$

atunci, pentru orice domeniu compact D în $\mathbb{C}^n$, orice funcţie olomorfă f pe o vecinătate a lui D şi orice punct $\zeta \in \mathring{D}$,

$$f(\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(z)\, \omega(z - \zeta)}{|z - \zeta|^{2n}}.$$

Notăm că pentru $n = 1$ **f.B.M.** se reduce la formula clasică a lui Cauchy. (*M.J.*)

formula complementelor a lui Euler v. **funcţia** Γ

formula de cvadratură a lui Gauss, formulă de cvadratură cu n noduri, exactă pentru polinoame de grad cel mult $2n-1$. Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Polinomul

$$p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x-a)^n (x-b)^n\right),$$

numit *polinomul lui Legendre*, are n rădăcini distincte $x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ situate în (a, b). Fie

$$\alpha_i^{(n)} = \int_a^b \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_j^{(n)}} \, \mathrm{d}x.$$

Funcţionala $\sigma_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$, $f \in C[a, b]$, se numeşte **f.c.G.** Formula lui Gauss este exactă pentru polinoame de grad cel mult $2n - 1$ şi este în acest sens unică printre formulele de cvadratură de forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$. Coeficienţii $\alpha_i^{(n)}$ sînt pozitivi. Şirul $\{\sigma_n(f)\}$ converge către $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pentru orice funcţie continuă f. Pentru $n = 1$ se obţine formula trapezului cu tangentă: $\sigma_1(f) = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right)$. Pentru $n = 2$ şi $a = -1$, $b = 1$, se obţine $\sigma_2(f) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Dacă f este de clasă C^{2n} pe $[a, b]$, atunci are loc următoarea formulă de evaluare a erorii:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma_n(f) \right| \leqslant \frac{(n!)^4}{((2n)!)^3} \frac{(b - a)^{2n+1}}{2n + 1} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(2n)}(x)|.$$

În tabelul următor se găsesc nodurile $x_i^{(n)}$ şi coeficienţii $\alpha_i^{(n)}$ ai formulelor lui Gauss pentru $a = -1$, $b = 1$ şi $n \leqslant 5$. (*Gh.Gr.*)

n	$x_i^{(n)}$	$\alpha_i^{(n)}$
1	$x_1 = 0$	$\alpha_1 = 2$
2	$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$
3	$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\alpha_1 = \frac{5}{9}$, $\alpha_2 = \frac{8}{9}$, $\alpha_3 = \frac{5}{9}$
4	$x_1 = -0{,}861136312$ $x_2 = -0{,}339981044$ $x_3 = -x_2$ $x_4 = -x_1$	$\alpha_1 = 0{,}347854845$ $\alpha_2 = 0{,}652145155$ $\alpha_3 = \alpha_2$ $\alpha_4 = \alpha_1$
5	$x_1 = -0{,}906179846$ $x_2 = -0{,}538469931$ $x_3 = 0$ $x_4 = -x_2$ $x_5 = -x_1$	$\alpha_1 = 0{,}236926885$ $\alpha_2 = 0{,}47862867$ $\alpha_3 = 0{,}56888888$ $\alpha_4 = \alpha_2$ $\alpha_5 = \alpha_1$

formula de cvadratură a lui Hermite v. **formula de cvadratură Euler-Maclaurin.**

formula de cvadratură Euler-Maclaurin, formulă de calcul aproximativ al integralelor de forma $\int_a^{a+kh} f(x)\,\mathrm{d}x$, unde $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$, iar f este o funcţie reală de clasă C^{2n} pe $[a, b]$:

$$\int_a^{a+kh} f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{1}{2} f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + (k - 1)h) + \frac{1}{2} f(a + kh)\right) - \\ - \sum_{j=1}^{n-1} h^{2j} B_{2j}\left(f^{(2j-1)}(a + kh) - f^{(2j-1)}(a)\right) + kh^{2n+1} B_{2n} f^{(2n)}(\zeta),$$

unde B_k sînt numerele lui Bernoulli iar ζ există în $[a, b]$ astfel încît egalitatea precedentă să aibă loc. Ceea ce se obţine pentru $n = 2$ se numeşte *formula de cvadratură a lui Hermite.* (*Gh.Gr.*)

formula de cvadratură Gauss-Hermite, formula de cvadratură

$$\sigma_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i^{(n)}),$$

unde $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ iar $\lambda_i^{(n)}$ sînt rădăcinile polinomului Cebîşev de grad n. Formula se foloseşte pentru a aproxima integrale (convergente) de forma $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$. Pentru orice polinom P de grad cel mult $2n - 1$,

$$\sigma^{(n)}(P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Dacă f este de clasă C^{2n}, cu $f^{(2n)}$ mărginită pe $(-1, 1)$, atunci

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x - \sigma^{(n)}(f) \right| \leqslant \frac{1}{(2n)!} \sup_{x \in (-1, 1)} |f^{(2n)}(x)| \int_{-1}^{1} \frac{p_n^2(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

unde $p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, T_n fiind polinomul lui Cebîşev de grad n. (*Gh.Gr.*)

formula de duplicaţie a lui Legendre v. **funcţia Γ**

formula de interpolare a lui Newton, reprezentare a polinomului de interpolare corespunzător unui sistem de noduri simple echidistante,

$$P(f; x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh;\ x_0 + th) = \sum_{i=0}^{n} C_t^i \Delta_h^i f(x_0),$$

unde $C_t^0 = 1$, $C_t^i = \frac{t(t - 1) \ldots (t - i + 1)}{i!}$, $i \geqslant 1$, şi $\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$, $\Delta_h^n = \Delta_h \Delta_h^{n-1}$. Această formă a polinomului de interpolare se numeşte **f.i.N.** *ascendentă*. Dacă f este de clasă C^{n+1} pe $[x_0, x_0 + nh]$, atunci eroarea cu care se aproximează f prin $P(f; x_0, \ldots, x_0 + nh);\ x_0 + th)$ se evaluează prin:

$$|f(x_0 + th) - P(f; x_0, \ldots, x_0 + nh;\ x_0 + th)| \leqslant \\ \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} |t(t - 1) \ldots (t - n)| \sup_{x \in [x_0,\ x_0 + nh]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Formula

$$\Gamma(f;\ x_0, x_0 - h, \ldots, x_0 - nh;\ x_0 + th) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} t(t+1)\ldots(t+i-1)\,\Delta_h^i f(x_0 - ih)$$

se numește **f.i.N.** *descendentă.* (*Gh.Gr.*)

formula de medie pentru integrala Riemann v. **integrabilitate Riemann**

formula dreptunghiurilor, formula de cvadratură

$$\sigma_n(f) = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_n)],$$

unde $x_i = \dfrac{t_i + t_{i+1}}{2}$, $t_i = a + ih$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$.
Dacă f este de clasă C^2 pe $[a, b]$, eroarea este evaluată prin:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma_n(f)\right| \leqslant \frac{[b-a)^3}{24n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|. \quad (Gh.Gr.)$$

formula Gauss-Ostrogradski Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime compactă, măsurabilă Jordan, a cărei frontieră Fr (D) este o suprafață dată parametric sau explicit (v. **integrala de suprafață**). Fie $G \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă și $P, Q, R: G \to \mathbb{R}$ funcții cu derivate parțiale continue. Avem *formula Gauss-Ostrogradski*:

$$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\mathrm{Fr}(D)} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

În această formulă integrala triplă din primul membru este integrală Riemann, iar în membrul al doilea apare o integrală de suprafață de al doilea tip (v. **integrala de suprafață**). Dacă introducem cîmpul vectorial $\vec{F}: G \to \mathbb{R}^3$, dat prin $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$, atunci în membrul întîi al formulei Gauss-Ostrogradski apare *integrala triplă a divergenței lui* $\vec{F}$, iar în membrul al doilea apare *fluxul lui* $\vec{F}$ *prin frontiera lui D*. Pentru o prezentare mai fundamentată (v. și **integrare pe o varietate riemanniană orientată**). (*I.C.*)

formula Green-Riemann Fie $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni și $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ o 1-formă diferențială de clasă C^1 pe o vecinătate a lui K. Prin **f.G.R.** pentru ω pe K se înțelege formula

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

unde ∂K este bordul orientat al lui K. Semnificația termenilor care apar în acest enunț va rezulta din cele ce urmează. Notăm prin I intervalul închis $[0, 1]$ al dreptei reale. O mulțime $C \subset \mathbb{R}^2$ se numește *curbă compactă de clasă* C^1 dacă există un drum $\gamma = (\alpha, \beta) \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ cu proprietățile următoare: 1) Aplicația γ este injectivă pe $[0, 1)$ și pe $(0, 1]$; 2) $\gamma'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$; 3) Dacă $\gamma(0) = \gamma(1)$, atunci $\gamma'(0) = \gamma'(1)$; 4) $C = \gamma(I)$. Aici $\gamma'(t) = (\alpha'(t), \beta'(t))$ este derivata lui γ în punctul t; condiția $\gamma'(t) \neq 0$ este echivalentă cu $(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2 \neq 0$. Fie C o curbă compactă de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$; C se numește *curbă închisă* dacă $\gamma(0) = \gamma(1)$ și *curbă cu bord* (*curbă

bordată) dacă $\gamma(0) \neq \gamma(1)$; în acest ultim caz mulțimea $\partial(C) := \{\gamma(0), \gamma(1)\}$ se numește *bordul* lui C. Un drum $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ cu proprietățile 1)—4) se numește *parametrizare* a lui C; notăm prin $\Gamma(C)$ mulțimea tuturor parametrizărilor lui C. Dacă $\gamma \in \Gamma(C)$, atunci $\gamma^{-1} \in \Gamma(C)$, unde γ^{-1} este *inversul* drumului γ, *i.e.* $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, $t \in I$. Dacă $\gamma, \delta \in \Gamma(C)$ aplicația $f: I \to I$, definită prin $f(t) = \delta^{-1}(\gamma(t))$, $t \in I$, este un C^1-difeomorfism. Drumurile γ și δ se numesc *echivalente* dacă aplicația f este crescătoare. Această relație de echivalență partajează mulțimea $\Gamma(C)$ în exact două clase de echivalență numite *orientări* ale lui C. Prin *curbă compactă orientată de clasă* C^1 în $\mathbb{R}^2$ se înțelege o pereche $(C, \Gamma_0(C))$, unde C este o curbă compactă de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$ și $\Gamma_0(C)$ o orientare a lui C. Fiind dată o asemenea curbă compactă orientată $(C, \Gamma_0(C))$ și o 1-formă diferențială $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ definită și continuă pe C, *integrala* lui ω pe C se definește prin

$$\int_C \omega := \int_0^1 (P(\gamma(t))\,\alpha'(t) + Q(\gamma(t))\,\beta'(t))\,\mathrm{d}t,$$

unde $\gamma \in \Gamma_0(C)$; definiția nu depinde de alegerea lui γ în $\Gamma_0(C)$. Fie K un compact în $\mathbb{R}^2$ astfel încît $K = \overline{\mathring{K}}$ (închiderea interiorului), $\partial K := K \setminus \mathring{K}$, $C \subset \partial K$ o curbă compactă de clasă C^1, $\gamma \in \Gamma(C)$, $t_0 \in \mathring{I}$ și $a := \gamma(t_0)$. Se spune că parametrizarea γ este *pozitivă* (rel. K) dacă există un C^1-difeomorfism h de la un disc deschis U, cu centrul în punctul $(t_0, 0)$ în $\mathbb{R}^2$, pe o vecinătate deschisă V a lui a astfel încît: 1) $h(t, 0) = \gamma(t)$ cînd $(t, 0) \in U$; 2) Perechea $\left(\dfrac{\partial h}{\partial t}(t_0, 0),\ \dfrac{\partial h}{\partial s}(t_0, 0)\right)$ este un reper pozitiv în $\mathbb{R}^2$ (pentru orientarea canonică a lui $\mathbb{R}^2$); 3) $V \cap \partial K = C \cap V$ și $h(U') \subset \mathring{K}$, unde $U' := \{(t, s) \in U \mid s > 0\}$. (Definiția nu depinde de alegerea lui t_0 în I.) În termeni geometric-intuitivi aceasta înseamnă că punctul $\gamma(t)$ lasă mulțimea K „la stînga" atunci cînd parametrul t parcurge pe I în sens crescător. Parametrizările pozitive ale lui C (rel. K) formează o orientare a lui C, numită *orientarea bord* a lui C (rel. K). O mulțime compactă $K \subset \mathbb{R}^2$ se numește *compact cu frontiera de clasă* C^1 *pe porțiuni* dacă:
1) $K = \overline{\mathring{K}}$; 2) Există o familie finită $\{C_j\}_{j\in J}$ de curbe compacte de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$ astfel încît $\partial K = \bigcup_{j\in J} C_j$, $(C_i \setminus \partial C_i) \cap (C_j \setminus \partial C_j) = \varnothing$ cînd $i \neq j$ și, pentru orice $i \in I$ și $x \in \partial C_i$, există un unic $j \in J \setminus \{i\}$ cu proprietatea că $x \in \partial C_j$. În aceste condiții un punct $a \in \partial K$ se numește *punct regulat* al lui ∂K dacă există o familie $\{C_j\}_{j\in J}$ satisfăcînd condiția 2) și un indice $j_0 \in J$ astfel încît $a \in C_{j_0} \setminus \partial C_{j_0}$, și *punct unghiular* în caz contrar. Dacă fiecare curbă C_j se consideră orientată cu orientarea bord (rel. K), ∂K se numește *bordul orientat* al lui K. Notăm că în cazul ∂K fără puncte unghiulare, K este un domeniu compact de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$ (v. **domeniu**). Dacă $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ este o 1-formă diferențială, definită și continuă pe ∂K, integrala lui ω pe bordul orientat ∂K se definește prin $\displaystyle\int_{\partial K} \omega := \sum_{j\in J} \int_{C_j} \omega$, unde $\{C_j\}_{j\in J}$ este o familie cu proprietatea 2); definiția nu depinde de alegerea familiei $\{C_j\}_{j\in J}$.
(Pentru definiția integralei $\displaystyle\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ v. **integrare pe o varietate diferențiabilă orientată**). Obs. 1) **f.G.R.** rămîne valabilă în condiții mai

largi asupra lui ω, anume este suficient ca funcțiile P și Q să fie definite pe o vecinătate a lui K și $\mathbb{R}$-diferențiabile în orice punct din K iar funcția $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ să fie continuă pe K. 2) Toate definițiile de mai sus se extind în mod natural și **f.G.R.** rămîne valabilă cînd planul $\mathbb{R}^2$ se înlocuiește cu o suprafață riemanniană. (*M.J.*)

formula integrală a lui Cauchy pentru polidisc v. **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)

formula Legendre-Gauss v. **funcția** Γ

formula Leibniz-Newton, $u(a) - u(b) = \int_a^b du$, unde $[a, b]$ este un interval închis pe dreapta reală, $u \in C^1([a, b])$ și $du = u'(x)\,dx$ diferențiala funcției u. (*M.J.*)

formula lui Cauchy generalizată v. **formulele Cauchy-Pompeiu**

formula lui Euler v. **funcția exponențială**

formula lui Hadamard v. **serie de puteri**

formula lui Hermite v. **interpolare**

formula lui Leibniz (pentru operatorul d) v. **diferențiala, formă diferențială în** ($\mathbb{R}^n$).

formula lui Markov, formulă de cvadratură de forma $\sum_{j=1}^{n} a_j f(\lambda_j)$ în care parametrii $a_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in [a, b]$, se determină din condițiile: i) $\lambda_1 = a$, $\lambda_n = b$; ii) $\int_a^b P(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} a_j P(\lambda_j)$ pentru orice polinom de grad cel mult $2n - 3$. Pentru $n = 2$ se obține formula trapezului iar pentru $n = 3$ formula lui Simpson. Dacă $a = -1$ și $b = 1$, atunci nodurile $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ sînt rădăcinile polinomului p_{n-2} din șirul de polinoame ortogonale relativ la funcția pondere $\varphi(x) = 1 - x^2$. În raport cu produsul scalar generat de φ, $a_j = \frac{\langle L_j, 1\rangle}{1 - \lambda_j^2}$, unde

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad j \in \{2, \ldots, n-1\}; \quad a_1 = a_n = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Dacă f este de clasă C^{2n-2} pe $[-1, 1]$, atunci

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} a_j f(\lambda_j) \right| \leqslant \frac{n(n-1)^3 2^{2n-1}((n-2)!)^4}{(2n-1)((2n-2)!)^3} \sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(2n-2)}(x)|.$$

Formula este numită uneori *formula Markov-Lobatto*. (*Gh.Gr.*)

formula lui Poisson v. **ecuația căldurii, ecuația undelor**

formula lui Simpson, formulă de calcul aproximativ al integralelor,

$$\sigma(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right),$$

unde $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. **F.S.** se folosește de obicei sub forma sumată:

$$\sigma_n(f) = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{2(n-1)} (f(x_j) + 4f(x_{j+1}) + f(x_{j+2})),$$

unde $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_j = a + jh$, $j \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$. Dacă f este de clasă C^4 pe $[a, b]$ eroarea este evaluată prin

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sigma_n(f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (Gh.Gr.)$$

formula lui Stirling v. **funcția** Γ

formula lui Stokes Se consideră o mulțime compactă $D \subset \mathbb{R}^2$ măsurabilă Jordan, cu interior nevid, a cărei frontieră se poate orienta cu ajutorul unui drum $d: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ care are componentele scalare f și g. O funcție continuă $z: D \to \mathbb{R}$, cu derivate parțiale continue pe interiorul lui D, definește suprafața S dată explicit prin

$$S = \operatorname{Im}(z) = \{(x, y), z(x, y)) \mid (x, y) \in D\},$$

deci $S \subset \mathbb{R}^3$. Fie și $G \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă cu proprietatea că $G \supset S$ și $P, Q, R: G \to \mathbb{R}$ funcții cu derivate parțiale continue. Avem *formula lui Stokes*

$$\oint_{\mathrm{Fr}(S)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

În această formulă, integrala de contur este dată prin

$$\oint_{\mathrm{Fr}(S)} P\,dx + Q\,dx + R\,dz =$$

$$= \int_a^b P(f(t), g(t), z(f(t), g(t)))\,df(t) + \int_a^b Q(f(t), g(t), z(f(t), g(t)))\,dg(t) +$$

$$+ \int_a^b R(f(t), g(t), z(f(t), g(t)))\,du(t),$$

unde $u: [a, b] \to \mathbb{R}$, $u(t) = z(f(t), g(t))$. Cu alte cuvinte, integrala de contur este integrală curbilinie de al doilea tip de-a lungul drumului $\Delta: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ dat prin $\Delta(t) = (f(t), g(t), u(t))$ care „orientează pozitiv frontiera lui S". În membrul al doilea al **f.S.** apare o integrală de suprafață de al doilea tip (v. **integrala de suprafață**). Dacă introducem cîmpul vectorial $\vec{F}: G \to \mathbb{R}^3$, dat prin $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, atunci integrala de contur din **f.S.** se numește *circulația lui* $\vec{F}$ *pe conturul lui* S, iar integrala de suprafață este *fluxul rotorului lui* $\vec{F}$ *prin suprafața* S. Pentru o prezentare mai fundamentată (v. și **integrare pe o varietate riemanniană orientată**). (*I.C.*)

formula lui Taylor (cazul complex) Pentru orice funcție olomorfă f pe o mulțime deschisă Ω în $\mathbb{C}$, orice punct a din Ω și orice întreg $p \geqslant 1$, are loc următoarea **f.T.** de ordin p:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p-1} a_n (z-a)^n + (z-a)^p f_p(z), \quad z \in \Omega,$$

unde $a_0, \ldots, a_{p-1}$ sînt numere complexe și f_p o funcție olomorfă pe Ω. Această reprezentare a lui f este unică și avem

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz,$$

$$f_p(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-a)^n(z-\zeta)} \, dz$$

pentru $\zeta \in \mathring{K}$, formule valabile pentru orice compact K în $\mathbb{C}$, cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni, conținut în Ω și conținînd punctul a, ca punct interior, ∂K fiind bordul orientat al lui K. (*M.J.*)

formula lui Taylor (cazul real), formulă care servește la aproximarea unei funcții date printr-o funcție polinomială.

I. *Cazul funcțiilor de o variabilă.* Considerăm un interval I al dreptei reale, un punct a din I și o funcție $f: I \to \mathbb{R}$ care este de n ori derivabilă în a (unde $n \geq 1$ este un număr natural). *Polinomul Taylor de ordin n* atașat funcției f în punctul a (pe scurt, *polinomul Taylor de ordin n*) este funcția polinomială $T_{a,n}: I \to \mathbb{R}$ definită prin

$$T_{a,n}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Restul **f.T.** *de ordin n* atașat funcției f în punctul a (pe scurt, *restul de ordin n* al **f.T.**) este funcția $R_{a,n}: I \to \mathbb{R}$ definită prin $R_{a,n}(x) = f(x) - T_{a,n}(x)$. Egalitatea $f(x) = T_{a,n}(x) + R_{a,n}(x)$, valabilă pentru orice punct x din I, se numește **f.T.** *de ordin n atașată funcției f în punctul a*. Se demonstrează că $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{R_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0$. Formula este banală pentru $x = a$, deci vom considera că $x \neq a$. Impunînd ipoteze suplimentare se obțin forme mai precise ale restului. Anume, vom presupune mai întîi că f este de $n+1$ ori derivabilă pe întregul interval I. Considerăm un număr natural p, $1 \leq p \leq n+1$. Atunci se arată că pentru orice $x \neq a$ din I există un număr u strict cuprins între x și a astfel încît

$$R_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{n!\,p}(x-a)^p(x-u)^{n+1-p}.$$

$R_{a,n}(x)$ scris în această formă se numește *restul lui Schlömilch-Roche al* **f.T.** În cazul particular cînd $p = n+1$ se obține *restul lui Lagrange* al **f.T.** iar pentru $p = 1$ se obține *restul lui Cauchy* al **f.T.** Dacă f este derivabilă de $n+1$ ori și în plus derivata $f^{(n+1)}: I \to \mathbb{R}$ este funcție integrabilă Riemann, obținem *restul integral al* **f.T.**, anume: pentru orice x din I avem

$$R_{a,n}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt.$$

II. *Cazul funcțiilor de mai multe variabile.* Vom considera o mulțime deschisă $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, un punct $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ din G și o funcție $f: G \to \mathbb{R}$. Presupunem că f este de n ori diferențiabilă în a. Definim pentru orice număr natural k, $1 \leq k \leq n$, polinomul

$$\left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - a_i)\right]^{(k)} f(a),$$

cu ajutorul ridicării la putere k formală. Anume, pentru $k = 1$, avem funcția polinomială

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

Pentru $k = 2$, avem funcția polinomială

$$x \mapsto \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2}(x_i - a_i)^2 + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Pentru $k = 3, 4, \ldots, n$ procedeul este același. Funcția polinomială $T_{a,n}: G \to \mathbb{R}$ dată prin

$$x \mapsto T_{a,n}(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - a_i)\right]^{(k)}(a)$$

se numește *polinomul Taylor de ordin n* atașat funcției f în punctul a (pe scurt, *polinomul Taylor de ordin n*). *Restul* **f.T.** *de ordin n* atașată funcției f în punctul a (pe scurt, *restul de ordin n* al **f.T.**) este funcția $R_{a,n}: G \to \mathbb{R}$ definită prin $R_{a,n}(x) = f(x) - T_{a,n}(x)$. Egalitatea

$$f(x) = T_{a,n}(x) + R_{a,n}(x),$$

valabilă pentru orice punct x din G, se numește **f.T.** *de ordin n* atașată funcției f în punctul a. Vom presupune că mulțimea G este convexă și funcția f este diferențiabilă de $n+1$ ori pe G. În acest caz putem preciza formula restului. Anume, se arată că pentru orice $x \neq a$ din G există un punct u pe segmentul (a, x) astfel încît

$$R_{a,n}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - a_i)\right]^{(n+1)} f(u).$$

Se mai arată că dacă $f: G \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale continue de ordin n pe G, atunci $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{R_{a,n}(x)}{\|x-a\|^n} = 0$, unde $\|x - a\|$ este distanța euclidiană ntre a și x. (*I.C.*)

formula Newton-Côtes, formula de cvadratură

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} f(x_i^{(n)}),$$

unde $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o aplicație continuă,

$$x_i^{(n)} = a + ih, \quad i \in \{0, \ldots, n\}, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

$$\alpha_i^{(n)} = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_j^{(n)}} \, dx.$$

Formula se obține integrînd polinomul de interpolare $F(f;\ x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)};\ x)$. Se folosește și sub forma:

$$I_n(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i^{(n)} f(x_i^{(n)}), \text{ unde}$$

$$H_i^{(n)} = \frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\,\mathrm{d}t.$$

Numerele $H_i^{(n)}$ se numesc *coeficienții Newton-Côtes*. Au loc relațiile:

$$\sum_{i=0}^{n} H_i^{(n)} = 1;\quad H_i^{(n)} = H_{n-i}^{(n)},\quad i\in\{0, \ldots, n\}.$$

Pentru $n = 1$ se obține formula trapezului (cu secantă), iar pentru $n = 2$ formula lui Simpson. Există funcții continue f pentru care șirul $\{I_n(f)\}$ nu converge către $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dacă f este o aplicație de clasă C^{n+1} pe $[a, b]$, are loc următoarea formulă de evaluare a restului:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i^{(n)} f(x_i^{(n)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n |t(t-1)\ldots(t-n)|\,\mathrm{d}t \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.\quad (Gh.Gr.)$$

formula schimbării de variabilă v. **imaginea unei măsuri printr-o aplicație**

formula schimbării de variabilă pentru integrala Lebesgue Fie U, V mulțimi deschise nevide incluse în $\mathbb{R}^n$ și $h\colon U \to V$ o aplicație de clasă C^1 care are componentele scalare $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Vom nota, pentru orice x din U, jacobianul lui h în x prin $J(x)$. Reamintim că avem $J(x) = \det\left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j}\right)$. Să presupunem că $h\colon U \to V$ este un difeomorfism de clasă C^1 (*i.e.* h este bijecție și funcțiile h și h^{-1} sînt de clasă C^1). Se arată că pentru orice mulțime măsurabilă Lebesgue $A \subset U$ astfel încît aderența $\bar{A}$ a lui A este de asemenea inclusă în U avem $h(A)$ măsurabilă Lebesgue. În aceste condiții avem următorul rezultat.

Teoremă (f.s.v.i.L.). Fie $f\colon V \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă în raport cu măsura Lebesgue λ pe V. Atunci $(f\circ h)\,|J|$ este integrabilă în raport cu măsura Lebesgue μ pe U și

$$\int_{h(A)} f(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_A (f\circ h)(x)\,|J(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)$$

pentru orice A măsurabilă Lebesgue cu $\bar{A}\subset U$. *(I.C.)*

formula trapezelor, formula de cvadratură $\sigma(f) = \dfrac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$, unde $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Se folosește de obicei în forma sumată

$$\sigma_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right),$$

unde $x_j = a + jh$, $j\in\{0, \ldots, n\}$, $h = \dfrac{b-a}{n}$. Dacă f este de clasă C^2 pe $[a,b]$ eroarea este dată de

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.\quad (Gh.Gr.)$$

formulele Cauchy-Pompeiu Fie $U\subset\mathbb{C}$ o mulțime deschisă și f o funcție complexă de clasă C^1 pe U. Reamintim că $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$. În cercetările sale asupra derivatei areolare matematicianul român Dimitrie Pompeiu a stabilit formulele următoare: Pentru orice compact $K\subset U$ cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni,

$$\int_{\partial K} f\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\int_K \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\,\mathrm{d}\lambda,\tag{1}$$

unde λ este măsura Lebesgue în $\mathbb{C}$. Pentru orice compact $K\subset U$ cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni și orice punct $\zeta\in\mathring{K}$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial K}(z-\zeta)^{-1}f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_K (z-\zeta)^{-1}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}.\tag{2}$$

Pentru orice punct $z_0\in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z_0) = \lim_{\mathring{K}\ni z_0}\frac{1}{2\mathrm{i}\lambda(K)}\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z,\tag{3}$$

în sensul că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o vecinătate $V\subset U$ a lui z_0 astfel încît $\left|\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z_0) - \dfrac{1}{2\mathrm{i}\lambda(K)}\displaystyle\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$ pentru orice compact $K\subset V$ cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni și cu proprietatea că $z_0\in\mathring{K}$. Formulele (1) și (2) care se demonstrează cu ajutorul formulei Green-Riemann generalizează cunoscutele formule ale lui Cauchy $\left(\text{cazul } f \text{ olomorfă, } i.e.\ \dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}} = 0\right)$ și de aceea ele se numesc **f.C.P.** În special denumirea de *formula Cauchy-Pompeiu* este atribuită formulei (2); unii matematicieni se referă la formula (2) cu numele de *formula lui Cauchy generalizată*. Formula (3) se obține imediat din (1) și furnizează o interpretare geometrică a operatorului $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$. Acest operator a fost introdus de Pompeiu în 1913 sub denumirea de *derivată areolară*, și anume în ipoteza mai generală cînd f este continuă pe U și există limita care apare în formula (3). Notăm că pentru valabilitatea formulelor (1) — (3) este suficient ca funcția f să fie diferențiabilă pe U și derivata $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}$ continuă pe U. *(M.J.)*

formulele lui Green v. **integrală pe o varietate riemanniană orientată**

fracție continuă, o fracție de forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

unde a_i, b_i sînt numere complexe, se numește **f.c.** *finită* și se notează $\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right]$. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\left[a_0, \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right]$, se notează $\left[a_0, \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}, \ldots\right]$ și se numește **f.c.** *infinită* (convergentă). Dacă $b_i = 1$, $\forall i \geqslant 1$, atunci **f.c.** precedente se numesc *normale* și se notează $[a_0, \ldots, a_n]$, respectiv $[a_0, \ldots, a_n, \ldots]$. Pentru **f.c.** infinită $\left[a_0, \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}, \ldots\right]$, **f.c.** finită $\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right]$ se numește *redusa de ordin n*. Luînd $P_0 = a_0$, $P_1 = 1$, $Q_0 = 1$, $Q_{-1} = 0$ și definind

$$P_k = a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}$$

$$Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} \qquad (k \geqslant 1),$$ are loc relația

$$\frac{P_k}{Q_k} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_k}{a_k}\right].$$

Orice număr real pozitiv se poate reprezenta în mod unic sub forma unei **f.c.** normale în care $a_i \in \mathbb{N}$. Această reprezentare se face cu o **f.c.** finită dacă și numai dacă numărul este rațional. O **f.c.** de forma $[a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_{k+n}, a_k, \ldots, a_{k+n}, \ldots]$ se numește *periodică*. **F.c.** normală, cu $a_i \in \mathbb{N}$, asociată unui număr irațional este periodică dacă și numai dacă numărul este irațional algebric de grad 2 (*teorema lui Lagrange*). (*Gh.Gr.*)

front de undă (al unei distribuții), noțiune care permite studiul mai amănunțit al singularităților unei distribuții decît suportul singular. Fie u o distribuție cu suport compact, $\hat{u}(\xi)$ transformata sa Fourier; **f.u.** al lui u, notat $\mathrm{WF}(u)$, este mulțimea acelor puncte $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ pentru care nu există nici o vecinătate conică V (*i.e.* astfel încît $\lambda > 0$, $\eta \in V$ să implice $\lambda\eta \in V$) a lui ξ în care să aibă loc evaluările $|\hat{u}(\eta)| \leqslant C_N(1 + |\eta|)^{-N}$, $N = 1, 2, \ldots$ Cu alte cuvinte, ξ nu este o direcție în care transformata Fourier $\hat{u}$ să se comporte ca transformata Fourier a unei funcții de clasă C^∞ cu suport compact. Dacă u este o distribuție oarecare, localizînd prin înmulțirea cu o funcție φ cu suport compact, identic egală cu 1 în vecinătatea unui punct fixat, dar arbitrar, se poate defini analog $\mathrm{WF}(u)$. Această definiție are un caracter invariant la difeomorfisme și deci se poate defini **f.u.** pentru distribuții definite pe varietăți. În acest caz $\mathrm{WF}(u)$ va fi situat în fibratul cotangent. Proiecția lui $\mathrm{WF}(u)$ pe bază (în cazul considerat inițial pe $\mathbb{R}^n$) este exact suportul singular al lui u. Se pot da diferite rafinări ale acestei noțiuni, de pildă se poate defini **f.u.** în raport cu clase de funcții indefinit derivabile (în particular, în

raport cu funcțiile analitice reale). Importanța acestei noțiuni rezultă și din faptul că prin intermediul ei se pot defini noi distribuții; astfel, în unele cazuri se poate defini urma unei distribuții pe o subvarietate, sau produsul a două distribuții dacă **f.u.** respective sînt bine situate. Formularea naturală a propagării singularităților soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale $Pu = f$ se face în termeni de **f.u.** ale lui f și u. (*G. G.*)

frontiera Choquet Fie T un spațiu topologic compact și $C_{\mathbb{C}}(T)$ algebra funcțiilor continue definite pe T cu valori în $\mathbb{C}$. Fie $A \subset C_{\mathbb{C}}(T)$ o subalgebră care conține funcțiile constante și separă punctele lui T. Prin $t \to F_t$, $F_t(f) = f(t)$, $f \in A$, spațiul T este homeomorf cu o submulțime compactă a dualului A^* înzestrat cu topologia slabă. Mulțimea punctelor extremale ale înfășurătorii convexe și închise a lui T, considerat ca inclus în A^*, se numește **f.C.** a lui T relativ la A. O măsură Radon pozitivă μ pe T se va numi *măsură de reprezentare* pentru punctul $t \in T$ dacă $f(t) = \int f \,\mathrm{d}\mu$, $\forall f \in A$. Funcționala Dirac $\delta_t(f) = f(t)$ este o măsură de reprezentare pentru t. Dacă δ_t este singura măsură de reprezentare pentru t, atunci acest punct se numește *punct Choquet*. Mulțimea punctelor Choquet este **f.C.** a lui T relativ la A. **F.C.** coincide cu închiderea frontierei Șilov. (*Gh.Gr.*)

frontiera ideală v. **element frontieră**

frontiera unei mulțimi (într-un spațiu topologic) v. **punct frontieră**

frontieră a algebrei $C_{\mathbb{C}}(T)$ (a funcțiilor complexe continue pe spațiul compact T), submulțime F a lui T astfel încît orice funcție din algebră își atinge maximul modulului pe F. Printre frontierele închise ale lui $C_{\mathbb{C}}(T)$ există, și este unică, una minimală (în raport cu incluziunea), numită *frontiera Șilov* a lui $C_{\mathbb{C}}(T)$. Definiția cît și existența frontierei Șilov funcționează dacă A este doar o subalgebră în $C_{\mathbb{C}}(T)$ care separă punctele lui T și conține funcțiile constante și, de asemenea, dacă T este doar local compact iar A este o algebră de funcții complexe continue pe T, care se anulează la infinit, separă punctele lui T și nu se anulează toate într-un același punct (se spune, pe scurt, în aceste cazuri că A este o *algebră de funcții*). Frontiera Șilov a algebrei de funcții A coincide cu frontiera Șilov a închiderii $\bar{A}$ (în raport cu topologia convergenței uniforme). Un punct x aparține frontierei Șilov a algebrei de funcții A dacă și numai dacă pentru orice vecinătate deschisă U a lui x există $f \in A$ astfel încît $|f(s)| < \max\limits_{t \in T} |f(t)|$ pentru orice $s \in T \setminus U$. Frontiera Șilov este egală cu închiderea frontierei Choquet. *Frontiera Șilov a unei algebre Banach complexe comutative* este, prin definiție, frontiera Șilov a algebrei funcțiilor complexe continue definite pe spațiul caracterelor (idealelor maximale) algebrei considerate. Modelul cel mai uzual este algebra funcțiilor complexe continue pe discul $\{|z| \leqslant 1\} \subset \mathbb{C}$, olomorfe în interior, algebră a cărei frontieră Șilov este cercul $\{|z| = 1\}$. (*Gh.Gr.*)

frontieră distinsă v. **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)

functor Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două categorii. Un **f.** (sau **f.** *covariant*) F de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}'$ este definit de următoarele date: 1) O aplicație de la clasa $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ la clasa $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, notată $A \mapsto F(A)$; 2) Pentru orice pereche de obiecte A, B în $\mathcal{C}$, o aplicație de la mulțimea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ în mulțimea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(A), F(B))$, notată $u \mapsto F(u)$. Se presupune că sînt verificate următoarele axiome: a) Pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, F duce identitatea lui A în identitatea lui $F(A)$, *i.e.* $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$; b) F păstrează compunerea morfismelor, *i.e.* dacă

$u: A \to B$ și $v: B \to C$ sînt morfisme în $\mathcal{C}$, atunci $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$. Se utilizează notația $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ sau $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}'$ pentru a desemna un **f.** F de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}'$. Prin *cofunctor* sau **f.** *contravariant* de la categoria $\mathcal{C}$ la categoria $\mathcal{C}'$ se înțelege orice **f.** $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{C}'$, unde $\mathcal{C}^{\text{op}}$ este categoria opusă lui $\mathcal{C}$. Astfel un **f.** contravariant de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}'$ constă dintr-o aplicație $A \mapsto F(A)$ de la $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ la $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ și, pentru orice pereche de obiecte A, B în C, dintr-o aplicație $u \mapsto F(u)$ de la mulțimea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ în mulțimea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(B), F(A))$ cu proprietatea că $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ pentru $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ și $F(v \circ u) = F(u) \circ F(v)$ cînd compunerea $v \circ u$ are sens în $\mathcal{C}$. Ex. : 1° Există un **f.** F : **Top** $\to$ **Ens**, și anume **f.** care „uită" topologia obiectelor din **Top** și proprietatea de continuitate a morfismelor din **Top**. Aceasta înseamnă că pentru orice spațiu topologic (X, τ), $F(X, \tau) := X$, și, similar, pentru orice morfism de spații topologice $f: (X, \tau) \to (X', \tau')$, $F(f) := f$. Există numeroase exemple de **f.** de acest tip, de pildă de la varietăți diferențiabile la spații topologice, de la grupuri topologice la grupuri etc. Dacă $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este un astfel de **f.** și A un obiect în $\mathcal{C}$, atunci se spune despre obiectul $F(A)$ al lui $\mathcal{C}'$ că este *subiacent* obiectului A al lui $\mathcal{C}$. Astfel se poate vorbi despre *mulțimea subiacentă unui spațiu topologic*, despre *spațiul topologic subiacent unei varietăți diferențiabile* etc. 2° Fie $\mathcal{C}$ o categorie fixată. Oricărui obiect A din $\mathcal{C}$ i se asociază un **f.** h^A și un cofunctor h_A, ambele de la $\mathcal{C}$ în **Ens**, deci $h^A: \mathcal{C} \to$ **Ens**, $h_A: \mathcal{C}^{\text{op}} \to$ **Ens**. Anume, pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$ se pune $h^A(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ și $h_A(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$. Apoi, dacă $u: X \to Y$ este un morfism în $\mathcal{C}$, atunci $h^A(u): \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$ este aplicația $f \mapsto u \circ f$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$. Similar, $h_A(u): \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ este aplicația $f \mapsto f \circ u$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A)$. 3° Dacă $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}''$ sînt trei categorii iar $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ și $G: \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ sînt **f.** *compunerea* $G \circ F$ a **f.** G cu **f.** F este un **f.**, $H: \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$, definit prin $H(A) := G(F(A))$ și $H(u) := G(F(u))$ pentru orice obiect A și orice morfism u din $\mathcal{C}$. 4° Pentru orice categorie $\mathcal{C}$, **f.** $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, definit prin $F(A) := A$ și $F(u) := u$, se numește *identitatea* lui $\mathcal{C}$ și se notează $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. 5° Fie I o mulțime preordonată și $\mathcal{C}$ o categorie. **F.** covarianți de la I în $\mathcal{C}$ se numesc *sisteme inductive* de obiecte din $\mathcal{C}$ iar **f.** contravarianți de la I în $\mathcal{C}$ se numesc *sisteme proiective* de obiecte din $\mathcal{C}$ (indexate pe mulțimea preordonată I). Un sistem inductiv (proiectiv) indexat pe I se numește *filtrant* cînd mulțimea preordonată I este filtrantă crescător. Fie I o categorie mică și $\mathcal{C}$ o categorie oarecare. O *diagramă* de tip I în categoria $\mathcal{C}$ este, prin definiție, un **f.** $D: I \to \mathcal{C}$. De pildă, dacă I este o categorie cu două obiecte, să zicem 0 și 1, și cu un morfism de la 0 la 1, plus identitățile respective, o diagramă de tip I este o săgeată $D: D(0) \to D(1)$ în $\mathcal{C}$. Similar, se definesc *săgețile duble, triple* etc. Apoi, dacă I este categorie cu patru obiecte 1, 2, 3, 4 și cu morfisme $u: 1 \to 2$, $v: 2 \to 3$, $f: 1 \to 4$ și $g: 4 \to 3$, plus morfismele $v \circ u$, $g \circ f$ și identitățile respective, atunci o diagramă de tip I în $\mathcal{C}$ este un pătrat

$$D: \begin{array}{ccc} D(1) & \longrightarrow & D(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(4) & \longrightarrow & D(3) \end{array} \quad \text{etc.}$$

Notăm de asemenea că sistemele inductive și sistemele proiective sînt diagrame. O diagramă $D: I \to \mathcal{C}$ se numește comutativă dacă $D(u) = D(v)$ pentru orice pereche de morfisme u și v din I astfel încît $s(u) = s(v)$ și $c(u) = c(v)$ (v. **categorie**). De exemplu, pătratul considerat mai sus este comutativ dacă și numai dacă $D(v \circ u) = D(g \circ f)$. Dacă F și G sînt doi **f**. de la categoria $\mathcal{C}$ în categoria $\mathcal{C}'$, un *morfism functorial* (sau *transformare naturală de* **f**.) de la F la G este o familie $\theta = \{\theta_A\}_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ de morfisme $\theta_A : F(A) \to G(A)$ cu proprietatea că, pentru orice săgeată $u : A \to B$ din $\mathcal{C}$, diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "\theta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

este comutativă, *i.e.* $G(u) \circ \theta_A = \theta_B \circ F(u)$. Pentru a desemna un morfism functorial de la **f**. F la **f**. G se utilizează din nou o săgeată, anume se scrie $\theta : F \to G$ sau $F \xrightarrow{\theta} G$. Un morfism functorial $\theta : F \to G$ se numește *izomorfism functorial* dacă θ_A este izomorfism în $\mathcal{C}'$ pentru orice obiect A din $\mathcal{C}$. Dacă $\theta : F \to G$ și $\theta' : G \to H$ sînt morfisme functoriale, familia $\theta'' = \{\theta''_A\}_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ definită prin $\theta''_A := \theta'_A \circ \theta_A$ este un morfism functorial de la **f**. F în **f**. H, notat prin $\theta' \circ \theta$ și numit compunerea lui θ' cu θ. Fie I o categorie mică și $\mathcal{C}$ o categorie oarecare. Diagramele de tip I în $\mathcal{C}$ sînt obiectele unei noi categorii, notată $\mathcal{C}^I$, ale cărei morfisme sînt morfismele functoriale. În cazul particular cînd I este o categorie cu două obiecte 0 și 1 și o săgeată $0 \to 1$, plus identitățile respective, categoria de diagrame $\mathcal{C}^I$ se notează $s(\mathcal{C})$ și se numește *categoria săgeților* lui $\mathcal{C}$. Un **f**. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se numește *fidel* (resp. *deplin fidel*) dacă, pentru orice cuplu de obiecte A, B din $\mathcal{C}$, aplicația $u \mapsto F(u)$ de la mulțimea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ în mulțimea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A), F(B))$ este injectivă (resp. bijectivă). **F**. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se numește *esențial surjectiv* dacă orice obiect A' al categoriei $\mathcal{C}'$ este izomorf cu un obiect de forma $F(A)$ pentru un obiect A al categoriei $\mathcal{C}$. Un **f**. covariant care este simultan deplin fidel și esențial surjectiv se numește *echivalență de categorii*. Ex.: Fie $\mathcal{C}$ categoria avînd ca obiecte suprafețele riemanniene și ca morfisme aplicațiile olomorfe neconstante. Fie, de asemenea, $\mathcal{C}'$ categoria cu obiecte suprafețele topologice orientabile și cu bază numărabilă și morfisme aplicațiile interioare. Deoarece orice suprafață riemanniană este orientabilă și cu bază numărabilă, există un **f**. canonic $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ care asociază oricărei suprafețe riemanniene R suprafața topologică subiacentă lui R și oricărei aplicații olomorfe neconstante $f : R \to R'$, R și R' suprafețe riemanniene, aceeași aplicație f considerată ca morfism în $\mathcal{C}'$.

Teorema 1 (Radó). **F**. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este esențial surjectiv.

Această teorema afirmă deci că pe orice suprafață topologică orientabilă și cu bază numărabilă există structuri de suprafață riemanniană. Pentru $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ ca mai sus și S un obiect din $\mathcal{C}$, să considerăm categoriile relative $\mathcal{C}/S$ și $\mathcal{C}'/S$. **F**. F induce un **f**. evident $F/S : \mathcal{C}/S \to \mathcal{C}'/S$.

Teorema 2 (Stoilow). **F**. $F/S : \mathcal{C}/S \to \mathcal{C}'/S$ este o echivalență de categorii. Această teoremă afirmă deci în esență echivalența topologică între aplicațiile interioare de suprafețe topologice orientabile și cu bază numărabilă și aplicațiile olomorfe neconstante de suprafețe riemanniene. Teorema lui Stoilow poate fi interpretată de asemenea ca fiind un fel de versiune relativă a teoremei 1 și atunci ea se enunță astfel: Fiind dată o suprafață riemanniană S, o suprafață topologică X și o aplicație interioară $p : X \to S$, există o structură de suprafață riemanniană pe X astfel încît aplicația p să fie olomorfă (și această structură este atunci unică). (*M.J.*)

functor contravariant v. functor

functor covariant v. functor

funcția Airy v. **funcții speciale definite cu ajutorul unor ecuații diferențiale**
funcția argument v. **logaritmul complex, funcție analitică globală**
funcția B (beta), integrala euleriană de prima speță

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Funcția B : $\{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ este continuă și are proprietățile:

$$\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(x, y);\quad \mathrm{B}(x, y) = \frac{x+y}{y}\mathrm{B}(x, y+1),\quad x, y > 0;$$

$$\mathrm{B}(x, n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)},\quad x > 0,\quad n \in \mathbb{N};$$

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ \text{unde } \Gamma \text{ este funcția lui Euler};$$

$$\mathrm{B}(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},\quad 0 < x < 1.\quad (Gh.Gr.)$$

funcția Bessel v. **funcții speciale definite cu ajutorul unor ecuații diferențiale**

funcția caracteristică a unei mulțimi, funcția $\varphi_A : T \to \{0, 1\}$, unde T este o mulțime nevidă și $A \subset T$, dată prin $\varphi_A(t) = 1$ dacă $t \in A$ și $\varphi_A(t) = 0$ dacă $t \notin A$. Se mai folosesc și notațiile χ_A sau φ_A. Sin.: ***indicatoarea mulțimii A***. Avem relațiile:

$$\varphi_{A \cap B} = \varphi_A\varphi_B = \varphi_A \wedge \varphi_B = \inf(\varphi_A, \varphi_B);$$

$$\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A\varphi_B = \varphi_A \vee \varphi_B (= \sup(\varphi_A, \varphi_B))$$

și $\varphi_{\complement A} = 1 - \varphi_A$, unde $\complement A$ este complementara lui A. Uneori se consideră că φ_A: $T \to \Gamma$, unde Γ este corpul numerelor reale sau complexe. (*I.C.*)

funcția exponențială, funcția complexă exp, definită pe $\mathbb{C}$ și avînd proprietățile următoare: 1) exp este o funcție întreagă; 2) $\exp' = \exp$, *i.e.* exp se reproduce prin derivare; 3) $\exp(0) = 1$. Un calcul elementar arată că **f.e.** există, este unică, și admite dezvoltarea în serie de puteri

$$\exp(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,\quad z \in \mathbb{C},$$

formulă care poate fi luată ca o definiție explicită a **f.e.** O proprietate remarcabilă a **f.e.** este exprimată prin
Teorema de adunare. $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.
Cum $\exp(0) = 1$, se deduce că $\exp(z) \neq 0$ și $\exp(-z) = \exp(z)^{-1}$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Prin urmare **f.e.** induce un morfism de grupuri de la grupul aditiv $\mathbb{C}$ al tuturor numerelor complexe la grupul multiplicativ $\mathbb{C}^*$ al numerelor complexe diferite de zero. De aceea, se consideră uneori **f.e.** ca o aplicație de la $\mathbb{C}$ cu valori în $\mathbb{C}^*$, *i.e.* $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Deoarece $\exp(1)$ este numărul e al lui Euler și **f.e.** satisface teorema de adunare, se utilizează de asemenea notația alternativă e^z pentru $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Pentru x real rezultă $e^x > 0$, deci **f.e.** induce un morfism de grupuri de la grupul aditiv $\mathbb{R}$ al tuturor numerelor reale la grupul multiplicativ $(0, \infty)$ al numerelor reale > 0. Aplicația $\mathbb{R} \to (0, \infty)$

indusă de **f.e.** este strict crescătoare și bijectivă, în particular un izomorfism de grupuri. Inversa acestei aplicații se notează log și se numește *logaritmul real* (uneori, în special în texte cu caracter aplicativ, se utilizează notația ln cu denumirea de *logaritm natural*). Din definiție rezultă că funcția log: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ este un omeomorfism crescător și un morfism de grupuri, *i.e.* satisface relația fundamentală

$$\log(xy) = \log x + \log y,\quad x, y > 0;$$

în particular $\log 1 = 0$; de asemenea, $\log e = 1$. **F.e.** poate fi folosită pentru introducerea funcțiilor trigonometrice. Mai întîi funcțiile trigonometrice fundamentale cos (cosinus) și sin (sinus) se definesc prin formulele:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots;$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Cos și sin sînt deci funcții întregi la fel ca **f.e.**, prima este pară, a doua impară și avem

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,\quad z \in \mathbb{C}\ (\textit{formula lui Euler})$$

și formula $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Celelalte funcții trigonometrice, tg (tangenta), ctg (cotangenta), sec (secanta), cosec (cosecanta) sînt funcții meromorfe pe $\mathbb{C}$ și se definesc prin:

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z};\quad \sec z = \frac{1}{\cos z};\quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z};\quad \mathrm{cosec}\, z = \frac{1}{\sin z}.$$

Din teorema de adunare pentru **f.e.** se deduc imediat teoreme de adunare pentru funcții trigonometrice, și anume:

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z';$$
$$\sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z' \quad \text{etc.}$$

și, în particular.

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z;\quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z \quad \text{etc.}$$

Pentru orice număr complex $z = x + iy$, formula lui Euler dă $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, în particular $|e^z| = e^x$. Deoarece $\cos 0 = 1$ și $\cos\sqrt{3} < 0$, ecuația $\cos z = 0$ admite rădăcini reale > 0. Este convenabil să se definească ***numărul π al lui Pitagora*** prin egalitatea $\pi := 2y_0$, unde y_0 este cea mai mică rădăcină reală pozitivă a ecuației $\cos z = 0$; în particular avem $0 < \pi < 2\sqrt{3}$. Cu această definiție a numărului π se obține imediat formula remarcabilă $e^{2\pi i} = 1$ care leagă între ele patru numere importante ale analizei, și anume: 1, i, π și e. De aici și din teorema de adunare se obține egalitatea $\exp(z + 2\pi i) = \exp z$, $z \in \mathbb{C}$, *i.e.* $2\pi i$ este o *perioadă* a **f.e.**, deci 2π o perioadă a funcției $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, *i.e.* a funcțiilor cos și sin. Folosind acum procedeele uzuale de calcul diferențial se obține imediat tabloul cunoscut de variație pentru funcțiile reale cos și sin, *i.e.* pentru $z = x$ real, inclusiv formulele de forma

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z,\quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \quad \text{etc.}$$

și de asemenea că 2π este cea mai mică perioadă > 0 pentru fiecare din funcțiile $\cos x$, $\sin x$, e^{ix}, $x \in \mathbb{R}$. Apoi se vede că toate zerourile funcțiilor complexe cos şi sin sînt simple şi reale, şi anume în punctele $n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, pentru funcţia cos şi în punctele $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ pentru funcţia sin, şi, în fine, că aplicaţia $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ este surjectivă şi $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}i$. Un rezultat neelementar este stabilirea formulelor de reprezentare euleriană, *i.e.* ca produse infinite pentru funcţiile întregi cos şi sin şi de reprezentare în serie de funcţii raţionale pentru celelalte funcţii trigonometrice. De pildă, pentru funcţia sin avem reprezentarea ca produs infinit

$$\sin z = z \prod_{n\neq 0}\left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/n\pi} = z \prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

iar pentru funcţia ctg reprezentarea în serie de funcţii raţionale

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \quad (M.J.)$$

funcţia Γ (a lui Euler) Cea mai simplă definiţie a **f.** Γ a lui Euler în domeniul complex este furnizată de *formula lui Weierstrass*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} : = z e^{\gamma z} \prod_{n\geqslant 1}\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

unde γ este *constanta lui Euler*, definită prin

$$e^{-\gamma} : = \prod_{n\geqslant 1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}, \quad i.e.$$

$$\gamma : = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}577215664\ldots$$

Formula lui Weierstrass se poate scrie şi astfel:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n\geqslant 1}\left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(z \log \frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!\,n^z}$$

cu $z \in \mathbb{C}$; în particular $\Gamma(1) = 1$. Din definiţie rezultă imediat că $1/\Gamma$ este o funcţie întreagă de gen 1 cu zerouri simple în punctele $z = -n$ pentru n întreg $\geqslant 0$, deci Γ este o funcţie meromorfă pe $\mathbb{C}$ cu poluri simple în punctele $z = -n$, n întreg $\geqslant 0$, dar fără zerouri. **F.** Γ satisface

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\textit{ecuaţia funcţională a lui Euler});$$

în particular $\Gamma(n+1) = n!$ deci Γ apare ca o generalizare a factorialului De asemenea, **f.** Γ verifică

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z} \quad (\textit{formula complemenţilor a lui Euler});$$

în particular $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (\textit{formula de duplicaţie a lui Legendre})$$

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(z) = n^{z-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right)$$

(*formula Legendre-Gauss*)

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să notăm prin D semiplanul $\operatorname{Re} z > 0$, prin $\log z$ ramura principală pe D a logaritmului complex şi prin $\log \Gamma$ unica funcţie φ olomorfă pe D şi reală pe intersecţia cu D a axei reale care verifică ecuaţia $e^{\varphi(z)} = \Gamma(z)$, $z \in D$. Atunci funcţia J pe D, definită prin

$$J(z) : = \log \Gamma(z) + z - z \log z + \frac{1}{2}\log z - \frac{1}{2}\log 2\pi,$$

este olomorfă şi verifică *formula lui Stirling*: $\lim J(z) = 0$ cînd $|z| \to \infty$ şi $\operatorname{Re} z \geqslant c$ pentru orice număr real $c > 0$. Deoarece

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}}\, e^{-z}\, e^{J(z)}, \quad z \in D,$$

formula lui Stirling se mai scrie: $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}}\, e^{-z}$ cînd $|z| \to \infty$ şi $\operatorname{Re} z \geqslant c$ pentru orice număr real $c > 0$. Funcţia J admite dezvoltarea asimptotică

$$J(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{2k(2k-1)}\,\frac{1}{z^{2k-1}} + J_n(z), \quad z \in D, \ n \geqslant 1,$$

unde $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sînt numerele lui Bernoulli şi unde, pentru orice număr real $c > 0$, $J_n(z) = o(|z|^{-2n})$ cînd $|z| \to \infty$ şi $\operatorname{Re} z \geqslant c > 0$, *i.e.* $\lim z^{2n} J_n(z) = 0$ cînd $|z| \to \infty$ şi $\operatorname{Re} z \geqslant c > 0$. Menţionăm că, pe semiplanul $\operatorname{Re} z > 0$, **f.** Γ admite reprezentarea integrală

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad z \in D.$$

În particular, restricţia lui Γ la semiaxa reală $x > 0$ coincide cu integrala euleriană de speţa a doua. **F.** $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este de clasă C^∞ şi

$$\Gamma(x) > 0, \quad x > 0,$$

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^{(n)} t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0, \quad \mathbf{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (M.J.)$$

funcţia putere Fie α un număr complex arbitrar. Notăm prin e^w, $w \in \mathbb{C}$ funcţia exponenţială şi prin log funcţia logaritm în sensul de funcţie analitică globală. Mulţimea $\{\psi = e^{\alpha\varphi} \mid \varphi \in \log\}$ este o funcţie analitică globală pe $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, numită **f.p.** de ordin α şi notată z^α. Dacă $D = \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]\times\{0\}$ şi dacă $\varphi_0 : D \to \mathbb{C}$ este ramura principală a funcţiei logaritm, *i.e.* ramura care ia valori reale pe axa reală pozitivă, atunci $\psi_0 : = e^{\alpha\varphi_0}$ se numeşte *ramura principală* a **f.p.** de ordin α; pe discul $|z - 1| < 1$ funcţia ψ_0 admite dezvoltarea Taylor:

$$\psi_0(z) = 1 + \binom{\alpha}{1}(z-1) + \binom{\alpha}{2}(z-1)^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}(z-1)^n + \ldots,$$

unde $\binom{\alpha}{n} : = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)/n!$. Notaţia z^α este folosită uneori pentru a desemna ramura principală a **f.p.**, *i.e.* $z^\alpha = \psi_0(z)$, $z \in D$. **F.p.** z^α este constantă (egală cu 1) pentru $\alpha = 0$, uniformă pentru $\alpha = n$ un număr întreg (cînd coincide cu puterea n-a uzuală) şi o funcţie algebrică pentru α raţional. (*M.J.*)

funcția $\wp$ (a lui Weierstrass) v. **funcție eliptică**

funcția spectrală (a unui element într-un spațiu liniar reticulat cu unitate) v. **spațiu liniar reticulat cu unitate**

funcția spectrală (a unui operator autoadjunct) v. **operator autoadjunct**

funcția σ (a lui Weierstrass) v. **funcție eliptică**

funcția ζ (a lui Riemann), funcție analitică transcendentă introdusă de Riemann în scopul estimării numărului numerelor prime inferioare unui număr real dat. **F.** ζ se definește mai întîi pe semiplanul $\sigma > 1$ prin seria Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma, t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

unde $n^s := e^{s \log n}$ (logaritmul real). Această serie este normal convergentă pe orice semiplan închis $\sigma \geqslant \sigma_0$, cu $\sigma_0 > 1$, deci **f.** ζ este olomorfă în semiplanul $\sigma > 1$. De asemenea, în semiplanul $\sigma > 1$, ζ admite reprezentarea integrală

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, dx, \tag{2}$$

integrala din membrul drept fiind absolut convergentă pentru $\sigma > 1$. (Notăm că această reprezentare integrală a **f.** ζ este o consecință mai mult sau mai puțin imediată a formulei de reprezentare integrală a funcției Γ.) Al doilea pas important în definirea **f.** ζ este prelungirea ei analitică dincolo de semiplanul $\sigma > 1$. Există numeroase procedee de realizare a acestei prelungiri analitice. Unul din ele, datorat lui Riemann, pleacă de la observația că ipoteza $\sigma > 1$ este necesară doar pentru convergența în punctul $x = 0$ a integralei din formula (2). Ideea este deci să se înlocuiască integrala reală din formula (2) printr-o integrală complexă pe un drum convenabil care să evite punctul $0 \in \mathbb{C}$. Un astfel de drum este, de pildă, drumul C obținut parcurgînd mai întîi intervalul $[1, \infty)$ al axei reale în sens negativ, *i.e.* descrescător, apoi cercul $|z| = 1$ în sens direct și, în fine, din nou intervalul $[1, \infty)$ al axei reale, de data aceasta în sens pozitiv. Se obține atunci fără dificultate formula de reprezentare integrală

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \, dz \tag{3}$$

pentru $\sigma > 1$. Integrala complexă care intervine în această formulă este absolut convergentă uniform (în raport cu s) pe orice compact al planului complex $\mathbb{C}$, așa încît formula (3) realizează prelungirea analitică a **f.** ζ ca funcție olomorfă de s pe întreg $\mathbb{C}$, cu excepția punctului $s = 1$, unde ea are un pol simplu cu reziduu egal cu 1. Cînd s este întreg, funcția $z^{s-1}/(e^z - 1)$ este meromorfă pe $\mathbb{C}$, deci integrala din formula (3) poate fi calculată prin metoda reziduurilor și furnizează valorile: $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$; $\zeta(-2n) = 0$;

$$\zeta(1 - 2n) = \frac{(-1)^n B_n}{2n}; \quad \zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_n \pi^{2n}}{(2n)!}$$

pentru n întreg $\geqslant 1$, unde $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sînt numerele lui Bernoulli. De asemenea, tot din formula (3) și tot prin metoda reziduurilor, se poate obține fără dificultate *ecuația funcțională a lui Riemann*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1 - s).$$

F. ζ a lui Riemann, care poartă în sine o lume întreagă, joacă un rol fundamental în teoria analitică a numerelor, cum rezultă din *identitatea lui Euler*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad s > 1,$$

unde p parcurge mulțimea numerelor prime. Această identitate este în fapt o formă sofisticată a teoremei fundamentale a aritmeticii, după care orice număr întreg $n > 1$ admite o descompunere unică într-un produs de numere prime. O consecință a identității lui Euler este faptul că seria

$$\sum_p \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots, \quad p \text{ număr prim},$$

este divergentă, ceea ce reprezintă o versiune întărită a teoremei lui Euclid după care mulțimea numerelor prime este infinită. În legătură cu studiul **f.** ζ a lui Riemann se introduce de asemenea funcția ξ, definită prin

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad s \in \mathbb{C},$$

care este o funcție întreagă de ordin 1, deci admite o reprezentare euleriană de forma

$$\xi(s) = e^{b_0 + b_1 s} \prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

unde b_0 și b_1 sînt constante iar ρ parcurge mulțimea zerourilor lui ξ. În plus, ecuația funcțională a lui Riemann se rescrie în forma simplă

$$\xi(s) = \xi(1 - s), \quad s \in \mathbb{C}.$$

Din identitatea lui Euler rezultă că **f.** ζ nu are zerouri în semiplanul $\sigma > 1$, iar din ecuația funcțională se deduce că singurele zerouri ale **f.** ζ situate în semiplanul $\sigma < 0$ sînt așa-numitele *zerouri triviale* $s = -2n$, n întreg $\geqslant 1$. Astfel zerourile netriviale ale **f.** ζ sînt toate conținute în banda $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, numită *banda critică* a funcției ζ și, mai mult, ele sînt așezate simetric în raport cu axa reală $t = 0$ și în raport cu *axa critică* $\sigma = \dfrac{1}{2}$. De asemenea, deoarece $\zeta(0) \neq 0$ și

$$(1 - 2^{s-1})\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} \quad \text{pentru } \sigma > 0$$

rezultă $\zeta(\sigma) \neq 0$ pentru $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, încît singurele zerouri reale ale funcției ζ sînt zerourile triviale. Repartiția zerourilor **f.** ζ în banda critică este legată de *legea distribuției asimptotice a numerelor prime*. Această lege, cunoscută și sub denumirea de *teorema numerelor prime*, afirmă că $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$ cînd $x \to \infty$, *i.e.* $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \infty \\ x > 0}} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$, unde pentru orice număr real $x > 0$, $\pi(x)$ este numărul numerelor prime care nu depășesc pe x. Deoarece

$$\int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) \quad \text{pentru } x \to \infty,$$

în enunțul teoremei numerelor prime funcția $x/\log x$ poate fi înlocuită prin *logaritmul integral, i.e.* prin funcția

$$\operatorname{li} x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ 0<\varepsilon<1}} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{du}{\log u}\right) = \operatorname{li} 2 + \int_2^x \frac{du}{\log u}, \quad x > 1.$$

Conjecturată deja de Gauss, teorema numerelor prime a putut fi demonstrată abia în 1896, în mod independent, de J. Hadamard și Ch. de la Vallée Poussin. În aceste demonstrații (la fel ca în versiunile ulterioare simplificate) **f.** ζ intervine printr-o proprietate remarcabilă (datorată tot lui Hadamard și de la Vallée Poussin), și anume că nu are zerouri pe axa $\sigma = 1$, deci zerourile ei netriviale sînt toate conținute în banda critică deschisă $0 < \sigma < 1$. Rezultate ulterioare au furnizat treptat regiuni posibile tot mai restrînse în care sînt situate toate zerourile netriviale ale **f.** ζ. Aceste regiuni conțin toate axa critică $\sigma = \frac{1}{2}$ și fiecare dintre ele conduce la o estimare a „restului" în teorema numerelor prime, *i.e.* a diferenței $\pi(x) - \operatorname{li} x$. Rezultatul ideal ar fi realizat prin demonstrarea următoarei conjecturi, cunoscută sub numele de *ipoteza lui Riemann*: zerourile netriviale ale **f.** ζ sînt toate situate pe axa critică $\sigma = \frac{1}{2}$. Ipoteza lui Riemann care implică estimarea $\pi(x) - \operatorname{li} x = o(x^{1/2} \log x)$ (von Koch, 1901) este una din marile probleme deschise ale matematicii. Un răspuns parțial, important, datorat lui Hardy (1914), afirmă că există o infinitate de zerouri ale **f.** ζ pe axa critică $\sigma = \frac{1}{2}$. În prezent se cunosc de asemenea demonstrații așa-zise elementare, *i.e.* demonstrații care nu utilizează **f.** ζ, ale teoremei numerelor prime: Erdös (1949), Selberg (1949), Wirsing (1962), Bombieri (1962). (*M.J.*)

funcție, triplet A, B, f, unde A și B sînt mulțimi iar f este o regulă care asociază fiecărui element din A un element unic în B. Se folosește de obicei notația $f : A \to B$; o notație mai veche: $y = f(x)$. **F.** *injectivă* (sau *injecție*), **f.** cu proprietatea: dacă $x, y \in A$, $x \neq y$, atunci $f(x) \neq f(y)$. **F.** *surjectivă* (sau *surjecție*), **f.** f: $A \to B$ cu proprietatea: $f(A) = B$. **F.** *bijectivă* (sau *bijecție*), **f.** injectivă și surjectivă. (*S.M.*)

funcție a lui Hamel, orice soluție discontinuă a ecuației funcționale a lui Cauchy $f(x + y) = f(x) + f(y)$, unde f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **F.H.** sînt nemăsurabile Lebesgue și lipsite de proprietatea lui Baire. Existența **f.H.** este stabilită cu ajutorul axiomei alegerii. (*S.M.*)

funcție absolut continuă, funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît pentru orice $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b$ cu $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ să avem $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. Se obține o definiție echivalentă dacă folosim inegalitatea mai slabă $\left|\sum_{i=1}^{n} f(b_i) - f(a_i)\right| < \varepsilon$. Se arată că funcțiile lipschitziene sînt **f.a.c.** Se spune că o funcție f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ are proprietatea (N) dacă pentru orice mulțime neglijabilă Lebesgue $M \subset [a, b]$ mulțimea $f(M)$ este neglijabilă Lebesgue. Se arată că $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este **f.a.c.** dacă și numai dacă f este continuă, cu variație mărginită și are proprietatea (N). Se mai arată că o funcție crescătoare și continuă este **f.a.c.** dacă și numai dacă $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este **f.a.c.** ea este derivabilă a.p.t. (**v. derivarea funcțiilor monotone**) și avem, pentru orice x din $[a, b]$, reprezentarea $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ (*teorema de reprezentare a* **f.a.c.**) (*I.C.*)

funcție absolut continuă generalizată în sens larg Funcția $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este **f.a.c.g.s.l.** pe E dacă E este o reuniune cel mult numărabilă de mulțimi astfel încît pe fiecare mulțime în parte f este absolut continuă în sens larg. Orice funcție $f : S \to \mathbb{R}$ diferențiabilă este **f.a.c.g.s.l.** Funcția $F : S \to \mathbb{R}$ este integrala Denjoy-Hincin a lui $f : S \to \mathbb{R}$ dacă F este **f.a.c.g.s.l.** pe S iar derivata aproximativă a lui F este egală a.p.t. pe S cu f. Aici $S \subset \mathbb{R}$ este un interval. (*S.M.*)

funcție absolut continuă generalizată în sens restrîns Funcția f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ este **f.a.c.g.s.r.** pe $E \subset [a, b]$ dacă E se poate scrie ca o reuniune cel mult numărabilă de mulțimi astfel încît pe fiecare mulțime în parte f este absolut continuă în sens restrîns. Dacă $E = [a, b]$, f este **f.a.c.g.s.r.** pe E exact atunci cînd este absolut continuă generalizată în sens larg pe E. Funcția F: $[a, b] \to \mathbb{R}$ este integrala Denjoy-Perron a lui f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ dacă F este **f.a.c.g s.r.** pe $[a, b]$ și $F' = f$ a.p.t. pe $[a, b]$. (*S.M.*)

funcție absolut continuă în sens larg Funcția $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este **f.a.c.s.l.** pe E dacă fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde $\eta > 0$ astfel încît pentru orice șir de intervale $\{[a_n, b_n]\}$ fără puncte interioare comune avînd extremitățile în E și satisfăcînd condiția $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \eta$ avem: $\sum_{n=1}^{\infty} |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$. Funcția $F : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$, interval) este integrala Lebesgue a lui $f : I \to \mathbb{R}$ dacă F este **f.a.c.s.l.** pe I și $F' = f$ a.p.t. pe I. Condiție echivalentă: aceeași ca mai sus, dar înlocuind seriile convergente prin sume finite. (*S.M.*)

funcție absolut continuă în sens restrîns Funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este **f.a.c.s.r.** pe $E \subset [a, b]$ dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ astfel încît oricare ar fi sistemul finit de intervale $\{[x_i, y_i]\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, fără puncte interioare comune, avînd extremitățile în E și satisfăcînd condiția $\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \eta$ avem $\sum_{i=1}^{n} \omega(f;\ [x_i, y_i)] < \varepsilon$. Dacă $E = [a, b]$, atunci f este **f.a.c.s.r.** dacă și numai dacă f este absolut continuă în sens larg pe $[a, b]$. (*S.M.*)

funcție afină v. **măsuri afine și măsuri cilindrice**

funcție algebrică v. **funcție analitică globală**

funcția analitică v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă), **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe), **serie Taylor.**

funcție analitică globală Fie S o suprafață riemanniană fixată. Prin *element analitic* (sau *element de funcție analitică*) pe S se înțelege o funcție olomorfă $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{C}$ definită pe o mulțime deschisă nevidă conexă $D_\varphi \subset S$. O **f.a.g.** pe S este o mulțime nevidă **f** de elemente analitice pe S cu proprietățile următoare: 1) Dacă $\varphi, \psi \in \mathbf{f}$, atunci ψ se poate obține din φ prin prelungire analitică; 2) Dacă $\varphi \in \mathbf{f}$ și dacă ψ este un element analitic care se poate obține din φ prin prelungire analitică, atunci $\psi \in \mathbf{f}$. Orice **f.a.g. f** este univoc definită de oricare din elementele sale φ; dacă $\varphi \in \mathbf{f}$ se spune că **f** este **f.a.g.**

generată de elementul φ. O **f.a.g.** **f** se numește *uniformă* dacă admite un cel mai mare element, *i.e.* dacă există un element $\varphi_0 \in \mathbf{f}$ astfel încît $D_\varphi \subset D_{\varphi_0}$ și $\varphi = \varphi_0 \mid D_\varphi$ pentru orice element $\varphi \in \mathbf{f}$; în acest caz identificăm **f.a.g.** **f** cu φ_0. O *reprezentare* a **f.a.g.** **f** este o familie $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ de elemente de funcție analitică cu proprietățile următoare: 1) Pentru orice $i \in I$, $\varphi_i \in \mathbf{f}$; 2) Pentru orice element $\varphi \in \mathbf{f}$ și orice punct $a \in D_\varphi$ există $i_0 \in I$ astfel încît $a \in D_{\varphi_{i_0}}$ și astfel încît germenii definiți de funcțiile φ și φ_{i_0} în punctul a să fie egali. De exemplu, o funcție uniformă admite o reprezentare formată dintr-un singur element. O reprezentare $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ a lui **f** se numește (cel mult) numărabilă dacă mulțimea I este (cel mult) numărabilă.

Teorema Poincaré-Volterra-Radó. Orice **f.a.g.** **f** pe S admite o reprezentare cel mult numărabilă.

În general, este dificil să controlăm o **f.a.g.** în totalitatea ei și trebuie să ne mulțumim să cunoaștem anumite părți ale acestei funcții. Dacă Ω este o mulțime deschisă nevidă și conexă în S, atunci Ω este o suprafață riemanniană (cu structura indusă) și putem considera **f.a.g.** pe Ω. Dacă **f** este o **f.a.g.** pe S, se numește *ramură* a lui **f** orice submulțime F a lui **f** cu proprietatea că există o mulțime deschisă nevidă și conexă Ω a lui S astfel încît F să fie o **f.a.g.** pe Ω. Ca mai sus, dacă ramura F a lui **f** are un cel mai mare element φ, spunem că F este o *ramură uniformă* a lui **f** și o identificăm cu elementul analitic φ. În acord cu această identificare, se folosește de asemenea termenul de ramură uniformă a lui **f** pentru a desemna un element analitic $\varphi \in \mathbf{f}$. Ex.: 1° *Funcția logaritm.* Dacă $S = \mathbb{C}^*$, mulțimea

$$\log := \{\varphi \mid D_\varphi \subset \mathbb{C}^*, \ e^{\varphi(z)} = z \quad \text{pentru} \quad z \in D_\varphi\}$$

este o **f.a.g.** numită *funcția logaritm*. O reprezentare a funcției logaritm este furnizată de familia $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$, $\varphi_\nu : D_\nu \to \mathbb{C}$, definită prin condițiile următoare: 1) $D_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, $\varphi_0 \in \log$ și $\varphi_0(1) = 0$; 2) Pentru orice $\nu \in \mathbb{Z}$, $D_{\nu+1} := e^{i\frac{\pi}{2}} D_\nu$ și $\varphi_{\nu+1}$ este o prelungire analitică directă a lui φ_ν. 2° *Funcție algebrică.* O **f.a.g.** **f** pe $S = \tilde{\mathbb{C}}$ se numește funcție algebrică dacă există un polinom analitic $P : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, neidentic zero, astfel încît $P(\varphi(z), z) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathbf{f}$ și orice $z \in \mathbb{C} \cap D_\varphi$.

Teoremă. Pentru orice polinom analitic ireductibil P în două variabile complexe, mulțimea (de elemente analitice pe $\tilde{\mathbb{C}}$) $\mathbf{f} := \{\varphi \mid P(\varphi(z), z) = 0$ cînd $z \in \mathbb{C} \cap D_\varphi\}$ este o **f.a.g.**, deci o funcție algebrică.

Obs. În absența oricărei altei precizări, suprafața riemanniană S se consideră a fi sfera lui Riemann $S^2 = \tilde{\mathbb{C}}$. (*M.J.*)

funcție aproape periodică Funcția continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *aproape periodică* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv $a(\varepsilon)$ astfel încît orice interval compact de lungime $a(\varepsilon)$ conține un număr $\tau(\varepsilon) = \tau$ cu proprietatea $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Numărul $\tau(\varepsilon)$ este o *aproape-perioadă* relativă la ε sau o *ε-aproape perioadă*. Orice funcție continuă și periodică este aproape periodică. Orice funcție aproape periodică este mărginită și uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Convergența uniformă pe $\mathbb{R}$ păstrează aproape-periodicitatea (*S.M.*)

funcție aproape total măsurabilă v. funcție total măsurabilă

funcție armonică, orice soluție a ecuației $\Delta u = 0$. Operatorul lui Laplace $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ fiind analitic hipoeliptic, **f.a.** rezultă că sînt real analitice și se bucură de unele proprietăți remarcabile. Fie Ω o mulțime deschisă mărginită din $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ frontiera sa. Atunci: 1) *Principiul maximului și minimului.* Dacă u este armonică în Ω și continuă pe $\overline{\Omega}$, $\sup\limits_{\Omega} u \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} u$, $\inf\limits_{\Omega} u \leqslant \inf\limits_{\partial\Omega} u$, egalitatea într-unul din aceste cazuri implicînd faptul că u este constantă în Ω. 2) *Proprietatea de medie.* Valoarea unei **f.a.** într-un punct $x \in \Omega$ este egală cu media sa pe orice sferă centrată în x și cuprinsă în Ω. 3) *Teorema 1 a lui Harnack.* Dacă șirul $\{u_n\}$ de **f.a.** în Ω și continue pe $\overline{\Omega}$ este uniform convergent pe $\partial\Omega$, el rezultă uniform convergent în Ω și limita sa este armonică în Ω. 4) *Teorema 2 a lui Harnack.* Dacă șirul $\{u_n\}$ de **f.a.** și nenegative în Ω converge într-un punct $x_0 \in \Omega$, atunci șirul converge în întreg Ω către o **f.a.**, convergența fiind uniformă pe compactele din Ω. 5) *Teorema singularității removabile.* Dacă u este definită și armonică în $\omega \setminus x_0$, ω fiind o vecinătate a punctului x_0, atunci ea poate fi prelungită în x_0 astfel ca funcția prelungită să fie armonică în întreaga vecinătate ω. 6) *Teorema lui Liouville.* Dacă u este armonică în $\mathbb{R}^n$ și este superior (sau inferior mărginită) rezultă că este constantă. 7) Dacă u este armonică în Ω și continuă în $\overline{\Omega}$, atunci $\displaystyle\int \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, d\tau = 0$, unde $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ este derivata normală. **F.a.** și generalizările lor (funcțiile subarmonice, superarmonice, plurisubarmonice) intervin în numeroase domenii ale matematicii (analiză complexă, teoria potențialului etc.). (*G.G.*)

funcție boreliană v. funcție măsurabilă

funcție $\mathbb{C}$-diferențiabilă v. funcție olomorfă (de o variabilă complexă), **funcție complexă derivabilă**

funcție complexă, orice aplicație avînd drept codomeniu mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe, *i.e.* orice aplicație de forma $f : S \to \mathbb{C}$, unde S este o mulțime oarecare. (*M.J.*)

funcție complexă derivabilă Fie A o mulțime deschisă din planul complex $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ și $z_0 \in A$. Funcția f se numește *derivabilă* sau *$\mathbb{C}$-diferențiabilă* în z_0 dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z)_0}{z - z_0} \in \mathbb{C}$. Dacă există, această limită se notează $f'(z_0)$ și se numește *derivata* lui f în punctul z_0. Dacă f este derivabilă în orice punct din A, se spune că f este *derivabilă pe A*. Funcția $g : A \to \mathbb{R}$ se numește *diferențiabilă* în z_0 dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0)}{|z - z_0|} = 0,$$

unde $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $x, y, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Dacă g este diferențiabilă în z_0, atunci $\alpha = \dfrac{\partial g}{\partial x}(z_0)$ și $\beta = \dfrac{\partial g}{\partial y}(z_0)$. Pentru $f : A \to \mathbb{C}$ fie $f(z) = u(z) + iv(z)$, unde $u, v : A \to \mathbb{R}$ sînt respectiv, partea reală și partea imaginară a lui f, notate uneori $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Funcția f se numește *$\mathbb{R}$-diferențiabilă în* z_0 dacă u și v sînt diferențiabile în z_0. Funcția $f : A \to \mathbb{C}$ este derivabilă în z_0 dacă și numai dacă este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0 și

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \quad (\textit{ecuațiile Cauchy-Riemann}).$$

Dacă D este un domeniu iar $f : D \to \mathbb{C}$ este derivabilă, atunci afirmațiile următoare sînt echivalente: i) f este constantă; ii) $f' = 0$; iii) $\operatorname{Re} f$ este constantă; iv) $\operatorname{Im} f$ este constantă; v) $|f|$ este constantă. Dacă D este domeniu, atunci f este derivabilă pe D dacă și numai dacă este olomorfă pe D (v. și **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă)). (*Gh.Gr.*)

funcție constructivă, regulă explicită, finită, mecanică de asociere a unui element $f(a)$ din B fiecărui element a din A. Regula este exprimată printr-un algoritm. (*S.M.*)

funcție continuă Fie $(\mathcal{X}, \tau)$ și $(\mathcal{Y}, \sigma)$ două spații topologice, $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ și $x_0 \in \mathcal{X}$. Se spune că funcția f este *continuă în punctul* x_0 dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$ există U o vecinătate a lui x_0 astfel încît $f(U) \subset V$. Dacă este necesară precizarea topologiei lui $\mathcal{X}$, se spune că f este τ-continuă în x_0. Fie $\mathcal{B}_{f(x_0)}$ o bază de vecinătăți a lui $f(x_0)$. Afirmațiile următoare sînt echivalente: i) f este continuă în punctul x_0; ii) Pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ este o vecinătate a lui x_0; iii) Pentru orice $V \in \mathcal{B}_{f(x_0)}$, $f^{-1}(V)$ este o vecinătate a lui x_0; iv) Oricare ar fi șirul generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ convergent către x_0, șirul $\{f(x_\delta)\}_{\delta \in \Delta}$ converge către $f(x_0)$; v) Baza de filtru $\{f(V) \mid V \in \mathcal{V}_{x_0}\}$ converge către $f(x_0)$ ($\mathcal{V}_{x_0}$ este mulțimea vecinătăților punctului x_0). Mulțimea punctelor în care f este continuă se numește *mulțimea punctelor de continuitate* a funcției f. Funcția f se numește *continuă pe* $\mathcal{X}$ dacă este continuă în orice punct al lui $\mathcal{X}$. Se spune, pe scurt, că f este *continuă* sau, precizînd topologia, că f este *τ-continuă*. Fie $\mathcal{B}$ o bază pentru topologia lui $\mathcal{Y}$. Afirmațiile următoare sînt echivalente: i) f este continuă; ii) Pentru orice mulțime deschisă $D \subset \mathcal{Y}$, $f^{-1}(D)$ este deschisă în $\mathcal{X}$; iii) Pentru orice mulțime $D \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(D)$ este deschisă în $\mathcal{X}$; iv) Pentru orice mulțime închisă $F \subset \mathcal{Y}$, $f^{-1}(F)$ este închisă în $\mathcal{X}$; v) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ pentru orice $A \subset \mathcal{X}$; vi) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$ pentru orice $B \subset \mathcal{Y}$. Fie $A \subset \mathcal{X}$. Se spune că f este continuă pe mulțimea A dacă restricția lui f la A este continuă pe mulțimea A înzestrată cu topologia indusă. Dacă funcția f este continuă pe $\mathcal{X}$ atunci f este continuă pe orice submulțime a lui $\mathcal{X}$. Funcția f poate fi continuă pe o mulțime A ($\neq \emptyset$) fără a fi continuă în vreun punct al lui $\mathcal{X}$ (v. Ex. 2°). Imaginea printr-o **f.c.** a unei mulțimi cvasicompacte este o mulțime cvasicompactă. Dacă spațiile în care acționează funcția sînt separate această afirmație devine: imaginea printr-o **f.c.** a unei mulțimi compacte este o mulțime compactă. Imaginea printr-o **f.c.** a unei mulțimi conexe este o mulțime conexă. Compunerea a două **f.c.** este o **f.c.** O funcție f continuă, bijectivă și pentru care f^{-1} este continuă se numește *homeomorfism* (sau *omeomorfism*). Dacă funcția f are proprietatea că pentru orice șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent către x_0, șirul $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $f(x_0)$, se spune că f este *secvențial continuă în punctul* x_0. Dacă f este secvențial continuă în orice punct, se spune că f este *secvențial continuă* (pe $\mathcal{X}$). Pentru precizarea topologiei se spune *secvențial τ-continuă*. Dacă funcția f este continuă în punctul x_0, atunci ea este secvențial continuă în acel punct. Dacă în x_0 este satisfăcută prima axiomă de numărabilitate iar funcția f este secvențial continuă în punctul x_0, atunci f este continuă în x_0. Ex.: 1° Fie pe mulțimea $\mathcal{X}$ topologiile τ_1 și τ_2. Aplicația identică $i(x) = x$, $i: (\mathcal{X}, \tau_1) \to (\mathcal{X}, \tau_2)$ este continuă dacă și numai dacă $\tau_2 \leqslant \tau_1$. 2° Funcția caracteristică a mulțimii numerelor raționale este continuă pe mulțimea numerelor raționale și este discontinuă în orice punct. 3° Fie $\mathcal{X}$ o mulțime infinită și τ_ω topologia pe $\mathcal{X}$ în care mulțimile deschise sînt mulțimea vidă și mulțimile a căror complementară este cel mult numărabilă. Fie σ topologia discretă pe $\mathcal{X}$. Atunci aplicația identică $i(x) = x$, $i: (\mathcal{X}, \tau_\omega) \to (\mathcal{X}, \sigma)$ este secvențial continuă dar nu este continuă. (*Gh.Gr.*)

funcție crescătoare v. funcție monotonă

funcție cu proprietatea lui Darboux, funcție $f: I \to \mathbb{R}$ (I interval $\subset \mathbb{R}$) pentru care fiind date $x, y \in I$ și o valoare α cuprinsă între $f(x)$ și $f(y)$, există un punct z între x și y astfel încît $f(z) = \alpha$. Orice funcție $f: I \to \mathbb{R}$ este suma a două **f.p.D.** și limita unui șir convergent de **f.p.D.** (W. Sierpiński). O **f.p.D.** nu admite discontinuități de prima speță. Există **f.p.D.** discontinue în fiecare punct, dar orice funcție $f: I \to \mathbb{R}$ continuă are proprietatea lui Darboux. (*S.M.*)

funcție cu variație mărginită generalizată în sens larg, funcție $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde E este o reuniune cel mult numărabilă de mulțimi astfel încît pe fiecare mulțime în parte f este cu variație mărginită în sens larg. Orice funcție diferențiabilă $f: I \to \mathbb{R}$ este **f.v.m.g.s.l.** pe I, unde I este interval. Dacă f este măsurabilă Lebesgue și este **f.v.m.g.s.l.** pe E, atunci f este aproximativ derivabilă a.p.t. pe E. (*S.M.*)

funcție cu variație mărginită în sens larg (pe E), funcție $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca $\sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_n) - f(a_n)| \right\} < \infty$ pentru toate șirurile $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale fără puncte interioare comune, cu extremitățile în E. Condiție echivalentă: Există un număr real M astfel încît pentru orice sistem finit de intervale $[a_i, b_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, cu extremitățile în E și fără puncte interioare comune avem $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < M$. (*S.M.*)

funcție cu variație mărginită în sens restrîns Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ și fie $E \subset [a, b]$. Funcția f este **f.v.m.s.r.** pe E dacă $\sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega(f; [a_n, b_n]) \right\} < \infty$ pentru toate șirurile $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale fără puncte interioare comune, cu extremitățile în E. (Prin $\omega(f; [a_n, b_n])$ s-a notat oscilația funcției f pe $[a_n, b_n]$), Dacă $E = [a, b]$, atunci f este **f.v.m.s.r.** dacă și numai dacă f este cu variație mărginită în sens larg pe E. Proprietatea **f.v.m.s.r.** angajează nu numai comportamentul lui f pe E, ci și comportamentul lui f pe $[a, b] \setminus E$. Se poate lucra și cu sume finite, ca în definiția funcției cu variație mărginită în sens larg. (*S.M.*)

funcție cu variație mărginită pe un interval din $\mathbb{R}$, funcție $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încît mulțimea variațiilor lui f relative la diferite diviziuni ale lui $[a, b]$ să fie majorată. Punem $v_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$, unde $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$. Proprietatea revine la existența unui M real astfel încît $v_\Delta(f) < M$ pentru orice Δ. Conform unei teoreme a lui Jordan, orice funcție cu variație mărginită pe $[a, b]$ este diferența a două funcții monotone pe $[a, b]$. O teoremă a lui Lebesgue, după care orice funcție reală monotonă pe $[a, b]$ este derivabilă a.p.t. pe $[a, b]$, conduce la derivabilitatea a.p.t. a funcțiilor cu variație mărginită. (*S.M.*)

funcție cvasiintegrabilă în raport cu o măsură Radon v. integrala superioară și integrala inferioară (în raport cu o măsură Radon)

funcție de definiție (pentru o mulțime deschisă cu frontiera de clasă C^r) **v. pseudoconvexitate**

funcție de exhaustiune v. pseudoconvexitate, problema lui Levi

funcție de latice v. funcție modulară

funcție de mulțime, funcție $m: \mathcal{A} \to X$, unde $\mathcal{A}$ este o clasă de părți ale unei mulțimi T și X este o mulțime oarecare. Vom presupune că X are structură de semigrup comutativ cu element unitate: operația internă se va nota cu $+$, iar elementul unitate cu 0. De exemplu, putem lua $X = \overline{\mathbb{R}}_+$ (cu convenția $a + \infty = \infty + a = \infty$), în care caz m se numește **f.m.** *pozitivă*. Putem lua $X = \overline{\mathbb{R}}\setminus\{-\infty\}$ (cu convenția $\infty + a = a + \infty = \infty$) sau $X = \overline{\mathbb{R}}\setminus\{\infty\}$ (cu convenția $-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$). În aceste cazuri obținem o **f.m.** *cu semn*. Dacă $X \subset \mathbb{R}$ spunem că m este o **f.m.** *finită*. O **f.m.** $m\colon \mathscr{A} \to X$ se numește:

a) **F.m.** *aditivă* dacă $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ pentru orice două mulțimi A și B din $\mathscr{A}$ care au proprietățile $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup B \in \mathscr{A}$.

b) **F.m.** *finit aditivă* dacă $m\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} m(A_i)$ pentru orice familie finită $\{A_i\}_{i\in I}$ de mulțimi A_i din $\mathscr{A}$ care sînt mutual disjuncte (*i.e.* $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru orice i și j în I, $i \neq j$) și care au reuniunea în $\mathscr{A}$. Aici să presupune că familia de mulțimi este nevidă (*i.e.* $I \neq \emptyset$). Dacă $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ atunci scriem de multe ori $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ în loc de $\bigcup_{i \in I} A_i$ și $\sum_{i=1}^{n} m(A_i)$ în loc de $\sum_{i\in I} m(A_i)$ și egalitatea din definiție devine $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.

c) **F.m.** *crescătoare* dacă $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ și avem implicația: A, B în $\mathscr{A}$ și $A \subset B \Rightarrow m(A) \leqslant m(B)$.

d) **F.m.** *subaditivă* dacă $X \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ și avem $m(A \cup B) \leqslant m(A) + m(B)$ pentru orice A, B în $\mathscr{A}$ cu $A \cup B \in \mathscr{A}$.

d') **F.m.** *supraaditivă* dacă $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ și avem $m(A \cup B) \geqslant m(A) + m(B)$ pentru orice A, B în $\mathscr{A}$ cu $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup B \in \mathscr{A}$.

e) **F.m.** *finit subaditivă* dacă $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ și avem $m\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} m(A_i)$ pentru orice familie finită nevidă $\{A_i\}_{i\in I}$ de mulțimi A_i din $\mathscr{A}$ cu $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$. Dacă $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, inegalitatea precedentă se mai scrie $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant$ $\leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.

e') **F.m.** *finit supraaditivă* dacă $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ și avem $m\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \geqslant \sum_{i\in I} m(A_i)$ pentru orice familie finită nevidă $\{A_i\}_{i\in I}$ de mulțimi A_i din $\mathscr{A}$, mutual disjuncte, cu $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$. Dacă $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, inegalitatea precedentă se mai scrie $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.

f) **F.m.** *substractivă* dacă pentru orice mulțime A, B din $\mathscr{A}$ cu $B \subset A$ și $A \setminus B \in \mathscr{A}$ avem $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$, în cazul cînd scăderea $m(A) - m(B)$ are sens, *i.e.* există un element unic $x \in X$ astfel încît $x + m(B) = m(A)$; în acest caz se ia, prin definiție, $m(A) - m(B) = x$.
Celelalte tipuri de **f.m.** se vor defini impunînd condiții suplimentare asupra lui X. Anume, este necesar să putem defini serii de forma $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, unde $\{x_n\}$ este un șir de elemente din X. De exemplu: i) Cazul $X = \overline{\mathbb{R}}_+$; atunci atribuim

seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suma $+\infty$ dacă există un $x_n = \infty$, sau dacă toți x_n sînt finiți și seria este divergentă. Atribuim seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suma sa obișnuită dacă toți x_n sînt finiți și seria este convergentă; ii) Cazul $X = \overline{\mathbb{R}}\setminus\{-\infty\}$ sau $X = \overline{\mathbb{R}}\setminus\{\infty\}$. Fie, de exemplu, $X = \overline{\mathbb{R}}\setminus\{-\infty\}$. Atunci atribuim seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suma $+\infty$ dacă există un $x_n = \infty$. Dacă toți termenii x_n sînt finiți, atunci sau seria este divergentă cu limita șirului sumelor parțiale egală cu ∞, în care caz i se atribuie suma $+\infty$, sau seria este convergentă și suma sa este suma obișnuită; iii) Cazul cînd X este un grup topologic față de operația $+$ (în particular X poate fi spațiu normat). Atunci atribuim seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suma sa obișnuită dacă seria este convergentă.

g) **F.m.** *numărabil aditivă* (sau **f.m.** *σ-aditivă*, sau **f.m.** *complet aditivă*) dacă $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ pentru orice șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi mutual disjuncte format cu mulțimi $A_n \in \mathscr{A}$ și astfel încît $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$. Se remarcă o proprietate de comutativitate: dacă $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o bijecție, atunci, în condițiile de mai sus, trebuie să avem $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_{p(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

h) **F.m.** *numărabil subaditivă* (resp. *supraaditivă*) dacă $X = \overline{\mathbb{R}}_+$ și

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \left(\text{resp. } m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)\right)$$

pentru orice șir de mulțimi $\{A_n\}_n$ format cu mulțimi $A_n \in \mathscr{A}$ și astfel încît $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$. Altă denumire: **f.m.** *σ-subaditivă* (resp. *σ-supraaditivă*).

i) **F.m.** *continuă superior* (resp. *inferior*) dacă $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n m(A_n)$ pentru orice șir crescător de mulțimi $\{A_n\}_n$ format cu mulțimi $A_n \in \mathscr{A}$ și astfel încît $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$ $\left(\text{resp. } m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n m(A_n)\right.$ pentru orice șir descrescător de mulțimi $\{A_n\}_n$ format cu mulțimi $A_n \in \mathscr{A}$ și astfel încît $\left.\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}\right)$.
Dacă X este una din mulțimile $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\overline{\mathbb{R}}\setminus\{-\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}\setminus\{\infty\}$ sau X este un spațiu normat, vom spune că **f.m.** $m\colon \mathscr{A} \to X$ este o **f.m.** *mărginită* dacă mulțimea $\{m(A) \mid A \in \mathscr{A}\}$ este mărginită. Vom spune că m este **f.m.** *local mărginită* dacă $\emptyset \in A$ și pentru orice $A \in \mathscr{A}$ mulțimea $\{m(B) \mid B \in \mathscr{A}, B \subset A\}$ este mărginită. O **f.m.** $m\colon \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numește **f.m.** *σ-finită* dacă pentru orice $A \in \mathscr{A}$

există un șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi din $\mathcal{A}$ cu $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$ și $m(A_n) < \infty$ pentru orice n; m se numește **f.m.** *total σ-finită* dacă există un șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi din $\mathcal{A}$ cu $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = T$ și $m(A_n) < \infty$ pentru orice n. Pentru orice **f.m.** $m: \mathcal{A} \to X$ și orice $A \in \mathcal{A}$ putem considera clasa de părți $\mathcal{A}_A = \{B \in \mathcal{A} \mid B \subset A\}$. Atunci, dacă $\mathcal{A}_A$ este nevidă, **f.m.** $m_A: \mathcal{A}_A \to X$, definită prin $m_A(B) = m(B)$ se numește *restricția* lui m la A sau *relativizarea* lui m la A. Dacă $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sînt clase de părți ale lui T și avem $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, vom spune că o **f.m.** $n: \mathcal{B} \to X$ extinde pe $m: \mathcal{A} \to X$ sau că n este o *extensie* a lui m dacă $m(A) = n(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$. Cel mai important exemplu de **f.m.** este măsura (v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn, măsură vectorială.** (*I.C.*)

funcție de pătrat integrabil (în raport cu o măsură) v. **spații** L^p

funcție de pătrat integrabil (în raport cu o măsură Radon) v. **spații** L^p, **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)

funcție de prima clasă Baire (pe X), funcție $f: X \to Y$, unde X și Y sînt spații topologice astfel încît să existe un șir $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funcții continue care tinde către f pe X. În cazul $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, René Baire a demonstrat că punctele de discontinuitate ale unei **f.p.c.B.** formează o mulțime slabă (= de prima categorie). Funcțiile cu variație mărginită și derivatele finite sînt **f.p.c.B.** (*S.M.*)

funcție de putere p-integrabilă (în raport cu o măsură) v. **spații** L^p

funcție de putere p-integrabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)

funcție de tip pozitiv Fie A o algebră Banach complexă cu involuție $x \mapsto x^*$. O aplicație liniară $T: A \to \mathbb{C}$ se numește *funcțională de tip pozitiv* pe A dacă are proprietatea că $T(xx^*) \geqslant 0$ pentru orice x în A. Vom considera un grup topologic local compact separat și comutativ G cu unitate e și măsura Haar μ. Acesta ne furnizează algebra grupală $A = L^1(\mu)$ (v. **algebră grupală**) înzestrată cu involuția $\widetilde{f} \mapsto \widetilde{f}^*$ definită de $\widetilde{f}^* = \widetilde{g}$, unde $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $g(x) = \overline{f(x^{-1})}$ pentru orice x în G (aici $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z). Măsurile Radon pe G care, ca funcționale liniare pe $L^1(\mu)$ (prin prelungire) sînt funcționale de tip pozitiv, se numesc *măsuri de tip pozitiv* (pe G). De exemplu, măsura Haar μ este de tip pozitiv. O funcție $f: G \to \mathbb{C}$ se numește **f.t.p.** (pe G) dacă este local μ-integrabilă și măsura $m = f\mu$ este de tip pozitiv. Este clar că dacă $f' = f$ **μ-a.p.t.**, rezultă că și f' este de tip pozitiv, de aceea vom vorbi și de clase de echivalentă de tip pozitiv. Orice caracter u din grupul caracterelor $\hat{G}$ al lui G este o **f.t.p.** pe G. Dacă $\widetilde{f} \in L^1(\mu)$, atunci $\widetilde{f}^* \in L^1(\mu)$ și se arată că $\widetilde{f} * \widetilde{f}^*$ este o clasă de echivalență de tip pozitiv.

Teorema lui Bochner. Există o aplicație bijectivă $V: \mathcal{M}^1_+(\hat{G}) \to \mathcal{BC}_+(G)$, unde $\mathcal{M}^1_+(\hat{G})$ este mulțimea tuturor măsurilor Radon pozitive și mărginite pe $\hat{G}$, iar $\mathcal{BC}_+(G)$ este mulțimea tuturor funcțiilor continue și mărginite de tip pozitiv pe G. Anume, pentru orice m din $\mathcal{M}^1_+(\hat{G})$ avem $V(m) = f$, unde $f(x) = \int_{\hat{G}} u(x)\, \mathrm{d}m(u)$.

Ex.: Luăm $G = \mathbb{R}^n$ cu structura de grup aditiv și măsura Lebesgue drept măsură Haar. Folosind teorema lui Bochner, obținem funcțiile continue și mărginite de tip pozitiv f după cum urmează. Se consideră o măsură Radon pozitivă pe pe $\mathbb{R}^n$ și această măsură generează funcția $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i} \langle x, y \rangle}\, \mathrm{d}m(y)$. (*I.C.*)

funcție derivabilă Funcția $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *derivabilă* într-un punct a din A de acumulare pentru A dacă există și este finită limita în a a funcției $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Orice **f.d.** este continuă, dar reciproca nu este adevărată. Interpretare fizică: viteza instantanee a unui mobil, densitatea punctuală a unei distribuții de masă; interpretare geometrică: panta tangentei la curbă. Înlocuind mai sus limita prin limita la stînga, respectiv limita la dreapta, obținem derivabilitatea la stînga și derivabilitatea la dreapta. (*S.M.*)

funcție derivată Fie I un interval din $\mathbb{R}$. Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este o derivată finită dacă există o funcție $F: I \to \mathbb{R}$, derivabilă, astfel încît $F' = f$ pe I. Funcția $f: I \to \overline{\mathbb{R}}$ este o derivată dacă există $F: I \to \mathbb{R}$ care admite în fiecare punct din I derivată finită sau infinită și $F' = f$ pe I. **F.d.** finite au proprietatea lui Darboux, sînt de prima clasă Baire și au proprietatea lui Denjoy: Orice mulțime de forma $\{x;\ x \in I,\ \alpha < f(x) < \beta\}$ este sau vidă sau de măsura Lebesgue strict pozitivă. (*S.M.*)

funcție descrescătoare v. **funcție monotonă**

funcție diferențiabilă v. **diferențiala, diferențiala funcțiilor numerice**

funcție dublu periodică v. **funcție eliptică**

funcție eliptică, o funcție meromorfă f pe $\mathbb{C}$ cu proprietatea că există o latice Γ în $\mathbb{C}$ astfel încît $f(z + \gamma) = f(z)$ pentru $z \in \mathbb{C}$ și $\gamma \in \Gamma$, *i.e.* f factorizează la o aplicație olomorfă $\dot{f}: \mathbb{C}/\Gamma \to \widetilde{\mathbb{C}}$; mai precis, în această situație, se spune că f este eliptică *relativ* la Γ sau Γ-*eliptică*. Sin.: *funcție dublu periodică*. Astfel, o **f.e.** este în esență același lucru cu o funcție meromorfă pe un tor complex de dimensiune 1, *i.e.* pe o curbă eliptică. Fie Γ o latice fixată în $\mathbb{C}$. O bază a lui Γ este o pereche (γ_1, γ_2) de elemente din Γ cu proprietatea că $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2$, *i.e.* pentru orice $\gamma \in \Gamma$, există numere întregi m_1 și m_2, univoc determinate de γ, astfel încît $\gamma = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2$. Existența unei baze a lui Γ este un fapt general (v. **latice de perioade**). Fie (γ_1, γ_2) o bază fixată a lui Γ, nu în mod necesar canonică. Considerăm paralelogramul $P = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2$ cu $0 \leqslant t_1 < 1,\ 0 \leqslant t_2 < 1\} \cup \{\gamma_1\}$. Dacă f este o funcție Γ-eliptică se mai spune că P este un *paralelogram perioadă* al lui f. Iată cîteva proprietăți generale ale funcțiilor Γ-eliptice: 1) Orice funcție Γ-eliptică fără poluri este o constantă; 2) Suma reziduurilor polurilor lui f conținute în P este zero; 3) Fie f o funcție Γ-eliptică neconstantă, $a_1, \ldots, a_n$ zerourile lui f conținute în P și $b_1, \ldots, b_m$ polurile lui f conținute în P. Presupunem că fiecare zero și fiecare pol apare în această scriere de atîtea ori cît este ordinul său de multiplicitate. Atunci $m = n$ și $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \in \Gamma$. Numărul întreg n astfel definit se numește *ordinul* funcției Γ-eliptice neconstante f. Din 1) și 2) reultă imediat că $n \geqslant 2$ și că o funcție de ordin 2 are fie un pol dublu cu reziduu zero, fie două poluri simple cu reziduuri opuse. Datorăm lui K. Weierstrass o teorie eleganată, clasică, a funcțiilor Γ-eliptice avînd ca funcție fundamentală o funcție Γ-eliptică de ordin 2 cu pol dublu. Această funcție fundamentală este funcția $\mathfrak{p}$ a lui Weierstrass și se definește prin dezvoltarea euleriană:

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma}{}' \left(\frac{1}{(z - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right),$$

unde simbolul $\sum'$ are semnificația că sumarea se face după toți indicii $\gamma \in \Gamma$ astfel încît $\gamma \neq 0$. Este ușor de văzut că, pentru orice compact $K \subset \mathbb{C}$, dacă în seria din dreapta omitem termenii care corespund polilor $\gamma \in K$, atunci seria rămasă este uniform convergentă pe K. Astfel funcția $\mathfrak{p}$ este definită și este o funcție meromorfă pe $\mathbb{C}$. În plus, se vede ușor că $\mathfrak{p}$ este o funcție Γ-eliptică de ordin $n = 2$ cu pol dublu. O proprietate remarcabilă a funcției $\mathfrak{p}$ este că ea verifică ecuația diferențială

$$\left(\frac{d\mathfrak{p}}{dz}(z)\right)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2\mathfrak{p}(z) - g_3,$$

unde $g_2 = 60G_2$ și $g_3 = 140G_3$, iar $G_k = \sum_{\gamma}' \frac{1}{\gamma^{2k}}$, $k = 2, 3$. Dacă punem $w = \mathfrak{p}(z)$, ecuația diferențială a lui $\mathfrak{p}$ se scrie

$$dz = \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}}.$$

Aceasta înseamnă că funcția $\mathfrak{p}$ este inversa integralei eliptice de prima speță cu invarianții g_2 și g_3. Funcția $\mathfrak{p}$ joacă în teoria f.e. un rol analog celui jucat de funcția $\frac{1}{\sin^2 z}$ în teoria funcțiilor simplu periodice cu perioada 2π. Analogia aceasta poate fi continuată prin construcția unor analoage ale funcțiilor ctg z și sin z. Acestea sînt *funcțiile* ζ *și* σ *ale lui Weierstrass* definite prin

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\gamma}' \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2}\right),$$

$$\sigma(z) := z \prod_{\gamma \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma^2}}.$$

Rezultă că ζ este o funcție meromorfă cu poluri simple în punctele $\gamma \in \Gamma$, iar σ o funcție întreagă cu zerouri în punctele lui Γ. Funcțiile $\zeta(z + \gamma_1) - \zeta(z)$ și $\zeta(z + \gamma_2) - \zeta(z)$ sînt Γ-eliptice și fără poluri, deci constante. Aceste constante se notează η_1 și η_2; ele satisfac *relația lui Legendre*: $\eta_1\gamma_2 - \eta_2\gamma_1 = 2\pi i$. De asemenea, avem $\sigma(z+\gamma_1) = -\sigma(z)\, e^{\eta_1\left(z + \frac{\gamma_1}{2}\right)}$ și $\sigma(z+\gamma_2) = -\sigma(z)\, e^{\eta_2\left(z + \frac{\gamma_2}{2}\right)}$. Rezultă că funcția σ este un exemplu de funcție „theta". O *funcție theta* (relativ la Γ) este o funcție întreagă cu proprietatea că, pentru orice $\gamma \in \Gamma$, $\theta(z+\gamma) = \theta(z)e^{az+b}$, $z \in \mathbb{C}$, cu $a, b \in \mathbb{C}$ depinzînd de γ. Orice funcție Γ-eliptică este egală, pînă la un factor constant, cu un produs finit de forma $\prod_n \frac{\sigma(z - a_n)}{\sigma(z - b_n)}$.

De asemenea au loc următoarele două teoreme:
Teorema de adunare.

$$\mathfrak{p}(z + a) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{p}'(z) - \mathfrak{p}'(a)}{\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(a)}\right)^2 - \mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(a).$$

Teorema de duplicație. $\mathfrak{p}(2z) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\mathfrak{p}''(z)}{\mathfrak{p}'(z)}\right)^2 - 2\mathfrak{p}(z).$ (*M.J.*)

funcție esențial integrabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **integrala esențială** (în raport cu o măsură Radon), **măsură Radon vectorială**

funcție esențial μ**-integrabilă**, **integrala esențială** (în raport cu o măsură Radon)

funcție esențial mărginită v. **spații** L^p

funcție esențial mărginită (în raport cu o măsură Radon). v. **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)

funcție etajată v. **funcție măsurabilă**

funcție etajată μ**-integrabilă** v. **integrala Lebesgue abstractă**

funcție integrabilă (în raport cu o măsură) v. **integrala Lebesgue abstractă, integrala Bochner, integrala Bartle, integrala Dobrakov, integralele Dunford; Glefand; Pettis**

funcție integrabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)

funcție μ**-integrabilă** v. **integrala Lebesgue abstractă, spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)

funcție integrabilă Lebesgue v. **integrala Lebesgue abstractă**

funcție integrabilă Pettis (în raport cu o măsură) v. **integrala Dunford; Gelfand; Pettis**

funcție invariantă (la o transformare) v. **teorie ergodică**

funcție în scară O funcție $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ este o **f.s.** dacă există o diviziune $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_n = b$ a intervalului (a, b) în intervale parțiale (a_{i-1}, a_i), astfel încît $f((a_{i-1}, a_i)) = \{y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Altfel spus, f este constantă în fiecare dintre intervalele (a_{i-1}, a_i). (*S.M.*)

funcție întreagă, o funcție olomorfă pe $\mathbb{C}$, *i.e.* o funcție $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reprezentabilă printr-o serie de puteri $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, cu raza de convergență $R = \infty$. Polinoamele în z sînt cele mai simple **f.î.** Funcția exponențială și funcțiile trigonometrice cos z și sin z sînt de asemenea **f.î. F.î.** pot fi considerate ca un fel de „polinoame" de grad infinit. În acest sens, proprietățile simple ale polinoamelor de o variabilă complexă sugerează probleme, în general dificile, pentru teoria **f.î.** Una dintre cele mai importante este problema existenței de **f.î.** cu zerouri date și multiplicități ale zerourilor date și, în legătură cu aceasta, problema factorizării **f.î.** în factori simpli, similare factorizării $P(z) = a_0(z - z_1) \ldots (z - z_n)$ a unui polinom de grad n. Să observăm pentru început că mulțimea $f^{-1}(0)$ a zerourilor unei **f.î.** neconstante este închisă și în plus discretă (principiul zerourilor izolate), în particular cel mult numărabilă. În cazul cînd această mulțime este finită, problema factorizării lui f este simplă și avem:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

unde m este un număr întreg ≥ 0, g o **f.î.** iar a_n numere complexe, $n = 1, \ldots, N$. Pentru cazul general, se consideră **f.î.** E_p, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definite prin $E_0(z) = 1 - z$ și

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) \quad \text{pentru } p \geq 1;$$

aceste funcții se numesc *factori elementari ai lui Weierstrass*. Cu aceste pregătiri, răspunsul la problemele de mai sus sînt date de următoarele două teoreme ale lui Weierstrass.

Teorema de existență. Fie $\{a_n\}_{n \geq 1}$ un șir de numere complexe nenule astfel încît $\lim |a_n| = \infty$, și fie $\{p_n\}$ un șir de numere întregi ≥ 0 astfel încît $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n + 1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty$ pentru orice număr real $R > 0$. Atunci: 1) Produsul infinit $\prod_{n \geq 1} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ este normal convergent pe orice mulțime compactă

$K\subset\mathbb{C}$ care nu conține puncte a_n; 2) Funcția $f(z):=\prod_{n\geqslant1}E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ este întreagă, $f(z)\neq0$ cînd $z\neq a_n$, $n\in\mathbb{N}$, iar dacă numărul complex a apare în șirul $\{a_n\}$ de p ori exact, atunci a este un zero de ordin p al lui f.
F.î. f din teorema precedentă se numește *produsul canonic al lui Weierstrass asociat șirului* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Teorema de factorizare. Orice **f.î.** f admite o factorizare de forma

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n\geqslant1}E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

unde m este un număr întreg $\geqslant0$, g o **f.î.**, a_n numere complexe nenule și p_n numere întregi $\geqslant0$ convenabile.
Factorizarea lui f nu este unică, ea depinde de alegerea șirului $\{p_n\}$; se observă că se poate lua, de exemplu, $p_n=n$. Cazul cel mai interesant este acela cînd putem lua pentru șirul $\{p_n\}$ un șir constant. În această direcție Hadamard a obținut o teoremă de factorizare remarcabilă pe care a utilizat-o în demonstrația sa celebră a teoremei numerelor prime (v. **funcția** ζ). Teorema lui Hadamard se exprimă printr-o relație între doi invarianți asociați unei **f.î.**, și anume *genul* și *ordinul*. O **f.î.** f se spune că este de *gen finit* dacă există un număr întreg $h\geqslant0$ astfel încît f să admită o factorizare Weierstrass de forma

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n\geqslant1}E_h\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

unde m este un număr întreg iar g un polinom de grad $\leqslant h$; cel mai mic dintre aceste numere h se numește *genul* lui f. Dacă nu există numere întregi h cu proprietatea indicată mai sus, atunci se spune că f este de *gen infinit*; în acest caz genul h al lui f se definește prin $h:=\infty$. Ordinul lui f este elementul $\lambda\in(0,\infty]$ definit prin

$$\lambda:=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r},\quad\text{unde } M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|,\ r>0.$$

De pildă, $\cos z$, $\sin z$ și e^z sînt **f.î.** de ordin 1; $\cos\sqrt{z}$ o **f.î.** de ordin 1/2 și, pentru orice $n\geqslant1$, e^{z^n} o **f.î.** de ordin n.
Teorema lui Hadamard. Genul h și ordinul λ ale unei **f.î.** satisfac inegalitatea dublă $h\leqslant\lambda\leqslant h+1$. În particular, orice **f.î.** de ordin finit admite o factorizare Weierstrass de forma

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n\geqslant1}E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

cu $h=[\lambda]$, partea întreagă a lui λ, m un număr întreg $\geqslant0$ și g un polinom de grad $\leqslant h$. (*M.J.*)

funcție local integrabilă (Bochner) v. **integrala Bochner**

funcție local integrabilă (în raport cu o măsură) v. **măsuri definite prin densități**

funcție local integrabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **măsuri Radon definite prin densități**

funcție local μ**-integrabilă** v. **măsuri definite prin densități, măsuri Radon definite prin densități**

funcție local lipschitziană în al doilea argument v. **problema lui Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale**

funcție local neglijabilă (în raport cu o măsură) v. **prelungirea măsurilor pozitive definite pe un clan**

funcție local neglijabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **prelungirea măsurilor Radon**

funcție măsurabilă Vom considera două spații măsurabile $(T,\mathcal{T})$ și $(S,\mathcal{S})$. O funcție $f\colon T\to S$ care are proprietatea că $f^{-1}(A)\in\mathcal{T}$ pentru orice $A\in\mathcal{S}$ se numește *funcție* $(\mathcal{T},\mathcal{S})$*-măsurabilă* sau *aplicație* $(\mathcal{T},\mathcal{S})$*-măsurabilă* sau **f.m.** *în raport cu σ-algebrele* $\mathcal{T}$ *și* $\mathcal{S}$. Dacă $\mathcal{A}$ este o clasă de părți ale lui S astfel încît $\mathcal{S}$ coincide cu σ-algebra generată de $\mathcal{A}$, atunci f este $(\mathcal{T},\mathcal{S})$-măsurabilă dacă și numai dacă $f^{-1}(A)\in\mathcal{T}$ pentru orice A din $\mathcal{A}$. De obicei S este un spațiu topologic iar $\mathcal{S}$ tribul părților boreliene ale lui S. În acest caz se spune că f este o *funcție* $\mathcal{T}$*-măsurabilă* sau **f.m.** *în raport cu* $\mathcal{T}$. Dacă T și S sînt spații topologice iar $\mathcal{T}$ și $\mathcal{S}$ sînt respectivele triburi ale mulțimilor boreliene, o funcție $(\mathcal{T},\mathcal{S})$-măsurabilă se mai numește *funcție boreliană* sau **f.m.** Borel. (În particular, orice funcție continuă este boreliană.) Cazul cel mai întîlnit în aplicații este acela cînd $(T,\mathcal{T})$ este un spațiu măsurabil abstract iar S este unul din spațiile topologice $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sau $\overline{\mathbb{R}}$ (de exemplu, dacă $S=\overline{\mathbb{R}}$, funcția f este $\mathcal{T}$-măsurabilă dacă și numai dacă $f^{-1}(\{\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ și $f^{-1}(a,\infty)$ (sînt mulțimi din $\mathcal{T}$ pentru orice număr real a). Vom nota cu Γ corpul numerelor ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Revenind la cazul general, vom considera o mulțime nevidă $A\in\mathcal{T}$ și vom spune că o funcție $f\colon T\to S$ este o funcție $(\mathcal{T},\mathcal{S})$*-măsurabilă pe* A dacă restricția lui f la A este funcție $(\mathcal{T}\cap A,\mathcal{S})$-măsurabilă, unde $\mathcal{T}\cap A=\{B\cap A\mid B\in\mathcal{T}\}$. Dacă S este spațiu topologic și $\mathcal{S}$ este tribul părților boreliene avem o funcție $\mathcal{T}$*-măsurabilă pe* A iar dacă T,S sînt spații topologice, $\mathcal{T}$ și $\mathcal{S}$ respectivele triburi ale mulțimilor boreliene iar A este mulțime boreliană, avem o *funcție boreliană pe* A (sau o **f.m.** *Borel pe* A). Dacă σ-algebrele $\mathcal{T}$ și $\mathcal{S}$ sînt subînțelese, vorbim de o **f.m.** Unii autori consideră un spațiu măsurabil $(T,\mathcal{T})$ în sensul mai general, anume $\mathcal{T}$ este un trib de părți ale lui T cu proprietatea că reuniunea tuturor mulțimilor din $\mathcal{T}$ este T și numesc *funcție* $\mathcal{T}$*-măsurabilă* orice funcție $f\colon T\to\overline{\mathbb{R}}$ (sau $\mathbb{C}$) cu proprietatea că $f^{-1}(A\setminus\{0\})\in\mathcal{T}$ pentru orice mulțime boreliană A. În cazul cînd $\mathcal{T}$ este σ-algebră, noțiunea coincide cu cea introdusă anterior. Dacă $(T,\mathcal{T})$ este un spațiu măsurabil, $f,g\colon T\to\overline{\mathbb{R}}$ (sau Γ) sînt funcții $\mathcal{T}$-măsurabile și $a\in\Gamma$ rezultă că funcțiile $f+g$, $f-g$, af și fg sînt de asemenea funcții $\mathcal{T}$-măsurabile (cu convențiile de calcul $\infty-\infty=0$, $0\cdot\infty=0$ etc.). În cazul cînd $f\colon T\to\overline{\mathbb{R}}$ este o funcție $\mathcal{T}$-măsurabilă, rezultă că *partea pozitivă* f^+ și *partea negativă* f^-, precum și *modulul* $|f|$ sînt **f.m.** Aici $f^+\colon T\to\overline{\mathbb{R}}$, $f^+(x)=\max(f(x),0)$; $f^-\colon T\to\overline{\mathbb{R}}$, $f^-(x)=-\min(f(x),0)$; $|f|\colon T\to\overline{\mathbb{R}}$, $|f|(x)=|f(x)|=\max(f^+(x),f^-(x))$. Fie acum o mulțime nevidă X și un clan $\mathcal{T}_0$ de părți ale lui T. O funcție $f\colon T\to X$ se numește *funcție* $\mathcal{T}_0$*-etajată cu valori în* X sau *funcție* $\mathcal{T}_0$*-simplă cu valori în* X (sau, simplu, *funcție etajată cu valori în* X, *funcție etajată*, *funcție simplă cu valori în* X, *funcție simplă*) dacă f ia numai un număr finit de valori $x_1,x_2,\dots,x_n$ și mulțimile de nivel $A_i=f^{-1}(\{x_i\})$, $i=1,2,\dots,n$, sînt din $\mathcal{T}_0$.
O funcție etajată se scrie de obicei sub forma $f=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{A_i}x_i$ sau $\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi_{A_i}$ (aici φ_{A_i} este funcția caracteristică a mulțimii A_i). Scrierea aceasta este folosită uneori și atunci cînd X nu este spațiu vectorial. De obicei, dacă $X=\Gamma$ vorbim de funcții $\mathcal{T}_0$-etajate, sau funcții etajate, precum și de funcții $\mathcal{T}_0$-măsurabile sau **f.m.** Se arată că dacă $f\colon T\to\overline{\mathbb{R}}(\Gamma)$ este o funcție $\mathcal{T}$-măsurabilă, există un șir $\{f_n\}_n$ de funcții $\mathcal{T}$-etajate astfel încît f este *limita punctuală* a

șirului $\{f_n\}$, *i.e.* $\lim\limits_n f_n(t) = f(t)$ pentru orice $t \in T$. Dacă f este funcție pozitivă, *i.e.* ia valori în $\overline{\mathbb{R}}_+$, atunci șirul $\{f_n\}_n$ poate fi ales crescător și format cu funcții $\mathcal{T}$-etajate pozitive (finite!), iar dacă f este mărginită, putem alege șirul $\{f_n\}_n$ uniform convergent la f. În general, limita punctuală a unui șir de funcții $\mathcal{T}$-măsurabile este $\mathcal{T}$-măsurabilă (schematic: $f_n \to f$, $f_n\mathcal{T}$-măsurabile $\Rightarrow$ $\Rightarrow f\mathcal{T}$-măsurabilă). Mai general, dacă $f_n, f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$, avem schematic: $f_n \to f$, $f_n\mathcal{T}$-măsurabile $\Rightarrow \limsup\limits_n f_n\mathcal{T}$-măsurabilă și $\liminf\limits_n f_n\mathcal{T}$-măsurabilă. Aici $\limsup\limits_n f_n\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ se definește prin $(\limsup\limits_n f_n)(t) = \limsup\limits_n f_n(t)$ etc. și se numește *limita superioară* a șirului de funcții f_n. Similar se definește *limita inferioară* a unui șir de funcții. (*I.C.*)

funcție măsurabilă Borel v. **funcție măsurabilă**

funcție măsurabilă în raport cu o măsură Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură și $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ (sau $\mathbb{C}$) o funcție. Se spune că f este o *funcție μ-măsurabilă* sau f este *măsurabilă în raport cu* μ dacă f este $\mathcal{T}$-măsurabilă. Dacă μ este o măsură probabilistică, se spune că f este o *variabilă aleatoare*. Mai general, dacă $\mathcal{C}$ este un clan de părți ale lui T și $\mu\colon \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o măsură pozitivă (deci numărabil aditivă), vom spune că o funcție $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ (sau $\mathbb{C}$) este *funcție μ-măsurabilă* dacă f este $\tau(\mu)$-măsurabilă, unde $\tau(\mu)$ este σ-algebra mulțimilor μ-măsurabile (v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**). În particular, dacă $T \subset \mathbb{R}^n$ este o mulțime măsurabilă Lebesgue și $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ (sau $\mathbb{C}$) este o funcție, se spune că f este o *funcție măsurabilă Lebesgue* dacă f este μ-măsurabilă, unde μ este măsura Lebesgue pe T. Mai general, să considerăm un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și un spațiu topologic separat. O funcție $f\colon T \to X$ se numește *funcție μ-măsurabilă cu valori în* X sau *funcție μ-măsurabilă* dacă are proprietățile: 1) Pentru orice mulțime deschisă (sau închisă) $A \subset X$, avem $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ (deci f este $\mathcal{T}$-măsurabilă); 2) Pentru orice $B \in \mathcal{T}$ cu $\mu(B) < \infty$, există o mulțime $M \in \mathcal{T}$ cu $\mu(M) = 0$ și o mulțime cel mult numărabilă $H \subset X$ astfel încît $f(B \setminus M) \subset \overline{H}$ (se spune că $f(B)$ este o *mulțime μ-esențial separabilă* sau o *mulțime esențial separabilă*). Este clar că o funcție $\mathcal{T}$-etajată (v. **funcție măsurabilă**) este μ-măsurabilă. În cazul particular cînd X este un spațiu metrizabil, o funcție $f\colon T \to X$ este μ-măsurabilă dacă și numai dacă: 1) Pentru orice bilă deschisă (sau închisă) $A \subset X$ avem $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$; 2) Pentru orice $B \in \mathcal{T}$ cu $\mu(B) < \infty$, $f(B)$ este o mulțime μ-esențial separabilă.

Teorema de măsurabilitate a lui Pettis. Dacă X este un spațiu vectorial normat peste $\Gamma = \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$), o funcție $f\colon T \to X$ este μ-măsurabilă dacă și numai dacă: 1) Pentru orice funcțională liniară și continuă x' din X^*, funcția $x' \circ f\colon T \to \Gamma$ este o funcție μ-măsurabilă (se spune că f este *scalar μ-măsurabilă*); 2) Pentru orice $B \in \mathcal{T}$ cu $\mu(B) < \infty$, $f(B)$ este o mulțime μ-esențial separabilă.

Alte denumiri: în cazul cînd X este un spațiu normat, o funcție $f\colon T \to X$ μ-măsurabilă se mai numește și *funcție tare μ-măsurabilă* (sau *funcție tare măsurabilă în raport cu* μ, sau simplu, *funcție tare măsurabilă*). O funcție scalar μ-măsurabilă mai este denumită uneori și *funcție slab μ-măsurabilă*, sau *funcție slab măsurabilă în raport cu* μ sau, simplu, *funcție slab măsurabilă*. Unii autori denumesc o funcție $f\colon T \to X$ *funcție slab μ-măsurabilă* o funcție $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$-măsurabilă unde $\mathcal{B}$ = tribul părților boreliene pentru topologia slabă $\sigma(X, X')$ pe X (v. **funcție măsurabilă**). Revenind la cazul cînd X este spațiu metrizabil, presupunem în plus că μ este măsură total σ-finită și considerăm o funcție $f\colon T \to X$. Dacă pentru orice mulțime $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) < \infty$ există un șir $\{f_n\}_n$

format cu funcții μ-măsurabile $f_n\colon T \to X$ astfel încît $f_n(t) \xrightarrow[n]{} f(t)$ μ-a.p.t. pe A (v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**), rezultă că f este μ-măsurabilă. Invers, dacă f este μ-măsurabilă, atunci pentru orice mulțime $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) < \infty$, există un șir $\{f_n\}_n$ format cu funcții $f_n\colon T \to X$ care sînt $\mathcal{T}$-etajate și astfel încît $f_n(t) \xrightarrow[n]{} f(t)$ μ-a.p.t. pe A. Dacă X este chiar spațiu normat, putem alege funcțiile f_n astfel încît $\|f_n(t)\| \leqslant \|f(t)\|$ pentru orice n și $t \in T$. Dacă X este metrizabil și $f(T)$ este mulțime relativ compactă, există un șir $\{f_n\}_n$ format cu funcții $f_n\colon T \to X$, $\mathcal{T}$-etajate, care converge uniform la f. Dacă X este chiar spațiu normat, putem alege $\{f_n\}_n$ astfel ca $\|f_n(t)\| \leqslant \|f(t)\|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $t \in T$. (*I.C.*)

funcție măsurabilă Lebesgue v. **funcție măsurabilă în raport cu o măsură**

funcție meromorfă, funcție continuă $f\colon D \to \widetilde{\mathbb{C}}$ (D este un domeniu în $\mathbb{C}$) pentru care există $h, g\colon D \to \mathbb{C}$, două funcții olomorfe, h diferită de funcția nulă, astfel încît $f(z) = g(z)/h(z)$ pentru orice punct z în care $h(z) \neq 0$. Mulțimea $f^{-1}(\infty)$ este o parte discretă a lui D (fără puncte de acumulare în D) iar $f\colon D \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ este olomorfă și are numai singularități polare. Această proprietate se dovedește a fi definitorie căci dacă $f\colon D \to \widetilde{\mathbb{C}}$ este o funcție continuă pentru care $f^{-1}(\infty)$ este discretă iar $f\colon D \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ este olomorfă, atunci f este meromorfă pe D. Altfel spus, dacă $A \subset D$ este o mulțime discretă iar $f\colon D \setminus A \to \mathbb{C}$ este o funcție olomorfă avînd numai singularități polare, ea se poate prelungi la o **f.m.** pe D. Ex.: Dacă $B \subset \mathbb{C}$ este un disc deschis cu centrul în a, $h(z) = (z-a)^n h_1(z)$, $g(z) = (z-a)^m g_1(z)$, unde $n, m \in \mathbb{N}$, h_1 și g_1 sînt olomorfe și nenule în B, atunci funcția f, definită prin $f(z) = h(z)/g(z)$ dacă $z \neq a$, $z \in B$, $f(a) = \infty$ dacă $n < m$, $f(a) = 0$ dacă $n > m$ și $f(a) = h_1(a)/g_1(a)$ dacă $n = m$, este o **f.m.** pe B. Dacă **f.m.** f, g coincid pe o mulțime care are un punct de acumulare în domeniul D, atunci $f \equiv g$ (*teorema de identitate pentru* **f.m.**). Cu operațiile de adunare și înmulțire definite punctual (doar pentru punctele în care funcțiile nu iau valoarea ∞), mulțimea $\mathcal{M}(D)$ a **f.m.** pe domeniul D este corp comutativ. Dacă Ω este o mulțime deschisă în $\mathbb{C}$, se spune că funcția continuă $f\colon \Omega \to \widetilde{\mathbb{C}}$ este *meromorfă pe* Ω dacă ea este meromorfă pe orice componentă conexă a lui Ω (în sensul definiției precedente), ceea ce este echivalent cu faptul că pentru orice $a \in \Omega$ există $V \subset \Omega$ un disc deschis cu centrul în a și $g, h\colon V \to \mathbb{C}$ două funcții olomorfe, $h(z) \neq 0$, $\forall z \neq a$, $z \in V$ și astfel ca $f(z) = g(z)/h(z)$ pentru orice $z \neq a$, $z \in V$. Se pot construi **f.m.** corespunzătoare unor date inițiale. Astfel, dacă A este o parte discretă a mulțimii deschise $\Omega \subset \mathbb{C}$ și dacă pentru fiecare $a \in A$ este dată

$$f_a(z) = \sum_{j=1}^{n_a} c_j(a)\,(z-a)^{-j}, \quad c_j(a) \in \mathbb{C},$$

atunci există $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ astfel încît $f\colon \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ să fie olomorfă, fiecare $a \in A$ să fie pol pentru f, iar partea principală a dezvoltării Laurent a funcției f în punctul a să fie f_a. Altfel spus, funcția f este olomorfă pe $\Omega \setminus A$ și pentru orice $a \in A$, funcția $f - f_a$ este olomorfă pe o vecinătate a lui a (*teorema Mittag-Leffler*). Fie, ca mai sus, A o parte discretă a mulțimii deschise $\Omega \subset \mathbb{C}$ și pentru fiecare $a \in A$ numărul întreg nenul n_a. Există atunci $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ astfel ca $f\colon \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ să fie olomorfă, nenulă (în fiecare punct) iar $f(z)/(z-a)^{n_a}$ să fie olomorfă și nenulă (în fiecare punct) într-o vecinătate a lui a. Există deci o **f.m.** pe Ω ale cărei zerouri și poluri sînt date apriori (*teorema lui Weierstrass*). (*Gh.Gr.*)

funcție meromorfă (pe o varietate complexă M), o funcție $m \in \mathcal{O}(D(m))$ definită pe o submulțime deschisă densă $D(m)$ a lui M și avînd proprietățile următoare: 1) Pentru orice punct $a \in M$, există o vecinătate deschisă conexă U a lui a în M și funcții olomorfe f, $g \in \mathcal{O}(U)$ cu $g \not\equiv 0$ astfel încît $m \mid U = f/g$ în sensul că $m(x) = f(x)/g(x)$ cînd $x \in U$ și $g(x) \neq 0$; 2) Dacă $a \in S(m) := M \setminus D(m)$ și dacă $m = f/g$ pe o vecinătate deschisă conexă U a lui a cu f, $g \in \mathcal{O}(U)$ și $g \not\equiv 0$, atunci $g(a) = 0$. Fie m o **f.m.** pe M; mulțimea $S(m)$ se numește *mulțimea singulară* a lui m iar elementele ei *puncte singulare* ale lui m. Dacă a este un punct singular al lui m, atunci are loc una din situațiile următoare: i) $\lim\limits_{D(m) \ni x \to a} m(x) = \infty$; ii) Pentru orice punct $b \in \widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, există un șir de puncte $x_\nu \in D(m)$ astfel încît $x_\nu \to a$ și $m(x_\nu) = b$. Punctul singular al lui m se numește *pol* în cazul i) și *punct de nedeterminare* în cazul ii). Dacă varietatea M este de dimensiune complexă $n = 1$, orice punct singular al lui m este un pol. Mulțimea $\mathcal{M}(M)$ a tuturor **f.m.** pe M are o structură evidentă de inel; inelul $\mathcal{O}(M)$ al funcțiilor olomorfe pe M este un subinel al lui $\mathcal{M}(M)$. Notăm că $\mathcal{M}(M)$ este un corp dacă și numai dacă varietatea M este conexă. Noțiunea de **f.m.** pe o varietate complexă este legată de trei probleme clasice care au jucat un rol important în dezvoltarea teoriei funcțiilor de mai multe variabile complexe. Este vorba de problemele (aditivă și multiplicativă ale) lui Cousin și de problema lui Poincaré; denumirile au fost introduse de H. Cartan. Notăm că problemele aditivă și multiplicativă ale lui Cousin sînt analoage pluridimensionale ale problemelor Mittag-Leffler și respectiv Weierstrass din teoria funcțiilor de o variabilă complexă.

Problema aditivă (sau *prima problemă*) *a lui Cousin.* Fie $\{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire deschisă a varietății complexe M și, pentru fiecare $i \in I$, m_i o **f.m.** pe U_i, *i.e.* $m_i \in \mathcal{M}(U_i)$. Presupunem că $m_i - m_j$ este o funcție olomorfă pe $U_i \cap U_j$ pentru orice pereche de indici $i, j \in I$ astfel încît $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Se cere să se găsească o **f.m.** m pe M astfel încît funcția $m - m_i$ să fie olomorfă pe U_i pentru orice $i \in I$.

Se notează prin $\mathcal{M}^*(M)$ mulțimea elementelor inversabile ale inelului $\mathcal{M}(M)$ și prin $\mathcal{O}^*(M)$ mulțimea elementelor inversabile ale inelului $\mathcal{O}(M)$.

Problema multiplicativă (sau *a doua problemă*) *a lui Cousin.* Fie $\{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire deschisă a varietății complexe M și, pentru fiecare $i \in I$, m_i o **f.m.** inversabilă pe U_i, *i.e.* $m_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$. Presupunem că $m_j m_i^{-1}$ este o funcție olomorfă inversabilă pe $U_i \cap U_j$, *i.e.* $m_j m_i^{-1} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$, pentru orice pereche de indici i, $j \in I$ astfel încît $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Se cere să se găsească o **f.m.** m pe M astfel încît funcția $m m_i^{-1}$ să fie olomorfă inversabilă pe U_i, *i.e.* $m\, m_i^{-1} \in \mathcal{O}^*(U_i)$, pentru orice $i \in I$.

Problema lui Poincaré. Fiind dată o **f.m.** m pe M, să se găsească două funcții olomorfe f, $g \in \mathcal{O}(M)$ cu $g \not\equiv 0$ pe orice componentă conexă a lui M astfel încît $m = f/g$ în sensul că $m(x) = f(x)/g(x)$ pentru orice punct $x \in D(m)$ pentru care $g(x) \neq 0$.

Notăm că orice problemă Cousin aditivă pe M are o soluție dacă $H^1(M, \mathcal{O}) = 0$; această condiție este îndeplinită de pildă cînd M este o varietate Stein. De asemenea, orice problemă Cousin multiplicativă pe M are soluție dacă M este o varietate Stein satisfăcînd condiția topologică suplimentară $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$; această condiție topologică este îndeplinită de pildă pentru $M = \mathbb{C}^n$ sau M un polidisc deschis în $\mathbb{C}^n$. În fine, orice problemă Poincaré are soluție pe o varietate Stein. *(M.J.)*

funcție modulară Transformările Mobius de forma

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{și} \quad ad - bc = 1$$

formează un grup G, numit *grupul modular*. Dacă notăm $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ grupul matricilor de forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{și} \quad ad - bc = 1,$$

se vede că $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/\{I, -I\}$, unde I este matricea unitate. Se arată că transformările $S(z) := -\dfrac{1}{z}$ și $T(z) := z + 1$ generează grupul G. Fie H semiplanul superior al lui $\mathbb{C}$, *i.e.* $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Se verifică fără dificultate că semiplanul H este stabil la acțiunea grupului modular G, *i.e.* $g(H) \subset H$ pentru orice $g \in G$. Vom considera G ca grup de automorfisme (analitice) ale lui H. Mulțimea $D := \left\{z \in H \,\middle|\, |z| \geqslant 1,\ |\operatorname{Re} z| \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$ formează un *domeniu fundamental* al lui G (considerat ca grup de automorfisme ale lui H), *i.e.* are proprietățile următoare: 1) Pentru orice $z \in H$, există $g \in G$ astfel încît $g(z) \in D$; 2) Dacă $z, z' \in D$ și dacă $g(z) = z'$ pentru un $g \in G$, atunci z și z' sînt puncte frontieră ale lui D; mai precis $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}$ și $z' = z - 1$, sau $\operatorname{Re} z = -\dfrac{1}{2}$ și $z' = z + 1$, sau $|z| = 1$ și $z' = -\dfrac{1}{z}$. Fie k un număr întreg.

Se numește *funcție slab modulară de pondere* $2k$ orice funcție meromorfă $f : H \to \widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ cu proprietatea că $f(g(z)) = (cz + d)^{2k} f(z)$ pentru orice $g \in G$, unde $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. (Alternativ în această situație ponderea lui f se definește ca fiind k, sau $-2k$). Deoarece transformările S și T generează grupul G, este suficient să cerem verificarea condiției din definiția precedentă pentru S și T, *i.e.* $f(-1/z) = z^{2k} f(z)$ și $f(z+1) = f(z)$, $z \in H$. În particular funcția f este periodică cu perioada 1, deci egalitatea $\widetilde{f}(q) = f\left(\dfrac{1}{2\pi i} \log q\right)$ definește o funcție meromorfă $\widetilde{f}$ în discul puncturat $0 < |q| < 1$. Se spune că funcția slab modulară f este o **f.m.** dacă funcția asociată $\widetilde{f}$ este meromorfă pe discul unitate $|q| < 1$, *i.e.* dacă punctul $q = 0$ este un pol pentru funcția $\widetilde{f}$, și că f este o *formă modulară* dacă funcția $\widetilde{f}$ este olomorfă în discul $|q| < 1$. Dacă f este o formă modulară se pune $f(\infty) := \widetilde{f}(0)$. O funcție F definită pe mulțimea tuturor laticilor de perioade ale lui $\mathbb{C}$, cu valori în $\widetilde{\mathbb{C}}$, se numește *funcție de latice de pondere* $2k$ dacă $F(\lambda\Gamma) = \lambda^{-2k} f(\Gamma)$ pentru orice latice Γ în $\mathbb{C}$ și orice număr complex nenul λ. Oricărei **f.m.** f, de pondere $2k$, i se poate asocia o funcție de latice, F, de pondere $2k$, definită, pentru orice latice Γ în $\mathbb{C}$, prin egalitatea

$$F(\Gamma) = F(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-2k} f(\omega_1/\omega_2) \qquad (*)$$

unde (ω_1, ω_2) este o bază oarecare a laticii Γ. Formula $(*)$ permite identificarea **f.m.** de pondere $2k$ cu funcții de latice de aceeași pondere; în particular, se scrie $F(z)$ pentru $f(z) := F(z, 1)$, unde f este o **f.m.** și F funcția de latice asociată lui f. Ex.: 1° Pentru $k > 1$, seria lui Eisenstein $G_k(\Gamma) = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma}{}' \dfrac{1}{\gamma^{2k}}$, unde simbolui $\sum'$ are semnificația că sumarea se face după toate elementele nenule din Γ, este o formă modulară de pondere $2k$ (*i.e.* este funcția de latice asociată unei forme modulare de pondere $2k$) și $G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$, unde ζ este funcția zeta a lui Riemann. 2° $g_2 := 60\, G_2$ și $g_3 := 140\, G_3$ sînt forme modulare de pondere 4 și 6 respectiv, și avem: $g_2(\infty) = 4\pi^4/3$ și $g_2(\infty) = 8\pi^6/27$. 3° $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$ este o formă modulară de pondere 12 și $\Delta(\infty) = 0$. 4° $j := \dfrac{1728\, g_2^3}{\Delta}$ este o **f.m.** de pondere zero. Notăm că j este olomorfă pe H și că $\widetilde{j}$ are în $q = 0$ un pol simplu cu reziduu 1. Interesul **f.m.** j este legat de împrejurarea că această funcție clasifică curbele eliptice (torurile complexe de dimensiune 1). Mai precis, are loc următoarea teoremă: 1) Două curbe eliptice $\mathbb{C}/\Gamma$ și $\mathbb{C}/\Gamma'$ sînt analitic izomorfe dacă și numai dacă $\Gamma' = \lambda\Gamma$ pentru un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (*i.e.* Γ și Γ' sînt omotetice); 2) Aplicația $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1/\omega_2$ induce o bijecție între clasele de latici (modulo omotetia) și grupul cît H/G; 3) **F.m.** j induce o bijecție $H/G \to \mathbb{C}$. Astfel, curbele eliptice $\mathbb{C}/\Gamma$ și $\mathbb{C}/\Gamma'$ sînt izomorfe dacă și numai dacă $j(\omega_1/\omega_2) = j(\omega_1'/\omega_2')$, unde (ω_1, ω_2) este o bază oarecare a lui Γ și (ω_1', ω_2') o bază oarecare a lui Γ'. (*M.J.*)

funcție modulară (relativ la o măsură Haar) v. **măsura Haar, măsura (Radon) Haar**

funcție monotonă, funcție reală f de o variabilă reală, pentru care produsul $(f(x) - f(y))(x - y)$ păstrează același semn. Discontinuitățile unei **f.m.** sînt întotdeauna de prima speță și (deci) formează o mulțime cel mult numărabilă. O teoremă a lui Lebesgue afirmă că orice **f.m.** este derivabilă a.p.t. O **f.m.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care produsul $(f(x) - f(y))(x - y)$ este pozitiv se numește *funcție crescătoare* ($\mathbb{R}$ poate fi înlocuit cu un interval). O **f.m.** pentru care produsul $(f(x) - f(y))(x - y)$ este negativ se numește *funcție descrescătoare*. O **f.m.** și injectivă se numește *funcție strict monotonă*. O funcție strict monotonă și crescătoare (sau descrescătoare) se numește *funcție strict crescătoare* (resp. *strict descrescătoare*). (*S.M.*)

funcție neglijabilă (în raport cu o măsură) v. **integrala Lebesgue abstractă, integrala Bochner**

funcție neglijabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **prelungirea măsurilor Radon**

funcție μ-neglijabilă v. **integrala Lebesgue abstractă, integrala Bochner, spații L^p, prelungirea măsurilor Radon**

funcție olomorfă (de mai multe variabile complexe) Pentru orice număr natural n, se identifică spațiul numeric complex $\mathbb{C}^n$ cu spațiul numeric real $\mathbb{R}^{2n}$ punînd $\mathbb{C}^n \ni (z_1, \ldots, z_n) = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, unde $x_j = \mathrm{Re}\, z$ și $y_j = \mathrm{Im}\, z_j$, $j = 1, \ldots, n$. Fie Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{C}^n$ și $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$. Diferențiala lui f este dată de formula

$$df = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \right).$$

Dacă aplicăm această formulă funcțiilor $z_j = x_j + iy_j$ și $\bar{z}_j = x_j - iy_j$, unde i este unitatea imaginară, obținem: $dz_j = dx_j + i\, dy_j$ și $d\bar{z}_j = dx_j - i\, dy_j$, $j = 1, \ldots, n$. Rezultă că putem exprima forma diferențială df ca o combinație liniară de dz_j și $d\bar{z}_j$:

$$df = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right),$$

unde

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

Forma diferențială $\partial f := \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$ se numește *partea de tip* (1,0) a lui df, iar forma diferențială $\bar{\partial} f := \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$ *partea de tip* (0,1) a lui df. Operatorii ∂ și $\bar{\partial}$ astfel definiți (uneori sînt notați prin d' și d'', respectiv) sînt $\mathbb{C}$-liniari, verifică formula lui Leibniz, *i.e.* $\partial(fg) = g\partial f + f\partial g$, $\bar{\partial}(fg) = g\bar{\partial} f + f\bar{\partial} g$, și avem $d = \partial + \bar{\partial}$. Funcția $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ se numește *olomorfă* dacă $\bar{\partial} f = 0$, *i.e.* dacă verifică *ecuațiile Cauchy-Riemann* $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Mulțimea funcțiilor olomorfe pe Ω se notează $\mathcal{O}(\Omega)$. Obs. Dacă $f = u + iv$ cu u și v funcții reale pe Ω, atunci ecuațiile Cauchy-Riemann se scriu sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

O funcție complexă f definită pe Ω se numește *separat olomorfă* dacă pentru orice punct $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ și orice $j \in \{1, \ldots, n\}$, funcția $z_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ este olomorfă în variabila z_j pe o vecinătate a lui a_j în $\mathbb{C}$. O funcție complexă f definită pe Ω se numește *funcție analitică* (mai exact, *$\mathbb{C}$-analitică*) dacă există o serie de puteri $\sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha$ cu domeniul de convergență nevid, astfel încît $f(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha (z - a)^\alpha$ pentru z într-o vecinătate a lui a. (Notăm că seria de puteri $\sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha$ care apare în definiția precedentă este univoc determinată de funcția f) Mulțimea funcțiilor analitice pe Ω se notează prin $A(\Omega)$. În fapt, **f.o.** coincid cu funcțiile separat olomorfe și cu funcțiile analitice. Partea dificilă în acest enunț este

Teorema lui Hartogs. Orice funcție separat olomorfă pe Ω este olomorfă pe Ω. Prin *polidisc* în $\mathbb{C}^n$ se înțelege o mulțime deschisă de forma $D = D_1 \times \ldots \times D_n$, unde $D_1, \ldots, D_n$ sînt discuri deschise în $\mathbb{C}$; mulțimea $\partial_0 D := \partial D_1 \times \ldots \times \partial D_n$ se numește *frontiera distinsă* a lui D.

Formula integrală a lui Cauchy pentru polidisc. Fie D un polidisc în $\mathbb{C}^n$ și f o funcție complexă continuă pe $\bar{D}$ și separat olomorfă pe D. Atunci, pentru orice punct $\zeta \in D$:

$$f(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{f(z)}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

Această formulă are numeroase consecințe importante în analiza complexă, dintre care menționăm aici cîteva: 1) Dacă f este continuă și separat olomorfă pe Ω, atunci f este olomorfă pe Ω. (Acest enunț este un prim pas în demonstrația teoremei lui Hartogs.) 2) Dacă $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, atunci $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ și, pentru orice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $\partial^\alpha f \in \mathcal{O}(\Omega)$, unde

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n}.$$

3) *Teorema de convergență a lui Weierstrass.* Dacă $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ este un șir de **f.o.** pe Ω și dacă $\lim f_\nu = f$, uniform pe orice mulțime compactă din Ω, atunci funcția f este olomorfă pe Ω și, pentru orice α, $\lim \partial^\alpha f_\nu = \partial^\alpha f$, uniform pe orice mulțime compactă din Ω. 4) *Teorema lui Montel.* Fie $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ un șir de **f.o.** pe Ω cu proprietatea că, pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$, există $M = M(K) > 0$ astfel încît $|f_\nu(z)| \leqslant M$ pentru $\nu \in \mathbb{N}$ și $z \in K$. Atunci există un subșir $\{f_{\nu_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ care converge uniform pe orice mulțime compactă a lui Ω la o funcție f olomorfă pe Ω. 5) *Dezvoltarea Taylor a unei funcții olomorfe.* Considerăm polidiscul

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j - a_j| < r_j, \quad j = 1, \dots, n\},$$

unde $a = (a_1, \dots, a_n)$ este un punct în $\mathbb{C}^n$ și r_j număr real > 0, $j = 1, \dots, n$. Dacă f este o **f.o.** pe Ω, seria Taylor $\sum\limits_{\alpha} \dfrac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$ este normal convergentă pe orice mulțime compactă din Ω și are ca sumă pe $f(z)$ în orice punct $z \in \Omega$. (Obs. Egalitatea $\mathcal{O}(\Omega) = A(\Omega)$ rezultă din 3) și 5)). O aplicație $f = (f_1, \dots, f_n)$: $\Omega \to \mathbb{C}^p$, unde p este un număr natural, se numește *aplicație olomorfă* (sau *aplicație* $\mathbb{C}$*-analitică*) dacă funcțiile $f_1, \dots, f_p$ sînt toate olomorfe. Dacă $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ și $\Omega' \subset \mathbb{C}^p$ sînt mulțimi deschise, iar $f : \Omega \to \mathbb{C}^p$ și $g : \Omega' \to \mathbb{C}^q$ sînt aplicații olomorfe, $f(\Omega) \subset \Omega'$, atunci aplicația compusă $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}^q$ este olomorfă. Un punct oarecare în $\mathbb{C}^p$ va fi notat prin $w = (w_1, \dots, w_p)$.

Teorema funcțiilor implicite. Fie Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, (z_0, w_0) un punct din Ω și $f = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \to \mathbb{C}^p$ o aplicație olomorfă. Presupunem că $f(z_0, w_0) = 0$ și că $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial w_j}(z_0, w_0)\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant p} \neq 0$. Atunci există mulțimi deschise $U \subset \mathbb{C}^n$ și V în $\mathbb{C}^p$ și o aplicație olomorfă $\varphi : U \to \mathbb{C}^p$ astfel încît: 1) $(z_0, w_0) \in U \times V \subset \Omega$; 2) $\varphi(U) \subset V$ și $f(z, \varphi(z)) = 0$ pentru orice $z \in U$; 3) Dacă $(z, w) \in U \times V$ și $f(z, w) = 0$, atunci $w = \varphi(z)$.

Fie $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ și $\Omega' \subset \mathbb{C}^p$ submulțimi deschise. O aplicație $\varphi : \Omega \to \Omega'$ se numește *olomorfă* (sau $\mathbb{C}$-analitică) dacă aplicația $f : \Omega \to \mathbb{C}^p$ este olomorfă, unde $f(z) := \varphi(z)$, $z \in \Omega$. În cazul $p = n$ aplicația φ se numește *izomorfism analitic* (mai exact, *izomorfism* $\mathbb{C}$*-analitic*) dacă φ este bijectivă iar φ și φ^{-1} sînt olomorfe. (*M.J.*)

funcție olomorfă (de o variabilă complexă) Fie Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{C}$. O funcție complexă $f = u + iv$ definită pe Ω se numește $\mathbb{C}$*-diferențiabilă* în punctul $z_0 \in \Omega$ dacă există (în $\mathbb{C}$) $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$; această limită se notează atunci prin $f'(z_0)$ și se numește *derivata* lui f în punctul z_0. Funcția f se numește *olomorfă* pe Ω dacă este $\mathbb{C}$-diferențiabilă în orice punct $z_0 \in \Omega$; orice **f.o.** f pe Ω admite deci o derivată $f' : \Omega \to \mathbb{C}$. Mulțimea **f.o.** pe Ω se notează prin $\mathcal{O}(\Omega)$. **F.o.** pe întreg planul complex $\mathbb{C}$ se numesc *funcții întregi*. Ex.: 1° O funcție $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numește *polinom* $\mathbb{C}$*-analitic* dacă există un număr întreg $n \geqslant 0$ și numere complexe $a_0, \dots, a_n$ astfel încît $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$; dacă $a_n \neq 0$ se spune că polinomul $\mathbb{C}$-analitic P este de grad n. Orice polinom $\mathbb{C}$-analitic P este o **f.o.** pe $\mathbb{C}$, *i.e.* o funcție întreagă. 2° Dacă f și g sînt **f.o.** pe Ω, atunci suma $f + g$ și produsul fg sînt **f.o.** pe Ω. 3° Dacă f este o **f.o.** pe Ω și $f(z) \neq 0$ pentru orice $z \in \Omega$, atunci $g = 1/f$ este o **f.o.** pe Ω. 4° Dacă $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ este o serie de puteri cu coeficienți $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 0$, și cu domeniu de convergență D, atunci funcția $f : D \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$, $z \in D$, este olomorfă pe D (rezultă din lema lui Abel). 5° Funcțiile exp, cos, sin sînt funcții întregi. 6° O funcție complexă f pe Ω este local constantă (*i.e.* constantă pe fiecare componentă conexă a lui Ω) dacă și numai dacă f este olomorfă și $f'(z) = 0$ pentru orice $z \in \Omega$. 7° Să presupunem că mulțimea deschisă Ω este conținută în $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se numește *ramură continuă a logaritmului complex* orice aplicație continuă $f : \Omega \to \mathbb{C}$ cu proprietatea că $f(z) \in \log z$, *i.e.* $e^{f(z)} = z$, pentru orice $z \in \Omega$. Dacă $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este o ramură continuă a logaritmului complex, atunci f este o **f.o.** pe Ω și $f'(z) = \dfrac{1}{z}$ pentru orice $z \in \Omega$. De pildă, dacă $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$, atunci funcția $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$, $z \in \Omega$, este o ramură continuă a logaritmului complex numită *ramura principală*. Din Ex. 1° și Ex. 2° rezultă că $\mathcal{O}(\Omega)$ este o algebră peste numerele complexe. Pentru orice funcție $\mathbb{R}$-diferențiabilă $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se pune

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Această definiție este motivată de faptul că diferențiala lui f admite scrierea

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z.$$

Reamintim că operatorii $\dfrac{\partial}{\partial z}$ și $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}$ sînt legați de numele matematicianului romîn D. Pompeiu; $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}$ este în esență operatorul de derivare areolară al lui D. Pompeiu.

Teorema fundamentală (Cauchy-Morera-Goursat). Dacă f este o funcție complexă pe Ω, condițiile următoare sînt echivalente: i) f este olomorfă; ii) f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă și satisface ecuațiile Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ și $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, *i.e.* ecuația $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$; iii) f este continuă și forma diferențială $\omega = f\,dz$ este închisă, *i.e.* $\int_{\partial K} \omega = 0$ pentru orice dreptunghi compact (sau orice disc compact) $K \subset \Omega$; iv) f este continuă și pentru orice compact $K \subset \Omega$, cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni, $\int_{\partial K} \omega = 0$, $\omega = f\,dz$; v) f este continuă și pentru orice compact $K \subset \Omega$ cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni și orice punct $\zeta \in \mathring{K}$ are loc ***formula integrală a lui Cauchy***.

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{f(z)\,dz}{z - \zeta}.$$

Obs. Implicațiile i) $\Rightarrow$ iv) și i) $\Rightarrow$ v) aparțin lui Cauchy în cazul particular cînd f este presupusă de clasă C^1 pe Ω (*teorema lui Cauchy*) și lui Goursat în cazul general. Implicația iii) $\Rightarrow$ i) aparține lui Morera (și este cunoscută sub numele de *teorema lui Morera*). Teorema fundamentală are numeroase consecințe dintre care menționăm aici următoarele:

Teorema de regularitate a **f.o.** Dacă $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ atunci $f \in C^\infty(\Omega)$ și $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Teorema de convergență a lui Weierstrass. Dacă un șir $\{f_\nu\}_{\nu \geqslant 1}$ de funcții $f_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ converge la funcția complexă f, uniform pe orice mulțime compactă a lui Ω, atunci $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ iar șirul $\{f'_\nu\}$ converge la f', uniform pe orice mulțime compactă din Ω.

Teorema de compacitate (sau *de normalitate*) *a lui Montel.* Dacă un șir $\{f_\nu\}_{\nu \geqslant 1}$ de **f.o.** pe Ω este local mărginit pe Ω (*i.e.* dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$, există un număr real $M = M(K) > 0$ astfel încît $|f_\nu(z)| \leqslant M$ pentru $z \in K$ și $\nu \geqslant 1$), atunci există un șir de numere naturale $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k < \ldots$ astfel încît șirul de funcții $\{f_{\nu_k}\}_{k \geqslant 1}$ să fie uniform convergent pe orice mulțime compactă a lui Ω la o **f.o.** f pe Ω.

O funcție $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se numește *analitică* (mai exact, *$\mathbb{C}$-analitică*) dacă pentru orice punct $z_0 \in \Omega$, există un șir $\{c_\nu\}_{\nu \geqslant 0}$ de numere complexe cu proprietățile următoare: a) Seria de puteri $\sum\limits_{\nu \geqslant 0} c_\nu z^\nu$ are o rază de convergență $R > 0$; b) $f(z) = \sum\limits_{\nu \geqslant 0} c_\nu (z - z_0)^\nu$ pe o vecinătate a lui z_0 (coeficienții c_ν sînt atunci univoc determinați de funcția f) Mulțimea tuturor funcțiilor analitice pe Ω se notează prin $A(\Omega)$.

Teorema de echivalență între olomorfie și $\mathbb{C}$-analiticitate. Funcțiile analitice coincid cu **f.o.**, *i.e.* $A(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$ pentru orice mulțime deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}$. În plus, dacă f este o **f.o.** definită pe Ω și dacă $z_0 \in \Omega$, atunci dezvoltarea Taylor a lui f, *i.e.* seria $\sum\limits_{\nu \geqslant 0} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu$, este normal convergentă pe orice disc compact K centrat în z_0 și conținut în Ω și are ca sumă pe $f(z)$ pentru orice punct z în acest disc.

Teorema mediei. Fie f o **f.o.** pe Ω, $z_0 \in \Omega$ și r un număr real astfel încît $0 < r < d(z_0, \complement\Omega)$. Atunci

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta})\, d\theta.$$

Principiul maximului modulului. Fie K o mulțime compactă în $\mathbb{C}$ și f o funcție complexă continuă pe K și olomorfă pe $\mathring{K}$. În aceste condiții: 1) $\sup\limits_{z \in \mathring{K}} |f(z)| = \sup\limits_{z \in \partial K} |f(z)|$; 2) Dacă $|f(z_0)| = \sup\limits_{z \in U} |f(z)|$ pentru un punct $z_0 \in \mathring{K}$ și o vecinătate $U \subset K$ a lui z_0 în K, atunci f este constantă pe componenta conexă Γ a lui $\mathring{K}$ astfel încît $z_0 \in \Gamma$.

Lema lui Schwarz. Fie f o **f.o.** pe discul $D = \{z \mid |z| < r\}$ astfel încît $f(0) = 0$ și $|f(z)| \leqslant \alpha$ pentru un număr real $\alpha > 0$ și orice $z \in D$. Atunci: i) $|f(z)| \leqslant \frac{\alpha}{r} |z|$ pentru orice $z \in D$; ii) Dacă există $w \in D$, $w \neq 0$, astfel încît $|f(w)| = \frac{\alpha}{r} |w|$, atunci există $\lambda \in \mathbb{C}$ cu proprietatea $f(z) = \lambda z$ pentru orice $z \in D$.

Din teorema mediei rezultă că funcțiile reale u și v sînt armonice pe Ω dacă $f = u + iv$ este olomorfă pe Ω. Acest rezultat poate fi obținut de asemenea folosind teorema de regularitate și ecuațiile Cauchy-Riemann. În legătură cu acest fapt menționăm și rezultatul următor.

Teoremă. Dacă mulțimea deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}$ este simplu conexă, atunci pentru orice funcție armonică u pe Ω există o funcție armonică v pe Ω, unică pînă la o constantă adițională, astfel încît funcția $f = u + iv$ să fie olomorfă pe Ω. În fapt, dacă u este armonică pe Ω, forma diferențială $\omega = * du :=$ $= -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ este închisă pe Ω și se poate lua pentru v orice primitivă a acestei forme diferențiale. (*M.J.*)

funcție olomorfă pe o coroană circulară Fie $a \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r' < r''$, D o mulțime deschisă în $\mathbb{C}$ astfel încît coroana circulară $\overline{B}(a; r', r'') = \{z \mid r' \leqslant |z - a| < r''\}$ să fie inclusă în D. Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă. Atunci:

$$\int_{\partial B(a, r')} f = \int_{\partial B(a, r'')} f$$

și

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r'')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in B(a; r', r'').$$

S-a notat cu $\partial B(a, r)$ drumul $t \to a + r e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$. Există, și sînt unice, seriile de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, cu razele de convergență $\rho_1 \geqslant r''$, respectiv $\rho_2 \geqslant \frac{1}{r'}$, astfel încît

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - a)^n}, \quad \forall z \in B(a; r', r''). \qquad (*)$$

Pentru orice drum rectificabil și închis λ, cu suportul inclus în $B(a; r', r'')$, au loc relațiile:

$$n_\lambda(a)\, a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\lambda \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$n_\lambda(a)\, b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\lambda (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta)\, d\zeta, \quad n \in \mathbb{N},$$

unde $n_\lambda(a)$ este indexul drumului λ relativ la a. O serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - a)^n}$$

se numește *serie Laurent* în punctul a; seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ se numește *partea regulată*, iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - a)^n}$ *partea principală* a seriei Laurent. Dezvoltarea $(*)$ se numește *dezvoltare în serie Laurent* a funcției f în jurul lui a. În particular, dacă D este un domeniu în $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D și a un punct izolat al lui $\mathbb{C} \setminus D$, există atunci $r > 0$ și seriile de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ astfel încît

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} \quad \text{pentru } 0 < |z-a| < r \qquad (**)$$

Pentru coeficienții a_n, b_n au loc

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,\,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,\,\varepsilon)} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta) \, d\zeta, \quad n \in \mathbb{N},$$

unde $0 < \varepsilon < r$. Coeficientul b_1 se numește *reziduul* funcției f în punctul a și se notează Rez $(f; a)$ (v. **reziduu**). Conform formulelor precedente Rez $(f; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,\,\varepsilon)} f$. Dacă partea principală a dezvoltării $(**)$ este zero, a se numește *punct singular aparent* (sau *singularitate aparentă*) pentru f și în acest caz f se poate prelungi la o funcție olomorfă pe $D \cup \{a\}$. Afirmațiile următoare sînt echivalente: i) a este punct singular aparent pentru f; ii) Există $\lim_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$; iii) Există V o vecinătate a lui a astfel încît f este mărginită pe $V \setminus \{a\}$. Prelungirea lui f în a se face prin $f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$ (de exemplu, 0 este punct singular aparent pentru $f(z) = \frac{\sin z}{z}$). Dacă partea principală a dezvoltării $(**)$ este un polinom de grad $n \geq 1$, atunci a se numește *pol de ordin n* pentru f (sau *singularitate polară*). Afirmațiile următoare sînt echivalente: i) a este pol pentru f; ii) $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$; iii) Există $n \in \mathbb{N}$ și g o funcție olomorfă pe $D \cup \{a\}$, $g(a) \neq 0$ și astfel încît $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ pentru orice $z \in D$. Perechea (n, g) din iii) este unică, n fiind ordinul polului a. Dacă a este pol de ordin n, atunci

$$\text{Rez}(f;\, a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}.$$

Dacă partea principală a dezvoltării $(**)$ nu este zero și nu este polinom, deci dacă $b_n \neq 0$ pentru o infinitate de indici, atunci a se numește *punct singular esențial* pentru f (sau *singularitate esențială*). Afirmațiile următoare sînt echivalente: i) a este punct singular esențial; ii) $\lim_{z \to a} f(z)$ nu există în $\mathbb{C}$ (spre exemplu, zero este punct singular esențial pentru $f(z) = e^{1/z}$). Definițiile precedente se extind în cazul funcțiilor definite și olomorfe pe $\{z \mid R < |z|\}$ și $a = \infty$. Astfel ∞ este punct singular aparent dacă $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$, ceea ce este echivalent cu există $\lim_{z \to \infty} f(z) \in \mathbb{C}$; ∞ este pol de ordin n pentru f dacă $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$, $a_n \neq 0$, și aceasta se întîmplă dacă și numai dacă $\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty$.

În fine, dacă $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ şi $a_n \neq 0$ pentru o infinitate de indici, se spune că ∞ este punct singular esenţial pentru f. Coeficientul lui z din dezvoltarea lui f în jurul lui ∞ este, prin definiţie, *reziduul* lui f în ∞, se notează Rez $(f; \infty)$ şi are loc: Rez $(f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^{-1}B(a,\,\rho)} f$, unde $\rho > R$ şi $\partial^{-1}B(a, \rho)$ este inversul drumului $\partial B(a, \rho)$.
Teorema reziduurilor. Fie D un domeniu în $\mathbb{C}$ şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pentru care $z_1, \ldots, z_n$ sînt puncte singulare izolate. Fie λ un drum rectificabil şi închis în D, omotop cu zero în $D \cup \{z_1, \ldots, z_n\}$. Atunci

$$\int_{\lambda} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n_{\lambda}(z_k) \text{ Rez } (f; z_k) \quad \text{(v. şi } \textbf{reziduu}\text{)}.$$

Dacă a este punct singular esenţial pentru f, atunci pentru orice $w \in \overline{\mathbb{C}}$ există $z_n \in D$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ şi $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$ (*teorema lui Weierstrass*). Fie D un domeniu, $a \in D$ şi f o funcţie olomorfă pe $D \setminus \{a\}$ astfel încît a este punct singular esenţial pentru f. Atunci $\mathbb{C} \setminus f(D \setminus \{a\})$ conţine cel mult un punct (*marea teoremă a lui Picard*). Din această afirmaţie rezultă ***mica teoremă a lui Picard***: dacă f este o funcţie întreagă neconstantă, atunci complementara în $\mathbb{C}$ a mulţimii valorilor ei conţine cel mult un punct. (*Gh.Gr*).

funcţie periodică Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică dacă există un număr real α astfel încît $f(x+\alpha) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$; α se numeşte *perioadă* a lui f. O condiţie necesară ca o funcţie neconstantă să aibă perioade oricît de mici este ca ea să fie discontinuă peste tot. (*S.M.*)

funcţie plurisubarmonică, o funcţie $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, unde Ω este o mulţime deschisă în $\mathbb{C}^n$, care satisface următoarele condiţii: a) $u(z) < \infty$ pentru orice $z \in \Omega$; b) u este superior semicontinuă; c) Pentru orice punct $z \in \Omega$ şi orice $w \in \mathbb{C}^n$, funcţia $t \mapsto u(z+tw)$ este subarmonică pe mulţimea deschisă $\Omega_{z,w} := \{t \in \mathbb{C} \mid z + tw \in \Omega\}$ în $\mathbb{C}$. Mulţimea tuturor f.p. pe Ω se notează prin $P(\Omega)$. Plurisubarmonicitatea este o proprietate locală. Funcţia $u \equiv -\infty$ se consideră plurisubarmonică. Dacă mulţimea Ω este conexă şi dacă $u \in P(\Omega)$ şi $u \not\equiv -\infty$, atunci $u \in L^1$ (Ω, loc), *i.e.* u este local integrabilă pe Ω. Pentru orice mulţime deschisă Ω în $\mathbb{C}^n$ şi orice $\varepsilon > 0$, se pune $\Omega_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, \complement\Omega) > \varepsilon\}$, unde d este distanţa euclidiană. Fie $\chi \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ astfel încît $\chi \geqslant 0$, $\chi(z) = 0$ cînd $\| z \| > 1$, $\chi(z_1, \ldots, z_n) = \chi(|z_1|, \ldots, |z_n|)$ şi $\int \chi(z)\, d\lambda(z) = 1$, unde prin λ s-a notat măsura Lebesgue în $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Pentru orice funcţie $u \in L^1(\Omega, \text{loc})$, se defineşte funcţia u_ε pe Ω_ε prin

$$u_\varepsilon(z) := \int u(z - \varepsilon w)\, \chi(w)\, d\lambda(w) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int u(w)\, \chi\left(\frac{z - w}{\varepsilon}\right) d\lambda(w).$$

Teorema de aproximare. Dacă $u \in P(\Omega) \cap L^1(\Omega, \text{loc})$, atunci $u_\varepsilon \in P(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $u \leqslant u_\varepsilon$ pe Ω_ε, $u_\varepsilon \leqslant u_\delta$ pe Ω_δ cînd $0 < \varepsilon < \delta$ şi $\lim u_\varepsilon = u$ punctual pe Ω cînd $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.
O funcţie reală $u \in C^2(\Omega)$ este plurisubarmonică dacă şi numai dacă $\sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\, w_i \bar{w}_j \geqslant 0$, pentru orice $z \in \Omega$ şi orice $w \in \mathbb{C}^n$. Funcţia reală $u \in C^2(\Omega)$ se numeşte *strict plurisubarmonică* dacă, pentru orice $z \in \Omega$ şi $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$,

$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\, w_i \bar{w}_j > 0$. Dacă Ω' este o mulțime deschisă în $\mathbb{C}^p$ și $\varphi : \Omega' \to \Omega$ o aplicație olomorfă, atunci pentru orice $u \in P(\Omega)$, $\varphi \circ u \in P(\Omega')$. Dacă aplicația olomorfă φ este o imersie și dacă u este o funcție strict plurisubarmonică pe Ω, atunci $u \circ \varphi$ este strict plurisubarmonică pe Ω'. În particular, dacă φ este un izomorfism analitic (ceea ce implică $n = p$), funcția u este plurisubarmonică (resp. strict plurisubarmonică) pe Ω dacă și numai dacă funcția $u \circ \varphi$ este plurisubarmonică (resp. strict plurisubarmonică) pe Ω'. Proprietatea de invarianță a plurisubarmonicității și a plurisubarmonicității stricte prin izomorfisme analitice permite definirea **f.p.** și a funcțiilor strict plurisubarmonice pe o varietate complexă oarecare. Anume, dacă X este o varietate complexă, o funcție $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se numește *plurisubarmonică* (resp. *strict plurisubarmonică*) dacă, pentru orice hartă locală $\alpha : U \to \mathbb{C}^n$ a lui X, funcția $u \circ \alpha^{-1}$ este plurisubarmonică (resp. strict plurisubarmonică) pe mulțimea deschisă $\alpha(U)$, și este suficient ca această condiție să fie îndeplinită pentru hărțile locale α aparținînd unui atlas structural al varietății. Notăm că f.p. au fost introduse de P. Lelong și că ele joacă un rol important în analiza complexă pluridimensională, în special în teoria pseudoconvexității. (*M.J.*)

funcție $\mathbb{R}$-analitică O funcție reală f definită pe o submulțime deschisă U a lui $\mathbb{R}^n$ se numește **f. $\mathbb{R}$ a.** dacă, pentru orice punct $a \in U$, există o serie de puteri $f_a(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha$, cu domeniu de convergență D_a nevid, și o vecinătate U_a a lui a în U astfel încît $f(x) = f_a(x - a)$ cînd $x \in U_a$ și $x - a \in D_a$. (Am folosit notația standard x^α pentru produsul $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, unde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$). Dacă f este o **f. $\mathbb{R}$ a.** pe U, atunci $f \in C^\infty(U)$ și toate derivatele $D^\alpha f$ ale lui f sînt **f. $\mathbb{R}$ a.** pe U; în plus, cu notațiile de mai sus, rezultă $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)$, unde $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ **F. $\mathbb{R}$ a.** pe U formează un inel, în fapt o $\mathbb{R}$-algebră. Polinoamele cu coeficienți reali în variabilele $x_1, \ldots, x_n$ sînt **f. $\mathbb{R}$ a.** pe $\mathbb{R}^n$. În cazul $n = 1$, funcțiile elementare e^x, $\sin x$, $\cos x$ sînt **f. $\mathbb{R}$ a.**

Teorema de aproximare a lui Whitney. Fie $g \in C^\infty(U)$ și ε o funcție reală continuă pe U astfel încît $\varepsilon(x) > 0$ pentru toți $x \in U$. Atunci există o **f. $\mathbb{R}$ a.** f pe U cu proprietatea că $|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| < \varepsilon(x)$ pentru orice $x \in U$ și orice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ astfel încît $|\alpha| < 1/\varepsilon(x)$.

O aplicație $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ se numește *$\mathbb{R}$-analitică* dacă componentele sale $f_1, \ldots, f_m$ sînt toate **f. $\mathbb{R}$ a.** Pentru V o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^m$, o aplicație $\varphi : U \to V$ se numește *$\mathbb{R}$-analitică* dacă aplicația $f : U \to \mathbb{R}^m$, definită prin $f(x) := \varphi(x)$ pentru orice $x \in U$, este $\mathbb{R}$-analitică. O aplicație $\varphi : U \to V$ se numește *izomorfism $\mathbb{R}$-analitic* dacă φ este bijectivă iar φ și φ^{-1} sînt aplicații $\mathbb{R}$-analitice (ceea ce implică $m = n$). Mulțimile deschise în spații numerice reale $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 0$, și aplicațiile $\mathbb{R}$-analitice între asemenea mulțimi formează o categorie; izomorfismele acestei categorii sînt exact izomorfismele $\mathbb{R}$-analitice. Prin localizarea acestei categorii se obține categoria varietăților $\mathbb{R}$-analitice. (*M.J.*)

funcție rapid descrescătoare la infinit v. **transformarea Fourier** (în $\mathbb{R}^n$)

funcție reală, orice aplicație avînd drept codomeniu mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale *i.e.* orice aplicație de forma $f : S \to \mathbb{R}$, unde S este o mulțime oarecare. (*M.J.*)

funcție reală convexă, funcție $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice pereche de numere $p, q, p + q = 1$, $p \geqslant 0 \leqslant q$, avem $f(px + qy) \leqslant pf(x) + qf(y)$ oricare ar fi x și y în intervalul I. Dacă în plus $f(px + qy) < pf(x) + qf(y)$ pentru $p \neq 0 \neq q$ și oricare ar fi $x, y \in I$, atunci f se numește *strict*

convexă. Orice **f.r.c.** este continuă și mărginită. O funcție strict convexă pe I își atinge marginea inferioară în cel mult un punct din I. (*S.M.*)

funcție reală convexă în sensul lui Jensen, funcție $f : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$ oricare ar fi $x, y \in I$. O **f.r.c.s.J.** nu admite, în interiorul intervalului de definiție, discontinuități de prima speță. Dacă este superior mărginită, atunci este continuă (și convexă). Dacă este discontinuă într-un punct este discontinuă peste tot. (*S.M.*)

funcție reală de clasă C^n, funcție $f : I \to \mathbb{R}$ (I = interval) care admite derivată de ordin n continuă pe I; f este de clasă C^n pe intervalul $I \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, dacă admite derivate parțiale de orice fel de ordin n, toate continue pe I. (*S.M.*)

funcție reală de clasă C^∞, funcție $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I = interval) care admite derivată finită de orice ordin pe I; f reală este de *clasă C^n* în intervalul $I \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, dacă admite în I derivate parțiale continue de orice fel și de orice ordin. (*S.M.*)

funcție riglată, funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că nu admite discontinuități de a doua speță. O funcție este riglată dacă și numai dacă este limita unui șir convergent de funcții în scară. Limita oricărui șir uniform convergent de **f.r.** este o **f.r.** (*S.M.*)

funcție scalar esențial integrabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **integrala unei funcții vectoriale** (în raport cu o măsură Radon scalară)

funcție scalar esențial neglijabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **integrala unei funcții vectoriale** (în raport cu o măsură Radon scalară)

funcție scalar integrabilă (în raport cu o măsură) v. **integralele Dunford; Gelfand; Pettis**

funcție scalar local integrabilă v. **măsură Radon vectorială**

funcție scalar măsurabilă (în raport cu o măsură) v. **funcție măsurabilă în raport cu o măsură**

funcție semicontinuă Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic și $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$. Se spune că funcția f este *semicontinuă inferior* (*superior*) în punctul $x_0 \in \mathcal{X}$ dacă pentru orice $a < f(x_0)$ (resp. pentru orice $a > f(x_0)$) există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $a < f(x)$ (resp. $a > f(x)$) pentru orice $x \in V$. Funcția f se numește *semicontinuă inferior* (*superior*) pe $\mathcal{X}$ dacă este semicontinuă inferior (superior) în orice punct $x \in \mathcal{X}$. O funcție este *continuă* într-un punct dacă și numai dacă este în același timp semicontinuă inferior și superior în acel punct. Funcția f este semicontinuă inferior dacă și numai dacă funcția $-f$ este semicontinuă superior. Pentru $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ și $x_0 \in \mathcal{X}$ se notează:

$$f_{\max}(x_0) = \inf\left\{ \sup_{x \in V} f(x) \mid V \in \mathcal{V}_{x_0} \right\},$$

$$f_{\min}(x_0) = \sup\left\{ \inf_{x \in V} f(x) \mid V \in \mathcal{V}_{x_0} \right\},$$

unde $\mathcal{V}_{x_0}$ este mulțimea vecinătăților lui x_0. Atunci f este semicontinuă superior pe $\mathcal{X}$ dacă și numai dacă $f_{\max} = f$ și semicontinuă inferior dacă și numai dacă $f_{\min} = f$. Dacă $\{f_i\}_{i \in I}$ este o familie de funcții continue pe $\mathcal{X}$ (cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$), atunci $\sup_{i \in I} f_i$ este o **f.s.** inferior pe $\mathcal{X}$ iar $\inf_{i \in I} f_i$ este semicontinuă superior pe $\mathcal{X}$. Fie pe $\overline{\mathbb{R}}$ topologia τ_s ale cărei mulțimi deschise sînt $\emptyset$, $\overline{\mathbb{R}}$ și intervalele de forma $(a, +\infty]$ unde $a \in \mathbb{R}$. O funcție f definită pe spațiul topologic $\mathcal{X}$, cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$ este semicontinuă inferior în punctul $x_0 \in \mathcal{X}$ dacă și numai dacă este continuă în x_0 în raport cu topologia τ_s pe $\overline{\mathbb{R}}$. Topologia τ_s se mai numește și *topologia inferioară* a lui $\overline{\mathbb{R}}$. Fie pe $\overline{\mathbb{R}}$ topologia τ_d ale cărei mulțimi deschise sînt $\emptyset$, $\overline{\mathbb{R}}$ și intervalele de forma $[-\infty, a)$, unde $a \in \mathbb{R}$. O funcție f definită pe spațiul topologic $\mathcal{X}$ cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$ este semicontinuă superior în punctul $x_0 \in \mathcal{X}$ dacă și numai dacă este continuă în x_0 relativ la topologia τ_d pe $\overline{\mathbb{R}}$. Topologia τ_d se numește *topologia superioară* a lui $\overline{\mathbb{R}}$. Cu aceleași definiții se introduc f.s. cu valori în $\mathbb{R}$. Topologiile corespunzătoare (induse) în $\mathbb{R}$ se numesc topologia inferioară (resp. topologia superioară) a lui $\mathbb{R}$. Orice f. s. definită pe $\mathbb{R}^n$ este de prima clasă Baire. (*Gh.Gr.*).

funcție simplă v. **funcție măsurabilă**

funcție simplă măsurabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **funcții și mulțimi măsurabile** (în raport cu o măsură Radon)

funcție slab μ-integrabilă v. **integralele Dunford; Gelfand; Pettis**

funcție slab μ-măsurabilă v. **funcție măsurabilă în raport cu o măsură**

funcție subarmonică, o funcție $u: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, unde Ω este o mulțime deschisă în planul complex $\mathbb{C}$, care satisface condițiile următoare: a) $u(z) < \infty$ pentru orice $z \in \Omega$; b) u este superior semicontinuă; c) Pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$ și orice funcție reală $h \in C(K)$ astfel încît h să fie armonică pe $\mathring{K}$ și $h \geqslant u$ pe ∂K, rezultă $h \geqslant u$ pe K. Este suficient ca această condiție să fie îndeplinită pentru funcții h de forma $h = \operatorname{Re} f$, unde f este un polinom $\mathbb{C}$-analitic. Funcția $u \equiv -\infty$ se consideră subarmonică. Orice f.s. este mărginită superior pe orice mulțime compactă a lui Ω. Subarmonicitatea este o proprietate locală: u este subarmonică pe Ω dacă și numai dacă pentru orice $z \in \Omega$, u este subarmonică pe o vecinătate deschisă a lui z în Ω.
Teoremă. Dacă u este subarmonică pe Ω și dacă μ este o măsură Radon pozitivă și cu suport nevid pe intervalul închis $I_\varepsilon = [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, atunci, pentru orice $z \in \Omega_\varepsilon$, are loc inegalitatea

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi\mu(I_\varepsilon)} \int_0^{2\pi} \int_{I_\varepsilon} u(z + r\,\mathrm{e}^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\mu(r), \qquad (*)$$

unde $\Omega_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \complement\Omega) > \varepsilon\}$, d fiind distanța euclidiană. Invers, dacă u satisface condițiile a) și b) și dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $z \in \Omega_\varepsilon$, există o măsură Radon pozitivă pe I_ε cu suport conținînd puncte în intervalul semideschis $(0, \varepsilon]$ și astfel încît să fie verificată inegalitatea $(*)$, atunci u este subarmonică pe Ω.
Printre măsurile Radon pozitive pe I_ε utile în acest context se remarcă în primul rînd măsura Dirac în punctul ε și măsura μ dată de $\mathrm{d}\mu(r) = r\,\mathrm{d}r$. În primul caz, inegalitatea $(*)$ se scrie (pentru $z \in \Omega_\varepsilon$) sub forma

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \varepsilon\,\mathrm{e}^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta,$$

iar în al doilea caz

$$u(z) \leqslant \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{|\zeta - z| \leqslant \varepsilon} u(\zeta)\, \mathrm{d}\lambda_2(\zeta),$$

unde λ_2 este măsura Lebesgue în $\mathbb{C}$. Folosind inegalitatea $(*)$ în această ultimă variantă se obține, de exemplu, în cazul Ω conexă, că orice f.s. $u \not\equiv -\infty$ pe Ω este local integrabilă. Iată acum cîteva proprietăți generale de stabilitate ale f.s.: 1) O funcție $u \in C^2(\Omega)$ este subarmonică dacă și numai dacă $\Delta u \geqslant 0$; în particular funcțiile armonice sînt subarmonice. 2) Dacă $\{u_i\}_{i \in I}$ este o familie de f.s. pe Ω și dacă funcția $u := \sup u_i$ satisface condițiile a) și b) (de exemplu, dacă mulțimea I este finită), atunci u este subarmonică pe Ω. 3) Dacă $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de f.s. pe Ω, atunci $u := \inf u_\nu$ este subarmonică pe Ω. 4) Dacă funcțiile u, v sînt subarmonice pe Ω, atunci $u + v$ este subarmonică pe Ω; de asemenea, dacă u este subarmonică pe Ω și α un număr real > 0, atunci αu este subarmonică pe Ω. 5) Dacă φ este o funcție convexă crescătoare pe dreapta reală $\mathbb{R}$ și dacă punem $\varphi(-\infty) := \inf \varphi$, atunci pentru orice f.s. u pe Ω, funcția $\varphi \circ u$ este subarmonică pe Ω. 6) Pentru orice funcție olomorfă f pe Ω, funcțiile $\log |f|$ și $|f|^\alpha$, $\alpha > 0$, sînt subarmonice pe Ω. 7) Dacă Ω' este o altă mulțime deschisă în $\mathbb{C}$ și $\varphi: \Omega' \to \Omega$ o aplicație olomorfă, atunci, pentru orice f.s. u pe Ω, funcția $u \circ \varphi$ este subarmonică; în particular, dacă φ este izomorfism analitic, u este subarmonică dacă și numai dacă $u \circ \varphi$ este subarmonică. Proprietatea de invarianță a subarmonicității prin izomorfisme analitice permite definirea f.s. pe orice suprafață riemanniană. Anume, dacă X este o suprafață riemanniană, o funcție $u: X \to \overline{\mathbb{R}}$ se numește subarmonică dacă, pentru orice hartă locală $h: U \to \mathbb{C}$ a lui X, funcția $u \circ h^{-1}$ este subarmonică pe mulțimea deschisă $h(U)$ în $\mathbb{C}$ (și este suficient ca această condiție să fie îndeplinită pentru hărțile h aparținînd unui atlas structural al lui X). (*M.J.*)

funcție $\mathcal{T}$-etajată v. **funcție măsurabilă**

funcție $\mathcal{T}$-simplă v. **funcție măsurabilă**

funcție tare μ-măsurabilă v. **funcție măsurabilă în raport cu o măsură**

funcție total măsurabilă Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T, E un spațiu Banach și Γ corpul scalarilor (reali sau complecși). Vom numi *funcție total $\mathcal{C}$-măsurabilă* (*funcție total măsurabilă în raport cu $\mathcal{C}$*) sau **f.t.m.** o funcție $f: T \to E$ care are proprietățile: 1) Există $A \in \mathcal{C}$ cu proprietatea că $f(t) = 0$ pentru orice $t \notin A$ (dacă $\mathcal{C}$ este algebră, această condiție este superfluă); 2) Există un șir $\{f_n\}_n$ de funcții $\mathcal{C}$-etajate cu valori în E care converge uniform la f. De exemplu, dacă $\mathcal{C}$ este σ-algebră de părți ale lui T și $E = \Gamma$, **f.t.m.** sînt exact funcțiile $\mathcal{C}$-măsurabile mărginite. Se observă că $\mathcal{M}_E(\mathcal{C}) = \{f: T \to E \mid f$ este total $\mathcal{C}$-măsurabilă$\}$ este spațiu normat cu norma $\|f\| = \sup\{\|f(t)\| \mid t \in T\}$. Acum vom presupune în plus existența unui trib ereditar $\mathcal{N}$ de părți ale lui T. De exemplu, putem lua $\mathcal{N} = \{\emptyset\}$. Dacă $(T, \mathcal{T}, \mu)$ este un spațiu cu măsură, putem lua $\mathcal{N} =$ mulțimea părților μ-neglijabile. Vom nota în acest caz $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mu)$. O funcție $f: T \to E$ se numește *funcție $\mathcal{N}$-aproape total $\mathcal{C}$-măsurabilă* sau *funcție aproape total măsurabilă* dacă există: a) O funcție $g: T \to E$ care este total $\mathcal{C}$-măsurabilă; b) O mulțime $M \in \mathcal{N}$ astfel încît $f(t) = g(t)$ pentru orice $t \notin M$. **F.t.m.** sînt mărginite, pe cînd funcțiile aproape total măsurabile nu sînt mărginite (sînt mărginite a.p.t.). Mai precis, putem introduce pentru orice funcție $f: T \to E$ expresia $\|f\|_{\infty, \mathcal{N}} = \inf\{A(f, M) \mid M \in \mathcal{N}\}$, unde $A(f, M) = \sup\{\|f(t)\| \mid t \in T \setminus M\}$. Se arată că dacă f este o funcție $\mathcal{N}$-aproape total $\mathcal{C}$-măsurabilă, avem $\|f\|_{\infty, \mathcal{N}} < \infty$ și există $M \in \mathcal{N}$ astfel încît $\|f\|_{\infty, \mathcal{N}} = A(f, M)$. Pentru $\mathcal{N} = \{\emptyset\}$, funcțiile total $\mathcal{C}$-măsurabile coincid cu cele $\mathcal{N}$-aproape total $\mathcal{C}$-măsurabile. Se arată că $\mathcal{M}_E^\infty(\mathcal{C}, \mathcal{N}) = \{f: T \to E \mid f$ este $\mathcal{N}$-aproape total $\mathcal{C}$-măsurabilă$\}$ este spațiu seminormat cu seminorma $\|f\|_{\infty, \mathcal{N}}$. Dacă $(T, \mathcal{T}, \mu)$ este un spațiu cu măsură și $\mathcal{N}$ tribul mulțimilor μ-neglijabile, se notează $\|f\|_{\infty, \mathcal{N}} = \|f\|_\infty$. Se mai folosesc următoarele notații: $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f$ (*supremul esențial al lui f*) $=$ vr. max f (vrai max f) $=$ ad. max f (*adevăratul maxim al lui f*) $= \mu-$supf.

Fie acum $f: T \to \mathbb{R}$. O astfel de funcţie poate lua eventual şi valori infinite. Vom numi deci şi în acest caz o funcţie $f: T \to \mathbb{R}$ funcţie $\mathcal{N}$-aproape total $\mathcal{C}$-măsurabilă, definiţia fiind aceeaşi ca înainte, numai că se înlocuieşte E cu $\mathbb{R}$. Să considerăm din nou o mulţime nevidă T, un clan $\mathcal{C}$ de părţi ale lui T şi spaţiile Banach X, E, F astfel încît $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ (*i.e.* X se scufundă în $\mathcal{L}(E, F)$, v. **variaţie**; **cvasivariaţie**; **semivariaţie**). Vom considera o funcţie $f: T \to E$ care este total $\mathcal{C}$-măsurabilă şi o măsură aditivă $m: \mathcal{C} \to X$ care are semivariaţie finită (relativ la scufundarea $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$). Fie $\{f_n\}_n$ un şir de funcţii $\mathcal{C}$-etajate care converge uniform la f. Pentru fiecare $f_n = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{A_i} x_i$ definim

$$\int f_n \, dm = \sum_{i=1}^{k} m(A_i) \, x_i.$$

Prin definiţie, $\int f \, dm = \lim_n \int f_n \, dm$. Se arată că această limită există şi nu depinde de şirul ales $\{f_n\}$. În particular, dacă $E = F = X = \Gamma$ şi scufundarea este cea obişnuită (v. **variaţie**; **cvasivariaţie**; **semivariaţie**) cerinţa ca m să fie cu semivariaţie finită revine la faptul că m să fie mărginită. În particular, dacă $\mathcal{C}$ este tribul mulţimilor boreliene ale unui spaţiu topologic T şi $f: T \to \Gamma$ este funcţie măsurabilă Borel mărginită (resp. funcţie continuă cu suport compact) iar μ este măsură scalară mărginită definită pe borelienele lui T (resp. măsură scalară) putem defini în acest mod $\int f \, d\mu$. Dacă μ este şi numărabil aditivă, integrala aceasta coincide cu integrala Lebesgue abstractă sau cu integrala Bochner. În acelaşi cadru de lucru, putem considera o măsură $m: \mathcal{C} \to X$, aditivă cu semivariaţie finită relativ la scufundarea $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ şi în plus $m(A) = 0$ pentru orice A din $\mathcal{N}$, unde $\mathcal{N}$ este un trib ereditar. Atunci putem defini *integrala lui f în raport cu m*, $\int f \, dm$, ca fiind egală cu $\int g \, dm$ pentru orice funcţie g care este total $\mathcal{C}$-măsurabilă şi pentru care există $M \in \mathcal{N}$ astfel încît $g(t) = f(t)$ pentru orice $t \notin M$ (definiţia este coerentă). Acum vom considera că măsura $m: \mathcal{C} \to X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ este numărabil aditivă şi cu variaţie finită (deci cu atît mai mult cu semivariaţie finită). Efectuăm prelungirea măsurii finite $|m|: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ (v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**) şi obţinem măsura $\mu: \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, unde $\mathcal{T}$ este σ-algebra mulţimilor μ-măsurabile. Vom lua drept $\mathcal{N}$ mulţimile μ-neglijabile. Atunci, o funcţie $\mathcal{N}$-aproape total măsurabilă este m-integrabilă Bochner şi avem $\int f \, dm = (\text{Bochner})\text{-}\int f \, dm$. (*I.C.*)

funcţie uniform continuă Fie $(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ şi $(\mathcal{Y}, \mathcal{V})$ două spaţii uniforme. Se spune că funcţia f definită pe $\mathcal{X}$ cu valori în $\mathcal{Y}$ este *uniform continuă* dacă pentru orice împrejurime $V \in \mathcal{V}$ există o împrejurime $U \in \mathcal{U}$ astfel încît $(f(x), f(y)) \in V$ pentru orice $(x, y) \in U$. Orice **f.u.c.** este continuă (în raport cu topologiile generate de structurile uniforme considerate). Prin particularizarea spaţiilor uniforme ce intervin, se găsesc diversele variante de continuitate uniformă dintre care cele mai des întîlnite sînt cele în care atît $\mathcal{X}$ cît şi $\mathcal{Y}$ sînt spaţii metrice sau sînt spaţii liniare topologice. Dacă $(\mathcal{X}, d)$ şi $(\mathcal{Y}, \rho)$ sînt spatii metric functiae f este uniform continuă dacă şi numai dacă pentru orice

$\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ astfel încît $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$ de îndată ce $d(x, y) \leqslant \eta$. Dacă $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ sînt spaţii liniare topologice aplicaţia f este uniform continuă dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a originii în $\mathcal{Y}$ există U o vecinătate a originii în $\mathcal{X}$ astfel încît $x - y \in U \Rightarrow f(x) - f(y) \in V$. Ultimele două afirmaţii se iau de obicei drept definiţii pentru continuitatea uniformă în spaţii metrice, respectiv în spaţii liniare topologice. Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu topologic compact şi pe $\mathcal{X}$ structura uniformă compatibilă cu topologia spaţiului. Fie $(\mathcal{Y}, \mathcal{V})$ un spaţiu uniform. Funcţia f este uniform continuă dacă şi numai dacă pentru orice împrejurime $V \in \mathcal{V}$ există o acoperire deschisă $\{G_1, \ldots, G_n\}$ a lui $\mathcal{X}$ astfel încît pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ şi pentru orice $x, y \in G_i$ rezultă $(f(x), f(y)) \in V$. Orice funcţie continuă definită pe spaţiul compact $\mathcal{X}$, cu valori în spaţiul uniform $\mathcal{Y}$, este uniform continuă. Se spune, pe scurt, că orice funcţie continuă pe un spaţiu compact este uniform continuă. Funcţia $f(x) = x^2$ definită pe $\mathbb{R}$ şi cu valori în $\mathbb{R}$ este continuă dar nu este uniform continuă. (*Gh.Gr.*)

funcţii hiperbolice, funcţiile ch, sh, th, cth, numite respectiv *cosinus hiperbolic*, *sinus hiperbolic*, *tangentă hiperbolică*, *cotangentă hiperbolică* şi definite prin:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Denumirea este legată de faptul că ecuaţiile parametrice ale hiperbolei $x^2 - y^2 = 1$ sînt $x = \operatorname{ch} t$; $y = \operatorname{sh} t$, precum şi de o anumită analogie a proprietăţilor acestor funcţii cu proprietăţile funcţiilor trigonometrice. Astfel, au loc relaţiile:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x;$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{cth} x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Se consideră de asemenea şi **f.h.** inverse. Astfel $\operatorname{ch}: [0, \infty) \to [1, \infty)$ este inversabilă, inversa ei fiind funcţia $\operatorname{arch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$, numită ***area** cosinus hiperbolic*. Apoi:

$$\operatorname{arsh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad x \in (-1, 1);$$

$$\operatorname{archt} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Pe domeniile precizate, derivatele acestor funcţii sînt respectiv:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arch} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arsh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arth} x = \frac{1}{1 - x^2}; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcth} x = \frac{1}{1 - x^2}.$$

F.h. reale prezentate sînt restricțiile la $\mathbb{R}$ ale unor funcții analitice de o variabilă complexă, notate și numite la fel, definite prin aceleași formule ($a \in \mathbb{C}$), sau ca suma unor serii de puteri.

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Se regăsesc proprietățile precedente, precum și unele specifice:

$$\operatorname{ch} iz = \cos z; \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z;$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz; \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz.$$

Folosind logaritmul complex se introduc și funcțiile *area... hiperbolici* (*Gh.Gr.*)

funcții Rademacher Fie $r_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funcția identic egală cu 1 și pentru orice n natural definim $r_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ prin $r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi x)$. Așadar, $r_1(x) = 1$ dacă x este $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $r_1(x) = -1$ dacă x este în $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ și $r_1(x) = 0$ dacă $x = 0, \frac{1}{2}, 1$. Apoi, $r_2(x) = 1$ dacă x este în $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $r_2(x) = -1$ dacă x este în $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $r_2(x) = 1$ dacă x este în $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $r_2(x) = -1$ dacă x este în $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ și $r_2(x) = 0$ dacă $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. În general, vom avea $r_n(x) = 1$ dacă x este în $\left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ cu i par, $r_n(x) = -1$ dacă x este în $\left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ cu i impar (unde, pentru n fixat, i poate lua valorile $1, 2, 3, \ldots, 2^n$) și $r_n(x) = 0$ dacă $x = 0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n}{2^n} = 1$. Funcțiile r_n se numesc **f.R.** Sistemul $\{\widetilde{r}_n\}_n$ este un sistem ortonormal în spațiul $L^2(\mu)$, dar nu este complet, unde μ este măsura Lebesgue pe $[0, 1]$ (v. **spații L^p**). **F.R.** formează un sistem stochastic independent, *i.e.* pentru orice alegere a numerelor întregi pozitive $n_1, n_2, \ldots, n_k$ și pentru orice alegere a intervalelor $I_1, I_2, \ldots, I_k$ ale dreptei reale avem

$$\mu(\{x \in [0, 1] \mid r_{n_i}(x) \in I_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}) = \prod_{i=1}^{k} \mu(\{x \in [0, 1] \mid r_{n_i}(x) \in I_i\}). \quad (I.C.)$$

funcții speciale definite cu ajutorul unor ecuații diferențiale Funcțiile speciale sînt definite ca soluții particulare ale unor ecuații diferențiale liniare de ordin 2 și apar adesea în probleme de fizică matematică.

1) *Funcții Bessel de speța întîi și de indice* ν; soluții ale ecuației lui Besse[l] $z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0$, definite cu ajutorul seriilor

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

Atît z cît și ν sînt în general numere complexe.

2) *Funcția Bessel de speța a doua* (sau *funcția Neumann*); soluție a ecuației lui Bessel, definită prin

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}, \quad \sin \pi\nu \neq 0.$$

3) *Funcții Bessel de speța a treia* (sau *funcții Hankel*); soluții ale ecuației lui Bessel, definite prin

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + i N_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - i N_\nu(z).$$

4) *Funcții Bessel modificate*; soluții ale ecuației $z^2 w'' + z w' - (z^2 + \nu^2) w = 0$, definite prin $I_\nu(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_\nu(iz)$.

5) *Funcții Bessel normate*; soluții ale ecuației $z w'' + (1 + 2\nu) w' + z w = 0$, definite prin $P_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z)$.

6) *Funcțiile Airy*: soluții ale ecuației lui Airy $w'' + \frac{1}{3} z w = 0$, definite prin

$$A_1(z) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{z}{3}} \left\{ J_{\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{z}{3}\right)^{3/2}\right) + J_{\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{z}{3}\right)^{3/2}\right) \right\},$$

$$A_2(z) = \frac{\pi}{3} \sqrt{z} \left\{ J_{\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{z}{3}\right)^{3/2}\right) - J_{\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{z}{3}\right)^{3/2}\right) \right\}.$$

7) *Polinoame Legendre*; soluții polinomiale ale ecuației $((1 - x^2) y')' + k(k + 1) y = 0$, date de formulele

$$P_k(x) = F\left(k + 1, -k, 1, \frac{1 - x}{2}\right),$$

unde $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ este seria hipergeometrică, soluție a ecuației lui Gauss.

8) *Polinoame Jacobi*: $P_k^{(p, q)}$; soluții polinomiale ale ecuației

$$((1 - x)^{p+1}(1 + x)^{q+1} y')' + k(p + q + k + 1)(1 - x)^p (1 + x)^q y = 0$$

(pentru $p = q = 0$ se obțin polinoamele Legendre). Ca și polinoamele Legendre, se pot scrie cu ajutorul seriei hipergeometrice

$$P_k^{(p, q)}(x) = \frac{(p + 1)(p + 2) \ldots (p + k)}{k!} F\left(p + q + k + 1, -k, p + 1, \frac{1 - x}{2}\right).$$

Pentru $p = q = \lambda - \frac{1}{2}$ se obțin polinoamele $G_n^{(\lambda)}(x)$, numite *polinoame Gegenbauer*. Un caz particular îl reprezintă *polinoamele Cebîșev* $T_k(x) = \cos(k \arccos x) = \frac{2, 4, \ldots, 2k}{1 \cdot 3 \ldots (2k - 1)} P_k^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x)$.

9) *Polinoame Hermite*: soluții polinomiale ale ecuației $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, definite prin $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$.

10) *Polinoame Laguerre*: soluţii polinomiale ale ecuaţiei $xy'' + (\lambda + 1 - x)\, y' + ny = 0$, definite prin

$$L_n^{(\lambda)}(x) = x^{-\lambda}\, e^{x}(x^{\lambda+n} e^{-x})^{(n)}.$$

Sînt legate de polinoamele Hermite prin relaţiile:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} L^{\left(-\frac{1}{2}\right)}_n (x^2),\ H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} x L^{\left(\frac{1}{2}\right)}_n (x^2). \quad (A.H.)$$

funcţii şi mulţimi măsurabile (în raport cu o măsură Radon). Fie T un spaţiu local compact separat, μ o măsură Radon pozitivă pe T şi F un spaţiu topologic. O funcţie $f\colon T \to F$ se numeşte *funcţie μ-măsurabilă (funcţie măsurabilă în raport cu măsura Radon μ)* dacă pentru orice compact $K \subset T$ există o mulţime μ-neglijabilă $M \subset K$ şi un şir $\{K_n\}$ de compacte cu $\bigcup_n K_n = K \setminus M$, astfel încît restricţia lui f la K_n este continuă pentru orice număr natural n.

Teorema lui Luzin. Dacă T şi F sînt, ca mai sus, atunci f este μ-măsurabilă dacă şi numai dacă pentru orice compact $K \subset T$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un compact $K_1 \subset K$ astfel încît $\mu(K \setminus K_1) < \infty$ şi restricţia lui f la K_1 este continuă.

O mulţime $A \subset T$ se numeşte *μ-măsurabilă* (sau *măsurabilă în raport cu μ*) dacă φ_A este μ-măsurabilă (aici $F = \mathbb{R}$). Orice mulţime închisă şi orice mulţime deschisă este μ-măsurabilă. Dacă $A \subset T$, atunci A este μ-măsurabilă dacă şi numai dacă pentru orice compact $K \subset T$, mulţimea $A \cap K$ este μ-integrabilă (v. **spaţii** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **şi** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)). Dacă $f\colon T \to F$ este măsurabilă, rezultă că $f^{-1}(A)$ este μ-măsurabilă pentru orice mulţime deschisă sau închisă A.

Principiul localizării. Fie $f\colon T \to F$. Se presupune că pentru orice punct t din T există o vecinătate V_t a lui t care este μ-integrabilă şi există o funcţie μ-măsurabilă $g_t : V_t \to F$ cu proprietatea că $f(x) = g_t(x)$ pentru orice x din V_t. Atunci f este μ-măsurabilă.

Dacă A este o parte μ-măsurabilă a lui T şi F un spaţiu topologic, vom considera o funcţie $f\colon A \to F$ şi vom spune că f este *μ-măsurabilă* dacă există un element x din F cu proprietatea că funcţia $h\colon T \to F$, definită prin $h(t) = f(t)$ dacă t este în A şi $h(t) = x$ dacă t este în $T \setminus A$, este de asemenea μ-măsurabilă (în sensul definiţiei anterioare). Definiţia nu depinde de x.

Fie F un spaţiu topologic metrizabil. Pentru o funcţie $f\colon T \to F$, următoarele afirmaţii sînt echivalente: 1) f este μ-măsurabilă; 2) a) Pentru orice bilă închisă (sau deschisă) $B \subset F$, mulţimea $f^{-1}(B)$ este μ-măsurabilă; b) Pentru orice compact $K \subset T$, există o mulţime $H \subset F$, H cel mult numărabilă şi o mulţime μ-neglijabilă $M \subset K$ astfel încît $f(K \setminus M) \subset \overline{H}$. (Aderenţa se calculează în F.)

Teorema lui Egorov. Fie F un spaţiu metrizabil, $f_n : T \to F$ un şir de funcţii μ-măsurabile şi $f\colon T \to F$ o funcţie. Se presupune că $\lim f_n(t) = f(t)$ local a.p.t. tot în raport cu μ. Atunci: 1) Funcţia f este μ-măsurabilă; 2) Pentru orice mulţime compactă $K \subset T$ şi orice $\varepsilon > 0$ există o submulţime compactă $K_1 \subset K$ cu proprietatea $\mu(K \setminus K_1) < \varepsilon$ şi astfel încît toate restricţiile funcţiilor f_n la K_1 sînt continue şi f_n converge uniform la f pe K_1.

În acelaşi context (deci F spaţiu metrizabil) o funcţie $f\colon T \to F$ este μ-măsurabilă dacă şi numai dacă pentru orice compact $K \subset T$ există un şir $\{g_n\}_n$ de funcţii $g_n\colon T \to F$ care sînt *funcţii etajate μ-măsurabile* sau *funcţii simple μ-măsurabile* (*i.e.* fiecare g_n este de forma $g_n = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{A_i} a_i$ cu $a_i \in F$ şi A_i mulţimi μ-măsurabile disjuncte) astfel încît $g_n \to f$ μ-a.p.t. pe K. Dacă spaţiul T este spaţiu σ-compact, şirul g_n poate fi ales astfel încît $g_n \to f$ a.p.t. (v. **prelungirea măsurilor Radon**). (*I.C.*)

funcţii trigonometrice v. **funcţia exponenţială**

funcţii Walsh Definim două funcţii pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ cu valori în mulţimea numerelor întregi pozitive $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Mai întîi, fie $L : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $L(n) := [\log_2 n]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Apoi, să fixăm un număr întreg pozitiv i. Definim funcţia $\theta_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ prin $\theta_i(n) = 0$ dacă $i > L(n)$, iar dacă $i \leqslant L(n)$, $\theta_i(n)$ este dat în cele ce urmează. Ştim că n se dezvoltă diadic în mod unic sub forma $n = \sum_{i=0}^{L(n)} a_i 2^i$, unde a_i sînt egale cu 0 sau cu 1. Atunci $\theta_i(n) = a_i$. Aşadar, $n = \sum_{i=0}^{L(n)} \theta_i(n)\, 2^i$.

Reamintim că am notat cu r_n funcţiile Rademacher. Acum putem defini **f.W.** ca fiind funcţiile din şirul $\{w_n\}_n$ dat în cele ce urmează. Prin definiţie, $w_0 = r_0$ şi $w_1 = r_1$. Dacă $n \geqslant 2$, prin definiţie,

$$w_n = r_{L(n)+1} \prod_{i=0}^{L(n)-1} r_{i+1}^{\theta_i(n)}$$

Definiţie echivalentă: din nou $w_0 = r_0$; apoi să luăm $n \geqslant 1$. Avem $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_p}$ (unde p depinde de n) cu $m_1 > m_2 > \ldots > m_p \geqslant 0$. Cu alte cuvinte, scriem dezvoltarea diadică a lui n reţinînd numai termenii nenuli. Atunci, prin definiţie, $w_n = r_{m_1+1} r_{m_2+1} \ldots r_{m_p+1}$. Ex.: Să luăm $n = 6$ şi să construim w_6 după cele două definiţii. Avem: $6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, deci $L(6) = 2$, $\theta_0(6) = 0$, $\theta_1(6) = 1$, $\theta_2(6) = 1$ şi $\theta_i(6) = 0$ pentru $i = 3, 4, \ldots$ Atunci, după prima definiţie, avem $w_6 = r_3 \cdot (r_1^0 r_2^1) = r_3 r_2$. Pe de altă parte, avem $6 = 2^2 + 2^1$, deci $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ şi $p = 2$. Aşadar, $w_6 = r_3 r_2$ după a doua definiţie. Iată primele nouă **f.W.**: $w_0 = r_0$; $w_1 = r_1$; $w_2 = r_2$; $w_3 = r_2 r_1$; $w_4 = r_3$; $w_5 = r_3 r_1$; $w_6 = r_3 r_2$; $w_7 = r_3 r_2 r_1$; $w_8 = r_4$. Avem relaţiile $w_{2^k+i} = r_{k+1} w_i$, valabile pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$ şi (pentru k fixat) $i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. În particular, $w_{2^k} = r_{k+1}$, deci sistemul **f.W.** cuprinde sistemul funcţiilor Rademacher. De altfel, sistemul **f. W.** $\{\widetilde{w}_n\}_n$ este un sistem ortonormal complet în $L^2(\mu)$, unde μ este măsura Lebesgue pe $[0, 1]$. Mai general, sistemul **f. W.** este complet în $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, şi formează bază Schauder în spaţiul $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$ (pentru notaţii v. **spaţii** L^p). (*I.C.*)

funcţiile lui Baire O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este de clasă Baire zero dacă este continuă pe $[a, b]$; este de prima clasă Baire dacă nu este de clasă zero dar se poate reprezenta ca limită a unui şir convergent de funcţii de clasă zero pe $[a, b]$ (aici intră, între altele, derivatele funcţiilor derivabile, funcţiile cu variaţie mărginită şi funcţiile semicontinue pe $[a, b]$). Dacă f nu este nici de clasă zero nici de prima clasă, dar se poate reprezenta ca limită a unui şir convergent de funcţii de prima clasă, atunci f se numeşte de a doua clasă Baire (aici intră funcţia lui Dirichlet, egală cu zero în punctele iraţionale şi egală cu 1 în punctele raţionale). Presupunînd că am definit funcţiile de clasă Baire $n - 1$, funcţia f este considerată de clasa n dacă este limita unui şir convergent de funcţii de clasă $n - 1$. În acest fel se obţin toate funcţiile de clasă Baire finită.

Dacă f nu este de nici o clasă Baire finită, dar se poate reprezenta ca limită a unui şir convergent de funcţii de clasă Baire finită, atunci f este considerată de clasa ω (prima clasă transfinită). Funcţiile de clasă $\omega + 1$ sînt, prin definiţie, limite de şiruri convergente de funcţii de clasă ω, fără a fi de vreo clasă mai mică sau egală cu ω. Fie α un număr ordinal de clasa a doua. Să presupunem că am definit **f.B.** de orice clasă inferioară lui α. Funcţia f este de clasă Baire α dacă nu este de nici o clasă inferioară, dar se poate reprezenta ca limită de funcţii de clase inferioare lui α. După cum se vede, clasele Baire pot fi numere ordinale de prima sau de a doua clasă. Procedeul nu permite însă definirea funcţiilor de clasă Baire Ω (cel mai mic număr ordinal de puterea continuului). Într-adevăr, oricare ar fi şirul $\{f_n\}$ de **f.B.**, unde indicele clasei Baire a lui f_n este numărul ordinal $\alpha_n < \Omega$, există un număr ordinal γ mai mare decît toate numerele $\alpha_n (n = 1, 2, ...)$ şi care este de asemenea de a doua clasă; rezultă că dacă $\{f_n\}$ converge, limita f va aparţine unei clase Baire de indice cel mult egal cu $\gamma < \Omega$. Toate **f.B.** sînt măsurabile Lebesgue. Mulţimea **f.B.** are puterea continuului. Orice funcţie de clasă α se poate reprezenta ca limită de funcţii mărginite, de clasă inferioară lui α. Suma, diferenţa, produsul şi raportul (dacă funcţia de la numitor nu se anulează) a două **f.B.** de clasă α sînt **f.B.** de clasă α. Limita unui şir uniform convergent de **f.B.** de clase mai mici sau egale cu α este o **f.B.** de clasă mai mică sau egală cu α. Prin compunerea unei **f.B.** de clasă mai mică sau egală cu α cu o **f.B.** de clasă mai mică sau egală cu β se obţine o **f.B.** de clasă mai mică sau egală cu $\alpha + \beta$. H. Lebesgue a demonstrat că oricare ar fi numărul ordinal $\alpha < \Omega$ există funcţii de clasă Baire α. Tot el a arătat că pentru ca o funcţie f să fie de prima clasă Baire este necesar şi suficient ca mulţimile $\{x | a \leqslant x \leqslant b, f(x) > A\}$, $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b, f(x) < A\}$ să fie de tipul borelian F_σ. O *teoremă fundamentală* a lui R. Baire afirmă că funcţia f este de prima clasă Baire dacă şi numai dacă restricţia lui f la orice mulţime perfectă nevidă admite cel puţin un punct de continuitate. D. Preiss a arătat că orice funcţie de a doua clasă Baire este limita unui şir de derivate finite (şi chiar mărginite). Cea mai mare parte a consideraţiilor de mai sus rămîne valabilă şi pentru funcţii reale de mai multe variabile reale. Concomitent cu definiţia constructivă pe care am prezentat-o, se pot introduce **f.B.** şi pe cale descriptivă, axiomatică, globală, în felul următor: Familia **f.B.** este cea mai mică familie care conţine toate funcţiile continue şi care este închisă faţă de procesul de convergenţă. Pentru funcţii reale definite în spaţiul euclidian avem echivalenţă între **f.B.** şi funcţiile boreliene. În spaţii topologice mai generale, această echivalenţă nu se păstrează. De exemplu, dacă X este un spaţiu metric conex conţinînd cel puţin două puncte iar Y este spaţiul format din elementele 0 şi 1, unde singurele mulţimi deschise sînt $\{0\}$, $\{1\}$ şi $\{0, 1\}$, singurele funcţii continue definite pe X, cu valori în Y, sînt funcţia identic egală cu 1 şi funcţia identic nulă, deci acestea vor fi şi singurele **f.B.** Însă, fixînd un element a în X, funcţia egală cu 1 în a şi cu 0 în rest este o funcţie boreliană, fără a fi **f.B.** În general, orice **f.B.** este boreliană, dar nu şi reciproc. (*S. M.*)

funcţiile lui Haar, sistemul de funcţii reale definite pe [0, 1] prin: $\chi_0^{(0)} = 1$; $\chi_0^{(1)} = 1$ dacă $0 \leqslant t < 1/2$, -1 dacă $1/2 < t \leqslant 1$ şi 0 dacă $t = 1/2$; $\chi_n^{(k)}(t) = \sqrt{2^n}$ dacă $2k - 2/2^{n+1} \leqslant t < 2k - 1/2^{n+1}$, $-\sqrt{2^n}$ dacă $2k - 1/2^{n+1} < t \leqslant 2k/2^{n+1}$, 0 în celelalte puncte din [0, 1], $k \in \{1, 2, ..., 2^n\}$. Sistemul precedent se scrie ca un şir prin $\chi_1 = 1$, $\chi_m = \chi_n^k$ pentru $m = 2^n + k$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $m \in \{2, 3, ...\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sistemul $\{\chi_m\}_m$ formează bază necondiţionată în toate spaţiile $L^p_{[0,1]}$, $p > 1$. Sistemul $\left(1, \int_0^t \chi_m(x)\,\mathrm{d}x\right)_{m \in \{2, 3, \ldots\}}$ este bază Schauder în $C[0, 1]$. (*Ch.Gr.*)

funcţionala lui Minkowski v. **funcţională**

funcţională, funcţie definită pe un spaţiu liniar X sau pe o parte a lui X, cu valori în corpul scalarilor spaţiului X. **F.** fiind cazuri particulare de operatori, noţiunile de **f.** *aditivă*, **f.** *omogenă*, **f.** *liniară* se obţin din definiţiile date pentru operatori. Se numeşte **f.** *subliniară*, o funcţie reală p definită pe un clin E şi avînd proprietăţile: 1) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$; 2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda \geqslant 0$, $\forall x \in E$. Se numeşte **f.** *supraliniară* o funcţie reală q definită pe un clin E astfel ca funcţia $-q$ să fie o **f.** subliniară. Dacă A este o submulţime absorbantă a unui spaţiu liniar X, atunci funcţia p_A definită pe X prin $p_A(x) = \inf\{\mu > 0 \mid x \in \mu A\}$ se numeşte **f.** *lui Minkovski* asociată lui A. Dacă mulţimea absorbantă A este şi convexă, atunci p_A este o **f.** subliniară. (*R.C.*)

funcţională analitică Fie $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathbb{C}^n)$ spaţiul funcţiilor analitice întregi pe $\mathbb{C}^n$, înzestrat cu topologia convergenţei uniforme pe mulţimile compacte (faţă de această topologie $\mathscr{A}(\mathbb{C}^n)$ este un spaţiu Fréchet). O **f.a.** u este, prin definiţie, un element al dualului lui $\mathscr{A}(\mathbb{C}^n)$, deci o funcţională liniară şi continuă pe $\mathscr{A}(\mathbb{C}^n)$. Funcţionala u se spune că este *suportată* de mulţimea compactă K dacă pentru orice vecinătate ω a lui K există o constantă C_ω astfel ca $|u(f)| \leqslant C_\omega \sup\limits_{\omega} |f|$, $f \in A$. Se notează cu $\mathscr{A}'(K)$ spaţiul **f.a.** suportate de K. $\mathscr{A}(K)$ are în mod natural o topologie de spaţiu Fréchet. Pentru orice **f.a.** u se defineşte transformata Laplace prin formula $\widetilde{u}(\zeta) = u_z(\mathrm{e}^{\langle z, \zeta \rangle})$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Are loc următoare caracterizare a funcţiilor întregi ce sînt transformate Laplace de **f.a.**

Teorema Pólya-Ehrenpreis-Martineau. Funcţia $M(\zeta)$ analitică întreagă este transformata Laplace a unei **f.a.** u suportate de mulţimea compactă K dacă pentru orice $\delta > 0$ există o constantă C_δ astfel ca $|M(\zeta)| \leqslant C_\delta \exp(H_k(\zeta) + \delta |\zeta|)$ pentru orice $\zeta \in \mathbb{C}^n$.

Aici H_K este funcţia de sprijin a înfăşurătorii convexe a lui K. În general, pentru o **f.a.** u nu există o cea mai mică mulţime compactă care să o suporte. Dar dacă $u \in A_0(\mathbb{R}^n)$, atunci acest compact minimal există şi se numeşte *suportul* lui u. **F.a.** prezintă importanţă şi pentru că, local, orice hiperfuncţie este sumă de **f.a.** (v. **hiperfuncţii**). (*G.G.*)

funcţională biaditivă v. **operator biaditiv**

funcţională biliniară v. **operator biaditiv**

funcţională hermitiană, funcţie $\psi : X \times X \to \Gamma$, unde X este un spaţiu liniar cu scalari în corpul Γ (al numerelor reale sau complexe), cu următoarele proprietăţi: 1) $\psi(x, y) = \overline{\psi(y, x)}$ (bara indicînd numărul conjugat); 2) $\psi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\psi(x, z) + \beta\psi(y, z)$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$. Se spune că o **f.h.** ψ este *pozitiv definită* dacă $\psi(x, x) \geqslant 0$, $\forall x \in X$. Dacă ψ este o **f.h.** pozitiv definită, atunci pentru orice elemente x, y ale lui X avem $|\psi(x, y)|^2 \leqslant \psi(x, x)\,\psi(y, y)$, numită *inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz*. Dacă X este un spaţiu liniar normat iar $\psi : X \times X \to \Gamma$ o **f.h.** şi dacă există un număr $\mu > 0$ astfel ca $|\psi(x, y)| \leqslant \mu \|x\| \cdot \|y\|$, $\forall x, y \in X$, atunci ψ se numeşte **f.h.** *mărginită*. (*R.C.*)

funcţională (o)**-continuă** v. **operator regulat**

funcţională (ω)**-continuă** v. **operator regulat**

funcţională (o)**-mărginită** v. **operator regulat**

funcţională pozitivă v. **operator regulat**

funcţională regulată v. **operator regulat**

G

generator infinitezimal (al unui semigrup de operatori) v. **semigrup de operatori**

genul (unei suprafețe riemanniene compacte) v. **divizor**

germen v. **prefascicol, fascicol**

gradient v. **analiză vectorială, integrare pe o varietate riemanniană orientată.**

graficul unui operator v. **operator închis**

grup cu un parametru de difeomorfisme v. **fibratul tangent**

grup de coomologie v. **coomologia fascicolelor**

grup discret v. **latice de perioade**

grup fundamental v. **omotopie**

grup Lie, o varietate diferențială G de clasă C^∞ înzestrată cu o structură de grup astfel încît aplicația $G\times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$ să fie de clasă C^∞. Ex.: 1° Grupul aditiv $\mathbb{R}^{n\times m} \simeq \mathbb{R}^{nm}$ al tuturor matricilor reale de tip $n\times m$. 2° *Grupul liniar general* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2} \mid \det A \neq 0\}$ cu înmulțirea de matrici uzuală. 3° *Grupul liniar special* $\mathrm{SL}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$. 4° *Grupul ortogonal* $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R} \mid {}^tA\,A = I\}$, unde ${}^tA$ este transpusa matricii A. 5° *Grupul ortogonal special* $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$. (*M.J.*)

grup Lie complex, o varietate complexă G înzestrată cu o structură de grup astfel încît aplicația $G\times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$ să fie olomorfă. Ex.: 1° Grupul aditiv $\mathbb{C}^{n\times m} \simeq \mathbb{C}^{mn}$ al tuturor matricilor de numere complexe de tip $n\times m$. 2° *Grupul liniar general* $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \simeq \mathbb{C}^{n^2} \mid \det A \neq 0\}$ cu înmulțirea de matrici uzuală. 3° Pentru orice latice Γ în $\mathbb{C}^n$, torul complex $T\colon \mathbb{C}^n/\Gamma$ este un **g.L.c.** (*M. J.*)

grup propriu discontinuu Dacă M este o varietate complexă, se numește *automorfism* al lui M orice izomorfism analitic $h\colon M \to M$. Automorfismele lui M formează un **grup**, notat $\mathrm{Aut}(M)$, avînd ca înmulțire compunerea. Un punct $a \in M$ se numește *punct fix* al unui automorfism $h \in \mathrm{Aut}(M)$ dacă $h(a) = a$. Se numește *grup de automorfisme* pe M orice subgrup al grupului $\mathrm{Aut}(M)$. Fie G un grup de automorfisme pe M. Pentru orice punct $x \in M$, mulțimea $Gx := \{g(x) \mid g \in G\}$ se numește *orbita* lui G care trece prin punctul x; două orbite ale lui G sau coincid sau sînt disjuncte. Mulțimea tuturor orbitelor lui G se notează prin M/G. Se spune că grupul de automorfisme G *acționează liber* pe M dacă identitatea lui M este singurul element din G care are puncte fixe. De asemenea, se spune că G este un **g.p.d.** (sau că G *acționează propriu discontinuu* pe M) dacă, pentru orice pereche de mulțimi compacte $K, L \subset M$, mulțimea $\{g \in G \mid g(K) \cap L \neq \varnothing\}$ este finită.

Teoremă. Dacă grupul de automorfisme G acționează liber și propriu discontinuu pe M, spațiul cît M/G are o unică structură complexă pentru care aplicația canonică $\pi\colon M \to M/G$ este olomorfă. Ex.: Fie Γ o latice în $\mathbb{C}^n$ și $G := \{g_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, unde g_γ este translația $\mathbb{C}^n \ni z \mapsto z + \gamma \in \mathbb{C}^n$. Atunci G este un grup de automorfisme care acționează liber și propriu discontinuu pe $\mathbb{C}^n$; varietatea complexă cît $\mathbb{C}^n/G$ coincide cu torul complex $\mathbb{C}^n/\Gamma$. (*M. J.*)

grup topologic, grup G în care este dată o topologie în raport cu care aplicația $(x, y) \to x^{-1}y$ a lui $G\times G$ în G este continuă. Într-un **g.t.** G, pentru orice $a \in G$, aplicațiile $x \to ax$, $x \to xa$, $x \to a^{-1}x$, $x \to xa^{-1}$ sînt homeomorfisme ale lui G pe G. Dacă $\mathcal{B}$ este o bază de vecinătăți ale unității **g.t.** G, atunci familiile $\{xB \mid B \in \mathcal{B}\}$ și $\{Bx \mid B \in \mathcal{B}\}$ sînt baze de vecinătăți ale punctului x ($xB = \{xy \mid y \in B\}$). Fie $\mathcal{V}$ familia vecinătăților unității e și pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$ fie

$$V_s = \{(x, y) \mid x^{-1}y \in V\},\quad V_d = \{(x, y) \mid yx^{-1} \in V\}.$$

Familiile $\mathcal{W}_s = \{V_s \mid V = \mathcal{V}\}$ și $\mathcal{W}_d = \{V_d \mid V = \mathcal{V}\}$ sînt atunci baze de împrejurimi pentru două structuri uniforme $\mathcal{U}_s$ și $\mathcal{U}_d$, ambele compatibile cu topologia **g.t.** G. Aceste două structuri uniforme coincid dacă grupul este comutativ sau compact. (*Gh. Gr.*)

grup topologic local compact v. **măsura (Radon) Haar**

grupul caracterelor unui grup comutativ Fie G un grup comutativ local compact. Se numește *caracter* pe G orice aplicație nenulă $u\colon G \to \mathbb{C}$, care este continuă și multiplicativă, *i.e.* $u(st) = u(s)\,u(t)$ pentru orice s și t în G. Se arată că $|u(s)| = 1$ pentru orice s în G și $u(e) = 1$, unde e este elementul unitate în G. Mulțimea $\hat{G}$ a caracterelor lui G formează grup față de operația $uv = w$, unde $w(s) = u(s)\,v(s)$, s în G. Fie μ măsura Haar a lui G. Atunci să notăm prin $\mathrm{Rep}(G)$ mulțimea reprezentărilor nenule și continue $V\colon L^1(\mu) \to \mathbb{C}$. Reamintim că $L^1(\mu)$ este privit ca algebră grupală (v. **algebră grupală**) și atunci o reprezentare a algebrei $L^1(\mu)$ în algebra $\mathbb{C}$ este o aplicație liniară și multiplicativă $V\colon L^1(\mu) \to \mathbb{C}$. Rezultă că există o aplicație bijectivă $\Omega\colon \hat{G} \to \mathrm{Rep}(G)$ definită prin $\Omega(u) = V$, unde $V(\tilde{f}) = \int f(s)\,u(s)\,\mathrm{d}\mu(s)$ (aici $\tilde{f} \in L^1(\mu)$ este clasa lui $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ și definiția este coerentă). Se arată că $\mathrm{Rep}(G) \subset \{x'\colon L^1(\mu) \to \mathbb{C} \mid x'$ este liniară, continuă și $\|x'\| = 1\}$. Putem considera pe $\mathrm{Rep}(G)$ topologia indusă de topologia slabă de dual $\sigma((L^1(\mu))', L^1(\mu))$. Prin transport, obținem topologia τ pe $\hat{G}$, pentru care un sistem fundamental de vecinătăți ale caracterului u_0 este dat de toate mulțimile de forma

$$\left\{u \in \hat{G} \;\middle|\; \left|\int f_i(s)\,(u(s) - u_0(s))\,\mathrm{d}\mu(s)\right| < \varepsilon,\quad i \in F\right\},$$

unde ε parcurge mulțimea numerelor strict pozitive, iar $\{f_i\}_{i\in F}$ este o familie finită arbitrară de elemente din $\mathcal{L}^1(\mu)$. Se arată că τ coincide cu topologia τ' a convergenței uniforme pe mulțimile compacte ale lui G. În topologia τ', un sistem fundamental de vecinătăți pentru caracterul u_0 este format de toate mulțimile de forma $\{u \in \hat{G} \mid |u(s) - u_0(s)| < \varepsilon$ pentru orice s în $K\}$, unde ε parcurge mulțimea numerelor strict pozitive iar K mulțimea tuturor părților compacte ale lui G. În plus, grupul $\hat{G}$ cu topologia τ (sau τ') este un grup topologic local compact separat comutativ. Se arată că G este compact dacă și numai dacă $\hat{G}$ este discret. Putem deci considera grupul topologic al caracterelor lui $\hat{G}$, pe care îl vom nota prin $\hat{\hat{G}}$.

Teorema lui Pontriaghin. Grupurile G și $\hat{\hat{G}}$ sînt izomorfe algebric și topologic prin aplicația $\Phi\colon G \to \hat{\hat{G}}$, definită prin $\Phi(x) = X$, unde $X(u) = u(x)$, pentru orice caracter u din $\hat{G}$.

Pe $\hat{\hat{G}}$ se consideră topologia descrisă anterior pe g.c.g.c. (aici pe grupul caracterelor lui G). Ex.: Luăm $G = \mathbb{R}^n$ cu structura de grup aditiv. Măsura Haar este măsura Lebesgue. Se arată că grupul $\hat{G}$ este izomorf cu $\hat{G} = \mathbb{R}^n$, după cum urmează. Un prim exemplu de izomorfism este $T\colon \mathbb{R}^n \to \hat{G}$, $T(y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = Ty \in \hat{G}$, unde $Ty(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = e^{i\langle x|y\rangle}$. Am notat $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ (este produsul scalar obișnuit în $\mathbb{R}^n$). „Complicînd“ puțin acest exemplu, vom lua, pentru un număr real nenul fixat a, izomorfismul următor: $T^a\colon \mathbb{R}^n \to \hat{G}$, $T^a(y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = T^a_y \in \hat{G}$, unde $T^a_y(x) = e^{ia\langle x|y\rangle}$. (*I. C.*)

grupul liniar general v. **grup Lie**
grupul modular v. **funcție modulară**
grupul ortogonal v. **grup Lie**

H

hartă complexă v. **varietate analitică complexă**
hartă reală v. **varietate diferențială**

hiperfuncție, cea mai largă clasă de funcții generalizate localizabile; ele au fost introduse de M. Sato și se pot defini în mai multe moduri. Cea mai simplă definiție se bazează pe noțiunea de funcțională analitică. Dacă Ω este o mulțime deschisă și mărginită în $\mathbb{R}^n$, spațiul **h.** pe Ω, $\mathcal{B}(\Omega)$ este, prin definiție, $\mathcal{A}'(\overline{\Omega})/\mathcal{A}'(\partial\Omega)$; aici $\mathcal{A}'(\overline{\Omega})$ este spațiul funcționalelor analitice purtate de $\overline{\Omega}$, iar $\mathcal{A}'(\partial\Omega)$ cele purtate de $\partial\Omega$. Se definește astfel un prefascicol $\Omega \to \mathcal{B}(\Omega)$ care se dovedește a fi un fascicol, fascicolul **h.** pe $\mathbb{R}^n$. Cealaltă cale de a defini **h.** pornește de la ideea de valoare la bord a unei funcții analitice. În cazul $n = 1$, dacă I este un interval din $\mathbb{R}$, este natural să considerăm, pentru orice vecinătate ω din $\mathbb{C}$ a lui I, $\mathcal{O}(\omega\setminus I)/\mathcal{O}(\omega)$. Se constată că acest cît nu depinde de alegerea vecinătății ω a lui I și se notează $\mathcal{B}(I)$, **h.** pe I. Intuitiv o astfel de **h.** nu este decît saltul la trecerea prin I a unei funcții olomorfe în vecinătatea lui I. Generalizînd la $n > 1$ se constată că apar cîturi mai complicate, dar care au o interpretare coomologică în termeni de coomologie relativă; după Sato, $\mathcal{B}(\Omega) = H^n_\Omega(U, \mathcal{O})$ cu Ω mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$, U deschis de olomorfie astfel ca $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$. Dacă se utilizează izomorfismul dintre acest grup de coomologie și $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{O})$, unde $\mathcal{O}$ este fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe $\mathbb{C}^n$, U deschis de olomorfie în $\mathbb{C}^n$, $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ iar $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ este o acoperire relativă a lui $(U, U\setminus\Omega)$ de forma: $\mathcal{U} = (U_0, U_1, \ldots, U_n)$, $U_0 = U$, $\mathcal{U}' = (U_1, \ldots, U_n)$, iar $U_j = U \cap \{z \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Im}_{j=1,\ldots,n} z \neq 0\}$ se găsește că $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^n) \Big/ \sum_1^n \mathcal{O}(U_1, \ldots, \hat{j}, \ldots, n)$; aici s-a notat cu $U_1, \ldots, \hat{j}, \ldots, n = U_1 \cap U_2 \cap U_{j-1} \cap U_{j+1} \cap \ldots \cap U_n$, deci o interpretare concretă, în termeni de funcții olomorfe. Orice **h.** apărînd ca o secțiune a unui fascicol, se poate defini natural suportul său. Faptul remarcabil este că fascicolul **h.** este flasc, *i.e.* orice **h.** definită pe un deschis se poate prelungi la întreg spațiul (fapt ce nu se întîmplă cu distribuțiile, în general). Tot atît de remarcabil este faptul că cele două definiții, cea coomologică și cea prin funcționale analitice coincid (fapt evidențiat de Martineau). Alegînd alte acoperiri relative se obțin alte reprezentări „concrete“ ale **h.** Astfel, dîndu-se $n + 1$ vectori nenuli din $\mathbb{R}^n$, $\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}$, cu proprietatea că reuniunea semispațiilor $\eta_j^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^n, \langle y, \eta_j\rangle > 0\}$ acoperă pe $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ și considerîndu-se acoperirea $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ a lui $(U, U\setminus\Omega)$ (cu U vecinătate complexă a lui Ω, și domeniu de olomorfie), $\mathcal{V} = (V_0, V_1, \ldots, V_{n+1}\}$. $\mathcal{V}' = (V_1, \ldots, V_{n+1})$, unde $V_0 = U$, $V_j = U \cap (\mathbb{R}^n + i\eta_j^1)$, $j = 1, \ldots, n$, se găsește că

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigoplus_{j=1}^{n+1} \mathcal{O}(U) \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma)) \Big/ \sum_{1\leqslant j<j\leqslant n+1} \mathcal{O}(V_1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, \hat{j}, \ldots, n+1),$$

unde Γ_j este conul $\eta_1^{\perp} \cap \ldots \cap \eta_{j-1}^{\perp} \cap \eta_{j+1}^{\perp} \cap \ldots \cap \eta_{n+1}^{\perp}$. Fiecărei funcții olomorfe φ în $U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma)$ i se atașează **h.** valoare la bord, $b_\Gamma(\varphi)$ după conul deschis Γ în modul următor: se aleg vectorii $\eta_1, \dots, \eta_{n+1}$ astfel ca $\Gamma_1 = \eta_2^{\perp} \cap \dots \cap \eta_{n+1}^{\perp}$ să fie inclus în Γ și se consideră **h.** definită de funcțiile $\psi_j \in \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j))$, $j = 1, \dots, n+1$, unde $\psi_1 = \varepsilon\varphi \mid \Gamma_1$ și $\varepsilon = \pm 1$, după cum orientarea bazei $\eta_2, \dots, \eta_{n+1}$ a lui $\mathbb{R}^n$ este pozitivă sau negativă, iar $\psi_j = 0$ pentru $j = 2, \dots, n+1$. **H.** definită de cele $(n+1)$ funcții $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1})$ $(\varepsilon\varphi \mid \Gamma_1, 0, \dots, 0)$ nu depinde de alegerea vectorilor $\eta_1, \dots, \eta_{n+1}$ și se mai notează $\varphi(x + i\Gamma 0)$. Morfismul $b_\Gamma : \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma 0) \to \mathcal{B}(\Omega)$ este injectiv. Are loc următorul rezultat, care justifică considerarea **h.** ca valori la bord de funcții analitice: Dacă Ω este o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$, U un domeniu de olomorfie din $\mathbb{C}^n$, $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ și f o **h.** în Ω, atunci, dacă $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sînt conuri convexe deschise din $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că dualele lor $\Gamma_1^{\perp}, \dots, \Gamma_n^{\perp}$ acoperă pe $\mathbb{R}^n$ (aici $\Gamma_k^{\perp} = \{\eta \in \mathbb{R}^n, <\xi, \eta> \geqslant 0 \text{ pentru } \xi \in \Gamma_k\}$), există funcții olomorfe $\varphi_j \in \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j))$, $j = 1, \dots, m$, astfel ca $f = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (x + i\Gamma_j 0) = \sum_{j=1}^{m} b_{\Gamma_j}(\varphi_j)$. **H.** se pot deriva și înmulți cu funcții analitice reale: ele sînt deci bine adaptate categoriei analitice. Aceste definiții se extind la varietăți analitice reale. **H.** s-au dovedit un instrument extrem de util în studiul ecuațiilor diferențiale cu coeficienți analitici și în probleme de analiticitate ridicate de fizica teoretică. *(G. G.)*

hiperplan v. **varietate liniară**

hiperplan de sprijin v. **varietate liniară**

hiperplan închis (într-un spațiu liniar topologic), hiperplan care este o mulțime închisă. Fie X un spațiu liniar topologic real. Dacă f este o funcțională liniară nenulă definită pe X iar λ un număr real, atunci hiperplanul $H = \{x \in X \mid f(x) = \lambda\}$ este o mulțime închisă dacă și numai dacă funcționala f este continuă. Dacă A este o submulțime (nevidă) convexă și deschisă a lui X iar E o varietate liniară în X, disjunctă de A, atunci există un **h.î.** H disjunct de A și care conține E. Dacă A și B sînt două submulțimi (nevide) convexe, deschise și disjuncte, atunci există un **h.î.** $H = \{x \in X \mid f(x) = \lambda\}$ astfel ca $A \subset \{x \in X \mid f(x) < \lambda\}$ și $B \subset \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$. În acest caz se spune că *H separă strict A de B*. Dacă X este un spațiu local convex, separat, real, A o submulțime (nevidă) convexă și închisă iar B o submulțime (nevidă) convexă și compactă astfel ca $A \cap B = \varnothing$, atunci există un **h.î.** care separă strict A de B. *(R. C.)*

hipersubspațiu v. **spațiu liniar**

hipersuprafață diferențiabilă, subvarietate diferențiabilă a lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiune $n - 1$. O submulțime S a lui $\mathbb{R}^n$ este o hipersuprafață de clasă C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, dacă și numai dacă pentru orice punct $a \in S$, există o mulțime deschisă $U \ni a$ în $\mathbb{R}^n$ și o submersie $f \in C^k(U)$ astfel încît $S \cap U = f^{-1}(0)$. Notăm că, în această situație, spațiul tangent geometric la S în punctul a este dat de

$$T(S)_a^{\text{geom}} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \right\}$$

(v. **spațiu tangent geometric**). În cazul $n = 3$ se spune *suprafață diferențiabilă* în loc de **h.d.** *(M. J.)*

homeomorfism v. **funcție continuă**

I, Î

ideal v. **algebră**

ideal al unei latici booleene v. **reprezentarea laticilor booleene**

ideal maximal v. **algebră**

ideal nenul v. **algebră**

ideal propriu v. **algebră**

idealul lui Cartan v. **spațiu $\mathbb{C}$-analitic**

identitatea lui Euler v. **funcția ζ**

identitatea unui obiect v. **categorie**

ieșire v. **sisteme dinamice comandate**

imagine directă inelată v. **modul pe un spațiu inelat**

imagine inversă inelată v. **modul pe un spațiu inelat**

imaginea inversă (a unei forme diferențiale) v. **formă diferențială** (pe o varietate diferențiabilă)

imaginea inversă (a unui fibrat vectorial) Fie M și N două varietăți diferențiabile de clasă C^r, $\varphi \in C^r(M, N)$ și F un fibrat vectorial de clasă C^r peste N. **I.i.** a lui F prin φ este fibratul vectorial, notat φ^*F, cu proprietățile următoare: 1) Pentru orice punct $x \in M$, $(\varphi^*F)_x = \{x\} \times F_{\varphi(x)}$ ca spații vectoriale (structura de spațiu vectorial pe mulțimea $\{x\} \times F_{\varphi(x)}$ fiind cea furnizată de al doilea factor); 2) Dacă $(f_1, \dots, f_p)$ este un reper local al lui F, atunci $(e_1, \dots, e_p)$ este un reper local al lui φ^*F, unde $e_i(x) := (x, f_i(\varphi(x)))$ pentru orice punct $x \in M$ astfel încît $\varphi(x)$ să aparțină domeniului reperului $(f_1, \dots, f_p)$. Astfel

$$\varphi^*F = \{(x, v) \in M \times F \mid \varphi(x) = \pi_F(v)\}$$

și, în fapt, φ^*F este o subvarietate diferențiabilă de clasă C^r a produsului direct $M \times F$. *(M. J.)*

imaginea unei măsuri printr-o aplicație Să considerăm un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$, un spațiu măsurabil $(S, \mathcal{S})$ și o aplicație $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$-măsurabilă $p : T \to S$. *Imaginea măsurii* μ prin aplicația p este măsura $p(\mu) : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin $p(\mu)(A) = \mu(p^{-1}(A))$. Se obține astfel spațiul cu măsură $(S, \mathcal{S}, p(\mu))$. Mai general, dacă $\mathcal{C}$ este o σ-algebră de părți ale lui T și $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o măsură numărabil aditivă, vom considera o aplicație $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$-măsurabilă $p : T \to S$. Definim și în acest caz măsura $p(\mu)$, prin $p(\mu) := p(\mu^{**})$, unde μ^{**} este extensia măsurii μ (v. **extensia măsurilor pozitive definite pe un clan**); numim și în acest caz pe $p(\mu)$ imaginea măsurii μ prin aplicația p. Notăm cu Γ corpul scalarilor (reali sau complecși) și considerăm o funcție $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ (sau Γ) care este $p(\mu)$-integrabilă. Atunci rezultă că funcția $f \circ p$ este μ-integrabilă și pentru orice $A \in \mathcal{S}$ avem

$$\int_A f(y)\, \mathrm{d}(p(\mu))(y)) = \int_{p^{-1}(A)} f(p(x))\, \mathrm{d}\mu(x)$$

(*teorema schimbării de variabilă*). Vom presupune în plus existența unui spațiu cu măsură $(S, \mathcal{S}', \nu)$ cu proprietățile: a) $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$; b) $\nu(A) = 0 \Rightarrow p(\mu)(A) = 0$ (*i.e.* $p(\mu)$ este absolut continuă în raport cu ν pe $\mathcal{S}'$; c) Măsura ν este total σ-finită; d) Măsura $p(\nu)$ este total σ-finită. În aceste condiții există o funcție $\varphi: S \to [0, \infty)$ care este ν-măsurabilă și cu proprietatea că pentru orice $A \in \mathcal{S}$ avem

$$\int_A f(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_{p^{-1}(A)} f(p(x))\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Aici φ este o derivată Radon-Nikodym a lui $p(\mu)$ în raport cu ν (*teorema schimbării de variabilă* (variantă)); v. și **formula schimbării de variabilă** (pentru integrala Lebesgue). (*I. C.*)

imagini de măsuri Radon Fie μ o măsură Radon pozitivă pe spațiul local compact separat T și X un spațiu local compact separat. O aplicație μ-măsurabilă $\pi: T \to X$ se numește *aplicație μ-proprie* (*sau aplicație proprie în raport cu* μ) dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset X$ mulțimea $\pi^{-1}(K)$ este μ-integrabilă și pentru orice funcție continuă numerică f cu suport compact pe X funcția $f \circ \pi$ este esențial μ-integrabilă. *Imaginea măsurii* μ prin π este măsura Radon pe X, notată prin $\pi(\mu)(f)$ și definită prin $\pi(\mu)(f) = \int f(\pi(t))\,\mathrm{d}\mu(t)$ pentru orice funcție continuă numerică f cu suport compact pe X. Pentru orice funcție $f: X \to F$,unde $F = \overline{\mathbb{R}}$ (sau un spațiu Banach), a spune că f este esențial $\pi(\mu)$-integrabilă este echivalent cu a spune că $f \circ \pi$ este esențial μ-integrabilă. În acest caz, avem $\int f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int f(\pi(t))\,\mathrm{d}\mu(t)$, unde $\nu = \pi(\mu)$. Dacă $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ este o măsură Radon oarecare imaginea prin π a lui λ este $\pi(\lambda) = \pi(\lambda^+) - \pi(\lambda^-)$ etc. (*I.C.*)

imersie v. **spațiu tangent**

indexul unui drum, numărul $n_\lambda(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\lambda \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$, unde λ este un drum rectificabil și închis în $\mathbb{C}$, $z \notin \operatorname{supp}\lambda = \{\lambda(t) \mid t \in [0, 1]\}$. Se face precizarea că $n_\lambda(z)$ este *indexul* (sau *indicele*) drumului λ în raport cu z. Numărul $n_\lambda(z)$ este întreg, funcția $z \to n_\lambda(z)$ este olomorfă, local constantă (constantă pe orice domeniu inclus în $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\lambda$) iar dacă z aparține componentei conexe nemărginite a lui $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\lambda$, atunci $n_\lambda(z) = 0$. Dacă, spre exemplu, λ este drumul $\lambda(t) = a + re^{2\pi i t}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, atunci $n_\lambda(z) = 1$ dacă $|z - a| < r$ și $n_\lambda(z) = 0$ dacă $|z - a| > r$. Dacă $\lambda_k(t) = a + re^{2k\pi i t}$, unde k este număr întreg, atunci $n_{\lambda_k}(z) = k$ dacă $|z - a| < r$ și $n_{\lambda_k}(z) = 0$ dacă $|z - a| > r$. (*Gh. Gr.*)

indicatoarea lui Banach Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție reală continuă. Să notăm $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ și $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Atunci, pentru orice $y \in [m, M]$, mulțimea de nivel $F(y) = \{x \in [a, b] \mid f(x) = y\}$ este nevidă. Definim funcția pozitivă $N: [m, M] \to \overline{\mathbb{R}}_+$ prin $N(y) = \operatorname{card} F(y)$ dacă $F(y)$ este finită și $N(y) = \infty$ dacă $F(y)$ este infinită. Funcția N este măsurabilă în raport cu măsura Lebesgue pe $[m, M]$ și se numește **i.B.** *Teorema lui Banach* asupra funcției indicatoare afirmă că avem egalitatea $\displaystyle\int_a^b N(y)\,\mathrm{d}y = \bigvee_a^b (f)$. Cu alte cuvinte, integrala **i.B.** în raport cu măsura Lebesgue este egală cu variația totală a funcției (putînd fi eventual infinită). (*I. C.*)

indicatoarea unei mulțimi v. **funcția caracteristică a unei mulțimi**

inducția matematică face obiectul unei teoreme (sau **axiome**) care afirmă că dacă o mulțime M de numere naturale conține pe 1 și, odată cu n, conține pe succesorul $n + 1$ al lui n, atunci M este mulțimea tuturor numerelor naturale. (*S. M.*)

inecuații variaționale de evoluție Fie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o submulțime convexă și închisă în $\mathbb{R}^n$. O funcție $x \in [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ se umește *soluție* a **i.v.e.** definită de f și K dacă $x(t) \in K$ pentru orice $t \in [t_0, T]$, x este absolut continuă și

$$< x(t) - j(x(t)),\ x(t) - y > \leqslant 0$$

a.p.t. în $[t_0, T]$ pentru orice $y \in K$. Aici $<,>$ este produsul scalar uzual în $\mathbb{R}^n$. Cînd $K = \mathbb{R}^n$, x este soluție a **i.v.e.** definită de f dacă și numai dacă x este soluție a sistemului de ecuații diferențiale definit de f. Se demonstrează că dacă f este lipschitziană, atunci pentru orice $x_0 \in K$ există o soluție unică a **i.v.e.** definită de f verificînd $x(t_0) = x_0$. O generalizare la cazul infinit dimensional (inecuații variaționale parabolice) este următoarea. Fie V, H un cuplu de spații Hilbert reale astfel încît V este dens în H și $V \subset H \subset V^*$, V^* este dualul, neidentificat cu V al lui V iar incluziunile sînt în sens algebric și topologic. Fie $A: V \to V'$ continuu astfel încît $(Au, v) = (u, Av)$ pentru orice $u, v \in V$ și $(Au, u) \geqslant \omega \| u \|^2$, $\omega > 0$, pentru orice $u \in V$; s-a notat cu $(.,.)$ funcționala biliniară de dualitate dintre V și V^*. Fie $u_0 \in \overline{K}^H$, închiderea lui K în spațiul H, și $f \in L^2(0, T, H)$. Se demonstrează că există, și este unică, $u \in C(0, T, H)$ astfel încît $u(0) = u_0$, $u(t) \in K$ a.p.t. în $(0, T)$,

$$\sqrt{t}u'(t) \in L^2(0, T, H) \quad (u'(t) + Au(t) - j(t), u(t), v) \leqslant 0$$

a.p.t. în $(0, T)$ pentru orice $v \in K$. (*A. H.*)

inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz v. **funcțională hermitiană**

inegalitatea lui Bessel v. **spațiu Hilbert**

inegalitatea lui Hölder v. **spații L^p**

inegalitatea lui Jensen Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură probabilistică și $f: T \to \mathbb{R}$ o funcție μ-integrabilă. Fie și $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis cu proprietatea că $f(T) \subset I$, precum și o funcție convexă $F: I \to \mathbb{R}$. Se presupune că funcția compusă $F \circ f: T \to \mathbb{R}$ (definită prin $(F \circ f)(t) = F(f(t))$ pentru orice t din T) este μ-integrabilă. În aceste condiții are loc **i.J.**:

$$F\left(\int f\,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int (F \circ f)\,\mathrm{d}\mu, \quad \text{unde} \int f\,\mathrm{d}\mu \in I. \quad (I.C.)$$

inegalitatea lui Minkowski v. **spații L^p**

inegalitățile lui Cauchy Dacă f este o funcție olomorfă pe discul deschis $|z - a| < R$, unde a este un punct din planul complex $\mathbb{C}$ și R un număr real > 0, atunci f admite dezvoltarea Taylor $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - a)^n$, valabilă pe întreg discul $|z - a| < R$. Coeficienții a_n în această dezvoltare se calculează prin formulele

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a| = r} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \quad 0 < r < R,\ n \geqslant 0,$$

și, în particular, satisfac **i. C.**

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{R^n}, \text{ unde } M = \sup_{|z - a| < R} |f(z)|;$$

aceste inegalități sînt deci semnificative numai cînd f este mărginită pe discul $|z-a|<R$, *i.e.* numai în cazul $M<\infty$. O consecință imediată a **i.C.** este

Teorema lui Liouville. Orice funcție întreagă și mărginită este o constantă. Dintre aplicațiile teoremei lui Liouville menționăm aici *teorema fundamentală a algebrei*: Fie $F(z)=z^n+a_1z^{n-1}\ldots+a_n$ un polinom de grad n, cu coeficienți numere complexe. Dacă $n\geqslant 1$, ecuația $F(z)=0$ are cel puțin o rădăcină. (*M.J.*)

inel (de mulțimi) v. **clasă de mulțimi**

inel Boole Un inel $(A,+,\cdot)$ se numește **i.B.** (sau **i.** *boolean*) dacă orice element x din A este idempotent, *i.e.* $x^2=x$. Rezultă că A este comutativ și $x+x=0$ pentru orice x din A. Dacă $\mathcal{C}$ este un clan de părți ale lui T, atunci $\mathcal{C}$ devine **i.b.** cu operațiile: $A+B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\,\Delta\,B$ și $A\cdot B=A\cap B$ pentru orice A,B în $\mathcal{C}$. Elementul zero (pentru adunare) este $\emptyset$. Dacă $\mathcal{C}$ este algebră de părți ale lui T, atunci inelul de mai sus devine **i.B.** cu unitate (element neutru la înmulțire), unitatea fiind T. Un **i.B.** $(A,+,\cdot)$ cu element zero $\widetilde{0}$, care are element unitate $\widetilde{1}$ devine algebră Boole cu ordinea dată de $x\leqslant y:\Leftrightarrow xy=x$. Anume, cel mai mic element este $\widetilde{0}$, cel mai mare element este $\widetilde{1}$, pentru fiecare x din A punem $x^*=\widetilde{1}+x$. Avem atunci $x\wedge y=xy$ și $x\vee y=x+y+xy$ pentru orice x,y din A. Reciproc, dacă $(A,\leqslant)$ este algebră Boole, ea devine **i.B.** cu unitate punînd $x+y=(x\vee y^*)\vee(y\wedge x^*)$ și $xy=x\wedge y$; elementul zero este $\widetilde{0}$ și elementul unitate este $\widetilde{1}$. Așadar, noțiunile de algebră Boole și **i.B.** cu unitate sînt echivalente. (*I. C.*)

inel ereditar v. **clasă de mulțimi**

infimum v. **mulțime ordonată**

integrabilitate Denjoy-Hincin Funcția $f:I\to\mathbb{R}(\mathbb{R}\supset I=\text{interval})$ este integrabilă Denjoy-Hincin dacă există $F:I\to\mathbb{R}$ absolut continuă generalizată în sens larg pe I astfel încît derivata aproximativă a lui F este egală cu f a.p.t. pe I. Numărul $F(b)-F(a)$ este, în acest caz, valoarea integralei Denjoy-Hincin a lui f pe $I=[a,b]$. Orice derivată aproximativă este integrabilă Denjoy-Hincin. (*S. M.*)

integrabilitate Denjoy-Perron Funcția $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este integrabilă Denjoy-Perron pe I dacă există o funcție $F:I\to\mathbb{R}$ absolut continuă generalizată în sens restrîns pe I, astfel încît a.p.t. pe I avem $F'=f$. Numărul $F(b)-F(a)$ este, în aceste condiții, valoarea integralei Denjoy-Perron a lui f pe $I=[a,b]$. Orice derivată este integrabilă Denjoy-Perron. Orice funcție $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrabilă Lebesgue pe I este integrabilă Denjoy-Perron pe I iar cele două integrale sînt egale. Pentru funcții pozitive **i.D.P.** revine la integrabilitatea Lebesgue. Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este integrabilă Denjoy-Perron, există un subinterval al lui I în care f este integrabilă Lebesgue. (*S. M.*)

integrabilitate Riemann Fie f o funcție reală definită pe intervalul compact $[a,b]$. Fie Δ o diviziune $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b$ a lui $[a,b]$ și fie $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$ astfel încît $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$ pentru $i=0,1,\ldots,n-1$. Să punem $\sigma_\Delta(f,\xi_i)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$. Funcția f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă există un număr real I astfel încît oricărui $\varepsilon>0$ îi corespunde un număr $\delta(\varepsilon)>0$ cu proprietatea că dacă $\nu(\Delta)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}|x_{i+1}-x_i|<\delta(\varepsilon)$ avem $\sigma_\Delta(f,\xi_i)-I|<\varepsilon$. Numărul I se numește *integrala Riemann* a lui f pe $[a,b]$ și se notează cu $\int_a^b f(x)\,dx$. **I.R.** implică mărginirea lui f pe $[a,b]$. Se arată că $\int_a^b f(x)\,dx=m(b-a)$, unde m este un anumit număr cuprins între marginea inferioară și marginea superioară a funcției f pe $[a,b]$, iar dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci există u în $[a,b]$ astfel încît $m=f(u)$ (*formula de medie pentru integrala Riemann*). O funcție mărginită pe $[a,b]$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă punctele ei de discontinuitate formează o mulțime de măsură Lebesgue nulă (*criteriul lui Lebesgue de* **i.R.**). Definiție echivalentă: Fie f mărginită pe $[a,b]$ și fie m_i,M_i marginile inferioară și superioară ale lui f pe $[x_i,x_{i+1}]$. Să punem $s_\Delta(f)=\sum m_i(x_{i+1}-x_i)$ și $S_\Delta(f)=\sum M_i(x_{i+1}-x_i)$. Funcția f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă fiecărui $\varepsilon>0$ îi corespunde $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încît dacă $\nu((\Delta)<\delta(\varepsilon)$ atunci $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$. Definim integrala Darboux superioară ca margine inferioară a mulțimii sumelor $S(f)$ cînd Δ parcurge toate diviziunile posibile ale lui $[a,b]$ și o notăm $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. În mod analog, definim integrala Darboux inferioară a lui f pe $[a,b]$ ca margine superioară a mulțimii sumelor $s_\Delta(f)$ și o notăm $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Avem $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, egalitatea producîndu-se exact atunci cînd f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Definițiile de mai sus se extind la funcții considerate pe închiderea unui domeniu mărginit, măsurabil Jordan din $\mathbb{R}^n$, diviziunile Δ fiind formate din domenii măsurabile Jordan fără puncte interioare comune; $\nu(\Delta)$ se definește în acest caz ca maximul diametrelor domeniilor care alcătuiesc pe Δ (*S. M.*)

integrabilitate Riemann generalizată Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Sistemul $\Delta=(a=x_0\leqslant\xi_0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}\leqslant\ldots\leqslant x_n=b)$ este o diviziune intercalată a lui $[a,b]$ compatibilă cu funcția $\delta:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ strict pozitivă dacă $\xi_i-x_i<\delta(\xi_i)>x_{i+1}-\xi_i$ pentru orice $0\leqslant i\leqslant n-1$. Funcția f este integrabilă Riemann generalizat pe $[a,b]$ dacă există un număr real I cu proprietatea că fiecărui $\varepsilon>0$ îi corespunde o funcție strict pozitivă $\delta:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel încît, oricare ar fi diviziunea intercalată Δ compatibilă cu δ, avem $|\sigma_\Delta(f;\xi_i)-I|<\varepsilon$ (unde $\sigma_\Delta(f,\xi_i)$ sînt sumele riemanniene obișnuite). Se arată că: 1) Dacă f este derivată finită pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Riemann generalizat pe $[a,b]$ și $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$, unde F este o primitivă a lui f; 2) Dacă f este integrabilă Lebesgue pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Riemann generalizat pe $[a,b]$. Extensie în $\mathbb{R}^n$ și la integrale Stieltjes. **I.R.g.** este echivalentă cu integrabilitatea Denjoy-Perron. (*S.M.*).

integrabilitate Riemann pe un interval necompact Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (unde, eventual, $b=+\infty$) integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a,c]$ cu $a<c<b$. Dacă $\lim\limits_{c\to b,\ c<b}\int_a^c f(x)\,dx$ există și este finită, egală cu I, funcția f este integrabilă pe intervalul necompact $[a,b)$ și notăm $I=\int_a^{b-0}f(x)\,dx$. Se spune despre această integrală că este convergentă. Definiții similare pentru intervale necompacte la stînga $(a,b]$ (unde, eventual, $a=-\infty$). Pentru convergența unei integrale pe un interval necompact se dau diferite criterii, de forma celor care sînt stabilite pentru convergența seriilor (v. și **integrală improprie**). (*S. M.*)

integrabilitate Riemann-Stieltjes Fie f și g funcții reale definite pe intervalul $[a, b]$. Fiecărei diviziuni Δ: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$ și fiecărui șir de valori $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ cu proprietatea $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, li se asociază suma $\sigma_\Delta(f, g, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$. Funcția f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$ dacă există un număr real I cu proprietatea că oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît din $\nu(\Delta) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |x_{i+1} - x_i| < \delta(\varepsilon)$ rezultă $|I - \sigma_\Delta(f, g, \xi_i)| < \varepsilon$, oricare ar fi valorile ξ_i satisfăcînd inegalitățile indicate mai sus. Se demonstrează că dacă f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, atunci și g este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f pe $[a, b]$. (*S. M.*)

integrala Bartle Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{T}$ o algebră de părți ale lui T și X, E, F spații Banach astfel încît $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$. (v. **variație**; **cvasivariație**; **semivariație**). Fie, de asemenea, $m: \mathcal{T} \to X$ o măsură aditivă. Pentru o mulțime oarecare $A \subset T$ se definește $|||A||| = \inf \{\widetilde{m}_{E,F}(V) \mid V \in \mathcal{T},\ V \supset A\}$, și $|||\ |||: \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ are proprietatea că $|||A||| = \widetilde{m}_{E,F}(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{T}$. Se spune că mulțimea A este o *mulțime m-nulă* dacă $|||A||| = 0$. Dacă $f_n: T \to E$ este un șir de funcții, iar $f: T \to E$ o funcție și există o mulțime m-nulă A astfel încît $f_n(t) \xrightarrow[n]{} f(t)$ pentru orice t în $T \setminus A$, se spune că f_n converge la f m-a.p.t. În aceleași condiții se spune că f_n converge la f în m-măsură dacă $\lim_n |||S(n, \varepsilon)||| = 0$, unde $S(n, \varepsilon) = \{t \in T \mid \|f_n(t) - f(t)\| > \varepsilon\}$. O funcție $\mathcal{P}$-etajată cu valori în E se numește *funcție simplă m-integrabilă* (aici $\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{T} \mid |||A||| < \infty\}$). Pentru orice funcție m-simplă $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$ (cu $A_i \in \mathcal{T}$ mutual disjuncte și $x_i \in E$) și orice $A \in \mathcal{T}$ se definește $\int_A f\,dm = \sum_{i=1}^{n} (m(A_i \cap A))(x_i) \in F$. O funcție $f: T \to E$ se numește *funcție integrabilă Bartle* (în raport cu m) dacă există un șir de funcții simple m-integrabile $\{f_n\}_n$ cu proprietățile: i) f_n converge la f în m-măsură; ii) Definind pentru orice $A \in \mathcal{T}$, $\lambda_n(A) = \int_A f_n\,dm$, obținem șirul de măsuri aditive $\lambda_n: \mathcal{T} \to F$ care are proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît, oricare ar fi $B \in \mathcal{T}$ cu $|||B||| < \delta$, are loc inegalitatea $\|\lambda_n(B)\| < \varepsilon$ pentru orice n natural; iii) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $A_\varepsilon \in \mathcal{T}$ cu $|||A_\varepsilon||| < \infty$ astfel încît, oricare ar fi $G \in \mathcal{T}$, $G \subset T \setminus A_\varepsilon$, avem $\|\lambda_n(G)\| < \varepsilon$ pentru orice n natural. Se arată că dacă f este integrabilă Bartle în raport cu m, atunci pentru orice $A \in \mathcal{T}$ există $\lim_n \lambda_n(A) \in F$ (cu notațiile de mai sus) și limita nu depinde de șirul $\{f_n\}$. Prin definiție, $\lim_n \lambda_n(A) := (\text{Bartle})\text{-}\int_A f\,dm =$ **i.B.** a lui f pe A (în raport cu m). Dacă $A = T$, obținem $(\text{Bartle})\text{-}\int_T f\,dm = (\text{Bartle})\text{-}\int f\,dm =$ **i.B.** a lui f. (*I. C.*)

integrala Bochner Fie T o mulțime nevidă. Vom considera X, E și F spații Banach astfel încît $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ (v. **variație**; **cvasivariație**; **semivariație**) Prezentăm cele mai importante tipuri de scufundare $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$. *Tipul A*: $X = \Gamma =$ corpul scalarilor reali sau complecși și $E = F$. Un scalar $\alpha \in \Gamma$ se identifică cu operatorul $T_\alpha: E \to E$, $T_\alpha(x) = \alpha x$. În cazul $E = F = \Gamma$ regăsim integrala abstractă Lebesgue. *Tipul B*: $X = F$ și $E = \Gamma$. Un vector $x \in F$ se identifică cu operatorul $T_x: \Gamma \to F$, $T_x(\alpha) = \alpha x$. *Tipul C*: $E = X'$ și $F = \Gamma$. Un vector $x \in X$ se identifică cu aplicația $T_x: X' \to \Gamma$, $T_x(x') = x'(x)$. *Tipul D*: $X = E'$ și $F = \Gamma$. Un vector $x' \in X$ este o aplicație $x': E \to \Gamma$ liniară și continuă. În toate cazurile vom integra funcții $f: T \to E$ și rezultatul, *i.e.* integrala, va fi în F. **I.B.** clasică se obține în cadrul tipului A. În prima etapă vom integra funcții etajate. Fie $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T și $m: \mathcal{C} \to X$ o măsură aditivă. Pentru orice funcție $\mathcal{C}$-etajată (v. **funcție măsurabilă**) cu valori în E de forma $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$ definim integrala lui f în raport cu m prin $\int f\,dm := \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i)$. Definiția este coerentă $\left(\text{nu depinde de scrierea lui } f \text{ în forma } f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i\right)$. Vom scrie, simplu, $\int f\,dm = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) x_i$. F $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$ spațiul vectorial al tuturor funcțiilor $\mathcal{C}$-etajate cu valori în E. Am definit deci aplicația liniară $H: \mathcal{E}_E(\mathcal{C}) \to F$ dată prin $H(f) = \int f\,dm$. În continuare ne vom ocupa de prelungirea operatorului H la un spațiu vectorial mai bogat decît $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$. Acum vom presupune în plus că $m: \mathcal{C} \to X$ este o măsură numărabil aditivă cu variație finită $|m|: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$. Aplicînd lui $|m|$ procedeul general de extensie de la măsurile pozitive vom obține extensia sa μ, deci vom lucra cu spațiul cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$. Așadar $\mathcal{T} = \tau(|m|)$ (pentru notații v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**). Definim seminorma $N_1: \mathcal{E}_E(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}_+$,

$$N_1\left(f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |m|(A_i)\|x_i\| = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\|x_i\| =$$

$$= \int \|f\|\,d\mu.$$

Pentru orice funcție $f: T \to E$, prin $\|f\|$ vom nota funcția $\|f\|: T \to \mathbb{R}_+$ dată prin $\|f\|(t) = \|f(t)\|$. Un șir $\{f_n\}_n$ din $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$ se numește *șir Cauchy (șir fundamental) în m-medie de funcții $\mathcal{C}$-etajate* sau simplu *șir Cauchy (șir fundamental) în medie de funcții etajate*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon)$ natural cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale $p, q \geqslant n(\varepsilon)$ avem $N_1(f_p - f_q) < \varepsilon$. Prin definiție, o funcție f: $T \to E$ se numește *funcție integrabilă Bochner în raport cu m* (sau *funcție m-integrabilă Bochner*) dacă are proprietatea că există un șir $\{f_n\}_n$ de funcții din $\mathcal{E}_E(\mathcal{C})$ cu proprietățile: a) $f_n(t) \to f(t)$ μ-a.p.t. (deci f este μ-măsurabilă); b) $\{f_n\}_n$ este Cauchy în m-medie. Se arată că în acest caz șirul $\left\{\int f_n\,dm\right\}_n$ este un șir Cauchy în spațiul Banach F și în acest caz **i.B.** a funcției f în raport cu m este elementul din F notat prin $\int f\,dm$ sau $(\text{Bochner})\text{-}\int f\,dm$ și definit prin $\lim_n \int f\,dm$. Definiția este coerentă (nu depinde de şirul ales de funcţii $\mathcal{C}$-etajate). Se mai scrie şi $\int f(t)\,\mathrm{d}m(t)$ în loc de $\int f\,\mathrm{d}m$. Cîteva precizări necesare. Dacă notăm $\Sigma = \{A \in \mathcal{T} \mid \mu(A) < \infty\}$ = semitribul părţilor μ-integrabile, atunci (v. **extinderea măsurilor vectoriale**) m se extinde la o măsură σ-aditivă $m_1: \Sigma \to X$ şi m_1 are variaţie finită, $|m_1|(A) = \mu(A)$ pentru orice $A \in \Sigma$. Se arată că funcţiile m-integrabile Bochner sînt aceleaşi cu funcţiile m_1-integrabile Bochner, în sensul că o funcţie $f: T \to E$ este m-integrabilă Bochner dacă şi numai dacă există un şir $\{f_n\}_n$ de funcţii Σ-etajate cu valori în E avînd proprietăţile: a) $f_n(t) \underset{n}{\to} f(t)$ μ-a.p.t.; b) $\{f_n\}_n$ este şir Cauchy în m_1-medie. Atunci, pentru orice funcţie $f: T \to E$ care este m-integrabilă Bochner şi pentru orice $A \in \mathcal{T}$, funcţia $\varphi_A f$ este de asemenea m-integrabilă Bochner şi, prin definiţie,

$$\int_A f\,\mathrm{d}m := \int \varphi_A f\,\mathrm{d}m = \int_A f(t)\,\mathrm{d}m(t).$$

Funcţia de mulţime $m_f: \mathcal{T} \to F$, $m_f(A) = \int_A f\,\mathrm{d}m$ este o măsură vectorială numărabil aditivă absolut continuă în raport cu m (sau în raport cu μ) şi se numeşte *integrala nedefinită* a lui f. În plus, m_f este cu variaţie mărginită şi $|m_f|(T) = \int \|f\|\,\mathrm{d}\mu$. (*teorema de continuitate absolută a integralei nedefinite*). O funcţie $f: T \to E$ cu proprietatea că $\varphi_A f$ este m-integrabilă pentru orice $A \in \Sigma$ se numeşte *funcţie local m-integrabilă Bochner* (sau *funcţie local integrabilă*). O funcţie $f: T \to E$ care este *m-neglijabilă* (sau *μ-neglijabilă*) *i.e.* $f(t) = 0$ μ-a.p.t. este m-integrabilă Bochner. Se arată că o funcţie $f: T \to E$ este m-integrabilă Bochner dacă şi numai dacă f este μ-măsurabilă şi $\|f\|$ este μ-integrabilă. Vom nota $\mathcal{L}^1_E(m) = \{f: T \to E \mid f \text{ este } m\text{-integrabilă}\}$. Se observă că de fapt avem $\mathcal{L}^1_E(m) = \mathcal{L}^1_E(\mu)$, în sensul definiţiei de la **spaţii** L^p. Vom numi pe $\mathcal{L}^1_E(m)$ *spaţiul funcţiilor m-integrabile*. Un subspaţiu al său este $\mathcal{N}_E(m) = \{f: T \to E \mid f \text{ este } m\text{-neglijabilă}\}$, unde prin funcţie m-neglijabilă înţelegem funcţie μ-neglijabilă. (Aşadar, putem scrie $\mathcal{N}_E(m) = \mathcal{N}_E(\mu)$, v. **spaţii** L^p.) Spaţiul cît $\mathcal{L}^1_E(m)/\mathcal{N}_E(m)$ se notează prin $L^1_E(m)$. Avem de fapt $L^1_E(m) = L^1_E(\mu)$ (v. **spaţii** L^p). Deoarece $L^1_E(m)$ este seminormat cu seminorma $f \mapsto \|f\|_1 = \int \|f\|\,\mathrm{d}\mu$, rezultă că $L^1_E(m)$ este normat cu norma $\tilde{f} \mapsto \|\tilde{f}\|_1 = \int \|f\|\,\mathrm{d}\mu$, unde funcţia $f \in \tilde{f}$ este aleasă arbitrar. Se arată că $L^1_E(m)$ este chiar spaţiu Banach. (*I.C.*)

integrala curbilinie (în $\mathbb{R}^n$) I. **I.c.** *de primul tip*. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi $u: [a, b] \to D$ un drum rectificabil. Considerăm şi o funcţie $F: D \to \mathbb{R}$ care este continuă. Drumul u generează funcţia (crescătoare) de lungime $l: [a, b] \to \mathbb{R}_+$ dată prin $l(t)$ = lungimea restricţiei lui u la $[a, t]$. Atunci se poate defini integrala Stieltjes

$$\int_a^b F(u(t))\,\mathrm{d}l(t) = \int_a^b F(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))\,\mathrm{d}l(t),$$

unde u_i sînt componentele scalare ale drumului u. Această integrală se notează prin $\int_u F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}l$ şi se numeşte **i.c.** de primul tip a lui F de-a lungul lui u. Dacă u are derivată continuă, **i.c.** de mai sus se calculează ca integrală Riemann, fiind egală cu

$$\int_a^b F(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))\,\sqrt{(u_1'(t))^2 + (u_2'(t))^2 + \dots + (u_n'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

II. **I.c.** *de al doilea tip*. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi $u: [a, b] \to D$ un drum rectificabil de componente scalare $u_1, u_2, \dots, u_n$. Fie şi $P_1, P_2, \dots, P_n: D \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Se poate defini expresia $\sum_{i=1}^{n} \int_a^b P_i(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))\,\mathrm{d}u_i(t)$ care se notează prin $\int_u \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_i$ şi se numeşte **i.c.** de al doilea tip a funcţiei vectoriale $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ de-a lungul drumului u. Dacă drumul u are derivată continuă ultima **i.c.** se calculează ca sumă de integrale Riemann, fiind egală cu

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^b P_i(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))\,\sqrt{(u_1'(t))^2 + (u_2'(t))^2 + \dots + (u_n'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dacă D este deschisă şi dacă există o funcţie diferenţiabilă $F: D \to \mathbb{R}$ astfel încît $\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\mathrm{d}x_i$ (*i.e.* $\frac{\partial F}{\partial x_i} = P_i$ pentru $i = 1, 2, \dots, n$), **i.c.** este independentă de drum. Mai precis, dacă x şi y sînt două puncte arbitrare din D şi $d: [a, b] \to D$, $\delta: [\alpha, \beta] \to D$ sînt două drumuri rectificabile cu proprietatea: $d(a) = \delta(\alpha) = x$ şi $d(b) = \delta(\beta) = y$, rezultă că

$$\int_d \sum_{i=1}^{n} P_i\,\mathrm{d}x_i = \int_\delta \sum_{i=1}^{n} P_i\,\mathrm{d}x_i.$$

În particular, **i.c.** de al doilea tip este independentă de drum dacă D este domeniu simplu conex, funcţiile P_i sînt de clasă C^1 şi avem $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$ pentru toţi $i \neq j$. (*I. C.*)

integrala Daniell (a doua metodă) Considerăm o preintegrală $I: L \to \mathbb{R}$ (pentru notaţii şi preliminarii v. **integrala Daniell** (prima metodă)). Vom efectua prelungirea lui I în două etape, anume întîi pentru funcţii pozitive şi apoi pentru funcţii oarecare.

a) **I.D.** *pentru funcţii pozitive*. Introducem pentru orice funcţie pozitivă finită $f: T \to \mathbb{R}_+$ *subgraficul incomplet* al lui f, anume mulţimea $\Gamma_e(f) = \{(t, x) \mid t \in T, x \in \mathbb{R}, 0 < x \leqslant f(t)\}$. Clasa de părţi $\mathcal{P} = \{\Gamma_e(f) \setminus \Gamma_e(g) \mid f, g \in L, f, g \text{ pozitive şi } f \geqslant g\}$ formează un semiclan de părţi ale lui $T \times \mathbb{R}$. Funcţia de mulţime $\mu: \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\mu(\Gamma_e(f) \setminus \Gamma_e(g)) = I(f - g)$ este o măsură numărabil aditivă. Aplicăm acestei măsuri procedeele obişnuite, extinzînd-o întîi la clanul generat de $\mathcal{P}$ (v. **extensia măsurilor pozitive de la un semiclan la clanul generat**) şi apoi la tribul mulţimilor măsurabile, cu ajutorul măsurii exterioare generalizate generată de μ. Obţinem extensia lui μ, anume măsura numărabil aditivă şi completă $\overline{\mu}: \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, unde $\mathcal{T}$ este σ-algebra mulţimilor

μ-măsurabile (obținute după prima etapă a extensiei, v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**). Definim mulțimea $\bar{L}_+ = \{f: T \to \bar{\mathbb{R}}_+ \mid \Gamma_e(f) \in \bar{\mathcal{T}}\} \supset L_+ = \{f: T \to \mathbb{R}_+ \mid f \in L\}$. O funcție din $\bar{L}_+$ se numește *funcție I-măsurabilă Daniell pozitivă* (sau *funcție măsurabilă Daniell pozitivă*). Definim **i.D.** a unei funcții $f \in \bar{L}_+$ prin $\bar{I}(f) := \bar{\mu}(\Gamma_e(f))$ și $\bar{I}: \bar{L}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ este o extensie a lui I pe funcții pozitive, în sensul că $\bar{I}(f) = I(f)$ pentru orice $f \in L_+$. Se arată că dacă f, g sînt în $\bar{L}_+$, atunci $f \vee g$ și $f \wedge g$ sînt în $\bar{L}_+$ și $\bar{I}(f+g) = \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$, iar dacă α este un număr real pozitiv, atunci $\alpha f \in \bar{L}_+$ și $\bar{I}(\alpha f) = \alpha \bar{I}(f)$.

b) **I.D.** *pentru funcții cu valori reale extinse.* Dacă $f: T \to \bar{\mathbb{R}}$ este o funcție reală extinsă, se spune că f este o *funcție I-măsurabilă Daniell* (sau o *funcție măsurabilă Daniell în raport cu I*) dacă f^+ și f^- sînt funcții I-măsurabile Daniell pozitive. Dacă, în plus, sau $\bar{I}(f^+)$ sau $\bar{I}(f^-)$ este finit, se spune că f este *funcție I-măsurabilă Daniell care are integrală* (sau *funcție măsurabilă Daniell în raport cu I care are integrală*) și **i.D.** a lui f este $\bar{I}(f^+) - \bar{I}(f^-)$. Dacă și $\bar{I}(f^+)$ și $\bar{I}(f^-)$ sînt finite, se spune că f este *funcție I-integrabilă Daniell* (*integrabilă Daniell în raport cu I*). Numărul $\bar{\bar{I}}(f) = \bar{I}(f^+) - \bar{I}(f)^-$ se numește în acest caz **i.D.** a lui f. Spațiul liniar reticulat $\mathcal{L}^1(I)$ al funcțiilor I-integrabile Daniell include pe L și funcționala liniară $\bar{\bar{L}}: \mathcal{L}^1(I) \to \mathbb{R}$ definită ca mai sus extinde pe I. (*I. C*).

integrala Daniell (prima metodă) Construcția **i.D.** nu presupune existența unui spațiu cu măsură. Vom considera o mulțime nevidă T și un spațiu vectorial $L \subset \{f: T \to \mathbb{R}\}$ care este reticulat în raport cu ordinea punctuală (*i.e.* pentru orice f, g, din L, funcția $f \vee g = \max(f, g)$ este de asemenea în L). Vom numi *preintegrală* sau *integrală elementară* orice funcțională liniară $I: L \to \mathbb{R}$ care este pozitivă (*i.e.* $I(f) \geq 0$ dacă $f \geq 0$) și are proprietatea că $I\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$ pentru orice șir $\{f_n\}_n$ de funcții pozitive din L astfel încît $\sum_{i=1}^{\infty} f_n \in L$ (convergența seriei este înțeleasă punctual). A doua proprietate este echivalentă cu proprietatea următoare: Pentru orice șir descrescător $\{f_n\}_n$ de funcții pozitive din L astfel încît $f_n \downarrow 0$ (convergența fiind punctuală) avem $I(f_n) \downarrow 0$. Ex.: Vom considera o mulțime nevidă T, un clan $\mathcal{C}$ de părți ale lui T și o măsură numărabil aditivă pozitivă și finită $\mu: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$. Spațiul reticulat L va fi spațiul tuturor funcțiilor $\mathcal{C}$-etajate cu valori reale. Preintegrala $I: L \to \mathbb{R}$ se definește prin

$$I(f) = \int f \, d\mu, \quad i.e. \quad I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

(v. și **integrala Lebesgue abstractă, funcție măsurabilă**). Revenind la cazul general vom considera o preintegrală $I: L \to \mathbb{R}$. Construcția **i.D.** urmărește prelungirea preintegralei I la un spațiu vectorial mai mare decît L. Vom efectua prelungirea lui I în două etape:

a) Introducem mulțimea $L^* = \{f: T \to (-\infty, \infty] \mid$ există un șir crescător $\{f_n\}_n$ format cu funcții $f_n \in L$, astfel încît $f_n \uparrow f$, convergența fiind punctuală$\}$. Avem evident $L^* \supset L$. Definim $I^*: L^* \to (-\infty, \infty]$ prin $I^*(f) = \lim I(f_n)$, unde $\{f_n\}_n$ este ca mai sus (definiția este coerentă, valoarea $I^*(f)$ fiind aceeași pentru toate șirurile $\{f_n\}_n$). Se arată că I^* prelungește pe I.

b) Introducem mulțimea $\bar{L} = \{f: T \to \bar{\mathbb{R}} \mid$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există g, h în L^* astfel încît $-h \leq f \leq g$ și $I^*(g+h) < \varepsilon\}$. Se arată că $\bar{L} \supset L$ și,

în plus, $\bar{L}$ are proprietățile: 1) Dacă f, g sînt în $\bar{L}$, atunci $f \vee g$, $f \wedge g$ și $f+g$ sînt în $\bar{L}$ (unde $f+g$ este definită arbitrar în punctele unde suma nu are sens fiind de forma $\infty - \infty$); 2) Dacă f este în $\bar{L}$ și α în $\mathbb{R}$, atunci αf este în $\bar{L}$, cu convenția $0 \cdot \infty = 0$); 3) Dacă $\{f_n\}_n$ este un șir crescător în $\bar{L}$, atunci $\lim_n f_n$ este în $\bar{L}$. Definim $\bar{I}: \bar{L} \to \mathbb{R}$ prin $\bar{I}(f) = \inf\{I^*(g) \mid g \in L^*, g \geq f\}$. Subliniem că $\bar{I}(f)$ este finit. Funcționala $\bar{I}$ are proprietățile: i) $\bar{I}$ este „liniară", *i.e.* $\bar{I}(f+g) = \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$ și $\bar{I}(\alpha f) = \alpha \bar{I}(f)$ pentru orice α în $\mathbb{R}$ și f, g în $\bar{L}$; ii) Dacă $f \in L^*$ și $I^*(f) < \infty$, rezultă că $f \in \bar{L}$ și $\bar{I}(f) = I^*(f)$; iii) Funcționala $\bar{I}$ prelungește pe I.

Orice funcție f din $\bar{L}$ se numește *funcție integrabilă Daniell în raport cu preintegrala I*, iar numărul $\bar{I}(f)$ se numește **i.D.** a lui f. Pentru a studia legătura dintre **i.D.** și integrala obișnuită, se introduce mulțimea $\bar{L}_\infty = \{f: T \to \bar{\mathbb{R}} \mid$ există un șir crescător $\{f_n\}_n$ de funcții din $\bar{L}$ cu $f_n \uparrow f\} \supset \bar{L}$. Pe $\bar{L}_\infty$ se introduce funcționala (care extinde pe $\bar{I}$) dată prin $\bar{I}_\infty(f) = \bar{I}(f)$ dacă $f \in \bar{L}$ și $\bar{I}_\infty(f) = \infty$ dacă $f \notin \bar{L}$. Prima direcție. O **i.D.** poate genera o măsură. Anume, se dă preintegrala I astfel încît $\varphi_T \in \bar{L}_\infty$. Atunci $\mathcal{T} = \{A \subset T \mid \varphi_A \in \bar{L}_\infty\}$ este o σ-algebră și, funcția de mulțime $\mu_I: \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$, $\mu_I(A) = \bar{I}_\infty(\varphi_A)$ este măsură numărabil aditivă și completă, astfel încît o funcție $u: T \to \mathbb{R}_+$ este $\mathcal{T}$-măsurabilă dacă și numai dacă $u \in \bar{L}_\infty$. A doua direcție. O măsură poate genera o **i.D.** Anume, vom considera un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și semitribul $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{T} \mid \mu(A) < \infty\}$ (care generează spațiul vectorial L al funcțiilor $\mathcal{C}$-etajate cu valori reale). Construim preintegrala $I_\mu: L \to \mathbb{R}$, $I_\mu\left(f = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i)$. Atunci $\bar{L} = \mathcal{L}^1(\mu)$ (v. **integrala Lebesgue abstractă**) și avem $(\bar{I}_\mu)_\infty(f) = \int f \, d\mu$ pentru orice f din $\bar{L}_\infty$. Cele două direcții sînt reversibile, în sensul că dacă pornim cu o preintegrală $I: L \to \mathbb{R}$ astfel încît $\varphi_T \in \bar{L}_\infty$ și formăm măsura μ_I, iar apoi formăm I_{μ_I}, rezultă pentru orice f din $\bar{L}_\infty$ (construit pentru preintegrala I_{μ_I}) că $\bar{I}_{\mu_I}(f) = \int f \, d\mu_I$. (*I. C.*)

integrala de suprafață Fie $H \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime conexă compactă, măsurabilă Jordan, cu interior nevid. Considerăm trei funcții continue $f, g, h: H \to \mathbb{R}$ cu derivate parțiale continue pe interiorul lui H. Ele definesc funcția vectorială $T: H \to \mathbb{R}^2$, dată prin $T(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$, care este presupusă injectivă pe interiorul lui H. Presupunem, de asemenea, că pentru orice (u, v) din interiorul lui H, cel puțin unul din determinanții $A(u, v)$, $B(u, v)$, $C(u, v)$ este nenul. Am notat:

$$A(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ \dfrac{\partial h}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} \qquad B(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u, v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

$$C(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}.$$

Imaginea lui T, *i.e.* mulțimea $S = \{T(u, v) \mid (u, v) \in H\}$, se numește *suprafață* (în formă parametrică). În cazul particular cînd $f(u, v) = u$ și $g(u, v) = v$ (în acest caz avem $C(u, v) = 1$) obținem *suprafața* (în formă explicită). Mai precis, se consideră o mulțime compactă $H \subset \mathbb{R}^2$, măsurabilă Jordan, cu interior nevid, și o funcție continuă $h : H \to \mathbb{R}$ cu derivate parțiale continue pe interiorul lui H. Atunci mulțimea $S = \{((x, y), h(x, y)) \mid (x, y) \in H\}$ este o suprafață (în formă explicită). Revenind la cazul general al unei suprafețe S în formă parametrică, vom spune că S are arie dacă există un șir crescător $\{H_n\}_n$ de compacte cu proprietatea că $\bigcup_n H_n$ este interiorul lui H și astfel încît

$$\sup_n \iint_{H_n} \sqrt{(A(u, v))^2 + (B(u, v))^2 + C(u, v))^2}\, du\, dv : = \text{aria } (S) < \infty.$$

Atunci aria (S) se numește *aria suprafeței* S (nu depinde de șirul $\{H_n\}_n$ ales). Să considerăm în continuare o suprafață S care are arie. Fie mai întîi $G \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime care include pe S și o funcție $F: G \to \mathbb{R}$ continuă. **I.s.** *de primul tip* a funcției F pe suprafața S este numărul

$$\iint_S F(x, y, z)\, d\sigma : =$$

$$= \lim_n \iint_{H_n} F(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \sqrt{(A(u, v))^2 + (B(u, v))^2 + (C(u, v))^2}\, du\, dv$$

(definiția nu depinde de șirul $\{H_n\}_n$ ales). În al doilea rînd, să considerăm o mulțime $G \subset \mathbb{R}^3$ care include pe S și trei funcții continue, $P, Q, R: G \to \mathbb{R}$. **I.s.** *de al doilea tip* a funcției vectoriale (P, Q, R) pe suprafața S este numărul

$$\iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz dx + R\, dx dy : =$$

$$= \lim_n \iint_{H_n} P(f(u, v), g(u, v), h(u, v))\, A(u, v) +$$

$$+ Q(f(u, v), g(u, v), h(u, v))\, B(u, v) + R(f(u, v), g(u, v), h(u, v))\, C(u, v)\, du\, dv$$

(definiția nu depinde de șirul $\{H_n\}_n$ ales). În cazul cînd S reprezintă frontiera unei mulțimi compacte măsurabile Jordan, cu interior nevid $D \subset \mathbb{R}^3$, se va alege ordinea parametrilor u, v astfel încît vectorul $(A(u, v), B(u, v), C(u, v))$ să aibă sensul normalei exterioare la D în punctul $(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ (v. și **integrare pe o varietate riemanniană orientată**). *(I. C.)*

integrala Dobrakov Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{P}_0$ un semitrib de părți ale lui T, $\sum$ tribul generat de $\mathcal{P}_0$, E, F două spații Banach și $m: \mathcal{P}_0 \to \mathcal{L}(E, F)$ o măsură aditivă care este numărabil aditivă în topologia operatorială tare (*i.e.* pentru orice $x \in E$, măsura $m_x : \mathcal{P}_0 \to F$, definită prin $m_x(A) = m(A)(x)$, este numărabil aditivă.) O mulțime $A \in \sum$ se numește m-nulă dacă $\widetilde{m}_{E,F}(A) = 0$. O funcție $f: T \to E$ se numește funcție simplă m-integrabilă dacă este funcție $\mathcal{P}$-etajată cu valori în E (aici $\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{P}_0 \mid \widetilde{m}_{E,F}(A) < \infty\}$. O funcție $f: T \to E$ se numește funcție m-măsurabilă dacă există un șir $\{f_n\}_n$ de funcții simple m-integrabile cu proprietatea că $f_n(t) \xrightarrow[n]{} f(t)$ pentru orice t din T. În fine, spunem că un șir $\{f_n\}_n$ de funcții $f_n: T \to E$ converge m-a.p.t. la $f: T \to E$ dacă există o mulțime m-nulă A astfel încît $f_n(t) \xrightarrow[n]{} f(t)$ pentru $t \in T \setminus A$. O funcție m-măsurabilă $f: T \to E$ se numește *funcție integrabilă Dobrakov* în raport cu m dacă există un șir $\{f_n\}_n$ de funcții simple m-integrabile care converg la f m-a.p.t. și astfel încît familia de măsuri $\{m_{f_n}\}_n$ să fie uniform numărabil aditivă. Aici $m_{f_n} : \sum \to F$,

$$m_{f_n}(A) = \int_A f_n\, dm = \sum_{i=1}^{k} m(A_i \cap A)\, (x_i)$$

dacă $f_n = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{A_i} x_i$, $A_i \in \mathcal{P}_0$, $x_i \in E$ (unde φ_{A_i} este funcția caracteristică a mulțimii A_i). În acest caz, pentru orice $A \in \sum$, **i.D.** a lui f pe A este

$$\text{(Dobrakov)-}\int_A f\, dm : = \lim_n \int f_n\, dm.$$

Se arată că limita există și este uniformă în raport cu $A \in \sum$. *(I. C.)*

integrala esențială (în raport cu o măsură Radon) Fie T un spațiu local compact și μ o măsură Radon pozitivă pe T. Pentru orice funcție $f: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *integrala superioară esențială* a lui f în raport cu μ, notată prin $\overline{\int}^* f\, d\mu$, sau $\overline{\int}^* f(t)\, d\mu(t)$, sau $\overline{\mu}^*(f)$, este $\sup \{\mu^*(f\varphi_K) \mid K \subset T,\ K$ compact$\}$. Pentru orice parte A a lui T, definim *măsura exterioară esențială* a lui A, anume $\overline{\mu}^*(\varphi_A)$, notată prin $\overline{\mu}^*(A)$. Se arată că dacă $\mathcal{A}$ este o familie de mulțimi μ-densă (v. **familie de mulțimi densă** (în raport cu o măsură Radon)), avem pentru orice $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ egalitatea $\overline{\mu}^*(f) = \sup \{\mu^*(f\varphi_K) \mid K \in \mathcal{A}\}$. În general $\mu^*(f) \geqslant \overline{\mu}^*(f)$. Avem $\overline{\int}^* f\, d\mu = \int^* f\, d\mu$ pentru o funcție $f: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ în următoarele cazuri: a) Dacă f este inferior semicontinuă; b) Dacă $\{t \in T \mid f(t) > 0\} = \bigcup_{n=1} A_n$ cu A_n μ-integrabile. În consecință, dacă T este și spațiu secvențial compact (v. **prelungirea măsurilor Radon**) sau dacă μ este mărginită, rezultă că $\overline{\mu}^*(f) = \mu^*(f)$ pentru orice $f: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Vom considera acum un spațiu Banach F și o funcție $f: T \to F$. Definim $\overline{N}_1(f, \mu) = \overline{N}_1(f) = \overline{\mu}^*(\|f\|)$, unde $\|f\|: T \to \mathbb{R}_+$, $\|f\|(t) = \|f(t)\|$. Avem $\overline{N}_1(f) = 0$ dacă și numai dacă f este funcție local neglijabilă în raport cu μ. Spațiul vectorial

$$\overline{\mathcal{F}}^1_F(T, \mu) = \overline{\mathcal{F}}^1_F(\mu) : = \{f: T \to F \mid \overline{N}_1(f) < \infty\}$$

este seminormat cu seminorma $f \mapsto \overline{N}_1(f)$. Se notează cu $\overline{\mathcal{L}}^1_F(T, \mu) = \overline{\mathcal{L}}^1_F(\mu)$ închiderea (în $\overline{\mathcal{F}}^1_F(\mu)$) a spațiului $K_F(T) = \{f: T \to F \mid f$ este continuă cu suport compact$\}$. Spațiul $\overline{\mathcal{L}}^1_F(\mu)$ se numește *spațiul funcțiilor esențial μ-integrabile*, iar funcțiile din el se numesc *funcții esențial μ-integrabile*. Avem $f \in \overline{\mathcal{L}}^1_F(\mu) \Leftrightarrow f$ este μ-măsurabilă și $\overline{N}_1(f) < \infty$. Factorizînd $\overline{\mathcal{L}}^1_F(\mu)$ prin subspațiul său $\mathcal{N}^\infty_F(\mu) = \{f: T \to F \mid f$ este local μ-neglijabilă$\}$, obținem spațiul $\overline{L}^1_F(\mu)$. Avem deci $\overline{L}^1_F(\mu) = \overline{\mathcal{L}}^1_F(\mu) / \mathcal{N}^\infty_F(\mu)$, relația de echivalență fiind $f \sim g \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{N}_F^{\infty}(\mu)$. Deoarece $\overline{\mathcal{L}}_F^1(\mu) = \mathcal{L}_F^1(\mu) + \mathcal{N}_F^{\infty}(\mu)$ și $\mathcal{L}_F^1(\mu) \cap \mathcal{N}_F^{\infty}(\mu) = \mathcal{N}_F(\mu)$ (unde $\mathcal{N}_F(\mu) = \{f : T \to F \mid f$ este μ-neglijabilă$\}$), rezultă că putem considera izomorfismul canonic $L_F^1(\mu) \xrightarrow{H} \overline{L}_F^1(\mu)$. Aici, dacă $\widetilde{f} = f + \mathcal{N}_F(\mu)$ este în $L_F^1(\mu)$) (uude f este în $\mathcal{L}_F^1(\mu)$), punem $T(\widetilde{f}) = \widetilde{\widetilde{f}} = f + \mathcal{N}_F^{\infty}(\mu)$. Această identificare permite definirea aplicației $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu$ a lui $\overline{\mathcal{L}}_F^1(\mu)$ în F, după cum urmează: dacă $f = g + u$ (unde $g \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$ și $u \in \mathcal{N}_F^{\infty}(\mu)$), punem $\int f \,\mathrm{d}\mu := \int g \,\mathrm{d}\mu$ (v. **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)). Definiția este neambiguă și această aplicație prelungește aplicația $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu$ a lui $\mathcal{L}_F^1(\mu)$ în F. Pentru orice f din $\overline{\mathcal{L}}_F^1(\mu)$, $\int f \,\mathrm{d}\mu$ definită mai sus se numește **i.e.** a lui f. Integrala astfel introdusă coincide cu integrala obișnuită dacă spațiul T este secvențial compact. Dacă $H \subset T$ este o mulțime local μ-neglijabilă și f o funcție definită pe $T \setminus H$ cu proprietatea că există o funcție g definită pe T care este esențial μ-integrabilă și $g(t) = f(t)$ pentru t în $T \setminus H$, spunem că funcția f este esențial μ-integrabilă și $\int f \,\mathrm{d}\mu := \int g \,\mathrm{d}\mu$. (*I. C.*)

integrala Gelfand v. **integralele Dunford**; **Gelfand**; **Pettis**

integrala Hellinger Fie $\delta = (a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Norma lui δ este numărul $\|\delta\| = \max\,(t_{i+1} - t_i)$. Vom considera două spații Banach E și F, precum și funcțiile $f: [a, b] \to E$ și $G: [a, b] \to \mathcal{L}(E, F)$. Formăm suma (de tip Riemann)

$$S_\delta(G, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} (G(t_{i+1}) - G(t_i))\,(f(t_{i+1}) - f(t_i)) \in F.$$

Dacă există un element $y \in F$ cu proprietatea că $y = \lim\limits_n S_{\delta_n}(G, f)$, pentru orice șir $\{\delta_n\}_n$ de diviziuni cu proprietatea că $\|\delta_n\| \xrightarrow[n]{} 0$, se spune că f este o *funcție integrabilă Hellinger* în raport cu funcția operatorială G. Elementul y (unic determinat) se numește **i.H.** a funcției f în raport cu funcția operatorială G și se notează $y = \int_a^b \frac{1}{\mathrm{d}t} \{(\mathrm{d}G(t)\,(\mathrm{d}f(t))\}$. Ex.: Să considerăm o funcție $h: [a, b] \to E$ care este integrabilă Bochner în raport cu măsura Lebesgue λ pe $[a, b]$ și să formăm cu ajutorul ei funcția $h^*: [a, b] \to E$, $h^*(t) = \int_{[a,t]} h \,\mathrm{d}\lambda$. Să mai considerăm și o funcție $G: [a, b] \to \mathcal{L}(E, F)$ care este lipschitziană (*i.e.* există un număr $k > 0$ astfel încît $\|G(t') - G(t'')\| \leqslant k\,|t' - t''|$ pentru orice t', t'' în $[a, b]$]. Atunci h^* este integrabilă Hellinger în raport cu G.
Teorema lui R. Cristescu. Pentru orice operator liniar și continuu $V: \mathcal{L}_E^1(\lambda) \to F$ există o funcție lipschitziană $G: [a, b] \to \mathcal{L}(E, F)$ astfel încît

$$V(h) = \int_a^b \frac{1}{\mathrm{d}t} \{\mathrm{d}G(t)\,(\mathrm{d}h^*(t))\}, \quad \forall h \in \mathcal{L}_E^1(\lambda).$$

O prezentare abstractă a **i.H.** poate fi făcută după cum urmează. Vom considera un spațiu măsurabil $(T, \mathcal{T})$. O partiție a mulțimii A din $\mathcal{T}$ este o mulțime finită $\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de mulțimi mutual disjuncte din $\mathcal{T}$ a căror reuniune este A. Vom spune că partiția π_1 a mulțimii A rafinează partiția π_2 a mulțimii A dacă pentru orice mulțime D din π_1 există o mulțime E din π_2 astfel încît $D \subset E$. Fie acum X un spațiu Banach, precum și trei funcții de mulțime: $m: \mathcal{T} \to X$, $m': \mathcal{T} \to X'$ și $\mu: \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$ și fie $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) > 0$. Se spune că forma $(\mathrm{d}m'\,\mathrm{d}m)/\mathrm{d}\mu$ este integrabilă Hellinger pe mulțimea $A \in \mathcal{T}$ dacă există un număr α cu proprietatea următoare: pentru orice $\varepsilon > 0$, există o partiție π a lui A astfel încît, pentru orice partiție π' a lui A care rafinează pe π, avem $\left| \sum\limits_{B \in \pi'} \frac{m'(B)\,(m(B))}{\mu(B)} - \alpha \right| < \varepsilon$. Suma se face după toate mulțimile B din π' pentru care $\mu(B) > 0$. Numărul α (unic determinat, dacă există) se notează prin $\int_A (\mathrm{d}m'\,\mathrm{d}m)/\mathrm{d}\mu$ și se numește **i.H.** a formei $(\mathrm{d}m'\mathrm{d}m)/\mathrm{d}\mu$ pe A.
Să presupunem că $m': \mathcal{T} \to X'$ și $\mu: \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$ sînt măsuri aditive cu proprietatea că există un număr $K > 0$ astfel încît $\|m'(A)\| < K\mu(A)$ pentru orice A din $\mathcal{T}$ cu $\mu(A) > 0$. Mai presupunem că $\{m_n\}_n$ este un șir de măsuri aditive $m_n: \mathcal{T} \to X$ care au variație mărginită și $m: \mathcal{T} \to X$ este o măsură aditivă cu variație mărginită, astfel încît $|m_n - m|\,(T) \xrightarrow[n]{} 0$ (unde $|m_n - m|$ este modulul măsurii $m_n - m$). Dacă pentru orice natural n forma $(\mathrm{d}m'\mathrm{d}m_n)/\mathrm{d}\mu$ este integrabilă Hellinger pe mulțimea A rezultă că și forma $(\mathrm{d}m'\mathrm{d}m)/\mathrm{d}\mu$ este integrabilă pe A și

$$\int_A (\mathrm{d}m'\mathrm{d}m)/\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_A (\mathrm{d}m'\mathrm{d}m_n)/\mathrm{d}\mu. \quad (I.\ C.)$$

integrala Kolmogorov Vom considera o mulțime nevidă T și o clasă $\mathcal{A}$ de părți ale lui T care este clasă multiplicativă (*i.e.* $A \cap B \in \mathcal{A}$ pentru orice A, B în $\mathcal{A}$ și $\varnothing \in \mathcal{A}$). Vom numi **multifuncție** pe $\mathcal{A}$ o aplicație $m: \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\Gamma)$ care are proprietatea $m(\varnothing) = \{0\}$. Aici $\mathcal{P}(\Gamma)$ este mulțimea părților lui Γ. De exemplu, dacă $f: T \to \Gamma$ este o funcție, putem considera multifuncția pe $\mathcal{A}$ următoare: $m: \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\Gamma)$, $m(\varnothing) = \{0\}$ și $m(A) = f(A)$ (dacă $A \neq \varnothing$). Fie $E \in \mathcal{A}$. O *partiție finită* (resp. o *partiție numărabilă*) a lui E este o mulțime finită $D = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ (resp. o mulțime numărabilă $D^* = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$) de elemente $E_i \in \mathcal{A}$ mutual disjuncte a căror reuniune este E. Vom spune că partiția finită D_1 (resp. partiția numărabilă D_1^*) a lui E este mai fină decît D (resp. decît D^*) și vom scrie $D_1 \geqslant D$ (resp. $D_1^* \geqslant D^*$) dacă pentru orice $H \in D_1$ (resp. $H \in D_1^*$) există $U \in D$ (resp. $U \in D^*$) astfel încît $H \subset U$. Fie acum $\mathcal{A}$ o clasă multiplicativă, $E \in \mathcal{A}$ și m o multifuncție pe $\mathcal{A}$. Vom considera o partiție finită $D = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ (resp. o partiție numărabilă $D^* = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$) a lui E și vom selecta cîte un element $x_i \in m(E_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (resp. $x_i \in m(E_i^*)$, $i = 1, 2, \ldots$). Se va considera în plus în cazul partiției numărabile că seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ este convergentă. Vom numi *sumă Kolmogorov atașată lui m și lui D* (resp. *sumă Kolmogorov atașată lui m și D**) expresia $Rm(D) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ $\left(\text{resp. } Rm(D^*) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\right)$. Notația este ambiguă, nepunînd în evidență selecția făcută, căci pentru o partiție dată avem în general mai multe sume Kolmogorov. Vom spune că m este *integrabilă Kolmogorov pe E în sensul partițiilor finite* (resp. *în sensul partițiilor numărabile*) dacă există un număr $I \in \Gamma$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiție finită D_ε a lui E (resp. există o partiție numărabilă D_ε^* a lui E) astfel încît pentru orice $D \geqslant D_\varepsilon$ (resp. $D^* \geqslant D_\varepsilon^*$) avem $| Rm(D) - I | < \varepsilon$ (resp. $| Rm(D^*) - I | < \varepsilon$) oricum am face alegerea elementelor x_i de mai sus. Se arată că în ambele cazuri numărul I (dacă există) este unic determinat. În cazul partițiilor finite I se numește **i.K.** a lui m pe E în sensul partițiilor finite și se notează $I = (K)\text{-}\int_E dm$, iar în cazul partițiilor numărabile I se numește **i.K.** a lui m pe E în sensul partițiilor numărabile și se notează $I = (K)\text{-}\int^* dm$. În general, cele două tipuri de **i.K.** nu coincid. *(I. C.)*

integrala Lebesgue v. **integrala Lebesgue abstractă**

integrala Lebesgue abstractă Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură și Γ corpul scalarilor (reali sau complecși). O funcție $\mathcal{T}$-etajată (v. **funcție măsurabilă**) $f: T \to \Gamma$ de forma $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{A_i}$ se numește *funcție etajată μ-integrabilă* dacă are proprietatea că $\mu(A_i) < \infty$, $i = 1, 2, ..., n$. Pentru o astfel de funcție definim *integrala lui f în raport cu μ* care este numărul $\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$. Un șir $\{f_n\}_n$ de funcții etajate μ-integrabile se numește *șir Cauchy (șir fundamental) în μ-medie* sau *șir Cauchy (șir fundamental) în medie* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n(\varepsilon)$ cu proprietatea că pentru orice m, $n \geqslant n(\varepsilon)$ avem $\int |f_m - f_n| \, d\mu < \varepsilon$. Acum extindem integrala definită mai sus la o clasă mai largă de funcții μ-măsurabile. Anume, vom spune că o funcție $f : T \to \Gamma$ este *funcție μ-integrabilă (funcție integrabilă în raport cu μ)* sau *funcție μ-sumabilă* dacă există un șir $\{f_n\}_n$ de funcții etajate μ-integrabile care este Cauchy în μ-medie și converge la f μ-a.p.t. Echivalent, f este μ-integrabilă dacă există un șir $\{f_n\}_n$ de funcții etajate μ-integrabile care este Cauchy în μ-medie și converge la f în μ-măsură. În ambele cazuri, se arată că șirul integralelor $\left\{\int f_n \, d\mu\right\}_n$ este un șir convergent și $\lim_n \int f_n \, d\mu$ este aceeași pentru orice șir $\{f_n\}_n$ ales. Prin definiție, **i.L.a.** a lui f în raport cu μ (sau *integrala* lui f în raport cu μ) este $\lim_n \int f_n \, d\mu$. Această definiție extinde integrala anterior introdusă pentru funcții etajate μ-integrabile. Dacă $A \in \mathcal{T}$ și f este μ-integrabilă vom defini *integrala lui f pe A* care este integrala funcției (μ-integrabile) $f\varphi_A$, *i.e.* $\int_A f \, d\mu = \int f \varphi_A \, d\mu =$ integrala lui f pe A. Aici φ_A este funcția caracteristică a mulțimii A. În loc de $\int f \, d\mu$ se mai scrie $\int f(t) \, d\mu(t)$ sau $\int f(t) \, \mu(dt)$, iar în loc de $\int_A f \, d\mu$ se mai folosește notația $\int_A f(t) \, d\mu(t)$ sau $\int_A f(t) \, \mu(dt)$. Ex.: Dacă μ este măsura Lebesgue pe o mulțime din $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{R}^n$, integrala obținută este *integrala Lebesgue*. Similar, dacă μ este o măsură Lebesgue-Stieltjes, obținem *integrala Lebesgue-Stieltjes*. Se arată că dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann, atunci f este și *integrabilă Lebesgue* (*i.e.* integrabilă în raport cu

măsura Lebesgue) și avem $\int_I f(x) \, dx = \int f \, d\mu$, unde $\int_I f(x) \, dx$ este integrala Riemann, iar $\int f \, d\mu$ este integrala Lebesgue a lui f în raport cu măsura Lebesgue μ pe intervalul compact $I \subset \mathbb{R}^n$. De multe ori se folosește notația $\int_I f \, dx$ sau $\int f \, dx$ sau $\int_I f(x_1, x_2, ..., x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$ pentru a desemna integrala Lebesgue pe I. În cazul $I = [a, b]$ se mai scrie și $\int_a^b f(x) \, dx$. Revenind la cazul general, să considerăm o mulțime μ-neglijabilă $M \subset T$ și o funcție $f: T \setminus M \to \mathbb{R}$. Se spune că f este *μ-integrabilă* dacă există o funcție $g: T \to \mathbb{R}$ care este μ-integrabilă și astfel încît $f(t) = g(t)$ μ-a.p.t. În acest caz *integrala lui f în raport cu μ* este $\int f \, d\mu := \int g \, d\mu$ (definiția este coerentă). Se arată că o funcție $f: T \to \Gamma$ (sau) $\overline{\mathbb{R}}$ este μ-integrabilă dacă și numai dacă este μ-măsurabilă și $|f|$ este μ-integrabilă. Dacă există o mulțime μ-neglijabilă $M \subset T$ astfel încît funcția $h: T \to X$ (X este o mulțime nevidă oarecare) are proprietatea $h(t) = 0$ pentru orice t din $T \setminus M$) se spune că h este *funcție μ-neglijabilă* (cu valori în X). Orice funcție μ-neglijabilă (cu valori în Γ sau $\overline{\mathbb{R}}$) este μ-integrabilă și are integrala nulă. În fine, dacă $A \in \mathcal{T}$ și $f : T \to \Gamma$ (sau $\overline{\mathbb{R}}$) vom spune că f este *μ-integrabilă* pe A dacă $f\varphi_A$ este μ-integrabilă. De exemplu, orice funcție μ-măsurabilă și mărginită este μ-integrabilă pe orice mulțime A cu $\mu(A) < \infty$. O funcție care are proprietatea că este integrabilă pe orice mulțime A cu $\mu(A) < \infty$ se numește *funcție local μ-integrabilă*. Spațiul vectorial $\mathcal{L}^1(\mu) = \{f: T \to \Gamma \mid f$ este μ-integrabilă$\}$ se numește *spațiul funcțiilor μ-integrabile* (sau *spațiul funcțiilor μ-sumabile*) și este seminormat cu seminorma $f \mapsto \|f\|_1 := \int |f| \, d\mu$ (v. **spații L^p**). Există și alte modalități de a introduce **i.L.a.**

1) Pentru orice funcție μ-măsurabilă pozitivă cu valori extinse $u: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ există un *șir crescător $\{u_n\}_n$ de funcții* (*i.e.* $u_n(t) \leqslant u_{n+1}(t)$, pentru orice t în T și orice n natural care sînt $\mathcal{T}$-etajate și pozitive, finite, $u_n : T \to \mathbb{R}_+$. Pentru orice funcție u_n din șir de forma $u_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_{A_i}$, *integrala lui u_n în raport cu μ* este $\int u_n \, d\mu := \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i)$ (cu convențiile $0 \cdot \infty = 0$, $a \cdot \infty = \infty$ dacă $a > 0$ și $a + \infty = \infty + a = \infty$ dacă $a \geqslant 0$). Se arată că șirul astfel format $\left\{\int u_n \, d\mu\right\}_n$ este crescător. Prin definiție, *integrala lui u în raport cu μ* este

$$\int u \, d\mu := \sup_n \int u_n \, d\mu = \lim_n \int u_n \, d\mu.$$

Definiția nu depinde de șirul $\{u_n\}_n$ ales. Se arată că u este μ-integrabilă dacă și numai dacă $\int u \, d\mu < \infty$ (în particular, în acest caz, $\{t \in T \mid u(t) = \infty\}$

este mulțime μ-neglijabilă). Extindem integrala aceasta în continuare. Dacă $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcție μ-măsurabilă, putem scrie $f = f^+ - f^-$ (v. **funcție măsurabilă**) și putem calcula $\int f^+ \, d\mu = a$ și $\int f^- \, d\mu = b$. Dacă a și b sînt amîndouă finite, atunci aceasta echivalează cu faptul că f este μ-integrabilă și avem $\int f \, d\mu = a - b$. Dacă $a = \infty$ și $b < \infty$ (resp. $a < \infty$ și $b = \infty$) se spune ca *f are integrală în raport cu μ și integrala lui f în raport cu μ* este $\int f \, d\mu = \infty$ $\left(\text{resp. } \int f \, d\mu = -\infty\right)$. În fine, dacă $f: T \to \mathbb{C}$ este funcție μ-măsurabilă complexă, putem scrie $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$, cu $f_1, f_2 : T \to \mathbb{R}$ funcții μ-măsurabile reale. În acest caz se arată că f este μ-integrabilă dacă și numai dacă f_1 și f_2 sînt μ-integrabile și atunci avem $\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \mathrm{i} \int f_2 \, d\mu$.

2) Numim *diviziune finită a lui* $[0, \infty)$ o mulțime finită $\delta = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, unde $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \infty$. Mulțimea Δ a diviziunilor finite ale lui $[0, \infty)$ devine mulțime dirijată față de relația de ordine dată de relația de incluziune. Pentru $\delta \in \Delta$, ca mai sus, *norma diviziunii* δ este $n(\delta) = \max_i (a_{i+1} - a_i)$. Pentru orice $\delta \in \Delta$ și orice funcție μ-măsurabilă $f: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ putem considera suma Lebesgue asociată funcției f și diviziunii δ, care este $\sigma_\delta(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, \mu(A_i)$, unde $a_0 = f^{-1}([a_0, a_1))$, $a_1 = f^{-1}([a_1, a_2)), \ldots, a_{n-1} = f^{-1}([a_{n-1}, a_n))$ și $a_n = f^{-1}([a_n, \infty))$. Se arată că f este funcție μ-integrabilă dacă și numai dacă șirul generalizat crescător al numelor Lebesgue $\{\sigma_\delta(f)\}_{\delta \in \Delta}$ este convergent (*i.e.* mărginit). În acest caz avem $\int f \, d\mu = \lim_\delta \sigma_\delta(f) = \sup_\delta \sigma_\delta(f)$. În general, $\sup_\delta \sigma_\delta(f) = \int f \, d\mu$ etc.

3) Fie $f: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o funcție μ-măsurabilă și $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o partiție finită a lui T (v. **integrala Kolmogorov**). Notăm $u_i = \inf \{f(t) \mid t \in D_i\}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ și apoi $S_D(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i \mu(D_i)$. Se arată că $\int f \, d\mu = \sup_D S_D(f)$, unde superiorul se ia după toate partițiile finite posibile ale lui T etc. (*I. C.*)

integrala Lebesgue-Stieltjes v. **integrala Lebesgue abstractă**

integrala nedefinită a unei funcții integrabile v. **măsuri definite prin densități, integrala Lebesgue abstractă, integrala Bochner**

integrala Pettis v. **integralele Dunford; Gelfand; Pettis**

integrala Poisson, formulă integrală care dă soluția problemei lui Dirichlet pentru cerc. Folosind coordonatele polare, soluția acestei probleme pentru cercul de rază 1, centrat în origine, cu data continuă $f(\theta)$ este

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \, \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \theta)} \, d\varphi.$$

Formule analoage se obțin, în plan, pentru cercuri de rază arbitrară R, și în $\mathbb{R}^n$ pentru sfere centrate în origine de rază R arbitrară. Astfel, în $\mathbb{R}^3$, soluția

problemei lui Dirichlet pentru bila deschisă $\{|x| < R\}$ cu data f continuă pe $\{|x| = R\}$ se exprimă astfel

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|y| = R} f(y) \, \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^2} \, dS_y, \quad |x| < R;$$

expresia $\dfrac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^2}$ se numește *nucleu Poisson*. (*G. G.*)

integrala stochastică Se consideră o mulțime nevidă D și un spațiu cu măsură probabilistică $(\Gamma, \mathcal{T}, P)$. Vom numi *proces stochastic* sau *proces aleator*) o familie $\{B_t\}_{t \in D}$, unde pentru fiecare t din D funcția $B_t : T \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare (*i.e.* este $\mathcal{T}$-măsurabilă). În cele ce urmează vom considera că $D \subset \mathbb{R}$ este interval nedegenerat. Vom spune că $\{B_t\}_t$ este un *proces cu creșteri independente* (sau *proces aditiv*) dacă are proprietatea următoare: pentru orice sistem finit de numere $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ din D, variabilele aleatoare diferență $F(t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt independente. Am notat

$$F(t_{i-1}, t_i) : T \to \mathbb{R}, \quad F(t_{i-1}, t_i)(x) = B_{t_i}(x) - B_{t_{i-1}}(x).$$

Reamintim că variabilele aleatoare u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt *independente* dacă pentru orice numere $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ și pentru orice mulțimi boreliene $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ în $\mathbb{R}$ avem

$$P(u_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap u_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap \ldots \cap u_{i_k}^{-1}(A_{i_k})) = \prod_{m=1}^{k} P(u_{i_m}^{-1}(A_{i_m})).$$

Dacă $\mathcal{B}$ sînt borelienele lui $\mathbb{R}$ și $u: T \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare, ea generează *probabilitatea de distribuție* (sau *de repartiție*) a lui u care este măsura probabilistică $u(P): \mathcal{B} \to [0, 1]$ definită prin $u(P)(B) = P(u^{-1}(B))$. Dacă $u(P)$ este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$, atunci $u(P)$ se exprimă ca o măsură definită prin densități, anume $u(P) = f\,dx$ (v. **teorema Radon-Nikodym**). Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește *densitate de distribuție* (sau *de repartiție*). Dacă există un număr real m și un număr strict pozitiv σ astfel încît

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - m)^2}{\sigma}\right),$$

se spune că u este *variabilă aleatoare normală* (sau *normal distribuită*) după legea $N(m, \sigma)$. Aici $\exp(z) = e^z$. Se numește *mișcare browniană* un proces stochastic $\{B_t\}_{t \in D}$ cu creșteri independente și care are proprietatea că există o constantă strict pozitivă c astfel încît pentru orice $t < s$ din D variabila aleatoare diferență $F(t, s)$ este normal distribuită după legea $N(0, c(s - t))$. Se observă că pentru orice $t \in D$ și orice $1 \leqslant p < \infty$, $B_t \in \mathcal{L}^p(P)$ (v. **spații Lebesgue**). Vom considera în cele ce urmează că $D = [a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$. Fie $\{B_t\}_{t \in D}$ o mișcare browniană pentru care constanta c din definiție este 1 și astfel încît B_a este constantă P-a.p.t. Să considerăm și o funcție $f \in \mathcal{L}^2(\lambda)$, unde λ este măsura Lebesgue pe D. Vom defini *integrala stochastică a lui f în raport cu procesul* $\{B_t\}_{t \in D}$, notată $I(f) = \int f(t) \, dB_t$. Fie un șir $\{f_n\}_n$ de funcții simple $f_n : D \to \mathbb{R}$ astfel încît $f_n \xrightarrow[n]{} f$ în $\mathcal{L}^2(\lambda)$. Anume, pentru fiecare f_n există cîte o diviziune $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ astfel încît $f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{D_i}$, unde a_i sînt numere reale fixate și $D_i = [t_{i-1}, t_i)$. Definim pentru acest f_n integrala sa stochastică $I(f_n) \in \mathcal{L}^2(P)$, anume

$$I(f_n)\colon T \to \mathbb{R}, \quad I(f_n)\,(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(B_{t_i}(x) - B_{t_{i-1}}(x)).$$

Deoarece trecerea $f_n \mapsto I(f_n)$ este liniară și păstrează „produsul scalar în $\mathcal{L}^2(D)$", rezultă că există lim $I(f_n) := I(f)$ în $\mathcal{L}^2(D)$ (limita este unic determinată P-a.p.t. $I(f)$ se numește **i.s.** *a lui f în raport cu mișcarea browniană* $(B_t\}_{t \in D}$. Se arată că operatorul $V\colon L^2(\lambda) \to L^2(P)$, $V(\widetilde{f}) = \widetilde{I(f)}$ este liniar, izometric $(\|\widetilde{f}\|_2 = \|\widetilde{I(f)}\|_2)$ și $I(f)$ este distribuită normal după legea $N(0, \|f\|_2^2)$. (*I. C.*)

integrala superioară (a unei funcții inferior semicontinuă) v. **prelungirea măsurilor Radon**

integrala superioară (a unei funcții pozitive) v. **prelungirea măsurilor Radon**

integrala superioară și integrala inferioară (în raport cu o măsură Radon) Fie T un spațiu local compact și μ o măsură Radon pozitivă pe T. Vom considera o funcție $f\colon T \to \mathbb{R}$. *Integrala superioară* a lui f, notată prin $\mu^*(f)$, se definește după cum urmează: 1) Dacă există o funcție μ-integrabilă inferior semicontinuă $g \geqslant f$, atunci $\mu^*(f) = \inf\{\mu(g) \mid g \geqslant f,\ g$ este μ-integrabilă și inferior semicontinuă$\}$; 2) În caz contrar, $\mu^*(f) = \infty$. Această definiție coincide cu definiția dată la prelungirea măsurilor Radon pentru $f \geqslant 0$. *Integrala inferioară* a lui f, notată $\mu_*(f)$, se definește prin $\mu_*(f) := -\mu^*(-f)$. Dacă $A \subset T$, *măsura interioară a lui A* se notează prin $\mu_*(A)$ și se definește prin $\mu_*(A) := \mu_*(\varphi_A)$. Se arată că o funcție $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ este μ-integrabilă dacă și numai dacă $\mu^*(f) = \mu_*(f)$ și $\mu^*(f)$, $\mu_*(f)$ sînt finite. În acest caz avem $\mu(f) = \mu^*(f) = \mu_*(f)$. Pentru orice $A \subset T$ avem relația $\mu_*(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A$, K compact$\}$. Mulțimea $A \subset T$ este μ-integrabilă dacă și numai dacă $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ și $\mu^*(A)$, $\mu_*(A)$ sînt finite. În acest caz $\mu(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A)$. O funcție $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ se numește *cvasiintegrabilă* în raport cu μ dacă este μ-măsurabilă și $\mu^*(f) = \mu_*(f)$. *Cvasiintegrala* lui f este atunci $\mu(f) = \mu^*(f) = \mu_*(f)$. Se arată că f este cvasiintegrabilă dacă și numai dacă este μ-măsurabilă și cel puțin una din expresiile $\mu^*(f^+)$, $\mu^*(f^-)$ este finită. Atunci, cvasiintegrala lui f este $\mu(f) = \mu^*(f^+) - \mu^*(f^-)$. (*I. C.*)

integrala unei familii de măsuri Radon v. **familie concordantă de măsuri Radon**

integrala unei funcții etajate (în raport cu o măsură) v. **integrala Lebesgue abstractă, integrala Bochner**

integrala unei funcții integrabile (în raport cu o măsură) v. **integrala Lebesgue abstractă, integrala Bochner**

integrala unei funcții integrabile (în raport cu o măsură Radon) v. **spații $\mathcal{L}^p(\mu)$ și $L^p(\mu)$** (în raport cu o măsură Radon)

integrala unei funcții măsurabile (în raport cu o măsură) v. **integrala Lebesgue abstractă**

integrala unei funcții vectoriale (în raport cu o măsură Radon scalară) Fie T un spațiu local compact, μ o măsură Radon scalară pe T și E un spațiu local convex separat. Fie și $f : T \to E$ o funcție continuă cu suport compact. Atunci, pentru orice z' din E' (unde E' este dualul lui E) funcția scalară $z' \circ f$ este continuă și are suport compact, deci putem defini numărul

$\mu(z' \circ f)$. Astfel am definit aplicația liniară $u\colon E' \to \Gamma$ (Γ fiind corpul scalarilor reali sau complecși) dată prin $u(z') = \mu(z' \circ f)$. Se scrie $u = \int f\,d\mu = \int f(x)\,d\mu(x)$; u se numește *integrala funcției vectoriale f în raport cu măsura Radon scalară* μ. Așadar, $\int f\,d\mu \in E'^*$, unde E'^* este dualul algebric al lui E'. Dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset E$ închiderea anvelopei convexe a lui K este slab compactă în E (ceea ce se întîmplă dacă E este spațiu Banach) sau, mai tare, dacă orice mulțime mărginită și închisă în E este slab compactă, atunci $\int f\,d\mu \in E$ (cu identificările obișnuite). De exemplu, dacă $T \subset E$ este o parte compactă, putem considera funcția $f : T \to E$, $f(x) = x$, care este continuă (și are suport compact). Atunci, pentru orice măsură Radon pozitivă μ pe T cu $\mu(T) = 1$ putem considera $\int f\,d\mu = \int_T x\,d\mu(x) =$ *centrul de greutate al lui T relativ la* μ. Acum vom considera că μ este măsură Radon pozitivă pe T. O funcție $f : T \to E$ se numește *funcție scalar esențial integrabilă în raport* cu μ (resp. *funcție scalar esențial neglijabilă în raport cu* μ) dacă pentru orice z' din E' funcția scalară $z' \circ f$ este esențial integrabilă în raport cu μ (resp. esențial neglijabilă în raport cu μ). În cazul cînd f este scalar esențial integrabilă în raport cu μ, *integrala lui f în raport cu* μ este aplicația liniară $u : E' \to \Gamma$ definită prin $u(z') = \int (z' \circ f)\,d\mu$. Se notează și în acest caz $u = \int f\,d\mu$ și avem din nou $\int f\,d\mu \in E'^*$. Dacă f este continuă cu suport compact sau dacă E este spațiu Banach și f esențial integrabilă în raport cu μ, atunci f este și scalar esențial integrabilă în raport cu μ și definițiile integralelor date anterior (v. **integrala esențială** (în raport cu o măsură Radon)) coincid cu $\int f\,d\mu$ definită aici. De remarcat că atunci cînd μ este mărginită și $f(T)$ este inclusă într-o mulțime convexă slab compactă în E avem chiar $\int f\,d\mu \in E$, pentru orice $f : T \to E$, scalar esențial integrabilă în raport cu μ. (*I.C.*)

integrala unei funcții vectoriale (în raport cu o măsură Radon vectorială) Fie T un spațiu local compact, F, G și H spații Banach și $B : F \times G \to H$ o aplicație biliniară continuă. Considerăm o măsură Radon majorată $m\colon K(T) \to G$ (v. **măsură Radon vectorială**), $K(T)$ fiind spațiul funcțiilor scalare continue pe T cu suport compact. Atunci există o unică aplicație liniară continuă $I_{B,m} : \mathcal{L}^1_F(|m|) \to H$ cu proprietatea $I_{B,m}(hz) = B\left(z, \int h\,dm\right)$ pentru orice z în F și orice h scalară integrabilă în raport cu $|m|$. Aplicația $I_{B,m}$ se obține astfel: 1) Dacă f este funcție etajată $|m|$-integrabilă, deci f este de forma $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{X_i} a_i$, unde $a_i \in F$ și X_i sînt mulțimi $|m|$-integrabile mutual disjuncte (v. **prelungirea măsurilor Radon pozitive**), vom avea $I_{B,m}(f) = \sum_{i=1}^{n} B\left(a_i, \int \varphi_{X_i}\,dm\right)$; 2) Se face apoi extensia prin continuitate a lui

$I_{B,m}$ la $\mathcal{L}^1_F(|m|)$. Se definește și se scrie $I_{B,m}(f) := \int f \, dm$ pentru orice f din $\mathcal{L}^1_F(|m|)$. (*I.C.*)

integrală cu parametru pe interval necompact Fie $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : [a, \lambda) \times [c, d] \subset \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (sau în $\mathbb{C}$) astfel încît $f(x, t)$ este integrabilă Riemann impropriu ca funcție de x pentru orice $t \in [c, d]$. Integrala $F(t) = \int_a^\lambda f(x, t)\, dx$, $t \in [c, d]$, se numește atunci **i.p.i.n.** $[a, \lambda)$ (v. și **integrală improprie**). Se spune că integrala $\int_a^\lambda f(x, t)\, dx$ este *simplu* (*uniform*) *convergentă* dacă pentru orice șir $\{b_n\}_n$, crescător către λ, $b_n \in [a, \lambda)$, șirul de funcții $\left\{\int_a^{b_n} f(x, t)\, dx\right\}_n$ converge simplu (resp. uniform) către $\int_a^\lambda f(x, t) dx$. Dacă familia de funcții $\{f(x, \cdot)\}_{x \in [a, \lambda)}$ este echicontinuă în punctul $t_0 \in [c, d]$ iar $\int_a^\lambda f(x, t)\, dx$ este uniform convergentă, atunci F este continuă în t_0. În consecință, dacă f este continuă pe $[a, \lambda) \times \times [c, d]$ iar $\int_a^\lambda f(x, t)\, dx$ este uniform convergentă, atunci F este continuă pe $[c, d]$. Pentru derivabilitate, este suficient ca f și $\frac{\partial f}{\partial t}$ să fie continue pe $[a, \lambda) \times \times [c, d]$, $\int_a^\lambda f(x, t) dx$ să fie simplu convergentă iar $\int_a^\lambda \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx$ să fie uniform convergentă. Atunci F este chiar de clasă C^1 pe $[c, d]$ și $F'(t) = \int_a^\lambda \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx$. (*Gh.Gr.*)

integrală cu parametru sub semnul integralei, integrală de forma $F(t) = \int_a^b f(x, t)\, dx$, unde f este o funcție reală definită pe produsul cartezian $[a, b] \times \times [c, d]$, integrabilă în raport cu x pe $[a, b]$, oricare ar fi $t \in [c, d]$. Dacă f este continuă pe $[a, b] \times [c, d]$, atunci F este continuă pe $[c, d]$. Dacă f este continuă pe $[a, b] \times [c, d]$ iar $\frac{\partial f}{\partial t}$ există și este continuă pe $[a, b] \times [c, d]$, atunci F este derivabilă pe $[c, d]$ și $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\, dx$. Rezultatele se extind la cazul în care intervalele $[a, b]$ și $[c, d]$ sînt înlocuite cu intervale necompacte. (*S.M.*)

integrală cu parametru și la limitele de integrare, integrală de forma $F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t)\, dx$, unde f este o funcție reală definită pe produsul cartezian $I \times J$, unde I și J sînt intervale compacte. Presupunem că $a(t)$ și $b(t)$ sînt definite pe J, cu valori în I, iar funcțiile parțiale ale lui f în raport cu x sînt, toate, integrabile pe I. Dacă f este continuă pe $I \times J$ iar a și b sînt funcții continue pe J, cu valori în I, atunci F este continuă pe J. Dacă în plus a și b

sînt derivabile pe J iar f admite pe $I \times J$ derivată parțială în raport cu t continuă, atunci F este derivabilă pe J și

$$F'(t_0) = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t_0)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\right)(t_0) f(b(t_0), t_0) - \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)(t_0) f(a(t_0), t_0).$$

Rezultatele se extind la cazul în care I și J sînt necompacte. (*S.M.*)

integrală curbilinie de al doilea tip Fie P și Q funcții reale definite într-un domeniu plan D și fie d un drum de reprezentare parametrică $x = f(t)$, $y = g(t)$, f și g continue pe $[a, b]$. **I. c.d.t.**, notată $\int_d P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ se definește ca sumă a integralelor Riemann-Stieltjes, dacă există,

$$\int_a^b P(f(t), g(t))\,\mathrm{d}f(t) \text{ și } \int_a^b Q(f(t), g(t))\,\mathrm{d}g(t).$$

Ea reprezintă lucrul mecanic al forței de componente P, Q de-a lungul unui drum d (v. și **integrala curbilinie** (în $\mathbb{R}^n$)). (*S.M.*)

integrală curbilinie de primul tip Fie F o funcție reală definită într-un domeniu plan D care conține imaginea Γ a curbei rectificabile $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Dacă integrala Stieltjes $\int_a^b F(f(t), g(t))\,\mathrm{d}l(t)$ (unde $l(t)$ este lungimea drumului $x = f(u)$, $y = g(u)$, $a \leqslant u \leqslant t \leqslant b$) există, finită, atunci ea se notează condensat $\int_d F(x, y)\,\mathrm{d}l$ și se numește **i.c.p.t.** a funcției F de-a lungul drumului considerat. Se arată că existența și valoarea acestei integrale nu depind de trecerea de la drumul considerat la altul echivalent. Ea reprezintă masa unui fir, atunci cînd i se cunoaște densitatea în fiecare punct (v. și **integrala curbilinie** (în $\mathbb{R}^n$)). (*S.M.*)

integrală dublă v. **integrală multiplă**

integrală improprie Fie $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$, $f: [a, \lambda) \to \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) integrabilă Riemann pe $[a, x]$ pentru orice $x \in [a, \lambda)$. Dacă există $\lim\limits_{x \to \lambda,\, x < \lambda} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$), se notează această limită cu $\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x$ și se numește *integrala* (*Riemann*) *improprie* a funcției f pe intervalul $[a, \lambda)$. Se spune în acest caz că **i.i.** $\int_a^\lambda f(x)$ este *convergentă* sau că f este *integrabilă Riemann impropriu* pe $[a, \lambda)$ și se notează prin $\int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Simbolul $\int_a^\lambda f(x)$ se folosește chiar dacă limita de mai sus nu există (în $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) și se spune în acest caz că **i.i.** $\int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ este *divergentă*. Dacă $\lambda = \infty$ se spune că **i.i.** considerată este de primul tip iar dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ că este de al doilea tip. Se va omite în continuare să se precizeze de fiecare dată că funcțiile considerate sînt integrabile Riemann pe orice subinterval compact. Din criteriul general Cauchy-Boltzano rezultă că **i.i.** $\int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $c \in [a, \lambda)$ astfel încît

$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ pentru orice $\alpha, \beta \in (c, \lambda)$ (*criteriul lui Cauchy pentru* **i.i.**).
Se spune că **i.i.** $\int_a^\lambda f(x)\,dx$ este *absolut convergentă* dacă $\int_a^\lambda |f(x)|\,dx < \infty$. O **i.i.** absolut convergentă este convergentă. Mai general, dacă $|f(x)| \leqslant g(x)$ pentru orice $x \in [a, \lambda)$ și $\int_a^\lambda g(x)\,dx < \infty$, atunci $\int_a^\lambda f(x)\,dx$ este absolut convergentă. O **i.i.** convergentă și care nu este absolut convergentă se numește *semiconvergentă*. Unele din afirmațiile sau noțiunile legate de **i.i.** au un corespondent la serii numerice, ajungîndu-se pînă la echivalența convergenței integralei cu convergența unei serii (v. și **serie numerică**). Dacă f, g: $[a, \infty)$, g monotonă și mărginită, $\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx < \infty$ (*criteriul lui Abel*). Dacă $f, g : [a, \infty)$, g monoton descrescătoare la zero cînd $x \to \infty$ și dacă $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ este mărginită, atunci $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx < \infty$ (*criteriul lui Dirichlet*). Dacă $\int_a^\lambda f(x)\,dx < \infty$ și $\varphi : [b, \mu) \to [a, \lambda)$ este o funcție de clasă C^1, monotonă, $\varphi(b) = a$ și $\lim\limits_{x \to \mu} \varphi(x) = \lambda$, atunci

$$\int_a^\lambda f(x)\,dx = \int_b^\mu f(\varphi(x))\,dx$$

(*teorema de schimbare de variabilă pentru* **i.i.**). Definiția și studiul unor **i.i.** pe un interval necompact de forma $(\lambda, b]$ rezultă din cele precedente. Există apoi **i.i.** pentru care punctul singular λ se află în interiorul intervalului de integrare. Mai precis, dacă $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in (a, b)$, $f : [a, b] \setminus \{\lambda\} \to \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) și dacă fiecare din **i.i.** $\int_a^\lambda f(x)\,dx$, $\int_\lambda^b f(x)\,dx$ este convergentă, se spune că f este integrabilă (Riemann) impropriu pe $[a, b]$ și, prin definiție,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\lambda f(x)\,dx + \int_\lambda^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0,\ \eta\to 0}\left(\int_a^{\lambda-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\lambda+\eta}^b f(x)\,dx\right).$$

În fine pentru **i.i.** de forma $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ convergența va însemna existența în $\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) a limitei

$$\lim_{n \to \infty,\ m \to \infty} \int_{-m}^n f(x)\,dx := \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

Pentru integrale divergente de aceste ultime două tipuri v. și **valoarea principală a unei integrale improprii**. În mulțimea funcțiilor cu semn constant integrabilitatea improprie se dovedește a fi echivalentă cu integrabilitatea Lebesgue. Astfel, dacă $f : [a, \lambda) \to \mathbb{R}$ este pozitivă și $\int_a^\lambda f(x)\,dx < \infty$, atunci f este integrabilă Lebesgue iar integrala sa Lebesgue coincide cu integrala Riemann impropriu. Reciproc, dacă f este pozitivă, integrabilă Lebesgue, integrabilă

Riemann pe orice interval compact inclus în $[a, \lambda)$, atunci $\int_a^\lambda f(x)\,dx < \infty$ și această integrală coincide cu integrala Lebesgue a lui f pe $[a, \lambda)$. Ultimele două afirmații nu sînt adevărate dacă funcția f nu are semn constant (v. Ex. 4°)
Ex.: 1° $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$. 2° $\int_\alpha^\infty a^x\,dx$ este convergentă dacă $a < 1$ și divergentă dacă $a \geqslant 1$. 3° $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$ este divergentă dacă $\alpha \geqslant 1$ și convergentă dacă $\alpha < 1$. 4° Fie f: $(0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x^\beta}$. Dacă $\alpha < 1 + \beta$, f este integrabilă Riemann impropriu, dacă $\alpha < 1$, f este integrabilă Lebesgue iar dacă $1 < \alpha < 1 + \beta$, f este integrabilă Riemann impropriu dar nu este integrabilă Lebesgue. (*Gh.Gr.*)

integrală iterată v. **măsură produs, măsura Radon produs, integrală iterată** (în raport cu o măsură Radon)

integrală iterată (în raport cu o măsură Radon) Fie T un spațiu local compact separat și $\{\lambda_t\}_{t\in T}$ o familie concordantă în raport cu o măsură Radon pozitivă μ pe T (așadar λ_t sînt măsuri Radon pozitive pe un spațiu local compact separat X). Fie $\nu = \int \lambda_t\,d\mu(t)$ (v. **familie concordantă de măsuri Radon**). Atunci pentru orice funcție continuă cu suport compact f pe X vom scrie

$$\int f(x)\,d\nu(x) := \int d\mu(t) \int f(x)\,d\lambda_t(x)$$

și vom numi ultima expresie **i.i.** Așadar, avem

$$\int d\mu(t) \int f(x)\,d\lambda_t(x) = \int \lambda_t(f)\,d\mu(t).$$

Dacă F este un spațiu Banach (sau $F = \overline{\mathbb{R}}$) și $f : X \to F$ este ν-integrabilă, atunci: a) Mulțimea $H = \{t \in T \mid f$ nu este λ_t integrabilă$\}$ este o mulțime local μ-neglijabilă și funcția $U : T \setminus H \to F$, $u(t) = \int f(x)\,d\lambda_t(x)$ este esențial μ-integrabilă; b) Avem $\int f(x)\,d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x)\,d\lambda_t(x)$ (este o integrală esențială); c) În plus, dacă aplicația $t \mapsto \lambda_t$ definită pe T cu valori în spațiul măsurilor Radon pe X este vag continuă) (v. **topologia vagă**), atunci H este chiar μ-neglijabilă și u este chiar μ-integrabilă. (*I.C.*)

integrală multiplă Ne vom rezuma la integrala Riemann. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu compact măsurabil Jordan ($n \geqslant 2$, n număr natural), *i.e.* D este o mulțime compactă conexă măsurabilă Jordan cu interior nevid. O *descompunere* a lui D este o mulțime finită $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_p\}$ de domenii compacte măsurabile Jordan a căror reuniune este D și care, în plus, are proprietatea că pentru orice $i \neq j$, interioarele mulțimilor D_i și D_j sînt disjuncte. De exemplu, dacă $n = 2$ și $D = [a, b] \times [c, d]$ (produs de intervale compacte), putem lua descompunerea $\{D_{ij} \mid 0 \leqslant i \leqslant u-1,\ 0 \leqslant j \leqslant v-1\}$, unde $D_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ se obțin cu ajutorul diviziunilor $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_u = b$ (a lui $[a, b]$) și $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_v = d$ (a lui $[c, d]$). Revenind la cazul general, *norma descompunerii* Δ este $\|\Delta\| = \max\ \{\delta(D_i) \mid i = 1, 2, \ldots, p\}$, unde $\delta(D_i)$ este diametrul lui D_i. Fie acum o funcție $f : D \to \mathbb{R}$. Se spune că f

este *integrabilă Riemann* dacă există un număr real I cu următoarea proprietate: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi descompunerea $\Delta = \{D_1, D_2, ..., D_p\}$ a lui D cu $\|\Delta\| < \delta$ și oricare ar fi punctele $u_i \in D_i$, $i = 1, 2, ..., p$, avem $\left| I - \sum_{i=1}^{p} f(u_i)\, m(D_i) \right| < \varepsilon$. S-a notat cu $m(D_i)$ măsura Jordan al lui D_i. Numărul $\sum_{i=1}^{p} f(u_i)\, m(D_i)$ se numește *suma Riemann* (sau *suma riemanniană*) atașată funcției f, descompunerii Δ și punctelor intermediare u_i. Numărul I se numește ***integrala** Riemann* a funcției f (pe D) și se notează $I = \int\int ... \int_D f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n$. O astfel de integrală se numește **i.m.** *de ordin n*. În cazul $n=2$, integrala se numește *integrală dublă*, iar pentru $n=3$, *integrală triplă*. Se arată că orice funcție continuă este integrabilă Riemann.

Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann. O funcție $f : D \to \mathbb{R}$ (D ca mai sus) este integrabilă Riemann dacă și numai dacă f este mărginită și mulțimea punctelor sale de discontinuitate este de **măsură** Lebesgue nulă. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann și $d \subset D$ este un domeniu compact măsurabil Jordan, rezultă că restricția lui f la d (pe care o notăm cu g) este integrabilă Riemann. Notăm

$$\int\int ... \int_d g(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n =$$

$$= \int\int ... \int_d f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n.$$

Dacă $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ și f este o funcție continuă, putem calcula integrala Riemann a lui f pe D ca o integrală iterată, și anume

$$\int\int ... \int_D f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(... \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_n \right) dx_{n-1} \right) ... dx_2)\, dx_1 : =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 ... \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_n.$$

Ordinea în care se efectuează integrările succesive nu este esențială, rezultatul fiind același. O funcție integrabilă Riemann este integrabilă Lebesgue și integralele Riemann și Lebesgue ale ei coincid. Integrala Riemann multiplă este de fapt o integrală pe spațiu produs (v. **măsura produs**). Fie $[a, b]$ un interval compact al dreptei reale și $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții continue diferite astfel încît $u(x) \leqslant v(x)$ pentru orice x din $[a, b]$. Definim, pentru orice $x \in [a,b]$, mulțimea $D_x = \{(x, y) \mid u(x) \leqslant y \leqslant v(x)\}$. Atunci mulțimea $D = \bigcup_{x \in [a, b]} D_x$ este un domeniu compact măsurabil Jordan în $\mathbb{R}^2$ și se numește *domeniu simplu* în raport cu axa Oy. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă, avem

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, dy \right) dx : = \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, dy.$$

Rezultate similare schimbînd rolul axelor Ox și Oy. Transformarea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\rho, \theta) = (x, y)$, unde $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$ are jacobianul egal cu ρ și se numește *transformarea în coordonate polare* (în plan), iar variabilele ρ și θ se numesc *coordonate polare* (în plan). Se folosește pentru $\rho \in [0, \infty)$ și $\theta \in [0, 2\pi]$. Formula schimbării de variabilă ne spune că dacă $d \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ este un domeniu compact măsurabil Jordan rezultă că $T(d) = D$ este domeniu compact măsurabil Jordan și, în plus, pentru orice funcție continuă $f : D \to \mathbb{R}$ avem (*formula schimbării de variabilă în coordonate polare*)

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_d f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta.$$

De exemplu, dacă D este discul $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$, unde $r > 0$, putem lua $d = [0, r] \times [0, 2\pi]$ și obținem

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)\, \rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)\, \rho\, d\rho.$$

Putem defini domeniile simple și în spațiu. Dacă $d \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil Jordan și $u, v : d \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue diferite cu $u(x, y) \leqslant v(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in d$, putem defini, pentru orice astfel de (x, y), mulțimea $D_{(x, y)} = \{(x, y, z) \mid z \in [u(x, y), v(x, y)]\}$. Atunci mulțimea $D = \bigcup_{(x, y) \in d} D_{(x, y)}$ este domeniu compact măsurabil Jordan în $\mathbb{R}^3$ și se numește *domeniu simplu* în raport cu axa Oz. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă putem calcula integrala lui f pe D astfel

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int_d \left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy : =$$

$$= \int\int_d dx\, dy \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Rezultate similare schimbînd rolul axelor. Transformarea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin $T(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z)$, unde $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$, are jacobianul egal cu $\rho^2 \sin\theta$ și se numește *transformarea în coordonate polare* (în spațiu), sau *transformarea în coordonate sferice*, iar variabilele ρ, θ, φ se numesc *coordonate polare în spațiu* sau *coordonate sferice*. Se folosește pentru $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ și $\varphi \in [0, 2\pi]$. Formula schimbării de variabilă ne spune că dacă $d \subset [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ este un domeniu compact măsurabil Jordan, rezultă că $D = T(d)$ este domeniu compact măsurabil Jordan și, în plus, pentru orice funcție continuă $f : D \to \mathbb{R}$ avem (*formula schimbării de variabilă în coordonate sferice*)

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\int_d f(\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

De exemplu, dacă D este bila $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2\}$, unde $r > 0$, putem lua $d = [0, r] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ și obținem

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\int_0^r d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} f(\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta\, \varphi, \rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\theta = \ldots$$

(6 variante de alegere a ordinii de integrare). (*I. C.*)

integrală primă (a unui sistem de ecuații diferențiale), funcție neconstantă care compusă cu soluțiile sistemului conduce la funcții constante. **I.p.** modelează legile de conservare exprimînd faptul că anumite funcții de stare păstrează aceeași valoare în procesul de evoluție. (*A.H.*)

integralele Dunford; **Gelfand**; **Pettis** Fie un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și un spațiu Banach E. O funcție $f: T \to E$ care are proprietatea că pentru orice $x' \in E^*$ funcția scalară $x' \circ f$ este μ-integrabilă se numește *funcție scalar μ-integrabilă* sau *funcție slab μ-integrabilă* sau *funcție μ-integrabilă Dunford* sau *funcție Dunford integrabilă*. Orice funcție $f \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$ este scalar μ-integrabilă. Se arată că dacă f este scalar μ-integrabilă, atunci pentru orice $A \in \mathcal{T}$ există un element $x''_A \in E^{**}$ (bidualul lui E) astfel încît pentru orice $x' \in E^*$ avem $x''_A(x') = \int_A (x' \circ f)\, d\mu$. Elementul $x''_A =$ (Dunford)-$\int_A f d\mu$ se numește *integrala Dunford a lui f pe A* (pentru $A = T$, x''_A se numește *integrala Dunford a lui f*). Dacă $f: T \to E$ este μ-integrabilă Bochner, atunci f este integrabilă Dunford și pentru orice $A \in \mathcal{T}$, x''_A se identifică cu $\int_A f\, d\mu$, anume $x''_A(x') = x'\left(\int_A f d\mu\right)$ pentru orice $x' \in E^*$. O funcție f: $T \to E$ se numește *funcție μ-integrabilă Pettis* (*funcție integrabilă Pettis*) dacă este μ-integrabilă Dunford și pentu orice $A \in \mathcal{T}$ există un element $x_A \in E$ astfel încît $x'(x_A) = \int_A (x' \circ f)\, d\mu$. Elementul $x_A =$ (Pettis)-$\int_A f\, d\mu$ se numește *integrala Pettis a lui f pe A* (dacă $A = T$, x_T se numește *integrala Pettis a lui f*). În acest caz (Dunford)-$\int_A f\, d\mu = x''_A$ se identifică cu (Pettis)-$\int_A f\, d\mu = x_A$ astfel: $x''_A(x') = x'(x_A)$ pentru orice $x' \in E^*$. Este clar că dacă f este μ-integrabilă Bochner, atunci f este și μ-integrabilă Pettis și $\int_A f\, d\mu =$ (Pettis)-$\int_A f d\mu$ pentru orice $A \in T$. Se arată că dacă f este μ-integrabilă Pettis, atunci funcția de mulțime $m_f: \mathcal{T} \to E$, $m_f(A) =$ (Pettis)-$\int_A f d\mu$ este o măsură numărabil aditivă absolut continuă în raport cu μ. Din nou $(T, \mathcal{T}, \mu)$ este un spațiu cu măsură și E este un spațiu Banach. Pentru orice f: $T \to E^*$ și orice $x \in E$ definim $f_x : T \to \Gamma$ (=corpul scalarilor) prin $f_x(t) = f(t)(x)$. O funcție f: $T \to E^*$ care are proprietatea că pentru orice $x \in E$ funcția scalară f_x este μ-integrabilă se numește *funcție μ-integrabilă Gelfand* (*funcție integrabilă Gelfand*). Se arată că dacă f este μ-integrabilă Gelfand, atunci pentru orice $A \in \mathcal{T}$ există un element $x'_A \in E^*$ cu proprietatea că $x'_A(x) = \int_A f_x\, d\mu$ pentru orice $x \in E$. Elementul $x'_A =$ (Gelfand)-$\int_A f\, d\mu$ se numește *integrala Gelfand a lui f pe A* (dacă $A = T$, x'_T se numește *integrala Gelfand a lui f*). (*I. C.*)

integralele Fresnel v. **reziduu**

integrare constructivă Fie $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ numere reale constructive. Șirul finit $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ este o partiție a lui $[a, b]$; n este lungimea lui P iar $\nu(P) = \max\{|a_{i+1} - a_i| \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ norma partiției P. Fie f continuă constructiv pe $[a, b]$. Să punem $S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(a_{i+1} - a_i)$ cu $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Se arată că, pentru $P = \left\{a_0, a + \frac{b-a}{n} = a_1, \ldots, b = a_n\right\}$, $S(f, a, b, n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$ este unul dintre numerele $S(f, P)$. O altă teoremă afirmă că dacă f este continuă constructiv pe $[a, b]$, atunci șirul $\{S(f, a, b, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $\int_a^b f(x)\, dx$. Pentru o partiție arbitrară P a lui $[a, b]$ și pentru $\varepsilon > 0$ și $\nu(P) \leqslant \omega(\varepsilon)$ (un modul constructiv de continuitate al lui f) avem $\left|S(f, P) - \int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \varepsilon(b-a)$. (*S. M.*)

integrare numerică, capitol al analizei numerice care se ocupă cu aproximarea integralelor definite și cu rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale. Formulele de aproximare a integralelor funcțiilor reale de o variabilă reală se numesc *formule de cvadratură*. Dacă $\int_a^b f(x)\, dx$ se aproximează pe o anumită clasă de funcții prin $I(f)$, se spune că I este o formulă de cvadratură pe acea clasă de funcții. Cele mai multe formule de cvadratură sînt de forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i), \text{ unde } a_i \in \mathbb{R} \text{ și } x_i \in [a, b],\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Asemenea formule se pot obține integrînd polinoame de interpolare asociate funcției f. Integrînd polinoame de interpolare relativ la n noduri echidistante se obțin formulele de cvadratură Newton-Côtes, iar drept cazuri particulare apar formula dreptunghiului, a trapezului, a lui Simpson. Dacă I_n este formula Newton-Côtes pentru n noduri echidistante, există funcții continue f pentru care $\{I_n(f)\}_n$ nu converge la $\int_a^b f(x)\, dx$. O formulă de cvadratură I

se numește *exactă* pentru funcția f_0 dacă $I(f_0) = \int_a^b f_0(x)\,\mathrm{d}x$. Printre formulele de cvadratură de forma $\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$, cea a lui Gauss este exactă pentru polinoame de grad cel mult $2n - 1$. Pentru aproximarea unor integrale de forma $\int_a^b \varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ se folosesc formulele de cvadratură de tip Gauss obținute cu ajutorul polinoamelor ortogonale în raport cu funcția pondere φ. Unele formule de cvadratură utilizează și valorile derivatelor funcției (formula lui Hermite, formula Euler-Maclaurin). În vederea obținerii unor aproximări cît mai bune pe anumite clase de funcții, formulele de cvadratură Cebîșev, Markov, Lobatto se obțin impunînd restricții particulare parametrilor. Cele mai utilizate metode de i.n. a ecuațiilor diferențiale realizează aproximarea restricției soluției la o mulțime finită de puncte, recurgînd apoi, eventual, la interpolare. Metoda lui Euler se obține din ecuația diferențială prin discretizare, înlocuind derivata cu o diferență divizată. Metodele Euler, Euler-Cauchy, Runge-Kutta se încadrează în metoda ecuațiilor cu diferențe. (*Gh. Gr.*)

integrare pe o varietate diferențiabilă orientată, operație în care obiectele de integrat sînt n-forme diferențiale, unde n este dimensiunea varietății. Este vorba, în esență, să asociem unei asemenea forme diferențiale, presupusă local integrabilă, o măsură Radon pe varietatea considerată. Fie deci M o C^r-varietate n-dimensională orientată, $1 \leqslant r \leqslant \infty$; pentru simplitate, vom presupune M cu bază numărabilă. O n-formă diferențială (reală) ω, definită pe M, se numește *local integrabilă* dacă, pentru orice hartă pozitivă $\alpha = (x_1, \ldots, x_n): U \to \mathbb{R}^n$ a lui M, funcția reală Φ pe U, definită prin egalitatea $\omega \mid U = \Phi\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ este local integrabilă pe submulțimea deschisă $\alpha(U)$ a lui $\mathbb{R}^n$ în raport cu măsura Lebesgue λ; n-formele diferențiale local integrabile pe M formează un spațiu vectorial pe care îl notăm $L_n(M, \mathrm{loc})$; subspațiul vectorial al lui $L_n(M, \mathrm{loc})$ format din formele diferențiale cu suport compact va fi notat prin $L_n(M)_0$. Punctul de plecare în teoria integrării pe M constă în construirea funcționalei liniare $\int_M : L_n(M)_0 \to \mathbb{R}$. În cazul $n = 0$, orientarea lui M este o aplicație $\varepsilon: M \to \{-1, 1\}$, iar elementele lui $L_n(M)_0$ sînt funcții reale cu suport finit; se pune în acest caz

$$\int_M \omega := \sum_{x \in M} \varepsilon(x)\,\omega(x).$$

În cazul $n \geqslant 1$, funcționala $\int_M$ se definește axiomatic ca fiind unica funcțională liniară cu proprietatea ca, pentru orice hartă pozitivă $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ și orice formă diferențială $\omega \in L_n(M)_0$ cu suport conținut în domeniul U al hărții α, să avem $\int_M \omega = \int_{\alpha(U)} \Phi \circ \alpha^{-1}\,\mathrm{d}\lambda$, unde $\omega \mid U = \Phi\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. Construirea acestei funcționale se face, de pildă, folosind o partiție a unității. Dacă $\omega \in L_n(M, \mathrm{loc})$, măsura Radon μ_ω asociată lui ω este funcționala liniară $\mu_\omega: C^0(M) \to \mathbb{R}$, definită prin $\mu_\omega(f) = \int_M f\omega$, $f \in C^0(M)$. Forma diferențială $\omega \in L_n(M, \mathrm{loc})$ se numește *integrabilă* dacă funcția constantă $f = 1$ este integrabilă în raport cu măsura Radon μ_ω iar, în cazul integrabilității, se pune

$\int_M \omega := \int_M \mathrm{d}\mu_\omega$. Dacă A este o mulțime local închisă (sau, mai general, boreliană) a lui M, se spune că o n-formă diferențială ω definită pe A este *integrabilă pe A* cînd n-forma diferențială ω^M este integrabilă, unde ω^M este n-forma diferențiabilă pe M definită prin $\omega^M = \omega$ pe A și $\omega^M = 0$ în rest. De asemenea, dacă S este o subvarietate diferențiabilă p-dimensională orientată a lui M și ω o p-formă diferențiabilă definită pe M, se spune că ω este *integrabilă pe S* dacă p-forma diferențială $j^*\omega$ este integrabilă pe varietatea p-dimensională orientată S, unde $j: S \to M$ este aplicația de incluziune, și, în cazul integrabilității, se pune $\int_S \omega := \int_S j^*\omega$. Teorema fundamentală a teoriei integrării pe o varietate diferențiabilă orientată reprezintă un răspuns la problema valabilității formulei lui Stokes, care generalizează binecunoscuta formulă a lui Leibniz-Newton din cazul integrării pe dreapta reală. Cazul cel mai simplu este cel „fără singularități" cînd teorema corespunzătoare se enunță după cum urmează:

Teoremă. Fie M o C^r-varietate n-dimensională orientată, $r \geqslant 2$, ω o $(n-1)$-formă diferențială de clasă C^1 pe M, iar D un domeniu în M. Dacă mulțimea $\overline{D} \cap \operatorname{supp} \omega$ este compactă și conținută în D, atunci ω este integrabilă pe ∂D, $\mathrm{d}\omega$ este integrabilă pe D și $\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$, ∂D fiind bordul orientat al lui D.

În cazul „cu singularități", se presupune pentru început doar că mulțimea $D \cap \operatorname{supp} \omega$ este relativ compactă în M. Pentru valabilitatea formulei lui Stokes este necesar ca mulțimea $(\overline{D} \setminus D) \cap \operatorname{supp} \omega$ să fie „neglijabilă" într-un sens care se cere precizat; pe de altă parte, apar dificultăți privind integrabilitatea lui ω pe ∂D și a lui $\mathrm{d}\omega$ pe D. Există diverse rezultate care răspund la problema valabilității formulei lui Stokes în cazul cu „singularități". Prezentăm aici un asemenea rezultat inedit. Fie A o submulțime închisă a varietății M astfel încît $A = \overline{\mathring{A}}$, închiderea interiorului lui A. Spunem că frontiera $\partial A := A \setminus \mathring{A}$ a lui A este cvasiregulată dacă există o familie $\{S_i\}_{i \in I}$ de subvarietăți de clasă C^1 ale lui M și, pentru fiecare $i \in I$, o submulțime compactă C_i a lui S_i, astfel încît să fie îndeplinite următoarele condiții: 1) Familia $\{C_i\}_{i \in I}$ este local finită; 2) Dacă $i, j \in I$ și $i \neq j$, mulțimea $C_i \cap C_j$ este de măsură zero (în S_i sau S_j) și $\mathring{C}_i \cap \mathring{C}_j = \varnothing$, unde $\mathring{C}_i$ este interiorul lui C_i în S_i; 3) $\partial A = \bigcup_{i \in I} C_i$. Ex.: Un dreptunghi compact $Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ și $a_i < b_i$ pentru orice i, este o submulțime închisă cu frontiera cvasiregulată în $\mathbb{R}^n$. Dacă A este o submulțime închisă a varietății M, cu frontiera cvasiregulată, mulțimea $D := \mathring{A} \cup \left(\bigcup_{I \in I} \mathring{C}_i\right)$ este un domeniu în M. O $(n-1)$-formă diferențială ω, definită pe ∂A, se numește *integrabilă pe ∂A* dacă ω este integrabilă pe ∂D și, în cazul integrabilității, se pune $\int_{\partial A} \omega := \int_{\partial D} \omega$. Are loc atunci teorema următoare:

Teorema lui Stokes. Fie M o C^r-varietate n-dimensională orientată, $r \geqslant 2$, ω o $(n-1)$-formă diferențială de clasă C^1 pe M iar A o submulțime închisă a lui M cu frontiera cvasiregulată. Dacă mulțimea $A \cap \operatorname{supp} \omega$ este compactă, atunci ω este integrabilă pe ∂A, $d\omega$ este integrabilă pe A și $\int_{\partial A}\omega = \int_A d\omega$. (*M. J.*)

integrare pe o varietate riemanniană orientată Fie M o varietate riemanniană orientată de clasă C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, și dimensiune n; notăm prin τ_M forma volum a lui M. Dacă X și Y sînt cîmpuri vectoriale pe M, prin $< X, Y >$ se notează funcția reală pe M definită prin

$$< X, Y > (x) := < X(x), Y(x) >_x, \quad x \in M.$$

De asemenea, dacă ω este o p-formă diferențială pe M și $Y_1, \ldots, Y_p$ sînt cîmpuri vectoriale pe M, prin $\omega(Y_1, \ldots, Y_p)$ se notează funcția pe M definită prin

$$\omega(Y_1, \ldots, Y_p)(x) := \omega_x(Y_1(x), \ldots, Y_p(x)), \quad x \in M.$$

Pentru orice cîmp vectorial X pe M, există o unică 1-formă diferențială ω_X^1 și o unică $(n-1)$-formă diferențială ω_X^{n-1} pe M astfel încît $\omega_X^1(Y) = < X, Y >$ și $\omega_X^{n-1}(Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = \tau_M(X, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$; unde $Y, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ sînt cîmpuri vectoriale arbitrare pe M. Forma diferențială ω_X^{n-1} se numește *contracția* lui τ_M prin cîmpul X și se notează prin $\tau_M \lrcorner X$; notăm că formele ω_X^1 și ω_X^{n-1} nu coincid în cazul $n = 2$. Aplicațiile $X \mapsto \omega_X^1$ și $X \mapsto \omega_X^{n-1}$ de la cîmpuri vectoriale pe M la 1-forme și respectiv $(n-1)$-forme diferențiale pe M sînt bijective și păstrează clasa în ambele sensuri. Acest fapt permite definirea unor operații pentru funcții și cîmpuri pe o varietate riemanniană orientată M, și anume gradientul, divergența, laplacianul și rotorul, ultima numai în cazul $n = 3$. Dacă $f \in C^1(M)$, *gradientul* lui f este cîmpul vectorial grad(f) definit prin ecuația $\omega^1_{\mathrm{grad}(f)} = df$. De asemenea, dacă X este un cîmp vectorial de clasă C^1 pe M, *divergența* lui X este funcția div(X) pe M definită prin ecuația $d\omega_X^{n-1} = \mathrm{div}(X)\tau_M$. Dacă $f \in C^2(M)$, *laplacianul* lui f este funcția Δf definită prin $\Delta f := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}(f)$. În fine, dacă $n = 3$ și dacă X este un cîmp vectorial de clasă C^1 pe M, *rotorul* (sau *rotaționalul*) lui X este cîmpul vectorial rot(X) pe M definit prin ecuația $d\omega_X^1 = \omega^2_{\mathrm{rot}(X)}$. Notăm că dacă $f \in C^k(M)$, cîmpul grad f este de clasă C^{k-1} pentru $1 \leqslant k \leqslant r$ iar $\Delta f \in C^{k-2}(M)$ în cazul $2 \leqslant k \leqslant r$. De asemenea, dacă X este un cîmp de clasă C^k, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, pe M, funcția div(X) și cîmpul vectorial rot(X) în cazul $n = 3$ sînt de clasă C^{k-1}. Ex.: Fie M o submulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$, înzestrată cu metrica euclidiană. Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt coordonatele carteziene pe $\mathbb{R}^n$, atunci $\tau_M = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \mid M$ și, pentru orice cîmp vectorial $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ pe M, avem

$\omega_X^1 = \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i$ și

$$\omega_X^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} X_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Rezultă că, dacă $f \in C^k(M)$, grad $f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ pentru $k \geqslant 1$ și $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ pentru $k \geqslant 2$. De asemenea, dacă X este un cîmp de clasă C^k pe M, $\mathrm{div}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ pentru n oarecare și

$$\mathrm{rot}(X) = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

în cazul $n = 3$. Fie S o subvarietate diferențiabilă orientată de dimensiune $n-1$ a lui M și $j: S \to M$ aplicația de incluziune. Pentru orice punct $x \in X$, există un unic vector $\mathbf{n}(x) \in T(M)_x$ cu proprietățile următoare: 1) $\mathbf{n}(x) \perp T(S)_x$, în sensul că $< j_{*,x}v, \mathbf{n}(x) > = 0$ pentru orice vector $v \in T(S)_x$; 2) $< \mathbf{n}(x), \mathbf{n}(x) > = 1$; 3) Dacă $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ este un reper pozitiv în $T(S)_x$, atunci $(\mathbf{n}(x), j_{*,x}(e_1), \ldots, j_{*,x}(e_{n-1}))$ este un reper pozitiv în $T(M)_x$. În cazul cînd S coincide cu bordul B al unui domeniu D de clasă C^1 în M, condiția 3) revine la faptul că $\mathbf{n}(x)$ este un vector exterior la D în punctul x; în acest caz $\mathbf{n}(x)$ se numește *normala exterioară* la D (sau B) în punctul x. În cazul general, aplicația $S \ni x \mapsto \mathbf{n}(x) \in T(M)_x$ este un cîmp vectorial de clasă C^{r-1} pe S, notat $\mathbf{n}_S$ sau, simplu, $\mathbf{n}$ cînd nici o ambiguitate nu este posibilă. Dacă X este un cîmp vectorial de clasă C^1 pe M, rezultă $j^*\omega_X^{n-1} = < X, \mathbf{n}_S > \tau_S$, unde τ_S este forma volum a lui S. Dacă se aplică teorema lui Stokes formei diferențiale $\omega_X^{n-1} = \tau_M \lrcorner X$ se obține

Teorema divergenței (*Teorema Gauss-Ostrogradski*). Fie D un domeniu de clasă C^1 în M, $B := D \setminus \mathring{D}$ bordul orientat al lui D și X un cîmp de clasă C^1 pe M astfel încît mulțimea $\bar{D} \cap \mathrm{supp}\, X$ să fie compactă și conținută în D. Atunci

$$\int_B < X, \mathbf{n}_B > \tau_B = \int_D (\mathrm{div}\, X)\tau_M.$$

De asemenea, în cazul $n = 3$, dacă se aplică teorema lui Stokes formei diferențiale ω_X^1 se obține

Teorema rotorului (versiunea clasică a teoremei lui Stokes). În cazul $n = 3$, fie S o subvarietate orientată de dimensiune 2 a lui M, D un domeniu de clasă C^1 în S, B bordul orientat al lui D și X un cîmp de clasă C^1 pe M astfel încît mulțimea $\bar{D} \cap \mathrm{supp}\, X$ să fie compactă și conținută în D. Atunci

$$\int_B \omega_X^1 = \int_D < \mathbf{n}_S, \mathrm{rot}\, X > \tau_S.$$

În fine, dacă se aplică teorema divergenței unui cîmp de forma $X = u$ grad v se obține următoarea

Teoremă (formulele lui Green). Fie D un domeniu de clasă C^1 în M, B bordul orientat al lui D și $u, v \in C^2(M)$ astfel încît mulțimile $\bar{D} \cap \operatorname{supp} u$ și $\bar{D} \cap \operatorname{supp} v$ să fie compacte și conținute în D. Atunci

$$\int_B u \frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}} \tau_B = \int_D (< \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v > + u \Delta v) \tau_M, \tag{1}$$

$$\int_B \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} \right) \tau_B = \int_D (u \Delta v - v \Delta u) \tau_M, \tag{2}$$

unde $\frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}}$ este funcția reală pe B definită prin $\frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}} := < n, \operatorname{grad} v >$. Notăm că, pentru valabilitatea primei formule a lui Green, este suficient ca funcția u să fie de clasă C^1. (*M. J.*)

interiorul unei mulțimi v. **punct interior**

interpolare, metodă de aproximare a funcțiilor cu polinoame prin care, cunoscînd valorile unei funcții în anumite puncte, se aproximează funcția cu un polinom, avînd proprietatea că în acele puncte polinomul ia, împreună cu derivatele pînă la un anumit ordin, aceleași valori ca și funcția considerată. Fie

$$(S) \begin{cases} m \in \mathbf{N} \\ x_i \in \mathbb{C},\ i \in \{1, \ldots, m\},\ x_i \neq x_j \text{ pentru } i \neq j \\ a_i \in \mathbf{N},\ i \in \{1, \ldots, m\} \\ z_{ij} \in \mathbb{C},\ i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{0, \ldots, a_i - 1\}. \end{cases}$$

Fie $n = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Se numește *polinom de* **i.** asociat sistemului (S), un polinom P, cu proprietățile:

$$\operatorname{grad} P \leqslant n - 1,$$

$$P^{(j)}(x_i) = z_{ij},\ i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{0, \ldots, a_i - 1\}.$$

Există, și este unic, un polinom de **i.** asociat sistemului (S). Are loc *formula lui Hermite*:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{a_i}} \sum_{j=0}^{a_i - 1} z_{ij} (x - x_j)^j \, r_{ij}(x),$$

unde $\omega(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)^{a_i}$,

$$r_{ij}(x) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{a_i - j - 1} \frac{1}{k!} (x - x_i)^k \left(\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right)^{(k)} \Bigg|_{x = x_i}.$$

Numerele x_i se numesc *noduri* iar a_i se numește *ordinul de multiplicitate* al nodului x_i. Dacă $a_i = 1$, se spune că x_i este *nod simplu* iar dacă $a_i > 1$ că x_i este *nod multiplu*. Dacă $a_1 = \ldots = a_m = 1$ și se notează $z_i = z_{i0}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, atunci polinomul de **i.** asociat sistemului (S) este dat de *formula lui Lagrange*:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} z_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Fie G o mulțime de numere complexe, $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$ și $\{y_1, \ldots, y_m\} \in G$, $y_i \neq y_j$, pentru $i \neq j$, astfel încît y_i apare de a_i ori printre $x_1, \ldots, x_n$ și $\sum_{i=1}^{m} a_i = n$. Fie f o funcție definită pe G cu valori complexe, de $a_i - 1$ ori derivabilă în y_i pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Se numește *polinom de* **i.** *al funcției f relativ la nodurile* $(x_1, \ldots, x_n)$, polinomul P avînd proprietățile:

$$\operatorname{grad} P \leqslant n - 1,$$

$$P^{(j)}(y_i) = f^{(j)}(y_i);\ i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{0, \ldots, a_i - 1\}.$$

Se notează $P(x) = P(f; x_1, \ldots, x_n; x)$. Dacă $n \geqslant 2$ și $x_1 \neq x_n$, atunci

$$P(f; x_1, \ldots, x_n; x) = \frac{P(f; x_2, \ldots, x_n; x)(x - x_1) - P(f; x_1, \ldots, x_{n-1}; x)(x - x_n)}{x_n - x_1}.$$

Coeficientul lui x^{n-1} din $P(f; x_1, \ldots, x_n; x)$ se numește *diferență divizată* a funcției f relativă la nodurile $(x_1, \ldots, x_n)$ și se notează $f(x_1, \ldots, x_n)$. Dacă $n \geqslant 2$ și $x_1 \neq x_n$, atunci

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_1}.$$

Dacă $x_1 = \ldots = x_n$, $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)!}$. Cu ajutorul diferențelor divizate polinomul de **i.** se poate reprezenta sub forma

$$P(f; x_1, \ldots, x_n; x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_i)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1}).$$

Dacă G este o mulțime deschisă și convexă de numere complexe, $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$ iar f, de clasă C^n, este definită pe G cu valori complexe, atunci

$$| f(x) - P(f; x_1, \ldots, x_n; x) | \leqslant \frac{1}{n!} | (x - x_1) \ldots (x - x_n) | \sup_{z \in A} | f^{(n)}(z) |$$

unde A este acoperirea convexă a punctelor $x_1, \ldots, x_n, x$. Dacă $G \subset \mathbb{R}$ este deschisă și convexă și $f: G \to \mathbb{R}$ este de clasă C^{n-1}, atunci există $\xi \in [\min x_i, \max x_i]$ astfel încît

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\xi).$$

Se face uneori următoarea distincție: dacă valoarea lui x în care se face aproximarea lui $f(x)$ prin $P(f; x_1, \ldots, x_n; x)$ nu se află în intervalul minim ce conține punctele $x_1, \ldots, x_n$, procesul de aproximare se numește *extrapolare*, în caz contrar **i.** (*Gh. Gr.*)

invariant omotopic v. **omotopie**

invers v. **categorie**

inversiune v. **transformare omografică**
involuție v. **algebră Banach involutivă**
ipoteza continuului v. **număr cardinal, teorema lui Ulam**
ipoteza lui Riemann v. **funcția ζ**
izometrie v. **distanță**
izomorfism v. **categorie**
izomorfism analitic v. **transformare conformă, funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe), **suprafață riemanniană, varietate analitică complexă**
izomorfism $\mathbb{R}$-analitic v. **funcție $\mathbb{R}$-analitică**

împrejurime v. **structură uniformă**
închiderea unei mulțimi v. **punct aderent**
închiderea unei mulțimi (într-un subspațiu) v. **topologie indusă**
înfășurătoare convexă v. **spațiu liniar**
înfășurătoare de olomorfie Fie X o varietate complexă conexă. O *extindere olomorfă* a lui X este o pereche (X', j), unde X' este o varietate complexă conexă și $j: X \to X'$ o scufundare olomorfă deschisă cu proprietatea că, pentru orice funcție $f \in \mathcal{O}(X)$, există o funcție $f' \in \mathcal{O}(X')$ astfel încît $f = f' \circ j$. (Din principiul prelungirii analitice rezultă atunci că funcția f' este unică). O **î.o.** a lui X este o extindere olomorfă $(\widetilde{X}, j)$ cu proprietatea că $\widetilde{X}$ este o varietate Stein. **Î.o.**, dacă există, este unic determinată pînă la un izomorfism analitic. Mai precis, dacă (X', j) și (X'', k) sînt două **î.o.** ale lui X, atunci există un unic izomorfism analitic $h: X' \to X''$ astfel încît $k = h \circ j$. În exemplele următoare j este incluziunea. Ex.: 1° Pentru $n \geqslant 2$, dacă Ω este un domeniu de olomorfie în $\mathbb{C}^n$ și K un compact în Ω astfel încît mulțimea $\Omega \setminus K$ să fie conexă, atunci Ω este o **î.o.** a lui $\Omega \setminus K$ (*teorema lui Hartogs*). 2° Fie Ω un domeniu Reinhardt conex, conținînd originea, în $\mathbb{C}^n$ și fie $\widetilde{\Omega}$ cel mai mic domeniu Reinhardt logaritmic convex care conține pe Ω. Atunci $\widetilde{\Omega}$ este o **î.o.** a lui Ω. 3° Fie Ω un tub în $\mathbb{C}^n$ cu bază conexă ω și $\widetilde{\Omega}$ tubul cu bază co(ω). Atunci $\widetilde{\Omega}$ este o **î.o.** a lui Ω (*teorema lui Bochner*). Evident, condițiile β) și γ) (v. **varietate Stein**) sînt condiții necesare pentru existența unei **î.o.** Menționăm că, deoarece varietatea complexă X este conexă prin ipoteză, γ) implică existența unei baze numărabile (teorema bazei). Pentru a obține o teoremă de existență pentru **î.o.** a lui X se întărește condiția γ), și anume se consideră condiția următoare: γ_0) Există o aplicație olomorfă etală $\varphi: X \to \mathbb{C}^n$. Evident, γ_0) implică γ).
Teoremă. Orice varietate complexă X care îndeplinește condițiile β) și γ_0) admite o **î.o.**
O pereche (X, φ) unde X este o varietate complexă satisfăcînd condiția β) și $\varphi: X \to \mathbb{C}^n$ o aplicație olomorfă etală se numește *domeniu Riemann* de dimensiune n (sau *domeniu Riemann* peste $\mathbb{C}^n$). Teorema precedentă se poate formula și astfel: Orice domeniu Riemann admite o **î.o.** care este de asemenea un domeniu Riemann. Noțiunea de domeniu de olomorfie în $\mathbb{C}^n$ se generalizează la noțiunea de domeniu de olomorfie *peste* $\mathbb{C}^n$, după cum urmează: Un domeniu Riemann (X, φ) de dimensiune n se numește *domeniu de olomorfie* peste $\mathbb{C}^n$ dacă X este o varietate Stein. În particular, **î.o.** a unui domeniu Riemann de dimensiune n este un domeniu de olomorfie peste $\mathbb{C}^n$. (*M. J.*)
înfășurătoare echilibrată v. **spațiu liniar**

J, L

jacobiană, matrice de funcții folosită în calculul aplicației liniare tangente într-un punct $a \in M$ la o aplicație diferențiabilă $\varphi: M \to N$ (unde M și N sînt varietăți diferențiabile date) cînd se cunosc o hartă locală $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ pe M cu domeniu U conținînd punctul a și o hartă locală $\beta = (y_1, \ldots, y_m)$ pe N cu domeniul V conținînd punctul $\varphi(a)$. Această matrice, notată $J_{\beta,\alpha}(\varphi)$, se definește prin

$$J_{\beta,\alpha}(\varphi) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}},$$

unde $(f_1, \ldots, f_m): U \cap \varphi^{-1}(V) \to \mathbb{R}^m$ este aplicația $\beta \circ \varphi$; prin abuz se scrie uneori $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$ în loc de $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Sin.: *matrice Jacobi* a lui φ în raport cu α și β. Dacă $a \in U \cap \varphi^{-1}(V)$, matricea numerică

$$J_{\beta,\alpha}(\varphi)(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

se numește j. lui φ în punctul a. Dacă $v = \sum_{j=1}^{n} v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}(a)$ este un vector tangent (real sau complex) la M în punctul a, imaginea lui v prin aplicația liniară tangentă $\varphi_{*,a}$ este vectorul $w = \sum_{i=1}^{m} w_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}(\varphi(a))$ calculat prin formulele

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) v_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Orice proprietate a aplicației liniare tangente $\varphi_{*,a}$ poate fi interpretată în termeni ținînd de j. lui φ în punctul a. De pildă, φ este imersie în punctul a dacă și numai dacă $J_{\beta,\alpha}(\varphi)(a)$ are rang $n = \dim M$ și submersie în punctul a dacă și numai dacă această matrice are rang $m = \dim N$. Cînd M este o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ și $N = \mathbb{R}^m$, se folosește de obicei j. lui φ în raport cu coordonatele carteziene $x_1, \ldots, x_n$ ale lui $\mathbb{R}^n$ și coordonatele carteziene $y_1, \ldots, y_m$ ale lui $\mathbb{R}^m$. În cazul M și N varietăți complexe și $\varphi: M \to N$, o aplicație olomorfă, calculul aplicației liniare tangente $\varphi_{*,a}$ se reduce la calculul componentei sale olomorfe $\varphi'_{*,a}: T'(M)_a \to T'(N)_{\varphi(a)}$. Fie $\alpha = (z_1, \ldots, z_n): U \to \mathbb{C}^n$ o hartă locală pe M și $\beta = (w_1, \ldots, w_m): V \to \mathbb{C}^m$ o hartă locală pe N astfel încî mulțimea $U \cap \varphi^{-1}(V)$ să fie nevidă. Pentru $a \in U \cap \varphi^{-1}(V)$ și orice vector tangent olomorf $s = \sum_{j=1}^{n} s_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}(a) \in T'(M)_a$, imaginea lui s prin aplicația

$\varphi'_{*,a}$ este vectorul tangent olomorf $t = \sum_{k=1}^{m} t_k \frac{\partial}{\partial w_k}(\varphi(a))$ calculat prin formulele

$$t_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(a)\, s_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

unde $(f_1, \ldots, f_m): U \cap f^{-1}(V) \to \mathbb{C}^n$ este aplicația olomorfă $\beta \circ \varphi$. Matricea $J'_{\beta,\alpha}(\varphi) := \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_j}\right)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ se numește j. olomorfă a lui φ în raport cu hărțile α și β. Dacă punem $z_j = x_j + iy_j$ și $w_k = u_k + iv_k$, atunci aplicațiile $\widetilde{\alpha} = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n): U \to \mathbb{R}^{2n}$ și $\widetilde{\beta} = (u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m): V \to \mathbb{R}^{2m}$ sînt hărți locale pe varietățile de clasă C^∞ subiacente lui M și N respectiv. J. lui φ în raport cu aceste hărți se scrie

$$J_{\widetilde{\beta},\widetilde{\alpha}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) & \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) \\ \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\right) & \left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right) \end{pmatrix}_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

În cazul $m = n$, are loc egalitatea $\det J_{\widetilde{\beta},\widetilde{\alpha}}(\varphi) = |\det J'_{\beta,\alpha}(\varphi)|^2$ care se demonstrează, de pildă, cu ajutorul ecuațiilor Cauchy-Riemann; în particular $\det J_{\widetilde{\beta},\widetilde{\alpha}}(\varphi) \geqslant 0$. Dacă se aplică acest rezultat la cazul $N = M$ și $\varphi = \mathrm{id}_M$, se obține faptul că varietatea C^∞ subiacentă unei varietăți complexe este orientabilă. (*M. J.*)

jacobianul unei transformări, determinantul matricii Jacobi a acelei transformări (în cazul $m=n$). De pildă, dacă T este o transformare de la planul Ouv la planul Oxy dată de $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, unde f și g sînt funcții parțial derivabile, jacobianul transformării T este determinantul funcțional

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Teorema de transformare a ariilor printr-o transformare normală afirmă că aria unui domeniu $D = T(d)$ se obține din aria domeniului d din planul Ouv prin multiplicarea acesteia din urmă cu valoarea absolută a jacobianului transformării T într-un punct convenabil din domeniul d. (*S. M.*)

lanț de elemente analitice v. **prelungire analitică**

lanț de mulțimi v. **proprietatea intersecției finite**

laplacianul v. **integrare pe o varietate riemanniană orientată**

latice v. **mulțime ordonată**
latice Banach v. **spațiu reticulat normat**
latice booleană v. **mulțime ordonată**
latice completă v. **mulțime ordonată**
latice de mulțimi v. **clasă de mulțimi**
latice de perioade Dacă V este un spațiu vectorial real de dimensiune finită N, o **l.p.** în V este un subgrup Γ al lui V avînd proprietatea că există N vectori $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ liniari independenți peste $\mathbb{R}$ care formează o bază a lui Γ ca $\mathbb{Z}$-modul, *i.e.* orice vector $\gamma \in \Gamma$ se scrie în mod unic sub forma $\gamma = \sum_{i=1}^{N} m_i \gamma_i$ cu $m_i \in \mathbb{Z}$. Proprietățile următoare ale unui subgrup Γ al lui V sînt echivalente: i) Γ este o l.p.; ii) Γ este un subgrup discret al lui V (*i.e.* 0 este un punct izolat al lui Γ în V) și grupul topologic cît $T = V/\Gamma$ este compact; iii) Γ este un subgrup discret al lui V și este un sistem de generatori ai spațiului vectorial real V. Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune finită N, Γ o **l.p.** în V și $T = V/\Gamma$. Înzestrăm pe T cu topologia cît; atunci aplicația canonică $\pi: V \to T$ este un omeomorfism local. Rezultă că există o unică structură de varietate analitică reală pe T astfel încît aplicația π să fie submersie real analitică. Această varietate analitică reală are dimensiunea N și se numește *tor real de dimensiune* N. Orice tor real de dimensiune N este real analitic izomorf cu produsul $(S^1)^N$, unde S^1 este sfera de dimensiune 1 (*i.e.* cercul unitate în $\mathbb{R}^2$). Să considerăm acum un spațiu vectorial complex V de dimensiune complexă finită n. Prin **l.p.** în V se înțelege o **l.p.** în spațiul vectorial real de dimensiune $N = 2n$, subiacent lui V. Dacă Γ este o **l.p.** în V, există o unică structură de varietate complexă pe torul $T = V/\Gamma$ astfel încît aplicația π să fie olomorfă. Varietățile complexe de forma V/Γ, unde V este un spațiu vectorial complex de dimensiune n (se poate lua, evident, $V = \mathbb{C}^n$) și Γ o **l.p.** în V, se numesc *toruri complexe* de dimensiune n, iar în cazul $n = 1$, *curbe eliptice*. Două toruri complexe de dimensiune n, să zicem $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$ și $T' = \mathbb{C}^n/\Gamma'$, sînt totdeauna izomorfe ca varietăți analitice reale, în particular ele sînt omeomorfe. Un fapt semnificativ este că T și T' *nu* sînt în general izomorfe ca varietăți complexe, nici măcar în cazul $n = 1$ (v. **funcția modulară**). O *varietate abeliană* este un tor complex T care admite o scufundare olomorfă într-un spațiu proiectiv $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. De pildă, toate torurile complexe de dimensiune 1 sînt varietăți abeliene. De asemenea, pentru orice suprafață riemanniană compactă X, varietatea Jac(X) este o varietate abeliană de dimensiune g, unde g este genul lui X. Notăm că, pentru orice întreg $n \geqslant 2$, există toruri complexe de dimensiune n care nu sînt abeliene. (*M. J.*)
latice distributivă v. **mulțime ordonată**
latice local convexă v. **spațiu liniar reticulat topologic**
latice normată v. **spațiu reticulat normat**
latice relativ completă v. **mulțime ordonată**
lege de distributivitate infinită v. **mulțime ordonată**
legea distribuției asimptotice a numerelor prime v. **funcția** ζ
legea paralelogramului v. **spațiu Hilbert**
lema lui Abel v. **serie de puteri**
lema lui Fatou Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură și $\{U_n\}_n$ un șir de funcții μ-măsurabile, *i.e.* $\mathcal{T}$-măsurabile, pozitive, $U_n: T \to \mathbb{R}_+$. Avem

$$\int (\liminf_n U_n) \, d\mu \leqslant \liminf_n \int U_n \, d\mu. \quad (I.\ C.)$$

lema lui Goursat Fie în planul complex $\mathbb{C}$ un domeniu triunghiular T generat de punctele a, b și c. Dacă vîrfurile au fost scrise într-o anumită ordine, spre exemplu (a, b, c), atunci această ordonare generează drumul poligonal $\partial T = [a, b] \circ [b, c] \circ [c, a]$. Fie f o funcție derivabilă pe domeniul D și T un domeniu triunghiular astfel ca $\overline{T} \subset D$. Atunci $\int_{\partial T} f = 0$ pentru orice orientare a vîrfurilor lui T. (*Gh. Gr.*)

lema lui Grothendieck v. **formă diferențială** (pe o varietate complexă)

lema lui Poincaré v. **formă diferențială** (în $\mathbb{R}^n$), **formă diferențială** (pe o varietate diferențiabilă)

lema lui Schwartz v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă)

lema lui Zorn v. **mulțime ordonată**

lifting Fie un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$. Vom nota prin $\mathcal{N}(\mu)$ tribul tuturor mulțimilor μ-neglijabile și vom considera $\Sigma \subset \mathcal{T}$ o sub σ-algebră astfel încît $\Sigma \supset \mathcal{N}(\mu)$. Notăm $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma) = \{f\colon T \to \overline{\mathbb{R}} \mid f$ este $\mathcal{N}(\mu)$-aproape total Σ-măsurabilă$\}$. De exemplu, dacă $\Sigma = \mathcal{T}$, atunci $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma) = \mathcal{L}^{\infty}(\mu)$. Notăm $\mathcal{M}(\Sigma) = \{f\colon T \to \mathbb{R} \mid f$ este total Σ-măsurabilă$\}$. Pentru două funcții $f, g\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$, vom scrie $f \sim g$ pentru a desemna faptul că $f = g$ μ-a.p.t. Pentru două mulțimi A și B incluse în T vom scrie $A \sim B$ pentru a desemna faptul că $A \,\Delta\, B \in \mathcal{N}(\mu)$, unde $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Se numește **l.** (sau *ridicare*) pe $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$ o aplicație $\rho\colon \mathcal{M}^{\infty}(\Sigma) \to \mathcal{M}(\Sigma)$ avînd proprietățile: i) $\rho(f) \sim f$; ii) $f \sim g \Rightarrow \rho(f) = \rho(g)$; iii) $\rho(\alpha f + \beta g) = \alpha\rho(f) + \beta\rho(g)$; iv) $f \geqslant 0 \Rightarrow \rho(f) \geqslant 0$; v) $f = \alpha$ (în sensul că f este constant egală cu α) $\Rightarrow \rho(f) = \alpha$; vi) $\rho(fg) = \rho(f)\,\rho(g)$. Totul pentru orice f, g în $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$ și α, β în $\mathbb{R}$. Dacă există un **l.** pe $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$, se spune că $\mathcal{M}^{\cdot}(\Sigma)$ *are proprietatea de* **l.**

Teoremă de existență a **l.** Spațiul $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ are proprietatea de **l.** dacă și numai dacă μ are proprietatea sumei directe.

O aplicație $\rho\colon \mathcal{M}^{\infty}(\Sigma) \to \mathcal{M}(\Sigma)$ avînd proprietățile i)–v) se numește **l.** *liniar* pe $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$. Se demonstrează că pentru orice **l.** liniar ρ pe $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$ există un **l.** ρ^* pe $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$ cu proprietatea că $\rho^*(\varphi_A) = \rho(\varphi_A)$ pentru orice mulțime A din Σ care are proprietatea că $\rho(\varphi_A)$ este funcția caracteristică a unei mulțimi (În particular, dacă acest lucru se întîmplă pentru orice mulțime A din Σ rezultă că ρ este chiar **l.**). Aici φ_A este funcția caracteristică (indicatoarea lui A). Se numește **l.** pe mulțimile lui Σ o aplicație $\rho'\colon \Sigma \to \Sigma$ cu proprietățile: i') $\rho'(A) \sim A$; ii') $A \sim B \Rightarrow \rho'(A) \sim \rho'(B)$; iii') $\rho'(\varnothing) = \varnothing$ și $\rho'(T) = T$; iv) $\rho'(A \cap B) = \rho'(A) \cap \rho'(B)$; v') $\rho'(A \cup B) = \rho'(A) \cup \rho'(B)$, A și B din Σ. Existența unui **l.** pe mulțimile lui Σ echivalează cu existența unui **l.** pe $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$: a) Dacă există un **l.** ρ pe $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$, atunci, punînd $\rho'\colon \Sigma \to \Sigma$, $\rho'(A) = B$, cu $\rho(\varphi_A) = \varphi_B$ obținem că ρ' este **l.** pe mulțimile lui Σ; b) Dacă există un **l.** ρ' pe mulțimile lui Σ, atunci există un **l.** unic ρ pe $\mathcal{M}^{\infty}(\Sigma)$ astfel încît $\rho(\varphi_A) = \varphi_{\rho'(A)}$ pentru orice A din Σ. Vom considera în plus că T este un spațiu local compact și că μ este o măsură boreliană regulată pe T. Se numește **l.** *tare* pe $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ un **l.** ρ pe $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ care are proprietatea că $\rho(f) = f$ pentru orice funcție continuă f din $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$. Se arată că dacă ρ este un **l.** pe $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$, atunci următoarele afirmații sînt echivalente: 1) ρ este **l.** tare; 2) $\rho'(U) \supset U$ pentru orice mulțime deschisă $U \subset T$; 3) $\rho'(F) \subset F$ pentru orice mulțime închisă $F \subset T$. Aici $\varphi_{\rho'(A)} = \rho(\varphi_A)$ pentru orice mulțime μ-măsurabilă $A \subset T$.

Teorema de existență a **l.** *tare*. Dacă T are o bază cel mult numărabilă de mulțimi deschise (sau dacă T este spațiu metrizabil, sau dacă T este un spațiu discret) și dacă $\mu(U) > 0$ pentru orice mulțime deschisă nevidă, atunci există un **l.** tare pe $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$.

Se arată că dacă există un **l.** tare pe $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$, atunci: a) $\mu(U) > 0$ pentru orice mulțime deschisă nevidă; b) Două funcții continue și mărginite egale μ-a.p.t. sînt egale peste tot; c) $\int f \,\mathrm{d}\mu > 0$ pentru orice funcție continuă și mărginită pozitivă care nu este identic nulă; d) Pentru orice funcție continuă f din $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$, avem $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$. (*I. C.*)

limita inferioară a unui șir de funcții v. **funcție măsurabilă**

limita inferioară a unui șir de mulțimi v. **funcția caracteristică a unei mulțimi**

limita inferioară a unui șir de numere reale Fiind dat șirul $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, să punem $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}, \ldots\}$. Limita șirului crescător $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, unde $c_n = \inf A_n$ este, prin definiție, *limita inferioară* a șirului $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, notată $\liminf a_n$ sau $\underline{\lim}\, a_n$. (*S. M.*)

limita la stînga (dreapta) a unei funcții într-un punct Fie $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și fie a un punct de acumulare la stînga pentru A. Numărul real α (eventual $+\infty$ sau $-\infty$) este *limita la stînga* a lui f în a dacă pentru orice șir $\{x_n\}$ tinzînd către a, $x_n \in A$, $x_n < a$ pentru orice n, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$. Punem $\alpha = f(a-0)$. Definiție asemănătoare la dreapta. (*S. M.*)

limita superioară a unei funcții reale într-un punct din $\mathbb{R}^n$ Fie $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și fie a un punct de acumulare pentru A. *Limita superioară* a lui f în a se notează prin $\limsup\limits_{x \to a,\ x \in A} f(x)$ și se definește ca $\inf\limits_{V_0(x) \in \mathcal{V}_0(x)} \sup\limits_{x \in V_0(x)} \{f(x)\}$, unde $\mathcal{V}_0(x)$ este familia tuturor vecinătăților lui x din care s-a eliminat x. O definiție similară (cu inversarea ordinei pentru inf și sup) pentru $\liminf\limits_{x \to a,\ x \in A} f(x)$. Necesar și suficient ca $\alpha \in \mathbb{R}$ să fie limita superioară a lui f în a este ca: 1) Pentru orice $\beta > \alpha$ există o vecinătate $V(a)$ în A pentru care $f(V_0(a)) \subset (-\infty, \beta)$; 2) Pentru orice număr $\gamma < \alpha$ și pentru orice vecinătate $V(a)$ în A a lui a există $x \in V_0(a)$ pentru care $f(x) > \gamma$. (*S.M.*).

limita superioară a unui șir de funcții v. **funcție măsurabilă**

limita superioară a unui șir de mulțimi v. **funcția caracteristică a unei mulțimi**

limita superioară a unui șir de numere reale Fiind dat șirul $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, să notăm cu A_n mulțimea termenilor de rang mai mare sau egal cu n și să punem $b_n = \sup A_n$. Limita șirului descrescător $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este, prin definiție, *limita superioară* a șirului $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, notată $\limsup a_n$ sau $\overline{\lim}\, a_n$. (*S. M.*)

limita unei funcții după un filtru Fie $\mathcal{X}$ o mulțime, $\mathcal{Y}$ un spațiu topologic, $\mathcal{F}$ un filtru în $\mathcal{X}$ și f o funcție definită pe $\mathcal{X}$ și cu valori în $\mathcal{Y}$. Punctul $y \in \mathcal{Y}$ se numește *limita funcției f după filtrul* $\mathcal{F}$ dacă baza de filtru $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ converge către y; se notează: $y = \lim_{\mathcal{F}} f$. Dacă $\mathcal{X}$ este de asemenea un spațiu topologic și $x_0 \in \mathcal{X}$, se spune că $y \in \mathcal{Y}$ este *limita funcției f în punctul* x_0 dacă y este limita lui f după filtrul vecinătăților lui x_0; se notează $y = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Funcția f este continuă în punctul x_0 dacă și numai dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Fie $A \subset \mathcal{X}$ și $x_0 \in \bar{A}$. Fie $\mathcal{V}_{x_0}$ mulțimea vecinătăților lui x_0 și fie în A filtrul $\mathcal{F} = \{V \cap A \mid V \in V_{x_0}\}$. Dacă $y = \lim_{\mathcal{F}} f$ se spune că y este limita funcției f în punctul x_0 relativ la submulțimea A și se notează $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y$. Dacă $A = \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ și x_0 nu este punct izolat al lui $\mathcal{X}$ se scrie $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y$.

Funcția f este continuă în punctul neizolat x_0 dacă și numai dacă $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$. Ex.: 1° Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic, $f: \mathrm{N} \to \mathcal{X}$, $f = \{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ un șir în $\mathcal{X}$. Șirul $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ converge către $x \in \mathcal{X}$ dacă și numai dacă x este limita funcției f după filtrul lui Fréchet. 2° Fie $f = \{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ un șir generalizat în spațiul topologic $\mathcal{X}$. Fie $\mathcal{F}$ filtrul generat în Δ de baza de filtru $\{A_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, unde $A_\delta = \{\delta' | \delta' \geqslant \delta\}$. Șirul generalizat $f = \{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ converge către $x \in \mathcal{X}$ dacă și numai dacă funcția f converge către x după filtrul $\mathcal{F}$. (*Gh. Gr.*)

limita unei funcții într-un spațiu topologic v. **limita unei funcții după un filtru.**

limita unei funcții reale într-un punct din $\mathbb{R}^n$ Fie $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și fie x un punct de acumulare pentru A. Funcția f are ca limită pe α (eventual $\pm\infty$) în x dacă pentru orice șir $\{x_n\}$, $x_n \in A$, $x_n \neq x$ pentru orice n natural, $x_n \to x$, avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, proprietatea revine la: pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate $V(x)$ astfel încît din $y \in V(x)$, $y \neq x$, să rezulte $|f(y) - \alpha| < \varepsilon$. În cazul $\alpha = +\infty$ ultima inegalitate se înlocuiește cu $f(y) > \varepsilon$. Dacă $\alpha = -\infty$, ultima inegalitate se înlocuiește cu $f(y) < -\varepsilon$. (*S.M.*)

limita unui filtru v. **filtru convergent**

limita unui șir de funcții v. **șir de funcții**

limita unui șir de mulțimi v. **funcția caracteristică a unei mulțimi**

limita unui șir dublu de numere reale Șirul dublu $\{a_i^j\}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ are ca limită numărul real A dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există n_ε astfel încît din $i > n_\varepsilon < j$ să rezulte $|A - a_i^j| < \varepsilon$. Limita este $+\infty$ (resp. $-\infty$) dacă oricărui număr pozitiv P îi corespunde un număr natural n_p astfel încît din $i > n_p < j$ să rezulte $a_i^j > p$ (resp. $a_i^j < -p$). Un șir dublu are limita finită dacă este convergent. (*S. M.*)

limita unui șir generalizat v. **șir generalizat convergent**

limită Banach, funcțională liniară f pe spațiul liniar (m) al șirurilor reale mărginite $\{\xi_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ avînd proprietățile următoare:

1) $\underline{\lim}_n \xi_n \leqslant f(\{\xi_n\}_{n \in \mathrm{N}}) \leqslant \overline{\lim}_n \xi_n$;

2) $f(\{\xi_{n+1}\}_{n \in \mathrm{N}}) = f(\{\xi_n\}_{n \in \mathrm{N}})$.

Existența **l.B.** se stabilește cu ajutorul teoremei Hahn-Banach. Noțiunea de **l.B.** se generalizează pentru spațiul liniar $m(X)$ al șirurilor (o)-mărginite cu valori într-un spațiu liniar complet reticulat X. În acest caz **l.B.** este un operator liniar pe $m(X)$ cu valori în X, avînd proprietățile corespunzătoare proprietăților 1) și 2). (*R. C.*)

limită calitativă L.c. *superioară* a funcției reale f în punctul $a \in \mathbb{R}$ este $\inf\{y \mid \{f(x) > y\}$ este de prima categorie Baire în $a\}$. **L.c.** *inferioară* a lui f în a este $\sup \{y \mid \{f(x) < y\}$ este de prima categorie Baire în $a\}$. Dacă cele două limite sînt egale, valoarea lor comună este **l.c.** a lui f în a. (O mulțime A dintr-un spațiu topologic este de prima categorie Baire într-un punct a dacă există o vecinătate a lui a cărei intersecție cu A este de prima categorie Baire.) (*S. M.*)

limită individuală v. **convergența în sensul ordinei**

limită inductivă v. **categorie, functor**

limită inductivă de spații local convexe Fie X un spațiu liniar și $\{X_j\}_{j \in J}$ o familie de subspații liniare cu următoarele proprietăți: 1) $\bigcup_{j \in J} X_j = X$; 2) Pentru orice $j_1, j_2 \in J$ există $j_3 \in J$ astfel ca $X_{j_1} \cup X_{j_2} \subset X_{j_3}$; 3) Fiecare spațiu X_j este înzestrat cu o topologie local convexă τ_j; 4) Dacă $X_{j_1} \subset X_{j_2}$, atunci topologia $\tau_{j_2 j_1}$, indusă de τ_{j_2} pe X_{j_1}, este majorată de topologia τ_{j_1}. Pentru orice $j \in J$ fie $l_j: X_j \to X$ aplicația dată de formula $l_j(x) = x$, $\forall x \in X_j$. Cea mai fină topologie local convexă pe spațiul liniar X, pentru care orice aplicație l_j este continuă, se numește *limita inductivă* a familiei $\{\tau_j\}_{j \in J}$, iar spațiul liniar X înzestrat cu această topologie se numește *limita inductivă* a familiei $\{X_j\}_{j \in J}$ și se notează $X = \varinjlim_{j \in J} X_j$. O bază de vecinătăți ale originii pentru limita inductivă este dată de mulțimea tuturor submulțimilor $W \subset X$ care sînt echilibrate și convexe și care au proprietatea că pentru orice $j \in J$, mulțimea $W \cap X_j$ este o vecinătate a originii în spațiul X_j. Dacă în condiția 4) se cere ca $\tau_{j_2 j_1} = \tau_{j_1}$, atunci limita inductivă se spune că este *strictă*. (*R. C.*)

limită inferioară (într-o mulțime ordonată) v. **convergența în sensul ordinei**

limită superioară (într-o mulțime ordonată) v. **convergența în sensul ordinii**

limită și continuitate în analiza nonstandard Fie f: $\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$. Se spune că $\lim f(x) = L$ cînd $x \to c$ dacă, de îndată ce x este infinit apropiat de c (dar nu egal cu c), $f(x)$ este infinit apropiat de L. Altfel spus, din $x \approx c (x \neq c)$ rezultă $f(x) \approx L$. Are loc teorema: Fie f o funcție standard definită pe (a, b) avînd pe c ca punct interior. Dacă L este un număr real standard, atunci $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dacă și numai dacă din $c \neq x \approx c$ rezultă $f(x) \approx L$; f este continuă în c dacă și numai dacă din $x \approx c$ rezultă $f(x) \approx f(c)$. Funcția standard f definită pe mulțimea standard S este continuă în punctul standard c dacă și numai dacă pentru orice punct x din S^* infinit apropiat de c avem $f(x) \approx f(c)$. (*S. M.*)

limitele extreme ale unui șir de mulțimi Fie T o mulțime nevidă și $\{A_n\}_n$ un șir de mulțimi $A_n \subset T$. Se definește *limita superioară* a șirului $\{A_n\}$ ca fiind mulțimea $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$ și se arată că $\limsup A_n = \{t \in T \mid$ mulțimea $\{n \in \mathrm{N} \mid t \in A_n\}$ este infinită$\}$. Similar se definește *limita inferioară* a șirului $\{A_n\}_n$ ca fiind mulțimea $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right)$ și se arată că $\liminf A_n = \{t \in T \mid$ există $n(t) \in \mathrm{N}$ cu proprietatea că $t \in A_n$ pentru orice $n \geqslant n(t)\}$. Avem $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. Dacă $\liminf A_n = \limsup A_n$ se spune că *șirul* $\{A_n\}_n$ *este convergent* și se notează $\lim_n A_n = \liminf A_n = \limsup A_n =$ *limita* șirului A_n. De exemplu, dacă $\{A_n\}_n$ este *crescător* (*i. e.* $A_n \subset A_{n+1}$ pentru orice n) există $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, iar dacă $\{A_n\}_n$ este *descrescător* (*i.e.* $A_n \supset A_{n+1}$ pentru orice n) există $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Se arată că dacă $A^* = \limsup A_n$ și $A_* = \liminf A_n$, atunci $\varphi_{A^*} = \limsup \varphi_{A_n}$ și $\varphi_{A_*} = \liminf \varphi_{A_n}$ (v. **funcție măsurabilă, clasă de mulțimi**). Dacă $(T, \mathcal{T}, \mu)$ este un spațiu cu măsură și $\{A_n\}_n$ un șir de mulțimi, $A_n \in \mathcal{T}$, avem $\mu(\liminf A_n) \leqslant$

$\leqslant \lim\inf \mu(A_n)$. Dacă, în plus, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, avem și μ ($\lim\sup A_n) \geqslant$ $\geqslant \lim\sup \mu(A_n)$. (*I. C.*)

local a.p.t. (în raport cu o măsură Radon) v. **prelungirea măsurilor Radon**

logaritm integral v. **funcția ζ**

logaritm natural v. **funcție exponențială**

logaritm real v. **funcție exponențială**

logaritmul complex Fie $\mathbb{C}$ corpul numerelor complexe și $\mathbb{C}^*$ grupul multiplicativ al numerelor complexe diferite de zero. După cum se știe, funcția exponențială induce un morfism de grupuri $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ avînd ca imagine grupul $\mathbb{C}^*$ întreg, și ca nucleu subgrupul $2\pi\mathbb{Z}i$ al lui $\mathbb{C}$. Rezultă că aplicația exp se factorizează la un izomorfism de grupuri $\varnothing: \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}i \to \mathbb{C}^*$. În viziune algebrică, *funcția logaritm* este, prin definiție, inversa $\varnothing^{-1}$ a aplicației precedente, *i.e.* aplicația $\log: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}i$ definită prin

$$\log w = \{z \in \mathbb{C} \mid \exp z = w\} \quad \text{pentru} \quad w \in \mathbb{C}^*.$$

Din definiție rezultă că log este un morfism de grupuri, *i.e.* $\log ww' = \log w + \log w'$, $w, w' \in \mathbb{C}^*$, unde egalitatea este înțeleasă în grupul $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}i$, *i.e.* este o egalitate de mulțimi. Pentru orice $w \in \mathbb{C}^*$, elementele mulțimii $\log w$ se numesc *determinații* (sau *determinări*) ale logaritmului lui w sau, simplu, *logaritmi* ai lui w. Notația $\log w$ se utilizează în mod alternativ pentru a desemna fie o determinație oarecare, generică, a logaritmului lui w, fie o determinație anume a logaritmului lui w, de regulă determinația principală definită mai jos. Potrivit definiției grupului cît $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}i$, dacă z este o determinație a logaritmului lui w, atunci un număr complex z' este o determinație a logaritmului lui w dacă și numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încît $z' = z + 2k\pi i$. Dacă $z = x + iy$ este o determinație a logaritmului lui w, atunci, după formula lui Euler, $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = w$. De aici rezultă, mai întîi, că $e^x = |w|$, deci toate determinațiile logaritmului lui w au aceeași parte reală, și anume $x = \log |w|$, *logaritmul real* al modulului lui w. Apoi, că părțile imaginare ale determinațiilor logaritmului lui w coincid cu soluțiile ecuației $e^{iy} = w/|w|$. Aplicația $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $\gamma(y) = e^{iy}$ este un morfism de grupuri avînd ca imagine subgrupul $S^1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ al lui $\mathbb{C}^*$ și ca nucleu subgrupul $2\pi\mathbb{Z}$ al lui $\mathbb{R}$, deci induce un izomorfism de grupuri $\psi: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$. *Funcția argument* este, prin definiție, aplicația $\arg: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dată prin

$$\arg w := \psi^{-1}\left(\frac{w}{|w|}\right) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid e^{iy} = \frac{w}{|w|}\right\}.$$

Din definiție rezultă că arg este un morfism de grupuri, *i.e.* $\arg(ww') = \arg w + \arg w'$, $w, w' \in \mathbb{C}^*$, unde egalitatea este înțeleasă în grupul cît $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, deci este o egalitate de mulțimi. La fel ca în cazul logaritmului, elementele mulțimii $\arg w$ se numesc *determinații* (sau *determinări*) ale argumentului lui w (și tot la fel notația $\arg w$ poate fi utilizată pentru a desemna fie o determinație generică a argumentului lui w, fie una specifică). Dacă y este o determinație a argumentului lui w, un număr real y' este o altă determinație a argumentului lui w dacă și numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încît $y' = y + 2k\pi$. Printre determinațiile argumentului lui w există exact una cuprinsă în intervalul semiînchis $(-\pi, \pi]$; această determinație este notată $\operatorname{Arg}(w)$ și numită *determinația principală* a argumentului lui w. Este clar că y este o determinație

a argumentului lui w dacă și numai dacă $\log |w| + iy$ este o determinație a logaritmului lui w, *i.e.* avem $\log w = \log |w| + i \arg w$ (egalitate de mulțimi). Astfel, orice număr complex $w \neq 0$ admite *reprezentarea exponențială* $w = |w| e^{i\theta}$, unde θ este una oarecare din determinațiile argumentului lui w. Numărul complex $Z := \log |w| + i \operatorname{Arg} w$, notat de regulă prin $\log w$, este o determinație a logaritmului lui w, numită *determinația principală*; pentru w real > 0, determinația principală a lui $\log w$ coincide cu logaritmul real al lui w. Fie $D := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$. Dacă $w \in D$, atunci $w^{-1} \in D$ și $\operatorname{Arg} w^{-1} = -\operatorname{Arg} w$. De asemenea, dacă $w, w' \in D$ și $-\pi < \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} w' < \pi$, atunci $ww' \in D$ și $\operatorname{Arg}(ww') = \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} w'$. Formule similare se obțin pentru determinația principală a logaritmului. Obs. Dacă $w \in D$ și $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, atunci $\operatorname{Arg} w$ este lungimea arcului de pe cercul unitate S^1, în sens direct, cuprins între punctele 1 și $w/|w|$. Interpretare similară în cazul $\operatorname{Im} w < 0$ cu deosebirea că în acest caz $\operatorname{Arg} w < 0$. (*M. J.*)

M

majorant v. **mulțime ordonată**

margine canonică (a unui număr real constructiv) Asociem fiecărui număr real constructiv $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un întreg K_x pentru care $|x_n| < K_x$ pentru orice n întreg pozitiv și astfel încît K_x să fie cel mai mic cu proprietatea $|x_1| + 2 < K_x$. Numărul K_x este **m.c.** a lui x. (*S. M.*)

margine inferioară v. **mulțime ordonată**

margine superioară v. **mulțime ordonată**

margine superioară (a unei funcții reale f într-un punct a din $\mathbb{R}^n$), numărul $M_f(a) = \inf_{V\in\mathcal{V}(a)} \sup_{x\in V} f(x)$, unde $f: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a\in\bar{A}$ (închiderea lui A) și $\mathcal{V}(a)$ este mulțimea tuturor vecinătăților lui a. Sin.: *supremumul* lui f în a. O definiție similară pentru *marginea inferioară* (*infimumul*) lui f în a, notat $m_f(a)$, cu inversarea lui inf și sup. Au loc inegalitățile

$$m_f(a) \leqslant \liminf_{x\to a} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x) \leqslant M_f(a)$$

în orice punct $a\in A'$ (= mulțimea punctelor de acumulare ale lui A). (*S. M.*)

martingal Vom considera un spațiu cu măsură finită $(T, \mathcal{T}, \mu)$, $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ o sub σ-algebră și X un spațiu Banach. Se arată că pentru orice f din $\mathcal{L}^1_X(\mu)$ există o funcție $g\in\mathcal{L}^1_X(\mu)$ care are următoarele proprietăți: a) Funcția g este $\mathcal{B}$-măsurabilă, *i.e.* $g^{-1}(A)\in\mathcal{B}$ pentru orice mulțime deschisă $A\subset X$; b) Pentru orice E din $\mathcal{B}$ avem $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$ (integrală Bochner). Funcția g este determinată μ-a.p.t. Funcția g se numește *speranța* (sau *media*) *condiționată* a lui f relativ la $\mathcal{B}$ și se notează prin $g = E(f\mid\mathcal{B})$. De exemplu, dacă $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este o partiție a lui T (*i.e.* mulțimile A_n sînt mutual disjuncte și reuniunea lor este T) putem considera tribul $\mathcal{B}$ generat de clasa de părți $\{A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ care este format din toate reuniunile de mulțimi A_n. Atunci, pentru orice f din $\mathcal{L}^1_X(\mu)$, avem $E(f\mid\mathcal{B}) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{A_n}x_n$, unde $x_n = \int_{A_n} f\,d\mu/\mu(A_n)$ (dacă $\mu(A_n)=0$, se ia $x_n = 0$). Revenim la cazul general. Luînd pentru orice $1\leqslant p<\infty$ și pentru orice f din $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ speranța condiționată $g = E(f\mid\mathcal{B})$, se arată că $\|g\|_p \leqslant \|f\|_p$. Vom mai considera o mulțime dirijată Δ și un șir generalizat crescător $\{\mathcal{B}_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de sub σ-algebre ale lui $\mathcal{T}$, *i.e.* $\delta'\leqslant\delta''$ implică $\mathcal{B}_{\delta'}\subset\mathcal{B}_{\delta''}$. Pentru orice număr $1\leqslant p<\infty$, un șir generalizat $\{f_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elemente din $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ se numește **m.** în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ dacă pentru orice $\delta\leqslant\tau$ avem $E(f_\tau\mid\mathcal{B}_\delta) = f_\delta$ μ-a.p.t. În cazul particular cînd $X=\mathbb{R}$, $\{f_\delta\}_\delta$ se numește *submartingal* (resp. *supermartingal*) dacă are proprietatea că $E(f_\tau\mid\mathcal{B}_\delta)\geqslant f_\delta$ μ-a.p.t. (resp. $E(f_\tau\mid\mathcal{B}_\delta)\leqslant f_\delta$ μ-a.p.t.) dacă $\tau\geqslant\delta$. Un exemplu de **m.** se obține astfel: dacă $f\in\mathcal{L}^1_X(\mu)$, se ia pentru orice δ din Δ funcția $f_\delta = E(f\mid\mathcal{B}_\delta)$ și atunci șirul generalizat $\{f_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ este un **m.** În general, vom nota un **m.** $\{f_\delta, \mathcal{B}_\delta\}_\delta$, punînd

în evidență și σ-algebrele. Se arată că pentru orice **m.** $\{f_\delta,\mathcal{B}_\delta\}_\delta$ există $\lim_\delta \int_E f_\delta\,d\mu$ pentru orice E din $\bigcup_\delta \mathcal{B}_\delta$. Dacă $\{f_\delta,\mathcal{B}_\delta\}_\delta$ este un **m.** în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$, atunci acest **m.** este *convergent*, *i.e.* există $f\in\mathcal{L}^p_X(\mu)$ astfel încît $\lim_\delta f_\delta = f$ în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ dacă și numai dacă există f în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ astfel încît pentru orice E din $\bigcup_{\delta\in\Delta}\mathcal{B}_\delta$ să avem $\lim_\delta\int_E f_\delta\,d\mu = \int_E f\,d\mu$ sau dacă și numai dacă există f în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ astfel încît $E(f\mid\mathcal{B}_\delta) = f_\delta$ pentru orice δ în Δ (*teorema de convergență a* **m.**). Un **m.** $\{f_\delta,\mathcal{B}_\delta\}_\delta$ în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ se numește *mărginit* dacă $\sup_\delta\|f_\delta\|_p<\infty$ și se numește *uniform integrabil* dacă $\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E\|f_\tau\|\,d\mu = 0$, uniform în raport cu τ în Δ, *i.e.* pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ astfel încît pentru orice E din $\mathcal{T}$ cu $\mu(E)<\delta$ și pentru orice τ în Δ avem $\int_E\|f_\tau(t)\|\,d\mu(t)<\varepsilon$. Se arată că un spațiu Banach X are proprietatea Radon-Nikodym dacă și numai dacă pentru orice spațiu cu măsură finită $(T,\mathcal{T},\mu)$ și orice **m.** $\{f_\delta,\mathcal{B}_\delta\}$ în $\mathcal{L}^1_X(\mu)$ care este mărginit și uniform integrabil rezultă că $\{f_\delta,\mathcal{B}_\delta\}_\delta$ este convergent în $\mathcal{L}^1_X(\mu)$.
Teorema de convergență punctuală (sau *individuală*) *a* **m.** Dacă $\{f_n,\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un **m.** convergent în $\mathcal{L}^1_X(\mu)$, *i.e.* există f în $\mathcal{L}^1_X(\mu)$ astfel încît $\lim_n f_n = f$ în $\mathcal{L}^1_X(\mu)$, atunci $f_n(t)\to f(t)$ μ-a.p.t. (*I. C.*)

mărginire constructivă Șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit constructiv dacă există un număr real pozitiv r cu proprietatea că $|x_n|<r$ pentru orice n natural. Orice șir care converge constructiv este constructiv mărginit. (*S.M.*)

măsura cardinal v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

măsura Dirac v. **măsură Radon**

măsura discretă v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

măsura exterioară esențială a unei mulțimi v. **integrala superioară și integrala inferioară** (în raport cu o măsură Radon)

măsura exterioară generată (indusă) **de o măsură** v. **măsură exterioară, extinderea măsurilor pozitive aditive definite pe un clan**

măsura exterioară Jordan (n-dimensională) v. **extinderea măsurilor pozitive aditive definite pe un clan**

măsura exterioară Lebesgue v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

măsura Haar Fie X un grup topologic local compact. Vom numi **m.H.** *invariantă la stînga* (resp. *la dreapta*) o măsură boreliană regulată m: $\mathcal{B}\to\mathbb{R}_+$, unde $\mathcal{B}$ este semitribul părților boreliene relativ compacte ale lui X, care are proprietățile: a) E este invariantă la stînga (resp. la dreapta), *i.e.* pentru orice $E\in\mathcal{B}$ și orice $x\in X$ avem $\mu(xE)=\mu(E)$ (resp. $\mu(Ex)=\mu(E)$). Aici $xE=\{xa\mid a\in E\}$ etc.; b) Pentru orice mulțime deschisă nevidă relativ compactă U avem $\mu(U)>0$. De exemplu, dacă $X=\mathbb{R}$ (grupul aditiv al numerelor reale), atunci măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$ este **m.H.** (invariantă la stînga și la dreapta). Se demonstrează că pe orice grup local compact X ca mai sus există cel puțin o **m.H.** invariantă la stînga (resp. invariantă la dreapta). Dacă μ este **m.H.** invariantă la stînga rezultă că măsura $\nu:\mathcal{B}\to\mathbb{R}_+$ definită prin $\nu(E)=\mu(E^{-1})$ este **m.H.** invariantă la dreapta. Aici $E^{-1}=\{a^{-1}\mid a\in E\}$.

Teoremă de unicitate. Dacă μ, ν sînt două **m.H.** invariante la stînga (resp. la dreapta), există atunci o constantă strict pozitivă a astfel încît $\nu = a\mu$. Din acest motiv unii autori vorbesc despre **m.H.** Fixînd $x \in X$ și o **m.H.** invariantă la stînga, măsura $\mu_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\mu_x(E) = \mu(Ex)$ este tot o **m.H.** invariantă la stînga și din motive de unicitate rezultă că există un număr $0 < \Delta(x) < \infty$ astfel încît $\mu_x(E) = \Delta(x)\,\mu(E)$ pentru orice $E \in \mathcal{B}$. Funcția astfel definită $\Delta : X \to \mathbb{R}_+$ nu depinde de **m.H.** μ folosită și se numește *funcția modulară a grupului* X. Dacă Δ este identic egală cu 1, spunem că grupul X este unimodular. Grupurile comutative și grupurile compacte sînt unimodulare. Funcția modulară este un *caracter, i.e.* este omomorfism continuu de grup nenul: $\Delta(x, y) = \Delta(x)\,\Delta(y)$, pentru orice x și y în X, și $\Delta(e) = 1$, unde e este unitatea grupului. În plus, Δ este continuă. (*I.C.*)

măsura Hausdorff Se consideră un spațiu metric (X, d) și o funcție crescătoare h: $[0, \infty] \to [0, \infty]$ care este continuă la dreapta și are proprietatea că $h(t) > 0$ dacă $t > 0$. Cel mai uzual exemplu de funcție h este dat de $h(t) = t^p$, unde p este un număr strict pozitiv. Pentru orice mulțime $G \subset X$ *diametrul* lui G este dat prin $\operatorname{diam}(G) = \sup\{d(x, y) \mid x \in G,\ y \in G\}$ dacă G este nevidă și prin $\operatorname{diam}(\varnothing) = 0$. Putem considera funcția $w_h : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin $w_h(G) = h(\operatorname{diam}(G))$; aici $\mathcal{P}(X)$ este mulțimea părților lui X. *Măsura exterioară Hausdorff* generată de h este măsura exterioară $\mu_h^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin $\mu_h^*(A) = \sup\{a_\delta(A) \mid \delta > 0\}$, unde $a_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} w_h(A_i) \mid A_i \subset X,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A \text{ și } \operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta \text{ pentru orice } i\right\}$. Dacă nu există nici un șir $\{A_i\}_i$ de mulțimi cu $\operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta$ pentru orice i și $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$, atunci, prin definiție, $a_\delta(A) = \infty$. Mulțimile măsurabile în raport cu μ_h^* se notează prin $\mathcal{M}(h)$ și restricția lui μ_h^* la $\mathcal{M}(h)$, care este măsură, se notează prin μ_h. Vom numi μ_h **m.H.** generată de h. Dacă $h(t) = t^p$, ca mai sus, obținem p-măsura exterioară Hausdorff, notată $\mu^*_{(p)}$ și *p-măsura Hausdorff*, notată $\mu_{(p)}$. Se remarcă faptul că pentru orice $\delta > 0$ în definiția măsurii exterioare Hausdorff se poate folosi în loc de $a_\delta(A)$ expresia obținută considerînd numai șiruri de acoperire $\{A_i\}_i$ formate din mulțimi închise, deschise sau șiruri $\{A_i\}$ care au reuniunea exact egală cu A. O mulțime A nevidă este μ_h-neglijabilă dacă și numai dacă există un șir $\{A_i\}_i$ de mulțimi incluse în X cu proprietatea că $\sum_{i=1}^{\infty} w_h(A_i) < \infty$ și astfel încît pentru orice t din A mulțimea $\{i \in \mathbb{N} \mid t \in A_i\}$ este infinită. Măsura exterioară Hausdorff este o măsură exterioară Carathéodory. În cazul particular cînd $X = \mathbb{R}^n$ există o legătură strînsă între n-măsura exterioară Hausdorff $\mu^*_{(n)}$ și măsura exterioară Lebesgue $\lambda^*_{(n)}$, și anume: există o constantă K_n strict pozitivă astfel încît pentru orice $A \subset \mathbb{R}^n$ avem $\mu^*_{(n)}(A) = K_n \lambda^*_{(n)}(A)$. Anume, dacă $n = 1$ avem $K_1 = 1$, iar pentru $n > 1$, avem $K_n = \left(\dfrac{4}{n}\right)^{n/2} \Gamma\left(1 + \dfrac{n}{2}\right)$, unde Γ este funcția euleriană de speța a doua. Fie $G \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și mărginită și $T : G \to X$ o aplicație bijectivă pentru care există două constante strict pozitive m și M astfel încît $m\,\|x' - x''\| \leqslant d(T(x'), T(x'')) \leqslant M\,\|x' - x''\|$ pentru orice x' și x'' în G (norma este oarecare în $\mathbb{R}^n$). Atunci $0 < \mu^*_{(n)}(T(G)) < \infty$. Dacă (X, d) este spațiu metric nenumărabil,

separabil și complet, rezultă că există o submulțime compactă și perfectă K a lui X și o funcție $h : [0, \infty] \to [0, \infty]$ cu proprietățile: a) $h(0) = 0$; b) h este crescătoare; c) $h(t) > 0$ dacă $t > 0$; d) h este continuă la dreapta și, în plus, $0 < \mu_h(K) < \infty$. Invers, dacă se dă o funcție h cu proprietățile a) – d), există un spațiu metric compact (X, d) astfel încît $0 < \mu_h(X) < \infty$. (*I.C.*)

măsura Jordan (n-dimensională) v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

măsura Lebesgue (n-dimensională) v. **extinderea măsurilor pozitive de la un semiclan la clanul generat, extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan, măsură Radon**

măsura Lebesgue-Stieltjes (n-dimensională) v. **extinderea măsurilor pozitive de la un semiclan la clanul generat, extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

măsura Lebesgue-Stieltjes generată de o funcție crescătoare v. **extinderea măsurilor pozitive de la un semiclan la clanul generat, extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

măsura (Radon) Haar Vom considera un grup topologic local compact G. Pentru orice funcție numerică continuă cu suport compact f pe G și orice s din G vom considera funcțiile $f_s : G \to \Gamma$ și $f^s : G \to \Gamma$, definite prin: $f_s(x) = f(sx)$ și $f^s(x) = f(xs^{-1})$. Am notat cu Γ corpul scalarilor (reali sau complecși). Integrala folosită va fi integrala esențială. Fie G un grup local compact și $K(G)$ mulțimea funcțiilor numerice continue pe G cu suport compact. O măsură Radon m pe G se numește *măsură Radon invariantă la stînga* (resp. *măsură Radon invariantă la dreapta*) dacă $m(f_s) = m(f)$ (resp. $m(f^s) = m(f)$) pentru orice f din $K(G)$ și s din G. Aceste egalități se mai scriu:

$$\int f(sx)\,\mathrm{d}m(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}m(x) \quad \left(\text{resp. } \int f(xs^{-1})\,\mathrm{d}m(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}m(x)\right).$$

O măsură Radon pe G pozitivă, nenulă și invariantă (la stînga sau la dreapta) se numește **m.(R.)H.** *pe* G (*invariantă la stînga* sau *la dreapta*). Pe orice grup local compact G există o **m.(R.)H.** invariantă la stînga sau invariantă la dreapta (*teorema lui Haar* sau *teorema de existență a* **m.(R.)H.**). Dacă μ este o **m.(R.)H.** invariantă la stînga (resp. la dreapta) pe G, atunci orice măsură $m : K(G) \to X$, unde X este spațiu Banach, invariantă la stînga (resp. la dreapta) pe G este de forma $m = \mu a$, unde a este un element fix în X (*teorema de unicitate a* **m.(R.)H**). Dacă $m : K(G) \to \Gamma$ este o măsură Radon invariantă la stînga (resp. la dreapta), atunci m este dominată de $|m|$ și $|m|$ este de asemenea invariantă la stînga (resp. la dreapta). Orice **m.(R.)H.** invariantă la stînga este echivalentă cu orice **m.(R.)H.** invariantă la dreapta. Fie μ o **m.(R.) H.** invariantă la stînga pe G. Avem, pentru orice $A \subset G$ și orice s din G, relația $\mu^*(sA) = \mu^*(A)$; aici $sA = \{sa \mid a \in A\}$. Dacă A este nevidă și deschisă, avem $\mu^*(A) > 0$. Grupul G este compact dacă și numai dacă μ este mărginită. Dacă s este în G, X este un spațiu Banach și $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se arată că dacă f este în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$, rezultă că și f_s este $\mathcal{L}^p_X(\mu)$. Atunci, fixînd s în G, putem defini aplicația $U_s : \mathcal{L}^p_X(\mu) \to \mathcal{L}^p_X(\mu)$, $U_s(f) = f_{s^{-1}}$. Aplicația $U : G \to \mathcal{L}(L^p_X(\mu), L^p_X(\mu))$, definită prin $U(s)(\tilde{f}) = \widetilde{U_s(f)} = \tilde{f}_{s^{-1}}$ este o reprezentare de grupuri (*i.e.* $U(e) =$ identitatea, $U(st) = U(s) \circ U(t)$ pentru orice s și t în G) și este simplu continuă (*i.e.* dacă f este fixat în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$, aplicația $G \to L^p_X(\mu)$ definită prin $s \mapsto \widetilde{U_s(f)}$ este continuă). În plus, $\|U(s)\| = 1$ pentru orice s în G. Vom numi pe U *reprezentarea regulată la stînga* a grupului G în $\mathcal{L}(L^p_X(\mu), L^p_X(\mu))$. Noțiuni similare pentru **m.(R.)H.** μ invariantă la dreapta. În acest caz $\mu^*(As) = \mu^*(A)$ pentru orice $A \subset G$ și s în G, cu notații evidente. Din nou, fie μ o **m.(R.) H.** invariantă la stînga pe G. Pentru orice s din G definim măsura Radon μ^s pe G prin $\mu^s(f) = \mu(f^s)$. Deoarece μ^s este invariantă la stînga, rezultă că există un număr strict pozitiv $\Delta(s)$ astfel încît $\mu^s(f) = \Delta(s)\,\mu(f)$ pentru orice f din $K(G)$. Aplicația $\Delta : G \to (0, \infty)$ definită astfel este continuă, multiplicativă (*i.e.* $\Delta(st) = \Delta(s) \cdot \Delta(t)$ pentru orice s și t în G) și se numește *funcția modulară* a lui G. Dacă $\Delta(s) = 1$ pentru orice s, spunem că G este *grup unimodular*. Grupurile care sînt comutative, compacte sau discrete sînt unimodulare. Pentru orice s în G, X spațiu Banach și $1 \leqslant p < \infty$ punem $V_s : \mathcal{L}^p_X(\mu) \to \mathcal{L}^p_X(\mu)$, $V_s(f) = f^{s^{-1}}$. Aplicația $V : G \to \mathcal{L}(L^p_X(\mu), L^p_X(\mu))$, definită prin $V(s)(\tilde{f}) = \widetilde{V_s(f)}$, este reprezentare simplu continuă a lui G în $\mathcal{L}(L^p_X(\mu), L^p_X(\mu))$ și se numește *reprezentarea regulată la dreapta* a lui G. Avem, pentru orice s în G, relația $\|V(s)\|_p = (\Delta(s^{-1}))^{1/p}$. Exemplul cel mai important este măsura Lebesgue. Anume, grupul topologic G este spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$ cu operația de adunare a vectorilor $(x, y) \mapsto x + y$. Este un grup local compact separat și comutativ. **M.(R.)H.** este măsura Lebesgue. (*I.C.*)

măsura unitate (concentrată într-un punct) v. **măsură Radon**

măsura Wiener Fie $T = C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f$ este continuă$\}$ care devine spațiu Banach cu norma $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$. Se notează cu $\mathcal{B}$ mulțimile boreliene ale lui T. Un exemplu de mulțime din $\mathcal{B}$ este spațiul Wiener $C_W = \{f \in T \mid f(0) = 0\}$. Să notăm cu $\mathcal{B}_0$ σ-algebra de părți ale lui C_W definită prin $\mathcal{B}_0 = \{B \cap C_W \mid B \in \mathcal{B}\}$. Există o măsură probabilistică unică $m : \mathcal{B}_0 \to [0, 1]$ cu proprietatea următoare: pentru orice diviziune $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ și pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ avem

$$m(B) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \int_{-\infty}^{a_i} \exp\left(-\frac{u^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) du,$$

unde $B = \{f \in C_W \mid f(t_i) - f(t_{i-1}) \leqslant a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Am scris $\exp(z)$ în loc de e^z. Măsura m se numește **m.W.** (*I.C.*)

măsură v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn, măsură vectorială**

măsură absolut continuă (în raport cu altă măsură) v. **continuitate absolută**

măsură aditivă v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

măsură afină v. **măsnri afine și măsuri cilindrice**

măsură Baire v. **mulțimi boreliene și mulțimi Baire**

măsură cilindrică v. **măsuri afine și măsuri cilindrice**

măsură compactă v. **măsură pe spațiu produs**

măsură completă v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

măsură complexă v. **măsură vectorială**

măsură conică Fie E un spațiu local convex real separat și E^* dualul său algebrico-topologic. Vom nota prin $h(E)$ cea mai mică latice vectorială de funcții continue pe E care include pe E^*. Așadar $h(E)$ constă din mulțimea funcțiilor $u : E \to \mathbb{R}$ de forma $u = \sup A - \sup B$, unde $A, B \subset E^*$ sînt mulțimi finite. Ordinea este ordinea naturală pe mulțimea $\mathcal{F}(E) = \{f : E \to \mathbb{R}\}$, anume $f \leqslant g$ înseamnă $f(t) \leqslant g(t)$ pentru orice t din E. Se numește **m.c.** pe E orice funcțională liniară și pozitivă $T : h(E) \to \mathbb{R}$. De exemplu, dacă $x \in E$ este fixat, măsura Dirac concentrată în x, *i.e.* aplicația $T_x : h(E) \to \mathbb{R}$, $T_x(f) = f(x)$, este o **m.c.** Vom nota cu $M^+(E)$ mulțimea **m.c.** pe E. Cu ordinea obișnuită ($T \geqslant 0$ înseamnă $T \in M^+(E)$) spațiul vectorial $M(E) = M^+(E) - M^+(E)$ devine latice vectorială completă (spațiu vectorial complet reticulat). Anume, $M(E) \subset (h(E))^*$, dualul algebric al lui $h(E)$. Înzestrăm $M^+(E)$ cu topologia slabă de dual, *i.e.* cu topologia indusă de $\sigma(h(E)^*, h(E))$. Cu această topologie $M^+(E)$ devine *con* în $h(E)^*$, *i.e.* $T, S \in M^+(E) \Rightarrow T + S \in M^+(E)$, $\alpha \geqslant 0$ și $T \in M^+(E) \Rightarrow \alpha T \in M^+(E)$ și $T \in M^+(E)$, $T \neq 0 \Rightarrow -T \notin M^+(E)$, care este și complet. Fie acum $X \subset E$ o mulțime cu proprietățile: $x \in X$ și $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \in X$ și $x \in X$, $x \neq 0 \Rightarrow -x \notin X$. Se spune că un element T din $M(E)$ este suportat de X dacă avem: $f \in h(E)$, $f \equiv 0$ pe $X \Rightarrow T(f) = 0$. Se arată că dacă T este o **m.c.** pe E suportată de un con complet X în topologia slabă $\sigma(E, E^*)$, atunci T are un *rezultant unic* $w(T)$ în X, *i.e.* $T(x') = x'(w(T))$ pentru orice x' în E^*. O **m.c.** T se numește *simetrică* dacă $\mathrm{sim}(T) = T$, unde $\mathrm{sim}(T) : h(E) \to \mathbb{R}$ se definește prin $\mathrm{sim}(T)(f) = T(\check{f})$, iar $\check{f}(x) = f(-x)$ pentru orice x din E. Presupunînd că E este $\sigma(E, E^*)$ complet (la rigoare se poate lua completatul slab), orice **m.c.** are rezultant. Dacă E este $\sigma(E, E^*)$ complet și T este o **m.c.** simetrică, mulțimea $K_T = \{w(S) \mid S \in M^+(E),\ 0 \leqslant S \leqslant T\}$ se numește *zonoform*. De exemplu, dacă $E = \mathbb{R}^n$ se arată că un elipsoid de forma $\left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \leqslant 1\right\}$ este un zonoform. Aici $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ sînt fixați. Din nou presupunînd că E este $\sigma(E, E^*)$ complet se arată că orice **m.c.** pe E este o integrală Daniell. Fie E un spațiu prehilbertian real. Vom numi *rotație* pe E o aplicație liniară bijectivă $u : E \to E$ care este izometrică ($\|u(x)\| = \|x\|$ pentru orice x din E). O **m.c.** T pe E se numește *invariantă la rotație* dacă are următoarea proprietate: pentru orice $f \in h(E)$, $T(f) = T(f \circ u)$, pentru orice rotație u pe E (evident că $f \circ u \in h(E)$). Pe orice spațiu prehilbertian E, există o **m.c.** nenulă invariantă la rotație. Dacă $E = \mathbb{R}^n$, atunci există o **m.c.** invariantă la rotație și nenulă T pe $\mathbb{R}^n$ astfel încît orice altă **m.c.** și invariantă la rotație S pe $\mathbb{R}^n$ este de forma $S = aT$ cu $a \geqslant 0$. (*I.C.*)

măsură control v. **continuitate absolută**

măsură cu cvasivariație finită v. **variație; cvasivariație; semivariație**

măsură cu cvasivariație mărginită v. **variație; cvasivariație; semivariație**

măsură cu proprietatea lui Darboux v. **atom al unei măsuri**

măsură cu semivariație finită (relativ la o scufundare) v. **variație; cvasivariație; semivariație**

măsură cu semivariație mărginită (relativ la o scufundare) v. **variație; cvasivariație; semivariație**

măsură cu variație finită v. **variație; cvasivariație; semivariație**

măsură cu variație mărginită v. **variație; cvasivariație; semivariație**

măsură de bază μ **și densitate** f v. **măsură definită prin densități, măsură Radon, măsură Radon definită prin densități**

măsură definită prin densități Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T, $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură numărabil aditivă, și un spațiu Banach X. O funcție $f : T \to X$ (sau $\overline{\mathbb{R}}$) se numește funcție *local μ-integrabilă* dacă $f\varphi_A$ este μ-integrabilă pentru orice A din $\mathcal{C}$ cu $\mu(A) < \infty$. În cazul vectorial integrala este Bochner. Dacă f este local μ-integrabilă, putem defini măsura $m : \mathcal{FC} \to X$ (resp. $m : \mathcal{FC} \to \mathbb{R}$) prin $m(A) = \int f\varphi_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu$. Aici $\mathcal{FC} = \{A \in \mathcal{C} \mid \mu(A) < \infty\}$. Măsura m se numește *măsura de bază* μ *și densitate* f și se notează $m = f\mu$; este o **m.d.d.** absolut continuă în raport cu μ. În cazul integralei Bochner biliniare vom considera o măsură vectorială numărabil aditivă cu variație finită $m : \mathcal{C} \to X$. Vom presupune că E și F sînt spații Banach astfel încît X se scufundă în $\mathcal{L}(E, F)$. Fie $f : T \to E$ o funcție care este *local m-integrabilă* (*i.e.* f este local $|m|$-integrabilă). Putem defini măsura n: $\mathcal{C} \to F$ dată prin

$$n(A) := \int f\varphi_A \, \mathrm{d}m = \int_A f \, \mathrm{d}m.$$

Notăm $n = fm$ și numim, din nou, pe n (care este o **m.d.d.** absolut continuă în raport cu m) *măsura de bază m și densitate f*. Avem $|fm| \leqslant |f| \cdot |m|$ cu următoarele explicații: a) Funcția $|f|: T \to \mathbb{R}_+$ este dată prin $|f|(t) = \|f(t)\|$; b) Pentru orice A din $\mathcal{C}$ avem $|fm|(A) \leqslant (|f| \cdot |m|)(A) = \int_A |f| \mathrm{d}|m|$, unde $|fm|$ este modulul măsurii fm. Vom considera cazul special cînd m: $\mathcal{C} \to \Gamma$, unde Γ este corpul scalarilor, reali sau complecși și f: $T \to E$ este local m-integrabilă (unde E este un spațiu Banach). Aici $X = \Gamma$, $E = F$, și aplicația de scufundare este $u: \Gamma \to \mathcal{L}(E, F)$, $u(t) = U_t$ cu $U_t(x) = tx$. În acest caz avem chiar egalitatea $|fm| = |f| \cdot |m|$. De asemenea, $fm = 0$ dacă și numai dacă $f(t) = 0$, μ-a.p.t. (*i.e.* există $M \subset T$, M local μ-neglijabilă astfel încît $f(t) = 0$ pentru orice t din $T \setminus M$). Dacă $E = \Gamma$ avem următoarele rezultate pentru o funcție g: $T \to Y$ (unde Y este un spațiu Banach): a) Funcția g este $|fm|$-neglijabilă dacă și numai dacă fg este m-neglijabilă; b) Funcția g este $|fm|$-măsurabilă dacă și numai dacă fg este m-măsurabilă; c) Funcția g este fm-integrabilă dacă și numai dacă fg este m-integrabilă. În acest caz avem $\int g \, \mathrm{d}(fm) = \int gf \mathrm{d}m$ (am scris prin abuz $gf = fg$). Dacă $E = \mathbb{R}$ și m este pozitivă (*i.e.* f: $T \to \mathbb{R}$ este local m-integrabilă), atunci $(fm)^+ = f^+m$, $(fm)^- = f^-m$ și $|fm| = |f|m$, cu notații evidente. Dacă $E = \mathbb{R}$ și $f \geqslant 0$, iar m este reală, avem $(fm)^+ = fm^+$ și $(fm)^- = fm^-$, deci $|fm| = f|m|$. Situația frecvent întîlnită în aplicațiile curente este următoarea. Se consideră un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$, un spațiu Banach E, și o funcție f: $T \to E$ care este integrabilă Bochner în raport cu μ. Atunci se obține măsura numărabil aditivă $m: \mathcal{T} \to E$ definită prin $m(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$. Este clar că $m = f\mu$, cu notațiile de mai sus. Vom numi pe m *integrala nedefinită* a funcției f. Măsura $m = f\mu$ este absolut continuă în raport cu μ (*teorema de continuitate absolută a integralei nedefinite*). (*I.C.*)

măsură derivabilă într-un punct v. **derivarea măsurilor**

măsură de tip pozitiv (pe un grup topologic) v. **funcție de tip pozitiv**

măsură diferențiabilă într-un punct v. **derivarea măsurilor**

măsură difuză v. **teorema lui Ulam, măsuri Radon difuze și atomice**

măsură exterioară Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{H}$ un trib ereditar de părți ale lui T. O funcție de mulțime m: $\mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numește **m.e.** dacă are proprietățile: 1) $m(\emptyset) = 0$; 2) m este crescătoare; 3) m este numărabil subaditivă (deci și finit subaditivă). Unii autori consideră că în definiție trebuie luat $\mathcal{H} = \mathcal{P}(T)$ = mulțimea părților lui T. Cel mai important exemplu de **m.e.** este următorul. Se consideră un clan $\mathcal{C}$ de părți ale lui T și o măsură (numărabil aditivă) pozitivă $\mu: \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Fie $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ tribul ereditar generat de $\mathcal{C}$. Definim $\mu^*: \mathcal{H}(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ prin $\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid \{A_n\}_n \text{ este un șir de mulțimi } A_n \in \mathcal{C} \text{ cu proprietatea } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A\right\}$. Funcția de mulțime astfel obținută μ^* este o **m.e.** și se numește **m.e.** *indusă (generată) de* μ. **M.e.** ***generalizată indusă*** *(generată) de* μ este funcția de mulțime $\mu^{**}: \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dată prin $\mu^{**}(A) = \mu^*(A)$ dacă $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ și $\mu^{**}(A) = \infty$ dacă $A \notin \mathcal{H}(\mathcal{C})$. Fie m: $\mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o **m.e.** O mulțime $A \in \mathcal{H}$ se numește *mulțime măsurabilă în raport cu m* (sau *mulțime m-măsurabilă*) dacă are proprietatea $m(E) = m(E \cap A) + m(E \setminus A)$ pentru orice $E \in \mathcal{H}$.

Teorema lui Carathéodory (cu privire la măsurabilitatea în raport cu o măsură exterioară). Clasa $\mathcal{T}$ a mulțimilor m-măsurabile este trib și restricția lui m la $\mathcal{T}$ este măsură pozitivă (deci numărabil aditivă), cu alte cuvinte funcția de mulțime n: $\mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $n(A) = m(A)$ este măsură pozitivă.

În cazul particular cînd T este spațiu topologic, o **m.e.** m se numește **m.e.** *topologică* (sau **m.e.** *Carathéodory*) dacă are proprietatea că mulțimile deschise (deci și cele închise) sînt m-măsurabile. Dacă T este un spațiu metric cu metrica d, se arată că o **m.e.** m este **m.e.** topologică dacă și numai dacă m este **m.e.** *metrică*, *i.e.* are proprietatea că $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ pentru orice două mulțimi nevide incluse în T care au proprietatea că $\rho(A, B) > 0$; aici $\rho(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ este *distanța Hausdorff-Pompeiu* între mulțimile A și B (*teorema lui Carathéodory* (cu privire la măsurabilitatea mulțimilor deschise)). (*I.C.*)

măsură finit aditivă v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn, măsură vectorială**

măsură finită v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

măsură gaussiană (pe $\mathbb{R}^n$) Fie $(T, \mathcal{T}, P)$ un spațiu cu măsură probabilistică și $X_1, X_2, \ldots, X_n: T \to \mathbb{R}$ variabile aleatoare. Ele definesc *vectorul aleator n-dimensional X*, *i.e.* funcția X: $T \to \mathbb{R}^n$, $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$. Notăm cu $\mathcal{B}_n$ mulțimile boreliene în $\mathbb{R}^n$. Atunci X generează *probabilitatea de distribuție* (sau *de repartiție*) *n-dimensională* a lui X, care este măsura probabilistică $X(P): \mathcal{B}_n \to [0, 1]$ definită prin $X(P)(B) = P(X^{-1}(B))$. Dacă $X(P)$ este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^n$, atunci ea se exprimă ca o măsură definită prin densități, anume

$$X(P) = f(x) \, \mathrm{d}x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

(v. **teorema Radon-Nikodym**). Funcția f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numește *densitatea de distribuție* (sau *de repartiție*) *n-dimensională* a lui X. Pentru a putea defini repartiția normală n-dimensională reamintim că o matrice pătrată de tip $n \times n$ simetrică și reală $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ se numește *pozitiv definită* dacă pentru orice $0 \neq x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ din $\mathbb{R}^n$ avem $< A(x), x > \; > 0$, unde

$$< A(x), x > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Se spune că *vectorul aleator X* de mai sus este *normal distribuit* dacă există o matrice pozitiv definită A de tip $n \times n$ și un vector m din $\mathbb{R}^n$ astfel încît $X(P) = f(x) \mathrm{d}x$, unde f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$f(x) = \left(\frac{\det A}{(2\pi)^n}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} < A(x - m), x - m >\right).$$

Fie acum D o mulțime nevidă și $\{X_t\}_{t \in D}$ un proces stochastic în care fiecare $X_t : T \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare. Vom spune că $\{X_t\}_t$ este un *proces gaussian* dacă pentru orice sistem finit $(t_1, t_2, ..., t_n)$ de elemente diferite din D vectorul aleator $X = (X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ este normal distribuit. Se arată că $\{X_t\}_{t \in D}$ este proces gaussian dacă și numai dacă orice combinație liniară de elemente X_t este o variabilă aleatoare normal distribuită. Din nou D este o mulțime nevidă oarecare. Vom defini **m.g.** pe $\mathbb{R}^D = \{x_t\}_{t \in D} \mid x_t \in \mathbb{R}\}$. Un element $\{x_t\}_t$ din $\mathbb{R}^D$ este de fapt o funcție x: $D \to \mathbb{R}$, anume $x(t) = x_t$ pentru orice t din D. Dacă $F \subset D$ este o mulțime finită, putem considera proiecția $p_F : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^F$ definită prin $p_F(\{x_t\}_{t \in D}) = \{x_t\}_{t \in F}$. Notăm $T = \mathbb{R}^D$. Pe T vom considera σ-algebra $\mathcal{T}$ după cum urmează. Pentru orice $F \subset D, F$ finită, notăm cu $\mathcal{B}_F$ borelienele lui $\mathbb{R}^F$, *i.e.* $\mathbb{R}^F = \mathbb{R}^n$ dacă F are n elemente. Atunci $\mathcal{T}$ este σ-algebra generată de clasa tuturor mulțimilor de forma $p_F^{-1}(B)$, unde $F \subset D$ este finită și $B \in \mathcal{B}_F$. Putem considera pentru orice t din D funcția $X_t : T \to \mathbb{R}$ definită prin $X_t(x) = x(t)$. Se observă că toate funcțiile X_t sînt $\mathcal{T}$-măsurabile. Așadar, în prezența unei probabilități $P : \mathcal{T} \to [0, 1]$ fiecare X_t devine variabilă aleatoare. Prin definiție, o probabilitate P: $\mathcal{T} \to [0, 1]$ se numește **m.g.** pe $\mathbb{R}^D$ dacă procesul stochastic $\{X_t\}_{t \in D}$ definit mai sus este proces gaussian. (*I.C.*)

măsură indusă pe o mulțime v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

măsură interioară a unei mulțimi v. **integrala superioară și integrala inferioară** (în raport cu o măsură Radon)

măsură invariantă la translație v. **problema ușoară a teoriei măsurii**

măsură localizabilă Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T și $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură numărabil aditivă. Aplicînd extensia Carathéodory lui μ obținem mulțimile μ-măsurabile $\mathcal{T}(\mu)$ și măsura $\mu^* : \mathcal{T}(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (v. **extensia măsurilor pozitive definite pe un clan**,). Aici vom numi *mulțime μ-neglijabilă* o mulțime $A \in \mathcal{T}(\mu)$ cu proprietatea $\mu^*(A) = 0$, iar *mulțime μ-integrabilă* o mulțime $B \in \mathcal{T}(\mu)$ cu $\mu^*(B) < \infty$. De asemenea, vom numi *mulțime local μ-neglijabilă* o mulțime C cu proprietatea că $C \cap A$ este μ-neglijabilă pentru orice mulțime A μ-integrabilă. (A se compara cu **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan,** unde am numit mulțimile local neglijabile, mulțimi neglijabile.) Semitribul mulțimilor μ-integrabile se notează prin $\sum(\mu)$ iar tribul mulțimilor μ-neglijabile prin $\mathcal{N}(\mu)$. Pentru orice funcție μ-măsurabilă $f : T \to \Gamma$ (unde Γ este corpul scalarilor reali sau complecși), vom nota $f^* = \{g : T \to \Gamma \mid$ există $A \in \mathcal{N}(\mu)$ astfel încît $f(t) = g(t)$ pentru orice t din $T \setminus A\}$. Pentru fiecare E din $\sum(\mu)$ vom nota $\mathcal{F}_E = \{f : T \to \Gamma \mid f$ este μ-măsurabilă și $f(t) = 0$ pentru orice t din $T \setminus E\}$. Se numește *μ-secțiune transversală* o familie $\{f_E^*\}_{E \in \Sigma(\mu)}$ unde: a) $f_E \in \mathcal{F}_E$ pentru orice E din $\sum(\mu)$; b) Pentru orice E și F din $\sum(\mu)$ avem $(f_E \varphi_{E \cap F})^* = (f_F \varphi_{E \cap F})^* = f_{E \cap F}^*$. Dacă $f : T \to \Gamma$ este o funcție μ-măsurabilă, ea generează *μ-secțiunea transversală generată de* $f = ((f\varphi_E)^*)_{E \in \Sigma(\mu)}$, care se notează $<f>$. Vom spune că măsura μ are *proprietatea submulțimii finite* dacă pentru orice $A \in \mathcal{T}(\mu)$ există $B \in \mathcal{T}(\mu)$ cu $B \subset A$ și $0 < \mu^*(B) < \infty$. De exemplu, orice măsură total σ-finită (*i.e.* T este reuniunea unui șir de mulțimi din $\sum(\mu)$) are proprietatea submulțimii finite. De remarcat că pentru măsuri cu proprietatea submulțimii finite mulțimile local neglijabile coincid cu mulțimile neglijabile (și reciproc, această proprietate caracterizînd de fapt măsurile cu proprietatea sumei finite). Fie acum $\Gamma = \mathbb{R}$. Definim o relație de ordine pe mulțimea claselor de funcții reale μ-măsurabile după cum urmează: $f^* \leqslant g^*$ înseamnă că există o mulțime μ-neglijabilă A astfel încît $f(t) \leqslant g(t)$ pentru orice t din $T \setminus A$. Dacă A și B sînt mulțimi din $\mathcal{T}(\mu)$ vom scrie $A^* \leqslant B^*$ în loc de

$\varphi_A^* \leqslant \varphi_B^*$ (am notat deci $A^* = \varphi_A^*$ etc.). Am definit în acest mod o relație de ordine pe mulțimea $\{A^* \mid A \in \mathcal{T}(\mu)\}$. Vom spune că μ este **m.l.** dacă are următoarea proprietate: orice submulțime nevidă a mulțimii $\{A^* | A \in \sum(\mu)\}$ admite margine superioară în mulțimea $\{A^* \mid A \in \mathcal{T}(\mu)\}$. În același context, vom spune că măsura μ este o *măsură cu proprietatea Radon-Nikodym* dacă pentru orice altă măsură pozitivă și numărabil aditivă $\nu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ astfel încît ν este absolut continuă în raport cu μ (*i.e.* orice mulțime care este μ-neglijabilă este și ν-neglijabilă (v. **continuitate absolută**)) există o funcție μ-măsurabilă și pozitivă $f: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ astfel încît pentru orice mulțime A din $\sum(\mu)$, $A \in \sum(\nu)$ dacă și numai dacă $f\varphi_A$ este μ-integrabilă; în plus, în acest caz avem $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$.

Teorema lui Segal. Fie $\mathcal{C}$ un clan de părți ale mulțimii nevide T și μ: $\mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură numărabilă aditivă cu proprietatea submulțimii finite. Următoarele afirmații sînt echivalente: 1) Măsura μ are proprietatea Radon-Nikodym; 2) Pentru orice μ-secțiune transversală $u = \{f_E^*\}_{E \in \Sigma(\mu)}$ există o funcție μ-măsurabilă f astfel încît $u = \langle f \rangle$; 3) Spațiul $L^\infty(\mu)$ este complet reticulat; 4) Măsura μ este localizabilă. Din nou dacă $\mathcal{C}$ este clan și $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o măsură numărabil aditivă, se spune că μ are *proprietatea sumei directe* dacă există o familie $\{T_i\}_{i \in I}$ de mulțimi mutual disjuncte din $\sum(\mu)$ astfel încît $T = \bigcup_{i \in I} T_i$ și, în plus, pentru orice $E \in \sum(\mu)$ există $M \in \mathcal{N}(\mu)$ și o parte cel mult numărabilă $J \subset I$ cu proprietatea $E \setminus M = \bigcup_{i \in J} T_i$. Orice măsură total σ-finită are proprietatea sumei directe și orice măsură cu proprietatea sumei directe este localizabilă. Ex.: 1° Dacă T este o mulțime nenumărabilă, măsura cardinal pe T are proprietatea sumei directe și nu este σ-finită. 2° Luăm mulțimea $T = [0, 1]^2$, semiclanul $\mathcal{P} = \{[a, b) \times \{c\} \mid 0 \leqslant a < b \leqslant 1,\ 0 \leqslant c \leqslant 1\}$ și măsura pozitivă numărabil aditivă μ: $\mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\mu([a, b) \times \{c\}) = b-a$ care se extinde prin procedeele obișnuite. Atunci μ nu este localizabilă. (*I.C.*)

măsură non-atomică v. **atom al unei măsuri**

măsură numărabil aditivă v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn, măsură vectorială**

măsură pe spațiu produs Se consideră două spații cu măsură σ-finite $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și $(S, \mathcal{S}, \nu)$. Se face constatarea că $\mathcal{P} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{T}$ și $\mu(A) < \infty$, $B \in \mathcal{S}$ și $\nu(B) < \infty\}$ este un semiclan. Pe acest semiclan considerăm măsura numărabil aditivă finită $m : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ definită prin $m(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$. Această măsură se extinde la un trib mai bogat după cum urmează. Notăm $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ tribul generat de $\{A \times B \mid A \in \mathcal{T},\ B \in \mathcal{S}\}$. Evident că $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ este o σ-algebră și $\mathcal{T} \supset \mathcal{P}$. Atunci se arată că există o măsură unică numărabil aditivă și σ-finită λ: $\mathcal{T} \times \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ care extinde pe m. Vom numi pe λ *măsura produs* a măsurilor μ și ν. Se obișnuiește să se noteze $\lambda = \mu \times \nu$. Un mod de calcul al lui λ este următorul: a) Pentru orice $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) < \infty$ și $B \in \mathcal{S}$ cu $\nu(B) < \infty$, considerăm o mulțime $E \in \mathcal{T} \times \mathcal{S}$ cu $E \subset A \times B$; b) Fixînd $t_0 \in T$ și $s_0 \in S$ arbitrar obținem secțiunile mulțimii E, anume secțiunea prin t_0, $E_{t_0} = \{s \in S \mid (t_0, s) \in E\}$, și secțiunea prin s_0, $E^{s_0} = \{t \in T \mid (t, s_0) \in E\}$. Constatăm că $E_{t_0} \in \mathcal{S}$ și $E^{s_0} \in \mathcal{T}$; c) Funcția finită $u : T \to \mathbb{R}_+$ dată prin $u(t) = \nu(E_t)$ este o funcție μ-integrabilă, iar funcția finită $v: S \to \mathbb{R}_+$ dată prin $v(s) = \mu(E^s)$ este ν-integrabilă. Avem $\lambda(E) = \int u(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int v(s)\,\mathrm{d}\nu(s)$. Mai sugestiv, $(\mu \times \nu)(E) = \int_T E_t\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_S E^s\,\mathrm{d}\nu(s)$. În continuare, cu măsura produs $\lambda : \mathcal{T} \times \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ putem construi, pe de-o parte mulțimile λ-măsurabile și pe de alta putem aplica teoria integrării în raport cu λ. Ne ocupăm în mod explicit de al doilea aspect. Menționăm faptul că, în general, dacă $f : T \times S \to \overline{\mathbb{R}}$ (sau Γ), unde Γ este corpul scalarilor reali sau complecși, este o funcție $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ măsurabilă, atunci: a) Pentru orice t în T secțiunea prin t a lui f, $f_t : S \to \overline{\mathbb{R}}$ (sau Γ), este o funcție $\mathcal{S}$-măsurabilă; b) Pentru orice s în S secțiunea prin s a lui f, $f^s : T \to \overline{\mathbb{R}}$ (sau Γ), este o funcție $\mathcal{T}$-măsurabilă. *Teorema lui Fubini*. Fie $f: T \times S \to \Gamma$ o funcție λ-integrabilă (*i.e.* $\mu \times \nu$-integrabilă cu notațiile anterioare). Atunci: 1) Există o mulțime $B \subset S$ care este ν-neglijabilă astfel încît pentru orice s din $S \setminus B$ funcția f^s este μ-integrabilă; 2) Există o mulțime $A \subset T$ care este μ-neglijabilă astfel încît pentru orice t din $T \setminus A$ funcția f_t este ν-integrabilă; 3) Fie $P : T \to \Gamma$ definită prin $P(t) = \int f_t\,\mathrm{d}\nu$ dacă $t \notin A$ și $P(t) =$ arbitrar, dacă $t \in A$. Fie, de asemenea, $Q : S \to \Gamma$ definită prin $Q(s) = \int f^s\,\mathrm{d}\mu$ dacă $s \notin B$ și $Q(s) =$ arbitrar, dacă $s \in B$. În aceste condiții P este μ-integrabilă, Q este ν-integrabilă și avem relațiile $\int f\,\mathrm{d}\lambda = \int P\,\mathrm{d}\mu = \int Q\,\mathrm{d}\nu$. Formulele de mai sus se rețin mai ușor în forma abuzivă, dar sugestivă,

$$\int f(t, s)\,\mathrm{d}(\mu \times \nu)(t, s) = \int\left(\int f(t, s)\,\mathrm{d}\nu(s)\right)\mathrm{d}\mu(t) = \int\left(\int f(t, s)\,\mathrm{d}\mu(t)\right)\mathrm{d}\nu(s).$$

Teorema lui Fubini rămîne valabilă dacă în loc de Γ se consideră un spațiu Banach X. Un fel de reciprocă a teoremei lui Fubini este teorema următoare. *Teorema lui Tonelli* (varianta „pozitivă"). Fie $f : T \times S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o funcție λ-măsurabilă. Atunci: 1) Există o mulțime $B \subset S$ care este ν-neglijabilă astfel încît funcția f^s este μ-măsurabilă pentru orice s din $S \setminus B$; 2) Există o mulțime $A \subset T$ care este μ-neglijabilă astfel încît funcția f_t este ν-măsurabilă pentru orice t din $T \setminus A$; 3) Fie $P: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin $P(t) = \int f_t\,\mathrm{d}\nu$ dacă $t \notin A$ și $P(t)$ arbitrar dacă $t \in A$. Fie, de asemenea, $Q : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin $Q(s) = \int f^s\,\mathrm{d}\mu$ dacă $s \notin B$ și $Q(s)$ arbitrar dacă $s \in B$. Atunci P este μ-măsurabilă, Q este ν-măsurabilă și avem $\int f\,\mathrm{d}\lambda = \int P\,\mathrm{d}\mu = \int Q\,\mathrm{d}\nu$.

Teorema lui Tonelli (varianta „scalară"). Fie $f : T \times S \to \overline{\mathbb{R}}$ (sau Γ) o funcție λ-măsurabilă. Atunci: a) Punctele 1) și 2) din enunțul precedent se mențin; b) Funcția $P : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin $P(t) = \int |f_t|\,\mathrm{d}\nu$ dacă $t \in T \setminus A$ și $P(t)$

arbitrar dacă $t \in A$ este μ-măsurabilă. Similar, funcția $Q : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin $Q(s) = \int |f^s|\,\mathrm{d}\nu$ dacă $s \notin B$ și $Q(s)$ arbitrar dacă $s \in B$ este ν-măsurabilă;

c) Dacă $\int P\,\mathrm{d}\mu < \infty$ sau $\int Q\,\mathrm{d}\nu < \infty$ rezultă că f este λ-integrabilă.

Măsura produs poate fi prezentată și pentru un număr finit de factori. De exemplu, dacă $(T_i, \mathcal{T}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt spații cu măsură σ-finită, măsura produs a măsurilor $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ este unica măsură $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietatea că $\mu(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) \ldots \mu_n(A_n)$ pentru orice $A_i \in \mathcal{T}_i$ cu $\mu_i(A_i) < \infty$. Aici $\mathcal{T}$ este tribul generat de toate mulțimile de forma $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ cu $A_i \in \mathcal{T}_i$ și $\mu_i(A_i) < \infty$. Noțiunea de măsură produs se poate extinde pentru o familie oarecare de mulțimi. Se consideră o mulțime nevidă, eventual infinită, I de indici. Pentru fiecare i din I se consideră un spațiu măsurabil $(T_i, \mathcal{T}_i)$, *i.e.* $\mathcal{T}_i$ este σ-algebră de părți ale lui T_i. Se numește *mulțime elementară* o mulțime de forma $A = \prod_{i \in I} A_i$, unde $A_i \in \mathcal{T}_i$ pentru orice i, și anume $A_i = T_i$, cu excepția unui număr finit de indici i. Notăm cu $\mathcal{T}$ tribul generat de clasa formată din toate mulțimile elementare (așadar, $\mathcal{T}$ este σ-algebră de părți ale lui $T = \prod_{i \in I} T_i$). Se arată că dacă pentru fiecare i din I avem un spațiu cu măsură probabilistică $(T_i, \mathcal{T}_i, \mu_i)$, deci $\mu_i(T_i) = 1$, atunci, cu notațiile anterioare, există o unică măsură probabilistică $\mu: \mathcal{T} \to [0, 1]$ cu proprietatea că pentru orice mulțime elementară $A = \prod_{i \in I} A_i$, $\mu(A) = \prod_{i \in I} \mu_i(A_i)$. Anume, dacă $A = \left(\prod_{i \in F} A_i\right) \times \left(\prod_{i \in I \setminus F} T_i\right)$, unde $F \subset I$ este finită, $\prod_{i \in I} \mu_i(A_i) = \prod_{i \in F} \mu_i(A_i)$. Măsura μ se numește *măsura produs a măsurilor* $\{\mu_i\}_{i \in I}$ (sau *a familiei* $\{\mu_i\}_{i \in I}$). (*I.C.*)

măsură probabilistică v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

măsură produs a două măsuri v. **măsură pe spațiu produs**

măsură punctuală v. **suportul unei măsuri Radon**

măsură pur finit aditivă v. **spațiul reticulat al măsurilor cu semn**

măsură Radon Fie T un spațiu local compact și E un spațiu local convex separat; E poate fi corpul Γ al scalarilor reali sau complecși. O **m.R.** cu valori în E (**m.R.** *vectorială*) este o aplicație liniară și continuă $\mu: \mathcal{K}(T) \to E$, unde $\mathcal{K}(T)$ este spațiul funcțiilor continue cu suport compact. În particular, dacă $E = \mathbb{R}$ avem o **m.R.** *reală*, iar dacă $E = \mathbb{C}$ o **m.R.** *complexă*. În general, dacă $E = \Gamma$, se spune simplu că avem o **m.R.** (sau o **m.R.** *scalară*). O aplicație liniară $\mu : \mathcal{K}(T) \to E$ este o **m.R.** dacă și numai dacă restricția lui μ la fiecare spațiu $\mathcal{K}(T, K)$ (v. **spațiul funcțiilor continue cu suport compact**) este continuă (unde K parcurge mulțimile compacte ale lui T) sau dacă și numai dacă pentru orice șir $\{f_n\}_n$ de funcții din $\mathcal{K}(T)$ care este convergent la 0 în $\mathcal{K}(T)$, șirul $\{\mu(f_n)\}_n$ este convergent la 0 în E. Dacă E este spațiu normat, cu norma $x \mapsto |x|$, aplicația liniară $\mu: \mathcal{K}(T) \to E$ este **m.R.** dacă și numai dacă pentru orice compact $K \subset T$ există un număr strict pozitiv M_K astfel încît pentru orice f din $\mathcal{K}(T, K)$ avem $|\mu(f)| \leqslant M_k \cdot \|f\|$, unde

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in T\} = \sup\{|f(t)| \mid t \in K\}.$$

Dacă T este spaţiu compact şi μ o **m.R.** pe T, *masa generală* a lui μ este $\mu(1)$. Dacă μ este pozitivă (v. mai departe) şi masa generală a lui μ este 1, $\mu(f)$ se mai numeşte şi *media* lui f pentru orice $f \in \mathcal{K}(T)$. Uneori, în loc de $\mu(f)$ scriem $\int f \, d\mu$ sau $\int f(x) \, d\mu(x)$. Notăm cu $\mathcal{M}(T)$ spaţiul vectorial al **m.R.** pe T. Un element μ din $\mathcal{M}(T)$ se numeşte **m.R.** *pozitivă* dacă are proprietatea că $\mu(f) \geqslant 0$ pentru orice $f \geqslant 0$ din $\mathcal{K}(T)$. Vom scrie în acest caz $\mu \geqslant 0$. În cazul cînd $\Gamma = \mathbb{R}$, spaţiul vectorial real $\mathcal{M}(T)$ devine spaţiu reticulat faţă de relaţia de ordine $\mu \geqslant \nu : \Leftrightarrow \mu - \nu \geqslant 0$. Pentru orice element din $\mathcal{M}(T)$ se poate defini partea pozitivă, partea negativă şi modulul. Se demonstrează în acest caz că pentru orice $f \geqslant 0$ din $\mathcal{K}(T)$ avem $\mu^+(f) = \sup\{\mu(g) \mid 0 \leqslant g \leqslant f, g \in \mathcal{K}(T)\}$, $|\mu|(f) = \sup\{|\mu(g)| \mid |g| \leqslant f, g \in \mathcal{K}(T)\}$. Avem deci $\mu = \mu^+ - \mu^-$ şi $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Două **m.R.** μ şi ν se numesc **m.R.** *independente* (sau *singulare*) dacă $|\mu| \wedge |\nu| = 0$. O **m.R.** se numeşte **m.R.** *mărginită* dacă este continuă pe $\mathcal{K}(T)$ înzestrat cu topologia convergenţei uniforme (definiţia poate fi dată în acelaşi mod şi pentru **m.R.** vectoriale), deci dacă are proprietatea că există un număr pozitiv M astfel încît $|\mu(f)| \leqslant M \|f\|$ pentru orice f din $\mathcal{K}(T)$ (aici $\|f\|$ este norma convergenţei uniforme). Pentru orice **m.R.** mărginită μ, scriem $\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)| \mid \|f\| \leqslant 1\}$. Măsurile cu suport compact sînt mărginite. Cazul $\Gamma = \mathbb{C}$ poate fi redus la cazul $\Gamma = \mathbb{R}$ după cum urmează. Notăm $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(T) = \{f: T \to \mathbb{C} \mid f$ este continuă şi are suport compact$\}$ şi $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(T) = \{f: T \to \mathbb{R} \mid f$ este continuă şi are suport compact$\}$. Atunci orice $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(T)$ se scrie unic sub forma $f_1 + i f_2$ cu f_1 şi f_2 din $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(T)$. Dacă $m : \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(T) \to \mathbb{C}$ este o **m.R.**, atunci m este perfect determinată de **m.R.** (cu valori complexe) m_0 care este restricţia lui m la $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(T)$, deoarece pentru f, ca mai sus, avem $m(f) = m_0(f_1) + i m_0(f_2)$. Identificăm atunci pe m cu m_0. La rîndul ei, m_0 se scrie unic sub forma $m_0 = \mu_1 + i\mu_2$, unde $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(T) \to \mathbb{R}$ sînt **m.R.** reale. Rezultă că putem scrie $m \equiv m_0 = \mu_1 + i\mu_2 = (\mu_1^+ - \mu_1^-) + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$. Ex.: 1° *Măsura Dirac*. Se consideră un punct a din T şi se notează cu ε_a **m.R.** pe T definită prin $\varepsilon_a(f) = f(a)$ pentru orice f din $\mathcal{K}(T)$ (ε_a se numeşte *măsura Dirac* (concentrată în a) sau *măsura unitate* (concentrată în a)); ea este o măsură mărginită. Se mai foloseşte şi notaţia δ_a în loc de ε_a. 2° **M.R.** *discretă*. Se consideră o mulţime $M \subset T$ care are proprietatea că pentru orice compact $K \subset T$ mulţimea $M \cap K$ este finită. Fie şi $\alpha: M \to \Gamma$ o funcţie. Atunci **m.R.** μ pe T, definită prin $\mu(f) = \sum_{x \in M} \alpha(x) f(x)$, pentru orice f din $\mathcal{K}(T)$, se numeşte **m.R.** *discretă*. 3° *Măsura (Radon) Lebesgue*. Luăm $T = \mathbb{R}^n$ cu topologia canonică. Definim $\mu: \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \Gamma$ prin

$$\mu(f) = \int_A f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \quad \text{(integrală Riemann)},$$

unde $A = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ este un interval n-dimensional cu proprietatea că $A \supset \operatorname{supp}(f)$. **M.R.** μ se numeşte *măsura Lebesgue* (nu este o măsură mărginită). 4° *Produsul unei măsuri cu o funcţie continuă*. Dacă $g: T \to \Gamma$ este o funcţie continuă, **m.R.** λ definită prin $\lambda(f) = \mu(gf)$, pentru orice f din $\mathcal{K}(T)$, se numeşte *produsul* lui μ cu g şi se notează $\lambda = g\mu$. Este o măsură de densitate g şi bază μ. (*I.C.*)

măsură Radon atomică v. **măsuri Radon difuze şi atomice**

măsură Radon concentrată pe o mulţime v. **măsură Radon definită prin densităţi**

măsură Radon definită prin densităţi Fie T un spaţiu local compact şi μ o măsură Radon pozitivă pe T. O funcţie $g: T \to F$ (unde F este spaţiu Banach sau $F = \overline{\mathbb{R}}$) se numeşte *funcţie local integrabilă în raport cu* μ (sau *funcţie local* μ-*integrabilă*) dacă g este μ-măsurabilă şi pentru orice compact $K \subset T$ avem $\int^* |g| \, \varphi_K \, d\mu < \infty$. Funcţiile din $\mathcal{L}^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sînt local μ-integrabile, ca şi funcţiile continue. Dacă g este o funcţie scalară, atunci g este local μ-integrabilă dacă şi numai dacă g^+ şi g^- sînt local μ-integrabile. Dacă g este o funcţie numerică pe T, local μ-integrabilă, se poate obţine măsura Radon ν pe X, definită prin $\nu(f) = \int fg \, d\mu$. Măsura ν se numeşte *măsură de densitate g şi bază* μ şi se notează $\nu = g\mu$. Este o **m.R.d.d.** (numerice). Dacă g este şi funcţie pozitivă, atunci pentru orice funcţie pozitivă pe T, eventual infinită, avem $\overline{\int}^* f \, d\nu = \overline{\int}^* fg \, d\mu$ (v. **integrala esenţială** (în raport cu o măsură Radon)). Revenind la cazul general, dacă G este un spaţiu topologic şi $f: T \to G$, avem: f este $g\mu$-măsurabilă dacă şi numai dacă restricţia lui f la mulţimea $\{t \in T \mid g(t) \neq 0\}$ este μ-măsurabilă. O funcţie $f: T \to F$, unde F este spaţiu Banach (sau $\overline{\mathbb{R}}$) este *esenţial* ν-*integrabilă* dacă şi numai dacă gf este esenţial μ-integrabilă şi în acest caz $\int f \, d\nu = \int gf \, d\mu$. Aici g este o funcţie local μ-integrabilă numerică pe T. Dacă $g_1\mu = g_2\mu$ rezultă că $g_1 = g_2$ local μ-a.p.t. Dacă g_1 şi g_2 sînt funcţii numerice pe T, g_2 este local $g_1\mu$-integrabilă dacă şi numai dacă $g_2 g_1$ este local μ-integrabilă. În acest caz $g_2(g_1\mu) = (g_2 g_1)\mu$. Pentru o mulţime $A \subset T$, φ_A este local μ-integrabilă dacă şi numai dacă A este μ-măsurabilă. În acest caz, pentru orice funcţie pozitivă f pe T, avem $\overline{\int}^* f \, d(\varphi_A \mu) = \overline{\int}^* f \varphi_A \, d\mu$.

Teorema Radon-Nikodym (pentru măsuri pozitive). Fie μ şi ν măsuri Radon pozitive pe T. Următoarele afirmaţii sînt echivalente: 1) ν este măsură de bază μ, *i.e.* există g local μ-integrabilă astfel ca $\nu = g\mu$; 2) Orice mulţime A care este local μ-neglijabilă este şi local ν-neglijabilă; 3) Pentru orice funcţie pozitivă f pe T cu suport compact care este μ-integrabilă şi ν-integrabilă şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît

$$\left(0 \leqslant h \leqslant f \quad \text{şi} \quad \int^* h \, d\mu \leqslant \delta\right) \Rightarrow \int^* h \, d\nu \leqslant \varepsilon;$$

3′) Pentru orice funcţie continuă şi pozitivă g care are suport compact şi pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încît, pentru orice funcţie continuă h,

$$\left(0 \leqslant h \leqslant g \quad \text{şi} \quad \int h \, d\mu \leqslant \delta\right) \Rightarrow \int h \, d\nu \leqslant \varepsilon;$$

3″) Pentru orice mulţime compactă $K \subset T$ şi orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta > 0$ astfel încît $(A \subset K$ şi $\mu^*(A) \leqslant \delta) \Rightarrow \nu^*(A) \leqslant \varepsilon$; 4) Măsura ν aparţine

benzii generate de măsura μ în spațiul liniar reticulat real $\mathcal{M}(T)$ al măsurilor Radon (reale) pe T.
Teorema Radon-Nikodym (pentru măsuri reale) Fie ν o măsură reală pe T și μ măsură Radon pozitivă pe T. Atunci ν este măsură de bază μ dacă și numai dacă ν aparține benzii generate de μ în $\mathcal{M}(T)$ ca mai sus. $(I.C.)$

măsură Radon dominată v. **măsură Radon vectorială**

măsură Radon indusă Fie T un spațiu local compact, o măsură Radon pozitivă pe T și X un subspațiu local compact al lui T (deci X are forma $X = A \cap B$, unde A este închisă și B este deschisă). Pentru orice funcție numerică g definită pe X care este continuă și cu suport compact, definim funcția g' pe T prin $g'(x) = g(x)$ dacă x este în X și $g'(x) = 0$ dacă x nu este în X. Se arată că g' este μ-integrabilă, ceea ce permite definirea măsurii Radon μ_X pe X prin $\mu_X(g) = \int g' \, d\mu$, care se numește **m.R.i.** de μ pe X. Dacă X este mulțime deschisă, **m.R.i.** μ_X coincide cu restricția lui μ la X. Dacă X este o parte închisă a lui T, atunci pentru orice măsură Radon pozitivă λ pe X există o măsură Radon pozitivă μ pe T astfel încît $\lambda = \mu_X$. $(I.C.)$

măsură Radon invariantă la dreapta (la stînga) v. **măsura (Radon) Haar**

măsură Radon majorată v. **măsură Radon vectorială**

măsură Radon produs I. *Produsul a două măsuri.* Fie E și F două spații local compacte și două măsuri Radon, anume λ pe E și μ pe F. Atunci există o unică măsură Radon ν pe $E \times F$ cu proprietatea că, pentru orice $g \in \mathcal{K}(E)$ și orice $h \in \mathcal{K}(F)$, avem

$$\int g(x)\, h(y)\, d\nu(x, y) = \left(\int g(x)\, d\lambda(x)\right)\left(\int h(y)\, d\mu(y)\right).$$

Am notat prin $\mathcal{K}(E)$ spațiul funcțiilor continue cu suport compact pe E etc. Măsura ν se numește **m.R.p.** a măsurilor λ și μ sau *produsul măsurilor Radon* λ și μ și se notează prin $\lambda \otimes \mu$. Calculul măsurii produs se face cu ajutorul integralelor iterate, anume pentru orice $h \in \mathcal{K}(E \times F)$, avem formula

$$\int h(x, y)\, d(\lambda \otimes \mu)\,(x, y) = \int d\mu(y) \int h(x, y)\, d\lambda(x) = \int d\lambda(x) \int h(x, y)\, d\mu(y).$$

Prima formula se explică astfel: dacă $\operatorname{supp}(h) \subset K \times L$ ($K \subset E$ compact și $L \subset F$ compact), atunci, pentru orice $y \in F$, funcția $x \mapsto h(x, y)$, notată φ_y, este în $\mathcal{K}(E)$, și putem defini funcția $u\colon F \to \Gamma$, $u(y) = \int \varphi_y(x)\, d\lambda(x)$. Atunci $u \in \mathcal{K}(E)$ și

$$\int h(x, y)\, d(\lambda \otimes \mu)\,(x, y) = \int u(y)\, d\mu(y).$$

II. *Produsul unui număr finit de măsuri.* Similar, dacă $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sînt spații local compacte iar $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ măsuri Radon (μ_i pe E_i), se arată că există o măsură Radon unică μ pe $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, notată prin $\mu = \mu_1 \otimes \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$, cu proprietatea că pentru orice funcții $h_1 \in \mathcal{K}(E_1)$, $h_2 \in \mathcal{K}(E_2), \ldots, h_n \in \mathcal{K}(E_n)$ avem

$$\int h_1(x_1)\, h_2(x_2) \ldots h_n(x_n)\, d\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \left(\int h_1(x_1)\, d\mu_1(x_1)\right)\left(\int h_2(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) \ldots \left(\int h_n(x_n)\, d\mu_n(x_n)\right)$$

Măsura μ se numește **m.R.p.** a măsurilor $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sau *produsul măsurilor* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Se vede că produsul este comutativ, în sensul că ordinea în care se face integrarea nu contează.

III. *Produsul unui număr infinit de măsuri.* Fie I o mulțime infinită, $\{E_i\}_{i \in I}$ o familie de spații compacte și E produsul spațiilor $\{E_i\}_{i \in I}$ (care este compact). Dacă $J \subset I$ și f este o funcție definită pe E, se spune că f nu depinde de variabilele cu indici care nu sînt în J dacă $f(y) = f(x)$ pentru orice x și y în E cu proprietatea că $\operatorname{pr}_J(x) = \operatorname{pr}_J(y)$. Aici $\operatorname{pr}_J\,(x = \{x_i\}_{i \in I}) = \{x_j\}_{j \in J}$ etc. Să considerăm pentru orice $i \in I$ o măsură Radon pozitivă cu $\mu_i(1) = 1$. Se arată că există o unică măsură Radon pozitivă μ pe E cu proprietatea că, pentru orice submulțime finită J a lui I și orice funcție f pe E continuă cu suport compact care nu depinde de variabilele cu indici care nu sînt în J, avem $\mu(f) = \mu_J(f_J)$. Aici f_J este funcția definită pe $\prod_{i \in J} E_i$ prin $f_J(x' = \{x_i\}_{i \in J}) = f(x)$ pentru orice x din E cu $\operatorname{pr}_J(x) = x'$. De asemenea, μ_J este **m.R.p.** $\mu_{i_1} \otimes \mu_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{i_n}$ dacă $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ (ordinea nu este esențială, v. punctul II).

IV. *Extensia.* Fie două măsuri Radon pozitive, anume μ pe T și μ' pe T', unde T, T' sînt spații local compacte. Vom extinde pe $\nu = \mu \otimes \mu'$. Fixăm t în T și observăm că aplicația $\pi_t : T' \to T \times T'$, $\pi_t(t') = (t, t')$, este continuă și μ'-proprie (v. **imagini de măsuri Radon**). Imaginea lui μ' prin π_t este $\pi_t(\mu') = \lambda'_t$, măsură Radon pozitivă pe $T \times T'$. Avem deci $\lambda'_t = \varepsilon_t \otimes \mu'$ și $\int f\, d\lambda'_t = \int f_t\, d\mu'$ (ultima expresie se notează și $\int f(t, t')\, d\mu'(t')$) pentru orice funcție numerică f cu suport compact pe $T \times T'$. Aici f_t este secțiunea funcției f prin t definită prin $f_t : T' \to \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, $f_t(t') = f(t, t')$. Familia $\{\lambda'_t\}_{t \in T}$ este μ-concordantă (v. **familie concordantă de măsuri Radon**) și avem $\nu = \int \lambda'_t\, d\mu(t)$ (similar, $\nu = \int \lambda_{t'}\, d\mu(t')$, cu notații evidente). O funcție $f : T \times T' \to F$ (F este spațiu Banach sau $\overline{\mathbb{R}}$), este λ'_t-integrabilă dacă și numai dacă f_t este μ'-integrabilă și atunci $\int f_t\, d\mu' = \int f\, d\lambda'_t$.

Teorema lui Fubini (pentru măsuri Radon). Fie $f\colon T \times T' \to F$ (unde $F = \overline{\mathbb{R}}$ sau F este spațiu Banach) o funcție $\nu = \mu \otimes \mu'$-integrabilă. Atunci, pentru μ-aproape toți t din T, aplicația $t \mapsto \int f(t, t')\, d\mu'(t')$ este μ-integrabilă. Integrala sa $\left(\text{notată ca o integrală iterată prin } \int d\mu(t) \int f(t, t')\, d\mu'(t')\right)$ are proprietatea că este egală cu $\int f(t, t')\, d\nu(t, t')$. Așadar,

$$\int d\mu(t) \left(\int f(t, t')\, d\mu'(t')\right) = \iint f(t, t') \;\; d\mu(t)\, d\mu'(t'). \quad (I.C.)$$

măsură Radon vectorială Fie T un spațiu local compact, $\mathcal{K}(T)$ spațiul funcțiilor scalare continue pe T care au suport compact. Pentru orice compact $K \subset T$ notăm cu $\mathcal{K}(T, K)$ spațiul vectorial al elementelor din $\mathcal{K}(T, K)$ care au suportul inclus în K. Fie F un spațiu local convex separat. O aplicație liniară și continuă $m\colon \mathcal{K}(T) \to F$ se numește **m.R.v.** (mai precis, *măsura Radon pe T cu valori în F*). Așadar, o aplicație liniară $m: \mathcal{K}(T) \to F$ este **m.R.v.** dacă și numai dacă restricțiile sale la toate spațiile $\mathcal{K}(T, K)$ sînt continue. Pentru orice z' din F', **m.R.v.** generează măsura Radon scalară $z' \circ m$. Dacă m este o **m.R.v.** și g este o funcție scalară continuă pe T, **m.R.v.** $gm: \mathcal{K}(T) \to F$, definită prin $gm(f) = m(gf)$, se numește *produsul* **m.R.v.** *cu funcția g*. Fie acum q o seminormă inferior semicontinuă pe F. O **m.R.v.** $m: \mathcal{K}(T) \to F$ se numește *q-majorată* (sau *q-dominată*) dacă există o măsură Radon pozitivă μ pe T astfel încît $|z' \circ m| \leq \mu$ pentru orice z' din $A'q = \{z' \in F' \mid |z'(x)| \leq q(x)$ pentru orice x din $F\}$. Se spune în acest caz că m este q-majorată (sau q-dominată) de μ. Dacă F este real și m este q-majorată, punem $q(m) = \sup\{|z' \circ m| \mid z' \in A'q\}$. Superiorul se calculează în spațiul ordonat al măsurilor Radon reale pe T. O **m.R.v.** $m: \mathcal{K}(T) \to F$ se numește *majorată* (sau *dominată*) dacă m este q-majorată pentru orice seminormă inferior semicontinuă q pe F. Dacă F este spațiu normat, atunci m este majorată dacă și numai dacă există o măsură Radon pozitivă μ pe T astfel încît $|z' \circ m| \leq \mu$ pentru orice z' din F' cu $\|z'\| \leq 1$, *i.e.* dacă $\|m(f)\| \leq \mu(|f|)$ pentru orice f din $\mathcal{K}(T)$. Notăm în acest caz $|m| = \sup\{|z' \circ m| \mid \|z'\| \leq 1\}$. Dacă F este finit-dimensional orice măsură Radon $m: \mathcal{K}(T) \to F$ este majorată. Fie f o funcție scalară pe T și m o măsură Radon cu valori în F. Vom spune că f este *esențial integrabilă în raport cu m* dacă pentru orice z' din F', funcția f este esențial integrabilă în raport cu $|z' \circ m|$. În acest caz, integrala lui f în raport cu m este aplicație liniară scalară $u: F' \to \Gamma$, $u(z') = \int f \, d(z' \circ m)^+ - \int f \, d(z' \circ m)^-$ (dacă $\Gamma = \mathbb{R}$) sau $u(z') = \sum_{k=0}^{3} i^k \int f \, d(z' \circ m)_k$, unde $z' \circ m = \sum_{k=0}^{3} i^k (z' \circ m)_k$ este descompunerea lui $z' \circ m$ în combinație liniară de măsuri pozitive. Vom scrie $u = \int f \, dm$ sau $u = \int f(x) \, dm(x)$. Așadar, $\int f \, dm \in F'^*$. Dacă $m(A)$ este relativ slab compactă în F, unde $A = \{f \in \mathcal{K}(T) \mid \|f\| \leq 1\}$, atunci $\int f \, dm \in F$ pentru orice f esențial m-integrabilă și mărginită. Dacă pentru orice compact $K \subset T$ avem că $m(A_k)$ este relativ slab compactă în F, unde A_k este $\{f \in \mathcal{K}(T, K) \mid \|f\| \leq 1\}$, atunci $\int f \, dm \in F$ pentru orice f esențial m-integrabilă, mărginită și cu suport compact. În fine, dacă F este semireflexiv, atunci $\int f \, dm \in F$ pentru orice funcție esențial m-integrabilă f. Vom considera acum o măsură Radon pozitivă μ pe T și o **m.R.v.** $m: \mathcal{K}(T) \to F$. Dacă există o funcție $f: T \to F$ care este *scalar local integrabilă* în raport cu μ (*i.e.* $z' \circ f$ este local integrabilă în raport cu μ pentru orice z' din F') și astfel încît $m(g) = \int gf \, d\mu$ pentru orice g din $\mathcal{K}(T)$, vom spune că m este **m.R.v.** *de bază* μ (*și densitate f*). Funcția f se numește *densitatea lui m în raport cu* μ. Notăm $m = f\mu$. De exemplu, dacă $f: T \to F$ este scalar local μ-integrabilă și astfel încît $\int gf \, d\mu \in F$ pentru orice g din $\mathcal{K}(T)$, atunci $m: \mathcal{K}(T) \to F$ definită prin $m(g) = \int gf \, d\mu$ este măsură

de bază μ și densitate f. Pentru o funcție scalară g pe T, a spune că g este $f\mu$-integrabilă este totuna cu a spune că gf este scalar μ-integrabilă, *i.e.* $z' \circ (gf)$ este μ-integrabilă pentru orice z' din F'. Dacă $m: \mathcal{K}(T) \to F$ este măsură Radon de bază μ, atunci m este **m.R.v.** care are în mod scalar baza μ (*i.e.* $z' \circ m$ este măsură Radon scalară de bază μ pentru orice z' din F') anume avem $m = f\mu \Rightarrow z' \circ m = (z' \circ f)\mu$. Reciproca este falsă. Orice **m.R.v.** m pe T cu valori într-un spațiu normat F care este majorată, are în mod scalar baza $|m|$. (*I. C.*)

măsură reală v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn, măsură vectorială**

măsură regulată Fie (T, τ) un spațiu topologic și $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T. Fie, de asemenea, o măsură aditivă $m: \mathcal{C} \to X$, unde X este un spațiu Banach. Luînd în particular $X = \mathbb{R}$, în acest cadru sînt cuprinse și măsurile aditive pozitive și finite. Se spune că o mulțime $A \in \mathcal{C}$ este *regulată* (relativ la m) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă $K \subset A$ și o mulțime deschisă $G \supset A$ cu proprietatea următoare: (R) Oricare ar fi o altă mulțime $A' \in \mathcal{C}$ cu $K \subset A' \subset G$, avem $\|m(A) - m(A')\| < \varepsilon$. În loc de (R) putem scrie: (R') Oricare ar fi o altă mulțime $A' \in \mathcal{C}$ cu $A' \subset G \setminus K$ avem $\|m(A')\| < \varepsilon$. Se spune că $A \in \mathcal{C}$ este *regulată la stînga* (relativ la m) sau este *regulată interior* (relativ la m) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă $K \subset A$ cu proprietatea: (LR) Oricare ar fi o altă mulțime $A' \in \mathcal{C}$ cu $K \subset A' \subset A$ avem $\|m(A) - m(A')\| < \varepsilon$. În loc de (LR) putem scrie: (LR') Oricare ar fi o altă mulțime $A' \in \mathcal{C}$, cu $A' \subset A \setminus K$, avem $\|m(A')\| < \varepsilon$. Se spune că $A \in \mathcal{C}$ este *regulată la dreapta* (relativ la m) sau este *regulată exterior* (relativ la m) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime deschisă $G \supset A$ cu proprietatea: (RR) Oricare ar fi o altă mulțime $A' \in \mathcal{C}$ cu $A \subset A' \subset G$, avem $\|m(A) - m(A')\| < \varepsilon$. În loc de (RR) putem scrie: (RR') Oricare ar fi o altă mulțime $A' \in \mathcal{C}$ cu $A' \subset G \setminus A$ avem $\|m(A')\| < \varepsilon$. Se arată că $A \in \mathcal{C}$ este regulată dacă și numai dacă este regulată și la stînga și la dreapta. Dacă orice $A \in \mathcal{C}$ este mulțime regulată, vom spune că măsura m este o **m.r.** Noțiunile de **m.r.** *la stînga* (sau **m.r.** *interior*), **m.r.** *la dreapta* (sau **m.r.** *exterior*) sînt clare. Vom nota $\mathcal{K}$ clanul generat de mulțimile compacte, $\mathcal{K}_0$ clanul generat de mulțimile compacte G_δ, $\mathcal{B}$ semitribul mulțimilor boreliene relativ compacte, $\mathcal{B}_0$ semitribul mulțimilor Baire relativ compacte. Atunci, dacă $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ sau $\mathcal{C} = \mathcal{K}_0$, o măsură aditivă $m: \mathcal{C} \to X$ este regulată dacă și numai dacă este regulată la stînga sau este regulată la dreapta. Fie acum o măsură aditivă pozitivă și finită $m: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$. Dacă $\mathcal{C} = \mathcal{K}_0$ și m este numărabil aditivă rezultă că m este regulată. Dacă $\mathcal{C} \supset \mathcal{K}$, atunci o mulțime $A \in \mathcal{C}$ este regulată la stînga dacă și numai dacă $m(A) = \sup\{m(K) \mid K \in \mathcal{K}, K \subset A\}$. Dacă $A \in \mathcal{C}$ și pentru orice mulțime deschisă U cu proprietatea $U \supset A$ există o mulțime deschisă $G \in \mathcal{C}$ cu $A \subset G \subset U$, mulțimea A este regulată la dreapta dacă și numai dacă $m(A) = \inf\{m(G) \mid G$ este deschisă, $G \in \mathcal{C}$, $G \supset A\}$. Dacă $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ sau $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, m este regulată dacă și numai dacă este îndeplinită una din următoarele condiții echivalente: a) Pentru orice $A \in \mathcal{C}$ avem $m(A) = \sup\{m(K) \mid K$ este compactă, $K \subset A\}$; b) Pentru orice $A \in \mathcal{C}$ avem $m(A) = \inf\{m(G) \mid G$ este deschisă, $G \in \mathcal{C}$, $G \supset A\}$. În fine, dacă $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ și m este numărabil aditivă (*i.e.* m este măsură boreliană) rezultă că m are proprietatea sumei directe. În continuare, vom considera un spațiu Banach X și $m: \mathcal{C} \to X$ aditivă. Se presupune în plus că m are variație finită $|m|: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$. Atunci, dacă $|m|$ este regulată, rezultă că m este regulată. Dacă $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ sau $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, are loc și reciproca: m este regulată dacă și numai dacă $|m|$ este regulată. În cazul particular, cînd T este compact, $\mathcal{C}$ algebră care conține toate mulțimile deschise, m este cu variație mărginită și regulată, rezultă că m este numărabil aditivă (*teorema lui Alexandrov*). Un rezultat cu caracter de reciprocă este următorul: Dacă $m: \mathcal{B}_0 \to X$ este numărabil aditivă rezultă că m este regulată (*teorema Dincu-*

leanu-Kluvanek). Fie X un spațiu Banach. Dacă $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}_0$, unde $\mathcal{C}$ este un clan de părți ale lui T și $m: \mathcal{C} \to X$ o măsură aditivă cu variație finită, atunci m este numărabil aditivă dacă și numai dacă m este regulată. Dacă $m: \mathcal{B} \to X$ este numărabil aditivă cu variație finită și dacă restricția lui m la $\mathcal{K}$ este regulată, atunci m este regulată. Fie $m_0: \mathcal{B}_0 \to X$ o măsură Baire cu variație finită $|m_0|$. Atunci m_0 se extinde în mod unic la o măsură boreliană regulată cu variație finită $m: \mathcal{B} \to X$; în plus, $|m|$ extinde pe $|m_0|$. Vom considera acum o măsură boreliană $m: \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ regulată. Fie și E un spațiu metric.

Teorema lui Luzin. O funcție $f: T \to E$ este m-măsurabilă dacă și numai dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset T$ și orice $\varepsilon > 0$ există o altă mulțime compactă $K' \subset K$ cu $m(K \setminus K') < \varepsilon$ și astfel încît restricția lui f la K' este continuă.

Din nou $m: \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ este o măsură boreliană regulată. Fie $1 \leqslant p < \infty$ și X un spațiu Banach. Atunci spațiul vectorial al tuturor funcțiilor etajate de forma $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$, unde $x_i \in X$ și A_i sînt sau mulțimi compacte G_δ, sau mulțimi deschise, relativ compacte F_σ este dens în $\mathcal{L}^p_X(m)$. De asemenea, spațiul $\mathcal{K}_X(T) = \{f: T \to X \mid f$ este continuă cu suport compact$\}$ este dens în $\mathcal{L}^p_X(m)$. Ex.: 1° Fie Ω cel mai mic ordinal nenumărabil. Luăm $T = \{\alpha \mid \alpha$ este ordinal $\alpha \leqslant \Omega\}$. Drept bază de deschise pe T luăm toate intervalele de forma $(a, b] = \{x \mid x$ ordinal, $a < x \leqslant b\}$, unde a, b sînt ordinale din T, precum și mulțimea $\{0\}$. Cu topologia astfel definită T devine spațiu compact separat. Fie $\mathcal{B}$ tribul borelienelor lui T. Definim măsura boreliană $\mu: \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ prin $\mu(A) = 1$ dacă A include o mulțime nemărginită și închisă și $\mu(A) = 0$ dacă nu există o mulțime nemărginită și închisă inclusă în A. Atunci A nu este regulată. 2° Măsura Lebesgue pe orice mulțime este regulată. (*I.C.*)

măsură regulată (față de o clasă semicompactă) v. **măsură pe spațiu produs**

măsură scalară v. **măsură vectorială**

măsură slab non-atomică v. **atom al unei măsuri**

măsură slab numărabil aditivă v. **măsură vectorială**

măsură spectrală Fie X un spațiu Banach complex nenul. Un *proiector* (o *proiecție*) este un operator $E \in \mathcal{L}(X)$ cu proprietatea că este idempotent, *i.e.* $E^2 = E$. Am notat $\mathcal{L}(X) = \{U: X \to X \mid U$ este liniar și continuu$\}$ normat cu norma obișnuită. Orice proiector E descompune spațiul X în suma directă a două subspații închise X_1 și X_2, anume: $X_1 = \{x \in X \mid E(x) = 0\}$ și $X_2 = \{x \in X \mid E(x) = x\}$. Se scrie $X = X_1 \oplus X_2$, ceea ce înseamnă că orice element x din X se reprezintă în mod unic sub forma $x = x_1 + x_2$, unde $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$ și, în plus, pentru orice x din X, avem $E(x) = x_2$. Notăm cu $\mathcal{P}(X)$ mulțimea proiectorilor lui X. Fie $\mathcal{B}$ borelienele planului complex $\mathbb{C}$. O măsură aditivă $m: \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ se numește **m.s.** dacă are proprietățile: a) $m(A \cap B) = m(A)\,m(B)$ pentru orice A și B în $\mathcal{B}$ (rezultă automat că $m(A)\,m(B) = m(B)\,m(A)$ pentru orice A și B în $\mathcal{B}$); b) $m(\mathbb{C}) = I$, unde $I = X \to X$ este identitatea, *i.e.* $I(x) = x$ pentru orice x în X. Dacă, în plus, pentru orice x în X și orice x' în X', dualul lui X, măsura aditivă scalară $m(x, x'): \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, definită prin $m(x, x')(A) = x'(m(A)(x))$, este numărabil aditivă, se spune că este **m.s.** *simplu numărabil aditivă* (rezultă că m este mărginită). Fie acum $T \in \mathcal{L}(X)$. Se numește *rezoluție a identității* pentru T o **m.s.** simplu numărabil aditivă $E: \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ care are proprietățile: a) $E(A)T = TE(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{B}$; b) $\sigma(T_A) \subset \bar{A}$ pentru orice $A \in \mathcal{B}$. Aici: 1) Pentru orice operator $U \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(U)$ este *spectrul* lui U, *i.e.* $\sigma(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I$ nu este inversabil$\}$. Se arată că $\sigma(U)$ este mulțime compactă nevidă; 2) T_A este *restricția* lui T la subspațiul $E(A)(X) \subset X$, *i.e.* este operatorul $T_A: E(A)(X) \to E(A)(X)$, definit prin $T_A(x) = T(x)$, în conformitate cu condiția a) de mai sus; 3) $\bar{A}$ este aderența lui A. Se numește *operator spectral* (în sensul lui Dunford) un operator $T \in \mathcal{L}(X)$ pentru care există o rezoluție a identității. Se arată că un operator spectral T admite o unică rezoluție a identității E, numită *rezoluția identității* pentru T. În plus, se arată că pentru orice $A \in \mathcal{B}$ cu $A \cap \sigma(T) = \emptyset$ avem $E(A) = 0$. Ex.: Dacă $X = C([0, 1]) = \{f: [0, 1] \to \mathbb{C} \mid f$ este continuă$\}$ și dacă $K: [0, 1]^2 \to \mathbb{C}$ este o funcție continuă, operatorul $T: X \to X$, $T(f) = g$, unde $g(s) = f(s) + \int_0^1 K(s, t) f(t)\,\mathrm{d}t$ este spectral. Fie, în continuare, T un operator spectral, E rezoluția identității pentru T și $f: \sigma(T) \to \mathbb{C}$ o funcție total măsurabilă în raport cu T, *i.e.* o funcție care este limită uniformă a unui șir de funcții $\mathcal{B}(T)$-etajate, unde $\mathcal{B}(T) = \{A \in \mathcal{B} \mid A \subset \sigma(T)\}$. De exemplu, funcțiile continue pe $\sigma(T)$ sînt total măsurabile în raport cu T. Atunci putem defini $\int f(z)\,\mathrm{d}E(\cdot)(z)$. Întîi, dacă g este $\mathcal{B}(T)$-etajată, $g = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} z_i$, unde $A_i \in \mathcal{B}(T)$ și $z_i \in \mathbb{C}$, punem $\int g(z)\,\mathrm{d}E(\cdot)(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i m(A_i)$. Apoi, dacă f este total măsurabilă în raport cu T, punem $\int f(z)\,\mathrm{d}E(\cdot)(z) = \lim_n \int f_n(z)\,\mathrm{d}E(\cdot)(z)$, unde $\{f_n\}_n$ este un șir uniform convergent la f de funcții $\mathcal{B}(T)$-etajate (se arată că limita există în $\mathcal{L}(X)$ și este coerent definită). Mai mult, dacă $U \subset \mathbb{C}$ este o mulțime cu proprietatea că $U \supset \sigma(T)$ și dacă $f: U \to \mathbb{C}$ este o funcție care are proprietatea că restricția sa g la $\sigma(T)$ este total măsurabilă în raport cu T, definim $\int f(z)\,\mathrm{d}E(\cdot)(z) = \int g(z)\,\mathrm{d}E(\cdot)(z)$. Se spune că un operator $S \in \mathcal{L}(X)$ este *operator scalar* (în sensul lui Dunford) dacă S este spectral și dacă $S = \int z\,\mathrm{d}E(\cdot)(z)$, unde E este rezoluția identității pentru S. Aici am integrat deci funcția continuă $f: \sigma(S) \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$. Un operator $N \in \mathcal{L}(X)$ se numește *cvasinilpotent* dacă $\lim_n \|N^n\|^{1/n} = 0$ (echivalent, dacă $\sigma(N) = \{0\}$). Se arată că un operator $T \in \mathcal{L}(X)$ este spectral dacă și numai dacă el este de forma $T = S + N$, unde S este scalar și N este cvasinilpotent. Scrierea $T = S + N$, numită *descompunerea canonică* a lui T, este unică. Se arată că în acest caz $\sigma(T) = \sigma(S)$ și rezoluția identității pentru T coincide cu rezoluția identității pentru S. Să observăm că pentru orice $T \in \mathcal{L}(X)$, $M(T) = \{f: \sigma(T) \to \mathbb{C} \mid f$ este total măsurabilă în raport cu $T\}$ este o algebră Banach cu norma $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in \sigma(T)\}$ și operațiile naturale. Mai mult, $\mathcal{B}(T)$ este $\mathbb{C}^*$-algebră cu involuția $f \mapsto f^*$, unde $f^*(z) = \overline{f(z)}$ pentru orice z în $\sigma(T)$. Acum vom considera că X este un spațiu Hilbert.

Teorema de reprezentare spectrală a operatorilor normali. Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ un operator normal. Atunci: 1) Operatorul T este spectral; 2) Dacă $E: \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ este rezoluția identității pentru T, pentru orice $A \in \mathcal{B}$, $E(A)$ este operator autoadjunct; 3) Aplicația $H: M(T) \to \mathcal{L}(X)$, definită prin $H(f) = \int f(z)\,\mathrm{d}E(\cdot)(z)$, este morfism de C*-algebre (*i.e.* este liniară, multiplicativă şi $H(f^*) = (H(f))^*$, adjunctul lui $H(f)$). În plus, $H(\widetilde{1}) = I$ şi $H(\mathrm{id}) = T$, *i.e.* $\int z\,\mathrm{d}E(\cdot)(z) = T$ (aici $\widetilde{1}$ este funcţia identic egală cu 1 pe $\sigma(T)$ iar id funcţia definită prin $\mathrm{id}(z) = z$ pentru orice z din $\sigma(T)$); 4) Pentru orice x din X şi orice f din $M(T)$ avem $\|H(f)(x)\| = \int |f(z)|^2\,\mathrm{d}\lambda(z)$, unde $\lambda: \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, $\lambda(A) = (E(A)(x) \mid x)$; 5) Dacă $\{f_n\}$ este un şir de elemente din $M(T)$ care este mărginit în $M(T)$ şi converge punctual la o funcţie f din $M(T)$, atunci $H(f_n) \to H(f)$ în $\mathcal{L}(X)$. Dacă X este un spaţiu finit-dimensional, orice $T \in \mathcal{L}(X)$ este spectral. (*I.C.*)

măsură tare aditivă v. **măsură vectorială**

măsură vectorială O funcţie de mulţime $m: \mathcal{A} \to X$, unde $\mathcal{A}$ este un clan de părţi ale unei mulţimi nevide T iar X un semigrup topologic comutativ cu element unitate 0, se numeşte *măsură numărabil aditivă* (cu valori în semigrupul X), sau *măsură σ-aditivă* (cu valori în semigrupul X), sau *măsură cu valori în X* dacă $m(\emptyset) = 0$ şi m este funcţie de mulţime numărabil aditivă. Vom considera cazul cînd X este un grup topologic comutativ, precum şi alte cazuri particulare. Dacă X este separat, atunci proprietatea lui m de a fi numărabil aditivă implică $m(\emptyset) = 0$. O măsură cu valori într-un grup topologic comutativ este funcţie de mulţime aditivă (*măsură aditivă*), finit aditivă. (*măsură finit aditivă*), substractivă, continuă superior şi continuă inferior. În particular, putem considera măsuri cu valori într-un spaţiu local convex, măsuri cu valori într-un spaţiu Banach. Cele mai importante măsuri cu valori într-un grup topologic comutativ sînt **m.v.** Vom considera că X este un spaţiu Banach. Se numeşte **m.v.** (cu valori în X) orice funcţie de mulţime numărabil aditivă $m: \mathcal{A} \to X$. Sin.: *măsură numărabil aditivă* (cu valori în X), *măsură σ-aditivă* (cu valori în X), **m.v.** *numărabil aditivă*, **m.v.** *σ-aditivă*. O familie $\{m_i\}_{i\in I}$ de **m.v.** $m_i: \mathcal{A} \to X$ se numeşte *familie uniform numărabil aditivă* (sau *familie uniform σ-aditivă*) dacă pentru orice şir $\{A_n\}_n$ de mulţimi mutual disjuncte A_n din $\mathcal{A}$ cu $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ convergenţa seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} m_i(A_n)$ la $m_i(A)$ este uniformă în raport cu $i \in I$, *i.e.* pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît pentru orice $k \geq k(\varepsilon)$ şi orice $i \in I$ avem $\left\|\sum_{n=1}^{k} m_i(A_n) - m_i(A)\right\| < \varepsilon$. O m.v. m este funcţie de mulţime aditivă, finit aditivă, substractivă, continuă superior şi continuă inferior; dacă $\mathcal{A}$ este semitrib, atunci m este funcţie de mulţime local mărginită, iar dacă $\mathcal{A}$ este trib, atunci m este funcţie de mulţime mărginită avînd mulţimea valorilor relativ slab compactă. În plus, dacă $\mathcal{A}$ este trib, există o mulţime $T' \in \mathcal{A}$ cu proprietatea că pentru orice $A \in \mathcal{A}$ avem $m(A) = m(A \cap T')$ (*teorema lui Kluvanek*). Mulţimea T' se numeşte *mulţimea lui Kluvanek* a măsurii m (nu este unică!). Dacă $\{m_n\}_n$ este un şir de **m.v.** $m_n: \mathcal{A} \to X$, unde $\mathcal{A}$ este trib şi dacă pentru orice A din $\mathcal{A}$ există $\lim_n m_n(A) = m(A)$, atunci funcţia de mulţime astfel definită $m: \mathcal{A} \to X$ este **m.v.**, *i.e.* este numărabil aditivă (*teorema lui Nikodym*). Fie $m: \mathcal{A} \to X$ o **m.v.** (numărabil aditivă) Deoarece m este numărabil aditivă, este clar că m este şi măsură slab numărabil aditivă, *i.e.* pentru orice $x' \in X^*$, măsura scalară $x' \circ m$ este numărabil aditivă. Dacă $\mathcal{A}$ este trib funcţionează şi reciproca, deci: Fie $\mathcal{A}$ un trib şi $m: \mathcal{A} \to X$ o măsură aditivă. Atunci m este numărabil aditivă dacă şi numai dacă m este slab numărabil aditivă (*teorema lui Pettis*). În cazul cînd spaţiul Banach X este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, o măsură $m: \mathcal{A} \to X$ se mai numeşte

măsură scalară. Similar, avem noţiunea de *măsură scalară aditivă* (echivalentă cu noţiunea de *măsură scalară finit aditivă*). Dacă $X = \mathbb{R}$, avem o *măsură reală*, respectiv *măsură reală aditivă* sau *măsură reală finit aditivă*. Dacă $X = \mathbb{C}$, avem o *măsură complexă*. Orice măsură complexă se scrie sub forma $m = m_1 + im_2$, unde m_1 şi m_2 sînt măsuri reale (m_1 se numeşte *partea reală* a lui m, iar m_2 *partea imaginară*). Să considerăm din nou un clan $\mathcal{A}$ de părţi ale lui T şi un spaţiu Banach X. O măsură aditivă $m: \mathcal{A} \to X$ se numeşte *măsură s-aditivă* (sau *măsură tare aditivă*) dacă are proprietatea: pentru orice şir $\{A_n\}_n$ de mulţimi mutual disjuncte $A_n \in \mathcal{A}$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ este comutativ convergentă în spaţiul Banach $\left(\text{i.e. seria } \sum_{n=1}^{\infty} m(A_{\pi(n)}) \text{ este convergentă pentru orice bijecţie } \pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\right)$. Dacă $\mathcal{A}$ este trib şi m este numărabil aditivă, atunci m este şi s-aditivă. O familie $\{m_i\}_{i\in I}$ de **m.v.** aditive $m_i: \mathcal{A} \to X$ se numeşte *familie uniform s-aditivă* (sau *familie uniform tare aditivă*) dacă, pentru orice şir $\{A_n\}_n$ de mulţimi mutual disjuncte $A_n \in \mathcal{A}$, avem $\lim_k \left(\sum_{n=k}^{\infty} m_i(A_n)\right) = 0$ uniform în raport cu $i \in I$, *i.e.* pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k(\varepsilon)$ natural astfel încît oricare ar fi k natural, $k \geq k(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $i \in I$ avem $\left\|\sum_{n=k}^{\infty} m_i(A_n)\right\| < \varepsilon$. Pentru o măsură aditivă $m: \mathcal{A} \to X$ (unde $\mathcal{A}$ este clan iar X spaţiu Banach) următoarele afirmaţii sînt echivalente: 1) Măsura m este s-aditivă; 2) Familia $\{x' \circ m \mid x' \in X', \|x'\| \leq 1\}$ este uniform s-aditivă; 3) Pentru orice şir $\{A_n\}_n$ de mulţimi mutual disjuncte, $A_n \in \mathcal{A}$, avem $\lim m(A_n) = 0$; 4) Pentru orice şir monoton de mulţimi $\{A_n\}_n$ cu $A_n \in \mathcal{A}$ există $\lim m(A_n)$; 5) Măsura m este mărginită şi pentru orice şir monoton de mulţimi $\{A_n\}_n$ cu $A_n \in \mathcal{A}$ există limita slabă a şirului $\{m(A_n)\}_n$ (*i.e.* există x în X cu proprietatea că pentru orice x' din X' avem $\lim x'(m(A_n)) = x'(x)$); 6) Mulţimea $\{m(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ este relativ slab compactă. Dacă, în plus, măsura m este slab numărabil aditivă, atunci afirmaţiile 1)—6) sînt echivalente şi cu afirmaţia: 7') Dacă $\mathcal{T}$ este tribul generat de $\mathcal{A}$, atunci există o extensie (în mod necesar unică) a lui m la $\mathcal{T}$, *i.e.* o măsură numărabil aditivă $n: \mathcal{T} \to X$ cu proprietatea că $n(A) = m(A)$ pentru orice A din $\mathcal{A}$. Echivalenţa 1) $\Leftrightarrow$ 7') pentru m slab numărabil aditivă se numeşte *teorema de extindere Carathéodory-Hahn-Kluvanek* (sau *teorema de extindere a lui Kluvanek*). Unii autori o numesc şi *teorema de extindere a lui Hahn* (ca în cazul măsurilor scalare). Ex.: Fie $T = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ algebra mulţimilor măsurabile Lebesgue incluse în $[0, 1]$, λ măsura Lebesgue pe $[0, 1]$ şi $1 \leq p \leq \infty$. Vom considera măsura $m_p: \mathcal{A} \to L^p(\lambda)$ definită prin $m_p(A) = \widetilde{\varphi}_A$ (v. **spaţii** L^p). Măsura m_p este aditivă. Dacă $1 \leq p < \infty$, rezultă că m_p este numărabil aditivă, iar dacă $p = \infty$ măsura m_p nu este nici s-aditivă. (*I.C.*)

măsuri afine şi măsuri cilindrice Fie E un spaţiu liniar topologic. O aplicaţie $f: E \to \mathbb{R}$ se numeşte *afină* dacă există x' în E^* (dualul algebrico-topologic al lui E) şi a în $\mathbb{R}$ astfel încît $f(x) = x'(x) + a$ pentru orice x în E. Notăm cu $b(E)$ mulţimea tuturor funcţiilor continue de forma $f = \sup A - \sup B$, unde A, B sînt mulţimi finite de funcţii afine pe E (superiorul se consideră în laticea tuturor funcţiilor reale continue pe E înzestrată cu ordinea naturală dată de $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ pentru orice x în E). Atunci $b(E)$ este spaţiu liniar reticulat cu această ordine. Se numește *măsură afină* pe E orice funcțională liniară pozitivă $T: b(E) \to \mathbb{R}$. Se numește *măsură cilindrică* orice măsură afină T cu proprietatea următoare: pentru orice spațiu liniar finit-dimensional F și orice aplicație liniară și continuă $V: E \to F$, aplicația $V(T): b(F) \to \mathbb{R}$, definită prin $V(T)(g) = T(g \circ V)$, este o integrală Daniell. Se arată că dacă E este un spațiu prehilbertian real, atunci există o măsură T cilindrică nenulă, invariantă la rotație pe E, *i.e.* pentru orice f din $b(E)$ și orice rotație u pe E avem $T(f) = T(f \circ u)$, ținînd seama că $f \circ u \in b(E)$). Fie din nou E un spațiu prehilbertian real. Pentru orice subspațiu finit-dimensional $F \subset E$ și pentru orice măsură afină T pe E, putem considera proiecția lui T pe F, notată T_F. Anume T_F este măsura afină pe F definită prin $T_F(f) = T(f \circ p_F)$ pentru orice f din $b(F)$. Aici $p_F: E \to F$ este proiectorul hilbertian atașat lui F. În continuare vom da definiția lui Gelfand a măsurilor cilindrice (privite ca funcție de mulțime). Considerăm un spațiu Hilbert real E și pentru orice subspațiu finit-dimensional F al lui E considerăm proiectorul canonic autoadjunct p_F atașat lui F. Se numește *mulțime cilindrică* o mulțime de forma $p_{F^{-1}}(B)$, unde $B \subset F$ este o mulțime boreliană în F. Mulțimile cilindrice formează un clan $\mathcal{C}$ de părți ale lui E. Prin definiție, o măsură pozitivă finit aditivă $m: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ se numește măsură cilindrică dacă restricția lui m la orice $\mathcal{C}_F$ este numărabil aditivă și $m(E) = 1$. Am notat, pentru un subspațiu finit-dimensional $F \subset E$, cu $\mathcal{C}_F$ tribul mulțimilor cilindrice de forma $p_F^{-1}(B)$, cînd B parcurge borelienele lui F. Într-un anume sens, această definiție este echivalentă cu prima. (*I.C.*)

măsuri echivalente v. **continuitate absolută**

măsuri mutual disjuncte v. **spațiul reticulat al măsurilor cu semn**

măsuri pozitive și măsuri cu semn Fie X una din mulțimile $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\overline{\mathbb{R}}\setminus\{-\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}\setminus\{\infty\}$ și $\mathcal{A}$ un clan de părți ale lui T. Folosim terminologia și notațiile de la **funcție de mulțime.**

I. O funcție $m: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ care are proprietățile $m(\emptyset) = 0$ și m este funcție de mulțime numărabil aditivă se numește *măsură pozitivă* sau *măsură cu valori pozitive extinse* sau, pur și simplu, *măsură*. Sin.: *măsură numărabil aditivă, măsură pozitivă numărabil aditivă, măsură σ-aditivă, măsură pozitivă σ-aditivă.* (Unii autori numesc măsura definită aici *premăsură* și numesc *măsură* o premăsură $m: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ pentru care $\mathcal{A}$ este trib.) O măsură $m: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietățile: a) $\mathcal{A}$ este algebră; b) m ia valori în $[0, 1]$; c) $m(T) = 1$, se numește *măsură probabilistică* (sau *probabilitate*). O măsură pozitivă este funcție de mulțime aditivă (măsură aditivă), finit aditivă (măsură finit aditivă), crescătoare, subaditivă, finit subaditivă, numărabil subaditivă, substractivă, continuă superior. Dacă $A \in \mathcal{A}$ are proprietatea $m(A) < \infty$, atunci restricția lui m la A, numită uneori și *măsura indusă de m pe* $\mathcal{A}$, este continuă inferior. O măsură pozitivă care, ca funcție de mulțime, este funcție de mulțime finită, se numește *măsură finită*. O măsură pozitivă m se numește *măsură total σ-finită* dacă există un șir de mulțimi $\{A_n\}_n$ format cu mulțimi $A_n \in \mathcal{A}$ astfel încît $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ și $m(A_n) < \infty$ pentru orice n. (Unii autori numesc o astfel de măsură *măsură σ-finită*.) Numim *măsură σ-finită* o măsură m cu proprietatea că pentru orice $A \in \mathcal{A}$ există un șir $\{A_n\}_n$ format cu mulțimi $A_n \in \mathcal{A}$ astfel încît $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ și $m(A_n) < \infty$ pentru orice n. Ex.: Fie T o mulțime nevidă și $\mathcal{A}$ mulțimea părților lui T. Definim *măsura discretă* (sau *măsura cardinal*) $m: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ prin $m(A) = \operatorname{card}(A) =$ numărul elementelor din A dacă A este

finită și $m(A) = \infty$ dacă A este infinită. Măsura cardinal este numărabil aditivă.

II. O funcție $m: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}\setminus\{-\infty\}$ (sau $\overline{\mathbb{R}}\setminus\{\infty\}$) cu proprietățile $m(\emptyset) = 0$ și m este funcție de mulțime numărabil aditivă se numește *măsură reală extinsă* (sau *măsură cu semn*). În cazul cînd m ia numai valori reale, avem o *măsură reală*. O măsură reală extinsă este funcție de mulțime aditivă (măsură aditivă), finit aditivă (măsură finit aditivă), substractivă, continuă superior. Dacă $A \in \mathcal{A}$ are proprietatea că $|m(A)| < \infty$, atunci restricția lui m la A este continuă inferior. O măsură reală extinsă se numește *măsură total σ-finită* dacă există un șir $\{A_n\}_n$ format cu mulțimi $A_n \in \mathcal{A}$ astfel încît $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ și $|m(A_n)| < \infty$ pentru orice n. (Unii autori numesc o astfel de măsură măsură σ-finită.) Numim *măsură σ-finită* o măsură reală extinsă cu proprietatea că pentru orice $A \in \mathcal{A}$ există un șir $\{A_n\}_n$ format cu mulțimi $A_n \in \mathcal{A}$ astfel încît $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ și $|m(A_n)| < \infty$ pentru orice n. Să considerăm o măsură reală extinsă $m: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}\setminus\{-\infty\}$ (sau $\overline{\mathbb{R}}\setminus\{\infty\}$). O mulțime $A \in \mathcal{A}$ se numește *mulțime m-esențial pozitivă* sau *mulțime esențial pozitivă relativ la m* (resp. *...negativă...*) dacă are proprietatea că $m(A \cap B) \geqslant 0$ (resp. $m(A \cap B) \leqslant 0$) pentru orice $B \in \mathcal{A}$. O mulțime m-esențial pozitivă (resp. m-esențial negativă) se mai numește și *mulțime m-pozitivă* sau *mulțime pozitivă relativ la m* (resp. *negativă*). Mulțimea vidă este și m-esențial pozitivă și m-esențial negativă.

Teorema de descompunere a lui Hahn (varianta 1). Se presupune că $\mathcal{A}$ este σ-algebră. Atunci, dacă m este măsură reală extinsă pe $\mathcal{A}$, există două mulțimi disjuncte T^+, T^- din $\mathcal{A}$ astfel încît $T = T^+ \cup T^-$ și T^+ este m-pozitivă iar T^- este m-negativă. (O pereche (T^+, T^-) ca mai sus se numește o *descompunere Hahn* a spațiului T.)

Teorema de descompunere a lui Hahn (varianta 2). Se presupune că $\mathcal{A}$ este semitrib și că m este o măsură reală (deci finită) pe $\mathcal{A}$. În aceste condiții, pentru orice mulțime B din $\mathcal{A}$, există două mulțimi disjuncte B^+, B^- astfel încît $B = B^+ \cup B^-$ și B^+ este m-pozitivă iar B^- este m-negativă. (O pereche (B^+, B^-) ca mai sus se numește o *descompunere Hahn a mulțimii B.*)

Pentru o măsură reală extinsă m (ca în cele două variante ale teoremei de descompunere a lui Hahn) putem defini două funcții de mulțime pozitive, și anume: a) *Variația superioară* (sau *variația pozitivă*) a lui m care este funcția $m^+: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $m^+(A) = \sup\{m(B) \mid B \subset A, B \in \mathcal{A}\}$; b) *Variația inferioară* (sau *variația negativă*) a lui m care este funcția $m^-: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $m^-(A) = -\inf\{m(B) \mid B \subset A, B \in \mathcal{A}\}$. Se arată că m^+ și m^- sînt măsuri pozitive dintre care cel puțin una este finită și avem $m = m^+ - m^-$ (așadar, orice măsură real extinsă este diferența a două măsuri pozitive) (*teorema de descompunere a lui Jordan*). Perechea (m^+, m^-) se numește *descompunerea lui Jordan a măsurii m*. Măsurile m^+ (resp. m^-) se mai numesc și *partea pozitivă* (resp. *partea negativă*) a măsurii m. În cadrul primei variante a teoremei de descompunere a lui Hahn, dacă (A, B) este o descompunere Hahn a spațiului T, se arată că $m^+(U) = m(U \cap T^+)$ și $m^-(U) = -m(U \cap T^-)$ pentru orice $U \in \mathcal{A}$ (definiția este coerentă). În cadrul celei de-a doua variante, avem $m^+(A) = m(A^+)$ și $m^-(A) = -m(A^-)$ pentru $A \in \mathcal{A}$. În oricare din cele două variante notăm $|m| = m^+ + m^-$. Măsura pozitivă $|m|: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numește *modulul măsurii m* (sau *variația măsurii m*). Unii autori numesc $|m|$ *variația totală a măsurii m* (există și alte accepțiuni ale noțiunii de variație totală a unei măsuri). În orice caz, rezultă și relațiile

$$m^+ = \frac{1}{2}(|m| + m) \text{ și } m^- = \frac{1}{2}(|m| - m).$$

Ex.: Se consideră un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și o funcție $f\colon T \to \mathbb{R}$ care este μ-integrabilă. Se obține integrala nedefinită a lui μ care este **măsura** reală numărabil aditivă $m\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ definită prin $m(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$. *(I.C.)*

măsuri Radon difuze și atomice Fie T un spațiu local compact. O măsură Radon μ pe T se numește *măsură Radon difuză* dacă $|\mu|(\{t\}) = 0$ pentru orice t din T. Măsura Lebesgue este difuză. O măsură Radon μ pe T se numește *măsură Radon atomică* dacă $|\mu|$ este suma unei familii sumabile de măsuri pozitive punctuale. Orice măsură Radon pozitivă μ pe T se scrie în mod unic sub forma $\mu = \lambda + \nu$, unde λ este măsură Radon pozitivă și difuză, iar ν este măsură Radon pozitivă atomică. *(I.C.)*

măsuri Radon echivalente Două măsuri Radon μ și ν pe T se numesc *echivalente* dacă $|\mu|$ și $|\nu|$ au aceleași mulțimi local neglijabile, *i.e.* $\{A \subset T \mid A$ este $|\mu|$-neglijabilă$\} = \{B \subset T \mid B$ este $|\nu|$-neglijabilă$\}$. Este echivalent cu a spune că $|\nu| = g|\mu|$ cu g local $|\mu|$-integrabilă și $g(t) > 0$ local $|\mu|$-*a.p.t.* (v. **măsură Radon definită prin densități**). *(I.C.)*

măsuri Radon independente Fie T spațiu local compact, μ și ν măsuri Radon pe T. Atunci μ și ν se numesc **m.R.i.** (sau *singulare*) dacă $\inf(|\mu|, |\nu|) = 0$ în spațiul reticulat real $\mathcal{M}(T)$ al măsurilor Radon pe T. Dacă $M \subset T$ și μ este o măsură Radon pozitivă pe T, se spune că *μ este concentrată pe M* dacă $T \setminus M$ este local μ-neglijabilă. Dacă măsurile Radon μ și ν sînt independente, există două mulțimi disjuncte M și N astfel încît $|\mu|$ este concentrată pe M și $|\nu|$ este concentrată pe N.
Teorema de descompunere a lui Lebesgue (pentru măsuri Radon). Fie μ o măsură Radon pozitivă și ν o măsură Radon pe T. Atunci există o funcție numerică local μ-integrabilă g și o măsură Radon λ independentă de μ astfel încît $\nu = g\mu + \lambda$. Dacă ν este pozitivă putem alege $g\mu$ și λ pozitive (v. și **măsură Radon, măsură Radon definită prin densități**). *(I.C.)*

măsuri singulare v. **spațiul reticulat al măsurilor cu semn**

media condiționată a unei funcții (relativ la o σ-algebră) v. **martingal**

media unei funcții (relativ la o măsură Radon) v. **măsură Radon**

metoda caracteristicilor a lui Cauchy Fie $F\colon U \times V \times I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se numește *soluție* a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întîi definită de F o funcție $z\colon U_0 \subset U \to I$ de clasă C^1 cu $(\mathrm{D}z)(x) \in V$ pentru orice $x \in U_0$ și astfel încît $F(x, (\mathrm{D}z)(x), z(x)) \doteq 0$ pentru orice $x \in U_0$; $(\mathrm{D}z)(x)$ este derivata Fréchet a funcției z calculată în punctul x, o aplicație liniară de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}$ fiind identificată cu un punct din $\mathbb{R}^n$. Funcția z este soluție a problemei lui Cauchy definită de F, $a\colon G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to U$, $\gamma\colon G \to I$, dacă este soluție a ecuației cu derivate parțiale definită de F și în plus $z(a(u)) = \gamma(u)$ pentru orice $u \in G_0 \subset G$. Dacă F, a, γ sînt de clasă C^2 și există $u_0 \in G$, $b_0 \in V$ astfel încît

$$F(a(u_0), b_0, \gamma(u_0)) = 0, \qquad (\partial_j\gamma)(u_0) = \langle(\partial_j a)(u_0), b_0\rangle,$$

$$\det\left((\partial_{n+i}F)(a(u_0), b_0, \gamma(u_0))\,(\partial_j a^i)(u_0)\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n-1}} \neq 0,$$

exitsă o soluție de clasă C^2 a problemei lui Cauchy dată de F, a, γ, definită într-o vecinătate a lui $a(u_0)$ astfel încît $(\mathrm{D}z)(a(u_0)) = b_0$; două soluții cu proprietățile de mai sus coincid într-o vecinătate a lui $a(u_0)$. Soluția se construiește asociind sistemul de ecuații al caracteristicilor:

$$x_j' = (\partial_{n+j}F)(x, y, z), \quad y_j' = -(\partial_j F)(x, y, z) - (\partial_{2n+1}F(x, y, z)),$$

$$z' = \sum_j y_j(\partial_{n+j}F)(x, y, z), \quad j = 1, \dots, n;$$

se consideră soluția acestui sistem care verifică $x_j(0) = a^j(u)$, $z(0) = \gamma(u)$, $y_j(0) = b_j(u)$, unde b_j se determină (pe baza teoremei funcțiilor implicite) din relațiile $F(a(u), b(u), \gamma(u)) = 0$, $(\partial_j\gamma)(u) = \langle(\partial_j a)(u), b(u)\rangle$ pentru u într-o vecinătate a lui u_0. Notînd funcțiile astfel obținute cu ξ_j, η_j, ζ_j, se arată că aplicația $(t, u) \to \xi(t, u)$ este inversabilă în vecinătatea lui (a, u_0), și notînd cu (τ, v) inversa, funcția z, definită prin $z(x) = \zeta(\tau(x), v(x))$, este soluția problemei lui Cauchy. *(A.H.)*

metoda elementului finit Fie X un spațiu liniar normat real, F o funcțională biliniară continuă pe $X \times X$ și f o funcțională liniară și continuă pe X; fie $I(x) = \frac{1}{2}(F(x, x) - f(x))$. Problema minimizării funcționalei I este echivalentă în anumite cazuri particulare pentru X și F cu problema determinării unui element $u \in X$ astfel ca $F(u, v) = f(v)$ pentru orice $v \in X$. Pentru rezolvarea ultimei probleme s-a imaginat următoarea metodă, numită și *metoda Riesz-Galerkin* (v. și **metoda lui Riesz**): se asociază problemei date, problema discretă a determinării pentru orice subspațiu finit-dimensional $E_h \subset X$ a unui element $u_h \in E_h$ astfel ca $F(u_h, v) = f(v)$, $\forall v \in E_h$, se aproximează apoi soluția problemei inițiale cu soluția problemei discrete. Pentru rezolvarea unor probleme la limită de tip eleptic, se consideră drept X unul din spațiile Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $H_0^2(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ etc. unde Ω este o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^m$. **M.e.f.** este, pentru acest tip de probleme, un proces specific de construcție a subspațiilor finit-dimensionale E_h și poate fi caracterizată schematic prin cîteva aspecte generale: 1) Se stabilește o anumită „triangulare" T_h a mulțimii $\overline{\Omega}$, *i.e.* se descompune $\overline{\Omega}$ într-un număr finit (elemente finite) de mulțimi specifice; 2) Spațiul E_h are proprietatea că fiecare funcție $v \in E_h$ este polinomială pe porțiuni: pentru orice $v \in E_h$ și orice $K \in T_h$ funcția v este polinomială pe K; 3) În spațiul E_h poate fi pusă ușor în evidență o bază algebrică formată din funcții ale căror suporturi sînt într-un anumit sens, cît mai mici posibile. În acest caz rezolvarea problemei discrete revine la rezolvarea unui sistem finit de ecuații liniare. Se aproximează apoi soluția problemei generale cu soluția problemei discrete. *(Gh.Gr.)*

metoda Euler-Cauchy, metodă de rezolvare numerică a problemei lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = u(t, x(t)), \\ x(a) = \alpha_0, \end{cases}$$

unde $u\colon [a, b] \times D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}^m$. **M.E.C.** constă în aproximarea soluției problemei considerate cu soluția ecuației cu diferențe:

$$z(a) = \alpha_0,$$

$$z(t_j) - z(t_{j-1}) = \frac{h}{2}\left[u(t_{j-1}, z(t_{j-1})) + u(t_j, z(t_{j-1}) + hu(t_{j-1}, z(t_{j-1})))\right],$$

unde pentru $0 < h < b - a$, $\{t_0, \dots, t_{n_h}\}$ este o mulțime de puncte echidistante, $t_j = a + jh$, $j \in \{0, 1, \dots, n_h\}$, n_h fiind partea întreagă a lui $\dfrac{b-a}{h}$. *(Gh.Gr.)*

metoda Gauss-Seidel, metodă iterativă de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Fie sistemul $(I - B)x = b$, unde I este matricea unitate

$B = (b_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$, $b_{ij} \in \mathbb{C}$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{C}^m$. Fie $x^{(0)} \in \mathbb{C}^m$. **M.G.S.** constă în aproximarea soluției sistemului considerat cu $x^{(n)}$, unde $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ și

$$x_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k-1} b_{kj} x_j^{(n)} + \sum_{j=k}^{m} b_{kj} x_j^{(n-1)} + b_k, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Notînd $$q_1 = \sum_{j=1}^{m} |b_{1j}|, \quad q_k = \sum_{j=1}^{k-1} |b_{kj}|\, q_j + \sum_{j=k}^{m} |b_{kj}|,$$

$k \in \{2, \dots, m\}$ și $q = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} q_k$, dacă $q < 1$, atunci sistemul considerat are pentru orice $b \in \mathbb{C}^m$ soluție unică $z \in \mathbb{C}^m$, șirul $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge către această soluție și au loc evaluările:

$$\|x^{(n)} - z\|_\infty \leqslant \frac{q}{1-q} \|x^{(n-1)} - x^{(n)}\|_\infty \leqslant \frac{q^n}{1-q} \|x^{(0)} - x^{(1)}\|_\infty,$$

$$\|(x_1, \dots, x_m)\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i|. \quad (Gh.Gr.)$$

metoda Lagrange-Charpit Fie $F: U \times V: I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; o funcție $\varphi: U_0 \times C \subset U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 se numește *integrală completă* a ecuației cu derivate parțiale definite de F dacă pentru orice $c \in C$ funcția $\varphi(x, c)$ este soluție a ecuației cu derivate parțiale definite de F. [$F(x, (\partial_1\varphi)(x, c), \varphi(x, c) = 0$ pentru orice $x \in U_0$, $(\partial_1\varphi)(x, c)$ fiind derivata Fréchet în punctul x a aplicației $x \to \varphi(x, c)$]. **M.L.Ch.** constă în a folosi o integrală completă pentru a rezolva problema lui Cauchy: fiind date $a: G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to U$, $\gamma: G \to I$, se construiește $c: G_0 \subset G \to C$ și $d: U_0 \subset U \to U_0$ astfel încît funcția z definită prin $z(x) = \varphi(x, c)(d(x)))$ să fie soluție a ecuației definită de $F(F(x, (Dz)(x), z(x)) = 0)$ și în plus $z(a(u)) = \gamma(u)$; funcția c se alege astfel încît

$$\varphi(a(u), c(u)) = \gamma(u),$$

$$(\partial_j\gamma)(u) \leqslant \langle (\partial_j a)(u), (\partial_1\varphi)(a(u), c(u)) \rangle$$

iar funcția d astfel încît $\Phi(x, \mathrm{d}(x)) = 0$, $\mathrm{d}(a(u)) = u$, unde

$$\Phi(x, u) = (\partial_2\varphi)(x, c(u))(\partial c)(u).$$

Aici $(\partial_2\varphi)(x, c)$ este derivata Fréchet în punctul c a aplicației $c \to \varphi(x, c)$, deci $\Phi(x, u)$ este derivata Fréchet în punctul u a aplicației $u \to \varphi(x, c(u))$. (*A.H.*)

metoda lui Euler, metodă numerică de rezolvare a problemei lui Cauchy

$$x'(t) = u(t, x(t)),$$

$$x(a) = \alpha_0$$

unde $u: [a, b] \times D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}^m$. Metoda constă în aproximarea soluției problemei considerate cu soluția ecuației cu diferențe

$$z(a) = \alpha_0,$$

$$z(t_j) - z(t_{j-1}) = hu(t_{j-1}, z(t_{j-1})),$$

unde pentru $0 < h < b - a$, $\{t_0, \dots, t_n\}$ este o mulțime de puncte echidistante, $t_j = a + jh$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, n fiind partea întreagă a lui $\frac{1}{h}(b - a)$. (*Gh.Gr.*)

metoda lui Gauss de rezolvare a unui sistem de ecuații liniare, metodă prin care se realizează transformarea sistemului într-un sistem echivalent cu matrice triunghiulară. Utilizînd anumite permutări de linii și coloane, transformarea se face prin operații liniare prin care se obține eliminarea succesivă a necunoscutelor. (*Gh.Gr.*)

metoda lui Jacobi, metodă de rezolvare iterativă a unui sistem de ecuații liniare. Sin.: *metoda aproximațiilor succesive*. Fie sistemul $(I - B)\,x = b$, unde I este matricea unitate, $B = (b_{ij})_{i,\,j \in \{1,\,\ldots,\,m\}}$, $b_{i,j} \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{C}^m$. Fie $x^{(0)} \in \mathbf{C}^m$. **M.J.** constă în aproximarea soluției sistemului considerat cu $x^{(n)}$, unde

$$x^{(n)} = Bx^{(n-1)} + b.$$

Sistemul considerat are pentru orice $b \in \mathbf{C}^m$ soluție unică x și pentru orice $x^{(0)} \in \mathbf{C}^m$ șirul $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge către x dacă și numai dacă $\lim\limits_{n \to \infty} B^n = 0$. Dacă $x \to \|x\|$ este o normă pe $\mathbf{C}^m$ vom nota $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$ norma corespunzătoare a matricii A. Dacă pentru matricea B avem $\|B\| \leqslant q < 1$, atunci au loc următoarele evaluări ale restului:

$$\|x^{(n)} - z\| \leqslant \frac{q}{1-q} \|x^{(n-1)} - x^{(n)}\| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \|x^{(0)} - x^{(1)}\|.$$

Dacă sistemul de rezolvat este scris sub forma $Ax = a$, unde $A = (a_{ij})_{i,\,j \in \{1,\,\ldots,\,m\}}$ și dacă $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j \neq i}}^{m} |a_{ij}|$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, atunci sistemului echivalent $(I - B)x = b$, unde $B = I - D^{-1}A$, $b = D^{-1}a$, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}$ i se poate aplica **m.J.** În evaluarea restului se folosește în acest caz norma $\|\ \|_\infty$, unde $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i|$. (*Gh.Gr.*)

metoda lui Newton, metodă iterativă de rezolvare a unor ecuații de forma $f(x) = 0$, unde $f: G \to \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^m$. **M.N.** constă în aproximarea soluției ecuației considerate cu $x^{(n)}$, unde $x^{(0)} \in G$ și $x^{(n+1)} = x^{(n)} - (f'(x^{(n)}))^{-1} f(x^{(n)})$. Se notează cu $\|\ \|$ o normă pe $\mathbb{R}^m$ iar pe spațiile de operatori liniari $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ se consideră normele operatoriale induse. Se notează $B(z, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|z - x\| < r\}$. Fie $G \subset \mathbb{R}^m$ o submulțime deschisă, $f: G \to \mathbb{R}^m$ o aplicație de clasă C^2. Dacă există $M > 0$ astfel ca $\|f''(x)\| \leqslant M$ pentru orice $x \in G$ și dacă există $z \in G$ astfel încît $f(z) = 0$ și $f'(z)$ să fie inversabil, atunci pentru orice $q \in (0, 1)$ există r, $\mu > 0$ astfel încît $f'(x)$ este inversabil pentru orice $x \in B(z, r)$, șirul $x^{(n+1)} = x^{(n)} - (f'(x^{(n)}))^{-1} f(x^{(n)})$ rămîne în $B(z, r)$ oricare ar fi $x^{(0)} \in B(z, r)$ și au loc:

$$\|x^{(n)} - z\| \leqslant \frac{2\mu}{M} q^{2^n},$$

$$\|x^{(n)} - z\| \leqslant \frac{1}{\mu} \|f(x^{(n)})\| \leqslant \frac{M}{2\mu} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|^2.$$

Metoda este frecvent folosită deoarece este foarte rapid convergentă. Printre dezavantajele acestei metode se află necesitatea calculării la fiecare pas a inversei unei matrici $(f'(x^{(n)}))^{-1}$, cît și localizarea teoretică a procesului iterativ într-o bilă centrată în soluția căutată a problemei. În **m.N.** simplificată se înlătură primul inconvenient. **M.N.** *simplificată* constă în aproximarea soluției ecuației considerate cu $y^{(n)}$, unde $y^{(0)}$, $c \in G$, $y^{(n+1)} = y^{(n)} - (f'(c))^{-1} f(y^{(n)})$.

În aceleași condiții ca la **m.N.**, pentru orice $q \in (0, 1)$ există $r > 0$ astfel încît, pentru orice $y^{(0)}$, $c \in B(z, r)$, șirul $\{y^{(n)}\}_n$ rămîne în $B(z, r)$ și $\|y^{(n)} - z\| \leqslant q^n r$. Spre deosebire de **m.N.** varianta Newton-Kantorovici nu localizează procesul iterativ într-o bilă centrată în soluția problemei. *Metoda Newton-Kantorovici* constă în aproximarea soluției ecuației considerate cu $x^{(n)}$, unde $x^{(n+1)} = x^{(n)} - (f'(x)^{(n)}))^{-1} f(x^{(n)})$. În aceleași condiții ca la **m.N.** se mai presupune că există $x^{(0)} \in G$ și $\alpha, \beta > 0$ astfel ca

$$\|f'(x^{(0)}))^{-1}\| \leqslant \alpha, \qquad \|f'(x^{(0)}))^{-1} f(x^{(0)})\| \leqslant \beta,$$

$$\alpha\beta M = \gamma < \frac{1}{2}, \qquad B(x^{(0)}, r) \subset G,$$

unde $r = \dfrac{1}{\alpha M}(1 - \sqrt{1 - 2\gamma})$. În aceste condiții ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică $z \in B(x^{(0)}, r)$, șirul $x^{(n+1)} = x^{(n)} - (f'(x^{(n)}))^{-1} f(x^{(n)})$ rămîne în $B(x^{(0)}, r)$ și converge la z. În cazul funcțiilor de o variabilă are loc următoarea teoremă de convergență pentru **m.N.** Fie $f \in C^2[a, b]$ astfel încît f' și f'' nu se anulează în $[a, b]$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$. Fie $x_0 \in [a, b]$ astfel ca $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ și $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Atunci, există, și este unic, $z \in [a, b]$ astfel încît $f(z) = 0$, șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rămîne în $[a, b]$ și converge către z. Evaluarea erorii se poate face prin

$$|x_n - z| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{\inf\{|f'(x)| \mid x \in [a, b]\}},$$

$$|x_n - z| \leqslant q^{2^{n+1}-1}(z - x_0)^{2^{n+1}}, \quad \text{unde}$$

$$q = \frac{\sup\{|f''(x)| \mid x \in [a, b]\}}{\inf\{|f'(x)| \mid x \in [a, b]\}}.$$

În acest caz particular metoda se întîlnește cu denumirea de *metoda tangentei*. (*Gh.Gr.*)

metoda lui Newton simplificată v. **metoda lui Newton**

metoda lui Ritz Fie X un spațiu Hilbert real și A un operator autoadjunct și pozitiv definit pe X, $(\inf\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle > 0)$. Se consideră ecuația

$$Ax = b. \qquad (*)$$

Fie funcționala $F(x) = \langle Ax, x\rangle - 2\langle x, b\rangle$. Elementul $z \in X$ este soluție a ecuației $(*)$ dacă și numai dacă $F(z) = \min\limits_{x \in X} F(x)$. Un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din X se numește *șir minimizant* pentru F dacă $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = \min\limits_{x \in X} F(x)$. Orice șir minimizant pentru F converge către soluția z a ecuației $(*)$. **M.R.** este un procedeu de construcție a unui șir minimizant pentru F în ipoteza că X este un spațiu Hilbert separabil. Se consideră în spațiul Hilbert separabil X o bază ortonormală $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și $X_n = \mathrm{Sp}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Există, și este unic, $x_n \in X_n$ astfel ca $F(x_n) = \min\limits_{x \in X_n} F(x)$. Șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir minimizant pentru F.

Dacă $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$, atunci $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ este soluția unică a sistemului de ecuații liniare

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \langle A\varphi_i, \varphi_k\rangle = \langle \varphi_i, b\rangle, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Metoda se utilizează în rezolvarea numerică a unor ecuații diferențiale, în aproximarea numerelor proprii ale unor operatori autoadjuncți etc. (*Gh.Gr.*)

metoda Newton-Kantorovici, v. **metoda lui Newton**

metoda relaxării simultane, metodă iterativă de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Fie sistemul $Ax = a$, unde A este matricea $(a_{ij})_{i,j \in \{1, \ldots, m\}}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^m$. Fie

$$D = \operatorname{diag} A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Fie $x^{(0)} \in \mathbb{C}^m$ și σ un număr pozitiv. În ipoteza că $a_{ii} \neq 0$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$, fie $\{x^{(n)}\}_n$ șirul definit prin

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \sigma D^{-1} A x^{(n-1)} + D^{-1} a. \qquad (*)$$

M.r.s. constă în aproximarea soluției sistemului considerat cu $x^{(n)}$. Dacă A este hermitică și pozitiv definită, atunci $(x, y) \to \langle Dx, y\rangle$ este un produs scalar pe $\mathbb{C}^m$($\langle\, ,\rangle$ este produsul scalar care generează norma euclidiană pe $\mathbb{C}^m$). Se notează cu $\|\ \|_D$ norma generată de acest produs scalar pe $\mathbb{C}^m$. Pentru orice $x^{(0)} \in \mathbb{C}^m$, șirul $(*)$ converge la soluția z a sistemului considerat dacă și numai dacă $0 < \sigma < \dfrac{2}{\lambda_1}$, unde λ_1 este cea mai mare valoare proprie a matricii $D^{-1}A$. Au loc următoarele evaluări ale restului:

$$\|x^{(n)} - z\|_D \leqslant \frac{q}{1-q} \|x^{(n-1)} - x^{(n)}\|_D \leqslant \frac{q^n}{1-q} \|x^{(0)} - x^{(1)}\|_D,$$

unde $q = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |1 - \sigma\lambda_i|$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ fiind valorile proprii ale matricii $D^{-1}A$ scrise în ordine descrescătoare. Valoarea lui σ pentru care se obține cea mai mică valoare pentru q este $\sigma_0 = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_m}$, iar corespunzător acestei valori $q_0 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_m}{\lambda_1 + \lambda_m}$. (*Gh.Gr.*)

metoda relaxării succesive, metodă iterativă de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare, rafinare a metodei Gauss-Seidel. Fie sistemul $Ax = a$, unde $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \ldots, m\}}$ este o matrice avînd pe diagonală numai elemente nenule, iar $a \in \mathbb{C}^m$. Fie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$D = \operatorname{diag} A$ matricea diagonală avînd pe diagonală elementele matricii A şi $R = A - D - L$. Fie $\sigma \in \mathbb{R}$, $C_\sigma = \left(\frac{1}{\sigma} D + L\right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) D - R\right)$, $c_\sigma = \left(\frac{1}{\sigma} D + L\right)^{-1} a$. **M.r.s.** constă în aproximarea soluţiei sistemului considerat cu şirul Jacobi asociat sistemului echivalent $(I - C_\sigma)\, x = c_\sigma$, deci cu şirul $x^{(n)} = C_\sigma x^{(n-1)} + c_\sigma$. Dacă A este hermitică şi pozitiv definită, şirul precedent converge la soluţia z a sistemului, pentru orice iterată iniţială $x^{(0)}$, dacă şi numai dacă $0 < \sigma < 2$. Au loc evaluările:

$$\| x^{(n)} - z \|_A \leqslant \frac{q}{1-q} \| x^{(n-1)} - x^{(n)} \|_A \leqslant \frac{q^n}{1-q} \| x^{(0)} - x^{(1)} \|_A,$$

unde $\| \ \|_A$ este norma generată pe $\mathbb{C}^m$ de produsul scalar $(x, y) \to \langle Ax, y \rangle$ iar q este norma operatorului C_σ cînd pe $\mathbb{C}^m$ se consideră $\| \ \|_A$. Pe componente, şirul aproximant este

$$x_i^{(n)} = -\frac{\sigma}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(n)} + (1-\sigma)\, x_i^{(n-1)} - \frac{\sigma}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(n-1)} + \frac{\sigma}{a_{ii}} a_i,$$

unde a_i sînt componentele lui a. (*Gh.Gr.*)

metoda reziduurilor (pentru calculul integralelor definite) v. **reziduu**

metoda Runge-Kutta, metodă de rezolvare numerică a problemei lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = u(t, x(t)), & t \in [a, b], \\ x(a) = \alpha_0, \end{cases}$$

unde $u: [a, b] \times D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}^m$. **M.R.K.** constă în aproximarea soluţiei problemei considerate cu soluţia ecuaţiei cu diferenţe

$$z(a) = \alpha_0,$$

$$\frac{z(t_j) - z(t_{j-1})}{h} = \frac{1}{6}\,(v_1(t_{j-1}, z(t_{j-1})) + 2v_2(t_{j-1}, z(t_{j-1})) + $$

$$+ 2v_3(t_{j-1}, z(t_{j-1})) + v_4(t_{j-1}, z(t_{j-1}))),$$

unde pentru $0 < h < b - a$, $t_0, \ldots, t_{n_h}$ este o mulţime de puncte echidistante $t_j = a + jh$, $j \in \{0, 1, \ldots, n_h\}$, n_h fiind partea întreagă a lui $\frac{b-a}{h}$ iar

$$v_1(t, x) = u(t, z), \quad v_2(t, z) = u\left(t + \frac{h}{2},\ z + \frac{h}{2} v_1(t, z)\right),$$

$$v_3(t, z) = u\left(t + \frac{h}{2},\ z + \frac{h}{2} v_2(t, z)\right), \quad v_4(t, z) = u(t + h, z + hv_3(t, z)). \quad (Gh.Gr.)$$

metoda tangentei v. **metoda lui Newton**

metoda variaţiei constantelor, schimbare de variabile care permite reprezentarea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale afine cu ajutorul soluţiilor ecuaţiei liniare asociate. Dacă X este o soluţie pentru sistemul afin $x' = A(t)x + b(t)$ iar $C(t, t_0)$ verifică $C'(t, t_0) = A(t)C(t, t_0)$, $C(t_0, t_0) = I$, schimbarea de variabile $y(t) = C(t_0, t)\, x(t)$ conduce la reprezentarea $x(t) = C(t, t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t, s)\, b(s)\, ds$.

Denumirea provine din faptul că soluţiile ecuaţiei liniare se scriu $x(t) = C(t, t_0)\, x_0$, unde x_0 este constantă, iar schimbarea de variabile revine la $x(t) = C(t, t_0)\, y(t)$. (*A.H.*)

metrica Bergman v. **nucleul Bergman**

metrica euclidiană v. **varietate riemanniană**

metrică v. **distanţă**

metrică hermitiană v. **nucleul Bergman**

metrică riemanniană v. **varietate riemanniană**

microfuncţii, secţiunile unui fascicol definit în felul următor. Dacă U este o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ se consideră $\mathcal{C}(U) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) / \{u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ SS(u) \cap U = \emptyset\}$, unde $\mathcal{B}$ este fascicolul hiperfuncţiilor iar $SS(u)$ este spectrul singular (numit şi frontul de undă analitic) al hiperfuncţiei u. Dacă $\mathcal{A}(\omega)$ este spaţiul germenilor de funcţii analitice reale în vecinătatea lui ω, unde ω este o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$, se arată că $\mathcal{C}(\omega \times S^{n-1})$ este cîtul $\mathcal{B}(\omega)/\mathcal{A}(\omega)$. Prefascicolul $U \mapsto \mathcal{C}(U)$ este chiar un fascicol flasc pe $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. Fascicolul $\mathcal{C}$ măsoară „neanalicitatea" hiperfuncţiilor: două hiperfuncţii pe ω au aceeaşi imagine în $\mathcal{C}$ prin aplicaţia canonică de trecere la cît dacă şi numai dacă diferenţa lor este analitică pe ω. Pentru orice hiperfuncţie u, spectrul său singular $SS(u)$ coincide cu suportul secţiunii în $\mathcal{C}$ care corespunde lui u. Pe **m.** acţionează operatorii diferenţiali cu coeficienţi analitici; datorită faptului că $SS(Tu) \subset SS(u)$ aplicaţia $u \to Tu$ de la $\mathcal{B}(\omega) \to \mathcal{B}(\omega)$ se poate factoriza şi defineşte o aplicaţie de la $\mathcal{C}(\omega)$ la $\mathcal{C}(\omega)$. **M.** au o serie de proprietăţi utile (v. **microlocalizare**). Fascicolul **m.** a fost introdus de M. Sato. (*G.G.*)

microlocalizare Fie M un $\mathcal{D}_X$-modul (la stînga) (v. **sistem supradeterminat**). Fiecărui astfel de $\mathcal{D}_X$-modul i se asociază un $\mathcal{E}_X$-modul $\mathcal{M}^*$ definit prin $\mathcal{M}^* = \mathcal{E}_X \underset{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)}{\otimes} \pi^{-1}(M)$, unde $\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)$ (resp. $\pi^{-1}(M)$) reprezintă fascicolul imagine inversă prin π a lui $\mathcal{D}_X$ (resp. M). Această operaţie de trecere de la un $\mathcal{D}_X$-modul la un $\mathcal{E}_X$-modul asociat se numeşte **m.**; $\mathcal{M}^*$ rezultă $\mathcal{E}_X$-coerent, deci microlocalizatul $\mathcal{M}^*$ al unui sistem diferenţial este un sistem microdiferenţial (v. **operator microdiferenţial**). Varietatea caracteristică a sistemului M nu este altceva decît suportul microlocalizatului său (ca $\mathcal{E}_X$-modul, microlocalizatul are un suport bine definit). **M.** permite studiul singularităţilor sistemelor diferenţiale pe fibratul cotangent. Pe de altă parte, cu ajutorul operatorilor microlocali se pot aduce sistemele diferenţiale la anumite forme canonice. Denumirea de **m.** provine de la analogia cu operaţia de localizare din geometria algebrică (aceasta din urmă permite, prin considerarea unei factorizări convenabile, de a face inversabile în localizat toate polinoamele ce nu se anulează pe un deschis dat). Ideea de bază a **m.** este de a extinde suficient de mult fascicolul $\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)$ pentru a face inversibili, local în T^*X, operatorii al căror simbol principal nu se anulează pe deschisul considerat. (*G.G.*)

minorant v. **mulţime ordonată**

mişcare browniană v. **integrala stochastică**

model de varietate diferenţiabilă Prin r vom nota un element în mulţimea $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, deci $1 \leqslant r \leqslant \infty$; prin n, p vom nota numere naturale. Fie U o mulţime deschisă nevidă în spaţiul numeric real $\mathbb{R}^n$. O funcţie reală f definită pe U se spune că este *de clasă* C^r dacă toate derivatele parţiale de ordin $\leqslant r$ ale lui f există pe U şi sînt continue; se notează prin $C^r(U)$ mulţimea tuturor funcţiilor reale de clasă C^r pe U. De asemenea, o aplicaţie $f = (f_1, \ldots, f_p): U \to \mathbb{R}^p$ se numeşte *aplicaţie de clasă* C^r dacă componentele $f_1, \ldots, f_p$ ale lui f sînt toate de clasă C^r, *i.e.* aparţin mulţimii $C^r(U)$; se notează prin $C^r(U, \mathbb{R}^p)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor de clasă C^r de la U la $\mathbb{R}^p$. În fine, dacă U este o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, V o mulțime deschisă în $\mathbb{R}^p$ și $\varphi: U \to V$ o aplicație, se spune că φ este o aplicație de clasă C^r dacă $j \circ \varphi \in C^r(U, \mathbb{R}^p)$, unde $j: V \to \mathbb{R}^p$ este aplicația de incluziune a lui V în $\mathbb{R}^p$. Se notează prin $C^r(U, V)$ mulțimea tuturor aplicațiilor de clasă C^r de la U la V; evident $C^\infty(U, V) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U, V)$. Se utilizează de asemenea notația $C^0(U, V)$ sau $C(U, V)$ pentru mulțimea tuturor aplicațiilor continue de la U la V. Pentru orice mulțime deschisă U într-un spațiu numeric real $\mathbb{R}^n$, identitatea lui U, notată id_U, este de clasă C^∞. De asemenea, dacă U, V sînt mulțimi deschise în spații numerice reale și dacă $\varphi \in C^r(U, V)$ și $\psi \in C^r(U, W)$, atunci $\psi \circ \varphi \in C^r(U, W)$. Astfel mulțimile deschise în spații numerice reale, ca obiecte, și aplicațiile de clasă C^r, ca morfisme, formează o categorie, numită categoria *modelelor* (de varietăți diferențiabile de clasă C^r). O mulțime deschisă nevidă în spațiul $\mathbb{R}^n$ se numește **m.v.d.**

O proprietate importantă în categoria modelelor care exprimă caracterul local al noțiunii de aplicație de clasă C^r este următoarea: Dacă U și V sînt modele, o aplicație $\varphi: U \to V$ este de clasă C^r dacă și numai dacă pentru orice punct $a \in U$, există o vecinătate deschisă U_a a lui a în U astfel încît, restricția $\varphi \mid U_a \in C^r(U_a, V)$. Această proprietate se mai poate formula astfel: Fiind date două modele U și V și o aplicație $\varphi: U \to V$, dacă $\{U_i\}_{i \in I}$ este o acoperire deschisă a lui U, atunci $\varphi \in C^r(U, V)$ dacă și numai dacă $\varphi \mid U_i \in C^r(U_i, V)$ pentru toți $i \in I$. Dacă U și V sînt modele, prin *C^r-difeomorfism* de la U la V se înțelege o aplicație bijectivă $\varphi: U \to V$ astfel încît φ și φ^{-1} să fie de clasă C^r. Notăm că un C^r-difeomorfism (de modele) este exact un izomorfism în categoria modelelor. (*M.J.*)

modul de continuitate Fie $[a, b]$ un interval compact al dreptei reale și $f: [a, b] \to \Gamma$ o funcție continuă, unde Γ este corpul scalarilor reali sau complecși. Atunci f este uniform continuă. **M.c.** al lui f este funcția $\omega(f): [0, b-a] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\omega(f)\,(t) = \sup\{|f(x') - f(x'')| \mid x', x'' \in [a, b], \ |x' - x''| \leqslant t\}.$$

M.c. al unei funcții continue f are următoarele proprietăți: i) $\omega(f)(0) = 0$; ii) $\omega(f)$ este funcție crescătoare; iii) $\omega(f)$ este funcție subaditivă, *i.e.* $\omega(f)(t'+t'') \leqslant \omega(f)(t') + \omega(f)(t'')$, pentru orice t', t'' din $[0, b-a]$ cu $(t'+t'') \leqslant (b-a)$; iv) $\omega(f)$ este funcție continuă. Dacă $A > 0$ și $h: [0, A] \to \mathbb{R}$ are proprietățile i)–iv) rezultă că $\omega(h) = h$, ceea ce justifică denumirea de **m.c.** dat unei funcții h cu proprietățile i)–iv). (*I.C.*)

modul pe un spațiu inelat Fie $(X, \mathcal{O}_X)$ un spațiu inelat. Un $\mathcal{O}_X$-modul este un fascicol de grupuri abeliene $\mathcal{F}$ pe X împreună cu un morfism de fascicole de mulțimi $m: \mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ satisfăcînd următoarea condiție: (M) Pentru orice mulțime deschisă U în X, aplicația $m_U: \mathcal{O}_X \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ este o înmulțire scalară pe $\mathcal{F}(U)$ care face din acest grup abelian un $\mathcal{O}_X(U)$-modul. Morfismul m din definiția precedentă se numește *înmulțirea scalară* a lui $\mathcal{F}$; dacă $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$ și $s \in \mathcal{F}(U)$, se scrie λs sau $\lambda \cdot s$ în loc de $m_U(\lambda, s)$. O condiție echivalentă cu (M) este următoarea: Pentru orice punct $x \in X$, aplicația $m_x: \mathcal{O}_{X,x} \times \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ este o înmulțire scalară pe $\mathcal{F}_x$ care face din acest grup abelian un $\mathcal{O}_{X,x}$-modul. Fie $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ două $\mathcal{O}_X$-module. Un morfism de fascicole de mulțimi $\theta: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ se numește *morfism* de $\mathcal{O}_X$-module dacă pentru orice mulțime deschisă U în X, aplicația $\theta_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ este $\mathcal{O}_X(U)$-liniară sau, echivalent, dacă pentru orice punct $x \in X$ aplicația $\theta_x: \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ este $\mathcal{O}_{X,x}$-liniară. Morfismele de $\mathcal{O}_X$-module sînt, în particular, morfisme de fascicole de grupuri abeliene. Mulțimea morfismelor de $\mathcal{O}_X$-module de la $\mathcal{F}$ la $\mathcal{G}$ se notează $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Este ușor de văzut că $\mathcal{O}_X$-modulele și morfismele lor formează o categorie, notată Mod (X) sau $\mathcal{O}_X$-mod; izomorfismele acestei categorii se

numesc *izomorfisme* de $\mathcal{O}_X$-module. Un șir de $\mathcal{O}_X$-module și morfisme de $\mathcal{O}_X$-module

$$\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\theta_0} \mathcal{F}_1 \to \ldots \xrightarrow{\theta_p} \mathcal{F}_{p+1} \quad p \geqslant 1,$$

se numește *șir exact* de $\mathcal{O}_X$-module dacă $\mathrm{Im}\,\theta_i = \mathrm{Ker}\,\theta_{i+1}$, $i = 0, \ldots, p-1$, *i.e.* dacă acest șir este exact cînd este considerat ca șir de fascicole de grupuri abeliene. Ex.: 1° $\mathcal{O}_X$ este un $\mathcal{O}_X$-modul cu înmulțire scalară evidentă. De asemenea, *fascicolul trivial* 0, definit prin $0(U) = \{0\}$ pentru orice mulțime deschisă U în X, este un $\mathcal{O}_X$-modul. 2° Dacă $\mathcal{F}_1$ și $\mathcal{F}_2$ sînt două $\mathcal{O}_X$-module, produsul direct $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ este un $\mathcal{O}_X$-modul cu înmulțirea scalară definită prin $\lambda(s_1, s_2) = (\lambda s_1, \lambda s_2)$ pentru $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$, $s_1 \in \mathcal{F}_1(U)$, $s_2 \in \mathcal{F}_2(U)$ și orice mulțime deschisă U în X. În mod similar se definește produsul direct $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ pentru orice familie $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{O}_X$-module; proiecțiile canonice $p_i: \mathcal{L} \to \mathcal{F}_i$, $i \in I$, sînt morfisme de $\mathcal{O}_X$-module. 3° Fiind dat un $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$, un *submodul* al lui $\mathcal{F}$ este un subfascicol de mulțimi $\mathcal{F}'$ al lui $\mathcal{F}$ cu proprietatea că, pentru orice mulțime deschisă U în X, $\mathcal{F}'(U)$ este un submodul al $\mathcal{O}_X(U)$-modulului $\mathcal{F}(U)$; $\mathcal{F}'$ este atunci, în particular, un subfascicol de grupuri abeliene al lui $\mathcal{F}$. Orice submodul $\mathcal{F}'$ al lui $\mathcal{F}$ este un $\mathcal{O}_X$-modul, cu înmulțirea scalară indusă de cea a lui $\mathcal{F}$ iar morfismul de incluziune $i: \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ un morfism de $\mathcal{O}_X$-module. Dacă $\mathcal{F}_X = \mathcal{O}_X$, submodulele lui $\mathcal{F}$ sînt exact idealele lui $\mathcal{O}_X$. Pentru ca un subfascicol de mulțimi $\mathcal{F}'$ al unui $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$ să fie un submodul al lui $\mathcal{F}$ este necesar și suficient ca, pentru orice punct $x \in X$, $\mathcal{F}'_x$ să fie un submodul al $\mathcal{O}_{X,x}$-modulului $\mathcal{F}_x$. 4° Dacă $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ este o familie de $\mathcal{O}_X$-module și $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$, atunci *suma directă* de fascicole de grupuri abeliene $\mathcal{F}' = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ este un submodul al lui $\mathcal{F}$. Notăm că, dacă I este o submulțime finită, atunci suma directă $\mathcal{F}'$ coincide cu produsul direct $\mathcal{F}$. În particular, avem $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$. Dacă $\mathcal{F}$ este un $\mathcal{O}_X$-modul și p un întreg $\geqslant 0$, se pune $\mathcal{F}^p = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}$ (de p ori) cînd $p \geqslant 1$ și $\mathcal{F}^p = 0$ cînd $p = 0$. 5° Fie $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modul și $\mathcal{F}'$ un submodul al lui $\mathcal{F}$. Fascicolul de grupuri abeliene $\mathcal{F}'' := \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ are o structură naturală de $\mathcal{O}_X$-modul, unic determinată prin condiția ca morfismul canonic $p: \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ să fie morfism de $\mathcal{O}_X$-module; se spune că $\mathcal{F}''$ este *$\mathcal{O}_X$-modulul cît* al lui $\mathcal{F}$ prin submodulul său $\mathcal{F}'$. 6° Fie $\theta: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfism de $\mathcal{O}_X$-module. Atunci nucleul Ker θ și imaginea Im θ sînt submodule ale lui $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ respectiv. De asemenea, conucleul Coker θ și coimaginea Coim θ sînt $\mathcal{O}_X$-module cît ale lui $\mathcal{G}$ și $\mathcal{F}$ respectiv, anume

$$\mathrm{Coker}\,\theta = \mathcal{G}/\mathrm{Im}\,\theta \quad \text{și} \quad \mathrm{Coim}\,\theta = \mathcal{F}/\mathrm{Ker}\,\theta.$$

Notăm că, pentru orice punct $x \in X$, izomorfismele canonice

$$(\mathrm{Ker}\,\theta)_x \simeq \mathrm{Ker}\,\theta_x, \quad (\mathrm{Im}\,\theta)_x \simeq \mathrm{Im}\,\theta_x,$$

$$(\mathrm{Coker}\,\theta)_x \simeq \mathrm{Coker}\,\theta_x, \quad (\mathrm{Coim}\,\theta)_x \simeq \mathrm{Coim}\,\theta_x$$

sînt izomorfisme de $\mathcal{O}_{X,x}$-module. 7° Fie $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ două $\mathcal{O}_X$-module. Se poate defini un prefascicol P de grupuri abeliene pe X punînd $P(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{G}(U)$ pentru orice mulțime deschisă U în X, și

$$\rho_V^U(P) = \rho_V^U(\mathcal{F}) \otimes \rho_V^U(\mathcal{G}),$$

pentru orice pereche de mulțimi U și V în X astfel încît $V \subset U$. Fascicolul de grupuri abeliene asociat prefascicolului P are o structură evidentă de

$\mathcal{O}_X$-modul; acest $\mathcal{O}_X$-modul se notează $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ și se numește *produsul tensorial* al lui $\mathcal{F}$ cu $\mathcal{G}$. Există izomorfisme canonice:

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \simeq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F};$$

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \simeq \mathcal{F} \simeq \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X;$$

$$(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \simeq (\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \text{ etc.}$$

8° Fie $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modul, U o mulțime deschisă în X și $\mathcal{O}_U$ restricția lui $\mathcal{O}_X$ la U. Atunci restricția lui $\mathcal{F}$ la U este un $\mathcal{O}_U$-modul, notat $\mathcal{F}|U$. 9° Fie $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ două $\mathcal{O}_X$-module. Avem un $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{H}$ definit prin $\mathcal{H}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F} \mid U, \mathcal{G} \mid U)$, morfismele de restricție, adunarea și înmulțirea scalară fiind evidente. Acest $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{H}$ se notează prin $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Avem izomorfisme canonice:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_2, \mathcal{G});$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F} \text{ etc.,}$$

unde $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ sînt $\mathcal{O}_X$-module arbitrare. 10° Fie $\varphi:(\mathcal{X}, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfism de spații inelate. Imaginea directă $\varphi_{0*}(\mathcal{O}_X)$ este un fascicol de inele pe Y. De asemenea, pentru orice $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$, imaginea directă topologică $\varphi_{0x}(\mathcal{F})$ este un $\varphi_{0*}(\mathcal{O}_X)$-modul. Cu ajutorul morfismului de fascicole de inele $\varphi_1: \mathcal{O}_Y \to \varphi_{0*}(\mathcal{O}_X)$, fascicolul $\varphi_{0*}(\mathcal{F})$ primește o structură evidentă de $\mathcal{O}_Y$-modul; acest $\mathcal{O}_Y$-modul se numește *imaginea directă inelată* a lui $\mathcal{F}$ prin φ și se notează $\varphi_*(\mathcal{F})$ sau $\varphi_*(\mathcal{F})$. Notăm că, pentru orice morfism de $\mathcal{O}_X$-module $\theta: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\varphi_*(\theta) := \varphi_{0*}(\theta)$ este un morfism de $\mathcal{O}_Y$-module de la $\varphi_*\mathcal{F}$ la $\varphi_*\mathcal{G}$. Astfel, imaginea directă inelată este un functor $\varphi_*: \mathrm{Mod}(X) \to \mathrm{Mod}(Y)$. 11° Fie $\varphi: (X, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfism de spații inelate. Imaginea inversă $\varphi_0^*\mathcal{O}_Y$ este un fascicol de inele pe X. Cu ajutorul morfismului de fascicole de inele $\varphi^1: \varphi_0^*\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ putem considera O_X ca $\varphi_0^*\mathcal{O}_Y$-modul.Pentru orice $\mathcal{O}_Y$-modul $\mathcal{G}$, imaginea inversă topologică $\varphi_0^*\mathcal{G}$ este de asemenea un $\varphi_0^*\mathcal{O}_Y$-modul, ceea ce permite definirea produsului tensorial $\varphi_0^*\mathcal{G} \otimes_{\varphi_0^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$, care este evident un $\varphi_0^*\mathcal{O}_Y$-modul, în particular un fascicol de grupuri abeliene pe X, dar primește o înmulțire scalară de $\mathcal{O}_X$-modul furnizată de al doilea factor. Acest $\mathcal{O}_X$-modul se numește *imaginea inversă inelată* a lui $\mathcal{G}$ prin φ și se notează $\varphi^*\mathcal{G}$ sau $\varphi^*(\mathcal{G})$. Avem un morfism canonic $\eta: \mathcal{G} \to \varphi_*\varphi^*\mathcal{G}$ obținut prin compunerea morfismului canonic $\alpha: \mathcal{G} \to \varphi_{0*}\varphi_0^*\mathcal{G}$ cu imaginea prin functorul φ_{0*} a morfismului evident $\varphi_0^*\mathcal{G} \to \varphi_0^*\mathcal{G} \otimes_{\varphi_0^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. Perechea $(\varphi^*\mathcal{G}, \eta)$ are proprietățile următoare: 1) $\varphi^*\mathcal{G}$ este un $\mathcal{O}_X$-modul și $\eta: \mathcal{G} \to \varphi_*\varphi^*\mathcal{G}$ un morfism de $\mathcal{O}_X$-module: 2) Pentru orice $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$ și orice morfism de $\mathcal{O}_Y$-module $\beta: \mathcal{G} \to \varphi_*\mathcal{F}$, există un unic morfism de $\mathcal{O}_X$-module $\beta^*: \varphi^*\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ astfel încît $\varphi_*(\beta^*) \circ \eta = \beta$. Proprietățile precedente pot fi considerate ca furnizînd o definiție axiomatică a imaginii inverse inelate. Cu ajutorul acestor proprietăți se vede că imaginea inversă inelată definită mai sus pentru $\mathcal{O}_Y$-module se extinde la un functor $\varphi^*: \mathrm{Mod}(Y) \to (\mathrm{Mod}\ X)$. *(M.J.)*

modulul unei măsuri v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn, spațiul reticulat al măsurilor cu semn, variație; cvasivariație; semivariație**

modulul unei măsuri Radon v. **măsură Radon**

modulul unui element v. **spațiu liniar ordonat**

monomorfism v. **categorie**

morfism v. **categorie**

morfism canonic (de trecere la fibră) v. **prefascicol**

multifuncție v. **integrala Kolmogorov**

multiplicatorul lui Euler v. **ecuație cu diferențiale totale exacte**

multiplicatorii lui Lagrange v. **extreme condiționate**

mulțime absorbantă v. **spațiu liniar**

mulțime absorbită v. **spațiu liniar**

mulțime analitică v. **spațiu C-analitic, mulțimi susliniene; mulțimi proiective; mulțimi analitice**

mulțime (o)**-anulabilă** v. **spațiu liniar reticulat de tipul** (o)**-mărginirii**

mulțime Baire v. **mulțimi boreliene și mulțimi Baire**

mulțime Bernstein v. **mulțime nemăsurabilă Lebesgue**

mulțime boreliană v. **mulțimi boreliene și mulțimi Baire**

mulțime bornivoră v. **mulțime mărginită** (topologic)

mulțime capacitabilă v. **capacitate**

mulțime cilindrică v. **măsuri afine și măsuri cilindrice**

mulțime compactă v. **spațiu topologic compact**

mulțime compactă polinomial convexă v. **domeniu Runge**

mulțime completă v. **șir generalizat Cauchy, spațiu liniar topologic complet**

mulțime conexă v. **spațiu topologic conex**

mulțime convexă v. **spațiu liniar**

mulțime cu proprietatea lui Darboux v. **atom al unei măsuri**

mulțime cvasicompactă v. **spațiu topologic compact**

mulțime de categoria I-a Baire, orice reuniune numărabilă de mulțimi rare într-un spațiu topologic. Sin.: *mulțime slabă.* O mulțime care nu este de categoria I-a Baire se numește de *categoria* a II-a *Baire.* Orice submulțime a unei **m.c. I B.** este o **m.c. I B.** Orice reuniune numărabilă de **m.c. I B.** este o mulțime de aceeași categorie.
Teorema lui Baire. Orice spațiu metric complet este o mulțime de categoria a II-a Baire.
Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic și $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții continue definite pe $\mathcal{X}$ cu valori reale astfel încît pentru orice $x \in \mathcal{X}$ există $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$.
Mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției f este o **m.c. I B.** *(Gh. Gr.)*

mulțime de categoria a II-a Baire v. **mulțime de categoria I-a Baire**

mulțime de convergență a unei serii de puteri v. **serie de puteri**

mulțime de măsură finită v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

mulțime de măsură σ-finită v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

mulțime densă v. **punct aderent**

mulțime dentabilă v. **proprietatea Radon-Nikodym**

mulțime de tip F_σ v. **mulțimi boreliene și mulțimi Baire**

mulțime de tip G_δ v. **mulțimi boreliene și mulțimi Baire**

mulțime derivată v. **punct aderent**

mulțime deschisă v. **topologie**

mulțime deschisă la dreapta (la stînga) v. **derivata Fréchet laterală**

mulțime deschisă olomorf convexă v. **domeniu de olomorfie**

mulțime deschisă pseudoconvexă v. **pseudoconvexitate**

mulțime determinantă Fie C o clasă de funcții reale definite pe intervalul I. Mulțimea $E \subset I$ este **m.d.** pentru C dacă din faptul că $f, g \in C$ și $f = g$ pe E rezultă că $f = g$ pe I. O mulțime E este determinantă pentru clasa derivatelor finite dacă și numai dacă măsura interioară Lebesgue a diferenței $I \setminus E$ este egală cu zero. *(S.M.)*

mulţime dirijată v. **mulţime ordonată**

mulţime echicontinuă de operatori liniari v. **mulţime egal continuă de operatori liniari**

mulţime echilibrată v. **spaţiu liniar**

mulţime egal continuă de operatori liniari, mulţime $\mathcal{U}$ de operatori liniari între două spaţii liniare topologice X, Y satisfăcînd condiţia: pentru orice vecinătate W a originii în Y există o vecinătate S a originii în X astfel ca $U(S) \subset W$, $\forall U \in \mathcal{U}$. O condiţie echivalentă este următoarea: pentru orice vecinătate W a originii în Y mulţimea $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U^{-1}(W)$ este o vecinătate a originii în X. Sin.: *mulţime echicontinuă de operatori liniari*. (*R.C.*)

mulţime elementară v. **măsură pe spaţiu produs, extinderea măsurilor pozitive aditive definite pe un clan**

mulţime esenţial negativă (relativ la o măsură) v. **măsuri pozitive şi măsuri cu semn**

mulţime esenţial pozitivă (relativ la o măsură) v. **măsuri pozitive şi măsuri cu semn**

mulţime esenţial separabilă (relativ la o măsură) v. **funcţie măsurabilă în raport cu o măsură**

mulţime filtrantă inferior (superior) v. **mulţime ordonată**

mulţime inductiv ordonată v. **mulţime ordonată**

mulţime integrabilă (în raport cu o măsură) v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan, spaţii** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **şi** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon), **măsură localizabilă**

mulţime integrabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **spaţii** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **şi** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)

mulţime invariantă (la o transformare care conservă măsură) v. **teorie ergodică**

mulţime invariantă (pentru un sistem dinamic), mulţime în spaţiul stărilor care odată cu un punct conţine întreaga traiectorie care trece prin acel punct. (*A.H.*)

mulţime închisă (relativ la o topologie τ), submulţime F a spaţiului topologic $(\mathcal{X}, \tau)$ avînd proprietatea că $\mathcal{X} \setminus F$ este mulţime deschisă. Se mai spune că F este *mulţime τ-închisă* iar dacă nu există posibilitatea unei confuzii că F este **m.î.** Familia **m.î.** din spaţiul topologic $\mathcal{X}$ are următoarele proprietăţi: i) $\mathcal{X}$ şi $\emptyset$ sînt **m.î.**; ii) Reuniunea oricăror două **m.î.** este o **m.î.**; iii) Intersecţia oricărei familii de **m.î.** este o **m.î.** O submulţime a unui spaţiu topologic este închisă dacă şi numai dacă conţine toate punctele sale de acumulare. Reuniunea dintre o mulţime şi mulţimea punctelor sale de acumulare este o **m.î.** (*Gh.Gr.*)

mulţime ω-limită (α**-limtă**) (pentru o traiectorie x a unui sistem dinamic), mulţimea tuturor punctelor ω-limită (α-limită) ale traiectoriei, *i.e.* mulţimea punctelor p pentru care există un şir $\{t_k\}_{k \geq 1}$, $\lim_{k \to \infty} x(t_k) = p$. **M.** ω**-l.** (α**-l.**) a unei traiectorii este mulţime invariantă. (*A.H.*)

mulţime liniar independentă v. **spaţiu liniar**

mulţime local măsurabilă (în raport cu o măsură) v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

mulţime local neglijabilă (în raport cu o măsură) v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan, măsură localizabilă, prelungirea măsurilor Radon**

mulţime majorată v. **mulţime ordonată**

mulţime mărginită (în sensul ordinei) v. **mulţime ordonată**

mulţime mărginită (topologic), submulţime A a unui spaţiu liniar topologic X cu proprietatea: pentru orice vecinătate W a originii în spaţiul X există un număr $\lambda > 0$ astfel ca $\lambda A \subset W$. Pentru ca o mulţime A să fie mărginită este necesar şi suficient ca pentru orice şir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din A şi orice şir $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de numere pozitive care converge către zero, şirul $\{\lambda_n x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ să fie convergent către elementul **0**. Orice submulţime finită a unui spaţiu liniar topologic este o **m.m.** O submulţime E a spaţiului liniar topologic X se numeşte *mulţime bornivoră* dacă absoarbe orice submulţime mărginită a spaţiului X. Se numeşte *bază de* **m.m.** sau *sistem fundamental de* **m.m.** într-un spaţiu liniar topologic X o mulţime $\mathcal{M}$ de submulţimi mărginite ale lui X astfel ca pentru orice submulţime mărginită A a lui X să existe $B \in \mathcal{M}$ cu $A \subset B$. Mulţimea tuturor submulţimilor mărginite, echilibrate şi închise ale unui spaţiu liniar topologic formează o bază de **m.m.** Într-un spaţiu local convex, mulţimea tuturor submulţimilor mărginite, echilibrate, închise şi convexe formează o bază de **m.m.** Într-un spaţiu liniar normat, mulţimea tuturor sferelor închise (sau deschise) cu centrul în origine şi cu raza n, unde n este un număr natural oarecare formează o bază de **m.m.** (*R.C.*)

mulţime (o-)**mărginită** v. **mulţime ordonată**

mulţime măsurabilă (în raport cu o măsură) v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan, extinderea măsurilor pozitive aditive definite pe un clan, prelungirea măsurilor Radon**

mulţime măsurabilă (în raport cu o măsură exterioară) v. **măsură exterioară**

mulţime măsurabilă (în raport cu o măsură Radon) v. **funcţii şi mulţimi măsurabile** (în raport cu o măsură Radon)

mulţime măsurabilă Borel v. **clasă de mulţimi**

mulţime măsurabilă Jordan v. **extinderea măsurilor pozitive aditive definite pe un clan**

mulţime măsurabilă Lebesgue v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

mulţime minorată v. **mulţime ordonată**

mulţime μ-negativă (**μ-pozitivă**) v. **măsuri pozitive şi măsuri cu semn**

mulţime neglijabilă (în raport cu o măsură) v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan, prelungirea măsurilor Radon**

mulţime nemăsurabilă Lebesgue Pe $\mathbb{R}$ considerăm relaţia de echivalenţă $a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. Mulţimea claselor de echivalenţă este nenumărabilă şi o vom considera ca o clasă $\mathcal{A}$ de părţi ale lui $\mathbb{R}$. Atunci, din fiecare mulţime $A \in \mathcal{A}$, A numărabilă, vom selecta cîte un element x_A. Obţinem mulţimea $\{x_A \mid A \in \mathcal{A}\}$, numită *mulţime Vitali*. Se arată că orice mulţime Vitali este nemăsurabilă Lebesgue. O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte *mulţime Bernstein* dacă are proprietatea că pentru orice $U \subset \mathbb{R}$, U nenumărabilă, $U \cap A$ şi $U \cap \complement A$ sînt nevide. Se arată că există mulţimi Bernstein, că orice parte măsurabilă Lebesgue a unei mulţimi Bernstein este de măsură Lebesgue nulă şi că orice mulţime Bernstein este nemăsurabilă Lebesgue.
Teorema lui Rademacher (de existenţă). Orice mulţime inclusă în $\mathbb{R}^n$ de măsură exterioară Lebesgue nenulă include o submulţime nemăsurabilă Lebesgue. (*I.C.*)

mulţime ordonată Fie X o mulţime de elemente. O relaţie ρ definită pentru anumite perechi de elemente ale lui X se numeşte *relaţie de preordine* dacă este *reflexivă* (*i.e.* $x\rho x$, $\forall x \in X$) şi *tranzitivă* (*i.e.* din $x\rho y$ şi $y\rho z$ rezultă $x\rho z$). O mulţime în care s-a dat o relaţie de preordine se numeşte *mulţime preordonată*. O relaţie de preordine ρ în mulţimea X se numeşte *relaţie de ordine* dacă este *antisimetrică* (*i.e.* din $x\rho y$ și $y\rho x$ rezultă $x = y$). O mulțime în care s-a dat o relație de ordine, se numește **m.o.** Într-o **m.o.** relația de ordine se notează, de obicei, cu semnul $\leqslant$. Dacă X este o **m.o.** se pune: $x \geqslant y$ dacă $y \leqslant x$; $x < y$ dacă $x \leqslant y$ și $x \neq y$; $x > y$ dacă $x \geqslant y$ și $x \neq y$. Dacă ρ este o relație de preordine într-o mulțime X, atunci relația $x \sim y$ în X definită prin condițiile: $x\rho y$ și $y\rho x$ este o relație de echivalență iar mulțimea cît X/ρ devine o **m.o.** punînd $\hat{x} \leqslant \hat{y}$, ($\hat{x}$ fiind clasa definită de x) dacă $x\rho y$. Două **m.o.** X, Y se numesc *izomorfe* dacă există o bijecție $h: X \to Y$ astfel ca $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow h(x_1) \leqslant h(x_2)$. Fie X o **m.o.** O submulțime E a mulțimii X se spune că este *minorată* dacă există $v \in X$ astfel ca $v \leqslant x$, $\forall x \in E$; se spune că este *majorată* dacă există $y \in X$ astfel ca $x \leqslant y$, $\forall x \in E$. Elementele v și y se numesc, respectiv, un *minorant* și un *majorant* al mulțimii E. Mulțimea E se spune că este *mărginită* (în sensul ordinei) sau *(o)-mărginită* dacă este minorată și majorată. Un element $a \in X$ se numește *element maximal* (resp. *element minimal*) dacă din $a \leqslant x$ (resp. $x \leqslant a$) rezultă $x = a$. Se numește *segment* (în sensul ordinei) sau *(o)-segment* determinat de două elemente a, b din X, și se notează $[a, b]$, mulțimea elementelor $x \in X$ cu $a \leqslant x \leqslant b$. O submulțime E a mulțimii X se numește *plină* dacă din $a, b \in E$ rezultă $[a, b] \subset E$. Cea mai mică mulțime plină care conține o submulțime $A \subset X$ se numește *acoperirea plină* a mulțimii A și se notează $\mathrm{pl}(A)$. Dacă o submulțime E a mulțimii X este minorată și dacă mulțimea A a minorantelor are *cel mai mare element*, *i.e.* există $a_0 \in A$ astfel ca $x \leqslant a_0$, $\forall x \in A$, atunci acest element se numește *marginea inferioară* a mulțimii E și se notează $\inf E$. Se mai numește *infimum*. Dacă E este majorată și dacă mulțimea B a majorantelor are *cel mai mic element*, *i.e.* există $b_0 \in B$ astfel ca $b_0 \leqslant x$, $\forall x \in B$, atunci acest element se numește *marginea superioară* a mulțimii E și se notează $\sup E$. Se mai numește și *supremum*. Pentru un număr finit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elemente din X se utilizează și notațiile $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ sau $\bigwedge_{j=1}^{n} x_j$ pentru marginea inferioară, dacă există, și notațiile $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ sau $\bigvee_{j=1}^{n} x_j$ pentru marginea superioară, dacă există. Dacă $\{x_j\}_{j \in J}$ este o familie de elemente din X și dacă mulțimea elementelor familiei are margine inferioară (resp. margine superioară) se utilizează notația $\bigwedge_{j \in J} x_j \left(\text{resp. } \bigvee_{j \in J} x_j\right)$. Dacă $E \subset X$ și dacă există $\inf E$ și $\sup E$, atunci $\inf E \leqslant \sup E$; dacă $E_1 \subset E_2 \subset X$ și dacă există $\inf E_1$ și $\inf E_2$, atunci $\inf E_1 \geqslant \inf E_2$, iar dacă există $\sup E_1$ și $\sup E_2$, atunci $\sup E_1 \leqslant \sup E_2$. Dacă $A, B \subset X$, dacă există $\sup A$ și $\inf B$ și dacă $x \leqslant y$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, atunci $\sup A \leqslant \inf B$. **M.o.** X se spune că are *proprietatea interpolatorie* dacă pentru orice elemente x^1, x_2, y_1, y_2 pentru care $x_i \leqslant y_j$, $i, j = 1, 2$, există un element $z \in E$ cu $x_i \leqslant z \leqslant y_j$, $i, j = 1, 2$. **M.o.** X se spune că este *dirijată la dreapta* sau *filtrantă superior* (resp. *dirijată la stînga* sau *filtrantă inferior*) dacă pentru orice elemente $x, y \in X$ există $z \in X$ astfel ca $x \leqslant z$ și $y \leqslant z$ (resp. $z \leqslant x$ și $z \leqslant y$). O mulțime dirijată la dreapta se numește, pe scurt, *mulțime dirijată*. O **m.o.** în care pentru orice două elemente x, y există $x \wedge y$ și $x \vee y$ se numește *mulțime reticulată* sau *latice*. Într-o mulțime reticulată, orice submulțime finită are margine inferioară și margine superioară. Se numește *submulțime reticulată* sau *sublatice* a unei mulțimi reticulate X orice submulțime E cu proprietatea că din $x, y \in E$ rezultă $x \wedge y$, $x \vee y \in E$. Fie X o mulțime reticulată. Se spune că X este *(o)-completă* dacă pentru orice submulțime $E \subset X$ există margine superioară și margine inferioară. O mulțime reticulată care este (o)-completă se mai numește *latice completă*. O mulțime reticulată X se spune că este *relativ (o)-completă* dacă pentru orice submulțime (o)-mărginită $E \subset X$ există margine inferioară și margine superioară. Dacă în definițiile laticii complete și laticii relativ complete submulțimea E este presupusă numărabilă, atunci se obțin, respectiv, definiția noțiunii de *latice σ-completă* și cea de *latice relativ σ-completă*. Dacă X este o latice relativ completă, atunci ea are următoarele proprietăți: 1) Pentru orice submulțime minorată există marginea inferioară; 2) Pentru orice submulțime majorată există marginea superioară. Reciproc, dacă o latice X are una din proprietățile 1)—2), atunci X este o latice relativ completă. Se numește *latice distributivă* o latice în care pentru orice elemente x, y, z are loc egalitatea $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Această condiție este echivalentă cu condiția că pentru orice elemente x, y, z să aibă loc egalitatea $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Într-o latice distributivă, pentru orice elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ și orice element x, au loc egalitățile

$$x \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{n} y_j\right) = \bigvee_{j=1}^{n} (x \wedge y_j), \quad x \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{n} y_j\right) = \bigwedge_{j=1}^{n} (x \vee y_j).$$

Se spune că laticea X verifică *legile de distributivitate infinită* dacă sînt satisfăcute următoarele condiții: i) Dacă $\{y_j\}_{j \in J}$ este o familie oarecare de elemente din X și dacă există $\bigvee_{j \in J} y_j$, atunci există și $\bigvee_{j=1} (x \wedge y_j)$, oricare ar fi $x \in X$, și are loc egalitatea

$$x \wedge \left(\bigvee_{j \in J} y_j\right) = \bigvee_{j \in J} (x \wedge y_j);$$

ii) Dacă $\{y_j\}_{j \in J}$ este o familie oarecare de elemente din X și dacă există $\bigwedge_{j \in J} y_j$, atunci există și $\bigwedge_{j \in J} (x \vee y_j)$, oricare ar fi $x \in X$, și are loc egalitatea

$$x \vee \left(\bigwedge_{j \in J} y_j\right) = \bigwedge_{j \in J} (x \vee y_j).$$

Se numește *latice booleană* (sau *algebră booleană*, sau *algebră Boole*) o latice distributivă F în care există cel mai mic element **0**, cel mai mare element u și în care pentru orice element $e \in F$ există un element $e^* \in F$ cu $e \wedge e^* = 0$ și $e \vee e^* = u$. Elementul e^* se numește *complementul* lui e. În orice latice booleană sînt îndeplinite legile de distributivitate infinită. Orice latice booleană este izomorfă cu mulțimea (ordonată prin incluziune) părților deschise-închise ale unui spațiu topologic compact total neconex. O **m.o.** în care orice două elemente x, y sînt „comparabile", *i.e.* sau $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$, se numește *mulțime total ordonată*. O **m.o.** în care orice submulțime total ordonată este majorată se numește *mulțime inductiv ordonată*. În orice mulțime inductiv ordonată există elemente maximale. Această propoziție este numită *lema lui Zorn* sau *teorema lui Zorn*. (*R.C.*)

mulțime perfectă v. **punct izolat**

mulțime plană v. **varietate liniară**

mulțime plină v. **mulțime ordonată**

mulțime precompactă v. **mulțime total mărginită** (într-un spațiu liniar topologic)

mulțime preordonată v. **mulțime ordonată**

mulțime proiectivă (de clasă *n*) v. **mulțimi susliniene; mulțimi proiective; mulțimi analitice**

mulțime rară, submulțime A a unui spațiu topologic avînd proprietatea int $\bar{A} = \emptyset$. Mulțimea A este rară dacă și numai dacă pentru orice mulțime deschisă și nevidă D există mulțimea deschisă și nevidă G astfel încît $G \subset D$ și $A \cap G = \emptyset$. O mulțime închisă este rară dacă și numai dacă coincide cu frontiera sa. O submulțime a unei **m.r.** este o **m.r.** Frontiera unei mulțimi deschise sau a unei mulțimi închise, este o **m.r.** Orice reuniune finită de **m.r.** este o m.r. (*Gh.Gr.*)

mulțime regulată la dreapta (la stînga) v. **măsură regulată**

mulțime relativ compactă v. **spațiu topologic compact**

mulțime relativ cvasicompactă v. **spațiu topologic compact**

mulțime reticulată v. **mulțime ordonată**

mulțime secvențial completă v. **spațiu liniar topologic complet**

mulțime simetrică v. **spațiu liniar**

mulțime slabă v. **mulțime de categoria I-a Baire**

mulțime solidă v. **spațiu liniar ordonat**

mulțime staționară Fie $\mathcal{C}$ o clasă de funcții reale definite pe intervalul I. Mulțimea $E \subset I$ este staționară pentru $\mathcal{C}$ dacă din faptul că $f \in \mathcal{C}$ este constantă pe E rezultă că f este constantă pe I. Mulțimea E este staționară pentru clasa funcțiilor cu proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă numărul cardinal al complementarei lui E față de I este inferior puterii continuului. Pentru clasa funcțiilor Darboux de prima clasă Baire o mulțime este staționară exact atunci cînd complementara ei față de I nu conține nici o mulțime perfectă nevidă. (*S.M.*)

mulțime subiacentă unui spațiu topologic v. **functor**

mulțime suficientă de seminorme v. **spațiu local convex**

mulțime susliniană v. **mulțimi susliniene**; **mulțimi proiective**; **mulțimi analitice**

mulțime total mărginită (într-un spațiu liniar topologic X), submulțime A a lui X cu proprietatea: pentru orice vecinătate W a originii în X, există o submulțime finită E a lui X astfel ca $A \subset W + E$. Sin.: *mulțime precompactă*. Orice **m.t.m.** este o mulțime mărginită. (*R.C.*)

mulțime total mărginită (într-un spațiu metric) v. **distanță**

mulțime total ordonată v. **mulțime ordonată**

mulțime totală (în sensul ordinei) v. **spațiu liniar ordonat**

mulțime totală (într-un spațiu Hilbert) v. **spațiu Hilbert**

mulțime universal măsurabilă Fie (T, τ) un spațiu topologic și $\mathcal{B}$ tribul mulțimilor sale boreliene. Dacă $\mu: \mathcal{B} \to [0, \infty)$ este o măsură pozitivă și finită și $A \subset T$, se vede că A este μ-măsurabilă dacă și numai dacă există U, V în $\mathcal{B}$ cu $U \subset A \subset V$ și $\mu(V \setminus U) = 0$. O mulțime $A \subset T$ se numește **m.u.m.** dacă este μ-măsurabilă pentru orice măsură pozitivă și finită $\mu: \mathcal{B} \to [0, \infty)$. Evident că mulțimile boreliene sînt universal măsurabile. Într-un spațiu polonez mulțimile susliniene sînt universal măsurabile (*teorema lui Choquet*). (*I.C.*).

mulțime Vitali v. **mulțime nemăsurabilă Lebesgue**

mulțimea Lebesgue a unei funcții v. **punct Lebesgue al unei funcții**

mulțimea lui Cantor v. **spațiu topologic de tip Cantor**

mulțimea lui Kluvanek a unei măsuri v. **măsură vectorială**

mulțimea numerelor întregi Fie mulțimea tuturor perechilor ordonate de numere naturale. Două perechi $\langle a, b\rangle$ și $\langle c, d\rangle$ sînt echivalente dacă $a + d = b + c$. Orice clasă de echivalență astfel obținută este un număr întreg. Numărul zero este definit de clasa lui $\langle a, a\rangle$. Numerele întregi pozitive sînt clasele definite de perechile $\langle a, b\rangle$ pentru care $a \geqslant b$. Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi formează un grup comutativ față de operația de adunare. Ordonarea lui $\mathbb{Z}$ şi operaţiile în $\mathbb{Z}$ se definesc pe baza definiţiilor introduse şi a modului în care s-a operat cu mulţimea $\mathbb{N}$. (*S.M.*)

mulţimea numerelor naturale, orice mulţime nevidă $\mathbb{N}$ pentru care există o aplicaţie $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile: i) Există $1 \in \mathbb{N}$ astfel încît $S(x) \neq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{N}$; ii) Pentru orice $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 1$, există şi este unic, $y \in \mathbb{N}$ astfel ca $S(y) = x$; iii) Dacă $M \subset \mathbb{N}$ are proprietăţile: $1 \in M$ şi $(a \in M \Rightarrow S(a) \in M)$, atunci $M = \mathbb{N}$ (*axioma inducţiei complete*). Aplicaţia S se numeşte *lege de succesiune*. Elementul $S(x)$ se numeşte *succesorul* lui X. Elementul 1 se numeşte *prim element* al mulţimii $\mathbb{N}$ în raport cu aplicaţia S. Dacă $(\mathbb{N}, S)$ şi $(\mathbb{N}', S')$ sînt două mulţimi ale numerelor naturale, atunci ele sînt izomorfe în sensul că există o bijecţie $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ astfel încît $\varphi(S(x)) = S'(\varphi(x))$ pentru orice $x \in \mathbb{N}$. Definiţia axiomatică a **m.n.n.** a fost dată în 1891 de Peano, axiomele precedente numindu-se şi *axiomele lui Peano*. Structura algebrică a **m.n.n.** se defineşte prin

$$n + 1 = S(n),\ n + (m + 1) = S(n + m);$$
$$n1 = n,\ n(m + 1) = nm + n, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Dacă $n, m \in \mathbb{N}$ se spune că n este mai mic decît m şi se scrie $n < m$ dacă există $x \in \mathbb{N}$ astfel ca $n + x = m$. Relaţia $x \leqslant y \Leftrightarrow (x = y$ sau $x < y)$ este o relaţie de ordine totală pe $\mathbb{N}$. (*Gh.Gr.*)

mulţimea valorilor unei măsuri vectoriale Fie o σ-algebră $\mathcal{T}$ de părţi ale mulţimii T şi un spaţiu Banach X. Dacă $m: \mathcal{T} \to X$ este o măsură vectorială numărabil aditivă, se arată că $m(\mathcal{T})$, mulţimea valorilor lui m, este o mulţime relativ slab compactă în X.

Teorema de convexitate a lui Liapunov. Dacă X este finit-dimensional şi m este non-atomică rezultă că $m(\mathcal{T})$ este o mulţime compactă şi convexă.

Extensia la spaţii infinit-dimensionale este falsă. De exemplu, dacă μ este măsura Lebesgue pe $[0, 1]$ şi $X = L^1(\mu)$, putem considera σ-algebra $\mathcal{T}$ a mulţimilor boreliene pe $[0,1]$ şi măsura $m: \mathcal{T} \to X$, $m(A) = \widetilde{\varphi}_A$. Se arată că m este cu variaţie mărginită, non-atomică, $m(\mathcal{T})$ este închisă, dar $m(\mathcal{T})$ nu este nici compactă nici convexă. Se poate arăta (revenim la cazul general) că următoarele afirmaţii sînt echivalente: 1) Pentru orice $A \in \mathcal{T}$, mulţimea $\{m(B) \mid B \in \mathcal{T}, B \subset A\}$ este slab compactă şi convexă; 2) Pentru orice $A \in \mathcal{T}$ există $B \in \mathcal{T}$, $B \subset A$ astfel încît $m(B) = \dfrac{1}{2} m(A)$. Dacă X are proprietatea Radon-Nikodym şi $m: \mathcal{T} \to X$ este numărabil aditivă, cu variaţie mărginită şi non-atomică, rezultă că închiderea lui $m(\mathcal{T})$ în X este convexă şi compactă (*teorema lui Uhl*). Rezultatul general este următorul

Teorema lui Knowles. Fie $m: \mathcal{T} \to X$, ca la început, şi fie $\mu: \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$ o măsură pozitivă finită numărabil aditivă cu proprietatea că pentru orice $A \in \mathcal{T}$ avem $\mu(A) = 0$ dacă şi numai dacă $m(B) = 0$ pentru orice $B \in \mathcal{T}$, $B \subset A$ (de exemplu, μ poate fi furnizată de teorema lui Bartle-Dunford-Schwartz).

Următoarele afirmaţii sînt echivalente: 1) Pentru orice mulţime $A \in \mathcal{T}$, mulţimea $\{m(B) \mid B \subset A, B \in \mathcal{T}\}$ este slab compactă şi convexă; 2) Pentru orice mulţime $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) > 0$ există o funcţie $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ cu $f(t) = 0$ pentru orice t din $T \setminus A$ şi $\|f\|_\infty > 0$ şi astfel încît $\int f\, dm = 0$. Aici $\int f\, dm = \lim\limits_n \int f_n\, dm$, unde $\{f_n\}_n$ este un şir de funcţii μ-etajate cu proprietatea că $f_n \to f$ în $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Procedeul de definire a integralei $\int f\, dm$ este acelaşi cu cel descris la **măsură spectrală.** Revenind la rezultatul cuprins în teorema de convexitate a lui Liapunov, vom considera o măsură vectorială numărabil aditivă şi non-atomică $m: \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$, unde $\mathcal{T}$ este o σ-algebră de părţi ale lui T. Ştim că $m(\mathcal{T})$ este o mulţime compactă şi convexă în $\mathbb{R}^n$ care conţine punctul 0. Nu orice mulţime compactă şi convexă care îl conţine pe 0 este mulţimea valorilor unei măsuri. Se numeşte *zonoid* o mulţime A inclusă în $\mathbb{R}^n$ care este **m.v.m.v.** non-atomice $m: \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$. Se arată că dacă A este un zonoid atunci: a) Pentru orice x din $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $0 \in A + x$, rezultă că $A + x$ este zonoid unde $(A + x) = \{u + x \mid u \in A\}$); b) Dacă $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este liniară, $T(A)$ este un zonoid; c) Mulţimea A admite ca centru de simetrie punctul $\frac{1}{2}\, m(T)$. Se mai arată că dacă B este mulţimea valorilor unei măsuri $m: \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$ care nu este non-atomică, atunci acoperirea convexă închisă a lui B este un zonoid. Se arată că dacă $n \leqslant 2$, atunci orice mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ care este compactă, convexă, conţine pe 0 şi are un centru de simetrie este un zonoid. Dacă $n \geqslant 3$ situaţia este mai nuanţată. Să considerăm deci $n \geqslant 3$ şi un număr $1 \leqslant p < \infty$ şi să notăm

$$B(n, p) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ |x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p \leqslant 1\}.$$

De asemenea, $B(n, \infty) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max |x_i| \leqslant 1\}$. Atunci, dacă $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $B(n, p)$ este un zonoid, iar dacă $1 \leqslant p < 2$, $B(n, p)$ nu este un zonoid. (*I.C.*)

mulţimi boreliene şi mulţimi Baire Fie (T, τ) un spaţiu topologic. O mulţime $A \subset T$ se numeşte *mulţime de tip* G_δ sau *mulţime* G_δ (resp. *mulţime de tip* F_σ sau *mulţime* F_σ) dacă există un şir $\{A_n\}_n$ de mulţimi deschise (resp. închise) astfel încît $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \left(\text{resp. } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Dacă T este metrizabil, orice mulţime închisă este de tip G_δ şi orice mulţime deschisă este de tip F_σ. Fie acum (T, τ) un spaţiu local compact. Notăm cu $\mathcal{B}$ semitribul generat de mulţimile compacte, semitrib numit *semitribul mulţimilor boreliene relativ compacte*. De asemenea, notăm cu $\mathcal{B}_0$ semitribul generat de mulţimile compacte de tip G_δ, numit *semitribul mulţimilor Baire relativ compacte*. Dacă T este metrizabil sau are bază numărabilă, atunci orice mulţime compactă este de tip G_δ şi rezultă că $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$. Pentru orice A din $\mathcal{B}$, există o mulţime compactă K cu proprietatea că $A \subset K$. Fie $\mathcal{B}(T)$ σ-algebra mulţimilor boreliene ale lui T. Se verifică atunci faptul că $\mathcal{B}(T) = \mathcal{B}_\lambda$ este clasa locală generată de $\mathcal{B}$. *i.e.* pentru o mulţime $A \subset T$ avem echivalenţa: $A \in \mathcal{B}(T) \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{B}$ pentru orice $B \in \mathcal{B}$. De fapt, $A \in \mathcal{B}(T) \Leftrightarrow A \cap K \in \mathcal{B}$ pentru orice mulţime compactă K. Se justifică mai bine astfel faptul că o mulţime $A \in \mathcal{B}$ se numeşte *mulţime boreliană relativ compactă*. Se arată că $A \in \mathcal{B}_0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{B}$ şi φ_A este funcţie de prima clasă Baire, ceea ce justifică mai bine de ce pentru $A \in \mathcal{B}_0$ se spune că A este *mulţime Baire relativ compactă*. O mulţime A care aparţine tribului generat de mulţimile compacte G_δ (cu alte cuvinte A este în tribul generat de $\mathcal{B}_0$) se numeşte *mulţime Baire*. Dacă T este σ-compact, *i.e.* există un şir $\{K_n\}_n$ de mulţimi compacte cu $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = T$, rezultă că $\mathcal{B}(T)$ este tribul generat de mulţimile compacte. Revenim la cazul general. Se arată că pentru o mulţime deschisă $A \subset T$ sînt echivalente afirmaţiile: 1) A este relativ compactă; 2) $A \in \mathcal{B}$; 3) $A \in \mathcal{B}_0$; 4) A este F_σ. Dacă A este compactă şi $A \in \mathcal{B}_0$, atunci A este G_δ. Mulţimile deschise din $\mathcal{B}_0$ formează o bază pentru topologia lui T şi orice punct are un sistem fundamental de vecinătăţi compacte de tip G_δ. Se numeşte *măsură boreliană* (*pozitivă*), o măsură numărabil aditivă $\mu: \mathcal{B}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietatea că $\mu(K) < \infty$ pentru orice mulţime compactă K. Rezultă că $\mu(B) < \infty$ pentru orice $B \in \mathcal{B}$. Deoarece orice măsură finită pe un clan se prelungeşte unic la o măsură pe tribul generat de respectivul clan, rezultă că putem defini în mod echivalent o măsură boreliană (pozitivă) ca fiind o măsură numărabil aditivă, pozitivă şi finită $\mu: \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$. Similar, o *măsură Baire* (*pozitivă*) este o măsură numărabil aditivă, pozitivă şi finită $\mu: \mathcal{B}_0 - \mathbb{R}_+$. Dacă X este un spaţiu Banach, numim *măsură boreliană* (*vectorială*) o măsură numărabil aditivă $m: \mathcal{B} \to X$ şi numim *măsură Baire* (*vectorială*) o măsură numărabil aditivă $m: \mathcal{B}_0 \to X$. În toate cazurile, două măsuri boreliene care coincid pe mulţimile compacte (resp. două măsuri Baire care coincid pe mulţimile compacte G_δ) sînt egale. Orice mulţime închisă sau deschisă este măsurabilă în raport cu orice măsură boreliană. Orice funcţie continuă este măsurabilă în raport cu orice măsură boreliană. Dacă Y este un spaţiu Banach, m este o măsură boreliană sau Baire şi $1 \leqslant p \leqslant \infty$, atunci orice funcţie continuă cu suport compact este în $\mathcal{L}^p_Y(m)$ (v. şi **spaţii** L^p). (*I.C.*)

mulţimi echivalente de seminorme v. **spaţiu local convex**

mulţimi susliniene; mulţimi proiective; mulţimi analitice I. Fie T o mulţime şi $\mathcal{A}$ o clasă de părţi ale lui T. Vom considera mulţimea $\mathbb{N}_\infty$ a tuturor sistemelor finite $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ de numere naturale $\left(i.e.\ \mathbb{N}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n\right)$ şi o aplicaţie $T: \mathbb{N}_\infty \to \mathcal{A}$. Notăm pentru orice $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ din $\mathbb{N}_\infty$ prin $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ pe $T(i)$. De asemenea, vom considera mulţimea $\mathbb{N}^\infty$ a tuturor şirurilor $s = (i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$ de numere naturale. Pentru fiecare $s \in \mathbb{N}^\infty$ ca mai sus şi fiecare număr natural $n \geqslant 1$ se consideră secţiunea $s(n) \in \mathbb{N}_\infty$ dată prin $s(n) = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Aşadar, dacă $s = (i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$ este în $\mathbb{N}^\infty$ putem forma mulţimea $A(T, s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{s(n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. În final, formăm mulţimea $A(T) = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^\infty} A(T, s)$. Mulţimea $A(T)$ se numeşte *mulţime $\mathcal{A}$-susliniană* (sau *mulţime susliniană*, sau *mulţime Suslin*). Se mai spune că mulţimea $A(T)$ s-a obţinut din sistemul $\{A_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$ prin aplicarea operaţiilor susliniene. Aşadar, totalitatea mulţimilor de forma $A(T)$, obţinute cînd T parcurge mulţimea tuturor funcţiilor $T: \mathbb{N}_\infty \to \mathcal{A}$, formează clasa de părţi $S(\mathcal{A})$ a mulţimilor $\mathcal{A}$-susliniene. Se arată că $S(\mathcal{A})$ este închisă la operaţiile susliniene (deci o intersecţie şi o reuniune numărabilă de mulţimi din $S(\mathcal{A})$ este tot în $S(\mathcal{A})$). Dacă $\mu^*: \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, unde $\mathcal{P}(T)$ este mulţimea tuturor părţilor lui T, este o măsură exterioară şi $\mathcal{M}$ este clasa mulţimilor măsurabile în raport cu μ^* se arată că $S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$.

II. În cele ce urmează vom considera (T, τ) un spaţiu topologic care este spaţiu polonez, *i.e.* există un spaţiu metric complet separabil (X, d) şi un homeomorfism $h: X \to T$. Vom introduce mulţimile proiective. Anume, *mulţimile proiective de clasă* 0 sînt exact mulţimile boreliene ale lui T. Apoi, definim mulţimile proiective de clasă n, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, după cum urmează. O mulţime $A \subset T$ se numeşte *mulţime proiectivă de clasă* $2n + 1$, $n \geqslant 0$, dacă există o mulţime proiectivă $B \subset T$ de clasă $2n$ şi o funcţie continuă $f: B \to A$ care este şi surjectivă. O *mulţime proiectivă de clasă* $2n$ este o mulţime $A \subset T$ cu proprietatea că există o mulţime proiectivă $B \subset T$ de clasă $2n - 1$ astfel încît $A = T \setminus B$. Mulţimile proiective de clasă 1 se mai numesc *mulțimi analitice* (sau *mulțimi susliniene*, sau *mulțimi Suslin*). Legătura cu definiția anterioară este următoarea: mulțimile analitice (sau susliniene în sensul nou) sînt exact mulțimile $\mathscr{A}$-susliniene, unde $\mathscr{A}$ este clasa mulțimilor închise ale lui T (sau, echivalent, $\mathscr{A}$ este clasa mulțimilor boreliene ale lui T). Se mai arată că o mulțime $A \subset T$ este analitică dacă și numai dacă există o aplicație continuă și surjectivă $f: I \to A$, unde I este mulțimea numerelor iraționale din $[0, 1]$ cu topologia indusă de $[0, 1]$. De asemenea, o reuniune sau o intersecție numărabilă de mulțimi proiective de clasă n este mulțime proiectivă de clasă n. Justificarea denumirii de mulțime proiectivă este dată de următoarea caracterizare. O mulțime $A \subset T$ este proiectivă de clasă n impar dacă și numai dacă există o mulțime proiectivă de clasă $n - 1$, $B \subset T \times T$ și astfel încît $p(B) = A$, unde $p: T \times T \to T$ este proiecția canonică $p(x, y) = x$. Menționăm că există mulțimi proiective de orice clasă și clasele proiective nu se suprapun. De exemplu, în spațiul Banach $C([0, 1]) = \{f : T \to \mathbb{R} \mid f$ este continuă$\}$ cu norma $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$ mulțimea funcțiilor derivabile este analitică și nu este boreliană. Mulțimile analitice care au complementare analitice formează o σ-algebră care include σ-algebra mulțimilor boreliene. (*I.C.*)

mulțimi mutual disjuncte v. **funcție de mulțime**

N

nod (al unui sistem dinamic $x' = f(x), f(x_0) = 0$), punct staționar, x_0 (soluție constantă, punct de echilibru), cu proprietatea că valorile proprii ale matricii $(Df)(x_0)$ (cu altă notație, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, matricea jacobiană) sînt reale, nenule, de același semn. Dacă valorile proprii sînt negative, **n.** este ***stabil*** și reprezintă mulțimea ω-limită pentru traiectoriile care intersectează o vecinătate a sa. Valorile proprii fiind reale, traiectoriile tind către un **n.** stabil fără spiralare (aperiodic); exemplul cel mai simplu îl reprezintă micile oscilații ale unui pendul cu amortizare mare. (*A.H.*)

nod multiplu v. **interpolare**

nod simplu v. **interpolare**

nod stabil v. **nod**

norma generată de un produs scalar v. **spațiu Hilbert**

norma superior v. **spațiul funcțiilor continue cu suport compact**

normala exterioară v. **integrala pe o varietate riemanniană**

normă v. **spațiu liniar normat**

normă (o)**-continuă** v. **spațiu reticulat normat**

normă (ω)**-continuă** v. **spațiu reticulat normat**

normă cvasimonotonă v. **spațiu liniar ordonat topologic**

normă monotonă v. **spațiu liniar ordonat topologic**

normă solidă v. **spațiu reticulat normat**

nucleu Hilbert-Schmidt v. **alternativa Fredholm**

nucleu măsurabil v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

nucleu Poisson v. **integrala Poisson**

nucleul Bergman Dacă Ω este o mulțime deschisă și mărginită în $\mathbb{C}^n$ $\mathscr{H}^2(\Omega) := \left\{f \in \mathcal{O}(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega |f|^2 \,d\lambda < \infty\right\}$ este un spațiu Hilbert netrivial, în fapt un subspațiu al lui $L^2(\Omega, \lambda)$, unde λ este măsura Lebesgue în $\mathbb{C}^n$. După teorema de reprezentare a lui Riesz, pentru orice punct $z \in \Omega$, există o unică funcție olomorfă $K_\Omega(\cdot, z) \in \mathscr{H}^2(\Omega)$ astfel încît

$$f(z) = \int_\Omega f(\zeta)\, \overline{K_\Omega(\zeta, z)}\, d\lambda(\zeta)$$

pentru orice $f \in \mathscr{H}^2(\Omega)$. Funcția $K_\Omega: \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ astfel definită se numește **n.B.** al lui Ω. Dacă $\{\Phi_\nu\}$ este o bază ortonormală a spațiului Hilbert $\mathscr{H}^2(\Omega)$, **n.B.** al lui Ω este dat de seria

$$K_\Omega(\zeta, z) = \sum_\nu \Phi_\nu(\zeta)\, \overline{\Phi_\nu(z)}, \quad \zeta, z \in \Omega;$$

în particular,

$$K_\Omega(\zeta, z) = \overline{K_\Omega(z, \zeta)}, \quad \zeta, z \in \Omega.$$

Ex.: 1° Dacă $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 1\}$, *i.e.* Ω este bila unitate în $\mathbf{C}^n$, atunci

$$K_\Omega(\zeta, z) = \frac{n!}{\pi^n \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \bar{z}_j\right)^{n+1}}, \quad \zeta, z \in \Omega.$$

2° Dacă $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_j| < 1, j = 1, \ldots, n\}$, *i.e.* Ω este polidiscul unitate în $\mathbf{C}^n$, atunci

$$K_\Omega(\zeta, z) = \frac{1}{\pi^n (1 - \zeta_1 \bar{z}_1)^2 \ldots (1 - \zeta_n \bar{z}_n)^2}, \quad \zeta, z \in \Omega.$$

Notăm că, pentru orice $z \in \Omega, K_\Omega(z, z) > 0$ și că funcția $\varphi(z) := \log K_\Omega(z, z)$ este strict plurisubarmonică pe Ω, deci

$$H_\Omega := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}\bar{z}_j$$

este o metrică hermitiană pe Ω, numită *metrica Bergman*. Prin *metrică hermitiană* pe o varietate complexă M se înțelege o familie $H = \{H_x\}_{x \in M}$ cu proprietățile următoare: 1) Pentru orice punct $x \in M$, $<.,.>_x := H_x$ este un produs scalar hermitian în spațiul tangent olomorf $T'(M)_x$; 2) Pentru orice hartă locală $\alpha = (z_1, \ldots, z_n)$ a lui M și orice pereche de indici $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}$, funcția complexă h_{ij} pe U_α definită prin $h_{ij}(x) := \left\langle \frac{\partial}{\partial z_i}(x), \frac{\partial}{\partial z_j}(x) \right\rangle_x$ este de clasă C^∞, unde U_α este domeniul lui α. Din 2) rezultă că

$$H \mid U_\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}\bar{z}_j$$

în sensul că, dacă $x \in U_\alpha$ și $u, v \in T'(M)_x$, atunci

$$<u, v>_x = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x)\, u_i \bar{v}_j. \quad (M.J.)$$

număr cardinal Mulțimea B are același număr cardinal ca și mulțimea A dacă există o corespondență bijectivă între B și A. Se mai spune că B și A sînt *echipotente* sau au aceeași putere. Relația de echipotență este o relație de echivalență față de care clasele de echivalență definesc **n.c.** Dacă A este finită, regăsim numerele naturale (**n.c.** finite). Dacă A este infinită, obținem un **n.c.** transfinit. Suma a două **n.c.** a și b este un **n.c.** notat $a + b$ și astfel încît, dacă A este de cardinal a, B este de cardinal b iar A și B *nu* au elemente comune, atunci $a + b$ este **n.c.** al lui $A \cup B$. Produsul ab este, prin definiție, **n.c.** al produsului cartezian $A \times B$, unde A este de cardinal a iar B este de cardinal b. Numărul a^b este cardinalul mulțimii aplicațiilor unei mulțimi de cardinal b într-o mulțime de cardinal a. Numărul a este inferior lui b (se scrie $a < b$) dacă există A de cardinal a și B de cardinal b astfel încît A este echipotentă cu o parte strictă a lui B, fără ca B să fie echipotentă cu o parte strictă a lui A. Dacă a și b sînt **n.c.** finite, atunci $a + b$ corespunde numărului de elemente ale mulțimii $A \cup B$ (unde card $A = a$, card $B = b$ și $A \cap B = \emptyset$), iar ab corespunde produsului dintre numărul de elemente din A și cel al elementelor din B. Relația $a < b$ revine, pentru a și b finite, la inferioritatea numerică a lui A față de B. Putem deci spune că operațiile și relațiile relative la **n.c.** sînt consistente cu operațiile și relațiile relative la numere naturale. **N.c.** al mulțimii $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ se numește *puterea numărabilului* și se notează de obicei cu $\aleph_0$ (litera ebraică alef prevăzută cu indicele zero). **N.c.** al mulțimii numerelor reale se notează cu litera $\mathfrak{c}$ din alfabetul gotic și se numește *puterea continuului*, despre care se arată că este strict mai mare decît puterea numărabilului. Ipoteza continuului afirmă că între $\aleph_0$ și $\mathfrak{c}$ nu se află un al treilea **n.c.** După cum au arătat K. Gödel și P. Cohen, ipoteza continuului este consistentă cu sistemul de axiome Zermelo-Fraenkel al teoriei mulțimilor dar consistența se menține și față de negația ipotezei continuului. Mulțimea **n.c.** este guvernată de proprietatea de trihotomie: Fiind date două **n.c.** a și b între ele are loc una și numai una dintre relațiile; $a < b$, $a = b$; $a > b$. Dacă A este o mulțime nevidă, atunci, după o teoremă celebră datorată lui G. Cantor (creatorul teoriei mulțimilor, în a doua parte a secolului al XIX-lea), **n.c.** al lui A este strict inferior **n.c.** al mulțimii părților lui A. De aici rezultă că orice **n.c.** diferit de zero este termenul inițial al unui șir infinit strict crescător de **n.c.** Să observăm că dacă definirea relației constînd în faptul că două mulțimi au aceeași putere este perfect acceptabilă, definirea **n.c.** ca o clasă de echivalență (definire propusă de G. Frege la 1879 și B. Russell la 1901) este grevată de dificultăți. De exemplu, mulțimea tuturor mulțimilor de un singur element este la fel de contradictorie ca și mulțimea tuturor mulțimilor. Pentru Cantor, **n.c.** al unei mulțimi A este rezultatul unui dublu proces de abstracție, prin care ignorăm atît natura elementelor din A cît și ordinea în care ele sînt așezate. Unii autori propun definirea unui **n.c.** cu ajutorul unei norme: Mulțimea numerelor naturale este norma lui $\aleph_0$, $\mathbb{R}$ este norma lui $\mathfrak{c}$, mulțimea părților lui $\mathbb{R}$ este norma lui $2^{\mathfrak{c}}$ ș.a.m.d. O tratare riguroasă în acest sens necesită dezvoltări relative la ordine și la metoda axiomatică. (*S.M.*)

număr complex v. **corpul numerelor complexe**

număr irațional v. **număr rațional**

număr întreg Să definim o relație R între perechi ordonate de numere naturale, după regula: $<a, b> R <a', b'>$ dacă $a + b' = a' + b$. Fiind definită cu ajutorul unei egalități, R este o relație de echivalență, față de care clasele de echivalență se numesc **n.î.** Clasa asociată lui $<a, a>$ este, prin definiție, *numărul zero*. Clasele asociate unor perechi $<a, b>$ pentru care $a < b$ definesc **n.î.** *negative*. Dacă $a > b$, atunci se demonstrează că există un număr natural c cu proprietatea $a = b + c$. Se notează $c = a - b$. În cazul general, simbolul $a - b$ reprezintă **n.î.** asociat perechii $< a, b>$; definiția **n.î.** este consistentă cu statutul numerelor naturale, așa cum este el stabilit de axiomatica lui Peano. Un **n.î.** este identificat prin oricare dintre reprezentanții clasei de echivalență care-l definesc. În cazul particular $a > b$, **n.î.** asociat este un **n.î.** *pozitiv*. Motivația introducerii noțiunii de **n.î.** este aceea de a da sens în cazul general operației de scădere a două numere naturale. *Suma* a două **n.î.** $< a, b>$ și $<c, d>$ este, prin definiție, **n.î.** $<a + c, b + d>$. Se demonstrează că rezultatul operației de adunare nu depinde de alegerea reprezentanților $<a, b>$ și $< c, d>$. Dacă α este **n.î.** asociat perechii $<a, b>$, opusul $-\alpha$ al lui α este, prin definiție, **n.î.** asociat lui $<b, a>$. Se arată că, în raport cu operația de adunare, **n.î.** formează un grup comutativ, avînd pe zero ca element de efect nul. Fiind date două **n.î.** α și β, spunem că α este mai mic decît β, și scriem $\alpha < \beta$, dacă există un **n.î.** pozitiv γ astfel încît

$\beta = \alpha + \gamma$. Se mai spune că β este mai mare decît $\alpha (\beta > \alpha)$. Rezultă că orice **n.î.** pozitiv este mai mare decît zero și orice **n.î.** negativ este mai mic decît zero. Relația $<$ este tranzitivă. Fiind date două **n.î.** α și β, între ele are loc una și numai una dintre relațiile: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$. Fie α și β două **n.î.** pozitive și α', β' numerele naturale asociate. Definim *produsul* $\alpha\beta$ ca **n.î.** pozitiv asociat numărului natural $\alpha'\beta'$, unde înmulțirea este aceea relativă la numere naturale. Extinderea operației de înmulțire la **n.î.** oarecare se obține impunînd proprietatea de comutativitate și de distributivitate față de adunare și scădere. Se arată că operația astfel obținută este asociativă. În raport cu operațiile de adunare și înmulțire, mulțimea $\mathbb{Z}$ a **n.î.** constituie un inel. (*S.M.*)

număr natural v. **mulțimea numerelor naturale**

număr ordinal, noțiune ce permite „măsurarea" unei mulțimi, „compararea" a două mulțimi cu un instrument mai fin decît cel dat de cardinalul mulțimii. Se spune că mulțimile total ordonate A și B sînt *asemenea* sau că *au același tip de ordine* dacă există o bijecție $f: A \to B$ astfel ca $a' \leqslant a'' \Rightarrow f(a') \leqslant f(a'')$. Subliniem că în tot ce urmează, o relație de ordine este o relație reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. Considerațiile care urmează se pot prezenta și pentru o relație nereflexivă, deci pentru relația „x mai mic strict decît y", notată în continuare $x < y$. Relația de asemănare este o relație de echivalență, o clasă de echivalență astfel generată numindu-se *tip de ordine*. Pentru mulțimea A se notează uneori tipul său de ordine cu $|A|$ sau ord A. Se observă că într-un tip de ordine intră mulțimi care, în particular, au același cardinal. Se pot distinge deci tipuri de ordine *finite*, cele pentru care cardinalul unui element din clasă este finit și tipuri de ordine *transfinite*, corespunzătoare cazului în care mulțimile din tipul de ordine sînt infinite. Toate mulțimile (total ordonate) care au același cardinal finit n, au în același timp același tip de ordine, ce se va nota tot cu n. Nu același lucru se întîmplă în cazul mulțimilor infinite, căci, spre exemplu, mulțimile de numere întregi $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$ și $\ldots, -n, \ldots, -2, -1)$ au același cardinal și nu au același tip de ordine. Se notează cu ω tipul de ordine al mulțimii numerelor naturale $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Amintim că o mulțime ordonată se spune că este *bine ordonată* dacă orice parte nevidă a sa are un cel mai mic element. Are loc următoarea teoremă de caracterizare. Dacă A este o mulțime total ordonată care are un prim element, atunci afirmațiile următoare sînt echivalente: 1) Mulțimea A este conținută în orice mulțime B care i) conține primul element al lui A și ii) $a \in B$ pentru orice $a \in A$ astfel încît $\{x \in A \mid x < a\} \subset B$; 2) A este bine ordonată. Deoarece formal din ii) rezultă i), se omite uneori i) din enunțul precedent. Cunoscută mai ales în reformularea ce urmează, implicația 2) $\Rightarrow$ 1) se numește *principiul inducției transfinite*: Fie A o mulțime bine ordonată, fie a primul ei element și pentru fiecare $x \in A$ propoziția $P(x)$. Dacă $P(a)$ este adevărată și dacă $P(y)$ este adevărată de îndată ce $P(x)$ este adevărată pentru orice $x < y$, $x \in A$, atunci $P(z)$ este adevărată pentru orice $z \in A$. Este de remarcat că nu se poate deduce de aici principiul inducției pentru mulțimea numerelor naturale căci acolo această afirmație are un caracter axiomatic ce permite construcția însăși a mulțimii bine ordonate $\mathbb{N}$. Tipul de ordine al unei mulțimi bine ordonate se numește **n.o.** Dacă A este o mulțime total ordonată și $a \in A$, mulțimea $\{x \in A \mid x < a\}$ se numește *secțiune* a lui A. Se spune că **n.o.** α este mai mic strict decît **n.o.** β dacă există $A \in \alpha$, $B \in \beta$ astfel ca A să aibă același tip de ordine cu o secțiune a lui B; se notează $\alpha < \beta$ iar $\alpha \leqslant \beta$ are semnificația obișnuită. Pentru orice două **n.o.** α, β are loc una, și numai una, din relațiile $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$. Am observat că $A \in \alpha$, $B \in \beta$ și $\alpha = \beta$ implică card A = card B; dacă $\alpha < \beta$, în general nu rezultă decît card $A \leqslant$ card B, ceea ce arată că informația dată de tipul de ordine este mai cuprinzătoare decît cea dată de cardinalul mulțimii. Orice mulțime de **n.o.**

este bine ordonată, are margine superioară și margine inferioară, aceasta din urmă fiind cel mai mic element al mulțimii. Mai mult, pentru orice mulțime $\mathscr{A}$ de **n.o.** există un **n.o.** β astfel ca $\alpha < \beta$, $\forall \alpha \in \mathscr{A}$, de unde rezultă că $\{\alpha \mid \alpha$ **n.o.**$\}$ nu este o mulțime. Se numește *succesor* al **n.o.** α, și se notează $\alpha + 1$, un **n.o.** β astfel încît $\alpha < \beta$ și nu există γ astfel ca $\alpha < \gamma < \beta$. Succesorul se dovedește a fi unic și existența sa este asigurată, spre exemplu, de următorul rezultat: Dacă X_α este mulțimea **n.o.** mai mici sau egale ca **n.o.** α, atunci **n.o.** al lui X_α este $\alpha + 1$, iar **n.o.** al mulțimii **n.o.** mai mici strict decît α este egal cu α. Nu pentru orice **n.o.** α există β astfel ca $\beta + 1 = \alpha$. Fie A și B două mulțimi bine ordonate disjuncte, α și β tipurile de ordine corespunzătoare și pe $A \cup B$ ordinea $a \leqslant b$ dacă $a \in A$, $b \in B$ și în rest ordinea din A respectiv B. Cu această ordonare $A \cup B$ se dovedește a fi bine ordonată și tipul ei de ordine se notează $\alpha + \beta$. Analog, luînd $b \leqslant a$ pentru orice $b \in B$ și $a \in A$ se obține **n.o.** $\beta + \alpha$. În general, $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$ căci, spre exemplu, $(1, 2, \ldots, n, \ldots; \infty)$ cu ordinea naturală este un reprezentant din $\omega + 1$ și evident nu este asemenea cu $(\infty, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ (cu ordinea dată de scriere) care este un reprezentant al lui $1 + \omega = \omega$. Din existența marginii superioare rezultă că dacă $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir strict crescător de **n.o.** există, și este unic, un **n.o.** α astfel ca $\alpha_n < \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și astfel încît pentru orice $\beta < \alpha$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\beta < \alpha_n$, $\forall n \geqslant n_0$. Printr-o analogie evidentă se spune că α este *limita șirului* $\{\alpha_n\}$ și se notează $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$. Un **n.o.** α pentru care există β astfel ca $\beta + 1 = \alpha$, ceea ce este echivalent cu faptul că nu există un șir strict crescător $\{\alpha_n\}_n$ astfel ca $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$, se numește **n.o.** *izolat*. În caz contrar, mulțimea de **n.o.** $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ nu are un ultim element și α se numește **n.o.** *limită*. Orice **n.o.** izolat α se poate scrie în mod unic sub forma $\alpha = \beta + n$, unde β este un număr limită iar n un **n.o.** finit. **N.o.** finite se numesc uneori „de prima clasă" iar **n.o.** pentru care X_α este numărabilă se numesc „de clasa a doua". În fine, menționăm că afirmația „orice mulțime se poate bine ordona" se dovedește a fi echivalentă cu axioma alegerii. Noțiunea de **n.o.** a fost generată de necesitatea de clasificare a funcțiilor reale, clasificare bazată pe ideea de convergență. (*Gh.Gr.*)

număr propriu (al unui operator liniar $U: X \to X$, unde X este un spațiu liniar), scalar λ pentru care există un element nenul $x \in X$ astfel ca $U(x) = \lambda x$. Sin.: *valoare proprie*. Elementul x se numește *element propriu* sau *vector propriu*. Mulțimea **n.p.** poate fi și vidă. (*R.C.*)

număr rațional, număr real de forma mn^{-1}, unde m, n sînt numere întregi, $n \neq 0$. În această definiție se pornește de la prezentarea axiomatică a corpului numerelor reale ca un corp complet ordonat (v. **corpul numerelor reale**). Într-o abordare constructivă se pornește de la definirea axiomatică a mulțimii numerelor naturale, se construiește mulțimea numerelor întregi și se definește apoi **n.r.** ca fiind o clasă de echivalență în mulțimea perechilor ordonate (m, n) de numere întregi, $n \neq 0$, relația de echivalență fiind definită prin $(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow mn' = nm'$. Se notează de obicei cu $\mathbb{Q}$ mulțimea numerelor raționale și cu $\overgroup{(m, n)}$ clasa de echivalență a perechii (m, n). Mulțimea **n.r.** este numărabilă. Operațiile algebrice: $\overgroup{(m, n)} + \overgroup{(p, q)} = \overgroup{(mq + np, nq)}$, $\overgroup{(m, n)} \cdot \overgroup{(p, q)} = \overgroup{(mp, nq)}$ introduc pe $\mathbb{Q}$ o structură de corp comutativ. Cu ordinea $\overgroup{(m, n)} \leqslant \overgroup{(p, q)} \Leftrightarrow np - mq \geqslant 0$, $\mathbb{Q}$ devine corp ordonat, *i.e.* ordinea este totală, $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$ și $0 \leqslant x, y \Rightarrow 0 \leqslant xy$. Cu distanța $d(r, p) = |r - p|$, unde $|x| = \max(x, -x)$, mulțimea $\mathbb{Q}$ este un spațiu metric care nu este complet, completatul său fiind mulțimea numerelor reale. Dezvoltarea unui **n.r.** în fracție zecimală infinită este periodică (v. **reprezentarea numerelor reale într-o bază**). Dezvoltarea canonică a unui **n.r.** în fracție continuă normală este finită (v. **fracție continuă**). Un număr real care nu este rațional se numește *irațional*. Un număr irațional care este rădăcina unei ecuații algebrice $a_0x^n + ... + a_n = 0$, unde a_i sînt numere întregi se numește *număr irațional algebric*. Numerele iraționale care nu sînt algebrice se numesc *transcendente* (de exemplu numărul π sau numărul e). (*Gh.Gr.*)

număr real v. **corpul numerelor reale**

număr real constructiv, orice șir regulat de numere raționale. Două numere reale $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ constructive sînt egale dacă $|x_n - y_n| \leqslant \frac{2}{n}$. Egalitatea este o relație de echivalență. $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ și $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sînt egale dacă și numai dacă pentru orice j întreg strict pozitiv există m_j întreg pozitiv astfel încît $|x_n - y_n| \leqslant 1/j$ de îndată ce $n \geqslant m_j$. Numărul rațional x_n este o aproximație rațională a lui x. Operația de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{Q}$ care asociază lui x pe x_n (a n-a aproximare rațională a lui x) *nu* este o funcție. (*S.M.*)

număr real constructiv strict pozitiv Numărul real constructiv $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este strict pozitiv dacă există cel puțin un întreg strict pozitiv n pentru care $x_n > 1/n$; este pozitiv dacă există n întreg pozitiv pentru care $x_n \geqslant 1/n$. Numărul x este strict pozitiv dacă și numai dacă există un întreg k strict pozitiv pentru care $x_m \geqslant 1/k$ de îndată ce $m \geqslant k$. (*S.M.*)

număr regulat v. **rezolvantă**

numărabil compact v. **spațiu topologic compact**

numărul e al lui Euler v. **funcția exponențială**

numărul π al lui Pitagora v. **funcția exponențială**

numere conjugate v. **spații L^p**

numere derivate Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și fie a un punct din A de acumulare bilaterală pentru A. Limitele superioară și inferioară la stînga ale funcției $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ în punctul a se numesc respectiv *numărul derivat superior la stînga* (notație $D^-f(a)$) și *numărul derivat inferior la stînga* (notație $D_-f(a)$) ale lui f în a. Înlocuindu-se stînga cu dreapta, se obțin *numerele derivate superior și inferior la dreapta* $D^+f(a)$ și $D_+f(a)$.
Teorema lui Denjoy-Young-Saks. Pentru o funcție $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ există o mulțime E de măsură Lebesgue nulă din (a, b) astfel încît în orice punct din $(a, b) - E$: Două **n.d.** de aceeași parte sînt sau diferite și atunci cel puțin unul este infinit, sau egale și finite; două **n.d.** opuse, unul inferior altul superior, sînt sau amîndouă finite și egale, sau infinite, dar de semn diferit (cel superior fiind $+\infty$). (*S.M.*)

numere finite, infinite și infinitezimale (în analiza nonstandard) Fie F un cîmp ordonat care conține strict pe $\mathbb{R}$ ca un subcîmp ordonat. În aceste condiții F este nonarhimedian. Un element $a \in F$ este un *număr infinit mic* (sau *o infinitezimală*) dacă $|a| < r$ pentru orice număr real pozitiv r. Elementul a este un *număr finit* dacă $|a| \leqslant r$ pentru un anume $r \in \mathbb{R}$. Elementul a este un *număr infinit* dacă $|a| > r$ pentru orice $r \in \mathbb{R}$. Există în $F\setminus\mathbb{R}$ atît numere infinitezimale cît și numere infinite. În F se definește o relație de echivalență $\approx$, două numere α și β fiind echivalente dacă diferă printr-o infinitezimală. Orice număr finit se reprezintă într-un singur fel ca sumă a unui număr real cu unul infinitezimal. (*S.M.*)

numere naturale infinite (în analiza nonstandard) Deoarece fiecărei părți $S \subset \mathbb{R}$ îi putem asocia o extensie $S^* \subset \mathbb{R}^*$ (v. **corpul R* din analiza nonstandard, numere și funcții în analiza nonstandard**), vom considera cazul particular $S = \mathbb{N}$. Extensia $\mathbb{N}^*$ conține și numere nonstandard, orice element nonstandard din $\mathbf{N}^*$ fiind infinit; acestea sînt **numere naturale infinite**. $\mathbf{N}^*$ este nenumărabilă. (*S.M.*)

numere și funcții (în analiza nonstandard). Există o mulțime $\mathbf{R}^*$ astfel încît: 1) $\mathbb{R}$ este o submulțime strictă a lui $\mathbf{R}^*$; 2) Fiecărei aplicații f a lui $\mathbb{R}^n$ în $\mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, îi corespunde o funcție f^* a lui $(\mathbf{R}^*)^n$ în $\mathbf{R}^*$, care coincide cu f pe $\mathbb{R}^n$; 3) Fiecărei relații n-are A în $\mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, îi corespunde o relație n-ară A^* în $\mathbf{R}^*$ care coincide cu A pe $\mathbb{R}$. Egalității în $\mathbb{R}$ îi corespunde egalitatea în $\mathbf{R}^*$; 4) Orice enunț S formulat în termeni de anumite numere și funcții reale, anumite relații în $\mathbb{R}$ și anumite variabile cu valori în $\mathbb{R}$, este adevărat în raport cu $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă este adevărat în raport cu $\mathbf{R}^*$, enunțul S^* obținut din S prin înlocuirea fiecărei funcții $f(x_1, ..., x_n)$ cu funcția corespunzătoare f^*, a fiecărei relații A cu relația A^* și prin extinderea variabilelor de la $\mathbb{R}$ la $\mathbf{R}^*$. Elementele din $\mathbb{R}$ sînt numere standard iar cele din $\mathbf{R}^*\setminus\mathbb{R}$ sînt numere nonstandard. Funcția f^* este nonstandard iar relația A^* este nonstandard. (*S.M.*)

numerele lui Bernoulli, numerele B_n, $n \geqslant 1$, care apar în dezvoltarea Taylor

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{B_n z^{2n}}{(2n)!},$$

unde f este funcția definită prin $f(0) = 1$ și $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ pentru $z \in \mathbb{C}^*$, $e^z - 1 \neq 0$. Menționăm că f este meromorfă pe $\mathbb{C}$ cu poli simpli în punctele $z_\nu = 2\nu\pi i$, $\nu \neq 0$; în particular f este olomorfă pe discul $|z| < 2\pi$. Pentru determinarea coeficienților B_n se folosește identitatea $e^z f(z) = z + f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, din care rezultă imediat relația de recurență

$$(-1)^n \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} + (-1)^{n-1} \binom{2n}{2n-4} B_{n-2} + ... + \binom{2n}{2} B_1 -$$

$$- n + 1 = 0, \quad n \geqslant 2;$$

în particular **n.B.** sînt numere raționale. Relația de recurență de mai sus furnizează imediat valori pentru primele **n.B.**:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510}, \quad B_9 = \frac{43867}{798} \text{ etc.}$$

După identitatea lui Euler avem dezvoltarea Taylor

$$z \operatorname{ctg} z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = iz + f(2iz) = 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{2^{2k} B_k z^{2k}}{(2k)!}$$

valabilă pe discul $|z| < \pi$. Pe de altă parte, pe discul $|z| < \pi$ are loc dezvoltarea

$$z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{2z^2}{z^2 - n^2\pi^2} = 1 - \sum_{n\geqslant 1} \sum_{k\geqslant 1} \frac{2z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} = 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{2\zeta(2k) z^{2k}}{\pi^{2k}},$$

unde ζ este funcția lui Riemann. Comparînd cele două dezvoltări ale funcției z ctg z obținem formulele remarcabile:

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}B_k\pi^{2k}}{(2k)!}, \quad k \geqslant 1;$$

în particular **n.B.** sînt toate pozitive. Din formulele precedente se obțin valori numerice pentru $\zeta(2k)$, și anume:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{2 \cdot 3^2 \cdot 5}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7},$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} \text{ etc.}$$

Mai general, pentru $|z| < 2\pi$ și orice număr complex t avem dezvoltările

$$\frac{z\,e^{tz}}{e^z - 1} = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\varphi_n(t)}{n!} z^n,$$

unde coeficienții φ_n sînt polinoame în t date de formulele

$$\varphi_n(t) = t^n - \frac{n}{2} t^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 t^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 t^{n-4} + \ldots$$

Acestea sînt *polinoamele lui Bernoulli*; ele satisfac relația funcțională $\varphi_n(t + 1) - \varphi_n(t) = nt^{n-1}$ și pot fi calculate prin formulele

$$\varphi_n(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{e^{tz}\,dz}{z^n(e^z - 1)}, \quad \text{unde} \quad 0 < r < 2\pi.$$

N.B. joacă un rol important în teoria numerelor, analiza complexă, topologia diferențială, analiza numerică etc. (*M.J.*)

O

obiect v. **categorie**

olomorf-convex v. **domeniu de olomorfie, varietate Stein**

omeomorfism v. **funcție continuă**

omotetie v. **transformare omografică**

omotopia drumurilor v. **omotopie, drumuri omotope** (în $\mathbb{C}$)

omotopie Noțiunea de o. corespunde în plan matematic ideii intuitive de deformare continuă. Fie X și S două spații topologice (nevide), A o submulțime a lui S și f, g două aplicații continue de la S în X astfel încît $f(s) = g(s)$ pentru $s \in A$. Notăm prin I intervalul închis $[0, 1]$ al dreptei reale. O **o.** de la f la g relativ la A este o aplicație continuă $\varphi : S \times I \to X$ cu proprietățile următoare: 1) $\varphi(s, 0) = f(s)$ și $\varphi(s, 1) = g(s)$ pentru orice $s \in S$; 2) $\varphi(s, t) = f(s) = g(s)$ pentru $s \in A$ și $t \in I$. Se scrie $\varphi: f \simeq g$ rel. A pentru o **o.** φ de la f la g relativ la A în cazul A o mulțime nevidă și $\varphi : f \simeq g$ în cazul A mulțimea vidă (în acest ultim caz φ se numește **o.** de la f la g). **O.** relativ la A și, în particular, **o.** sînt relații de echivalență. Să examinăm mai îndeaproape cazul special $A = \emptyset$. În aces caz **o.** este o relație de echivalență pe mulțimea tuturor aplicațiilor continue de la S la X. Clasele definite de această relație de echivalență se numesc *clase de* **o.** de aplicații continue de la S la X; clasa de echivalență a aplicației $f : S \to X$ se notează prin $[f]$. Spațiile topologice ca obiecte și clasele de **o.** ca morfisme formează o categorie, numită *categoria omotopică*, compunerea în această categorie fiind definită prin $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ dacă f și g sînt aplicații continue de spații topologice și spațiul de sosire a lui f coincide cu spațiul de plecare al lui g. O aplicație continuă $f : S \to X$ se numește *echivalență omotopică* dacă $[f]$ este un izomorfism în categoria omotopică. Aceasta înseamnă că există o aplicație continuă $g : X \to S$ astfel încît $g \circ f \simeq \mathrm{id}_S$ și $f \circ g \simeq \mathrm{id}_X$. O proprietate a spațiului topologic X se numește *invariant omotopic* (sau *invariant de omotopie*) dacă este invariantă la echivalențele omotopice. Orice invariant omotopic este un invariant topologic (*i.e* o proprietate invariantă la omeomorfisme) dar reciproca nu este adevărată. Un spațiu topologic X se numește *contractibil* dacă este omotopic echivalent cu un punct, *i.e.* dacă există o **o.** de la identitatea lui X la o aplicație constantă. Orice mulțime convexă (nevidă) $X \subset \mathbb{R}^n$, cu topologia indusă, este un spațiu contractibil. Vom analiza acum un caz particular de **o.** relativă, și anume **o.** drumurilor cu capete fixate. Prin *drum* pe un spațiu topologic X se înțelege o aplicație continuă de la un interval închis nedegenerat al dreptei reale cu valori în X. Acest interval se ia de regulă $I = [0, 1]$ deoarece orice alt interval închis nedegenerat al dreptei reale este omeomorf cu I. Dacă $\gamma : I \to X$ este un drum, $\gamma(0)$ se numește *originea* (sau *începutul*) lui γ iar $\gamma(1)$ *extremitatea* (sau *sfîrșitul*) lui γ; $\gamma(0)$ și $\gamma(1)$ sînt *capetele* lui γ (sau *punctele terminale*); un drum γ se numește *închis* cînd $\gamma(0) = \gamma(1)$. *Inversul* unui drum γ este drumul

γ^{-1} definit prin $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, $t \in I = [0, 1]$. Dacă γ și δ sînt două drumuri astfel încît $\gamma(1) = \delta(0)$, drumul $\gamma\delta$ (juxtapunere) se definește prin $\gamma\delta(t) = \gamma(2t)$ cînd $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ și $\gamma\delta(t) = \delta(2t-1)$ cînd $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Dacă drumurile γ și δ au aceeași origine $\gamma(0) = \delta(0)$ și aceeași extremitate $\gamma(1) = \delta(1)$, o **o.** *cu capete fixate* de la γ la δ este o **o.** $\varphi: \gamma \simeq \delta$ rel. $\{0, 1\}$. Clasele de **o.** (relativ la mulțimea $\{0, 1\}$) de drumuri închise cu originea (și extremitatea) într-un punct fixat $x_0 \in X$ formează un grup în care înmulțirea este definită prin $[\gamma][\delta] = [\gamma\delta]$ și inversa unei clase $[\gamma]$ prin $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$. Acest grup se notează prin $\pi_1(X, x_0)$ și se numește *grupul fundamental* al perechii (X, x_0). Dacă σ este un drum în X cu originea $\sigma(0) = x_0$ și extremitatea $\sigma(1) = x_1$, atunci aplicația

$$\pi_1(X, x_0) \ni [\gamma] \mapsto [\sigma^{-1}\gamma\sigma] \in \pi_1(X, x_1)$$

este un izomorfism de grupuri. Un spațiu topologic X se numește *conex prin drumuri* dacă pentru oricare două puncte x_0 și x_1 ale lui X există un drum γ pe X cu oiginea $\gamma(0) = x_0$ și extremitatea $\gamma(1) = x_1$. Dacă spațiul X este conex prin drumuri, grupul $\pi_1(X, x_0)$ este independent de x_0, abstracție făcînd de izomorfisme. În acest caz grupul $\pi_1(X, x_0)$ se notează $\pi_1(X)$ și se numește *grupul fundamental al lui* X. De exemplu, grupul fundamental al cercului S^1 este izomorf cu $\mathbb{Z}$ iar grupul fundamental al torului $S^1 \times S^1$ este izomorf cu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Un spațiu topologic X se numește *simplu conex* dacă este conex prin drumuri și dacă grupul său fundamental este trivial, *i.e.* redus la elementul neutru. De pildă, orice spațiu contractibil este simplu conex, de asemenea sfera S^n este simplu conexă, pentru $n \geqslant 2$, dar cercul S^1 și torul $S^1 \times S^1$ nu sînt simplu conexe. Un spațiu topologic X se numește *local simplu conex* dacă orice punct al său are o vecinătate deschisă simplu conexă. Varietățile topologice (în particular varietățile diferențiabile și varietățile complexe) sînt spații local simplu conexe. Un *spațiu topologic punctat* este o pereche (X, x_0), unde X este un spațiu topologic și x_0 un punct în X. Un *morfism* de la spațiul topologic punctat (X, x_0) la spațiul topologic punctat (Y, y_0) este o aplicație continuă $f: X \to Y$ astfel încît $f(x_0) = y_0$. Dacă f este morfism de la (X, x_0) la (Y, y_0), aplicația $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, definită prin

$$\pi_1(X, x_0) \ni [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma] \in \pi_1(Y, y_0),$$

este un morfism de grupuri. Spațiile topologice punctate și morfismele lor formează o categorie iar asocierile $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$ și $f \mapsto f_*$ definesc un functor de la această categorie în categoria grupurilor. Fie dat un spațiu topologic X. Un *spațiu de acoperire peste* X este un spațiu topologic E împreună cu o aplicație continuă $p: E \to X$ cu proprietatea că pentru orice punct $x \in X$ se poate găsi o vecinătate deschisă U a lui x și o familie $\{E_i\}_{i \in I}$ de submulțimi deschise E_i ale lui E astfel încît $E_i \cap E_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$, $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} E_i$ și aplicația de la E_i la U, indusă de p, să fie un omeomorfism. Dacă (X, x_0) este un spațiu punctat, se numește *spațiu de acoperire peste* (X, x_0) un spațiu punctat (E, e_0) împreună cu un morfism $p: (E, e_0) \to (X, x_0)$ astfel încît $(E, p: E \to X)$ să fie un spațiu de acoperire peste X. Presupunînd X conex și local conex prin drumuri, un spațiu de acoperire $p: (E, e_0) \to (X, x_0)$ se numește *universal* dacă spațiul E este simplu conex.

Teoremă. Fie X un spațiu conex, local conex prin drumuri și local simplu conex. Atunci: 1) Spațiul topologic punctat (X, x_0) are un spațiu de acoperire universal; 2) Dacă $p: (E, e_0) \to (X, x_0)$ este un spațiu de acoperire universal, atunci pentru orice spațiu de acoperire $q: (E', e_0') \to (X, x_0)$ există un unic morfism $\varphi: (E, e_0) \to (E', e_0')$ astfel încît $q \circ \varphi = p$.

În particular spațiul de acoperire universal al lui (X, x_0) este unic pînă la izomorfisme de spații punctate. (*M.J.*)

operator, funcție definită pe un spațiu liniar X, sau pe o parte a lui X, cu valori într-un spațiu liniar Y. Fie X și Y două spații liniare cu același corp al scalarilor. Un **o.** $U: X \to Y$ se numește **o.** *aditiv* dacă $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$, și se numește **o.** *omogen* dacă $U(\alpha x) = \alpha U(x)$, oricare ar fi elementul $x \in X$ și scalarul α. Un **o.** aditiv și omogen se numește **o.** *liniar*. Dacă U și V sînt doi **o.** care aplică X în Y, se definește *suma* lor prin $(U+V)(x) = U(x) + V(x)$, $\forall x \in X$, iar produsul cu un scalar λ al lui U, prin $(\lambda U)(x) = \lambda U(x)$, $\forall x \in X$. Dacă X, Y, Z sînt spații liniare (cu același corp al scalarilor) iar $U: X \to Y$ și $V: Y \to Z$ doi **o.**, se definește *produsul* lor VU prin formula $(VU)(x) = V(U(x))$, $\forall x \in X$. Pentru un **o.** $U: X \to X$ se poate defini puterea U^n, $2 \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$, prin $U^n = UU^{n-1}$ cu convenția $U^1 = U$. **O.** $I: X \to X$ definit prin $I(x) = x$, $\forall x \in X$, se numește **o.** identitate pe X. Dacă E este o submulțime convexă a lui X, un **o.** $U: E \to Y$ se numește **o.** *afin* dacă $U(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha U(x) + (1-\alpha) U(y)$, $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. (*R.C.*)

operator aditiv v. **operator**

operator afin v. **operator**

operator autoadjunct Fie X un spațiu Hilbert și $\mathcal{L}(X)$ mulțimea operatorilor liniari și continui care aplică X în X. Dacă $U \in \mathcal{L}(X)$ și dacă $\langle U(x), y\rangle = \langle x, U(y)\rangle$, $\forall x, y \in X$, unde $\langle .,. \rangle$ este produsul scalar care generează norma lui X, atunci U se numește **o.a.** Pentru orice operator $U \in \mathcal{L}(X)$ există $U^* \in \mathcal{L}(X)$ astfel ca $\langle U(x), y\rangle = \langle x, U^*(y)\rangle$, $\forall x, y \in X$. Operatorul U^* se numește *adjunctul* lui U. Operatorul U este autoadjunct dacă și numai dacă $U = U^*$. Un **o.a.** U se numește **o.a.** *pozitiv* dacă $\langle U(x), x\rangle \geqslant 0$, $\forall x \in X$. Dacă $U \in \mathcal{L}(X)$, atunci UU^* este un **o.a.** pozitiv. În particular dacă U este un **o.a.**, atunci U^2 este un **o.a.** pozitiv. Dacă U și V sînt **o.a.** pozitivi pe spațiul X și dacă $UV = VU$, atunci UV este un **o.a.** pozitiv. Pentru orice **o.a.** pozitiv U există un **o.a.** pozitiv V și numai unul, astfel ca $V^2 = U$. Operatorul V se numește *rădăcina pătrată pozitivă* a lui U. Presupunînd că U este un **o.a.** pozitiv cu $\|U\| = 1$ și definind prin inducție:

$$V_1 = 0, \quad V_{n+1} = V_n + \frac{1}{2}(U - V_n^2),$$

se poate demonstra că există $V(x) = \lim_n V_n(x)$, $\forall x \in X$, și V reprezintă rădăcina pătrată pozitivă a lui U. Fie acum U un **o.a.** oarecare pe spațiul X și să punem

$$\omega(U) = \inf\{<U(x), x> \mid \|x\| = 1\},$$

$$\Omega(U) = \sup\{<U(x), x> \mid \|x\| = 1\}.$$

Mulțimea numerelor proprii ale operatorului U este conținută în segmentul $[\omega(U), \Omega(U)]$. Un scalar λ este număr propriu pentru U dacă și numai dacă închiderea mulțimii $(U - \lambda I)(X)$ (unde I este operatorul identitate) nu coincide cu X. Mulțimea $\mathcal{L}(X)$ este o algebră Banach unitară dacă se consideră operațiile obișnuite cu operatori și norma $\|U\| = \sup\{\|U(x)\| \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Se poate deci vorbi de rezolvanta și spectrul unui element din $\mathcal{L}(X)$. Să notăm cu $\mathcal{A}(X)$ mulțimea **o.a.** care aplică X în X. Fie $U \in \mathcal{A}(X)$. Pentru ca un scalar λ să fie număr regulat pentru operatorul U este necesar și suficient ca $(U - \lambda I)(X) = X$. Se poate de asemenea arăta că λ este un număr regulat pentru U

dacă și numai dacă există un număr $\rho > 0$ astfel ca $\|U(x) - \lambda x\| \geqslant \rho\|x\|$, $\forall x \in X$. În consecință, un scalar μ aparține spectrului lui U dacă și numai dacă există un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din X cu $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și astfel ca $\lim\limits_n (U(x_n) - \mu x_n) = 0$. Spectrul operatorului U este conținut în segmentul $[\omega(U), \Omega(U)]$ iar numerele $\omega(U)$, $\Omega(U)$ aparțin spectrului. Un **o.a.** compact nenul are cel puțin un număr propriu nenul și orice număr nenul care aparține spectrului operatorului este un număr propriu pentru același operator. În cazul unui **o.a.** definit pe un spațiu Hilbert complex, orice număr complex $\lambda = \alpha + i\beta$ cu $\beta \neq 0$ este un număr regulat. Fie acum U un **o.a.** oarecare pe spațiul Hilbert X. Pentru orice număr real λ fie $U_\lambda = U - \lambda I$, fie V_λ rădăcina pătrată pozitivă a lui U_λ^2 și P_λ proiectorul generat de subspațiul $\{x \in X \mid U_\lambda(x) = V_\lambda(x)\}$. Funcția $g_U : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$, definită prin $g_U(\lambda) = I - P_\lambda$, se numește *funcția spectrală* a lui U și are următoarele proprietăți:

1) $g_U(\lambda)\, g_U(\mu) = g_U(\mu)\, g_U(\lambda)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

2) $\lambda < \mu \Rightarrow g_U(\lambda) \leqslant g_U(\mu)$;

3) $\lim\limits_{\substack{\lambda\to\mu \\ \lambda<\mu}} (g_U(\lambda))(x) = (g_U(\mu))(x)$, $\forall x \in X$; $\forall \mu \in \mathbb{R}$;

4) $\lambda \leqslant \omega(U) \Rightarrow g_U(\lambda) = 0$;

5) $\lambda > \Omega(U) \Rightarrow g_U(\lambda) = I$.

Să considerăm acum un număr real $\varepsilon > 0$ oarecare. Dacă Δ este o diviziune a intervalului $[\omega(U), \Omega(U) + \varepsilon]$ cu punctele $\lambda_0 = \omega(U) < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \Omega(U) + \varepsilon$, iar $\xi_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, se notează

$$S(\Delta) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j (g_U(\lambda_{j+1}) - g_U(\lambda_j)).$$

Punînd $\nu(\Delta) = \max\limits_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)$, avem $\|U - S(\Delta)\| \leqslant \nu(\Delta)$. Rezultatul se poate exprima sub forma $U = \displaystyle\int_{\omega(U)}^{\Omega(U)+\varepsilon} \lambda\, \mathrm{d}g_U(\lambda)$. (*R.C.*)

operator biaditiv, funcție U definită pe un produs cartezian $X \times Y$ de spații liniare, cu valori într-un spațiu liniar Z satisfăcînd condițiile:

$$U(x_1 + x_2, y) = U(x_1, y) + U(x_2, y), \quad \forall x_1, x_2 \in X, \forall y \in Y;$$

$$U(x, y_1 + y_2) = U(x, y_1) + U(x, y_2), \quad \forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y.$$

Dacă U satisface în plus condiția

$$U(\lambda x, y) = U(x, \lambda y) = \lambda U(x, y), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \forall \lambda \in \Gamma,$$

unde Γ este corpul scalarilor (presupus același pentru spațiile X, Y, Z), atunci U se numește *operator biliniar*. Dacă $Z = \Gamma$, se obțin definițiile noțiunilor de *funcțională biaditivă* și de *funcțională biliniară*. Dacă X, Y, Z sînt spații liniare ordonate, un **o.b.** $U : X \times Y \to Z$ se numește **o.b.** *pozitiv* dacă din $0 \leqslant x \in X$ și $0 \leqslant y \in Y$ rezultă $U(x, y) \geqslant 0$; un **o.b.** $U : X \times Y \to Z$ se numește **o.b.** *regulat* dacă $U = U_1 - U_2$, unde U_1 și U_2 sînt **o.b.** pozitivi. Dacă $Z = \mathbb{R}$ se obțin definițiile noțiunilor de *funcțională biaditivă pozitivă* și de *funcțională biaditivă regulată*.

Fie X și Y spații liniare reticulate iar Z un spațiu liniar complet reticulat. Să notăm cu $\mathcal{R}(E, F)$ mulțimea operatorilor regulați între două spații liniare ordonate E, F. Mulțimea **o.b.** regulați care aplică $X \times Y$ în Z este un spațiu liniar complet reticulat izomorf (ca spațiu liniar ordonat) cu spațiul $\mathcal{R}(X, \mathcal{R}(Y, Z))$. (*R.C.*)

operator biliniar v. **operator biaditiv**

operator coerciv v. **operator monoton**

operator compact, operator liniar U între două spații liniare topologice X și Y pentru care există o vecinătate S a originii în spațiul X astfel ca mulțimea $U(S)$ să fie relativ compactă. Orice operator de forma $U(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x)\, y_j$, $x \in X$, unde $y_j \in Y$ iar f_j este o funcțională liniară și continuă pe X, reprezintă un **o.c.** numit *operator liniar și continuu de rang finit*. Dacă X este un spațiu liniar normat iar Y un spațiu liniar topologic, un operator liniar $U: X \to Y$ este compact dacă și numai dacă pentru orice submulțime mărginită $A \subset X$, mulțimea $U(A)$ este relativ compactă. Mulțimea $\mathcal{K}(X, Y)$ a **o.c.** care aplică un spațiu liniar normat X într-un spațiu liniar topologic separat și complet Y, este un subspațiu liniar închis al spațiului $\mathcal{L}(X, Y)$ al operatorilor liniari și continui (care aplică X în Y) înzestrat cu topologia convergenței mărginite. (*R.C.*)

operator complet continuu, operator U între două spații liniare topologice X și Y, care este continuu și care are proprietatea că pentru orice mulțime mărginită $A \subset X$, mulțimea $U(A)$ este relativ compactă în Y. Dacă X este un spațiu Banach, $U : X \to X$ un **o.c.c.** și dacă E este o submulțime convexă, închisă și mărginită a spațiului X astfel ca $U(E) \subset E$, atunci U are un punct fix în E (*i.e.* există $x_0 \in E$ astfel ca $U(x_0) = x_0$). (*R.C.*)

operator (ω)-**continuu** v. **operator regulat**

operator cvasinilpotent v. **măsură spectrală**

operator de închidere (pe mulțimea X), aplicație T definită pe mulțimea părților mulțimii X, cu valori tot în mulțimea părților lui X, avînd proprietățile: i) $T(\varnothing) = \varnothing$; ii) $A \subset T(A)$, $\forall A \subset X$; iii) $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$, $A, B \subset X$; iv) $T(T(A)) = T(A)$, $\forall A \subset X$. Fie T un **o.î.** pe mulțimea X. Fie $\mathcal{F} = \{F \mid F \subset X,\ T(F) = F\}$, $\mathcal{T} = \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Atunci $\mathcal{T}$ este familia mulțimilor deschise într-o topologie τ pe X iar $T(A)$ este închiderea lui A în această topologie (*teorema lui Kuratowski*). (*Gh.Gr.*)

operator derivabil Fréchet v. **derivata Fréchet**

operator derivabil Fréchet la dreapta (la stînga) v. **derivata Fréchet laterală**

operator deschis, operator U între două spații liniare topologice X și Y avînd proprietatea că pentru orice submulțime deschisă A a lui X mulțimea $U(A)$ este deschisă în Y. Dacă X și Y sînt spații Fréchet iar $U: X \to Y$ este un operator liniar și continuu astfel încît $U(X) = Y$, atunci U este un **o.d.** (*teorema aplicației deschise*). (*R.C.*)

operator de tip principal, operator diferențial sau pseudodiferențial pentru care varietatea caracteristică nu are singularități. Analitic, acest fapt se traduce prin: dacă $p_m(x, \xi) = 0$, atunci $\mathrm{grad}_{x,\xi}\, p(x, \xi) \neq 0$, $p_m(x, \xi)$ fiind simbolul principal al operatorului p. Acești operatori au fost introduși, în cazul coeficienților constanți, de Hörmander și s-au dovedit ulterior operatorii despre care s-au putut obține cele mai multe rezultate generale (v. **propagare de singularități, rezolubilitate locală și globală**). (*G.G.*)

operator diferențiabil Fréchet v. **derivata Fréchet**

operator diferențiabil Gâteaux v. **diferențiala Gâteaux**

operator diferențial liniar Fie Ω o mulțime deschisă din spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$. Un **o.d.l.** L, de ordin cel mult m, definit în Ω, este un operator liniar definit pe spațiul $C^\infty(\Omega)$ cu valori în $C^\infty(\Omega)$, dat de

$$u \to Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u, \quad (*)$$

unde $a_\alpha(x)$ sînt funcții de clasă C^∞, α un multiindice, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ cu $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $D_n^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ iar $|\alpha| = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. În mod analog, dacă E este un alt spațiu de funcții (închis față de operația de derivare, cel puțin pînă la ordinul m) sau de distribuții, iar a_α sînt funcții multiplicatori în spațiul respectiv), atunci (*) definește de asemenea un **o.d.l.** Un sistem de operatori diferențiali va fi un operator $L : (C^\infty(\Omega))^m \to (C^\infty(\Omega))^p$ dat de $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \to Lu = A(x, D)u$, unde $A(x, D)$ este o matrice de tip $p \times m$, de coeficienți $A_{ij}(x, D)$ operatori diferențiali scalari. Se pot considera operatori pe varietăți diferențiabile și, mai general, operatori între secțiunile unor fibrați vectoriali pe asemenea varietăți. În general, dacă V este o varietate diferențiabilă de clasă C^∞ de dimensiune n și $\xi = (E, p, V)$, respectiv $\eta = (F, q, V)$, fibrați vectoriali pe V, de rang r, respectiv s, un operator diferențial L de la fibratul ξ la fibratul η este un operator $\mathbb{R}$-liniar (resp. $\mathbb{C}$-liniar dacă fibrările sînt complexe), $L : C^\infty(V, \xi) \to C^\infty(V, \eta)$, unde $C^\infty(V, \xi)$, $C^\infty(V, \eta)$ sînt spațiile secțiunilor de clasă C^∞ ale fibraților ξ, respectiv η, dat în vecinătatea fiecărui punct de o expresie de forma $\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$, cu a_α matrice de tip $(s \times r)$ de clasă C^∞. Proprietatea caracteristică a unui operator diferențial este cea de localitate: anume, este suficient, și evident necesar, ca un operator liniar $L : C^\infty(V, \xi) \to C^\infty(V, \eta)$ să aibă proprietatea ca, pentru orice secțiune $u \in C^\infty(V, \xi)$ să avem supp $Ls \subset \subset$ supp s pentru ca L să fie operator diferențial în sensul definiției de mai sus (*teorema lui Peetre*). O caracterizare a **o.d.l.** de ordin cel mult m este dată de următorul rezultat. Fie L o aplicație liniară L: $C^\infty(V, \xi) \to C^\infty(V, \eta)$ cu următoarea proprietate de continuitate: dacă $\{u_\nu\}$ este un șir de secțiuni din $C^\infty(V, \xi)$, ce converge local uniform către u împreună cu toate derivatele de ordin cel mult m, atunci $\{Lu_\nu\}$ converge uniform pe mulțimile compacte din V către Lu. În acest caz L este un operator diferențial de ordin cel mult m dacă și numai dacă funcția $e^{-i\lambda f(a)} \{L(u\, e^{i\lambda f})\,(a)\}$ este, pentru orice $a \in V$, orice secțiune $u \in C^\infty(V, \xi)$ și orice funcție $f \in C^\infty(V)$, un polinom de grad cel mult m în λ. (*G.G.*)

operator difuz v. **operator regulat**

operator discret v. **operator regulat**

operator disjunctiv v. **operator regulat**

operator eliptic Fie $P(x, D) = \sum a_\alpha(x)\, D^\alpha$ un operator diferențial liniar de ordin m. Operatorul P se numește *eliptic* în punctul x dacă $P_m(x; \xi) = 0$ implică $\xi = 0$. Aceasta revine la a cere simbolului principal al lui P de a fi injectiv. În general, dacă P este un operator între secțiunile a doi fibrați vectoriali P: $C^\infty(\Omega, E) \to C^\infty(\Omega, F)$, el se numește eliptic dacă simbolul său principal σ_p: $: E \times_\Omega T^*(\Omega) \to F$ este o aplicație injectivă. Proprietatea de injectivitate sugerează o anume invertibilitate (care are loc în spațiul operatorilor pseudodiferențiali și din acest motiv ecuațiile eliptice (resp. **o.e.**) au proprietăți remarcabile de existență, finitudine a spațiului soluțiilor, respectiv de regularitate. În cazul **o.e.** scalari

cu coeficienți constanți, aceștia sînt hipoeliptici și sînt singurii operatori hipoeliptici fără caracteristici reale multiple. Pe de altă parte, sînt singurii operatori cu coeficienți constanți care sînt analitic hipoeliptici. În sfîrșit, orice mulțime deschisă Ω este P-convexă în raport cu P dacă P este eliptic. Acesta implică existența soluțiilor ecuației $P(\mathrm{D})u = f$ pentru orice $\mathcal{D}_F^*(\Omega)$, unde $\mathcal{D}_F^*(\Omega)$ este spațiul distribuțiilor de ordin finit în Ω, în cazul în care P este eliptic. Faptul de a fi eliptic atrage $m = 2p$, cu excepția cazului $m = 1$. În cazul cînd operatorul $P(x, \mathrm{D})$ are coeficienți complecși, se consideră așa-numiții *operatori tare eliptici*. Dacă $P(x, \mathrm{D})$ este de ordin $m = 2p$ el este tare eliptic dacă $(-1)^p \operatorname{Re}\Big\{\sum_{|\alpha|=2p} a_\alpha(x)\xi^\alpha\Big\} > 0$ pentru orice $\xi \neq 0$. El este *uniform tare eliptic* în Ω dacă există $c_0 > 0$ astfel încît

$$(-1)^p \operatorname{Re}\Big\{\sum_{|\alpha|=2p} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha\Big\} \geqslant c_0 |\xi|^{2p}$$

pentru orice $x \in \Omega$. În sfîrșit, $P(x, \mathrm{D})$ este *propriu eliptic* dacă ecuația în λ, $P_m(x, \xi + \lambda\xi') = 0$ are p rădăcini cu parte imaginară pozitivă și p rădăcini cu parte imaginară negativă. Orice operator tare eliptic este propriu eliptic, reciproca fiind adevărată doar pentru operatorii de ordin 2. Pentru $n > 2$, orice **o.e.** este propriu eliptic și în acest caz toate definițiile de mai sus sînt echivalente. În cazul operatorilor tare eliptici este valabilă inegalitatea lui Gårding care permite utilizarea metodelor de analiză funcțională în rezolvarea problemelor de limită (v. **problema lui Dirichlet**). Fie $\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(\mathrm{D})\, u_j = F_i$, $i = 1, \ldots, N$, cu $P_{ij}(\mathrm{D})$ operator diferențial liniar. Sistemul este eliptic (sau eliptic în sensul lui Douglis-Nirenberg) dacă există numere nenegative t_j, s_j, $j = 1, \ldots, N$, astfel ca fiecare operator P_{ij} să fie de ordin cel mult $t_j - s_j$ și dacă P_{ij}^0 este partea sa principală, det $(P_{ij}^0(\xi)) = 0$ să implice $\xi = 0$. În cazul sistemului redus la o singură ecuație se regăsește definiția uzuală a elipticității. Dacă P_{ij} au coeficienți variabili, definiția elipticității este aceeași, cerînd în plus ca întregii t_j și s_j să nu depindă de punctul considerat. Definiția de mai sus a elipticității unui sistem este echivalentă cu existența unor evaluări apriori ce asigură existența (în cazul coeficienților constanți) a unei soluții fundamentale cu bune proprietăți locale, iar existența unei astfel de soluții fundamentale permite regăsirea proprietăților uzuale de existență și regularitate din cazul scalar. **O.e.** cu coeficienți analitici sînt analitic hipoeliptici (*teorema lui Petrovski*) și se bucură de o proprietate de aproximare a soluțiilor de tip Runge (*teorema lui Malgrange*). În sfîrșit, dacă operatorul diferențial de ordin m, $P(x, D)$ cu coeficienți indefinit derivabili este eliptic și este definit pe o mulțime deschisă Ω, iar K este o mulțime compactă inclusă în Ω, restricția lui P la K, considerată ca operator de la spațiul $H^m(K)$ la $H^\circ(K) = L^2(K)$, are nucleul de dimensiune finită și imaginea închisă. (Acest rezultat este adevărat și, mai general, dacă se consideră **o.e.** generali, definiți pe secțiunile unor fibrați vectoriali și restricția lor la mulțimi compacte.) Rezultă de aici, în virtutea regularității soluțiilor ecuației omogene, că dacă P este un **o.e.** general pe o varietate compactă V, nucleul său și imaginea sa sînt de dimensiune, respectiv, codimensiune finită, considerîndu-se P definit de la $C^\infty(V, \xi) \to C^\infty(V, \eta)$, deci că P este de indice finit. Acest indice se poate exprima cu ajutorul unor invarianți topologici (*teorema Atiyah-Singer*) și acest rezultat profund are implicații importante. De altfel, operatorii pseudodiferențiali au fost studiați pentru prima oară în legătură cu demonstrația inițială a teoremei Atiyah-Singer. În ceea ce privește ecuațiile (sau, mai general, sistemele) neliniare de ordin m de forma

$$F_i(x, u, \mathrm{D}^{\alpha}u) = 0,$$

unde $u = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$, $i = 1, \ldots, N'$, cu $N' \geqslant N$, iar α parcurge toți multi-indicii de lungime cel mult egală cu m, se numesc *ecuații* (resp. *sisteme*) *eliptice* dacă următorul sistem liniar asociat este eliptic:

$$L_i w = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant r \\ r \leqslant N}} \frac{\partial F_i}{\partial(\mathrm{D}^{\alpha}u^r)} (x, u, \ldots, \mathrm{D}^{\alpha}u)\, \mathrm{D}^{\alpha}w_r.$$

În condiții largi de regularitate, dacă $N' = N$, sînt valabile teoreme de existență și regularitate locală pentru astfel de sisteme neliniare eliptice. (*G.G.*)

operator Hilbert-Schmidt v. **alternativa lui Fredholm**

operator hiperbolic Fie $P(\mathrm{D})$ un operator diferențial liniar de ordin m cu coeficienți constanți și $P_m(\xi)$ simbolul său principal. Se spune că operatorul $P(\mathrm{D})$ este *hiperbolic* față de vectorul real N (sau față de hiperplanul definit de N) dacă: 1) $P_m(N) \neq 0$, *i.e.* N nu este caracteristic; 2) Există un număr τ_0 astfel încît $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ pentru $\xi \in \mathbf{R}^n$ și $\tau > \tau_0$. În particular, dacă operatorul P este omogen, el este hiperbolic în raport cu N dacă și numai dacă $P(N) \neq 0$ și ecuația în τ, $P(\xi + \tau N) = 0$, are doar rădăcini reale pentru ξ real. Interesul acestei definiții este că ea caracterizează operatorii liniari pentru care problema lui Cauchy are soluții, anume dacă H este semispațiul definit de N, $\{\langle x, N\rangle \geqslant 0\}$, și dacă ecuația $P(\mathrm{D})\, u = f$ are o soluție u în $\mathcal{D}^*(\mathbf{R}^n)$ cu supp $u \subset H$ pentru orice $f \in C_0^{\infty}(H)$, frontiera lui H nefiind caracteristică, atunci $P(\mathrm{D})$ trebuie să fie hiperbolic; reciproc, pentru orice $f \in \mathcal{D}^*(\mathbf{R}^n)$, cu supp $f \subset H$, și dacă $P(\mathrm{D})$ este hiperbolic în raport cu N, ecuația $P(\mathrm{D})\, u = f$ are o soluție unică u cu suportul în H. O astfel de ecuație se numește *ecuație hiperbolică*. Dacă $P(\mathrm{D})$ este hiperbolic în raport cu N, atunci el are o soluție fundamentală E cu suportul conținut în semispațiul H definit de N și, de fapt, suportul lui E este conținut într-un con determinat precis. Reciproc, existența unei soluții fundamentale cu suportul într-un con implică hiperbolicitatea într-o direcție convenabilă a lui $P(\mathrm{D})$. Dacă $P(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}$ este hiperbolic în raport cu N, rezultă că și partea sa principală $P_m(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}$ este hiperbolică în raport cu N, dar reciproca nu este adevărată; spre deosebire de cazul operatorilor de tip eliptic, termenii de ordin inferior influențează hiperbolicitatea. Operatorul $P(\mathrm{D})$ de ordin m este *strict hiperbolic* (sau *hiperbolic în sensul lui Petrovski*) în raport cu N dacă: 1) N nu este caracteristic pentru P; 2) Ecuația în τ, $P_m(\xi + \tau N) = 0$ are doar rădăcini reale simple pentru orice ξ real care nu este proporțional cu N. Operatorii strict hiperbolici sînt acei operatori P pentru care P și P_m sînt simultan hiperbolici. În cazul **o. h.** cu coeficienți constanți, Petrovski și apoi Atiyah-Bott-Gårding au studiat în mod foarte amănunțit dependența soluției problemei lui Cauchy de datele inițiale, în particular existența lacunelor. Dacă $P(x, \mathrm{D})$ este un operator diferențial liniar cu coeficienți variabili de ordin m, se poate da o definiție a hiperbolicității analogă celei de mai sus, dar în acest caz este adesea mai utilă reducerea ecuației la un sistem de ordin 1, prin intermediul unor operatori pseudodiferențiali. Se presupune că $x = (t, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (t, x')$ și că operatorul $P(x, \mathrm{D})$ este hiperbolic în raport cu $t = 0$. În acest caz $P(x, \mathrm{D})$ se va putea scrie sub forma

$$P(t, x; \mathrm{D}_t, \mathrm{D}_x) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m - \sum a_{m-j}(t, x', \mathrm{D}_x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j,$$

unde a_{m-j} este un operator liniar în variabila x', de ordin $m-j$, depinzînd de parametrul t. Ecuația $P(x, \mathrm{D})u = f$ se reduce la un sistem de ordin 1 de ecuații pseudodiferențiale, de forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Reducerea se face (în ipoteze destul de generale), punînd

$$u_1 = \Lambda_u^{m-1} u,\ u_2 = \frac{\partial}{\partial t}\Lambda^{m-2} u, \ldots, u_m = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u,$$

unde transformata Fourier a lui (Λu) este $(1 + |\xi^2|)^{1/2}\hat{u}(\xi)$. În general, operatorul $\frac{\partial}{\partial t} - K$ este hiperbolic (simetric) dacă $K + K^* \in \mathrm{PS}\,(0, 1, 0)$, unde $K = K(t)$ este o familie de operatori pseudodiferențiali din $\mathrm{PS}(1, 1, 0)$, iar K^* este adjunctul lui K. Aici prin $\mathrm{PS}\,(m, 1, 0)$, unde $m = 0$, respectiv 1, se înțelege spațiul operatorilor pseudodiferențiali de ordin 1, respectiv 0, definiți de

$$P(x, \mathrm{D})\, u = 2\pi^{-nn}\int p(x, \xi')\, e^{i\langle x', \xi'\rangle}\,\hat{u}(\xi')\, d\xi';$$

ξ' este variabila duală a lui x', simbolul $p\,(x', \xi')$ verificînd pe orice mulțime compactă K evaluări de forma

$$\left|\mathrm{D}^{\beta}_{x'}\mathrm{D}^{\alpha}_{\xi'}p(x', \xi')\right| \leqslant C_{K, \alpha, \beta}(1 + |\xi'|)^{m-|\alpha|}$$

oricare ar fi α, β. Pentru astfel de sisteme problema lui Cauchy are o soluție locală și este corect pusă. Dacă operatorul K este de forma $K = K_1 + K_0$ cu $K_0 \in \mathrm{PS}(0, 1, 0)$ și simbolul său principal $\sigma_{K_1}(x', \xi')$ are pentru orice (x', ξ') fixat, cu $|\xi'| > 1$, valori proprii imaginare și distincte, $\frac{\partial}{\partial t} - K$ este denumit *strict hiperbolic*. Rezultatul fundamental este că soluția problemei lui Cauchy are o soluție unică u pentru orice dată inițială $\varphi \in H^s(T^n)$ și orice membru drept $f \in C\,([0, t], H^s(T^n))$ cu $u \in C([0, t], H^s(T^n))$ de îndată ce operatorul $\frac{\partial}{\partial t} - K$ este strict hiperbolic; aici T^n este torul n-dimensional. A. Calderon a utilizat pentru prima oară operatorii preudodiferențiali în studiul existenței și unicității problemei lui Cauchy. Sistemele hiperbolice apar în numeroase probleme; astfel sistemul lui Dirac este hiperbolic dar nu este strict hiperbolic. (*G.G.*)

operator hipoeliptic Un operator diferențial liniar cu coeficienți indefinit derivabili $P(x, \mathrm{D})$ se numește *hipoeliptic* într-o mulțime deschisă Ω din $\mathbf{R}^n$

dacă pentru orice $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ din faptul că $P(x, \mathrm{D})\, u$ este indefinit derivabil rezultă că u este indefinit derivabil, *i.e.* pentru orice distribuție u din Ω, sing supp u = sing supp $P(\mathrm{D})\, u$, unde cu sing supp T s-a notat suportul singular al distribuției T. În particular, în acest caz toate soluțiile ecuației omogene $P(x, \mathrm{D})\, u = 0$ sînt indefinit derivabile. În cazul operatorilor cu coeficienți constanți, există o caracterizare completă a **o.h.**, datorată lui Hörmander. Fie $P(\mathrm{D})$ un astfel de operator și $P^{(\alpha)}(\xi) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} P(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}}$. Atunci $\dfrac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \to 0$ cînd $\xi \to \infty$ în $\mathbb{R}^n$, pentru orice $\alpha \neq 0$, este condiția necesară și suficientă de hipoelipticitate. Există variante ale definiției hipoelipticității, anume un operator cu coeficienți reali analitici este analitic-hipoeliptic dacă soluția u a ecuației $P(x, \mathrm{D})\, u = f$ este analitică acolo unde membrul drept f este analitic. În cazul în care operatorul P este cu coeficienți constanți, aceasta este echivalent cu existența unor soluții fundamentale analitice în afara originii, și *parțial hipoeliptic* dacă este hipoeliptic în raport cu o parte din variabile. În cazul operatorilor cu coeficienți variabili situația este mult mai delicată și se cunosc doar condiții suficiente. Dintre acestea cea mai profundă este *Teorema lui Hörmander*. Fie

$$P = P(x, \mathrm{D}) = \sum X_j^2 + X_0 + c(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

X_j operatori liniari de ordin 1 cu coeficienți indefinit derivabili cu valori reale iar $c(x)$, de asemenea indefinit derivabilă, poate avea valori complexe. Dacă algebra Lie generată de cîmpurile de vectori X_j are rang constant în fiecare punct și acest rang este chiar n, atunci P este hipoeliptic.
Între **o.h.** și cei local rezolvabili există o legătură strînsă: transpusul unui **o.h.** este local rezolvabil, ceea ce explică în parte interesul deosebit acordat **o.h.** (*G.G.*)

operator integral Fourier, o importantă generalizare a noțiunii de operator pseudodiferențial. Pentru a fi definit se consideră expresii de forma

$$I_{\varphi, a}(u) = \iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,\theta)}\, a(x, \theta)\, u(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\theta, \qquad \forall u \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

unde a este definită pe mulțimea deschisă $\Omega \times \mathbb{R}^N$, iar φ este o funcție din $C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$. O astfel de integrală însă nu are sens decît dacă se impun funcțiilor $a(x, \theta)$, numită *amplitudine*, și $\varphi(x, \theta)$, numită *funcție de fază*, o serie de condiții. În mod uzual se cere ca $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ iar φ să verifice: 1) $\varphi(x, \lambda\theta) = \lambda\varphi(x, \theta)$ pentru orice $x \in \Omega$, $\lambda > 0$, $\theta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$; 2) Dacă $\varphi(x, \theta) = 0$, cu $\theta \neq 0$, atunci $|\varphi'_x(x, \theta)| + |\varphi'_\theta(x, \theta)| \neq 0$, unde

$$\varphi'_x = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right), \quad \varphi'_\theta = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_n}\right).$$

În aceste condiții $I_{\varphi, a}(u)$ se definește ca fiind $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} I_{\varphi, \psi^\varepsilon_a}(u)$, unde $\psi^\varepsilon(\theta) = \psi(\varepsilon\theta)$, cu ψ o funcție din $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi(0) = 1$. Prin integrări prin părți repetate $I_{\varphi, \psi^\varepsilon_a}(u)$ se reduce la o integrală convergentă și se verifică că rezultatul trecerii la limită nu depinde de alegerea funcției ψ (cu proprietățile indicate).

Astfel de integrale se numesc *integrale oscilante*. Dacă $\Omega = X \times Y$, cu X mulțime deschisă în $\mathbb{R}^{n_1}$ și Y mulțime deschisă în $\mathbb{R}^{n_2}$, atunci aplicația

$$x \to Au(x) = \iint e^{i\varphi(x,\, y,\, \theta)}\, a(x, y, \theta)\, u(y)\, dy\, d\theta$$

definește o funcție de clasă C^∞ dacă φ este o funcție de fază și $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$. Funcționala liniară

$$C_0(X) \ni u \to \langle Au, v \rangle = \iiint e^{i\varphi(x,\, y,\, \theta)}\, a(x, y, \theta)\, v(x)\, u(y)\, dx\, dy\, d\theta$$

este o distribuție pe mulțimea deschisă X și aplicația A astfel definită de la $C_0^\infty(Y) \to \mathcal{D}^*(X)$ este liniară și continuă; ea se numește **o.i.F.** definit de simbolul a și de funcția de fază φ. Dacă funcției de fază φ i se cere să îndeplinească condiția $|\varphi'_y| + |\varphi'_x| \neq 0$ pentru $\theta = 0$, atunci aplicația A este liniară și continuă de la $C_0^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ și se poate prelungi la un operator liniar continuu $A : \mathcal{E}^*(Y) \to \mathcal{D}^*(X)$. În aceste condiții operatorului A îi corespunde un nucleu $K_A \in \mathcal{D}^*(X \times Y)$ definit de integrala oscilantă

$$\langle K_A, u \rangle = \iiint e^{i\varphi(x,\, y,\, \theta)}\, u\,(x, y, \theta)\, u(x, y)\, dx\, dy\, d\theta$$

pentru orice $u \in C_0^\infty(X \times Y)$. În acest mod s-a dat ceea ce se numește definiția locală a **o.i.F.** De remarcat că în cazul în care $\varphi(x, y, \theta)$ este liniară se regăsește definiția operatorilor pseudodiferențiali. Dar diferite funcții de fază φ și diferite amplitudini (simboluri) a pot da naștere unui aceluiași **o.i.F.** Se poate da o definiție geometrică a **o.i.F.** legată de așa-numitele varietăți lagrangiene din fibratul cotangent (v. **spațiu simplectic**) care explică ambiguitatea semnalată mai înainte. **O.i.F.** joacă un rol însemnat în studiul și reducerea operatorilor diferențiali (sau pseudodiferențiali) la forme mai simple. Proprietatea cheie este posibilitatea de a calcula frontul de undă a unei distribuții definite de o integrală oscilantă. Astfel, fie $a \in S^m_\rho$ cu $\rho > 0$ și $\varphi \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ o funcție de fază cu proprietatea că $d_{(x,\,\theta)}\varphi(x, \theta) \neq 0$ pentru orice $(x, \theta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Dacă se definește suportul esențial al simbolului a, notat cu es supp a, ca cea mai mică submulțime conică a mulțimii $\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ în afara căreia $a \in S^{-\infty}$, atunci A fiind distribuția definită de integrala oscilantă

$$\iint e^{i\varphi(x,\, \theta)} u(x, t)\, u(x)\, dx\, d\theta \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

frontul de undă $WF(a)$ fiind inclus în mulțimea

$$\{(x, d_x\varphi(x, \theta)) \text{ cu } (x, \theta) \in \text{es supp } a,\ \ d_\theta(\varphi(x, \theta)) = 0\}; \quad (*)$$

se vede că mulțimea punctelor critice în raport cu variabila de fază joacă un rol determinant în calculul frontului de undă. Pentru **o.i.F.** definiți global, locul mulțimii (*) este luat de o varietate lagrangiană din fibratul cotangent, ceea ce face ca distribuțiile date de integrale oscilante să se numească și *distribuții lagrangiene*. Unei transformări canonice (v. **transformare canonică**) i se asociază în mod natural un **o.i.F.**; această asociere bucurîndu-se de proprietățile ce permit utilizarea acestor operatori la reducerea operatorilor pseudodiferențiali la forme mai simple. (*G.G.*)

operator închis Fie X și Y spații liniare topologice, E o submulțime a lui X și $U : E \to Y$ un operator. Mulțimea $G(U) = \{(x, U(x)) \mid x \in E\}$ se numește *graficul operatorului* U. Dacă $G(U)$ este o mulțime închisă în spațiul topologic produs $X \times Y$, atunci U se numește **o.î.** Dacă X și Y sînt spații Banach iar $U : X \to Y$ un operator liniar închis, atunci U este un operator continuu (*teorema graficului închis*). Dacă $X = Y = C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ (spațiul funcțiilor reale continue pe $[0; 1]$ cu norma obișnuită) (v. **spațiu Banach**) iar $E = C^1_{\mathbb{R}}([0, 1])$ submulțimea funcțiilor cu derivata continuă, atunci operatorul de derivare care aplică E în Y este închis, dar nu este continuu. (*R.C.*)

operator liniar v. **operator**

operator liniar și continuu de rang finit v. **operator compact**

operator mărginit (între două spații liniare topologice X și Y), operator $U : X \to Y$ cu proprietatea că pentru orice mulțime mărginită $A \subset X$ mulțimea $U(A)$ este mărginită în Y. Orice operator liniar și continuu între două spații liniare topologice este un **o.m.** Dacă X este un spațiu bornologic iar Y un spațiu local convex, atunci orice operator liniar și mărginit care aplică X în Y este un operator continuu. Unii autori definesc noțiunea de **o.m.** prin condiții mai restrictive. (*R.C.*)

operator (o)**-mărginit** v. **operator regulat**

operator microdiferențial, generalizare, în cazul analitic, a operatorilor pseudodiferențiali. Fie U o mulțime deschisă din fibratul cotangent T^*X al unei varietăți analitice (reale sau complexe). Un microsimbol omogen de grad k este o funcție analitică pe U, deci de forma $P(x, \xi)$, omogenă de grad k în raport cu variabila ξ. (Dacă mulțimea deschisă U nu taie secțiunea nulă a lui T^*X, k poate fi negativ.) Un microsimbol este o sumă formală $P(x, \xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_m(x, \xi)$ de microsimboluri omogene, verificînd evaluări de forma: Pentru orice mulțime compactă $K \subset U$ și orice $\varepsilon > 0$ există constante $C_{\varepsilon, K} > 0$ astfel ca: 1) Pentru $n \geqslant 0$, $\sup_K | P_n(x, \xi)| < C_{\varepsilon,K} \frac{\varepsilon^n}{n!}$; 2) Pentru n negativ $\sup_K | P_n(x, \xi)| \leqslant (C_{\varepsilon,K})^{-(n+1)}(-n)!$ Ordinul lui P este m_0 dacă P_m sînt nule pentru $m > m_0$. Datorită faptului că microsimbolurile $P_n(x, \xi)$ sînt omogene, ele pot fi considerate ca funcții definite de fibratul proiectiv P^*X (care, prin definiție, este spațiul cît al lui $T^*X \setminus 0$ prin relația de echivalență $(x, \xi) \sim \sim (x, \lambda\xi)$ pentru orice $\lambda \neq 0$, λ real sau complex după cum varietatea X este reală sau complexă. Se obține astfel, pentru orice mulțime deschisă U, mulțimea $\mathcal{E}(U)$ a tuturor microsimbolurilor definite pe U, deci pe T^*X (sau pe P^*X) un fascicol $\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$ numit fascicol **o.m.** Faptul fundamental (și care are loc dacă varietatea X este analitică) este că fiecărui microsimbol îi corespunde într-adevăr un operator ce acționează pe fascicolul $\mathcal{C}$ (mai precis, pe microfuncțiile olomorfe). Din acest motiv, se identifică microsimbolurile cu operatorii asociați și se folosește terminologia **o.m.** Aceștia pot fi de ordin infinit (astfel de operatori nu există în cadrul neanalitic). **O.m.** se comportă analog celor pseudodiferențiali față de operațiile uzuale. Microsimbolurile omogene formează pe T^*X un fascicol graduat de inele; acest fascicol este exact graduatul asociat fascicolului microoperatorilor, acesta din urmă fiind înzestrat cu filtrarea naturală dată de ordin. Dacă π este proiecția canonică pe baza lui T^*X și dacă $\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)$ este fascicolul imagine inversă prin π a fascicolului operatorilor diferențiali, $\mathcal{E}_X$ conține pe $\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)$ ca un subfascicol de inele; restricția lui $\mathcal{E}_X$ la secțiunea nulă (identificată cu varietatea X), coincide cu $\mathcal{D}_X$. În sfîrșit, filtrarea pe $\mathbb{Z}$ naturală pe $\mathcal{E}_X$ o extinde pe cea a lui $\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)$. Dacă P este un operator diferențial de ordin m, se poate defini simbolul său principal $\sigma(P)$, care este un microsimbol omogen de grad m. Operatorul P este microeliptic pe o mulțime deschisă U din T^*X dacă simbolul său principal $\sigma(P)(x, \xi) \neq 0$ pentru orice $(x, \xi) \in U$. Rezultatul de bază este că operatorul P este inversibil în $\mathcal{E}_X(U)$ dacă și numai dacă este microeliptic în U. Pentru operatorii din $\mathcal{E}_X$ este valabilă o teoremă de pregătire de tip Weierstrass care implică coerența fascicolului $\mathcal{E}_X$. Prin definiție, un sistem microdiferențial pe o varietate analitică X este un fascicol de $\mathcal{E}_X$-module la stînga local de prezentare finită, deci, avînd în vedere coerența lui $\mathcal{E}_X$, un $\mathcal{E}_X$-modul coerent la stînga (v. **microlocalizarea**). (*G.G.*)

operator monoton, operator $U : X \to X^*$, unde X este un spațiu Banach real, reflexiv, iar X^* conjugatul său și care satisface condiția

$$(U(x_1) - U(x_2))\ (x_1 - x_2) \geqslant 0, \quad \forall x_1,\ x_2 \in X.$$

Dacă un **o.m.** U satisface următoarele condiții:

1) $\lim\limits_{\lambda \to 0} (U(a + \lambda b)\ (x) = (U(a))\ (x), \quad \forall a, b, x \in X;$

2) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \|x\|^{-1}\ (U(x))\ (x) = +\infty,$

atunci U se numește *operator coerciv*. Dacă $U : X \to X^*$ este un operator coerciv, atunci $U(X) = X^*$ (rezultatul aparține lui F. Browder). (*R.C.*)

operator normal (pe un spațiu Hilbert X), operator liniar și continuu $U : X \to X$ care permută cu adjunctul său U^*, *i.e.* $UU^* = U^*U$. Dacă X este un spațiu Hilbert complex, un operator $U : X \to X$ este un **o.n.** dacă și numai dacă se reprezintă sub forma $U = U_1 + iU_2$, unde U_1 și U_2 sînt operatori autoadjuncți permutabili. (*R.C.*)

operator nuclear, operator U între două spații local convexe X și Y care se poate reprezenta sub forma $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x) y_n$, $x \in X$, unde $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere pozitive cu $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ convergentă, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir egal continuu de funcționale liniare pe X, iar $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente conținute într-o submulțime echilibrată, convexă și mărginită B a lui Y astfel încît subspațiul liniar $\mathrm{Sp}(B)$ generat de B să fie un spațiu Banach dacă se ia ca normă funcționala lui Minkowski asociată mulțimii B. Dacă Y este un spațiu Banach, atunci condiția pusă șirului $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se reduce la condiția ca el să fie un șir mărginit de elemente din Y. Dacă X este un spațiu liniar normat, iar Y un spațiu Banach, atunci orice **o.n.** care aplică X în Y este limita unui șir de operatori liniari și continui, de rang finit, în spațiul Banach $\mathcal{L}(X, Y)$ al operatorilor liniari și continui cu norma $\|U\| = \sup\{\|U(x)\| \mid \|x\| \leqslant 1\}$. (*R.C.*)

operator (o)**-continuu** v. **operator regulat**

operator (o)**-convex** Fie X un spațiu liniar dirijat care este și un spațiu Banach în care conul pozitiv este închis în topologia normei. Fie E o submulțime convexă a lui X. Un operator $U : E \to X$ se numește **o.** (o)**-c.** dacă $U((1 - \lambda)\, x + \lambda y) \leqslant (1 - \lambda)\, U(x) + \lambda U(y)$ oricare ar fi perechea x, y de elemente necomparabile din X (*i.e.* $x \nleqslant y$ și $y \nleqslant x$) și oricare ar fi numărul $\lambda \in$

$\in [0, 1]$. Dacă E este o submulțime convexă și deschisă la dreapta a lui X iar $U : E \to X$ este un operator continuu în topologia normei și derivabil Fréchet la dreapta pe E, atunci pentru ca U să fie (o)-convex este necesar și suficient ca pentru orice pereche x, y de elemente din E cu $y \geqslant x$ să aibă loc inegalitatea $(U'_d(y) - U'_d(x))\,(y - x) \geqslant 0$, unde U'_d este derivata Fréchet la dreapta a operatorului U. (*R.C.*)

operator omogen v. **operator**

operator parabolic, operator de forma $u \to \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(x, t, \mathrm{D})\,u$, unde $A(x, t, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(t, x)\,\mathrm{D}^\alpha$ este un operator tare eliptic în cilindrul $Q_T = \Omega \times (0, T)$, Ω fiind o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$. **O.p.** generalizează operatorul $\dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta$, operatorul căldurii și soluțiile ecuațiilor $Lu = f$ (ecuații parabolice) păstrează în mare parte proprietățile soluțiilor ecuației căldurii, soluțiile ecuațiilor parabolice de ordin 2 cu proprietăți ce permit încadrarea lor într-o teorie generală a potențialului (v. **teoria potențialului**). Un caz particular important îl constituie operatorul policaloric $\dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta^p$, unde Δ^p reprezintă laplacianul iterat de p ori, studiat amănunțit de M. Nicolescu, care a dat, între altele, și formule de reprezentare integrală a soluțiilor ecuației policalorice. **O.p.** sînt operatori hipoeliptici. **O.p.** de ordin 2 se dau adesea într-o formă mai adecvată utilizării metodelor variaționale:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i, j=1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\, a^{ij}(x, t)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^u + \sum_{j=1}^{n} b^j(x, t)\, \frac{\partial u}{\partial x^j} + c(x, t). \quad (G.G.)$$

operator pozitiv v. **operator regulat**

operator pseudodiferențial, operatorul $P\colon C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ dat de formula

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{\mathrm{i}x\xi}\, p(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad (*)$$

unde $\hat{u}$ este transformata Fourier a funcției u, $x\xi$ produsul scalar în $\mathbb{R}^n$ al vectorilor x și ξ iar Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Funcția $p(x, \xi)$ definită pe $\Omega \times \mathbb{R}^n$ se numește *simbolul* operatorului P. În cazul în care $p(x, \xi)$ este de forma $p(x, \xi) = \sum a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$, cu coeficienți a_α indefinit derivabili în Ω, operatorul P este operatorul diferențial $P = P(x, \mathrm{D}) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha$. **O.p.** generalizează astfel operatorii diferențiali. În ceea ce privește simbolul p, se pot impune diferite condiții și de fiecare dată se obține o altă clasă de **o.p.** Clasa de simboluri cea mai des utilizată este clasa $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ a funcțiilor $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ cu proprietatea că, pe orice mulțime compactă $K \subset \Omega$ și orice multiindici $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, există o constantă $C_{K,\alpha,\beta}$ astfel încît

$$\sup_K |\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_\xi^\beta\, p(x, \xi)| < C_{k,\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

unde $0 < \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta < 1$. Pentru $\rho = 1$, $\delta = 0$ se utilizează adesea notația $S^m(\Omega)$. De asemenea, se notează $S^\infty_{\rho,\delta}(\Omega) = \bigcup_m S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ și $S^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega) = \bigcap_m S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, clasele de **o.p.** notîndu-se $L^\infty_{\rho,\delta}(\Omega)$, respectiv $L^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Operatorul Pu dat prin $(*)$ definește un operator continuu de la $C_0^\infty(\Omega)$ la $C^\infty(\Omega)$, ce poate fi prelungit la o aplicație liniară continuă de la $\mathcal{E}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$. Mulțimea operatorilor de acest fel, definiți cu ajutorul unor simboluri aparținînd lui $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, se notează cu $\mathrm{PS}(m, \rho, \delta)$ sau cu $L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$. Se poate da o altă reprezentare o.p., în care să nu mai figureze transformata Fourier $\hat{u}$. Pentru aceasta, fie operatorul

$$Au(x) = \iint e^{\mathrm{i}\langle x-y,\, \theta\rangle}\, a(x, y, \theta)\, u(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\theta \quad (**)$$

înțeles ca o integrală oscilantă (v. **operator integral Fourier**) definit pentru orice $u \in C_0^\infty(\Omega)$, unde $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ (ultima notație însemnînd că derivatele lui a în raport cu variabilele x și y, respectiv θ, verifică aceleași inegalități ca derivatele lui p în raport cu x, respectiv ξ, din definiția clasei $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$). Un operator $A : C_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ este regularizant dacă și numai dacă $A \in L^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega)$ pentru orice ρ, δ. Dacă definim echivalența a doi operatori: $A \sim B$ prin condiția ca $A - B$ să fie regularizant, orice operator $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ este echivalent cu un operator propriu (sau propriu suportat), *i.e.* cu un operator al cărui nucleu are proprietatea că proiecțiile naturale pe bază, restrînse la suportul său, sînt proprii. Atunci, pentru orice $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ propriu, ce corespunde simbolului a, există $\sigma_A \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ astfel ca

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{\mathrm{i}x\xi}\, \sigma_A(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

pentru orice $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Simbolul $\sigma_A(x, \xi)$ se recuperează din $a(x, y, \theta)$ cu ajutorul formulei

$$\sigma_A(x, \xi) = \iint a(x, x + y, \xi + \theta)\, e^{-\mathrm{i}(y,\, \theta)}\mathrm{d}y\, \mathrm{d}\theta,$$

unde ultima integrală trebuie înțeleasă ca o integrală oscilantă. Din acest motiv s-au notat la fel spațiile de operatori (definiți în cele două moduri diferite) căci ele coincid în cazul $\delta < \rho$. Rezultă în plus că pentru $\delta < \rho$ are loc izomorfismul

$$L^m_{\rho,\delta}(\Omega)/L^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega) \xrightarrow{\sim} S^m_{\rho,\delta}(\Omega)/S^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

Orice reprezentant prin acest izomorfism al unui operator $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ se numește *simbolul* operatorului A și se notează cu σ_A. Se poate arăta că izomorfismul σ de mai sus induce un izomorfism

$$\sigma_0 : L^m_{\rho,\delta}(\Omega)/L^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega) \xrightarrow{\sim} S^m_{\rho,\delta}(\Omega)/S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

Pentru un operator $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ orice reprezentant al lui $\sigma_0(\hat{A})$, $\hat{A}$ fiind clasa lui A modulo $L^{m-(\rho-\delta)}(\Omega)$, se numește *simbolul principal* al operatorului A;

acest simbol este definit pe fibratul cotangent $T^*(\Omega)$. În sfîrşit, de asemenea, în ipoteza $\delta < \rho$, un operator liniar continuu $A : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ este în $L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ dacă şi numai dacă funcţia $e^{-i\langle x,\xi\rangle} A(f e^{i\langle\cdot,\xi\rangle})$ aparţine spaţiului $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$. Proprietăţile fundamentale ale **o.p.** sînt că formează (faţă de compunere) o algebră închisă la luarea adjunctului şi că parametricele a numeroşi operatori diferenţiali se găsesc în această algebră. Mai mult, invarianţa proprietăţilor **o.p.** faţă de difeomorfisme permit definirea lor şi pe varietăţi, această generalizare fiind esenţială în studiul problemelor la limită. Pentru simbolurile din $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ au loc evaluări asimptotice de tipul următor: Dacă $m_j \searrow -\infty$ şi $p_j \in S^{m_j}_{\rho,\delta}(\Omega)$, atunci există un simbol $p \in S^{m_0}_{\rho,\delta}(\Omega)$ astfel ca $p - \sum_{i\geq m_k} p_j$ să aparţină lui $S^{m_k}_{\rho,\delta}(\Omega)$ şi în acest caz se utilizează notaţia $p \sim \sim \sum p_j$. În particular, simbolul ce apare în (*) este legat (modulo simboluri din $S^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega)$) de simbolul $a(x, y, \xi)$ ce apare în (**) prin dezvoltarea asimptotică (în ipoteza $\delta < \rho$)), *i.e.*

$$p(x, \xi) - \sum \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi D^\alpha_y a(x, y, \xi)\Big|_{y=x},$$

$$p - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi D^\alpha_y a(x, y, \xi)\Big|_{y=x} \in S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

Prin operatori diferenţiali clasici (primii **o.p.** introduşi de Kohn-Nienberg) se înţeleg operatori $P \in L^m_{1,0}(\Omega)$ ale căror simboluri $p(x, \xi)$ au o dezvoltare asimptotică de forma:

$$p(x, \xi) \sim \sum_0^\infty \chi(\xi)\, p_{m-j}(x, \xi), \quad \text{unde} \quad \chi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \chi(\xi) = 1 \quad \text{pentru} \quad |\xi| \geq 1,$$

$\chi(\xi) = 0$ pentru $|\xi| \leq 1/2$, $p_{m-j} \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ şi au loc condiţiile de omogenitate $p_{m-j}(x, t\,\xi) = t^{m-j} p_{m-j}(x, \xi)$. Primul termen din dezvoltarea asimptotică de mai sus este simbolul principal al operatorului P, în sensul definiţiei date mai înainte. **O.p.** proprii (sau propriu suportaţi) se prelungesc la operatori liniari continui de la $C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, de la $\mathcal{E}^*(\Omega) \to \mathcal{E}^*(\Omega)$ şi de la $\mathcal{D}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$. Dacă $A \in L^{m_1}_{\rho,\delta}$ şi $B \in L^{m_2}_{\rho,\delta}$, atunci $C = AB \in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}$ (în ipoteza $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$). Dacă $\delta < \rho$ simbolurile $a(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ şi $c(x, \xi)$ sînt legate prin

$$c(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} [D^\alpha_\xi a(x, \xi)]\, [D^\alpha_x b(x, \xi)].$$

În particular, dacă A, B sînt simbolurile clasice cu simboluri principale $a_1(x, \xi)$, respectiv $b_1(x, \xi)$, atunci C rezultă clasic, de simbol principal $c_{m_1+m_2}(x, \xi) = a_{m_1}(x, \xi)\, b_{m_2}(x, \xi)$. Pentru $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, există $A^* \in L^m_{\rho,\delta}$, adjunctul (sau transpusul formal) al lui A ce verifică $(Au, v) = (u, A^*v)$ pentru orice $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$, (u,v) fiind produsul în spaţiul $L^2(\Omega)$. Dacă $\rho < \delta$, simbolul $p^*(x, \xi)$ este dat de $p^*(x, \xi) \sim \sum \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi D^\alpha_x \overline{p(x, \xi)}$. Rezultă de aici că $L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ cu

$\delta \leq \rho$ este o algebră cu involuţie. Dacă $\Omega = \mathbb{R}^n$ şi $a(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, atunci operatorul A defineşte un operator liniar continuu de la $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, dacă $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$, $m < 0$, $\rho - \delta - \frac{m}{n} \geq 0$. În particular, operatorii de forma (*) cu simboluri $p(x, \xi)$ ce verifică evaluările $|D^\alpha_\xi D^\beta_x p(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$, uniform pe $\mathbb{R}^n$, definesc operatorii continui pe $L^2(\mathbb{R}^n)$. De asemenea, dacă $0 \leq \delta < \rho < 1$ şi evaluările de mai înainte sînt uniforme pe $\mathbb{R}^n$, operatorul (*) defineşte un operator liniar continuu de la $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ pentru orice $s \in \mathbb{R}$. În sfîrşit, dacă $1 - \rho \leq \delta < \rho \leq 1$, spaţiul L^m este invariant faţă de difeomorfisme; în particular, **o.p.** clasici au această proprietate, ceea ce permite definirea lor pe varietăţi. **O.p.** se bucură de importanta proprietate de pseudolocalitate: pentru $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ (sau $\mathcal{E}^*(\Omega)$) sing supp $Au \subset$ sing supp u. Un **o.p.** clasic se numeşte eliptic dacă simbolul său principal $p_m(x, \xi) \neq 0$ pentru $\xi \neq 0$. Orice **o.p.** eliptic este (modulo operatori regularizanţi) inversabil în algebra **o.p.** Se cunosc condiţii suficiente mai generale decît elipticitatea ca un **o.p.** să aibă parametrice; o consecinţă a existenţei unei parametrici în $L^{-m}_{\rho,\delta}(\Omega)$ este hipoelipticitatea operatorului respectiv în Ω, [care în cazul **o.p.** se poate defini prin aceea că sing supp Pu = sing supp u pentru orice distribuţie u. (*G.G.*)

operator regulat Fie X şi Y două spaţii liniare ordonate. Un operator $U : X \to Y$ se numeşte *operator pozitiv* dacă din $0 \leq x \in X$ rezultă $U(x) \geq 0$. Se numeşte **o.r.** un operator $U : X \to Y$ care se poate reprezenta ca diferenţă a doi operatori aditivi şi pozitivi. Un operator $U : X \to Y$ se numeşte *operator* (o)-*mărginit* dacă pentru orice submulţime mărginită $A \subset X$, mulţimea $U(A)$ este de asemenea mărginită. Orice **o.r.** este un operator (o)-mărginit. Un operator $U : X \to Y$ se numeşte (o)-*continuu* (resp. (ω)-*continuu*) dacă din $x = (o)\text{-}\lim_n x_n$ (resp. $x = (\omega)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta$) în spaţiul X rezultă

$$U(x) = (o)\text{-}\lim_n U(x_n) \quad (\text{resp.} \quad U(x) = (\omega)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} U(x_\delta)).$$

Din definiţiile diferitelor tipuri de operatori se obţin, în cazul $Y = \mathbb{R}$, definiţiile noţiunilor de *funcţională pozitivă*, *funcţională regulată*, *funcţională* (o)-*mărginită*, *funcţională* (o)-*continuă*, *funcţională* (ω)-*continuă*. Dacă X este un spaţiu liniar dirijat iar Y este un spaţiu liniar ordonat arhimedian, atunci orice **o.r.** $U : X \to Y$ este liniar. Dacă X şi Y sînt două spaţii liniare reticulate, un operator $U : X \to Y$ se numeşte *operator disjunctiv* dacă din $x_1 \perp x_2$, $x_1, x_2 \in X$, rezultă $U(x_1) \perp U(x_2)$. Fie în cele ce urmează X un spaţiu liniar reticulat şi Y un spaţiu liniar complet reticulat. Un operator aditiv $U : X \to Y$ este regulat dacă şi numai dacă este (o)-mărginit. Să notăm cu $\mathcal{R}(X, Y)$ mulţimea **o.r.** care aplică X în Y. Ea este un spaţiu liniar complet reticulat în raport cu operaţiile obişnuite cu operatorii şi în raport cu ordinea dată de conul operatorilor pozitivi (*i.e.* $U_1 \leq U_2$ dacă $U_2 - U_1$ este operator pozitiv). Pentru o familie majorată $\{U_j\}_{j\in J}$ de elemente din spaţiul $\mathcal{R}(X, Y)$, marginea superioară este dată pentru $0 \leq x \in X$ de formula

$$\Big(\bigvee_{j\in J} U_j\Big)(x) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n U_{j_i}(x_i)\,\Big|\, 0 \leq x_i \in X;\ \ \sum_{i=1}^n x_i = x;\ j_i \in J;\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Dacă familia $\{U_j\}_{j\in J}$ este dirijată la dreapta, atunci

$$\Big(\bigvee_{j\in J} U_j\Big)(x) = \bigvee_{j\in J} U_j(x), \quad 0 \leqslant x \in X.$$

Dacă $U \in \mathcal{R}(X, Y)$, atunci pentru $0 \leqslant x \in X$ au loc și formulele

$$|U|(x) = \sup\{|U(a)| \mid |a| \leqslant x\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |U(x_j)| \,\middle|\, 0 \leqslant x_j \in X;\ \sum_{j=1}^{n} x_j = x;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dacă $U = (o)\text{-}\lim_n U_n$ (resp. $U = (\omega)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} U_\delta$), atunci $U(x) = (o)\text{-}\lim_n U_n(x$ (resp. $U(x) = (\omega)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} U_\delta(x)$) oricare ar fi elementul $x \in X$. Dacă $U \in \mathcal{R}(X, Y)$ și dacă U este un element discret (resp. difuz) în spațiul liniar complet reticulat $\mathcal{R}(X, Y)$, atunci U se numește *operator discret* (resp. *operator difuz*). Dacă $U \in \mathcal{R}(X, Y)$ și dacă U este un operator disjunctiv, atunci și $|U|$ este un operator disjunctiv. Mulțimea $\mathcal{R}_0(X, Y)$ (resp. $\mathcal{R}_\omega(X, Y)$) a o.r. (o)-continui (resp. regulați (ω)-continui) care aplică X în Y este o componentă în spațiul $\mathcal{R}(X, Y)$. Dacă X este arhimedian iar $U \in \mathcal{R}(X, Y)$, pentru ca U să fie (ω)-continuu este necesar și suficient ca următoarea condiție să fie îndeplinită: dacă $V \in \mathcal{R}(X, Y)$ și dacă există un subspațiu normal și total $G \subset X$ astfel ca $V(G) = \{0\}$, atunci $U \perp V$. Un operator liniar U care aplică un spațiu liniar σ-reticulat Z în el însuși se numește *translator* dacă satisface condițiile următoare (în care $[z]$ înseamnă proiectorul generat de un element z): 1) $[x_1] \leqslant [x_2] \Leftrightarrow [U(x_1)] \leqslant [U(x_2)]$; 2) Pentru orice $y \in Z$ există $x \in Z$ astfel ca $[y] = [U(x)]$. Orice translator este un operator disjunctiv și orice translator pozitiv (*i.e.* un translator care este și operator pozitiv) este un operator (o)-continuu. (*R.C.*)

operator scalar (în sensul lui Dunford) v. **măsură spectrală**

operator simetric Fie X un spațiu Hilbert și U un operator definit pe un subspațiu liniar dens E_U al lui X, cu valori în X. Fie E_{U^*} mulțimea tuturor elementelor $y \in X$ pentru care există $y^* \in X$ astfel ca $\langle U(x), y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, $\forall x \in E_U$. Dacă pentru un element y există y^* satisfăcînd condiția precedentă, atunci y^* este unic. Mulțimea E_{U^*} este un subspațiu liniar al lui X iar operatorul $U^*: E_{U^*} \to X$ dat de $U^*(y) = y^*$ este liniar și închis și se numește *adjunctul* lui U. Operatorul U se numește *simetric* dacă $\langle U(x), y\rangle = \langle x, U(y)\rangle$, $\forall x, y \in E_U$. Pentru ca U să fie simetric este necesar și suficient ca adjunctul său U^* să fie o prelungire a lui U. Operatorul U se numește *autoadjunct* dacă $U = U^*$. Dacă U este autoadjunct, atunci U este simetric. Reciproc, dacă U este simetric, atunci pentru ca U să fie autoadjunct este necesar și suficient ca U să fie închis iar U^* simetric. (*R.C.*)

operator spectral (în sensul lui Dunford) v. **măsură spectrală**

operator unitar (pe un spațiu Hilbert X), operator $U: X \to X$ cu proprietățile: $U(X) = X$ și $\langle U(x), U(x)\rangle = \langle x, y\rangle$, oricare ar fi $x, y \in X$. Orice o.u. este un operator liniar, continuu și inversabil. Pentru ca un operator liniar și continuu $U: X \to X$ să fie unitar este necesar și suficient ca $UU^* = U^*U = I$, unde U^* este adjunctul lui U iar I operatorul identitate. În particular, orice o.u. este un operator normal. (*R.C.*)

operatori diferențiali liniari cu coeficienți constanți, operatori diferențiali pentru care se cunosc cele mai multe și complete rezultate generale. Acest lucru se explică prin faptul că în cazul coeficienților constanți, se poate utiliza

în mod direct transformarea Fourier, care transformă numeroase probleme de existență sau regularitate în probleme de diviziune, respectiv în probleme de comportare la infinit a transformatei Fourier. Posibilitatea utilizării transformării Fourier în situații generale a fost posibilă prin apariția teoriei distribuțiilor. În ceea ce privește rezultatele de existență ale ecuației $P(\mathrm{D})u = f$, $\Gamma(\mathrm{D})$ fiind un **o.d.l.c.c.**, au loc următoarele rezultate generale:
Teorema 1. Fie Ω o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}_F^*(\Omega)$ spațiul distribuțiilor de ordin finit din Ω, $\Gamma(D)\,\mathcal{D}_F^*(\Omega) = \mathcal{D}_F^*(\Omega)$ dacă și numai dacă Ω este Γ-convexă (*i.e.* dacă pentru orice compact $K \subset \Omega$, există un alt compact $K' \subset \Omega$ cu proprietatea că $\operatorname{supp} P(-\mathrm{D})\,u \subset K$ implică $\operatorname{supp} u \subset K$ pentru orice $u \in C_0^\infty(\infty)$)
Teorema 2. Dacă Ω este Γ-convex, ecuația $\Gamma(\mathrm{D})\,u = f$ are o soluție $u \in C^\infty(\Omega)$ pentru orice $f \in C^\infty(\Omega)$.
Teorema 3. $P(\mathrm{D})\mathcal{D}^*(\Omega) = \mathcal{D}^*(\Omega)$ dacă și numai dacă Ω este Γ-convexă și tare Γ-convexă (*i.e.* pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$ există o mulțime compactă $K' \subset \Omega$ cu proprietatea că sing supp $\Gamma(-\mathrm{D})\mu \subset K$ implică sing supp $\mu \subset K'$ pentru orice distribuție μ cu suport compact).
Cum orice mulțime deschisă convexă este tare Γ-convexă, rezultă că teorema 3 este adevărată pentru orice mulțime deschisă convexă. Se cunosc condiții necesare și suficiente privind operatorul $\Gamma(\mathrm{D})$ și mulțimea deschisă Ω pentru a avea loc egalitatea $\Gamma(\mathrm{D})\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$, unde $\mathcal{A}(\Omega)$ este spațiul funcțiilor real analitice pe Ω. Există exemple (De Giorgi) cînd $\Gamma(\mathrm{D})$ nu este surjecție de la $\mathcal{A}(\Omega)$ la $\mathcal{A}(\Omega)$.
Teorema 4. Ecuația $\Gamma(\mathrm{D})u = f$ are o soluție distribuție cu suport compact dacă și numai dacă f este o distribuție cu suport compact și $\hat{f}(\zeta)/\Gamma(\zeta)$ este o funcție întreagă; aici $\hat{f}(\zeta)$ este transformata Fourier-Laplace a distribuției f. În ceea ce privește rezultatele de regularitate (v. **operator hipoeliptic, propagare de singularități**), respectiv existența soluțiilor fundamentale (v. **soluție fundamentală**). (*G.G.*)

operatorii $\partial = \mathrm{d}'$ **și** $\bar\partial = \mathrm{d}''$ v. **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)

operatorii $\dfrac{\partial}{\partial z}$ **și** $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}$ v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă)

operatorii $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$ **și** $\dfrac{\partial}{\partial \bar z_j}$ v. **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)

operatorul identitate v. **operator**

operatorul Laplace-Beltrami Dacă M este o varietate riemanniană de dimensiune n, avînd metrica $\mathrm{d}s^2 = \sum g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$ cu $g_{ij} = g_{ji}$ și dacă $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ iar $g = \det|g^{ij}|$, atunci **o.L.B.** pe M este definit de

$$u \to \Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x^j}\right),$$

unde $(x^i, \ldots, x^n)$ sînt coordonate locale pe M. În cazul metricii euclidiene se regăsește operatorul $-\Delta$. **O.L.B.** se generalizează la forme diferențiale și în acest context joacă un rol deosebit (teoria Hodge). Dacă $*$ este operatorul lui Hodge, iar d operatorul de derivare exterioară, se notează cu δ operatorul de derivare covariantă definit, pentru orice forme φ de tip p, prin $\delta\varphi = (-1)^{np+n+1} * \mathrm{d} * \mathrm{d}$. **O.L.B.** este definit ca $\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$. Formele anulate de Δ se numesc forme armonice. Fie acum M înzestrată cu o structură complexă. Atunci pe spațiul $\Lambda^{(p,q)}$ al formelor diferențiale de tip (p, q) cu coeficienți indefinit derivabili se consideră operatorii $\square = \partial\partial^* + \partial^*\partial$ (laplacianul real) și $\overline{\square} = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$ (laplacianul complex), unde ∂^*, respectiv $\bar\partial^*$ sînt operatori formali adjuncți (față de metrica naturală de pe fibratul cotangent) al operatorilor ∂, respectiv $\bar\partial$. Are loc relația $\Delta = 2\square = 2\overline{\square}$. În cazul în care varietatea M este compactă se poate realiza coomologia varietății M cu ajutorul formelor armonice (*teorema lui Hodge*). (*G.G.*)

operatorul lui Laplace, operatorul $u \to \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ definit pentru orice funcție de clasă C^2. Este un operator invariant la transformări ortogonale (*i.e.* $(\Delta f)(Tx) = \Delta(f(Tx))$ pentru orice f de clasă C^∞, orice $x \in \mathbb{R}^n$ și orice transformare ortogonală T. Reciproc, orice transformare T care invariază pe Δ trebuie să fie ortogonală. Din punct de vedere al analizei funcționale este mai naturală considerarea operatorului $-\Delta$; într-adevăr, pentru că transformata Fourier a lui $-\Delta$ este $|\xi|^2$, $-\Delta$ se poate prelungi la un operator pozitiv (în spațiu L^2). (*G.G.*)

ordine liniară v. **spațiu liniar ordonat**

ordine punctuală v. **spațiul liniar ordonat**

ordinul unui pol. v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

ordinul unui zero v. **zerourile unei funcții olomorfe**

ordonarea numerelor reale constructive Fie x și y numere reale constructive. Avem $y < x$ (sau $x > y$) dacă $x - y \in \mathbb{R}_0^+$; avem $y \leqslant x$ (sau $x \geqslant y$) dacă $x - y \in \mathbb{R}^+$ (v. **aritmetica numerelor reale constructive pozitive**). Proprietăți: Dacă $x < y$ și $y < z$ sau $x \leqslant y$ și $y < z$, atunci $x < z$. Din $x \leqslant z$ și $y \leqslant t$ rezultă $x + y \leqslant z + t$; $\max\{x, y\} \geqslant x \geqslant \min\{x, y\}$. Dacă $x \leqslant y$ și $y \leqslant x$, atunci $x = y$. Punem $x \neq y$ dacă $x < y$ sau $x > y$. Fiind dat un șir $\{a_n\}$ de numere reale constructive și două numere constructive $x_0 < y_0$, există x real constructiv pentru care $x_0 \leqslant x \leqslant y_0$ și $x \neq a_n$ pentru orice n întreg pozitiv. (Echivalentul constructiv al teoremei lui Cantor privind nenumărabilitatea mulțimii numerelor reale.) (*S.M.*)

orientare (a unei varietăți diferențiabile) Fie dată o varietate diferențiabilă M de clasă C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, și dimensiune n și fie

$$\operatorname{Rep} T(M) := \bigcup_{x \in M} \operatorname{Rep} T(M)_x,$$

unde $T(M)_x$ este spațiul tangent real al lui M în punctul x iar $\operatorname{Rep} T(M)_x$ este mulțimea tuturor reperelor acestui spațiu vectorial (v. **orientare** (a unui spațiu vectorial real finit-dimensional)). În cazul $n = 0$, o **o.** a lui M este o aplicație arbitrară $\varepsilon : M \to \{-1, 1\}$, *i.e.* o atribuire de semne punctelor lui M. Pentru $n \geqslant 1$, o **o.** a lui M este o aplicație ε: $\operatorname{Rep} T(M) \to \{-1, 1\}$ cu proprietățile următoare: 1) Pentru orice punct $x \in M$, $\varepsilon | T(M)_x$ este o **o.** a spațiului tangent $T(M)_x$; 2) Pentru orice punct $a \in M$, există o hartă $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_M$ astfel încît $a \in U_\alpha$ și $\varepsilon\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}(x)\right) = 1$ pentru toate punctele $x \in U_\alpha$. Se spune că o varietate diferențiabilă este *orientabilă* dacă există cel puțin o **o.** pe M. Orice varietate diferențiabilă de dimensiune $n = 0$ este orientabilă. O varietate diferențiabilă M de dimensiune $n \geqslant 1$ este orientabilă dacă și numai dacă există un atlas $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_M$ cu proprietatea că, pentru orice cuplu de hărți $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, matricea jacobiană a aplicației de tranziție $\beta \circ \alpha^{-1}$ are determinant pozitiv. De asemenea, M este orientabilă dacă și numai dacă există o acoperire $\{U_i\}_{i \in I}$ a lui M și o familie $\{\omega_i\}_{i \in I}$ cu proprietățile următoare: 1) Pentru orice $i \in I$, ω_i este o n-formă diferențiabilă definită și continuă pe

U_i și $\omega_i(x) \neq 0$ pentru orice $x \in U_i$; 2) Pentru orice pereche de indici $i, j \in I$ cu proprietatea că $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, există o funcție reală strict pozitivă φ_{ij}: $U_i \cap U_j \to \mathbb{R}$ astfel încît $\omega_i = \varphi_{ij}\,\omega_j$ pe $U_i \cap U_j$. Dacă M este orientabilă și cu bază numărabilă, există o n-formă diferențială ω pe M, de clasă C^{r-1}, astfel încît $\omega(x) \neq 0$ pentru orice $x \in M$; o astfel de n-formă diferențială ω se numește *element de volum* pe M. Ex.: 1° $\mathbb{R}^n$ este o C^∞-varietate orientabilă pentru orice n. 2° Sfera S^n este orientabilă pentru orice n. 3° Banda lui Möbius nu este orientabilă. 4° Spațiul proiectiv real $\mathbb{P}^n$ este orientabil dacă și numai dacă n este impar. 5° Orice grup Lie real este o varietate orientabilă. 6° Pentru orice varietate complexă M, C^∞-varietatea subiacentă lui M este orientabilă. 7° Pentru orice varietate diferențiabilă M, de clasă C^r, $r \geqslant 2$, fibratul tangent $T(M)$ este o varietate orientabilă (de clasă C^{r-1}). Se numește *varietate diferențiabilă orientată* orice varietate diferențiabilă M înzestrată cu o **o.** fixată (**o.** structurală). Fiind dată o varietate diferențiabilă orientată M cu **o.** structurală ε, o hartă $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_M$ se numește *pozitivă* dacă $\varepsilon\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}(x)\right) = 1$ pentru orice $x \in U_\alpha$, și *negativă* dacă $\varepsilon\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}(x)\right) = -1$ pentru orice $x \in U_\alpha$; dacă harta $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ este pozitivă, atunci harta β: $= (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ este negativă. Domeniile hărților pozitive ale lui M formează o acoperire deschisă a lui M. O n-formă diferențială ω pe M se numește *pozitivă* (resp. *negativă*) dacă $\omega_x(e) > 0$ (resp. $\omega_x(e) < 0$) pentru orice $x \in M$ și orice reper pozitiv $e \in \operatorname{Rep} T(M)_x$. *Modulul* (sau *valoarea absolută*) a unei n-forme diferențiale ω pe M este n-forma diferențială $|\omega|$ pe M, definită prin $|\omega|_x = |\omega_x|$ pentru orice $x \in X$; dacă $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ este o hartă pozitivă a lui M și dacă $\omega = \Phi\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ pe U_α, atunci $|\omega| = |\Phi|\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ pe U_α. (*M.J.*)

orientare (a unui spațiu vectorial real finit-dimensional V), o aplicație ε de la mulțimea $\operatorname{Rep}(V)$ a tuturor reperelor lui V în mulțimea $\{-1, 1\}$ cu proprietatea că $\varepsilon(e) = \varepsilon(e')$ dacă și numai dacă $e \sim e'$. Dacă V are dimensiunea $n \geqslant 1$, prin *reper* al lui V se înțelege un n-uplu $e = (e_1, \dots, e_n)$ de vectori liniari independenți din V; în cazul $n = 0$, $V = \{0\}$ și se ia, prin definiție, $\operatorname{Rep}(V) := \{\emptyset\}$. Dacă e și e' sînt două repere ale lui V, există un unic endomorfism $A: V \to V$ astfel încît $A(e) = e'$. Reperele e și e' se numesc *echivalente*, $e \sim e'$, dacă $\det(A) > 0$. Există exact două **o.** pe V. Un *spațiu vectorial orientat* este un spațiu vectorial real finit-dimensional înzestrat cu o **o.** fixată (**o.** *structurală*). Dacă V este un spațiu vectorial orientat cu **o.** structurală ε, un reper $e \in \operatorname{Rep}(V)$ se numește *pozitiv* cînd $\varepsilon(e) = 1$ și *negativ* cînd $\varepsilon(e) = -1$. Pe un spațiu vectorial orientat V de dimensiune n se pot atribui semne n-tensorilor alternați co- sau contravarianți. De pildă, dacă ω este un *n-tensor* alternat covariant, *i.e.* $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, ω se numește *pozitiv* cînd $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$ și negativ cînd $\omega(e_1, \dots, e_n) < 0$, unde $e = (e_1, \dots, e_n)$ este un reper pozitiv al lui V; definiția nu depinde de alegerea lui e. Pentru orice $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, *modulul* (sau *valoarea absolută*) a lui ω este n-tensorul alternat covariant $|\omega|$ definit prin: $|\omega| = \omega$ dacă ω este pozitiv, $|\omega| = -\omega$ dacă ω este negativ și $|\omega| = 0$ dacă $\omega = 0$. Dacă V și V' sînt două spații vectoriale orientate de dimensiune n, se spune despre o aplicație liniară bijectivă $A: V \to V'$ că păstrează **o.** cînd duce repere pozitive în repere pozitive și că A inversează **o.** cînd duce repere pozitive în repere negative. O **o.** ε pe un spațiu vectorial V este univoc determinată de valoarea ei pe un singur reper. Spațiul numeric real $\mathbb{R}^n$ se consideră, de regulă, ca spațiu vectorial orientat, și anume avînd ca **o.** structurală **o.** ε pentru care reperul canonic este pozitiv, *reperul canonic* al lui $\mathbb{R}^n$ fiind

n-uplul $e = (e_1, ..., e_n)$, unde $e_1 = (1, 0 ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$. Această o. se numește o. *canonică* (sau o. *standard* a lui $\mathbf{R}^n$. (*M.J.*)

orientare bord v. **domeniu**

origine v. **spațiu liniar topologic**

oscilația unei funcții Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic, $\mathcal{Y}$ un spațiu metric, $A \subset \mathcal{X}$, $f: A \to \mathcal{Y}$ și $x \in \bar{A}$. Se numește *oscilația* funcției f în punctul x numărul $\omega(x; f) = \inf \{\delta(f(V \cap A)) \mid V \in \mathcal{V}_x\}$, unde $\mathcal{V}_x$ este mulțimea vecinătăților punctului x iar $\delta(f(V \cap A))$ este diametrul mulțimii $f(V \cap A)$. Dacă $\mathcal{Y} = \mathbf{R}$, $\omega(x; f) = M_f(x) - m_f(x)$, unde $M_f(x)$, $m_f(x)$ sînt respectiv marginea superioară și marginea inferioară a funcției f în punctul x. Funcția f are limită în punctul x dacă și numai dacă $\omega(x; f) = 0$. Funcția $\omega(x; f)$ este semicontinuă superior pe $\bar{A}$. Fie X o mulțime, $\mathcal{Y}$ un spațiu metric, $f: X \to \mathcal{Y}$ și $A \subset X$. Se numește *oscilația funcției f pe mulțimea A*, diametrul mulțimii $f(A)$. (*Gh.Gr.*)

P

parametrică În cazul operatorilor diferențiali liniari (sau, mai general, pseudodiferențiali) cu coeficienți variabili rolul soluțiilor fundamentale este luat de ceea ce se numește o **p.** Fie, mai general, R un operator $\mathcal{D}^*(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, Ω mulțime deschisă în $\mathbf{R}^n$; un astfel de operator se numește *regularizant*. Un operator $B: \mathcal{D}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ se numește **p.** *la dreapta* (resp. *la stînga*) a unui operator $A: \mathcal{D}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ dacă $AB - I = R$ (resp. $BA - I = R$), R fiind un operator regularizant și I operatorul identitate. O **p.** (pentru operatorul A) este un operator B care este **p.** atît la dreapta cît și la stînga. Existența unei **p.** la dreapta asigură doar rezolubilitatea locală în Ω, iar existența unei **p.** la stînga permite obținerea de informații privind regularitatea soluțiilor. Dacă $P(x, D)$ este un operator diferențial liniar cu coeficienți variabili, **p.** sale vor fi în general operatori pseudodiferențiali sau, mai general, operatori integrali Fourier. (*G.G.*)

paranteza Poisson v. **fibrat vectorial**

parte cofinală v. **șir generalizat**

partea negativă (a unui element) v. **spațiu liniar ordonat**

partea pozitivă (a unui element) v. **spațiu liniar ordonat**

partiție a unei mulțimi v. **derivarea măsurilor, integrala Kolmogorov**

partiție a unității (pe o varietate diferențiabilă) Fie M o varietate diferențiabilă de clasă C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. O **p.u.** (mai precis, o C^r-partiție a unității, sau o **p.u.** de clasă C^r) pe M este o familie $\{f_i\}_{i \in I}$ de funcții reale pe M cu proprietățile următoare: 1) $f \in C^r(M)$ și $f_i \geqslant 0$ pentru orice $i \in I$; 2) Familia $\{\operatorname{supp} f_i\}_{i \in I}$ este local finită; 3) $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ pentru orice $x \in M$. Se spune despre o **p.u.** $\{f_i\}_{i \in I}$ pe M că este cu *suporți compacți* dacă supp f_i este o mulțime compactă pentru orice $i \in I$. De asemenea, fiind dată o acoperire deschisă $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a lui M, spunem că o **p.u.** $\{f_i\}_{i \in I}$ este *subordonată* acoperirii $\mathcal{U}$ dacă este dată o aplicație $\rho: I \to A$ astfel încît $\operatorname{supp} f_i \subset U_{\rho(i)}$ pentru toți $i \in I$.

Teoremă (de existență). Fie M o varietate diferențiabilă cu bază numărabilă și $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o acoperire deschisă a lui M. Atunci: 1) Există o **p.u.** cu suporți compacți și subordonată acoperirii $\mathcal{U}$; 2) Există o **p.u.** $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ astfel încît $\operatorname{supp} g_\alpha \subset U_\alpha$ pentru toți $\alpha \in A$.

Un caz particular de **p.u.** este furnizat de

Lema lui Urîson (pe varietăți diferențiabile). Fie M o C^r-varietate separată cu bază numărabilă iar A, B două submulțimi închise disjuncte ale lui M. Atunci există o funcție reală $f \in C^r(M)$ astfel încît $0 \leqslant f \leqslant 1$ pe M, $f = 0$ pe A și $f = 1$ pe B. Dacă mulțimea B este compactă, se poate alege pentru f o funcție cu suport compact. (*M. J.*)

partiție continuă a unității Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic. Se numește **p.c.u.** pe $\mathcal{X}$ (sau *descompunere continuă a unității*) orice familie $\{f_i\}_{i \in I}$ de funcții continue, definite pe $\mathcal{X}$ cu valori reale, avînd proprietățile: i) $0 \leqslant f_i(x) \leqslant 1$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$ și orice $i \in I$; ii) Familia $\{\operatorname{supp} f_i\}_{i \in I}$ este local finită; iii) $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$. (O *familie* $\{A_i\}_{i\in I}$ de părți ale spațiului $\mathcal{X}$ se numește *local finită* dacă pentru orice $x \in \mathcal{X}$ există V o vecinătate a lui x astfel încît mulțimea $\{i \in I \mid V \cap A_i \neq \emptyset\}$ este finită. Se notează cu supp f suportul funcției f.) Fie $\{A_i\}_{i\in I}$ o familie de părți ale spațiului topologic $\mathcal{X}$. Se spune că familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de funcții definite pe $\mathcal{X}$ cu valori reale (sau complexe) este *subordonată* familiei $\{A_i\}_{i\in I}$ dacă pentru orice $i \in I$, supp $f_i \subset A_i$. Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic normal și $\{A_i\}_{i\in I}$ o acoperire deschisă local finită a lui $\mathcal{X}$. Există atunci o **p.c.u.** pe $\mathcal{X}$, subordonată familiei $\{A\}_{i\in I}$. În cazul în care $\mathcal{X}$ este un subspațiu deschis în $\mathbb{R}^n$ există partiții ale unității cu funcții de clasă C^∞ subordonate într-un anumit sens unor acoperiri nu neapărat local finite. Fie $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă organizată ca spațiu topologic, cu topologia indusă, și $\{A_i\}_{i\in I}$ o acoperire deschisă local finită a lui $\mathcal{X}$. Există atunci o **p.c.u.** pe $\mathcal{X}$, subordonată acoperirii $\{A_i\}_{i\in I}$ și astfel încît funcțiile din partiție sînt de clasă C^∞ cu suport compact. Dacă $\{A_i\}_{i\in I}$ este o acoperire deschisă a lui $\mathcal{X}$($\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}$ deschisă) există atunci o acoperire deschisă local finită $\{B_j\}_{j\in J}$ astfel încît pentru orice $j \in J$ există $i \in I$ astfel ca $B_j \subset A_i$. Fie ca mai sus $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}$ deschisă și $\{A_i\}_{i\in I}$ o acoperire deschisă a lui $\mathcal{X}$. Există atunci o partiție $\{f_j\}_{j\in J}$ a unității pe $\mathcal{X}$, formată din funcții de clasă C^∞ cu suport compact și astfel încît pentru orice $j \in J$ există $i \in I$ astfel ca supp $f_j \subset$ $\subset A_i$. Se spune că $\{f_j\}_{j\in J}$ este o C^∞-partiție a unității *subordonată* (*asociată*) acoperirii $\{A_i\}_{i\in I}$. (*Gh.Gr*).

pereche μ-adaptată Fie T și X două spații local compacte, $\pi: T \to X$ și $g: T \to \mathbb{R}_+$ (funcția g este pozitivă și finită). Vom considera și o măsură Radon pozitivă μ pe T. Perechea (π, g) se numește **p. μ-a.** dacă: 1) Funcțiile π și g sînt μ-măsurabile; 2) Pentru orice funcție f continuă cu suport compact pe X aplicația numerică definită pe T prin $V(t) = g(t) f(\pi(t))$ este esențial μ-integrabilă. (*I.C.*)

pereche duală de spații liniare v. **sistem dual de spații liniare**

perioadă v. **funcția exponențială, funcție eliptică**

planul complex v. **corpul numerelor complexe**

planul complex extins $\widetilde{\mathbb{C}}$ este, prin definiție, $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, unde ∞ este un element abstract ce nu aparține lui $\mathbb{C}$, numit *punctul de la infinit* sau, simplu, *infinit*. Pe $\widetilde{\mathbb{C}}$ se consideră topologia $\tilde{\tau}$ care are drept mulțimi deschise mulțimile deschise din $\mathbb{C}$ (cu structura topologică obișnuită), precum și acele mulțimi din $\widetilde{\mathbb{C}}$ a căror complementară în raport cu $\widetilde{\mathbb{C}}$ este inclusă și compactă în $\mathbb{C}$ (o asemenea mulțime este de forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, unde K este o mulțime mărginită și închisă în $\mathbb{C}$). Spațiul $(\widetilde{\mathbb{C}}, \tilde{\tau})$ este un spațiu topologic compact iar $I(x) = x$, $I: \mathbb{C} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ este un homeomorfism al lui $\mathbb{C}$ pe o submulțime densă în $\widetilde{\mathbb{C}}$ și deci $\widetilde{\mathbb{C}}$ este *compatificatul Alexandrov* al lui $\mathbb{C}$. Un șir $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{C}$ converge în $\widetilde{\mathbb{C}}$ către infinit dacă și numai dacă $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$. Aceasta rezultă, spre exemplu, din faptul că un sistem fundamental de vecinătăți ale punctului de la infinit este $\{\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > n\} \cup \{\infty\}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dacă z_n, $z \in \mathbb{C}$ $n \in \mathbb{N}$, șirul $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge în $\widetilde{\mathbb{C}}$ către z dacă și numai dacă el converge în $\mathbb{C}$ către z. Fie

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

și pe S^2 structura de spațiu topologic (topologia) indusă din $\mathbb{R}^3$. Fie $A \in S^2$, $A = (0, 0, 1)$ și $\psi: S^2 \to \widetilde{\mathbb{C}}$ definită prin $\psi(A) = \infty$ iar dacă $X \in S^2 \setminus \{A\}$, $\psi(A)$ să fie intersecția planului $x_3 = 0$ (identificat cu $\mathbb{C}$) cu dreapta AX, sau, mai precis, dacă $X = (x_1, x_2, x_3) \neq A$, atunci $\psi(X) = \dfrac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}$. În acest context S^2 se numește *sfera lui Riemann* (sau *sfera numerelor complexe*) iar aplicația ψ *proiecția stereografică*. Funcția ψ este un homeomorfism între $\widetilde{\mathbb{C}}$ și S^2, ceea ce face deci ca S^2 și $\widetilde{\mathbb{C}}$ să fie izomorfe ca spații topologice. Spațiul $(\widetilde{\mathbb{C}}, \tilde{\tau})$ este metrizabil, o distanță care generează topologia fiind, spre exemplu, cea adusă prin intermediul lui ψ:

$$\rho(z, v) = d(\psi^{-1}(z),\ \psi^{-1}(v)) = \frac{2|z - v|}{\sqrt{|z|^2 + 1}\sqrt{|v|^2 + 1}}, \quad \rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}},$$

unde $z, v \in \mathbb{C}$ iar d este distanța euclidiană în $\mathbb{R}^3$. (*Gh. Gr.*)

planul euclidian v. **corpul numerelor complexe**

planul numeric real v. **corpul numerelor complexe**

polară v. **sistem dual de spații liniare**

pol de ordin p v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

polidisc v. **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)

poliedru polinomial v. **domeniu Runge**

polinoame ortogonale, elemente ortogonale ale spațiului polinoamelor înzestrat cu un produs scalar (v. **spațiu Hilbert**) Fie X spațiul polinoamelor peste corpul numerelor complexe și pe X un produs scalar $\langle , \rangle$. Prin ortogonalizarea șirului $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ se obține șirul de **p.o.**:

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle x^n, p_k\rangle}{\|p_k\|^2} p_k(x), \quad n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

S-a notat cu $\| \ \|$ norma generată pe X de produsul scalar considerat. Sînt mai des utilizate **p.o.** în raport cu un produs scalar de forma

$$\langle f, g\rangle = \int_{(a,\, b)} f(x)\, \overline{g(x)}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \quad f, g \in X, \qquad (**)$$

unde $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $\varphi: (a, b) \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Lebesgue, pozitivă, nenulă a.p.t. și astfel încît

$$\int_{(a,\, b)} |x^k|\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Funcția φ se numește uneori *pondere*. În acest caz polinoamele $\{p_n\}_n$ date prin $(*)$ satisfac relațiile:

$$p_0(x) = 1, \ \ p_1(x) = x - \alpha_0,$$

$$p_{j+1}(x) = (x - \alpha_j)\, p_j(x) - \beta_j p_{j-1}(x), \quad j \in \mathbb{N}, \quad \text{unde}$$

$$\alpha_j = \frac{\langle x p_j, p_j\rangle}{\|p_j\|^2}, \quad j \geqslant 0; \quad \beta_j = \frac{\|p_j\|^2}{\|p_{j-1}\|^2}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Polinomul p_n are n rădăcini distincte situate în (a, b). Dacă $a = -b$ și dacă funcția φ care generează produsul scalar este pară, atunci p_{2n} este funcție pară iar p_{2n+1} impară.
Teorema lui Rodrigues. Dacă ponderea φ este derivabilă pe (a, b) și dacă există polinoamele α și β astfel ca

$$\text{grad}\,\alpha \leqslant 1, \quad \text{grad}\,\beta \leqslant 2,$$

$$\lim_{x\to a} \varphi(x)\,\beta(x) = \lim_{x\to b} \varphi(x)\,\beta(x) = 0,$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \quad \forall x \in (a, b),$$

atunci există $c_n \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$, astfel ca polinoamele definite prin relația $(*)$ să se scrie sub forma

$$p_n(x) = c_n \frac{1}{\varphi(x)} (\varphi(x)\,\beta^n(x))^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pentru $\varphi = 1$ se obțin polinoamele lui Legendre:

$$p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} ((x - a)^n (x - b)^n)^{(n)}.$$

Pentru $(a, b) = (-1, 1)$ și $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ se obțin polinoamele lui Cebîșev. Ele satisfac relația

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Prezența anumitor coeficienți este legată de condiția ca termenul de grad maxim din p_n să aibă coeficientul 1. *Polinoamele lui Jacobi* se obțin pentru $\varphi(x) = (1 - x)^p\,(1 - x)^q$, $a = -1$, $b = 1$. *Polinoamele lui Laguerre* se obțin pentru $\varphi(x) = x^{\lambda}e^{-x}$, $a = 0$, $b = +\infty$, iar *polinoamele lui Hermite* pentru $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = +\infty$. **P.o.** sînt folosite la aproximarea funcțiilor, la realizarea unor formule de cvadratură, în studiul ecuațiilor fizicii matematice. Astfel, cu ajutorul **p.o.** se pot construi unele formule de cvadratură utilizate pentru a aproxima integrale (convergente) de forma $\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx$. Construcția se bazează pe următoarea teoremă: Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numere reale, distincte două cîte două, $\lambda_i \in (a, b)$ și $a_1, \dots, a_n$ numere reale strict pozitive. Pentru ca egalitatea

$$\int_a^b \varphi(x)\,p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i p(\lambda_i)$$

să aibă loc pentru orice polinom p de grad cel mult $2n - 1$ este necesar și suficient ca $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ să fie rădăcinile polinomului p_n iar $\alpha_i = \int_a^b \varphi(x)\,L_i(x)\,dx$, unde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{x - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

Fie $\sigma_{\varphi}^{(n)}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\lambda_i)$, unde $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, continuă, iar a_i și λ_i verifică condițiile din teorema precedentă. Integralele (convergente) de forma $\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx$ se pot aproxima cu $\sigma_{\varphi}^{(n)}(f)$. Formula de cvadratură $\sigma_{\varphi}^{(n)}$ este exactă în sensul că $\sigma_{\varphi}^{(n)}(p) = \int_a^b \varphi(x)\,p(x)\,dx$ pentru orice polinom de grad cel mult $2n - 1$. Pentru $\varphi = 1$ se obține formula de cvadratură a lui Gauss; pentru $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ formula de cvadratură Gauss-Hermite. O teoremă de evaluare a restului este: Dacă f este de clasă C^{2n}, cu $f^{(2n)}$ mărginită pe (a, b), atunci:

$$\left| \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx - \sigma_{\varphi}^{(n)}(f) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2n)!} \sup_{x \in (a,\, b)} |f^{(2n)}(x)| \int_x^b p_n^2(x)\,\varphi(x)\,dx. \quad (Gh.Gr.)$$

polinoamele lui Cebîșev, polinoame definite prin

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1.$$

Dacă $x \in [-1, 1]$ are loc: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. **P.C.** sînt ortogonale în raport cu funcția pondere $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ pe $(-1, 1)$. Printre polinoamele de grad n, cu coeficientul lui x^n egal cu 1, polinomul $\dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ este cel mai apropiat de zero în raport cu norma $\|f\| = \sup_{x \in [-1,\, 1]} |f(x)|$. **P.C.** se întîlnesc la aproximarea funcțiilor prin polinoame, la polinoame de cea mai bună aproximare uniformă, la integrarea numerică a funcțiilor (v. și **polinoame ortogonale, funcții speciale definite cu ajutorul ecuațiilor diferențiale**). (*Gh.Gr.*)

polinom Bernoulli v. **numerele lui Bernoulli**

polinom Bernstein (de ordin n asociat unei funcții $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$), polinomul dat de expresia

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Dacă f este continuă pe $[0, 1]$, atunci șirul B_n converge către f uniform pe $[0, 1]$. (*S.M.*)

polinom de cea mai bună aproximare uniformă Fie $C[a, b]$ spațiul funcțiilor continue definite pe $[a, b]$ cu valori reale, spațiu înzestrat cu norma $\|f\| = \max_{x \in [a,\, b]} |f(x)|$. Fie X_n subspațiul polinoamelor de grad cel mult n. Pentru orice $f \in C[a, b]$ există, și este unic, $Q_n \in X_n$ astfel ca $\|f - Q\| = \inf \{\|f - P\| \mid P \in X_n\}$. Polinomul Q_n se numește **p.c.m.b.a.u.** pentru funcția f. Spre exemplu, pentru $n = 0$, $Q_0 = \dfrac{1}{2}(M + m)$, unde $M = \sup_{x \in [a,\, b]} f(x)$ și $m = \inf_{x \in [a,\, b]} f(x)$.

Teorema de alternanță a lui Cebîșev. Polinomul $Q \in X_n$ este **p.c.m.b.a.u.** pentru funcția $f \in C[a, b]$ dacă și numai dacă există $n + 2$ puncte distincte $x_0, \ldots, x_{n+1}$ și $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ astfel încît

$$f(x_i) - Q(x_i) = \varepsilon(-1)^i \|f - Q\|, \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}. \quad (Gh.Gr.)$$

polinom de interpolare v. **interpolare**

polinom Fourier (de ordin n asociat unei funcții f integrabilă pe $[-\pi, \pi) = I$), polinomul trigonometric de ordin n pentru care

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos ix \, \mathrm{d}x, \quad i = 0, 1, \ldots, n;$$

$$b_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin ix \, \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Polinomul este Fourier-Riemann, Fourier-Lebesgue etc., după cum integrabilitatea are loc în sens Riemann, în sens Lebesgue etc. (*S.M.*)

polinom Hermite v. **polinoame ortogonale, funcții speciale definite cu ajutorul unor ecuații diferențiale**

polinom Jacobi v. **polinoame ortogonale, funcții speciale definite cu ajutorul unor ecuații diferențiale**

polinom Laguerre v. **polinoame ortogonale, funcții speciale definite cu ajutorul unor ecuații diferențiale**

polinom Legendre v. **polinoame ortogonale, funcții speciale definite cu ajutorul unor ecuații diferențiale**

polinom trigonometric v. **teoremele de aproximare ale lui Weierstrass**

polinom Weierstrass v. **teorema de pregătire a lui Weierstrass**

polinomul lui Taylor v. **formula lui Taylor**

pondere v. **polinoame ortogonale**

prefascicol Fie X un spațiu topologic și $\mathcal{C}$ o categorie. Mulțimea părților deschise ale lui X, ordonată prin incluziune, va fi notată prin $\mathcal{D}(X)$. Un **p.** pe X cu valori în categoria $\mathcal{C}$ este un functor $\mathcal{F}: \mathcal{D}(X)^{op} \to \mathcal{C}$. În mod explicit, un **p.** pe X cu valori în categoria $\mathcal{C}$ este o familie dublă $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U), \rho_V^U(\mathcal{F})\}_{V \subset U}$, unde $\{\mathcal{F}(U)\}_U$ este o familie de obiecte din $\mathcal{C}$, indexată după mulțimile $U \in \mathcal{D}(X)$, iar $\{\rho_V^U(\mathcal{F})\}_{V \subset U}$ o familie de morfisme $\rho_V^U(\mathcal{F}): \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ în $\mathcal{C}$, indexată, după perechile de mulțimi $U, V \in \mathcal{D}(X)$ astfel încît $V \subset U$. Se cere ca această familie dublă să verifice condițiile următoare: 1) Pentru orice mulțime deschisă U în X, $\rho_U^U(\mathcal{F}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$; 2) Pentru orice ternă de mulțimi deschise U, V, W în X astfel încît $W \subset V \subset U$, $\rho_W^U(\mathcal{F}) = \rho_W^V(\mathcal{F}) \circ \rho_V^U(\mathcal{F})$. Morfismele $\rho_V^U(\mathcal{F})$ se numesc *morfisme de restricție* ale **p.** $\mathcal{F}$ și se notează uneori, simplu, prin ρ_V^U, *i.e.* se omite specificarea **p.** de regulă cînd **p.** despre care este vorba rezultă din context. Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ sînt două **p.** pe X cu valori în categoria $\mathcal{C}$, prin *morfism de* **p.** de la $\mathcal{F}$ la $\mathcal{G}$ se înțelege un morfism functorial de la functorul $\mathcal{F}$ la functorul $\mathcal{G}$, *i.e.* o familie $\theta = (\theta_U)_{U \in \mathcal{D}(X)}$ de morfisme $\theta_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ale categoriei $\mathcal{C}$ cu proprietatea că, pentru orice pereche de mulțimi deschise U, V în X astfel încît $V \subset U$, are loc egalitatea

$$\rho_V^U(\mathcal{G}) \circ \theta_U = \theta_V \cdot \rho_V^U(\mathcal{F}).$$

P. pe X cu valori în categoria $\mathcal{C}$ și morfismele lor formează o categorie. Cînd obiectele categoriei $\mathcal{C}$ considerate au o denumire specifică, aceeași denumire

este utilizată și la nivel de **p.** De pildă, se spune **p.** *de mulțimi* în loc de **p.** cu valori în categoria **Ens**, **p.** *de grupuri abeliene* în loc de **p.** cu valori în categoria **Ab** etc. În cazul cînd $\mathcal{C}$ este o categorie de *mulțimi structurate* și $\mathcal{F}$ un **p.** pe X cu valori în $\mathcal{C}$, elementele lui $\mathcal{F}(U)$ se numesc *secțiuni* ale lui $\mathcal{F}$ peste U. Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu proprietatea că orice sistem inductiv filtrant de obiecte din $\mathcal{C}$ are o limită inductivă în $\mathcal{C}$. Presupunem date un spațiu topologic X, un **p.** $\mathcal{F}$ pe X cu valori în categoria $\mathcal{C}$ și un punct $x \in X$. Dacă restrîngem functorul $\mathcal{F}$ la mulțimile deschise U ale lui X care conțin punctul x obținem un sistem inductiv filtrant de obiecte din $\mathcal{C}$. Se notează $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$ limita inductivă a acestui sistem inductiv. Aceasta înseamnă că $\mathcal{F}_x$ este un obiect în categoria $\mathcal{C}$ și că există morfisme $\rho_x^U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ în $\mathcal{C}$, definite pentru orice mulțime deschisă U în X conținînd punctul x și avînd proprietățile următoare: 1) $\rho_x^V \circ \rho_V^U = \rho_x^U$ cînd $x \in V \subset U$; 2) Dacă avem un obiect A în $\mathcal{C}$ și morfisme $\theta_U: \mathcal{F}(U) \to A$ în $\mathcal{C}$ definite pentru $x \in U \in \mathcal{D}(X)$ și cu proprietatea că $\theta_V \circ \rho_V^U = \theta_U$ cînd $x \in V \subset U$, atunci există un unic morfism $\theta_x: \mathcal{F}_x \to A$ în categoria $\mathcal{C}$ astfel încît $\theta_U = \theta_x \circ \rho_x^U$ pentru orice mulțime deschisă U în X care conține pe x. Se spune că $\mathcal{F}_x$ este *fibra* **p.** $\mathcal{F}$ în punctul x și că morfismele $\rho_x^U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, unde $x \in U \in \mathcal{D}(X)$ sînt *morfismele canonice de trecere la fibră*. Fibrele se pot defini, de asemenea, pentru morfisme de **p.** Anume, dacă $\theta: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ este un morfism de **p.** pe X cu valori în categoria $\mathcal{C}$ și x un punct în X, din proprietatea universală a limitei inductive rezultă că există un unic morfism $\theta_x: \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ în $\mathcal{C}$ care face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\rho_x^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_x^U"] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "\theta_x"'] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

pentru $x \in U \in \mathcal{D}(X)$. Acest morfism θ_x se numește *fibra* lui θ în punctul x. Este util să amintim aici construcția canonică a fibrei $\mathcal{F}_x$ în cazul cînd $\mathcal{C}$ este una din categoriile uzuale: mulțimi, grupuri, inele etc. Pentru început, să presupunem că $\mathcal{C}$ este categoria mulțimilor **Ens** și să considerăm reuniunea disjunctă $\coprod_{x \in U \in \mathcal{D}(X)} \mathcal{F}(U)$. În această mulțime introducem relația de echivalență $\mathcal{F}(U) \ni s \sim t \in \mathcal{F}(V) \Leftrightarrow$ există $W \in \mathcal{D}(X)$ astfel încît $x \in W \subset U \cap V$ și astfel încît $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$. Atunci fibra lui $\mathcal{F}$ în punctul x este mulțimea cît

$$\mathcal{F}_x := \coprod_{x \in U \in \mathcal{D}(X)} \mathcal{F}(U)/\sim,$$

iar aplicația canonică $\rho_x^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ este aplicația care asociază oricărei secțiuni $s \in \mathcal{F}(U)$ clasa ei de echivalență în $\mathcal{F}_x$; această clasă de echivalență se notează deci $\rho_x^U(s)$ și uneori, simplu, s_x, și se numește *germenul* definit de secțiunea s în punctul x (sau *germenul secțiunii* s în punctul x). Să considerăm acum cazul cînd $\mathcal{C}$ este categoria grupurilor, *i.e.* cazul cînd $\mathcal{F}$ este un **p.** de grupuri. Deoarece $\mathcal{F}$ este atunci, în particular, un **p.** de mulțimi, fibra $\mathcal{F}_x$ este definită mai întîi ca mulțime așa cum am văzut mai sus. Apoi se vede că există o unică structură de grup pe $\mathcal{F}_x$ astfel încît aplicațiile canonice $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ să fie morfisme de grupuri cînd $x \in U \in \mathcal{D}(X)$. Acest grup $\mathcal{F}_x$ este atunci fibra lui $\mathcal{F}$ în punctul x și evident $\mathcal{F}_x$ este un grup abelian dacă $\mathcal{F}$ este **p.** de grupuri abeliene. În mod similar se tratează și celelalte categorii uzuale esențial algebrice: inele, spații vectoriale, algebre etc. În toate aceste cazuri, elementele fibrelor se numesc germeni (v. și fascicol). (*M.J.*)

preimaginea unei topologii v. **topologia inițială**

preintegrală v. **integrala Daniell**

prelungire analitică Fie S o suprafață riemanniană (sau, mai general, o varietate complexă conexă). Notăm prin $\mathcal{O}_S$ fascicolul funcțiilor olomorfe pe mulțimile deschise ale lui S și, pentru orice punct $s \in S$, prin $\mathcal{O}_{S,s}$ fibra lui $\mathcal{O}_S$ în punctul s. Prin *germen de funcție olomorfă* în punctul s se înțelege un element $g \in \mathcal{O}_{S,s}$. Dacă U este o mulțime deschisă în S, φ o funcție olomorfă pe U și s un punct în U, se notează prin $\rho_s^U(\varphi)$ sau prin φ_s germenul definit de funcția φ în punctul s, *i.e.* germenul $g \in \mathcal{O}_{S,s}$ cu proprietatea că $\varphi \in g$. Un *element analitic* (sau *element de funcție analitică*) în S este o funcție olomorfă φ definită pe o mulțime deschisă nevidă conexă $D_\varphi \subset S$. Fie $I = [0, 1]$ și $\gamma : I \to S$ un drum cu originea $\gamma(0) = a$ și extremitatea $\gamma(1) = b$. Notăm prin F_γ mulțimea tuturor germenilor $f \in \mathcal{O}_{S,a}$ cu proprietatea că există o familie $\{h_t\}_{t \in I}$ de germeni verificînd condițiile următoare: 1) $h_0 = f$; 2) Pentru orice punct $t_0 \in I$ există un element analitic $\varphi: D_\varphi \to \mathbb{C}$ și un număr real $\varepsilon > 0$ astfel încît $\gamma(t_0) \in D_\varphi$ și $\varphi_{\gamma(t)} = h_t$ pentru orice $t \in I$ cu $|t - t_0| < \varepsilon$. Dacă $f \in F_\gamma$, familia $\{h_t\}_{t \in I}$ cu proprietățile 1) și 2) este unică, în particular germenul $h_1 \in \mathcal{O}_{S,b}$ depinde numai de f și γ și va fi notat prin $\Gamma_\gamma(f)$. Aplicația $\Gamma_\gamma: F_\gamma \to \mathcal{O}_{S,b}$ astfel definită se numește **p.a.** în lungul lui γ. Fie $f \in \mathcal{O}_{S,a}$; dacă $f \in F_\gamma$, se spune că f admite o **p.a.** în lungul lui γ și că germenul $g = \Gamma_\gamma(f)$ este rezultatul acestei prelungiri. *Teorema monodromiei.* Fie γ și δ două drumuri în S astfel încît $\gamma(0) = \delta(0)$ și $\gamma(1) = \delta(1)$ și $f \in \mathcal{O}_{S,a}$. Dacă există o omotopie $\alpha : \gamma \simeq \delta$ rel. $\{0, 1\}$ astfel încît $f \in F_{\alpha_t}$ pentru orice $t \in I$, atunci $\Gamma_\gamma(f) = \Gamma_\delta(f)$, unde α_t este drumul $\alpha(\cdot, t)$ (deci $\alpha_0 = \gamma$ și $\alpha_1 = \delta$).
Corolar. Fie $a \in S$ și $f \in \mathcal{O}_{S,a}$. Dacă suprafața S este simplu conexă și dacă f admite o **p.a.** în lungul oricărui drum cu originea în a, atunci există o funcție olomorfă φ pe S astfel încît $f = \varphi_a$.
Considerăm acum două elemente analitice φ și ψ în S. Se spune că elementul ψ este o **p.a.** *directă* a elementului φ dacă $D_\varphi \cap D_\psi \neq \emptyset$ și $\varphi(s) = \psi(s)$ pentru $s \in D_\varphi \cap D_\psi$. Un *lanț de elemente analitice* este un șir finit $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ de elemente analitice astfel încît φ_i să fie o **p.a.** directă a lui φ_{i-1} pentru $i = 1, 2, \dots, N$. Se spune că elementul ψ este o **p.a.** *în lanț* a elementului φ dacă există un lanț de elemente analitice $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ astfel încît $\varphi_0 = \varphi$ și $\varphi_N = \psi$. Pentru ca un element ψ să fie o **p.a.** în lanț a elementului φ este necesar și suficient să existe un drum γ în S cu originea într-un punct $a \in D_\varphi$ și extremitatea într-un punct $b \in D_\psi$ astfel încît $\varphi_a \in F_\gamma$ și $\psi_b = \Gamma_\gamma(\varphi_a)$. (*M.J.*)

prelungirea măsurilor Radon pozitive Fie T un spațiu local compact. Să notăm $\mathcal{K}_+(T) = \{f: T \to \mathbb{R}_+ \mid f \in \mathcal{K}(T)\}$ și $\mathcal{I}_+(T) = \{f: T \to \overline{\mathbb{R}}_+ \mid f \text{ este inferior semicontinuă}\}$. Aici $\mathcal{K}(T)$ este spațiul funcțiilor continue cu suport compact pe T. Se arată că pentru orice f din $\mathcal{I}_+(T)$ avem $f = \sup\{g \mid g \in \mathcal{K}_+(T), g \leqslant f\}$, marginea superioară fiind luată în raport cu ordinea punctuală dată de $u \leqslant v \Leftrightarrow u(x) \leqslant v(x)$ pentru orice x în T. Aceasta îndreptățește definirea, pentru orice f în $\mathcal{I}_+(T)$, a lui

$$\mu^*(f) = \sup\{\mu(g) \mid g \in \mathcal{K}_+(T), \quad g \leqslant f\}.$$

Prin definiție, $\mu^*(f)$ se numește *integrala superioară* a funcției inferior semicontinue f. Se arată că μ^* prelungește pe μ, *i.e.* $\mu^*(f) = \mu(f)$ dacă $f \in \mathcal{K}_+(T)$.

De asemenea, $\mu^*(\alpha f) = \alpha\mu^*(f)$ dacă $\alpha \geqslant 0$ și f este în $\mathcal{I}_+(T)$. Avem și

$$\mu^*\left(\sum_{i\in I} f_i\right) = \sum_{i \in I}\mu^*(f_i),$$

pentru orice familie $\{f_i\}_{i\in I}$ de funcții f_i din $\mathcal{I}_+(T)$. Dacă $G \subset T$ este mulțime deschisă, se știe că funcția sa caracteristică este inferior semicontinuă și se obține $\mu^*(\varphi_G) := \mu^*(G)$ *măsura exterioară* a mulțimii G. Dacă G este relativ compactă, atunci $\mu^*(G)$ este finită. Dacă $f: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o funcție oarecare, atunci funcția definită pe T și identic egală cu ∞ este în $\mathcal{I}_+(T)$ și majorează pe f, deci are sens

$$\mu^*(f) = \inf\{\mu^*(h) \mid h \in \mathcal{I}_+(T), \quad h \geqslant f\}.$$

Am definit $\mu^*(f) =$ *integrala superioară* a funcției f. Notația și denumirea sint consistente cu cele introduse anterior, deoarece, dacă $f \in \mathcal{I}_+(T)$, atunci $\mu^*(f)$ obținut în prima etapă coincide cu $\mu^*(f)$ obținut în a doua etapă. Uneori, în loc de $\mu^*(f)$ se folosește notația $\int^* f\,d\mu$. Se arată că μ^* astfel obținută este crescătoare ($\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$ dacă $f \leqslant g$), este pozitiv omogenă ($\mu^*(\alpha f) = \alpha\mu^*(f)$ dacă $\alpha \geqslant 0$ este număr și f este funcție pozitivă), este numărabil subaditivă $\left(\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(f_n)\right)$ și are proprietatea că $\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu^*(f_n)$ dacă $\{f_n\}_n$ este un șir crescător. Pentru orice mulțime $A \subset T$, *măsura* sa *exterioară* este $\mu^*(A) := \mu^*(\varphi_A)$. O funcție pozitivă f pe T se numește *funcție μ-neglijabilă (funcție neglijabilă în raport cu măsura Radon μ)* dacă $\mu^*(f) = 0$. O mulțime $A \subset T$ se numește *mulțime μ-neglijabilă (mulțime neglijabilă în raport cu măsura Radon μ)* dacă $\mu^*(\varphi_A) = 0$. Dacă o proprietate $P(t)$ care depinde de punctele $t \in T$ se verifică pe o mulțime $A \subset T$ astfel încît $T \setminus A$ este μ-neglijabilă, vom spune că $P(t)$ *are loc μ-a.p.t.* (sau că $P(t)$ *are loc a.p.t. în raport cu măsura Radon* μ). Se arată că o funcție pozitivă f pe T este μ-neglijabilă dacă $f(t) = 0$ μ-*a.p.t.* Atunci, pentru o funcție $f: T \to E$ (unde E este un spațiu vectorial sau $E = \overline{\mathbb{R}}$), vom spune că f este μ-neglijabilă dacă $f(t) = 0$ μ-a.p.t. Dacă $A \subset T$ are proprietatea că $T \setminus A$ este μ-neglijabilă și $f: A \to E$, vom spune că f este *definită μ-a.p.t.* O mulțime $A \subset T$ se numește *local neglijabilă în raport cu μ (mulțime local μ-neglijabilă)* dacă pentru orice t în T există o vecinătate V a lui t astfel încît $V \cap A$ este μ-neglijabilă (echivalent, pentru orice compact $K \subset T$ avem că $A \cap K$ este μ-neglijabilă). O mulțime A este μ-neglijabilă dacă și numai dacă este local μ-neglijabilă și $\mu^*(A) < \infty$. O funcție $f: T \to \mathbb{R}_+$ se numește *funcție local μ-neglijabilă* dacă $\{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ este mulțime local μ-neglijabilă. Un spațiu local compact T se numește *numărabil la infinit* (sau *σ-compact*) dacă există un șir $\{K_n\}_n$ de mulțimi compacte astfel încît $T = \bigcup_n K_n$. Dacă T este numărabil la infinit, mulțimile local neglijabile coincid cu cele neglijabile. Se spune că o proprietate $P(t)$, care depinde de punctele mulțimii T are loc *local μ-a.p.t.* (*local a.p.t. în raport cu măsura Radon* μ) dacă există o mulțime $A \subset T$, cu $T \setminus A$ local μ-neglijabilă, astfel încît $P(t)$ se verifică pentru orice $t \in A$. (*I.C.*)

prelungirea unei funcții Fie X, Y, Z trei mulțimi, $X \subset Y$ și fie $f: X \to Z$. Orice funcție $g: Y \to Z$ a cărei restricție la X este f este o prelungire a lui f de la X la Y. Teorema lui H. Tietze afirmă că o funcție reală f definită și continuă pe o parte închisă F a unui spațiu metric X admite o prelungire la o funcție continuă g astfel încît $g(X) \subset f(F)$. *(S.M.)*

premăsură v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

prima axiomă de numărabilitate Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic și $x \in \mathcal{X}$. Se spune că în punctul x este satisfăcută **p.a.n.** dacă există un sistem fundamental numărabil de vecinătăți al lui x. Se spune că spațiul topologic $\mathcal{X}$ satisface **p.a.n.** dacă orice punct al spațiului admite un sistem fundamental numărabil de vecinătăți. Orice spațiu topologic cu bază numărabilă satisface **p.a.n.** Orice spațiu metric satisface **p.a.n.** Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic în care este satisfăcut **p.a.n.** Un punct x este aderent mulțimii $A \subset \mathcal{X}$ dacă și numai dacă există un șir $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din A convergent către x. O funcție definită pe $\mathcal{X}$ cu valori într-un spațiu topologic este continuă dacă și numai dacă este secvențial continuă. *(Gh.Gr)*

primitivă (a unei forme diferențiale exacte) v. **formă diferențială** (pe o varietate diferențială)

primitivă (a unei funcții complexe) Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f: A \to \mathbb{C}$. Se spune că funcția $g: A \to \mathbb{C}$ este o **p.** a lui f dacă g este derivabilă și $g' = f$. Se spune în acest caz că funcția f *admite* **p.** Dacă A este un domeniu, funcția f admite **p.** dacă și numai dacă este olomorfă. Dacă f este o funcție continuă pe domeniul A, atunci ea admite **p.** dacă și numai dacă pentru orice drum rectificabil și închis λ în A, $\int_\lambda f = 0$. Afirmația $\int_\lambda f = 0$ pentru orice λ rectificabil și închis în domeniul $A \Rightarrow f$ olomorfă pe A este cunoscută sub numele de *teorema lui Morera*. *(Gh.Gr.)*

primitivă (a unei funcții reale) Fie I un interval (nedegenerat) al dreptei reale și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție. Se spune că o funcție $F: I \to \mathbb{R}$ este o **p.** a funcției f dacă F este derivabilă și $F' = f$ (*i.e.* $F'(x) = f(x)$ pentru orice x în I). În acest caz se spune că f admite **p.** Dacă o funcție f admite **p.** atunci f are proprietatea lui Darboux, nu și reciproc. Fie F o **p.** a lui f. Atunci pentru orice număr real C, funcția $F+C$ este de asemenea o **p.** a lui f. Reciproc, dacă F_1 și F_2 sînt **p.** ale lui f, atunci diferența $F_1 - F_2$ este o funcție constantă. Noțiunea de **p.** poate fi prezentată într-un cadru mai general, și anume se consideră o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ care este formată numai din puncte de acumulare și o funcție $f: A \to \mathbb{R}$. O **p.** a lui f este o funcție derivabilă $F: A \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F' = f$. Dacă A nu este interval nu mai rezultă că diferența a două **p.** este constantă. *(I.C.)*

principiul dualității între măsură și categorie Se admite ipoteza continuului. Există o funcție bijectivă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care este involutivă (*i.e.* $f = f^{-1}$) și care are proprietățile: a) Pentru orice mulțime $E \subset \mathbb{R}$ care este neglijabilă Lebesgue mulțimea $f(E)$ este de prima categorie Baire; b) Pentru orice mulțime $E \subset \mathbb{R}$ care este de prima categorie Baire, mulțimea $f(E)$ este neglijabilă Lebesgue (*teorema Erdös-Sierpiński*). În baza acestei teoreme are loc următorul rezultat. **P.d.m.c.** Fie P o propoziție în care intră noțiunile de „măsură Lebesgue zero“, „prima categorie Baire“, precum și noțiuni pure de teoria mulțimilor. Fie P^* propoziția obținută din P schimbînd între ele noțiunile de „măsură Lebesgue zero“ și „prima categorie Baire“. Atunci, admițînd ipoteza continuului, propozițiile P și P^* sînt echivalente. *(I.C.)*

principiul fundamental (în sensul lui Ehrenpreis), denumirea dată teoremei de reprezentare integrală a soluțiilor unui sistem liniar oarecare de ecuații diferențiale cu derivate parțiale liniare cu coeficienți constanți. Acest rezultat, care constituie o generalizare profundă a faptului analog pentru sisteme de ecuații diferențiale liniare ordinare cu coeficienți constanți, formulat de Ehrenpreis și demonstrat în toată generalitatea de Palomodov, are enunțul următor.

Fie $p(D)$ o matrice cu t linii și s coloane avînd coeficienții operatori diferențiali liniari cu coeficienți constanți în n variabile. Fie Ω o mulțime convexă deschisă în $\mathbb{R}^n$ și în Ω se consideră sistemul $P(D)u = 0$ (aici $u = (u_1, \ldots, u_s)$ cu $u_k \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, $k = 1, \ldots, s$) și fie N varietatea caracteristică a sistemului considerat; ea este mulțimea acelor $z \in \mathbb{C}^n$ pentru care rangul matricii $p(z)$ este strict mai mic decît s. Varietatea N se descompune într-o reuniune de subvarietăți N_λ, fiecare N_λ fiind varietatea zerourilor unui anume ideal I_λ din inelul $A = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ al polinoamelor în n variabile. Fiecărui ideal I_λ i se asociază un operator diferențial $\mathrm{d}_\lambda = \mathrm{d}_\lambda(z, \mathrm{D})$: $A^s \to A^{s_\lambda}$; acești operatori au coeficienți polinomiali în z și sînt definiți în mod unic. Operatorii d_λ au proprietatea că intersecția nucleelor aplicațiilor liniare pe care le definesc d_λ: $A^s \to [A/I_\lambda]^{s_\lambda}$ coincide cu imaginea aplicației ${}^tP: A^t \to A^s$, unde ${}^tP$ este matricea transpusă matricii P. Atunci, există măsuri vectoriale μ_λ, purtate pe varietățile N_λ, cu proprietatea că orice soluție distribuție u a sistemului $P(\mathrm{D})\, u = 0$ se poate reprezenta sub forma

$$u = \sum_\lambda \int \mathrm{d}_\lambda(z, -\mathrm{i}\xi) \exp(z, -\mathrm{i}\xi)\, \mu_\lambda,$$

integrala fiind uniform convergentă pentru orice mulțime mărginită din $[C_0^\infty(\Omega)]^s$. Demonstrația, în afara unor considerente de geometrie algebrică, reduce problema cu ajutorul transformării Fourier, la o problemă de analiză complexă, care se rezolvă utilizînd o teoremă de tip B Cartan, dar cu evaluări la infinit. Din această reprezentare rezultă și faptul următor: sistemul $P(\mathrm{D})u = f$ are soluții dacă și numai dacă membrul drept f verifică condițiile de compatibilitate care se exprimă, de asemenea, sub forma $Q(\mathrm{D})f = 0$ (matricea $Q(z)$ verifică $QP = 0$). Există și o variantă a **p.f.** pentru soluțiile hiperfuncții. *(G.G.)*

principiul identității funcțiilor olomorfe v. **principiul prelungirii analitice**

principiul inducției transfinite v. **număr ordinal**

principiul localizării v. **suportul unei măsuri Radon, funcții și mulțimi măsurabile** (în raport cu o măsură Radon)

principiul maximului modulului Fie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ o serie întreagă absolut convergentă pe $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ și $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in B$. Dacă există $0 < \rho \leqslant r$ astfel ca $|f(z)| \leqslant |f(0)|$ pentru orice z cu $|z| \leqslant \rho$, atunci f este constantă. Consecințele următoare ale afirmației primare precedente sînt diverse accepțiuni ale **p.m.m.** Fie A o mulțime deschisă din $\mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ olomorfă și neconstantă în nici o componentă conexă a lui A. Pentru orice parte compactă $H \subset A$, punctele $z \in H$ pentru care $|f(z)| = \sup \{|f(z)| \mid z \in H\}$ sînt puncte ale frontierei lui H. Fie D un domeniu, f o funcție olomorfă pe D astfel încît aplicația $z \to |f(z)|$ are în D un maxim local. Atunci f este constantă. Dacă D este un domeniu mărginit în $\mathbb{C}$ iar f o funcție continuă pe $\overline{D}$, olomorfă pe D și neconstantă, atunci $|f(z)| < \sup \{|f(\zeta)| \mid \zeta \in \partial D\}$ pentru orice $z \in D$, unde ∂D este frontiera lui D (v. și **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă), **funcție armonică**). *(Gh.Gr.)*

principiul mărginirii uniforme v. **teorema Banach-Steinhaus**

principiul prelungirii analitice În contrast cu funcțiile continue sau cu funcțiile de clasă C^∞, funcțiile olomorfe prezintă o mare rigiditate, exprimată prin teorema următoare, cunoscută sub numele de **p.p.a.** sau *principiul identității funcțiilor olomorfe*.

Teoremă. Dacă f și g sînt două funcții olomorfe pe mulțimea deschisă conexă Ω în $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, atunci condițiile următoare sînt echivalente: 1) $f=g$; 2) Există o mulțime deschisă nevidă $\Omega' \subset \Omega$ astfel încît $f(z) = g(z)$ pentru orice $z \in \Omega'$; 3) Există un punct $a \in \Omega$ astfel încît $\partial^\alpha f(a) = \partial^\alpha g(a)$ pentru orice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ unde $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial z_n^{\alpha_n}}$.
În cazul $n = 1$, **p.p.a.** poate fi precizat după cum urmează: Dacă Ω este o mulțime deschisă conexă în $\mathbb{C}$ și f o funcție olomorfă pe Ω, atunci condițiile următoare sînt echivalente: 1') $f(z) = 0$ pentru orice $z \in \Omega$; 2') Mulțimea $f^{-1}(0)$ a zerourilor lui f are un punct neizolat; 3') Există un puuct $a \in \Omega$ astfel încît $f^{(\nu)}(a) = 0$ pentru orice întreg $\nu \geqslant 0$. Un corolar evident al acestei ultime teoreme este următorul rezultat: Dacă Ω este o mulțime deschisă și conexă în $\mathbb{C}$ și f o funcție olomorfă care nu se anulează identic pe Ω, atunci mulțimea $f^{-1}(0)$ este discretă (*principiul zerourilor izolate*). Notăm că, în cazul $n \geqslant 2$, dacă f este o funcție olomorfă pe o mulțime deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, mulțimea $f^{-1}(0)$ a zerourilor lui f nu are puncte izolate (v. **teorema de prelungire a lui Hartogs**). (*M.J.*)

principiul reflexiei v. **principiul simetriei**

principiul simetriei Fie Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{C}$, simetrică în raport cu axa reală, și fie $\Omega' := \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Dacă funcția $f\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ este continuă pe Ω', olomorfă pe $\mathring{\Omega}'$ și reală în punctele reale ale lui Ω', atunci funcția $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, definită prin $F(z) := f(z)$ cînd $z \in \Omega'$ și $F(z) := \overline{f(\bar{z})}$ cînd $\bar{z} \in \Omega'$, este o funcție olomorfă pe Ω. Această teoremă, cunoscută sub numele de **p.s.** (sau *principiul reflexiei*) reprezintă, în fapt, un procedeu de prelungire analitică a unei funcții continue pe Ω', olomorfe pe $\mathring{\Omega}'$ și reale pe intersecția lui Ω' cu axa reală (*M.J.*)

principiul superpoziției, proprietate a sistemelor liniare constînd din faptul că aplicația care asociază funcției f soluția cu condiții inițiale nule a sistemului afin $x' = A(t)x + f(t)$ este o aplicație liniară. Proprietatea exprimă suprapunerea efectelor excitațiilor externe. (*A.H.*)

principiul variației argumentului, una din teoremele de bază ale analizei complexe, care se poate enunța astfel:
Teorema 1. Fie f o funcție meromorfă pe mulțimea deschisă Ω din $\mathbb{C}$ și fie $K \subset \Omega$ un compact cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni. Presupunem că funcția f nu are zerouri și poluri pe ∂K. Atunci are loc formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z(K; f) - P(K; f),$$

unde $Z(K;f)$ este numărul zerourilor lui f conținute în K iar $P(K;f)$ numărul polurilor lui f conținute în K, fiecare zero și pol fiind numărat de un număr de ori egal cu multiplicitatea sa (∂K este ca de obicei bordul orientat al lui K).
Obs. Dacă $f = u + iv\colon U \to \mathbb{C}$ este o funcție olomorfă și $f(z) \neq 0$ pentru $z \in U$, atunci imaginea inversă a formei logaritm $\omega = \dfrac{dw}{w}$ prin funcția f este forma diferențială închisă $\dfrac{df}{f}$, definită pe U și notată $d \log f$. Partea

imaginară a acestei forme diferențiale se notează $d \arg f$ și este egală cu imaginea inversă prin funcția f a formei argument. Avem deci

$$\frac{df}{f} = d \log f = d \log |f| + i\, d \arg f = d \log |f| + i\,\frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2}.$$

În condițiile teoremei precedente, dacă punem

$$U := \{z \in \Omega \mid f(z) \neq 0 \text{ și } \infty\},$$

atunci $\partial K \subset U$, iar din considerațiile precedente rezultă

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{df}{f} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} d \log f = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial K} d \arg f.$$

i.e. valoarea integralei poate fi interpretată ca reprezentînd *variația argumentului* punctului $f(z)$ cînd punctul z parcurge frontiera ∂K în sens pozitiv. Acest fapt justifică denumirea de **p.v.a.** atribuită teoremei 1. O generalizare a **p.v.a.** este
Teorema 2. În condițiile teoremei 1, fie $\{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ șirul zerourilor lui f conținute în K și $\{b_j\}_{1 \leqslant j \leqslant q}$ șirul polurilor lui f conținute în K, unde $p = Z(K;f)$ și $q = P(K;f)$, deci fiecare zero și pol apare în șirurile precedente de un număr de ori egal cu multiplicitatea sa. Atunci, pentru orice funcție olomorfă g pe Ω, are loc formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{g(z)\,f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{p} g(a_i) - \sum_{j=1}^{q} g(b_j).$$

În particular în condițiile teoremei 1 și cu notațiile din teorema 2 pentru orice număr întreg $r \geqslant 0$ are loc formula (suma puterilor):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{z^r f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{p} a_i^r - \sum_{j=1}^{q} b_j^r.$$

Un corolar al **p.v.a.** este
Teorema 3 (Rouché). Pentru K și Ω la fel ca în teorema 1, fie f și g două funcții meromorfe cu proprietățile următoare: 1) f și g nu au zerouri și poluri pe ∂K; 2) $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pentru orice $z \in \partial K$. Atunci

$$Z(f; K) - P(f; K) = Z(g; K) - P(g; K).$$

Aplicații: 1° *Teorema fundamentală a algebrei.* Fie

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

un polinom de grad $n \geqslant 1$, unde $a_1, \ldots, a_n$ sînt numere complexe date. Atunci ecuația $f(z) = 0$ are exact n rădăcini. Pentru demonstrație se consideră discul compact

$$K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}, \quad r > 0.$$

Dacă r este suficient de mare avem $|f(z) - z^n| < |z^n|$ cînd $|z| = r$ şi se poate aplica teorema lui Rouché cu $g(z) = z^n$). 2° *Continuitatea rădăcinilor unei ecuaţii olomorfe.* Fie K şi Ω la fel ca în teorema 1, f o funcţie olomorfă pe Ω astfel încît $f(z) \neq 0$ pentru $z \in \partial K$ şi $\varepsilon := \inf_{\partial K} |f|$, deci $\varepsilon > 0$. Atunci, pentru orice funcţie olomorfă h pe Ω astfel încît $|h(z)| < \varepsilon$ pentru $z \in \partial K$, avem $Z(f+h; K) = Z(f; K)$. (Acest enunţ se obţine din teorema lui Rouché pentru $g = f + h$.) 3° *Continuitatea rădăcinilor unei ecuaţii algebrice.* Fie

$$P(z, u) = z^n + u_1 z^{n-1} + \ldots + u_n,$$

unde n este un întreg $\geqslant 1$ iar $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. Pentru $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un punct fixat în $\mathbb{C}^n$, fie $z_1, \ldots, z_n$ cele n rădăcini ale ecuaţiei algebrice $P(z, a) = 0$. Fie de asemenea Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ conţinînd punctele $z_1, \ldots, z_n$. Atunci există o mulţime deschisă $U \subset \mathbb{C}^n$ care conţine pe a astfel încît, pentru orice $u \in U$, toate zerourile ecuaţiei $P(z, u) = 0$ să fie conţinute în Ω. (Într-adevăr, fie K un compact în $\mathbb{C}$ cu frontiera de clasă C^1 pe porţiuni astfel încît $z_1, \ldots, z_n \in \mathring{K}$ şi $K \subset \Omega$. Fie $\varepsilon := \inf_{\partial K} |P(z, a)|$; evident $\varepsilon > 0$. Continuitatea lui P ca funcţie de z şi u implică existenţa unei mulţimi deschise $U \subset \mathbb{C}^n$ conţinînd pe a astfel încît $|P(z, u) - P(z, a)| < \varepsilon$ cînd $(z, u) \in \partial K \times U$. Se poate deci aplica teorema precedentă pentru $f(z) := P(z, a)$ şi $h(z) := P(z, u) - P(z, a)$, $u \in U$). 4° *Teorema gradului local.* Fie f o funcţie olomorfă neconstantă pe mulţimea deschisă conexă Ω în $\mathbb{C}$. Atunci, pentru orice punct $a \in \Omega$ există un disc D centrat în punctul $f(a)$ avînd proprietatea următoare: componenta conexă U a lui $f^{-1}(D)$ care conţine punctul a este relativ compactă în Ω şi, pentru orice punct $w \in D$, ecuaţia $f(z) = w$ are exact m rădăcini $z \in U$, unde m este ordinul lui a ca zero al funcţiei $f - f(a)$. (Într-adevăr, se poate presupune $a = f(a) = 0$.) Fie $\rho > 0$ astfel încît discul compact $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \rho\}$ să fie conţinut în Ω şi astfel încît $f(z) \neq 0$ pentru $z \in K \setminus \{0\}$. Dacă $\varepsilon := \inf_{\partial K} |f|$, atunci $\varepsilon > 0$ şi, după teorema de la punctul 3°, se poate lua $D := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \varepsilon\}$. În fapt, dacă $w \in D$, fiecare din ecuaţiile $f(z) - w = 0$ şi $f(z) = 0$ are exact m rădăcini conţinute în $\mathring{K}$. Pe de altă parte, după alegerea lui ε, $f^{-1}(D) \cap \partial K = \emptyset$, deci $U \subset \mathring{K}$, de unde se deduce că mulţimea U este relativ compactă. Aplicaţia $U \to D$, indusă de f, este proprie şi de grad m; în particular $f(U) = D$. Evident, teorema aplicaţiei deschise este o consecinţă a teoremei gradului local). 5° *Teorema funcţiei inverse.* Dacă h este o funcţie olomorfă şi injectivă pe mulţimea deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}$, atunci mulţimea $\Omega' := h(\Omega)$ este deschisă şi aplicaţia $\Omega \to \Omega'$, indusă de h, este un izomorfism analitic. În plus, pentru orice punct $w \in \Omega'$ şi orice compact $K \subset \Omega$, cu frontiera de clasă C^1 pe porţiuni, astfel încît $h^{-1}(w) \in \mathring{K}$, are loc formula

$$h^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{z h'(z)}{h(z) - w} \mathrm{d}z. \qquad (*)$$

Mai întîi, din teorema precedentă rezultă că h este o aplicaţie deschisă, deci $h(\mathring{K})$ este o mulţime deschisă. Apoi, pentru $w \in h(\mathring{K})$ fixat, ecuaţia $h(z) = 0$ are un singur zero, şi anume pe $h^{-1}(w)$. Din teorema 2 aplicată funcţiilor $f(z) := h(z) - w$ şi $g(z) := z$ se obţine formula (*). Folosind această formulă şi teorema derivării sub semnul integral, se vede imediat că funcţia h^{-1} este olomorfă pe mulţimea deschisă $h(\mathring{K})$ etc.). (*M.J.*)

principiul zerourilor izolate v. **principiul prelungirii analitice**

probabilitate v. **măsuri pozitive şi măsuri cu semn**

probabilitate de distribuţie v. **integrala stochastică**

probabilitate de distribuţie (n-dimensională) v. **măsură gaussiană**

probabilitate de repartiţie v. **integrala stochastică**

probabilitate de repartiţie (n-dimensională) v. **măsură gaussiană**

problema aditivă a lui Cousin v. **funcţie meromorfă** (pe o varietate complexă)

problema dificilă a teoriei măsurii Fie n un număr natural şi fie $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mulţimea părţilor lui $\mathbb{R}^n$. Se cere să se construiască o măsură numărabil aditivă $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ care să aibă proprietăţile: 1) Măsura μ este invariantă la translaţie (v. **problema uşoară a teoriei măsurii**): 2) Avem $\mu([0, 1]^n) = 1$ (rezultă atunci că pentru orice mulţime mărginită A, $\mu(A) < \infty$). **P.d.t.m.** nu poate fi rezolvată pentru nici un număr natural n. (*I.C.*)

problema lui Brouwer v. **transformare interioară**

problema lui Cauchy Fie un sistem de ecuaţii sub formă normală:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x_i^{n_i}} = F_i\left(x_1, \ldots, x_n, \ u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^{\alpha} u_j}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} \ldots\right),$$

cu $i, j = 1, 2, \ldots, N$, $|\alpha| \leqslant n_j$, $\alpha_j < n_j$. **P.C.** constă în a căuta o soluţie $(u_1, \ldots, u_N$ care pentru $x_1 = x_1^0$ să ia, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul $n_i - 1$ valori date $\varphi_i^{(k)}(x_2, \ldots, x_n)$ $\left(\dfrac{\partial^k u_i}{\partial x_i^k} = \varphi_i^{(k)}(x_2, \ldots, x_n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n_{i-1}\right)$. În general, dacă nu se impun condiţii suplimentare, o astfel de problemă nu are soluţii sau, dacă are, acestea nu sînt unice. Teorema Cauchy-Kovalevskaia asigură existenţa locală a soluţiilor în cazul în care coeficienţii ecuaţiei şi datele sînt analitice. Existenţa globală sau unicitatea nu sînt asigurate decît în cazuri speciale. Reducerea unui sistem oarecare de ecuaţii cu derivate parţiale de formă normală a condus pe Cauchy la introducerea noţiunii de caracteristică. Trecînd la cazul liniar, fie $P(x, \mathrm{D})$ un astfel de operator, de ordin m. A rezolva **p.C.** relativă la operatorul P şi la planul $\langle x, N \rangle = 0$ (N vector nenul din $\mathbb{R}^n$) revine la a găsi o soluţie u a ecuaţiei $P(x, \mathrm{D})u = f$ care să verifice $u - \varphi = 0\,(\langle x, N \rangle^m)$ atunci cînd $\langle x, N \rangle > 0$, f şi φ fiind funcţii date. Dacă u este suficient de regulată, această condiţie este echivalentă cu anularea derivatelor lui $u - \varphi$ pe o direcţie transversală planului $\langle x, N \rangle = 0$. Se pot da datele mai general, pe o hipersuprafaţă Σ. Cum, în general, rezultatele sînt de natură locală acest caz se reduce la cel anterior. Din teorema Cauchy-Kovalevskaia se deduce că dacă Σ nu este caracteristică şi dacă datele şi coeficienţii operatorului sînt analitici, atunci local, existenţa şi unicitatea soluţiei, de asemenea analitice, este asigurată. În cazul în care planul (sau suprafaţa ce poartă datele) sînt caracteristice, se spune că avem de-a face cu **p.C.** *caracteristică*. În acest caz, chiar pentru coeficienţi analitici nu mai avem unicitate. În schimb, dacă $P(x, \mathrm{D})$ are coeficienţi analitici şi φ este o funcţie de clasă C^2, pentru care grad $\varphi(x^\circ) = N \neq 0$ este caracteristic, dar care verifică o condiţie de convexitate (condiţia lui Levi) în raport cu P, orice soluţie $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ a ecuaţiei $P(x, \mathrm{D})u = 0$, care se anulează pentru $\varphi(x) > \varphi(x^\circ)$, se anulează identic. Deşi în cazul caracteristic **p.C.** nu are soluţie unică, se pot determina, prin condiţii suplimentare, aşa-numitele clase de unicitate (Prima clasă de acest fel a fost determinată de Carleman-M.Nicolescu-Tihonov pentru ecuaţia căldurii.) Un studiu amănunţit în cazuri generale al claselor de unicitate a fost efectuat de Gelfand şi Şilov. Dacă operatorul $P(x, \mathrm{D})$ este analitic, hipoeliptic, cu coeficienți analitici în $\Omega = \{|x_1| < T\} \times \Omega'$, Ω' deschis în $\mathbb{R}^{n-1}$ și $f(x_1, \ldots, x_n)$ este analitică în Ω, atunci **p.C.** $Pu = f$ în Ω, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^j u = u_j\,(x_2, \ldots, x_n)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, nu are soluție dacă datele inițiale nu sînt analitice. Operatorii (cu coeficienți constanți) pentru care **p.C.** necaracteristică are soluții pentru orice f, φ de clasă C^∞ sînt exact operatorii hiperbolici, ce se pot caracteriza algebric (v. **operator hiperbolic**). (*G.G.*)

problema lui Cauchy pentru ecuații diferențiale Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația diferențială definită de funcția $F : I \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cu condițiile inițiale t_0, y_1^0, $y_2^0, \ldots, y_n^0$ este o funcție $y: I_y \subset \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de n ori derivabilă, cu $(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \in G$ pentru orice t din I_y verificînd

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

pentru orice t din I_y și în plus

$$y(t_0) = y_1^0, \quad y'(t_0) = y_2^0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_n^0.$$

Unei ecuații diferențiale de ordin n definită de o funcție F i se asociază în mod natural un sistem de ecuații diferențiale definit de funcția $f : I \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f_1(t, y_1, \ldots, y_n) = y_2, \ldots, f_{n-1}(t, y_1, \ldots, y_n) = y_n,$$

$$f_n(t, y_1, \ldots, y_n) = F(t, y_1, \ldots, y_n).$$

Dacă y este soluție pentru ecuația diferențială de ordin n definită de F, atunci funcția $t \mapsto (y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ este soluție a sistemului definit de f; prima coordonată a unei soluții a sistemului definit de f este soluție a ecuației definite de F. În acest fel teoria problemei lui Cauchy se transportă automat de la sistemele de ecuații diferențiale la ecuațiile de ordin superior. (*A.H.*)

problema lui Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale Fiind dată o funcție $f : I \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ și un punct $(t_0, y_0) \subset I \times G$ **p.C.s.e.d.** definit de f (sau *problema cu condiții inițiale*) constă în determinarea unei funcții $y: I_y \subset I \to G$, derivabilă, cu $y'(t) = f(t), y(t))$ pentru orice $t \in I_y$ și $y(t_0) = y_0$. Problema lui Cauchy reprezintă modelul fundamental pentru procese de evoluție în care starea în fiecare moment este determinată de starea inițială și de legea de desfășurare a procesului exprimată ca o legătură între viteza instantanee și stare; punctul de plecare al acestui model a fost constituit de legea fundamentală a dinamicii formulată de Newton.

Teorema de existență a lui Peano. Dacă f este continuă, atunci pentru orice punct $(t_0, y_0) \in I \times G$ există un interval $I_{(t_0, y_0)} \subset I$ și o soluție $y: I_{(t_0, y_0)} \to G$ a problemei Cauchy (y derivabilă, $y(t_0) = y_0$, $y'(t) = f(t, y(t))$ pentru orice $t \in I_{(t_0, y_0)}$).

La această teoremă de existență se adaugă diferite teoreme de unicitate dintre care cea mai uzuală afirmă că dacă f este *local lipschitziană în al doilea argument* (*i.e.* pentru orice interval compact J din I și pentru orice compact C din G există $L > 0$ astfel încît oricare ar fi t din J și oricare ar fi y_1, y_2 din C are loc inegalitatea

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|)$$

soluția problemei lui Cauchy este unică (două soluții ale aceleiași probleme a lui Cauchy coincid pe intersecția intervalelor lor de definiție). În condițiile unei teoreme de unicitate locală, orice soluție a problemei lui Cauchy se poate prelungi pînă la o soluție maximală (neprelungibilă) unică; extremitățile intervalului de definiție al unei soluții maximale sînt funcții semicontinue de (t_0, y_0). Dacă f este de clasă C^1 aplicația care asociază lui (t_0, y_0) valoarea într-un punct t a soluției maximale corespunzătoare a problemei Cauchy este de clasă C^1. În afară de soluția clasică pentru problema lui Cauchy definită mai sus, se consideră, de asemenea, soluții în sens Carathéodory. O funcție y este *soluție în sens Carathéodory* a problemei lui Cauchy definită de funcția f și de (t_0, y_0) dacă $y(t_0) = y_0$, y este absolut continuă și $y'(t) = f(t, y(t))$ **a.p.t.** în I_y. Existența soluției în sens Carathéodory este asigurată în următoarele condiții pentru f: a) Pentru orice y din G funcția $t \mapsto f(t, y)$ este măsurabilă; b) Pentru orice t din I funcția $y \mapsto f(t, y)$ este continuă; c) Pentru orice (t_0, y_0) din $I \times G$ există $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ și o funcție integrabilă m: $(t_0 - r_1, t_0 + r_1) \to \mathbb{R}$ astfel încît sfera cu centrul în y_0 de rază r_2 este în G iar pentru aproape toți t din $(t_0 - r_1, t_0 + r_1)$ și pentru toți y din sfera de mai sus are loc inegalitatea $|f(t, y)| \leqslant m(t)$. O extindere și mai mare a noțiunii de soluție a problemei lui Cauchy este următoarea: y se numește *soluție în sens Filippov* a problemei lui Cauchy dacă $y(t_0) = y_0$, y este absolut continuă și $y'(t) \in F_f(t, y(t))$ a.p.t. în I_y; F_f este definită prin

$$F_f(t, y) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(A)=0} \overline{\mathrm{co}}\, f(t, B_\delta(y) \setminus A),$$

unde co B este cea mai mică mulțime convexă închisă care conține pe B, $B_\delta(y)$ sfera de rază δ centrată în y iar μ măsura Lebesgue în $\mathbb{R}^n$; F_f se numește *conul lui Filippov* și definiția exprimă faptul că y este soluție pentru incluziunea diferențială definită de conul lui Filippov. Dacă f este măsurabilă și verifică condiția c), atunci există soluția în sens Filippov a problemei lui Cauchy. (*A.H.*)

problema lui Dirichlet Fie Ω o mulțime deschisă mărginită din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de regulată și $P(x, \mathrm{D})$ un operator eliptic de ordin $m = 2p$. Dîndu-se f în Ω și funcțiile $g_0, \ldots, g_{p-1}$ pe $\partial\Omega$, **p.D.** constă în a găsi o soluție a ecuației $P(x, \mathrm{D})u = f$ în Ω care să verifice condițiile la limită $\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = g_k$ pe $\partial\Omega$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ fiind derivarea după normala exterioară. Dacă soluția u este de clasă C^m în Ω și de clasă C^{p-1} în $\overline{\Omega}$, se spune că u este *o soluție clasică* a **p.D.** Se poate da o formulare generalizată a **p.D.** în cadrul spațiilor Sobolev. Dacă

$$P(x, \mathrm{D})\, u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha u, \quad m = 2p$$

îndeplinește condițiile de mai sus și $P^*(x, \mathrm{D})$ este adjunctul său formal, se consideră forma biliniară asociată lui P, definită de $(v, Pu) - (P^*v, u) = B[u, v]$, unde produsul scalar este cel din $L^2(\Omega)$. (Această formă biliniară are sens chiar dacă coeficienții $a_\alpha(x)$ verifică condiții slabe de regularitate.) Atunci o funcție u din $H_0^p(\Omega)$ ce verifică $B[\varphi, u] = (\varphi, f)$, pentru orice $f \in C_0^\infty(\Omega)$, se numește *soluție generalizată* a **p.D.** Spațiul $H_0^p(\Omega)$ este aderența subspațiului $C_0^\infty(\Omega)$ în $H^p(\Omega)$. Dacă operatorul $P(x, \mathrm{D})$ de ordin $m = 2p$ este uniform tare eliptic în Ω, *i.e.* verifică $(-1)^p \operatorname{Re}\left\{\sum_{|\alpha|=2p} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha\right\} \geqslant C_0 |\xi|^{2p}$ uniform în Ω și dacă coeficienții părții sale principale sînt continui iar ceilalți măsurabili și mărginiți, atunci pentru **p.D.** generalizată are loc alternativa lui Fredholm, și anume:

sau pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ există o soluție unică u verificînd $B[\varphi, u] = (\varphi, u)$ pentru orice $\varphi \in H_0^p$, $u \in H_0^p(\Omega)$, sau există un număr finit de soluții liniar independente v_j $(j = 1, \dots, x)$ ale ecuației $B[v, \varphi] = 0$ pentru orice $\varphi \in H_0^p(\Omega)$, $v_j \in H_0^m(\Omega)$, astfel încît ecuația $B[\varphi, u] = (\varphi, f)$ are soluție dacă și numai dacă $(f, v_j) = 0$ $(j = 1, \dots, k)$. Un rol de seamă în demonstrarea existenței soluției îl joacă inegalitatea lui Gårding (v. și **funcție armonică**). În cazul ecuației lui Laplace **p.D.** a fost rezolvată în condiții foarte generale de Perron și Wiener. *(G.G.)*

problema lui Levi Fie X o varietate complexă. Se numește *funcție de exhaustiune* pe X orice funcție reală $\varphi \in C(X)$ cu proprietatea că, pentru orice număr real c, mulțimea

$$X_c := \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$$

este relativ compactă în X. Dacă X este o varietate Stein, este ușor de arătat că X admite o funcție de exhaustiune de clasă C^∞ strict plurisubarmonică. Problema dacă aserțiunea reciprocă este de asemenea adevărată este cunoscută sub numele de **p.L.** pe o varietate complexă. Această problemă a fost soluționată afirmativ de H. Grauert (1958). Astfel are loc următoarea
Teoremă (Grauert). X este o varietate Stein dacă și numai dacă X admite o funcție de exhaustiune $\varphi \in C^\infty(X)$ strict plurisubarmonică.
Alte demonstrații ale teoremei lui Grauert bazate pe teoreme de existență pentru operatorul $\bar\partial$ au fost obținute de J. J. Kohn și L. Hörmander. Teorema lui Grauert este punctul de plecare în teoria pseudoconvexității (v. **pseudoconvexitate**). *(M.J.)*

problema lui Levi (în $\mathbb{C}^n$) v. **pseudoconvexitate**

problema lui Neumann pentru $\bar\partial$, analogul pentru laplacianul complex $\overline{\Box}$ a problemei uzuale a lui Neumann pentru laplacianul real. Sin.: *problema $\bar\partial$-Neumann*. Această problemă a apărut în legătură cu generalizarea teoriei lui Hodge la varietăți necompacte și joacă un rol important în analiza complexă. Dacă se consideră ecuația $\bar\partial u = f$ (pentru funcții sau forme a căror coeficienți sînt de pătrat integrabil într-un domeniu Ω relativ compact din $\mathbb{C}^n$ cu frontieră netedă) și se caută o soluție $u \in L^2(\Omega)$, ortogonală pe subspațiul funcțiilor olomorfe în Ω, care să aparțină lui $L^2(\Omega)$ (resp. o soluție $u' \in L^2_{(p,\,q)}(\Omega)$, ortogonală pe spațiul formelor $g \in L^2(\Omega)$, verificînd $\bar\partial g = 0$, unde $L^2_{(p,\,q)}(\Omega)$ este spațiul formelor de tip (p, q) cu coeficienții din $L^2(\Omega)$), atunci soluția **p.N.** $\bar\partial$ permite construirea acelei soluții pentru ecuația $\bar\partial u = f$ prin intermediul operatorului lui Neumann care are în acest caz proprietățile necesare. Condiții convenabile de convexitate, exprimate cu ajutorul formei Levi, asigură rezolubilitatea **p.N.** $\bar\partial$. În cazul cel mai general **p.N.** $\bar\partial$ a fost rezolvată de J. J. Kohn. *(G.G.)*

problema momentelor, problema găsirii unei funcții reale φ definită pe un segment T al dreptei reale astfel ca φ să fie cu variație mărginită și să satisfacă condiția

$$\int_T t^k \, \mathrm{d}\varphi(t) = \lambda_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

unde șirul numerelor λ_k este dat. Problema găsirii funcției φ revine la cea a găsirii unei funcționale liniare și continue f pe spațiul Banach $C_{\mathbb{R}}(T)$ (al funcțiilor reale continue pe T, înzestrat cu norma obișnuită, v. **spațiu Banach**) care

satisface condiția $f(x_k) = \lambda_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, unde $x_k(t) = t^k$, $\forall t \in T$. **P.m.** a fost generalizată în diverse moduri. Sub forma ei precedentă sau sub forme asemănătoare, **p.m.** are un răspuns, în privința existenței soluției, în următoarea *Teoremă*. Fie X un spațiu liniar normat, A o submulțime a lui X și g o funcțională definită pe A; pentru ca să existe o funcțională liniară și continuă f pe X astfel ca $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$, este necesar și suficient să existe un număr $\mu > 0$ astfel ca

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g(x_j)\right| \leqslant \mu \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right\|,$$

oricare ar fi elementele $x_j \in A$ și scalarii λ_j (în număr finit). *(R.C.)*

problema multiplicativă a lui Cousin v. **funcție meromorfă** (pe o varietate complexă)

probemla $\bar\partial$-Neumann v. **problema lui Neumann**

problema tipului v. **suprafață riemanniană**

problema ușoară a teoriei măsurii Fie n un număr natural și fie $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mulțimea părților lui $\mathbb{R}^n$. Se cere să se construiască o măsură aditivă $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietățile: 1) Măsura μ este *invariantă la translație* (*i.e.* pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ și orice $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(A) = \mu(x + A)$, unde $x + A = \{x + a \mid a \in A\}$; 2) Avem $\mu([0, 1]^n) = 1$ (rezultă atunci că orice mulțime mărginită A trebuie să aibă $\mu(A) < \infty$). **P.u.t.m.** are soluție care nu este unică, pentru $n = 1$ și $n = 2$ (*teorema lui Banach asupra* **p.u.t.m.**). **P.u.t.m.** nu are soluție pentru $n \geqslant 3$ (*teorema lui Hausdorff*). *(I.C.)*

problemă cu condiții inițiale v. **problema lui Cauchy pentru ecuații diferențiale, problema lui Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale**

problemă la limită eliptică, problemă la limită care generalizează pentru ecuații (sau sisteme) eliptice de ordin superior problemele Dirichlet și Neumann clasice. Prima problemă constă în a defini ce se înțelege prin valoare la frontieră (sau valoare la bord). Cel mai comod cadru pentru definirea acestei noțiuni este cel al spațiilor Sobolev H^s. Fie o mulțime deschisă și mărginită în $\mathbb{R}^n$, cu frontiera presupusă de clasă C^∞. (Considerente analoage se pot face și în condiții mai slabe privind regularitatea sau considerînd varietăți compacte cu bord.) Pentru orice funcție $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ are sens a se considera urmele $\gamma_j\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ pe $\partial\Omega$, definite prin $\gamma_j\varphi$ = restricția la $\partial\Omega$ a derivatei normale (de ordin j) $\dfrac{\partial^j \varphi_j}{\partial \nu}$. Fie $s > 1/2$ un număr real arbitrar. Aplicația γ_j se prelungește prin continuitate, în mod unic, la un operator liniar și continuu $\gamma_j : H^s(\Omega) \to H^{s-j-1/2}(\Omega)$ și dacă m este cel mai mare întreg inferior lui $s - 1/2$ există un operator liniar și continuu de la $\prod_{j=1}^{m} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$ în $H^s(\Omega)$ care este un invers la dreapta al aplicației „urmă“: $(\gamma_0, \dots, \gamma_m)$. În sensul de mai sus se vor considera urmele pe $\partial\Omega$. Fie acum următoarea problemă la limită în Ω.:

$$P(x, \mathrm{D})\, u = f \text{ în } \Omega, \quad B_j(x, \mathrm{D}) = f_i \text{ pe } \partial\Omega, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

unde ordinul operatorului diferențial $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ este $2m$,

$$B_j(x, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(x)\, \gamma_0 \mathrm{D}^\alpha, \quad 0 \leqslant m_j \leqslant 2m - 1,$$

iar coeficienții $b_{j\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega)$. Se spune că sistemul $\{B_j(x, \mathrm{D})\}$ acoperă operatorul Γ pe $\partial\Omega$ dacă pentru orice $x \in \partial\Omega$, orice vector $\xi \neq 0$ tangent la $\partial\Omega$ în punctul x și orice vector $\eta \neq 0$ normal la $\partial\Omega$ în x, polinoamele în τ,

$$\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x)\,(\xi + \tau\eta)^\alpha, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

sînt liniar independente modulo $M_+(x, \xi, \eta, \tau) = \prod_{j=1}^{m} (\tau - \tau_j^+(x, \xi, \eta))$, unde $\tau_j^+(x, \xi, \eta)$ sînt rădăcinile situate în semiplanul $\operatorname{Im}\tau > 0$ ale ecuației $P_{2m}(x, \xi + \tau\eta) = 0$, operatorul Γ fiind presupus propriu eliptic. Problema la limită considerată mai sus se numește regulat eliptică dacă $\{B_j\}$ acoperă operatorul Γ pe $\partial\Omega$ și dacă Γ este propriu eliptic. Aplicația $u \to (\Gamma u, B_0 u, \dots$ $\dots, B_{m-1}u)$ este o aplicație liniară continuă

$$A : H^{s+2m}(\Omega) \to H^s(\Omega) \oplus \left(\prod_{j=0}^{m-1} H^{s+2m-m_j-1/2}(\partial\Omega) \right).$$

Condițiile impuse asigură că operatorul A este pentru orice s un operator Fredholm (sau cu indice), *i.e.* Ker A și Coker A sînt spații vectoriale de dimensiune finită. Aceasta asigură existența soluției dacă $f, f_0, \dots, f_{m-1}$ verifică un număr finit de relații liniare. **P.l.e.** se bucură de proprietăți de regularitate la bord ale soluțiilor. Metoda de rezolvare a unor astfel de probleme constă în reducerea lor la studiul unor operatori pseudodiferențiali pe frontiera $\partial\Omega$. Se pot considera valori la bord mai generale (de exemplu, în sensul hiperfuncțiilor) și deci probleme la limită mai generale. (*G.G.*)

problemă mixtă hiperbolică, problemă mixtă de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A(x, t, \mathrm{D}_x)\,u = f \text{ în } Q_T,\ B_j u = f_j \text{ pe } S_T,\ 0 \leqslant j \leqslant m-1,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ în } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x),$$

unde operatorul A este de forma

$$A\varphi = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \mathrm{D}_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t)\, \mathrm{D}_x^\beta \varphi)$$

(deci de ordin $2m$) coeficienții $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ și $a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\beta\alpha}$ (deci operatorul A este simetric), iar operatorii $B_j(x, t;\ \mathrm{D}_x)$ sînt operatori de ordin m_j cu $0 \leqslant m_j \leqslant$ $\leqslant 2m$ astfel încît pentru orice $t \in [0, T]$, sistemul $\{B_j(x, t_j, \mathrm{D}_x\}$ acoperă operatorul A pe $\partial\Omega$ (pentru notații și definiția acoperirii v. **problemă mixtă parabolică, problemă la limita eliptică**). Condițiile la limită revin la a se da un subspațiu vectorial închis V al lui $H^m(\Omega)$, cu $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$, astfel încît forma

$$t \to a(t, u, v) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqslant m} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x, t)\, \mathrm{D}_x^\alpha u \overline{\mathrm{D}_x^\beta v}\, \mathrm{d}x$$

să verifice $a(t, v, v) \geqslant \alpha\, \|v\|^2_{H^m(\Omega)}$ pentru orice $v \in V$, cu $\alpha > 0$. În aceste condiții, utilizîndu-se rezultate de regularitate pentru problema adjunctă, se poate demonstra existența unei soluții (generalizate) a **p.m.h.** Aceasta este ceea ce se numește *formularea variațională a problemei mixte*. Se cunosc condiții

mai generale, în cazul operatorilor strict hiperbolici, de rezolvare a problemei mixte. Spațiile în care se caută soluțiile sînt de forma $\{u \mid e^{-\gamma t} u \in L^2(\mathbb{R} \times \Omega),$ $\gamma \in \mathbb{R}\} = e^{\gamma t} L^2(\mathbb{R} \times \Omega)$, iar datele de frontieră aparțin spațiului similar $e^{\gamma t} L^2(\mathbb{R} \times \partial\Omega)$. (Pentru aceste spații se deduc teoreme de urmă, ceea ce dă sens noțiunii de date de frontieră.) Rezultatele cele mai generale în acest context se datorează lui Sakamoto. (*G.G.*)

problemă mixtă parabolică Fie Ω un domeniu în $\mathbb{R}^n$ și fie $Q_T = \{(x, t) \mid$ $x \in \Omega,\ 0 < t < T\}$ cilindrul de bază Ω, $S_T = \{(x, t) \mid x \in \partial\Omega,\ 0 < t \leqslant T,$ cu $T > 0)\}$ frontiera sa laterală. Operatorul diferențial

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + A(x, t, \mathrm{D})\,u, \text{ cu } A(x, t, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x, t)\, \mathrm{D}_x^\alpha,$$

este parabolic în punctul (x_0, t_0) dacă $A(x, t_0, \mathrm{D})$ este tare eliptic în punctul x_0. Dacă coeficienții a_α sînt mărginiți pe Q_T și dacă

$$(-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x, t)\, \xi^\alpha \right\} \geqslant c|\xi|^{2m}$$

cu $c > 0$ pentru orice $(x, t) \in Q_T$ și orice ξ real, operatorul L este uniform parabolic în $\bar{Q}_T$. Problema mixtă $Lu = f$ în $Q_T \cup \Omega_T$, $\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = f_j$ pe S_T $(0 \leqslant j \leqslant$ $\leqslant m-1)$, $u(x, 0) = \psi(x)$ pe Ω_0 se numește **p.m.p.** (dacă L este parabolic); aici $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ reprezintă derivarea în raport cu normala exterioară iar Ω_T este baza superioară a cilindrului Q_T. Dacă f_j, $j = 0, 1, \dots, m-1$, și ψ sînt nuli, se spune că este o problemă mixtă omogenă. Sub formă generalizată, această problemă omogenă este echivalentă cu rezolvarea ecuației de evoluție abstractă $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} +$ $+ A(t)u = f(t)$ în spațiul $X = L^2(\Omega)$ în care $A(t)$ este operatorul definit de $A(t)\,v(x) = A(x, t, \mathrm{D})\,v(x)$, de domeniu $\mathrm{D}_A = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, $f(t)$ este funcția $t \to f(x, t) \in L^2(\Omega)$, iar soluția căutată $t \to u(t)$ este cu valori în $L^2(\Omega)$. În condiții suficient de generale, operatorul L fiind uniform parabolic în $\bar{Q}_T$, cu coeficienți verificînd o condiție de tip Hölder, există, și este unică, o soluție (generalizată) a **p.m.p.** omogene. În condiții de regularitate uzuale, soluția $t \to u(t)$ are derivată (în raport cu t) pe orice subinterval deschis la stînga al lui $[0, T]$. Dacă coeficienții operatorului diferențial L aparțin lui $C^\infty(\bar{Q}_T)$ și dacă $\partial\Omega$ este de clasă C, iar $f(x, t) \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, soluția generalizată aparține spațiului $C^\infty(\overline{\Omega} \times (0, T))$, deci are loc regularitatea la frontieră. Se poate defini în mod analog o problemă abstractă neomogenă schimbîndu-se domeniul de definiție al operatorului $A(t)$. Rezultatele cele mai complete în această direcție se datorează lui Lions-Magenes. (*G.G.*)

procedeul Gram-Schmidt, v. **procesul Gram-Schmidt**

proces aditiv v. **integrala stochastică**

proces aleator v. **integrala stochastică**

proces cu creșteri independente v. **integrala stochastică**

proces gaussian v. **măsură gaussiană**

proces stochastic v. **integrala stochastică**

procesul Gram-Schmidt, procedeu prin care se asociază un reper ortonormal fiecărui reper al unui spațiu Hilbert finit-dimensional real sau complex V.

Sin.: *procedeul Gram-Schmidt.* În mod precis, dacă se notează prin $\mathrm{Rep}(V)$ mulțimea tuturor reperelor lui V, **p.G.S.** este aplicația

$$\mathrm{Rep}(V) \ni (u_1, \ldots, u_n) \mapsto (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{Rep}(V)$$

definită prin

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}, \\ v_2 = \dfrac{u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1\|}, \\ \vdots \\ v_n = \dfrac{u_n - \sum\limits_{i<n} \langle u_n, v_i\rangle v_i}{\left\| u_n - \sum\limits_{i<n} \langle u_n, v_i\rangle v_i \right\|}. \end{cases}$$

Amintim că un reper $(v_1, \ldots, v_n)$ al lui V se numește *ortonormal* dacă $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker. (*M.J.*)

produs infinit Fie $\{a_n\}$ un șir de numere reale. Fie p_n produsul $a_1 a_2 \ldots a_n$ al primilor n termeni ai șirului. Dacă șirul $\{p_n\}$ este convergent către numărul a, spunem că **p.i.** $\prod\limits_{n=1} a_n$ este convergent și are valoarea a. Unii autori impun condiția suplimentară $a \neq 0$, pentru a obține unele analogii cu teoria seriilor. Produsul $\prod (1 + u_n)$ este absolut convergent dacă produsul $\prod (1 + |u_n|)$ este convergent. Un produs absolut convergent este convergent, dar nu și reciproc. Un **p.i.** convergent care nu este absolut convergent se numește semiconvergent. (*S.M.*)

produs scalar v. **spațiu Hilbert**

produs tensorial v. **algebra Grassmann, produs tensorial topologic**

produs tensorial topologic Fie X și Y două spații liniare cu același corp al scalarilor. Vom nota $(X \times Y)^b$ mulțimea funcționalelor biliniare definite pe $X \times Y$. Această mulțime este un spațiu liniar în raport cu operațiile obișnuite cu funcțiile, *i.e.* dacă $f, g \in (X \times Y)^b$,

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

$$(\lambda f)(x, y) = \lambda f(x, y),$$

oricare ar fi elementele $x \in X$, $y \in Y$ și scalarul λ. Să considerăm acum spațiul liniar $((X \times Y)^b)^l$ al funcționalelor liniare definite pe $(X \times Y)^b$. Pentru $x \in X$, $y \in Y$ să notăm cu $x \otimes y$ elementul spațiului $((X \times Y)^b)^l$ dat de formula:

$$(x \otimes y)(f) = f(x, y), \quad \forall f \in (X \times Y)^b.$$

Subspațiul liniar generat în spațiul $((X \times Y)^b)^l$ de mulțimea elementelor de forma $x \otimes y$ se notează $X \otimes Y$ și se numește *produsul tensorial* al spațiilor X, Y. Să notăm cu h aplicația (numită *canonică*) a lui $X \times Y$ în $X \otimes Y$ dată de formula $h(x, y) = x \otimes y$. Dacă X și Y sînt spații local convexe, cea mai fină topologie local convexă pe $X \otimes Y$ pentru care aplicația canonică h este continuă se numește *topologia produs tensorial* (sau *topologia proiectivă*) pe $X \otimes Y$. Spațiul liniar $X \otimes Y$ înzestrat cu această topologie se numește **p. t. t.** al spațiilor X și Y. Dacă $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ sînt baze de vecinătăți ale originii în X și Y respectiv, atunci, notînd cu $S(V, W)$ acoperirea echilibrată și convexă a mulțimii $\{x \otimes y \mid x \in V,\ y \in W\}$, sistemul $\{S(V, W) \mid V \in \mathcal{V},\ W \in \mathcal{W}\}$ formează o bază de vecinătăți ale originii pentru topologia produs tensorial. Dacă $\mathcal{P}$ și $\mathcal{Q}$ sînt mulțimi dirijate de seminorme care definesc topologiile spațiilor X și Y respectiv, atunci topologia produs tensorial pe $X \otimes Y$ este definită de familia dirijată de seminorme $\{p \otimes q \mid p \in \mathcal{P},\ q \in \mathcal{Q}\}$, unde

$$(p \otimes q)(v) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{n} p(x_j)\, p(y_j) \;\middle|\; v = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j;\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Spațiul liniar $(X \otimes Y, Z)^l$ al operatorilor liniari definiți pe un produs tensorial $X \otimes Y$ a două spații liniare X, Y cu valori într-un spațiu liniar Z (cu aceeași scalari) este izomorf cu spațiul liniar $(X \times Y, Z)^b$ al operatorilor biliniari care aplică $X \times Y$ în Z, izomorfismul fiind dat de aplicația $U \to U \circ h$. Dacă X, Y, Z sînt spații local convexe, atunci prin aplicația precedentă, imaginea spațiului $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$ al operatorilor liniari și continui care aplică $X \otimes Y$ în Z este spațiul $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ al operatorilor biliniari și continui care aplică $X \times Y$ în Z. Dacă X și Y sînt spații local convexe separate, atunci și $X \otimes Y$ este un spațiu separat în raport cu topologia produs tensorial. În cazul cînd spațiile local convexe X, Y sînt metrizabile, atunci orice element v al completatului spațiului $X \otimes Y$ se reprezintă sub forma $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n$, unde $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de scalari cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ absolut convergentă, iar $\lim\limits_n x_n = 0$ și $\lim\limits_n y_n = 0$. Pe produsul tensorial $X \otimes Y$ a două spații local convexe X, Y se pot introduce și alte topologii. Printre acestea, *topologia inductivă* definită ca fiind cea mai fină topologie local convexă pe $X \otimes Y$ pentru care aplicația canonică $h: X \times Y \to X \otimes Y$ este continuă în fiecare variabilă. (*R.C.*)

produs vectorial v. **analiză vectorială**

produsul a două măsuri v. **măsură pe spațiu produs, măsură Radon produs**

produsul canonic al lui Weierstrass v. **funcție întreagă**

produsul de convoluție (a două funcții) v. **convoluția a două funcții**

produsul de convoluție (a două măsuri) v. **convoluția măsurilor Radon**

produsul de convoluție (al unei funcții cu o măsură Radon) v. **convoluția unei măsuri Radon cu o funcție**

produsul exterior v. **algebra Grassmann, formă diferențială** (în $\mathbb{R}^n$), **formă diferențială** (pe o varietate diferențiabilă)

produsul tensorial (a doi fibrați vectoriali) Dacă M este o varietate diferențiabilă de clasă C^r iar E și F doi fibrați vectoriali reali de clasă C^r peste M, **p.t.** $E \otimes F$ este fibratul vectorial real de clasă C^r peste M cu următoarele proprietăți: 1) Pentru orice punct $x \in M$, $(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$; 2) Pentru orice submulțime deschisă U a lui M, orice reper $(e_1, \ldots, e_p)$ al lui F peste U și orice reper $(f_1, \ldots, f_q)$ al lui F peste U produsele tensoriale $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, formează un reper în $E \otimes F$ peste U, unde $(e_i \otimes e_j)(x) := e_i(x) \otimes f_j(x)$ pentru orice punct $x \in U$. (*M.J.*)

produsul unei măsuri Radon ((vectoriale) cu o funcție continuă) v. **măsură Radon, măsură Radon vectorială**

proiector **1** Fie X un spațiu Hilbert. Dacă E este un subspațiu liniar închis al lui X, atunci orice element $x \in X$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = x' + x''$, cu $x' \in E$ și $x'' \in E^{\perp}$ (complementul ortogonal al lui E). Elementul x' se numește *proiecția* lui x pe E și se notează $x' = [E]x$; în acest caz are loc și egalitatea $x'' = [E^{\perp}]\,x$ deoarece $E^{\perp\perp} = E$. Operatorul $x \to [E]\,x$ se numește **p.** (mai precis, **p.** *hilbertian generat de* E) și se notează $[E]$. Orice **p.** este un operator autoadjunct care satisface condiția $[E]^2 = E$. Reciproc, dacă $P\colon X \to X$ este un operator autoadjunct care satisface condiția $P^2 = P$ atunci P este un **p.** și anume **p.** generat de **subspațiul liniar închis** $P(X)$ (v. și **măsură spectrală**). **2** Fie X un spațiu liniar reticulat. Dacă G este o componentă a lui X, atunci orice element $x \in X$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in G$ și $x_2 \in G^{\perp}$ (complementul ortogonal al lui G). Elementul x_1 se numește *proiecția* lui x pe G și se notează $x_1 = [G]x$; în acest caz are loc și egalitatea $x_2 = [G^{\perp}]\,x$ deoarece $G^{\perp\perp} = G$. Operatorul $x \to [G]\,x$ se numește **p.** (mai precis, **p.** *în sensul ordinei generat de* G) și se notează $[G]$. Operatorul $[G]$ este liniar, $[G]^2 = [G]$ iar din $\mathbf{0} \leqslant x \in X$ rezultă $\mathbf{0} \leqslant [G]x \leqslant x$. Dacă $x = \bigwedge\limits_{j \in J} x_j \left(\text{sau } x = \bigvee\limits_{j \in J} x_j\right)$, atunci

$$[G]\,x = \bigwedge_{j \in J} [G]\,x_j \left(\text{resp. } [G]\,x = \bigvee_{j \in J} [G]\;x_j\right).$$

Dacă $x = (o)\text{-}\lim\limits_{n} x_n$ (v. **convergența în sensul ordinei**), atunci $[G]x = (o)\text{-}\lim\limits_{n} [G]x_n$. Pentru orice element pozitiv $x \in X$ are loc egalitatea

$$[G]\,x = \sup\,\{y \in G \mid \mathbf{0} \leqslant y \leqslant x\}.$$

Dacă G_1 și G_2 sînt două componente, se pune $[G_1] \leqslant [G_2]$ dacă $[G_1]\,x \leqslant [G_2]\,x$ oricare ar fi $x \geqslant \mathbf{0}$. Următoarele trei condiții sînt echivalente: $[G_1] \leqslant [G_2]$; $G_1 \subset G_2$; $[G_1][G_2] = [G_1]$. Dacă X este un spațiu liniar σ-reticulat și $v \in X$, atunci mulțimea $(\{v\}^{\perp})^{\perp}$ (v. **complement ortogonal**) reprezintă cea mai mică componentă care conține elementul v iar **p.** generat de această componentă se notează $[v]$ și se numește **p.** *principal*. Pentru orice element pozitiv $x \in X$ are loc egalitatea

$$[v]\,x = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} \,(x \wedge n\,|v|).$$

Dacă $v_1, v_2 \in X$ și $v_1 \perp v_2$, atunci $[v_1 + v_2] = [v_1] + [v_2]$, iar condiția $v_1 \perp v_2$ este echivalentă cu condiția $[v_1]\,[v_2] = \mathbf{0}$. Dacă X este un spațiu liniar complet reticulat o aplicație $U\colon X \to X$ este un **p.** dacă și numai dacă are proprietățile: U este aditiv, $U^2 = U$, iar din $\mathbf{0} \leqslant x \in X$ rezultă $\mathbf{0} \leqslant U(x) \leqslant x$. Cînd operatorul U are proprietățile menționate, U reprezintă **p.** generat de componenta $G = \{x \mid U(x) = x\}$. (*R.C.*)

proiecția unei măsuri afine pe un subspațiu v. **măsuri afine și măsuri cilindrice**

proiecție v. **proiector**

proiecție (hilbertiană) v. **proiector 1**

proiecție (pe o componentă) v. **proiector 2**

proiecție stereografică v. **planul complex extins $\widetilde{\mathbf{C}}$, varietate diferențiabilă**

propagare de singularități Noțiunea de front de undă a permis obținerea unor rezultate de regularitate. Astfel, dacă A este un operator pseudodiferențial și char (A) varietatea sa caracteristică, are loc rezultatul general următor, care precizează proprietatea de pseudolocalitate a operatorilor pseudodiferențiali: $\mathrm{WF}(Au) \subset \mathrm{WF}(u) \subset \mathrm{WF}(Au) \cup \operatorname{char}(A)$. În particular, dacă operatorul A este eliptic, se obține $\mathrm{WF}(u) = \mathrm{WF}(Au)$ pentru orice distribuție, deci, proiectînd pe bază, sing supp u = sing supp Au (teorema de regularitate din cazul eliptic). Dacă $P = P(x, \mathrm{D})$ este un operator diferențial liniar cu coeficienții real analitici în mulțimea deschisă Ω, atunci $\mathrm{SS}(u) \subset \mathrm{SS}(P(x, \mathrm{D})\,u) \cup \operatorname{char} P$ pentru orice hiperfuncție $u \in \mathcal{B}(\Omega)$. În particular, pentru orice $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ are loc rezultatul: $\mathrm{WF}_A(u) \subset \mathrm{WF}_A(P(x, \mathrm{D})\,u) \cup \operatorname{char} P$, unde cu WF_A s-a notat frontul de undă analitic. Fie acum P un operator pseudodiferențial propriu suportat, cu simbol principal p, omogen real și cu $\mathrm{d}p(x, \xi) \neq 0$ pentru $p(x, \xi) = 0$ (P se numește *de tip principal real*). Atunci dacă u este o distribuție soluție a ecuației $Pu = f$, mulțimea $\mathrm{WF}(u) \setminus \mathrm{WF}(f)$ nu numai că este inclusă în char $P = p^{-1}(0)$, dar este invariantă la fluxul definit de cîmpul de vectori hamiltonian H_p în $p^{-1}(0) \setminus \mathrm{WF}(f)$. Acest fapt justifică denumirea de **p. s.**: singularitățile soluției se propagă de-a lungul bicaracteristicilor lui P. (*G.G.*)

proprietate care are loc μ-a.p.t. v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan, prelungirea măsurilor Radon**

proprietatea fugitivă în analiza constructivă, proprietate a unui șir $\{n_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ de numere întregi, luînd exclusiv valorile 0 și 1, constînd în faptul că nu se poate demonstra alternativa: sau $n_k = 1$ pentru un anume k sau $n_k = 0$ pentru orice k (Brouwer). Ex.: Fie $n_k = 0$ dacă $u^t + v^t \neq w^t$ pentru toți întregii u, v, w, t cu $0 < u, v, w \leqslant k$ și $3 \leqslant t \leqslant k$. Altfel, punem $n_k = 1$. Nu se poate demonstra că $n_k = 1$ pentru un anume k, deoarece aceasta ar infirma ultima teorema lui Fermat. Nu putem demonstra nici că $n_k = 0$ pentru orice k, deoarece aceasta ar demonstra teorema lui Fermat. (*S.M.*)

proprietatea interpolatorie v. **mulțime ordonată**

proprietatea intersecției binare, proprietate a unei familii $\{A_j\}_{j \in J}$ de submulțimi ale unei mulțimi E, care constă în faptul că pentru orice parte $H \subset J$ pentru care este îndeplinită condiția $A_{j'} \cap A_{j''} \neq \varnothing$, $\forall j', j'' \in H$, rezultă $\bigcap\limits_{j \in H} A_j \neq \varnothing$. (*R.C.*)

proprietatea intersecției finite O familie $\{A_i\}_{i \in I}$ de submulțimi ale mulțimii X se spune că are **p.i.f.** sau că este un *lanț de mulțimi* dacă orice subfamilie finită are intersecție nevidă. Ordonată prin incluziune, mulțimea familiilor cu **p.i.f.** este inductiv ordonată. Elementele maximale ale acestei mulțimi sînt ultrafiltrele lui X. (*Gh.Gr.*)

proprietatea Krein-Milman v. **proprietatea Radon-Nikodym**

proprietatea (N) v. **derivarea funcțiilor monotone**

proprietatea Radon-Nikodym Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură finită. Vom spune că un spațiu Banach X are **p.R.N.** în raport cu $(T, \mathcal{T}, \mu)$ dacă pentru orice măsură vectorială $m\colon \mathcal{T} \to X$, care are variație mărginită și este absolut continuă în raport cu μ există o funcție $f \in \mathcal{L}^1_X(\mu)$ astfel încît $m = f\mu$ $\left(i.e.\ m(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu \text{ pentru orice } E \text{ din } \mathcal{T}\right)$. Vom spune că X are **p.R.N.** dacă X are **p.R.N.** în raport cu orice spațiu cu măsura finită. Se arată că X are **p.R.N.** dacă și numai dacă are **p.R.N.** în raport cu $([0, 1], \Sigma, \lambda)$, unde λ este măsura Lebesgue pe mulțimile măsurabile Lebesgue Σ ale lui $[0, 1]$. Folosim mereu integrala Bochner. Se mai arată că X are **p.R.N.** dacă și numai dacă X este spațiu Gelfand, *i.e.* pentru orice funcție absolut continuă $f\colon [0, 1] \to X$ există derivata $f'(t)\lambda$-aproape pentru orice t din $[0, 1]$. Funcția f

se numește *absolut continuă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi punctele $0 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant 1$ cu proprietatea $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ avem $\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$. În continuare vom considera un spațiu Banach X și o mulțime nevidă D inclusă în X. Vom spune că D are proprietatea P dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încît orice element x din D se poate reprezenta sub forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ (seria converge în X), unde elementele x_n sînt în D, numerele $a_n > 0$ astfel încît $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ și $\|x - x_n\| \geqslant \varepsilon$ pentru orice n. Se spune că mulțimea D este *σ-dentabilă* dacă D nu are proprietatea P. Similar, vom spune D are proprietatea P' dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încît orice x din D se găsește în mulțimea $\overline{\text{co}}\,(D \setminus B(x, \varepsilon))$; aici $B(x, \varepsilon)$ este bila deschisă de centru x și rază ε și $\overline{\text{co}}\,(D \setminus B(x, \varepsilon))$ este acoperirea convexă închisă a mulțimii $D \setminus B(x, \varepsilon)$. Se spune că D este *dentabilă* dacă D nu are proprietatea P'. Orice mulțime slab compactă este dentabilă și orice mulțime dentabilă este σ-dentabilă.

Teorema Rieffel-Maynard-Huff-Davis-Phelps. Pentru orice spațiu Banach X următoarele afirmații sînt echivalente: 1) Spațiul X are **p.R.N.**; 2) Orice parte mărginită $D \subset X$ este dentabilă; 3) Orice parte mărginită $D \subset X$ este σ-dentabilă.

Se spune că un spațiu Banach X are *proprietatea Krein-Milman* dacă pentru orice mulțime convexă $D \subset X$ care este mărginită și închisă avem proprietatea $D = \overline{\text{co}}(\text{ext}(D))$. Aici $\text{ext}(D)$ este mulțimea punctelor extremale ale lui D.

Teorema lui Lindenstrauss. Dacă X are **p.R.N.** atunci X are și proprietatea Krein-Milman.

Teorema lui Stegall. Pentru un spațiu Banach X următoarele afirmații sînt echivalente: 1) Spațiul X^* are **p.R.N.**; 2) Spațiul X^* are proprietatea Krein-Milman (aici X^* este dualul algebrico-topologic al lui X).

Spații care au **p.R.N.**: 1) Spațiile reflexive; 2) Spațiile care sînt duale separabile de spații Banach (*i.e.* spații X de forma $X = Y^*$, unde Y este spațiu Banach și, în plus, în X există o mulțime numărabilă densă; 3) Spații care sînt duale slab compact generate (*i.e.* spații $X = Y^*$, unde Y este spațiu Banach și, în plus, există o submulțime $A \subset X^*$ care este slab compactă și X^* este spațiul vectorial închis generat de A în X^*); 4) Spațiile $l^1(I)$, unde I este o mulțime oarecare nevidă (în particular spațiile l^1), anume $l^1(I) = \left\{\{x_i\}_{i \in I} \,\middle|\, x_i \in \Gamma,\ \Gamma = \mathbb{R} \text{ sau } \mathbb{C},\ \text{și } \sum_{i \in I} |x_i| < \infty\right\}$ cu norma $\|x = \{x_i\}_i\| = \sum_{i \in I} |x_i|$. Pentru $I = \mathbb{N}$ se obține $l^1(\mathbb{N}) = l^1$; 5) Spațiile $L_X^p(\mu)$, unde $1 < p < \infty$ și X are **p.R.N.** Spații care nu au **p.R.N.**: 1) Spațiul $c_0 = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \Gamma,\ x_n \to 0\}$ cu norma $\|x = \{x_n\}_n\| = \sup_n |x_n|$; 2) Spațiul $c = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \Gamma,\ \{x_n\}_n \text{ este convergent}\}$ cu norma $\|x = \{x_n\}_n\| = \sup_n |x_n|$; 3) Spațiul $m = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{șirul } \{x_n\}_n \text{ este mărginit}\}$ cu norma $\|x = \{x_n\}_n\| = \sup_n |x_n|$; 4) Spațiul $L^1(\mu)$, unde μ este finită și nu este pur atomică; 5) Spațiul $L^\infty(\lambda)$, unde λ este măsura Lebesgue pe un interval compact oarecare în $\mathbb{R}$; 6) Spațiul $\mathcal{C}(X)$, unde X este spațiu compact separat, X infinită. Aici $\mathcal{C}(X) = \{f \colon X \to \Gamma \mid f \text{ este continuă}\}$ cu norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$. *(I.C.)*

pseudoconvexitate Teoria **p.** ocupă în prezent un loc central în analiza complexă pluridimensională. Punctul de plecare este furnizat de următoarea *Teoremă.* Pentru Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{C}^n$ condițiile următoare sînt echivalente: i) Funcția $\Omega \ni z \mapsto -\log d(z, \complement\Omega)$ este plurisubarmonică, unde $d(z, \complement\Omega) := \inf_{w \in \complement\Omega} \|z - w\|$, $\|\ \|$ fiind norma euclidiană în $\mathbb{C}^n$; ii) Ω admite o funcție de exhaustiune plurisubarmonică (v. **problema lui Levi, funcție plurisubarmonică**): iii) Ω admite o funcție de exhaustiune strict plurisubarmonică; iv) Pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$, mulțimea

$$\hat{K}_\Omega^P := \{z \in \Omega \mid u(z) \leqslant \sup_K u \text{ cînd } u \in P(\Omega)\}$$

este relativ compactă în Ω, unde $P(\Omega)$ este mulțimea tuturor funcțiilor plurisubarmonice pe Ω. În condiția i), norma euclidiană poate fi înlocuită cu orice funcție continuă $\delta \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ astfel încît $\delta(z) > 0$ cînd $z \neq 0$ și $\delta(\lambda z) = |\lambda|\, \delta(z)$ pentru orice $z \in \mathbb{C}^n$ și orice $\lambda \in \mathbb{C}$. Se numește *mulțime deschisă pseudoconvexă* (sau *domeniu pseudoconvex*) în $\mathbb{C}^n$ orice mulțime deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ care satisface condițiile echivalente ale teoremei precedente. Este elementar faptul că orice domeniu de olomorfie în $\mathbb{C}^n$ este o mulțime deschisă pseudoconvexă în $\mathbb{C}^n$. Întrebarea dacă orice mulțime deschisă pseudoconvexă este un domeniu de olomorfie este cunoscută sub numele de *problema lui Levi* (în $\mathbb{C}^n$). Această problemă admite în fapt un răspuns afirmativ. Demonstrația este neelementară și a fost obținută de Oka (1942) în cazul $n = 2$ și apoi, independent, de Bremerman, Norguet și Oka (1953) în cazul n oarecare (v. și **problema lui Levi**). Considerăm acum cazul unei mulțimi deschise Ω în $\mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasă C^2. Aceasta înseamnă că există o funcție reală $\rho \in C^2(U)$ definită pe o vecinătate deschisă U a lui $\overline{\Omega}$ astfel încît $\Omega = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}$ și astfel încît grad $\rho \neq 0$ pe $\partial\Omega$; vom spune în această situație că ρ este o funcție de definiție pentru Ω. Alegem o astfel de funcție de definiție; evident

$$\partial\Omega = \{z \in U \mid \rho(z) = 0 \quad \text{și} \quad \text{grad } \rho \neq 0\}.$$

Spațiul tangent geometric la $\partial\Omega$ într-un punct $z \in \Omega$ este dat de egalitatea v. **spațiu tangent geometric**)

$$T(\partial\Omega)_z^{\text{geom}} = \left\{w \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_i}(z)\, w_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial \bar{z}_j}(z)\, \overline{w}_j = 0\right\}.$$

Un vector tangent $w \in T(\partial\Omega)_z^{\text{geom}}$ se numește *vector tangent olomorf* dacă $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_i}(z)\, w_i = 0$; definiția nu depinde de alegerea lui ρ. Fie Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasă C^2 și ρ o funcție de definiție pentru Ω. Dacă $z \in U$, forma hermitiană

$$L\rho(z; w) = \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\, w_i \overline{w}_j, \quad w \in \mathbb{C}^n,$$

se numește *forma Levi* a lui ρ în punctul z. Se spune că Ω este un domeniu cu *frontiera pseudoconvexă* (resp. *strict pseudoconvexă*) dacă $L\rho(z; w) \geqslant 0$ (resp. $L\rho(z; w) > 0$) pentru orice $z \in \partial\Omega$ și orice vector tangent olomorf w la $\partial\Omega$ în punctul z astfel încît $w \neq 0$; aceste condiții nu depind de alegerea funcției de definiție ρ.

Teoremă. Fie $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ o mulţime deschisă cu frontiera de clasă C^2. Atunci Ω este un domeniu pseudoconvex dacă şi numai dacă Ω este un domeniu cu frontiera pseudoconvexă.
Dacă Ω este un domeniu cu frontiera strict pseudoconvexă, atunci Ω admite o funcţie de definiţie strict plurisubarmonică pe o vecinătate a lui $\partial\Omega$. Este interesant de semnalat aici analogia între **p.**, pe de o parte, şi convexitate reală, pe de altă parte. În fapt, o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cu frontiera de clasă C^2 şi cu funcţia de definiţie ρ este convexă dacă şi numai dacă este conexă şi satisface condiţia

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, v_i v_j \geqslant 0$$

pentru orice punct $x \in \partial\Omega$ şi orice vector tangent $v \in T(\partial\Omega)_x^{\text{geom}}$. De asemenea, dacă

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, v_i v_j > 0$$

cînd $x \in \Omega$ şi $v \in T(\partial\Omega)_x$, $v \neq 0$, atunci există o funcţie de definiţie ρ pentru Ω cu proprietatea că matricea $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}(z)\right)_{i,j}$ este pozitiv definită pentru orice punct $x \in \partial\Omega$. (*M.J.*)

pseudoimaginea unei măsuri Radon v. **dezintegrarea măsurilor Radon**

punct aderent (unei mulţimi într-un spaţiu topologic $\mathcal{X}$), punct pentru care intersecţia dintre orice vecinătate a sa şi acea mulţime este nevidă. Punctul x este *aderent* mulţimii A dacă şi numai dacă există un şir generalizat de elemente din A convergent către x. Dacă în $\mathcal{X}$ este îndeplinită prima axiomă de numărabilitate, atunci caracterizarea precedentă se face cu şiruri obişnuite. Dacă $\mathcal{X}$ este un spaţiu metric, x este aderent lui $A \subset \mathcal{X}$ dacă şi numai dacă distanţa dintre x şi A este zero. Mulţimea punctelor aderente mulţimii A se numeşte *aderenţa* lui A sau *închiderea* lui A şi se notează $\bar{A}$. Închiderea lui A este intersecţia tuturor mulţimilor închise care conţin pe A. Mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă $A = \bar{A}$. Dacă $\bar{A} = \mathcal{X}$ se spune că A este *densă* în $\mathcal{X}$ sau că este peste tot densă. Punctul x se numeşte *punct de acumulare* pentru mulţimea A dacă orice vecinătate a lui x conţine cel puţin un punct din A, diferit de x. Orice punct de acumulare este un **p.a.** Orice **p.a.** care nu aparţine mulţimii este punct de acumulare pentru mulţime. Mulţimea tuturor punctelor de acumulare pentru mulţimea A se numeşte *mulţimea derivată* a mulţimii A şi se notează A'. Mulţimea A' este închisă. Reuniunea dintre A şi A' este închiderea mulţimii A. Aplicaţia care fiecărei submulţimi a spaţiului topologic $\mathcal{X}$ îi asociază închiderea sa are următoarele proprietăţi caracteristice: i) $\overline{\varnothing} = \varnothing$; ii) $A \subset \bar{A}$; iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$; iv) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (v. şi **operator de închidere**). (*Gh.Gr.*)

punct aderent unui filtru v. **filtru convergent**

punct critic v. **spaţiu tangent**

punct de acumulare v. **punct aderent**

punct de acumulare la stînga (dreapta) Punctul $a \in \mathbb{R}$ este **p.a.s.** pentru $A \subset \mathbb{R}$ dacă pentru orice $\delta > 0$, intervalul $(a - \delta, a)$ conţine un punct din A. Definiţie similară pentru punct de acumulare la dreapta (intervalul $(a - \delta, a)$ se înlocuieşte cu $(a, a+\delta)$). (*S.M.*)

punct de densitate şi punct de dispersie (al unei mulţimi măsurabile) Fie $A \subset \mathbb{R}$, m măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}$. Punctul x este *de densitate* pentru A dacă $\lim\,[m(A \cap (x - h, x + k)) \,/\, (h + k)] = 1$ pentru $h \to 0^+ \leftarrow k$. Înlocuind 1 cu 0, obţinem definiţia punctului *de dispersie*. Aproape orice punct al lui A este de densitate pentru A şi de dispersie pentru $\complement A$.

punct de echilibru v. **centru**

punct de extrem condiţionat v. **extreme condiţionate**

punct de extrem relativ Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ şi $a \in I$, I interval în $\mathbb{R}$. Punctul a este de *maxim relativ* (sau *local*) pentru f dacă există o vecinătate V a lui a cu proprietarea $f(x) \leqslant f(a)$ pentru orice $x \in V \cap I$. Înlocuind $\leqslant$ cu $\geqslant$ se obţine definiţia punctului de *minim relativ*. Orice punct de maxim sau de minim relativ este un **p.e.r.** (sau *local*) pentru f. Într-un punct de extrem din interiorul intervalului I, în care f este derivabilă, derivata se anulează (*teorema lui Fermat*). Mulţimea valorilor luate de o funcţie în punctele de extrem este cel mult numărabilă. Conceptul se extinde la aplicaţii definite într-un spaţiu topologic, cu valori reale (v. şi **extreme locale**). (*S.M.*)

punct de extrem strict Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$, I interval în $\mathbb{R}^n$. Punctul $a \in I$ este de *maxim local strict* pentru f dacă există o vecinătate V a lui a cu proprietatea $f(x) < f(a)$ pentru orice $x \in V \cap I$. Înlocuind $<$ cu $>$ se obţine definiţia punctului de *minim local strict*. Orice punct de maxim strict sau de minim strict este un punct de *extrem local strict* pentru f. Teorema lui Sierpiński afirmă că mulţimea **p.e.s.** din I pentru f este cel mult numărabilă (v. şi **extreme locale**). (*S.M.*)

punct dublu v. **spaţiu ℂ-analitic**

punct extremal (al unei mulţimi convexe E într-un spaţiu liniar X), punct $x_0 \in E$ cu proprietatea că dacă x_0 aparţine unui segment conţinut în E, atunci x_0 coincide cu unul din cele două puncte care determină segmentul. Dacă X este un spaţiu local convex separat real, iar E este o submulţime convexă şi compactă a lui X, atunci mulţimea E coincide cu închiderea acoperirii convexe a mulţimii **p.e.** ale mulţimii E (*teorema Krein-Milman*). (*R.C.*)

punct frontieră (pentru o mulţime A într-un spaţiu topologic $\mathcal{X}$), punct care este aderent atît mulţimii cît şi complementarei ei. Mulţimea **p.f.** pentru A se numeşte *frontiera* lui A şi se notează ∂A sau $\mathrm{fr}(A)$. Frontiera mulţimii A coincide cu frontiera lui $\mathcal{X} \setminus A$. Frontiera mulţimii A este formată din punctele aderente lui A care nu sînt puncte interioare pentru A. Reuniunea dintre A şi ∂A este închiderea lui A. Interiorul mulţimii A este format din acele puncte ale lui A care nu sînt **p.f.** pentru A. (*Gh.Gr.*)

punct frontieră (pentru o mulţime convexă) v. **spaţiu liniar**

punct hiperbolic, punct staţionar x_0 (soluţie constantă, punct de echilibru) al unui sistem dinamic $x' = f(x)$, $f(x_0) = 0$ cu proprietatea că matricea $(\mathrm{D}f)(x_0)$ $\left(\text{cu altă notaţie, } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\text{, matricea jacobiană}\right)$ are toate valorile proprii cu părţile reale nenule. Fiecărui **p.h.** i se asociază mulţimea invariantă stabilă, formată din traiectoriile care au pe x_0 drept mulţime ω-limită şi mulţimea invariantă instabilă, formată din traiectoriile pentru care x_0 este mulţime α-limită. (*A.H.*)

punct interior (pentru o mulţime într-un spaţiu topologic), punct pentru care mulţimea constituie o vecinătate. Mulţimea **p.i.** mulţimii A se numeşte *interiorul* lui A şi se notează int A sau $\mathring{A}$. Interiorul unei mulţimi este o mulţime deschisă şi este reuniunea mulţimilor deschise incluse în acea mulţime. Interiorul mulţimii A este format din acele puncte ale lui A care nu sînt puncte de acumulare pentru $\complement A$. (*Gh.Gr.*)

punct izolat Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu topologic şi $A \subset \mathcal{X}$. Punctul $x \in A$ se numeşte **p.i.** al mulţimii A dacă există V o vecinătate a lui x astfel încît $V \cap A = \{x\}$. Dacă $A = \mathcal{X}$ se va spune că x este un **p.i.** al lui $\mathcal{X}$. Un spaţiu topologic în care nu există **p.i.** se numeşte *spaţiu topologic perfect*. O mulţime închisă şi fără **p.i.** se numeşte *mulţime perfectă*. O mulţime este perfectă dacă şi numai dacă coincide cu mulţimea punctelor sale de acumulare. (*Gh.Gr.*)

punct Lebesgue al unei funcţii Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă în raport cu măsura Lebesgue μ pe $\mathbb{R}$. Atunci există o mulţime μ-neglijabilă $M \subset \mathbb{R}$ astfel încît orice punct x din $\mathbb{R} \setminus M$ este *punct Lebesgue* al lui f, *i.e.*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_{A(h)} |f(x+t) - f(x)| \, d\mu(t)}{h} = 0,$$

unde $A(h) = [0, h]$, dacă $h > 0$ şi $A(h) = [h, 0]$, dacă $h < 0$. Altă definiţie: Fie T o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^k$, μ măsura Lebesgue pe T şi $f : T \to \mathbb{R}$ o funcţie μ-integrabilă. Atunci există o mulţime μ-neglijabilă $M \subset T$ astfel încît orice punct a din $T \setminus M$ este *punct Lebesgue* al lui f, *i.e.* avem

$$\lim_{n} \frac{\int_{C_n} |f(x) - f(a)| \, d\mu(x)}{\mu(C_n)} = 0,$$

unde $\{C_n\}_n$ este un şir de cuburi centrate în a (v. **derivarea măsurilor**) cu $\mu(C_n) \xrightarrow[n]{} 0$. În ambele cazuri, mulţimea L a punctelor Lebesgue ale lui f se numeşte *mulţimea Lebesgue* a lui f. Se arată că L include mulţimea punctelor de continuitate ale lui f. Se vede că noţiunile de punct Lebesgue şi mulţime Lebesgue pot fi date pentru o funcţie f care este numai măsurabilă în raport cu măsura Lebesgue. Luînd, în particular, drept f funcţia caracteristică a unei mulţimi măsurabile Lebesgue în $\mathbb{R}$, obţinem alte rezultate. Fie deci $E \subset \mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue şi d în $\overline{\mathbb{R}}_+$. Vom spune că E are *densitate d într-un punct* x din $\mathbb{R}$ dacă

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\mu(E \cap [x-h, x+h])}{2h} = d.$$

Aici μ este măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$. Să notăm prin $\varphi(E)$ mulţimea acelor puncte x din $\mathbb{R}$ cu proprietatea că E are densitatea $d = 1$ în x. De asemenea, să notăm prin $\psi(E)$ mulţimea acelor puncte din $\mathbb{R}$ cu proprietatea că E are densitatea $d = 0$ în x. *Teorema de densitate a lui Lebesgue* afirmă că avem

$$\mu(E \Delta \varphi(E)) = 0 \quad \text{şi} \quad \mu([\mathbb{R} \setminus E) \Delta \psi(E)) = 0.$$

Aici $U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$. (*I.C.*)

punct limită (al unui şir) v. **şir numeric**

punct limită (al unui şir generalizat) Fie X un spaţiu topologic, $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ un şir generalizat în $\mathcal{X}$ şi $x \in \mathcal{X}$. Se spune că x este **p.l.** al şirului generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ dacă pentru orice vecinătate V a lui x şi pentru orice $\delta \in \Delta$ există $\delta' \in \Delta$, $\delta' \geq \delta$ astfel ca $x_{\delta'} \in V$. Punctul x este **p.l.** al şirului $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ dacă şi numai dacă există un subşir al lui $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, convergent către x. Mulţimea **p.l.** ale şirului $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este $\bigcap_{\delta \in \Delta} \overline{\{x_{\delta'} \mid \delta' \geq \delta\}}$. (*Gh.Gr.*)

punct α-limită v. **mulţime α-limită**

punct ω-limită v. **mulţime ω-limită**

punct recurent (relativ la o mulţime şi o transformare) v. **teorie ergodică**

punct regulat v. **spaţiu tangent**

punct simplu v. **spaţiu $\mathbb{C}$-analitic**

punct singular (al soluţiei unei ecuaţii diferenţiale) Dacă f este olomorfă în vecinătatea unui punct (z_0, w_0), există o funcţie w olomorfă în vecinătatea lui z_0, cu $w(z_0) = w_0$, $w'(z) = f(z, w(z))$ pentru orice z dintr-o vecinătate a lui z_0; această funcţie este unică, este reprezentată de o serie de puteri şi orice prelungire analitică a acestei serii este tot o soluţie a ecuaţiei. Soluţiile globale astfel obţinute pot avea **p.s. P.s.** ale soluţiei care nu depind de condiţiile iniţiale se numesc **p.s.** *fixe* iar cele care depind de condiţiile iniţiale se numesc **p.s.** *mobile*. Soluţiile ecuaţiilor diferenţiale liniare nu admit puncte **p.s.** mobile. O ecuaţie de forma $w' = (P(z,w))/(Q(z,w))$, unde P şi Q sînt polinomiale în raport cu al doilea argument care nu admite puncte critice mobile are în mod necesar forma $w' = a_0(z) w^2 + a_1(z) w + a_2(z)$, deci este o ecuaţie Riccati. (*A.H.*)

punct singular (al soluţiei unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare) Se numeşte *soluţie* a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare **definit** de o funcţie A dată pe un domeniu D din planul complex cu valori matrici o funcţie $w : \widetilde{D} \subset \subset D \to \mathbb{C}^n$ olomorfă în $\widetilde{D} \subset D$ şi astfel încît $w'(z) = A(z) w(z)$ pentru orice $z \in \widetilde{D}$. Dacă D este simplu conex şi A este olomorfă în D, atunci pentru orice z_0 din D, w_0 din $\mathbb{C}^n$ există o soluţie a sistemului definită pe întreg domeniul D, verificînd $w(z_0) = w_0$; două soluţii care coincid în z_0, coincid peste tot în D. Dacă A este olomorfă în $\Omega = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \sigma\}$, ($\Omega$ nu este simplu conex), există o funcţie S cu valori matrici, olomorfă pe Ω şi o matrice constantă B, astfel încît funcţia cu valori matrici $W(z) = S(z) \exp(B\varphi(z))$, unde φ este *o funcţie logaritmică* pe $\Omega' = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \sigma$, $\operatorname{Im}(z - z_0) \neq 0$ dacă $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0\}$ este o soluţie a ecuaţiei; în general punctul z_0 este **p.s.** pentru funcţia S. Punctul z_0 se numeşte **p.s.** *regulat* dacă în z_0 funcţia S are cel mult o singularitate polară (pol). Dacă în punctul z_0 funcţia S are un **p.s.** esenţial, z_0 se numeşte **p.s.** *neregulat*. Dacă funcţia A are în z_0 un pol de ordinul întîi, punctul z_0 este **p.s.** regulat; reciproca nu este întotdeauna adevărată. Fiind dată ecuaţia diferenţială

$$w^{(n)} + a_1(z) w^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(z) w' + a_n(z) w = 0$$

se asociază sistemul

$$w_1' = (1/(z - z_0)) w_2, \ldots, w_k' = (1/(z - z_0)) w_k + (1/(z - z_0)) w_{k+1},$$
$$k = 2, \ldots, n-1,$$
$$w_n' = -(z - z_0)^{n-1} a_n(z) w_1 - (z - z_0)^{n-2} a_{n-1}(z) w_2 - \ldots$$
$$\ldots (z - z_0) a_2(z) w_{n-1} + \left[\frac{n-1}{z - z_0} - a_1(z)\right] w_n.$$

Dacă funcţia a_k are în z_0 un pol de ordin cel mult k, atunci coeficienţii sistemului asociat au în z_0 un pol de ordinul întîi, deci z_0 este un **p.s.** regulat. *Teorema lui Fuchs* afirmă că dacă z_0 este un **p.s.** regulat, atunci z_0 este pol de ordin cel mult k pentru funcţia a_k. Dacă funcţia A este olomorfă în $\Omega = \{z \mid |z| > a\}$ se asociază sistemul

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{\xi^2} A\left(\frac{1}{\xi}\right) u, \quad \text{definit în } \Omega = \left\{\xi \mid |\xi| < \frac{1}{a}\right\}.$$

Punctul $z = \infty$ se numește **p.s.** regulat pentru sistemul definit de A dacă punctul $\xi = 0$ este **p.s.** regulat pentru sistemul asociat. Pentru ca $z = \infty$ să fie **p.s.** regulat este suficient ca $z = \infty$ să fie un zero pentru funcția A. Pentru o ecuație de ordin n, $z = \infty$ este un **p.s.** regulat dacă și numai dacă $z^k a_k(z)$ este olomorfă în $z = \infty$ (a_k are în $z = \infty$ un zero de ordin k). O ecuație se numește *de tip Fuchs* dacă are punctele distincte $z_1, z_2, \ldots, z_m$, ∞ drept **p.s.** regulate și nu mai are alte **p.s.**; condiția necesară și suficientă ca o ecuație să fie de tip Fuchs este c

$$a_k(z) = \prod_{j=1}^{m} (z - z_j)^{-k}\, b_k(z),$$

b_k fiind funcție polinomială de grad cel mult $k(m-1)$. (*A.H.*)

punct singular algebric v. **suprafața riemanniană a unei funcții analitice globale**

punct singular aparent v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

punct singular esențial v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

punct singular fix v. **punct singular** (al soluției unei ecuații diferențiale)

punct singular izolat v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

punct singular mobil v. **punct singular** (al soluției unei ecuații diferențiale)

punct singular neregulat v. **punct singular** (al soluției unui sistem de ecuații diferențiale)

punct singular regulat v. **punct singular** (al soluției unui sistem de ecuații diferențiale)

punct singular transcendent v. **suprafața riemanniană a unei funcții analitice globale**

punct staționar v. **centru**

punctul de la infinit v. **planul complex extins** $\widetilde{\mathbb{C}}$

puterea exterioară (a unui fibrat vectorial) Dacă M este o varietate diferențiabilă de clasă C^r, E un fibrat vectorial real de clasă C^r peste M și m un întreg $\geqslant 0$, a m-a **p.e.** a lui E este fibratul vectorial real $\Lambda^m E$ de clasă C^r peste M cu proprietățile următoare: 1) Pentru orice punct $x \in M$, $(\Lambda^m E)_x = \Lambda^m(E_x)$; 2) Pentru orice submulțime deschisă U a lui M și orice reper $(e_1, \ldots, e_p)$ al lui E peste U, produsele exterioare $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant p$, formează un reper în $\Lambda^m E$ peste U, unde $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m})(x) := e_{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge e_{i_m}(x) \in \Lambda^m(E_x)$ pentru orice $x \in U$. Notăm că dacă fibratul E este de rang p, atunci fibratul $\Lambda^m E$ este de rang $\binom{p}{m}$ (v. **algebra Grassmann**). În mod similar se definește **p.e.** a unui fibrat vectorial complex. (*M.J.*)

R

radicalul unei algebre (comutative cu unitate), intersecția tuturor idealelor maximale ale algebrei. Dacă X este o algebră Banach complexă, comutativă, unitară, atunci radicalul algebrei X coincide cu mulțimea tuturor elementelor x ale lui X pentru care $\lim_n \sqrt[n]{\| x^n \|} = 0$. Se numește *algebră Banach semi-simplă* o algebră Banach complexă, comutativă, unitară, al cărui radical se reduce la elementul nul. (*R.C.*)

ramură uniformă a funcției logaritm v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă)

raport anarmonic v. **transformare omografică**

rază de convergență (a unei serii de puteri) v. **serie de puteri**

reducerea la forma canonică și clasificarea ecuațiilor cu derivate parțiale liniare, cvasiliniare de ordin 2 (în cazul a două variabile independente) Fie ecuația

$$A(x, y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

o ecuație cvasiliniară de ordin 2, coeficienții A, B, C avînd derivate continue de ordin 2 într-o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^2$. Cu ajutorul unei schimbări de variabile $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, astfel încît jacobianul $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$, ecuația considerată se reduce la unul din următoarele trei tipuri:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \widetilde{F}\left(\xi, \eta, u, \dfrac{\partial u}{\partial \xi}, \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ (*ecuație de tip hiperbolic*);

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \widetilde{\ }\left(\xi, \eta, u, \dfrac{\partial u}{\partial \xi}, \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ (*ecuație de tip eliptic*);

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \widetilde{F}\left(\xi, \eta, u, \dfrac{\partial u}{\partial \xi}, \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ (*ecuație de tip parabolic*),

după cum ecuația caracteristicilor

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

are două soluții independente (cazul $B^2 - AC > 0$), una singură (cazul $B^2 = AC$), sau două soluții complex conjugate (cazul $B^2 - AC < 0$). Reducerea la forma canonică este locală. (*G.G.*)

reducerea la integrarea pe spații local compacte Fie T o mulțime nevidă și $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T. Atunci (v. **reprezentarea laticilor booleene**), există un spațiu topologic S care este local compact și total neconex, precum și un izomorfism boolean $h: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, unde $\mathcal{A}$ este mulțimea părților compacte și deschise ale lui S. De obicei, spațiul S se numește *spațiul stonian* atașat lui $\mathcal{C}$. Acest spațiu de reprezentare S intervine în

Teorema lui Kakutani. Fie T o mulțime, $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T, X un spațiu Banach și $m: \mathcal{C} \to X$ o măsură numărabil aditivă cu variație finită. Atunci există un spațiu local compact și total neconex S, precum și o măsură vectorială boreliană unică cu variație finită $n: \mathcal{B} \to X$, unde $\mathcal{B}$ este semitribul părților boreliene relativ compacte ale lui S, cu proprietățile: 1) Pentru orice pereche de spații Banach E, F astfel încît X se scufundă în $\mathcal{L}(E, F)$ (v. **integrala Bochner**) și pentru orice $1 \leqslant p < \infty$ spațiile Lebesgue $L^p_E(m)$ și $L^p_E(n)$ sînt izomorfe prin aplicația $H_p: L^p_E(m) \to L^p_E(n)$; 2) În cazul particular cînd $p = 1$, pentru orice $\widetilde{f} \in L^1_E(m)$, notăm $\widetilde{g} = H_1(\widetilde{f})$. Atunci avem $\int f dm = \int g\, dn$. (*I.C.*)

regula lui L'Hôpital v. **teoremele lui L'Hôpital**

regulator de convergență v. **convergența în sensul ordinei**

relația lui Legendre v. **funcție eliptică**

relația lui Parseval v. **spațiu Hilbert**

relație de echivalență măsurabilă (în raport cu o măsură Radon) O relație de echivalență R pe un spațiu topologic X se numește *relație de echivalență separată* dacă spațiul topologic cît X/R este separat. Fie X un spațiu local compact și μ o măsură Radon pozitivă pe T. O relație de echivalență R pe T se numește *relație de echivalență măsurabilă în raport cu măsura Radon* μ (sau *relație de echivalență* μ*-măsurabilă*) dacă mulțimea acelor compacte $K \subset T$ pentru care relația R_K indusă de R pe K este separată este μ-densă. De exemplu, dacă B este un spațiu topologic separat și $p: X \to B$ este o aplicație continuă, atunci relația de echivalență pe X dată prin $xRy :\Leftrightarrow p(x) = p(y)$ este μ-măsurabilă. Fie T un spațiu local compact cu bază numărabilă, μ măsură Radon pozitivă pe T și R o relație de echivalență μ-măsurabilă pe T. Atunci, există o submulțime μ-măsurabilă S a lui T astfel încît pentru orice t din T, mulțimea $\widetilde{t} \cap S$ conține exact un punct (unde $\widetilde{t}$ este clasa de echivalență a lui t). (*I.C.*)

relație de echivalență separată v. **relația de echivalență măsurabilă** (în raport cu o măsură Radon)

relație de ordine v. **mulțime ordonată**

relație de preordine v. **mulțime ordonată**

reper v. **orientare** (a unui spațiu vectorial real finit-dimensional)

reper canonic (al lui $\mathbb{R}^n$) v. **orientare** (a unui spațiu vectorial real finit-dimensional)

reper local v. **fibrat vectorial**

reprezentare conformă, v. **transformare conformă**

reprezentarea exponențială (a unui număr complex) v. **logaritmul complex**

reprezentarea laticilor booleene Orice algebră de mulțimi $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(T)$, $T \neq \emptyset$, devine latice booleană, operațiile și elementele speciale fiind definite astfel: a) $\mathbf{0} = \emptyset$ și $\mathbf{1} = T$; b) $A \vee B = A \cup B$ și $A \wedge B = A \cup B$ pentru

orice A și B din $\mathcal{A}$; c) $A^* = \complement A = T \setminus A$, pentru orice A din $\mathcal{A}$. Acest exemplu este arhetipal, în sensul că orice algebră booleană este de acest tip. Anume, avem

Teorema de reprezentare a lui Stone. Orice latice booleană $(A, \leqslant)$ este izomorfă cu o algebră $\mathcal{A}$ de părți ale unei mulțimi T.

În mod explicit, fiind dată o latice booleană $(A, \leqslant)$, există o mulțime nevidă T, o algebră $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(T)$ și o aplicație $h: A \to \mathcal{A}$ care este *izomorfism de latici booleene, i.e.* este bijectivă și, pentru orice x și y din A, are proprietățile: i) $h(x \wedge y) = h(x) \cap h(y)$; ii) $h(x \vee y) = h(x) \cup h(y)$; iii) $h(x^*) = T \setminus h(x)$. Să considerăm o latice booleană $(A, \leqslant)$. O submulțime nevidă $B \subset A$ se numește *ideal* al lui A dacă are proprietățile: a) Pentru orice x, y din B, avem $x \vee y \in B$; b) Pentru orice x din B și orice y din A cu $y \leqslant x$, rezultă $y \in B$. Este clar că dacă $\mathcal{A}$ este o algebră de părți ale lui T, atunci un ideal $\mathcal{B}$ al lui $\mathcal{A}$ este exact un clan ereditar inclus în $\mathcal{A}$. Cu atît mai mult un trib ereditar inclus în $\mathcal{A}$ este deci un ideal al lui $\mathcal{A}$. Dacă B este un ideal al unei latici booleene A și $B \neq A$, se introduce pe A relația de echivalență $\sim$ dată astfel: $x \sim y :\Leftrightarrow x + y \in B$, unde $x + y = (x \wedge y^*) \vee (y \wedge x^*)$. Această relație de echivalență generează mulțimea cît $\widetilde{A} = A/B$ care este de asemenea latice booleană, după cum urmează: 1) Cel mai mic element este $\widetilde{0}$ iar cel mai mare element este $\widetilde{1}$; 2) Dacă $\sim$ și $\widetilde{y}$ sînt în $\widetilde{A}$, atunci $\widetilde{x} \vee \widetilde{y} := \widetilde{x \vee y}$, $\widetilde{x} \wedge \widetilde{y} := \widetilde{x \wedge y}$ și $(\widetilde{x})^* := \widetilde{x^*}$. Am notat, pentru orice x din A, prin $\widetilde{x}$ clasa lui x. Vom numi pe $\widetilde{A}$ *latice booleană cît.* O *σ-latice booleană* este o latice booleană A cu următoarea proprietate suplimentară: pentru orice șir $\{x_n\}_n$ de elemente din A există $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} := \bigvee_n x_n$. Este clar că o σ-algebră de părți ale unei mulțimi T devine σ-latice booleană cu structura de latice booleană introdusă mai sus.

Teorema de reprezentare Loomis-Sikorski. Orice σ-latice booleană A este izomorfă cu o latice booleană cît de forma $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, unde $\mathcal{A}$ este o σ-algebră de părți ale unei mulțimi T și $\mathcal{B}$ este un trib ereditar inclus în $\mathcal{A}$. Mai precis, fiind dată o σ-latice booleană $(A, \leqslant)$ există o mulțime nevidă T, o σ-algebră $\mathcal{A}$ de părți ale lui T, un trib ereditar $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, precum și un izomorfism de latici booleene $h: A \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$.

Teorema de reprezentare a lui Stone. Orice latice booleană A este izomorfă cu mulțimea părților compacte și deschise ale unui spațiu topologic compact avînd o bază formată din mulțimi simultan închise și deschise.

Cu alte cuvinte, dacă $(A, \leqslant)$ este latice booleană, există un spațiu topologic compact T avînd o bază de mulțimi simultan închise și deschise și un izomorfism de latici booleene $h: A \to \mathcal{A}$. Aici $\mathcal{A}$ este laticea booleană a tuturor mulțimilor compacte și deschise din T.

Teorema de reprezentare a lui Stone (varianta necompactă). Se consideră o mulțime nevidă T și un clan $\mathcal{C}$ de părți ale lui T. Atunci există un spațiu topologic local compact S care are o bază formată din mulțimi închise și deschise, precum și un izomorfism $h: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, unde $\mathcal{A}$ este mulțimea tuturor părților compacte și deschise ale lui S. Mai precis, h este bijecție și pentru orice A, B din $\mathcal{C}$, satisface relațiile

$$1)\ h(\emptyset) = \emptyset;\ 2)\ h(A \cup B) = h(A) \cup h(B);$$

$$3)\ h(A \cap B) = h(A) \cap h(B);\ 4)\ h(A \setminus B) = h(A) \setminus h(B). \quad (I.C.)$$

reprezentarea numerelor reale într-o bază Fie $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale, $b \in \mathbb{N}$, $B = \{0, 1, ..., b-1\}$ şi $B_k = B$, $\forall k \in \{0, 1, ...\}$. Fie $A_n = \prod_{k=0}^{n} B_k$ şi pe A_n ordinea lexicografică: $(a_0, ..., a_n) < (a'_0, ..., a'_n) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, ..., n\}$ astfel ca $a_k < a'_k$ şi $a_i = a'_i$, $\forall i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Fie funcţia $f_n : A_n \to \{0, 1 ..., b^{n+1} - 1\}$ definită prin $f_n(a_0, ..., a_n) = a_n b^0 + ... + a_0 b^n$. Teorema următoare asigură posibilitatea şi unicitatea scrierii unui număr natural în baza b: Funcţia f_n este un izomorfism de mulţimi ordonate între A_n şi $\{0, 1, ..., b^{n+1} - 1\}$. Pentru scrierea unui număr real şi pozitiv în baza b fie $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ şi $C = \mathbb{N}_0 \times \prod_{k=1}^{\infty} B_k$. Fie $F : C \to [0, +\infty)$ definită prin $F(a_0, a_1, ..., a_n, ...) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$. Teorema următoare descrie şi asigură reprezentarea unui număr real şi pozitiv în baza b: Aplicaţia F este surjectivă şi pentru $\alpha \in [0, \infty)$ ecuaţia $F(x) = \alpha$ are o singură soluţie $x \in C$ dacă $\alpha \neq \frac{k}{b^n}$, $\forall k, n \in \mathbb{N}_0$ şi două soluţii dacă α este de forma $\frac{k}{b^n}$. Dacă $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{b^n}$ se spune că α este scris în baza b (se presupune că a_0 este scris în baza b). Dacă în baza b numărul α se scrie $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$ şi dacă există $s_0, q \in \mathbb{N}$, astfel ca $a_{s+q+i+1} = a_{s+i}$, $\forall i \in \{0, 1, ..., q\}$, $\forall s \in \mathbb{N}, s \geqslant s_0$, se spune că α se reprezintă *periodic* în baza b. Un număr $\alpha \in \mathbb{R}_+$ se reprezintă periodic în baza b dacă şi numai dacă este raţional. *(Gr.Gr.)*

restricţia unei măsuri Radon la o mulţime v. **suportul unei măsuri Radon**

reţea (relativă la o măsură) v. **derivarea măsurilor**

reziduu Fie Ω o mulţime deschisă în planul complex $\mathbb{C}$ şi f o funcţie olomorfă pe Ω. Dacă $a \in \complement\,\Omega = \mathbb{C} \setminus \Omega$ este un punct singular izolat al lui f, atunci există un număr $\rho > 0$ astfel încît discul puncturat $\Delta(a, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < \rho\}$ să fie conţinut în Ω. Rezultă că funcţia f admite o dezvoltare Laurent unică $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ valabilă pe $\Delta(a, \rho)$. Pentru calculul coeficienţilor a_n se pot utiliza formulele

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \; n \in \mathbb{Z},$$

unde r este un număr real cuprins strict între 0 şi ρ, în rest arbitrar. Ca de obicei, cercul $|z-a| = r$ se consideră înzestrat cu orientarea canonică, deci integrala precedentă poate fi calculată folosind parametrizarea standard: $z = a + re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. **R.** lui f în punctul a este numărul complex Rez $(f;a)$ definit prin egalitatea

$$\mathrm{Rez}(f;a) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z)\, dz,$$

$0 < r < \rho$ (v. şi **suprafaţă riemanniană**). De pildă, dacă a este *punct singular aparent*, atunci Rez $(f;a) = 0$. De asemenea, dacă a este un *pol* simplu al lui f, atunci

$$\mathrm{Rez}(f;a) = \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} (z-a) f(z).$$

Mai general, dacă a este pol de ordin p al lui f, atunci

$$\mathrm{Rez}(f;a) = \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} g^{(p-1)}(z),$$

unde $g(z) = \frac{(z-a)^p f(z)}{(p-1)!}$. În cazul cînd a este un punct singular esenţial nu există procedee generale eficiente pentru calculul **r.** lui f în punctul a. *Teorema* **r.** Fie f o funcţie olomorfă pe mulţimea deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}$ şi fie K un compact în $\mathbb{C}$, cu frontieră de clasă C^1 pe porţiuni, avînd proprietăţile următoare: 1) Mulţimea $K \cap \complement\Omega$ este finită; 2) Punctele frontieră ale lui K sînt conţinute în Ω. Atunci are loc formula

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in K} \mathrm{Rez}(f;a),$$

unde ∂K este bordul orientat al lui K.

Teorema **r.** permite deci calculul integralei $\int_{\partial R} f(z)\, dz$ cu ajutorul **r.** lui f în punctele sale singulare izolate conţinute în K. În particular, această teoremă poate fi utilizată pentru calculul unor integrale definite reale. Procedeul acesta, cunoscut sub numele de *metoda* **r.**, se utilizează în situaţii cînd procedeele uzuale, bazate pe calculul de primitive în termeni de funcţii elementare, sînt fie laborioase, fie inaplicabile. Ex.: 1° Fie R o funcţie raţională în două variabile reale x şi y, presupusă fără poluri pe cercul $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, *i.e.* avînd proprietatea că există polinoame P şi Q în x şi y astfel încît $Q(x,y) \neq 0$ cînd $(x,y) \in S^1$ şi astfel încît $R = P/Q$. Se pune problema să calculăm integrala $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$. Folosind parametrizarea standard $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, a cercului S^1, avem $d\theta = \frac{dz}{iz}$ pe S^1, deci

$$I = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right) d\theta =$$

$$= \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz}.$$

Din teorema **r.** se obţine pentru calculul lui I formula

$$I = 2\pi \sum_{a \in K} \mathrm{Rez}(f;a),$$

unde f este funcția rațională $f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ și $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$; din ipoteză rezultă că f nu are poluri pe $S^1 = \partial K$, deci teorema **r.** este aplicabilă. 2° Considerăm integrala improprie $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$. Funcția $\frac{\sin x}{x}$, considerată egală cu 1 în punctul $x = 0$, este continuă pe intervalul $[0, \infty)$, dar nu este absolut integrabilă pe acest interval. Totuși integrala improprie $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ este convergentă (acest lucru poate fi obținut simplu cu ajutorul criteriului lui Abel). Vom arăta aici acest fapt și vom calcula efectiv valoarea lui I folosind metoda **r.** Considerăm funcția $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, definită și olomorfă pe $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pentru $0 < r < R < \infty$, considerăm compactul $K_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r \leqslant |z| \leqslant R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Din teorema **r.** rezultă că $\int_{\partial K_{r,R}} f(z)\, dz = 0$, deci $2i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx + I(R) - I(r) = 0$, unde pentru orice $\rho > 0$,

$$I(\rho) := \int_{\substack{|z|=\rho \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = i \int_0^\pi e^{-\rho\sin\theta + i\rho\cos\theta}\, d\theta.$$

Este clar că $\lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ r > 0}} I(r) = i\pi$. Pe de altă parte, deoarece $\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin\theta}{\theta} \leqslant 1$ pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, se vede că $\lim\limits_{R \to \infty} |I(R)| = 0$. Aceasta înseamnă că integrala improprie $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ este convergentă și că $I = \frac{\pi}{2}$. 3° *Integralele Fresnel.* Considerăm funcția întreagă $f(z) = e^{-z^2}$. Pentru orice $R > 0$ considerăm mulțimea compactă

$$K_R := \left\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant |z| \leqslant R,\ 0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Din teorema **r.** rezultă $\int_{K_R} f(z)\, dz = 0$, deci

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{\gamma_R} e^{-z^2}\, dz = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-it^2}\, dt,$$

unde γ_R este arcul pe cercul $|z| = R$ cu originea în punctul R și extremitatea în punctul $R\, e^{i\frac{\pi}{4}}$. La fel ca în exemplul precedent se vede că $\lim\limits_{R\to\infty} \left|\int_{\gamma_R} e^{-z^2}\, dz\right| = 0$. Cum, pe de altă parte, se știe că $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, rezultă că integrala improprie $\int_0^\infty e^{-it^2}\, dt$ este convergentă și că $\int_0^\infty {}^{-it^2}\, dt = \frac{(1-i)\sqrt{2\pi}}{4}$. Separînd partea reală și partea imaginară, se obține în final teorema următoare: Integralele Fresnel $\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$ și $\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx$ sînt convergente și au valoarea comună $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$. (*M.J.*)

rezolubilitate locală și globală Un operator liniar și continuu $P : \mathcal{D}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ (Ω mulțime deschisă, sau, mai general, varietate diferențiabilă) este local rezolubilă în punctul $x_0 \in \Omega$ dacă există o vecinătate ω a lui x, $\omega \subset \Omega$, astfel ca pentru orice $f \in C^\infty(\Omega)$ să existe $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ care să verifice ecuația $Pu = f$ în ω. Dacă P este local rezolubilă pentru orice $x \in \Omega$, P se numește *local rezolubil* în Ω. Operatorul P este *microlocal rezolubil* în punctul $(x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega) \setminus \{0\}$ dacă pentru orice $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ există $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ cu proprietatea că $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}(Pu - f)$. Microrezolubilitatea în (x_0, ξ_0) pentru orice $\xi_0 \neq 0$ nu implică faptul că P este local rezolubil în x_0. În sfîrșit, P este *global rezolubil* în Ω dacă există soluții globale în Ω pentru orice membru drept. Dacă P are o parametrică la dreapta el rezultă local rezolubil. Rezultatele cele mai complete de rezolubilitate se cunosc pentru operatorii diferențiali (sau, mai general, pseudodiferențiali) de tip principal (v. **operatori de tip principal**). În acest caz, au loc rezultate de tipul următor: 1) Dacă proiecția nici unei bicaracteristici a operatorului P (presupus de tip principal, cu parte principală reală) nu se proiectează peste un compact din mulțimea deschisă Ω, atunci P definește o aplicație liniară surjectivă de la $\mathcal{D}^*(\Omega)$ la $\mathcal{D}^*(\Omega)/C^\infty(\Omega)$ dacă și numai dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$ există altă mulțime compactă $K' \subset \Omega$ cu proprietatea că $u \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ și sing supp ${}^tPu \subset K$ implică sing supp $u \subset K'$; 2) Fie P de tip principal (P poate fi operator pseudodiferențial de tip clasic). Atunci avem rezolubilitate locală pentru P în orice punct al unei mulțimi deschise Ω dacă și numai dacă $\operatorname{Im}(P_m(x, \xi))$ nu-și schimbă semnul de-a lungul nici unei bicaracteristici a lui ($\operatorname{Re} P_m$) (peste Ω) (aici P_m este partea principală a operatorului P); 3) Fie P un operator pseudodiferențial clasic de ordin m în mulțimea deschisă Ω, cu simbol principal real p de tip principal. Fie K un compact care să nu conțină nici o curbă bicaracteristică maximală a lui p. Atunci: a) $N(K) = \{v \in \mathcal{E}^*(K),\ {}^tPv = 0\}$ este spațiu vectorial de dimensiune finită; b) condiția necesară și suficientă ca ecuația $Pu = f$ să aibă o soluție în vecinătatea lui K, pentru orice $f \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, este ca f să se anuleze pe $N(K)$ (această ultimă condiție este o condiție de tip Fredholm pentru rezolubilitatea semiglobală). De aici rezultă: 4) Fie P ca mai înainte; atunci dacă $P_m(x, \xi) = 0$ implică $(P'_m)(x, \xi) \neq 0$, operatorul P este local rezolubil. 5) Dacă ${}^tP$ este hipoeliptic, atunci P este local rezolubil. În sfîrșit, există rezultate generale de rezolubilitate locală considerîndu-se operatori ce verifică unele evaluări, numite subeliptice, și care generalizează (cu o pierdere mai mare de regularitate) o evaluare clasică valabilă pentru operatorii eliptici). Rezultatele cele mai generale de existență se datoresc lui Treves-Nirenberg (care au folosit pentru prima dată operatori integrali Fourier pentru a reduce operatorii considerați la forme simple), Egorov, Hörmander-Duistermaat și, în sfîrșit, Beals-Fefferman. (*G.G.*)

rezoluția canonică a lui Godement v. **coomologia fascicolelor**

rezoluție a identității pentru un operator v. **măsura spectrală**

rezolvantă (a unui element x al unei algebre X cu unitate), mulțimea scalarilor λ pentru care există în X elementul $(x - \lambda u)^{-1}$, unde u este elementul unitate al algebrei. Un număr care aparține **r.** lui x se numește *număr regulat* pentru elementul x. (*R.C.*)

ridicare v. **lifting**

rotație v. **transformare omografică**

rotație (pe un spațiu prehilbertian) v. **măsură conică**

rotorul unui cîmp de vectori v. **analiză vectorială, integrarea pe o varietate riemanniană orientată**

S

săgeată v. **categorie, functor**

scalar v. **spațiu liniar**

scufundare v. **spațiu tangent**

secțiune v. **prefascicol, fibrat vectorial**

secțiune (a unei funcții) v. **măsură pe spațiu produs, măsură Radon produs**

secvențial compact v. **spațiu topologic compact**

segment (în sensul ordinei) v. **mulțime ordonată**

segment (liniar) v. **spațiu liniar**

(o)-segment v. **mulțime ordonată**

selecție măsurabilă v. **teorema de selecție Kuratowski — Ryll-Nardzewski**

semiclan v. **clasă de mulțimi**

semidistanța Frechet-Nikodym v. **extinderea măsurilor vectoriale**

semidistanță (pe o mulțime X), orice aplicație d, definită pe $X \times X$ cu valori reale pozitive, avînd proprietățile: i) $d(x, x) = 0$ oricare ar fi $x \in X$; ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$; iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ pentru orice $x, y, z \in X$. Sin.: *semimetrică*. Se numește *spațiu semimetric* orice pereche (X, d), unde X este o mulțime iar d o **s.** pe X. Dacă nu există posibilitatea unei confuzii nu se mai precizează distanța și se spune „spațiul semimetric X". Fie (X, d) un spațiu semimetric. Fie $x \in X$ și $r > 0$. Mulțimea $S(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$ se numește *sferă* (sau *bilă*) deschisă cu centrul în x și de rază r. Există și este unică o topologie pe X în care familia sferelor deschise cu centrul în x este o bază de vecinătăți ale lui x, pentru orice $x \in X$. Se spune că această *topologie* este *generată de* **s.** d. Dacă nu se fac alte precizări orice considerații topologice pe spațiul semimetric (X, d) se fac relativ la topologia generată de **s.** d. Într-un spațiu semimetric noțiunile și afirmațiile topologice care nu presupun separarea spațiului sînt aceleași ca într-un spațiu metric. (*Gh.Gr.*)

semigrup de operatori Fie X un spațiu Banach complex cu norma $\| \ \|$ și $\mathcal{L}(X)$ spațiul operatorilor liniari și continui de la X la X. Pe $\mathcal{L}(X)$ putem considera fie topologia obișnuită (a convergenței uniforme pe mulțimile mărginite ale lui $\mathcal{L}(X)$), fie *topologia* (mai slabă) *tare operatorială*, dată de familia de seminorme $\{P_x\}_{x \in X}$, unde $P_x(V) = \|V(x)\|$ pentru orice x în X și V în $\mathcal{L}(X)$. Se numește **s.o.** pe X o aplicație $T: [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ avînd proprietățile: $T(0) = 1_X$ (aplicația identică a lui X, dată prin $x \to x$ pentru orice x în X) și $T(s + t) = T(s) \circ T(t)$ pentru orice t și s în $[0, \infty)$. Dacă T este continuă, considerînd pe $\mathcal{L}(X)$ topologia obișnuită, vom spune că T este un *semigrup uniform continuu de operatori* pe X, iar dacă T este continuă, considerînd pe $\mathcal{L}(X)$ topologia tare operatorială, vom spune că T este un *semigrup tare continuu de operatori* pe X. Ultima definiție revine la a spune că pentru orice x în X, aplicația $T_x: [0, \infty) \to X$ dată prin $T_x(t) = T(t)(x)$ este continuă. Bineînțeles, pe $[0, \infty)$ se consideră topologia obișnuită. Pentru orice operator B din $\mathcal{L}(X)$ se notează $\exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \in \mathcal{L}(X)$ (seria converge în $\mathcal{L}(X)$ cu topologia obișnuită), unde B^n înseamnă $B \circ B \circ B \circ \ldots \circ B$ de n ori. De asemenea

dacă λ este un număr complex care nu este în spectrul lui B, vom nota prin $R(\lambda, B)$ *rezolvanta* lui B în λ, *i.e.* operatorul $(\lambda 1_X - B)^{-1}$.
Teorema de reprezentare a semigrupurilor uniform continue. Pentru orice semigrup T uniform continuu de operatori pe X există $A \in \mathcal{L}(X)$ cu proprietatea că $T(t) = \exp(tA)$ pentru orice t în $[0, \infty)$.
Operatorul A (numit *generatorul infinitezimal al semigrupului* T) este dat de formula $A = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}(T(h) - 1_X)$, limita fiind calculată în topologia obișnuită a lui $\mathcal{L}(X)$. În plus, există $a > 0$ astfel încît pentru orice număr complex λ cu $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant a$ să avem $R(\lambda, A) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)\, dt$, integrala fiind considerată în sensul lui Bochner. În cele ce urmează vom considera că T este un semigrup tare continuu de operatori pe X. Vom considera spațiul vectorial $D(T) \subset X$ definit astfel: $D(T) = \left\{x \in X \mid \text{există} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}(T(h)(x) - x) \in X\right\}$. Operatorul $A: D(T) \to X$, definit prin $A(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}(T(h)(x) - x)$ se numește de asemenea *generatorul infinitezimal al semigrupului* T. Se arată că $D(T)$ este un subspațiu vectorial dens în X și operatorul liniar A este închis.
Teorema Hille-Yosida-Phillips. Dacă $H \subset X$ este un subspațiu vectorial dens și $A: H \to X$ este un operator liniar închis, condiția necesară și suficientă ca A să fie generatorul infinitezimal al unui semigrup tare continuu de operatori pe X este următoarea: există un număr strict pozitiv M și un număr real a astfel încît orice număr real $\lambda > a$ nu este în spectrul lui A și, în plus, $\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant M(\lambda - a)^n$ pentru orice n natural. (*I. C.*)

semigrup topologic, triplet $(X, \oplus, \tau)$, unde X este o mulțime nevidă, $\oplus: X \times X \to X$ este o operație internă pe X iar τ este o topologie pe X astfel încît: 1) Cuplul $(X, \oplus)$ este semigrup; 2) Cuplul (X, τ) este spațiu topologic; 3) Aplicația $\oplus$ este continuă. Dacă $(X, \oplus)$ este semigrup comutativ, vom spune că $(X, \oplus, \tau)$ este **s.t.** comutativ, iar dacă $(X, \oplus)$ este semigrup cu unitate (sau monoid), vom spune că $(X, \oplus, \tau)$ este **s.t.** *cu element unitate*. Ex.: Luăm $X = \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$, $\oplus$ este adunarea obișnuită în $\overline{\mathbb{R}}_+$ (cu convenția $a + \infty = \infty + a = \infty$, $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$), iar τ este topologia canonică a lui $\overline{\mathbb{R}}_+$, indusă de $\overline{\mathbb{R}}$. Obținem un **s.t.** comutativ cu unitate (elementul unitate este 0). Pentru simplificare scriem X în loc de $(X, \oplus, \tau)$ și $x + y$ în loc de $\oplus(x, y)$. Dacă $\{x_n\}_n$ este un șir de elemente dintr-un **s.t.** X și x este în X, expresia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$ înseamnă că $\lim\limits_n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$ în topologia lui X. (*I. C.*)

semigrup unitar de operatori v. **semigrup de operatori**

semiinel v. **clasă de mulțimi**

semimetrica Fréchet-Nikodym v. **extinderea măsurilor vectoriale**

seminormă, funcție reală p definită pe un spațiu liniar X, cu proprietățile: $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ și $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, oricare ar fi elementele $x, y \in X$ și scalarul λ. O **s.** p definită pe un spațiu liniar topologic X se numește **s.** *mărginită* dacă $p(A)$ este mărginită oricare ar fi submulțimea mărginită A a lui X. O **s.** p definită pe un spațiu liniar ordonat X se numește **s.** *monotonă* dacă din $0 \leqslant x \leqslant y$, $x, y \in X$, rezultă $p(x) \leqslant p(y)$. Dacă X este un spațiu liniar reticulat, o **s.** p definită pe X se numește **s.** *solidă* dacă din $|x| \leqslant |y|$, $x, y \in X$, rezultă $p(x) \leqslant p(y)$. Se numește **s.** *de tip* (M), o **s.** p definită pe un spațiu liniar reticulat, care satisface condiția $p(x \vee y) = \max(p(x), p(y))$, oricare ar fi elementele pozitive x, y ale spațiului. (*R. C.*)

semitrib v. **clasă de mulțimi**

semitribul mulțimilor Baire relativ compacte v. **mulțimi boreliene, mulțimi Baire**

semivariația unei măsuri (relativ la o scufundare) v. **variație**; **cvasivariație**; **semivariație**

seria armonică alternată v. **serie numerică**

seria Fourier a unei funcții reale de pătrat integrabil Fie $x: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ o funcție de pătrat integrabil (Lebesgue). Numerele

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, dt, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt\, dt,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt\, dt \quad \text{cu } n \in \mathbb{N},$$

se numesc *coeficienții Fourier ai funcției* x. Punînd

$$a_0(t) = 1, \; a_n(t) = \cos nt, \; b_n = \sin nt, \; t \in [-\pi, \pi], n \in \mathbb{N},$$

funcția x este suma în medie pătratică a seriei

$$\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n)$$

numită *seria Fourier* a funcției x. Cu alte cuvinte, punînd

$$s_n(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cos jt + \beta_j \sin jt), \; n \in \mathbb{N},$$

are loc egalitatea $\lim\limits_n \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (s_n(t) - x(t))^2\, dt = 0$. Acest rezultat se obține considerînd spațiul Hilbert $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ în care se ia baza ortonormală $\{e_0, e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, \ldots\}$ cu $e_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_0$, $e_{n1} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} a_n$, $e_{n2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} b_n$, pentru $n \in \mathbb{N}$ (v. **spațiu Hilbert**). (*R. C.*)

seria hipergeometrică v. **ecuația lui Gauss**

seria lui Riemann v. **serie numerică**

serie absolut convergentă v. **serie numerică**

serie armonică v. **serie numerică**

serie comutativ convergentă v. **serie numerică**

serie de funcții Fie $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții definite pe o mulțime D cu valori în $\mathbf{C}$ sau într-un spațiu liniar normat (sau, mai general, cu valori într-un ţiu liniar topologic). Fie $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in D$. Şirul $\{s_n\}_n$ se numeşte . asociată şirului $\{f_n\}_n$ şi se notează $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Elementele şirului $\{f_n\}_n$ se nu- sc *termenii seriei* iar elementele şirului $\{s_n\}_n$, *sumele parţiale* ale seriei. ria se numeşte *convergentă în punctul* $x_0 \in D$ dacă şirul sumelor parţiale e convergent în x_0, deci dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ este convergentă. Suma x_0) a seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x_0)$ se numeşte *restul de ordin n* al seriei (în x_0). Mulţi- ea $C \subset D$ a punctelor în care seria considerată este convergentă se numeşte *lţime de convergenţă* şi se spune că seria este *punctual* (sau *simplu*) *con- rgentă* pe C (v. şi **domeniu de convergenţă al unei serii de puteri**). Limita ului $\{s_n\}_n$ se numeşte *suma seriei*, se notează tot cu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, şi este deci o ncţie definită pe mulţimea de convergenţă. Precizarea „punctual conver- ntă" este legată de existenţa unor alte tipuri de convergenţă. Astfel, dacă ul $\{s_n\}_n$ este uniform convergent pe $A \subset D$, se spune că seria este *uniform nvergentă* pe A, pe scurt *uniform convergentă* dacă $A = D$. Are loc *crite- l lui Cauchy*: **S.f.** numerice ($f_n : D \to \mathbb{C}$) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă că şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$ ntru orice $n, m \geq n_0$ şi orice $x \in D$. Rezultatul este adevărat şi pentru **s.f.** cu lori într-un spaţiu Banach sau într-un spaţiu vectorial topologic secvenţial mplet. O condiţie suficientă de convergenţă uniformă este *criteriul lui Weier- ass*, enunţat aici pentru funcţii numerice: Dacă $\sup_{x \in D} |f_k(x)| = \lambda_k$ iar seria nu- erică $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_k$ este uniform convergentă şi **convergenţă normală**). Condiţia din acest criteriu nu este şi necesară (v. . 3). Pentru funcţii cu valori reale are loc *criteriul lui Abel*: Dacă în **s.f.** $\sum f_n g_n$, definite pe D cu valori reale, şirul $\{f_n\}_n$ este monoton descrescător, nvergent uniform la zero, iar şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ este ărginit uniform (*i.e.* există $M > 0$ astfel ca $\left|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \leq M$ pentru orice $\in \mathbb{N}$ şi orice $x \in D$), atunci seria $\sum_{n=1} f_n g_n$ este uniform convergentă. Dacă D

este un spaţiu topologic compact (spre exemplu dacă $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$) iar f_n, $f: D \to \mathbb{R}_+$ sînt funcţii continue astfel încît seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este punctual convergentă şi are suma f, atunci seria este uniform convergentă (*teorema lui Dini pentru serii*). Diverse teoreme de permanenţă a proprietăţilor funcţiilor f_n pentru suma f a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rezultă evident din afirmaţiile corespunzătoare de la şiruri de funcţii. Astfel, dacă în seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, funcţiile f_n sînt continue iar seria converge uniform, atunci suma seriei este o funcţie continuă. O afirmaţie mai generală este legată de noţiunea de convergenţă cvasiuniformă. Dacă termenii seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sînt funcţii integrabile (Riemann sau Lebesgue) pe intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$, iar seria este uniform convergentă atunci suma seriei este de asemenea integrabilă (Riemann, respectiv Lebesgue)

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t$$

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, \mathrm{d}t$ este uniform convergentă (*teorema de integrare termen cu termen a unei* **s.f.**). Dacă funcţiile f_n sînt derivabile, cu derivată continuă pe $[a, b]$, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă cel puţin într-un punct din $[a, b]$ iar seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$ este uniform convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă, suma sa este derivabilă şi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

(*teorema de derivare termen cu termen a unei* **s.f.**). Pentru orice tip de convergenţă de la şiruri de funcţii numerice există noţiunea corespunzătoare de convergenţă pentru serii. Ex.: 1° Pentru **s.f.** definite pe $\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x^2+1)$, mulţimea de convergenţă este mulţimea vidă. 2° **S.f.** complexe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge uniform pe orice compact din $\mathbb{C}$. 3° Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$ iar $\sup\limits_{x \in [0,\infty)} \left| \dfrac{(-1)^n}{x+n} \right| = \dfrac{1}{n}$. 4° Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ converge punctual pe $\mathbb{R}$, este formată din funcții de clasă C^∞, nu converge uniform, suma s a seriei nu este nici continuă nici integrabilă ($s(0) = 0$, $s(x) = 1/x$ dacă $x \neq 0$). De menționat că suma unei serii punctual convergente de funcții reale continue definite pe $[a, b]$ este o funcție continuă pe o mulțime densă în $[a, b]$. 5° Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, unde

$$f_n(x) = \frac{2(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2} - \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

este punctual convergentă pe $[0, 1]$, suma este o funcție continuă (funcția nulă) iar seria nu converge uniform. 6° Dacă $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^∞ și $x_0 \in [a, b]$, atunci **s.f.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, unde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, se numește *serie Taylor asociată funcției f în punctul x_0*. (*Gh. Gr.*)

serie de funcții normal convergentă v. **convergență normală**

serie de numere complexe v. **serie numerică**

serie de numere reale v. **serie numerică**

serie de puteri (în $\mathbb{C}$), o serie de funcții de forma

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \quad z \in \mathbb{C},$$

unde $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ este un șir de numere complexe date, numite *coeficienții seriei*. Fiind dată o **s.p.**, o problemă importantă este problema determinării punctelor ei de convergență. Considerăm o **s.p.** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, fixată. Fie C mulțimea tuturor punctelor $w \in \mathbb{C}$ pentru care seria de numere complexe $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n w^n$ este convergentă; C se numește *mulțimea de convergență* a seriei. Fie, de asemenea, B mulțimea punctelor $w \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că există $M = M(w) > 0$ astfel încît $|a_n w^n| \leqslant M$ pentru orice n. Fie, în fine,

$$R := \sup \left\{ \rho \geqslant 0 \,\middle|\, \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \rho^n < \infty \right\},$$

$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ și $\overline{D}$ închiderea lui D în $\mathbb{C}$. Se spune că D este *domeniul de convergență* sau *discul de convergență* al **s.p.** considerate și că R este *raza de convergență* a acestei serii. Notăm că termenul de *disc* se consideră aici în sens larg, *i.e.* nu se exclude cazul $R = \infty$.

Lema lui Abel. Dacă $w \in B$ și $w \neq 0$, atunci **s.p.** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ este normal convergentă pe orice mulțime compactă conținută în discul deschis $D_w :=$ $= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |w|\}$.

Cu ajutorul lemei lui Abel se vede imediat că $D = \bigcup\limits_{w \in B} D_w \subset C \subset B \subset \overline{D}$. În particular, avem $D = \mathring{C} = \mathring{B}$, ceea ce justifică denumirea dată lui D de disc de convergență al s.p. Deoarece orice mulțime compactă conținută în D este conținută într-un disc D_w cu $w \in D$, din lema lui Abel mai rezultă că s.p. $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ este normal convergentă pe orice mulțime compactă conținută în D, deci, după teorema de convergență a lui Weierstrass, funcția complexă f definită prin $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $z \in D$, este o funcție olomorfă pe D. Deoarece raza de convergență R a unei s.p. este definită în termeni de serii de numere pozitive, pentru calculul ei se pot utiliza criteriile uzuale de convergență a seriilor de numere reale pozitive, în particular *formula lui Hadamard*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|},$$

care se obține folosind criteriul rădăcinii. Ex.: 1° S.p. $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ are raza de convergență $R = 1$. 2° S.p. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ are raza de convergență $R = \infty$, 3° S.p. $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$ are raza de convergență $R = 0$. Fiind dat un punct $w \in \mathbf{C}$, din lema lui Abel rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n\geqslant 0} a_n w^n$ este convergentă dacă $|w| < R$ și divergentă dacă $|w| > R$; mai mult, în acest ultim caz șirul $\{a_n w^n\}_{n\geqslant 0}$ nu este nici măcar mărginit. Dar lema lui Abel nu dă nici o informație privind convergența sau divergența seriei $\sum_{n\geqslant 0} a_n w^n$ în cazul $|w| = R$. În fapt, pe cercul $|z| = R$ pot exista atît puncte de convergență cît și puncte de divergență. De pildă, pentru s.p. din Ex. 1°, punctul $z = 1$ este un punct de convergență, iar punctul $z = -1$ unul de divergență. Să mai observăm că, dacă $c \in \mathbf{C}$ și $|c| < R$, atunci, în baza lemei lui Abel, seria $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ este normal (în particular uniform) convergentă pe segmentul $[0, c]$. În cazul $|c| = R$ are loc teorema următoare.

Teorema lui Abel. Dacă c este un punct de convergență al s.p. $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ și $|c| = R$, unde R este raza de convergență a acestei serii, atunci seria este uniform convergentă pe orice mulțime compactă K conținută în $D \cup \{c\}$ și avînd proprietatea că funcția $z \longmapsto \frac{|c-z|}{|c|-|z|}$ este mărginită pe mulțimea $K \setminus \{c\}$; în particular pe segmentul $K = [0, c]$.

Ex.: 1° Se știe că, dacă se notează prin log ramura principală a funcției logaritm, atunci pe discul $|z| < 1$ are loc dezvoltarea în s.p.

$$\log(1 + z) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \dots$$

Raza de convergență a acestei s.p. este $R = 1$, iar $z = 1$ este un punct de convergență al acestei serii. Din teorema lui Abel rezultă că funcția $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$

definită prin $f(x) := \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ este continuă. Cum $\log(1+x)$ este de asemenea o funcție continuă pentru $x > -1$, se obține formula remarcabilă $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ 2° Se știe că dacă $\sum_{n\geq 0} a_n$ și $\sum_{n\geq 0} b_n$ sînt două serii convergente de numere complexe, dintre care cel puțin una absolut convergentă, și dacă $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} c_n$ este convergentă și are loc egalitatea

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right).$$

Cu ajutorul teoremei lui Abel se poate arăta că această egalitate are loc în condiții ceva mai largi, și anume este suficient ca seriile $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$ și $\sum_{n\geq 0} c_n$ să fie toate convergente. În fapt, din lema lui Abel rezultă atunci că **s.p.** $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ și $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ sînt absolut convergente cînd $|z| < 1$; potrivit rezultatului menționat mai sus are loc egalitatea

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right), \quad |z| < 1. \qquad (*)$$

Pe de altă parte, $c = 1$ este punct de convergență pentru fiecare din aceste trei **s.p.**; deci, după teorema lui Abel, fiecare din aceste **s.p.** definește o funcție continuă pe segmentul $[0, 1]$. Cum egalitatea $(*)$ are loc pe segmentul semideschis $[0, 1)$, din continuitate rezultă că ea are loc și în punctul $z = 1$. *(M. J.)*

serie Fourier, serie trigonometrică pentru care există o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încît

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{pentru } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad \text{pentru } n = 1, 2, \ldots$$

Seria este Fourier-Riemann, Fourier-Lebesgue sau Fourier-A, după cum integralele sînt considerate în sensul lui Riemann, al lui Lebesgue sau în sensul A, A putînd desemna aici diferite alte sensuri ale integralei. *(S. M.)*

serie Laurent v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

serie Laurent multiplă Dacă Ω este un domeniu Reinhardt conex, orice funcție olomorfă $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admite o dezvoltare Laurent multiplă unică

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha, \quad z \in \Omega,$$

unde $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ dacă $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, iar seria este normal convergentă pe orice mulțime compactă $K \subset \Omega$. În plus, dacă Ω conține un punct z cu $z_{i_0} = 0$, atunci $c_\alpha = 0$ cînd $\alpha_{i_0} < 0$. *(M. J.)*

serie neconditionat convergentă v. **serie numerică**

serie numerică Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale sau complexe și $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Șirul $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **s.n.** asociată șirului $\{x_n\}_n$ și se notează $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Elementele șirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se numesc *termenii seriei* iar elementele șirului $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *sumele parțiale ale seriei*. Astfel, x_n se numește *termenul general* iar s_n *suma parțială* de ordin n a seriei. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se numește *convergentă* dacă șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent; pentru $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ se folosește atunci notația $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ iar s se numește *suma seriei*. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît $|x_n + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \in \mathbb{N}$ *(criteriul lui Cauchy pentru serii)*. Dacă șirul $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nu este convergent se spune că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este *divergentă*. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, reciproca nefiind adevărată (v. Ex. 1°). Fie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ o serie convergentă și $n \in \mathbb{N}$. Suma r_n a seriei $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n+k}$ se numește *restul de ordin* n al seriei considerate; dacă s este suma seriei, atunci $s = s_n + r_n$ și $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Se numește *suma* seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, și se notează $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, seria al cărei termen general este $x_n + y_n$. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sînt convergente și au respectiv sumele x, y, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = x + y$. Se scrie pe scurt $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Se numește *produsul dintre numărul* λ *și seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, și se notează $\lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, seria al cărei termen general este λx_n. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă și x este suma sa, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$ este convergentă și are suma λx. Se scrie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ două s.n. și

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1 = \sum_{k+r=n} x_k y_r.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se numește *seria produs* sau *produsul* seriilor considerate și se notează $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sînt convergente și au respectiv sumele x, y, z, atunci $xy = z$ (*teorema lui Abel*). Seria produs a două serii convergente nu este neapărat convergentă. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi ($x_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$), atunci ea este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit. Pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se obișnuiește să se scrie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$ dacă seria este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$ dacă seria este divergentă. O serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$, unde $x_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se numește *serie alternată*. O serie alternată în care $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător către zero este convergentă (*teorema lui Leibniz*). Dacă s este suma seriei alternate convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ și s_n suma sa parțială de ordin n, atunci $|s - s_n| \leqslant x_{n+1}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se numește *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergentă. Orice serie absolut convergentă este convergentă reciproca nefiind adevărată (v. Ex. 2°). Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se numește *necondiționat* (*comutativ*) *convergentă* dacă

oricare ar fi o bijecție $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ este convergentă. Aplicația σ se mai numește *permutare* și se spune uneori că $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ este o permutare a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. O s.n. este absolut convergentă dacă și numai dacă este necondiționat convergentă. Suma seriei absolut convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ coincide cu suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. Dacă cel puțin una din seriile convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este absolut convergentă, atunci seria produs este convergentă (*teorema lui Mertens*). Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sînt absolut convergente, atunci seria produs este convergentă. O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește *semiconvergentă*. Dacă seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este semiconvergentă, atunci pentru orice $a \in \mathbb{R}$ ($a \in \overline{\mathbb{R}}$ sau $a = \pm\infty$) există $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ o bijecție astfel încît $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = a$ (*teorema lui Riemann*). Un rol deosebit în teoria s.n. îl joacă seriile absolut convergente în studiul cărora sînt necesare *criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi*. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ serii cu termeni pozitivi: 1) Dacă $x_n \leqslant y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergentă. 2) Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$ și $0 < l < \infty$, atunci dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergentă, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este de asemenea convergentă iar dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergentă rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă; mai general, dacă $0 < \liminf \frac{x_n}{y_n} \leqslant \limsup \frac{x_n}{y_n} < \infty$, atunci seriile sînt în același timp divergente sau convergente. 3) Să presupunem că $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergentă rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergentă. 4) Dacă $\limsup \sqrt[n]{x_n} < 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar dacă $\limsup \sqrt[n]{x_n} > 1$ seria este divergentă (*criteriul rădăcinii al lui Cauchy*). Există serii convergente şi serii divergente pentru care $\limsup \sqrt[n]{x_n} = 1$ (Ex. 3°). 5) Dacă $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar dacă $\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ seria este divergentă (*criteriul lui d'Alembert*). Dacă, în particular, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ va fi convergentă sau divergentă după cum $l < 1$ sau $l > 1$. Ca şi în cazul criteriului lui Cauchy, dacă $l = 1$ nu se poate trage nici o concluzie asupra naturii seriei şi există exemple de serii convergente sau divergente pentru care $l = 1$ (v. Ex. 3°). Este util de remarcat că dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ şi cele două limite sînt egale (eventual ambele egale cu $+\infty$). 6) Dacă există un şir $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale pozitive, astfel încît $\liminf \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1}\right) > 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă; dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă şi $\limsup \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1}\right) < 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă (*criteriul lui Kummer*). În cazul particular cînd seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă şi există $l = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1}\right)$, atunci pentru $l > 0$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar dacă $l < 0$ seria este divergentă. Dacă în aceste consideraţii $a_n = n$ se obţine *criteriul Raabe-Duhamel*. 7) Dacă $\liminf n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar dacă $\limsup n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) < 1$ seria este divergentă. În particular, dacă $\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă pentru $l > 1$ şi

divergentă pentru $l < 1$. 8) Dacă $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir descrescător, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are aceeaşi natură (convergentă sau divergentă) ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ (*criteriul de condensare al lui Cauchy*). 9) Fie $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ descrescătoare. Atunci integrala $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ este convergentă (*criteriul integral al lui Cauchy*). Pentru serii de numere reale (nu neapărat pozitive) au loc: i) Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale şi $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} x_j y_j = \sum_{j=n+1}^{n+k-1} s_j(x_j - y_{j+1}) - s_{n+k} y_{n+k} - s_n y_{n+1}$$

(*identitatea lui Abel*). Cu ajutorul ei se obţine *criteriul lui Dirichlet*: Dacă şirul $\{s_n\}_n$ este mărginit iar $\{y_n\}_n$ este un şir descrescător către zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă; ii) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir monoton şi mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă (*criteriul lui Abel*). Utilizînd criteriile pentru serii cu termeni pozitivi, se obţin unele criterii de convergenţă absolută pentru serii de numere reale sau complexe. Astfel au loc următoarele variante ale criteriului rădăcinii al lui Cauchy, respectiv d'Alembert: 4') Dacă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l \in \overline{\mathbf{R}}$ şi $l < 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă iar dacă $l > 1$ seria este divergentă. 5') Dacă $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă pentru < 1 şi divergentă dacă $l > 1$. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} x_{1-n}$ sînt convergente, se notează

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_{1-n}.$$

Ex.: 1° Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, numită *seria armonică*, este divergentă. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$,

$\alpha \in \mathbb{R}$, numită *seria armonică generalizată*, este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$. 2° Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, numită *seria armonică alternată*, este semiconvergentă. 3° Pentru seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ avem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ iar pentru seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ avem de asemenea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$. Pentru aceleași exemple avem: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. (*Gh. Gr.*)

serie Taylor Fie $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $D \subset \Gamma$ o mulțime deschisă, $f\colon D \to \Gamma$ o funcție de clasă C^{∞} și $a \in D$. Seria de funcții

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (*)$$

se numește **s.T.** *asociată funcției f în punctul a*. Se observă că sumele parțiale ale seriei $(*)$ sînt *polinoamele Taylor* asociate funcției f în punctul a. În $x = a$ seria $(*)$ este evident convergentă și are suma $f(a)$. Dacă seria $(*)$ converge pe o vecinătate a lui a și dacă suma ei este chiar f, se spune că funcția f este *analitică* (*olomorfă*) în punctul a. Despre seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ se spune atunci că reprezintă dezvoltarea funcției f în **s. T.** în jurul lui a. Dezvoltarea se dovedește a fi unică, căci dacă o serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ este convergentă pe o vecinătate a lui a și are suma g, atunci g este de clasă C^{∞} pe acea vecinătate și $a_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}$, *i.e.* seria dată coincide cu **s.T.** asociată funcției g în punctul a. Pentru funcția $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ dacă $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ și $f(0) = 0$, suma **s.T.** asociate în punctul zero este funcția nulă care nu coincide cu f și deci nu este analitică în zero. (*Gh. Gr.*)

serie trigonometrică, serie de forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ unde a_0, a_n și b_n sînt numere reale (pentru orice n natural). (*S. M.*)

serie uniform convergentă, serie de funcții numerice pentru care șirul sumelor parțiale este uniform convergent. (*S. M.*)

seriile lui Eisenstein v. **funcția modulară**

sfera lui Riemann v. **planul complex extins** $\widetilde{\mathbb{C}}$, **suprafață riemanniană**

sfera unitate deschisă v. **spațiu liniar normat**

sfera unitate închisă v. **spațiu liniar normat**

sferă v. **distanță**

simbolul principal al unui operator diferențial Fie $\Gamma(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a^{\alpha} \mathrm{D}^{\alpha}$ un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți, unde $\mathrm{D}^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ cu $D_k = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Operatorul $\Gamma(\mathrm{D})$ devine prin transformare Fourier operatorul de înmulțire cu $\Gamma(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_{\alpha} \xi^{\alpha}$; polinomul omogen de grad m, $\Gamma_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha} \xi^{\alpha}$ se numește *simbolul principal* al operatorului $\Gamma(\mathrm{D})$, iar $\Gamma(\xi)$ *simbolul* (sau *simbolul complet*) al lui $\Gamma(\mathrm{D})$. Dacă Γ are coeficienți variabili, $\Gamma(x, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_{\alpha}(x)\, \mathrm{D}^{\alpha}$, simbolul său principal este $\Gamma_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha}(x)\, \xi^{\alpha}$. Dacă simbolul complet nu are o interpretare invariantă, simbolul principal poate fi considerat ca o funcție definită pe fibratul cotangent al mulțimii deschise pe care este definit operatorul Γ. Mai mult, el poate fi definit invariant în situații mai generale, *i.e.* pentru operatori diferențiali ce acționează pe secțiunile unor fibrați vectoriali, sau chiar pentru operatori pseudodiferențiali. Fie, în general, Ω o varietate diferențiabilă, $\xi = (E, p, \Omega)$, respectiv $\eta = (F, q, \Omega)$ două fibrări vectoriale peste Ω (v. **fibrat vectorial**) $T^*(\Omega)$ fibratul cotangent al lui Ω și π proiecția canonică $\pi\colon T^*(\Omega) \to \Omega$. Dacă notăm cu $E \times_{\Omega} T^*(\Omega) = \{(e, \omega) \in E \times T^*(\Omega)$ cu $p(e) = \pi(\omega)\}$, atunci simbolul principal al operatorului diferențial Γ de ordin m, definit pe secțiunile lui ξ cu valori în secțiunile lui η, este o funcție $\sigma = \sigma_P\colon E \times_{\Omega} T^*(\Omega) \to F$, dată în modul următor: pentru $a \in \Omega$ și $\omega \in T_a^*(\Omega)$, fie f o funcție din C^{∞}, anulîndu-se în a, astfel ca $\omega = (\mathrm{d}f)(a)$. Fie apoi $s \in C_0^{\alpha}(\Omega, \xi)$ o secțiune a lui ξ, $e \in E_a$ (fibra lui ξ în a), legate prin relația $s(a) = e$. Atunci $\sigma(e, \omega) = \Gamma(f^m\, s)(a)$ și această definiție nu depinde de alegerea secțiunii s și a funcției f. S-a obținut astfel o definiție invariantă a simbolului principal. Dacă Γ este un operator diferențial de ordin m, Q un operator diferențial de ordin p, simbolurile principale fiind $\sigma_m(\Gamma) = f$, $\sigma_p(Q) = g$, atunci simbolul principal al comutatorului $[\Gamma, Q] = \Gamma Q - Q\Gamma$ este $\sigma_{m+p-1}([\Gamma, Q]) = \{f, g\}$, unde $\{.,.\}$ este paranteza Poisson a funcțiilor f și g (v. **fibrat vectorial**). (*G. G.*)

singularitate izolată v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

sistem afin de ecuații diferențiale, sistem de forma $x' = A(t)x + b(t)$, $A(t)$ matrice, $b(t)$ vector. Mulțimea soluțiilor unui **s.a.e.d.** formează o varietate afină. (*A. H.*)

sistem autonom v. **sistem dinamic**

sistem de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, sistem de forma $x' = Ax$, A matrice pătrată cu elemente numere reale sau complexe. *Curentul* asociat sistemului are forma: $x(t, t_0, x_0) = \exp\,(A(t - t_0))\, x_0$, unde $\exp\,(At)$ este definită cu ajutorul seriei de puteri

$$\exp\ (At) = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots;$$

$\exp\,(At)$ se poate calcula cu ajutorul formulei $\exp\,(At) = \alpha_0(t) I + \dots + \alpha_{d-1}(t) A^{d-1}$, unde d este gradul polinomului minimal al matricii A

iar α_k sînt soluții ale ecuației diferențiale de ordin d asociată polinomului minimal. Orice soluție a sistemului se scrie sub forma $x(t) = \sum_j e^{\lambda_j t} p_j(t)$, unde $p_j(t)$ sînt funcții polinomiale de grad strict mai mic decît dimensiunea celei mai mari celule Jordan a matricii A care conține valoarea proprie λ_j. (*A. H.*)

sistem dinamic Un sistem de ecuații diferențiale se numește *autonom* dacă funcția $f: I\times G\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ care îl definește este constantă în raport cu primul argument. Denumirea este sugerată de faptul că asemenea sisteme modelează procese de evoluție în care legea care exprimă relația dintre stare și viteza instantanee nu depinde de factori externi care se modifică în timp. Dacă f este astfel încît problema lui Cauchy admite soluție unică definită pe întreaga axă reală, aplicația care asociază valorii inițiale (pentru $t_0 = 0$) y_0 valoarea la momentul t a soluției problemei lui Cauchy are proprietatea $y(t+s, y_0) = y(t, y(s, y_0))$ pentru orice t, s reali. În acest fel unui sistem autonom de ecuații diferențiale i se asociază un grup de transformări depinzînd de un parametru, definit prin $T_t(y_0) = y(t, y_0)$; proprietatea de mai sus a soluției problemei lui Cauchy se rescrie $T_{t+s}(y_0) = T_t(T_s(y_0))$ și exprimă faptul că familia de transformări constituie un grup. Proprietățile generale ale soluției problemei lui Cauchy arată că aplicația $(t, y) \to T_t y$ este continuă. Se numește **s.d.** o pereche $(X, \mathcal{T})$ unde X este un spațiu metric (sau, mai general, un spațiu topologic), iar $\mathcal{T}$ este o familie de aplicații $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $T_t: X\to X$ cu proprietățile: 1) Aplicația $(t, x) \to T_t x$ este continuă de la $\mathbb{R}\times X$ în X; 2) Pentru orice $t\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$, $x\in X$, $T_{t+s}x = T_t(T_s, x)$. Pentru grupul de transformări T_t se numește *traiectorie* care trece prin punctul p mulțimea $\{T_t p \mid t\in\mathbb{R}\}$. Studiul proprietăților traiectoriilor asociate unui grup de transformări continue cu un parametru pe un spațiu metric reprezintă teoria generală a **s.d.** numită de asemenea dinamică topologică. În mod analog se studiază **s.d.** diferențiabile pe varietăți diferențiabile; și acest domeniu, dinamica diferențiabilă, își are punctul de plecare în problemele clasice de mecanică în care apar sisteme de ecuații diferențiale pe varietăți diferențiabile (aceste varietăți sînt fie definite pornind de la integrale prime, fie descriu direct structura mulțimii parametrilor de stare ai sistemului mecanic). Generalizînd situațiile din mecanică în care apar invarianți integrali, s-a dezvoltat studiul **s.d.** cu măsură invariantă. Dacă spațiul metric X pe care este definit grupul de transformări continue cu un parametru T_t este înzestrat cu structura de spațiu măsurabil cu măsura μ, se spune că măsura μ este invariantă în raport cu T_t dacă pentru orice t real și orice mulțime A din X măsurabilă are loc relația $\mu(T_t(A)) = \mu(A)$. Un exemplu de proprietate a **s.d.** cu măsură invariantă este

Teorema de recurență a lui Poincaré. Dacă A este măsurabilă și măsura ei este diferită de zero, atunci există valori oricît de mari ale lui t pentru care $\mu(A \cap T_t(A)) > 0$.

Un alt rezultat fundamental îl reprezintă

Teorema ergodică. Dacă $\mu(X) = 1$, atunci pentru orice funcție $f: X\to\mathbb{R}$ integrabilă, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(T_s p)\, ds$ există pentru aproape toți p din X (mulțimea punctelor p din X pentru care limita nu există are măsura nulă). (*A. H.*)

sistem dinamic comandat, ansamblu $\Sigma = (I, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, \eta)$, unde I este un interval în $\mathbb{R}$, X, U, Y sînt spații topologice numite, respectiv, *spațiul stărilor*, *spațiul intrărilor*, *spațiul ieșirilor*, Ω este o colecție de funcții $\omega: I\to U$ numite *intrări* (sau *comenzi*), Γ este o colecție de funcții $\gamma: I\to Y$, numite

ieșiri, φ este o funcție, $\varphi: D\subset I\times I\times X\times\Omega\to X$, numită *curent*, $\eta: I\times X\to I$. Sin.: *sistem dinamic cu intrare și ieșire*. Ca interpretare $\varphi(t, t_0, x_0, \omega)$ este starea sistemului la momentul t dacă la momentul t_0 sistemul se află în starea x_0 și s-a folosit comanda ω, iar $\eta(t, \varphi(t, t_0, x_0, \omega))$ este ieșirea obținută ca rezultat al aplicării comenzii ω, plecînd la momentul t_0 din starea x_0. Mulțimea Ω este presupusă nevidă și în plus dacă ω' și ω'' sînt comenzi iar $t_1 < t_2 < t_3$, $t_1, t_2, t_3 \in I$, există ω în Ω astfel încît $\omega(t) = \omega'(t)$ pentru $t_1 < t \leqslant t_2$, $\omega(t) = \omega''(t)$ pentru $t_2 < t \leqslant t_3$. Funcția φ are proprietățile: $\varphi(t; t, x, \omega) = x$ oricare ar fi t, x, ω din domeniul de definiție; $\varphi(t_3, t_1, x, \omega) = \varphi(t_3, t_2, \varphi(t_2, t_1, x, \omega), \omega)$ pentru orice $t_1 < t_2 < t_3$, x, ω pentru care funcțiile sînt definite și, în plus, dacă $\omega'(s) = \omega''(s)$ pentru $t_0 < s \leqslant t$, atunci $\varphi(t, t_0, x_0, \omega') = \varphi(t, t_0, x_0, \omega'')$. Un **s.d.c.** este definit în mod uzual de funcții $f: I\times G\times U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$, $\eta: I\times G\to\mathbb{R}^q$. Unei comenzi $\omega: I\to U$ i se asociază sistemul de ecuații diferențiale $x' = f(t, x, \omega(t))$ și funcția φ este curentul asociat acestui sistem. (*A. H.*)

sistem dinamic cu intrare și ieșire v. **sistem dinamic comandat**

sistem dual de spații liniare, pereche de spații liniare (ambele reale sau complexe) X, Y pentru care este dată o funcțională biliniară f pe $X\times Y$ cu proprietățile: 1) Pentru orice element $x\neq\mathbf{0}$ din X există un element $y\in Y$ cu $f(x, y)\neq 0$; 2) Pentru orice element $y\neq\mathbf{0}$ din Y există $x\in X$ cu $f(x, y)\neq 0$. Se notează $\langle x, y\rangle = f(x, y)$. Se mai spune că X și Y sînt *spații liniare în dualitate* sau că formează o *pereche duală de spații liniare* iar perechea de spații X, Y împreună cu funcționala biliniară $\langle .,. \rangle$ se notează $\langle X, Y\rangle$. Fie $\langle X, Y\rangle$ un **s.d.s.l.** Pentru orice element $y\in Y$ funcționala φ_y dată de formula $\varphi_y(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall x\in X$, este liniară, iar aplicația $y\to\varphi_y$ este un izomorfism între spațiul liniar Y și un subspațiu liniar al spațiului X^l al funcționalelor liniare definite pe X. Se identifică Y cu imaginea sa prin izomorfismul menționat, *i.e.* se consideră $Y\subset X^l$. În mod analog, se consideră $X\subset Y^l$. Cea mai puțin fină topologie pe X pentru care orice funcțională φ_y este continuă se numește *topologia slabă* pe X și se notează $\sigma(X, Y)$. În mod analog se definește topologia slabă $\sigma(Y, X)$ pe Y. Orice funcțională liniară f pe X care este continuă în topologia slabă se reprezintă în mod unic sub forma $f(x) = \langle x, y\rangle$, $x\in X$. Dacă $A\subset X$, se numește *polara* lui A și se notează A°, mulțimea

$$A^\circ = \{y\in Y \mid \operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leqslant 1,\ \forall x\in A\}.$$

Dacă mulțimea A este echilibrată, atunci $A^\circ = \{y\in Y \mid |\langle x, y\rangle| \leqslant 1\ \forall x\in A\}$, iar dacă G este un subspațiu liniar, atunci $G^\circ = \{y\in Y \mid \langle x, y\rangle = 0,\ \forall x\in G\}$. Oricare ar fi submulțimea A a lui X, polara sa A° este o mulțime echilibrată și închisă în topologia slabă. O topologie local convexă τ pe X se spune că este *compatibilă cu dualitatea*, dacă $Y = X^*_\tau$ (conjugatul lui X în raport cu τ). Topologia slabă pe X este compatibilă cu dualitatea. Dacă τ este o topologie local convexă separată pe X, compatibilă cu dualitatea, atunci pentru orice submulțime convexă A a lui X, închiderea sa în topologia τ coincide cu închiderea sa în topologia slabă. Să notăm acum cu $\mathcal{B}$ mulțimea tuturor submulțimilor echilibrate și convexe ale lui Y care sînt compacte în topologia $\sigma(Y, X)$. Pentru orice $B\in\mathcal{B}$ fie $p_B(x) = \sup\{|\langle x, y\rangle| \mid y\in B\}$, $x\in X$. Funcționala p_B este o seminormă pe X. Topologia definită de familia de seminorme $\{p_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ se numește *topologia lui Mackey* pe X și se notează $\mu(X, Y)$. O topologie local convexă separată τ pe X este compatibilă cu dualitatea dacă și numai dacă $\sigma(X, Y) \leqslant \tau \leqslant \mu(X, Y)$ (*teorema lui G. W. Mackey* și *R. F. Arens*). Se numește *topologia tare* pe X, și se notează $\beta(X, Y)$, topologia convergenței uniforme pe mulțimea tuturor părților slab mărginite ale lui Y. Topologia $\beta(X, Y)$ nu este, în general, compatibilă cu dualitatea.

Dacă Z este un spaţiu local convex separat oarecare, atunci Z şi Z^* (conjugatul lui Z) formează un **s.d.s.l.** în raport cu funcţionala biliniară $\langle z, g\rangle = g(z)$, $z \in Z$, $g \in Z^*$. Topologia $\sigma(Z, Z^*)$ se numeşte şi *topologia slăbită* pe Z. Dacă topologia spaţiului Z coincide cu topologia lui Mackey $\mu(Z, Z^*)$, atunci Z se numeşte *spaţiu Mackey*. Spaţiile bornologice separate şi spaţiile tonelate separate sînt spaţii Mackey. (*R. C.*)

sistem fundamental de împrejurimi v. **structură uniformă**

sistem fundamental de mulţimi mărginite v. **mulţime mărginită topologic**

sistem fundamental de vecinătăţi v. **bază de vecinătăţi**

sistem inductiv într-o categorie v. **functor**

sistem liniar de ecuaţii diferenţiale, sistem de forma $x' = A(t)x$, $A(t)$ matrice. Mulţimea soluţiilor unui **s.l.e. d.** formează un spaţiu vectorial de dimensiune egală cu numărul de ecuaţii ale sistemului. (*A. H.*)

sistem parabolic, sistem (cu coeficienţi constanţi) de forma

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}(\mathrm{D})\, u_k, \quad j = 1, \ldots, m,$$

unde $P_{jk}(\mathrm{D})$ sînt operatori diferenţiali liniari de ordin cel mult p şi cu proprietatea că funcţia $\bigwedge(s) = \max\limits_j \operatorname{Re} \lambda_j(s)$, pentru valorile reale $s = \sigma$ ale variabilei, verifică inegalitatea $\bigwedge(\sigma) \leqslant -C\,|\sigma|^h + C_1$ cu $C > 0$, $h > 0$. Aici λ_j sînt valorile proprii ale matricii $P(S) = (P_{jk}(s))$, $s = \sigma + \mathrm{i}\tau$. Exponentul h se numeşte *exponentul de parabolicitate al sistemului*. Un caz particular important de **s.p.** îl constituie sistemele p-parabolice introduse de I. G. Petrovski. Acestea sînt caracterizate de următoarea proprietate: dacă se notează cu $\widetilde{P}(s)$ partea de grad maxim a matricii $P(s)$ şi dacă $\widetilde{\lambda}_1(s), \ldots, \widetilde{\lambda}_m(s)$ sînt valorile sale proprii, atunci pentru $|\sigma| = 1$, $\max \operatorname{Re} \widetilde{\lambda}_j(\sigma) < -\omega$, unde ω este o constantă pozitivă. Se arată că în acest caz exponentul de parabolicitate h coincide cu ordinul p al sistemului. Problema lui Cauchy nu are soluţie unică pentru **s.p.**, dar sînt determinate clase de unicitate. (*G. G.*)

sistem proiectiv de spaţii cu măsură v. **măsură pe spaţii produs**

sistem proiectiv într-o categorie v. **functor**

sistem supradeterminat, sistem de ecuaţii cu derivate parţiale, liniare, în care numărul ecuaţiilor este mai mare decît numărul necunoscutelor. Un astfel de sistem este, de exemplu, sistemul Cauchy-Riemann $\bar{\partial} u = f$ în $\mathbb{C}^n$ cu $n > 1$. În cazul în care operatorii diferenţiali sînt cu coeficienţi constanţi, principiul fundamental care descrie reprezentarea soluţiilor unui astfel de sistem permite obţinerea de rezultate generale privind rezolubilitatea sistemului, regularitatea, prelungirea soluţiilor. Astfel, dacă $P(\mathrm{D})$ este o matrice $(P_{ij}(\mathrm{D}))$, sistemul $P(\mathrm{D})u = f$ are soluţii (pe mulţimi deschise convexe) dacă şi numai dacă f verifică condiţiile de compatibilitate $R(\mathrm{D})f = 0$. Prin analogie cu cazul scalar, în care existenţa soluţiilor ecuaţiei $P(\mathrm{D})u = f$ într-o mulţime deschisă Ω este legată de P-convexitatea lui Ω, şi în cazul sistemelor se poate introduce o noţiune de convexitate ce joacă un rol asemănător. Fie P o matrice cu t linii şi s coloane, cu coeficienţi polinoame în $z = (z_1, \ldots, z_n)$. (Acestei matrici i se asociază sistemul $P(\mathrm{D})$, unde $\mathrm{D} = (\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n)$ cu $\mathrm{D}_k = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ prin intermediul transformării Fourier). În cele ce urmează A va fi inelul polinoamelor

în n determinate peste $\mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. Dacă ${}^tP$ este transpusa matricii P, se poate considera morfismul $A^t \xrightarrow{{}^tP} A^s$ definit prin

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \to {}^tPu = (w_1, \ldots, w_s) \text{ cu } w_k = \sum_i P_{ki} u_i.$$

Există atunci o matrice P_1 (cu coeficienţi polinomiali) astfel ca şirul $A^{t_2} \xrightarrow{{}^tP_1} A^t \xrightarrow{{}^tP} A^s$ să fie exact. Exactitatea înseamnă, la nivel de operatori diferenţiali, că orice relaţie $Q(\mathrm{D})w = 0$ rezultă din $R(\mathrm{D})w = P_1(\mathrm{D})w = 0$; acestea sînt condiţiile de compatibilitate. Fie acum Φ un spaţiu de distribuţii, care să fie un A-modul topologic, fie M un A-modul de tip finit şi fie

$$M_* \ldots \longrightarrow A^{t_{k+1}} \xrightarrow{{}^tP_k} A^{t_k} \to \ldots \xrightarrow{{}^tP_1} A^t \xrightarrow{{}^tP} A^s \longrightarrow M = 0$$

o rezoluţie a lui M prin module libere. Se consideră complexul asociat

$$0 \longrightarrow \Phi_P \longrightarrow \Phi^s \xrightarrow{P} \Phi^t \xrightarrow{P_1} \ldots \longrightarrow \Phi^{t_k} \xrightarrow{P_k} \Phi^{t_{k+1}} \longrightarrow \ldots$$

notat cu $\operatorname{Hom}(M_*, \Phi)$. Aici $\Phi_P = \operatorname{Ker} P = \operatorname{Hom}(M, \Phi)$ este mulţimea soluţiilor sistemului $P(\mathrm{D})u = 0$. Dacă se notează cu

$$\operatorname{Ext}^i(M, \Phi) = \Phi_{P_i} / P_{i-1}\Phi^{t_{i-1}}, \; i = 1, 2, \ldots, \text{ cu } t_1 = t,\ t_0 = s,$$

se spune că modulul M este Φ-convex dacă complexul $\operatorname{Hom}(M_*, \Phi)$ este exact. În cazul $s = t$ şi $\det P$ nu este identic nul, rezultă $P_1(z) \equiv 0$ şi M-convexitatea este echivalentă cu surjectivitatea aplicaţiei $\Phi^s \xrightarrow{P} \Phi^t \to 0$, deci rezolubilitatea sistemului neomogen $P(\mathrm{D})u = w$ pentru orice $w \in \Phi^t$. Dacă $\mathcal{E}$ este un subspaţiu al lui Φ (care este şi A-modul) şi dacă $E_M = \operatorname{Hom}(M, \mathcal{E})$, se spune că Φ este *tare M-convex* dacă este M-convex iar E_M este dens în $\Phi_M = \operatorname{Hom}(M, \Phi) = \operatorname{Ker} P = \Phi_P$. Această ultimă noţiune este deci legată de aproximarea soluţiilor sistemului prin soluţii particulare. Astfel, spaţiul tuturor exponenţialelor polinoame este tare convex în raport cu orice A-modul finit M. Au loc următoarele rezultate generale: 1) Dacă Ω este un domeniu convex din $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}^*(\Omega)$ (= spaţiul distribuţiilor pe Ω) este tare M-convex pentru orice A-modul M de tip finit. 2) Acelaşi rezultat este valabil pentru $\mathcal{D}^{*F}(\Omega)$ (= spaţiul distribuţiilor de ordin finit pe Ω). 3) Dacă $\mathcal{D}^*(\Omega)$ şi $C^\infty(\Omega) = (\mathcal{E}\,\Omega)$ sînt M convexe pentru orice A-modul de tip finit M, atunci toate componentele conexe ale mulţimii deschise Ω sînt convexe, iar dacă $\mathcal{D}^*(\Omega)$ şi $\mathcal{E}(\Omega)$ sînt tare M-convexe, mulţimea Ω rezultă convexă. Rezultatele de mai sus se datoresc lui Malgrange, Ehrenpreis şi, în forma prezentată aici, lui Palamodov. Alte rezultate importante în această direcţie se datorează lui Andreotti. Se pot considera pentru orice A-modul de tip finit M fascicolul $\Omega \to \Phi_M(\Omega)$ al soluţiilor sistemului $P(\mathrm{D})u = 0$ ce aparţin lui $[\Phi(\Omega)]^s$, unde $M \simeq A^s / {}^tPA^t$, cu aplicaţiile de restricţie evidente, fascicol notat Φ_M, precum şi fascicolele $\Omega \to \mathcal{D}^*(\Omega)$, respectiv $\Omega \to \mathcal{E}(\Omega)$. Dacă se notează cu $H^p(\mathcal{U}, \Phi_M)$ al p-lea grup de coomologie asociată unei acoperiri $\mathcal{U}$ a mulţimii deschise Ω, acoperirea fiind local finită, deschisă şi convexă, atunci au loc izomorfismele $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{D}^*_M) \simeq \operatorname{Ext}^p(M, \mathcal{D}^*(\Omega))$, respectiv $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{E}_M) \simeq \operatorname{Ext}^p(M, \mathcal{E}(\Omega))$ pentru $p =$

$= 0, 1, 2, \ldots$, aceste izomorfisme fiind compatibile cu operatorii de restricție respectivi. Andreotti și Nacinovich au obținut condiții necesare și suficiente pentru ca sistemul $P(\mathrm{D})u = f$ să aibă soluții real analitice pentru orice f real analitic ce verifică (în domenii convexe) condițiile de compatibilitate. Aceasta a fost posibil datorită formulării coomologice a problemei, ca o teoremă de anulare a unui grup de coomologie, și studiului amănunțit al varietății caracteristice a sistemului. După cum se vede, exprimarea rezultatelor în cazul sistemelor utilizează în mod natural noțiuni de natură coomologică. Pe de altă parte, ceea ce este important este nu atît asistemul $P(\mathrm{D})u = 0$ cît fascicolul său de soluții (sisteme diferite pot avea același fascicol de soluții). De aceea este necesar un studiu intrinsec al sistemelor, mai precis, al modulului peste inelul operatorilor diferențial definit de un astfel de sistem. Rezultatele semnificative au loc doar în cazul sistemelor cu coeficienți analitici. Fie K un policilindru din $\mathbb{R}^n$ (sau $\mathbb{C}^n$) ($K = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ (sau $\mathbb{R}^n$), cu $|x_i| \leqslant r_i\}$. Fie $\mathcal{O} = \mathcal{O}(K)$ inelul funcțiilor analitice pe K și $\mathcal{D} = \mathcal{D}(K)$ inelul operatorilor diferențiali cu coeficienți din $\mathcal{O}(K)$; $\mathcal{D}$ este desigur necomutativ. Un sistem diferențial pe K este, prin definiție, un $\mathcal{D}$-modul la stînga M de prezentare finită, *i.e.* pentru care există un șir exact: $\mathcal{D}^p \xrightarrow{p} \mathcal{D}^q \xrightarrow{u} M \to 0$. Morfismul (de $\mathcal{D}$-module stîngi) este dat de o matrice $R = (R_{ij})$, unde $R_{ij} \in \mathcal{D}$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, prin

$$\rho(P_1, \ldots, P_p) = \left(\sum_{i=1}^{p} P_i R_{ij}\right)_{j=1, \ldots, q}.$$

Cu această definiție sisteme diferite, în sens clasic, pot să corespundă unui aceluiași $\mathcal{D}$-modul $\mathcal{M}$. Obiectul semnificativ este $\mathcal{D}$-modulul $\mathcal{M}$, și nu diferitele sale prezentări de tip finit. Inelul $\mathcal{D} = \mathcal{D}(K)$ este noetherian (*i.e.* orice ideal (la stînga) al lui $\mathcal{D}$ este de tip finit); ca o consecință a acestui fapt, pentru ca $\mathcal{D}$-modulul $\mathcal{M}$ să fie de prezentare finită este suficient ca el să fie de tip finit. Dacă se consideră fascicolul $\Omega \to \mathcal{D}(\Omega)$ peste $\mathbb{R}^n$ (sau $\mathbb{C}^n$), sau, mai general, peste o varietate analitică complexă, acest fascicol fiind notat de asemenea cu $\mathcal{D}(\Omega)$, rezultă coerent (v. **fascicol coerent**). Notînd cu $\mathcal{D}_m$ subfascicolul operatorilor diferențiali de ordin cel mult m, se obține pe $\mathcal{D}$ o filtrare. Graduatul asociat lui $\mathcal{D}$, gr $\mathcal{D}$, este definit ca fiind $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathcal{D}_m/\mathcal{D}_{m-1}$. Fie acum $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-modul la stînga, coerent (deci local el este de prezentare finită, prin urmare, conform definiției anterioare, el este local sistem diferențial). Se spune că $\mathcal{M}$ este un sistem de ecuații cu derivate parțiale. Pentru un astfel de $\mathcal{D}$-modul, se consideră o filtrare a sa; aceasta este, prin definiție, un șir crescător de $\mathcal{O}$-module $\mathcal{M}_k$ astfel încît: i) $\mathcal{M} = \bigcup_k \mathcal{M}_k$; ii) $\mathcal{D}_l \mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+l}$ pentru orice k, l; filtrarea este „bună" dacă: a) pe orice k, $\mathcal{M}_k$ este $\mathcal{O}$-coerent (aici $\mathcal{O}$ este fascicolul structural); b) există un $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\mathcal{D}_l \mathcal{M}_{k_0} = \mathcal{M}_{k_0+l}$ pe orice $l \in \mathbb{N}$. Local, orice $\mathcal{D}$-modul coerent admite o filtrare „bună". Se poate considera graduatul lui $\mathcal{M}$ asociat acestei filtrări; pe deschiși Ω suficient de mici (pentru ca filtrarea să fie „bună"), gr $\mathcal{M} \mid \Omega$ este un gr $\mathcal{D} \mid \Omega$ modul coerent. Aceasta permite definirea varietății caracteristice (v. **varietate caracteristică**) situată în fibratul cotangent (și care nu depinde de filtrarea „bună" aleasă). În ceea ce privește varietatea caracteristică char (M), rezultatele principale sînt: a) *Inegalitatea lui Bernstein.* Dacă $\mathcal{M}$ este $\mathcal{D}_X$-coerent în orice punct x al suportului lui $\mathcal{M}$ (suportul lui $\mathcal{M}$ este, prin definiție, char ($\mathcal{M}$) $\cap X$, X fiind

identificat cu secțiunea nulă din T^*X), $n \leqslant \dim_x \mathcal{M} \leqslant 2n$, unde n este dimensiunea varietății X; b) Involutivitatea varietății caracteristice (v. **varietate caracteristică**). Noțiunea de soluție în acest context general se definește astfel: o soluție a unui sistem diferențial $\mathcal{M}$, cu valori într-un $\mathcal{D}$-modul sting Φ este un morfism de $\mathcal{D}$-module stîngi de la $\mathcal{M}$ la Φ; dacă morfismul respectiv este injectiv soluția se va numi *generică*. Cele mai interesante sisteme sînt cele maximal supradeterminate (familiar vorbind cele care prin adăugarea unei noi ecuații nu mai au soluții). Aceasta revine la faptul că varietatea caracteristică este de dimensiune minimă, deci din char $(\mathcal{M}) = n$ (unde, dacă varietatea X pe care este definit $\mathcal{M}$ este analitică reală, se considera complexificarea varietății caracteristice). Astfel de sisteme se numesc *olonome*. Ele au fost introduse și studiate de M. Sato și în special de M. Kashiwara. Fie X o varietate analitică complexă, conexă, de dimensiune n și fie $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-modul coerent pe X și $V = \text{char}\,(\mathcal{M})$, care este o mulțime analitică în T^*X; atunci dacă V_α este o componentă ireductibilă a lui V, $V_\alpha = T^*_{S_\alpha} X$, unde $S_\alpha = \pi(V_\alpha)$ este o submulțime analitică ireductibilă din X, iar $T^*_{S_\alpha} X$ fibratul conormal la S_α. *Locul singular* al sistemului olonom $\mathcal{M}$ este mulțimea analitică $S = \bigcup\limits_{\dim S_\alpha < n} S_\alpha$.
Atunci are loc următorul rezultat: În afara locului său singular, sistemul olonom este sau nul sau este un $\mathcal{O}_X$-modul local liber de tip finit (injecția $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{D}_X$ induce pe $\mathcal{M}$ o structură de $\mathcal{O}_X$-modul). Modulele de acest tip se numesc *conexiuni*, local ele sînt triviale, în sensul că orice conexiune este izomorfă cu o sumă directă finită de sisteme de Rham (un sistem de Rham fiind $\mathcal{O}_X$ cu structura naturală de $\mathcal{D}_X$-modul). Acest fapt arată că toate informațiile locale privind modulul $\mathcal{M}$ sînt concentrate pe locul său singular. În afara faptului că $\mathcal{D}$-modulele olonome permit utilizarea tehnicilor cQomologice, ele sînt importante și pentru că a fi o soluție a unui sistem olonom implică informații privind regularitatea entității respective. În acest context s-a reușit generalizarea la cazul $n > 1$ a noțiunii de ecuație cu singularitate regulată etc. Numeroase aplicații în studiul singularităților, ecuații cu derivate parțiale, teoria reprezentărilor de grupuri, studiul integralelor Feynmann, justifică utilitatea acestui punct de vedere. Există și o altă abordare a **s.s.**, utilă îndeosebi în teoria pseudogrupurilor și bazată pe ceea ce se numește cQomologia Spencer, rezultatele semnificative fiind obținute de asemenea în categoria analitică. (*G. G.*)

sistemul adjunct al unui sistem liniar de ecuații diferențiale, sistemul $y' = -A^T(t)y$ asociat sistemului $x' = A(t)x$ (A^T este transpusa matricii A). Dacă x este soluție a sistemului liniar iar y este soluție a sistemului adjunct, funcția definită prin $t \to (x(t), y(t))$, unde $(\cdot\,,\,\cdot)$ este produsul scalar din $\mathbb{R}^n$, este constantă. (*A. H.*)

sistemul Cauchy-Riemann, sistem supradeterminat care constituie generalizarea la cazul $n > 1$ a ecuației Cauchy-Riemann. Fie $\mathbb{C}^n$, identificat cu $\mathbb{R}^{2n}$, $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, $k = 1, \dots, n$. Pentru orice funcție u cu valori complexe de clasă C^1, se definește forma diferențială $\bar{\partial} u$ prin

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k}\, \mathrm{d}\bar{z}_k, \text{ unde } \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y_k}\right).$$

Ecuația $\bar{\partial} u = 0$ revine la sistemul supradeterminat $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} = 0$, $k = 1, \dots, n$, și este echivalentă cu olomorfia funcției $u(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = u(z_1, \dots, z_n)$:

ecuația neomogenă $\bar{\partial} u = f$ impune formei f condiția de compatibilitate $\bar{\partial} f = 0$. Se verifică $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$ și se obține astfel un complex (eliptic) $0 \to \bigwedge^{0,1}(\Omega) \to \bigwedge^{0,2}(\Omega) \to \bigwedge^{0,3}(\Omega) \to \ldots$ unde cu $\bigwedge^{0,q}(\Omega)$ s-a notat spațiul formelor de tip $(0, q)$ cu coeficienți C^∞. Acest complex (analogul complexului lui de Rham în cazul real) se numește *complexul Dolbeault* și joacă un rol fundamental în analiza complexă. Teoremele de existență cele mai importante pentru **s.C.R.** sînt: 1) Lema lui Dolbeault-Grothendieck (de caracter elementar); 2) Teoremele de existență pentru domenii pseudoconvexe; 3) Soluția problemei $\bar{\partial}$-Neumann. În cazul domeniilor strict pseudoconvexe se obțin reprezentări integrale pentru soluții ce permit evaluări precise. (*G. G.*)

sistemul vecinătăților unui punct, mulțimea tuturor vecinătăților unui punct într-un spațiu topologic. Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic, $x \in \mathcal{X}$ și $\mathcal{V}_x$ sistemul vecinătăților punctului x. Sistemul $\mathcal{V}_x$ are următoarele proprietăți: i) $x \in V$, $\forall V \in \mathcal{V}_x$; ii) Dacă $A \subset \mathcal{X}$ și există $V \in \mathcal{V}_x$ astfel ca $V \subset A$, atunci $A \in \mathcal{V}_x$; iii) Dacă $V, U \in \mathcal{V}_x$, atunci $V \cap U \in \mathcal{V}_x$; iv) Pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$ există $W \in \mathcal{V}_x$ astfel încît $V \in \mathcal{V}_z$, $\forall z \in W$. Fie $\mathcal{X}$ o mulțime și $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ familia părților lui $\mathcal{X}$. Fie T o aplicație definită pe $\mathcal{X}$, cu valori în $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$, astfel încît pentru orice $x \in \mathcal{X}$, $T(x)$ are proprietățile: i) $x \in V$, $\forall V \in T(x)$; ii) Dacă $A \subset \mathcal{X}$ și $\exists V \in T(x)$ astfel încît $V \subset A$, atunci $A \in T(x)$; iii) $V, U \in T(x) \Rightarrow V \cap U \in T(x)$; iv) Pentru orice $V \in T(x)$ există $W \in T(x)$ astfel încît $V \in T(z)$ pentru orice $z \in W$. Există atunci, și este unică, o topologie τ pe $\mathcal{X}$ astfel încît, pentru orice $x \in \mathcal{X}$, $T(x)$ este familia vecinătăților lui x în topologia τ. Se spune că această topologie a fost generată cu ajutorul vecinătăților. (*Gh. Gr.*)

soluție a sistemului de ecuații liniare (definit de o funcție) v. **punct singular** (al soluției unui sistem de ecuații diferențiale liniare)

soluție asimptotic stabilă v. **stabilitate asimptotică a unei soluții** (a unui sistem de ecuații diferențiale liniare)

soluție constantă v. **centru**

soluție exponențial stabilă v. **stabilitate exponențială a unei soluții** (a unui sistem de ecuații diferențiale)

soluție fundamentală Fie $\Gamma(\mathrm{D})$ un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți. Se numește **s.f.** o distribuție E cu proprietatea că $\Gamma(\mathrm{D})E = \delta$, unde δ este distribuția lui Dirac. Orice operator cu coeficienți constanți are **s.f.** (*teorema Ehrenpreis-Malgrange*). Acestea nu sînt unice căci dacă E este o **s.f.** a lui $P(\mathrm{D})$ și u o soluție a ecuației $P(\mathrm{D})u = 0$, atunci și $E_1 = E + u$ va fi o **s.f.** Proprietățile **s.f.** decid natura soluțiilor ecuației $P(\mathrm{D})u = f$. Un rezultat dificil este că orice operator diferențial liniar cu coeficienți constanți are o soluție temperată (Łojasiewicz), dar aceasta are în general foarte slabe proprietăți de regularitate. În schimb demonstrația existenței soluției elementare temperate a condus la rezultate profunde privind diviziunea printr-o funcție analitică reală; unul din acestea este inegalitatea lui Łojasiewicz, care dă o minorare a modulului unei funcții analitice reale printr-o putere a distanței la mulțimea zerourilor funcției. Se numește **s.f.** a problemei lui Cauchy, pentru un operator diferențial $P = P(\mathrm{D}_t, \mathrm{D}_x)$ cu coeficienți constanți de ordin m o distribuție $E(x, t)$ ce verifică ecuația $\Gamma E = 0$, precum și condițiile inițiale $E(x, 0) = 0$, $\frac{\partial^s E(x, 0)}{\rho t^s} = 0, s = 1, \ldots, m-2$, $\frac{\partial^{m-1}E(x, 0)}{\rho t^{m-1}} = \delta(x)$. Dacă operatorul $\Gamma(D_t, D_x)$ este hiperbolic și este omogen de ordin m, atunci utilizînd descompunerea distribuției lui Dirac în unde plane, **s.f.** a problemei lui Cauchy pentru operatorul m se poate exprima astfel (*formulele lui Herglotz-Petrovski*). Dacă n este impar

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{u+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{H=0} \delta^{(n-m)}(\Sigma x_k \xi_k + t)\, \omega$$

iar pentru n par,

$$u(t, x, \ldots, x_n) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{(n-m)!}{(2\pi)^n} \int_{H=0} \frac{\omega}{(\Sigma x_k \xi_k + t)^{n-m+1}},$$

unde $H(\xi_1, \ldots, \xi_n) = P(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ iar $\omega = \dfrac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H| \operatorname{sign}(\Sigma \xi_k H_k)}$, $d\sigma$ fiind elementul de suprafață al lui $H = 0$. (*G. G.*)

soluție în sens Carathéodory v. **problema lui Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale**

soluție în sens Filippov v. **problema lui Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale**

soluție maximală v. **problema lui Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale**

soluție stabilă v. **stabilitatea unei soluții** (a unui sistem de ecuații diferențiale)

soluții generalizate pentru sisteme de legi de conservare O funcție A definită pe $G \subset \mathbb{R}^n$ cu valori matrici definește un sistem de ecuații cu derivate parțiale cvasiliniar de forma $\partial_1 u + A(u)\,\partial_2 u = 0$. Dacă există $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ astfel încît $A(u) = (\mathrm{D}f)(u)$, unde $(\mathrm{D}f)(u)$ înseamnă derivata Fréchet a funcției f în punctul u, atunci sistemul capătă forma $\partial_1 u + \partial_2(f(u)) = 0$. Există mai multe definiții pentru noțiunea de soluție generalizată a unui astfel de sistem, motivate din punct de vedere al interpretărilor în mecanică. Noțiunea naturală este următoarea: O funcție $u: I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ local integrabilă se numește soluție generalizată a sistemului dacă pentru orice funcție φ netedă, cu suport compact în I, are loc relația

$$\iint_I [u(\partial_1 \varphi) + f(u)(\partial_2 \varphi)]\, dt\, dx = 0.$$

Altă definiție este: u se numește *soluție generalizată* a sistemului definit cu f dacă

$$\oint_\Gamma (-u\, dt + f(u)\, dx) = 0,$$

pentru orice contur închis Γ situat în I. În sfîrșit, u se numește soluție generalizată a sistemului definit de f (*soluție cu viscozitate*) dacă pentru orice matrice constantă B simetrică și pozitiv definită, există u_ε soluție a ecuației

$$\partial_1 u + \partial_2(f(u)) = \varepsilon B \partial_2^2 u$$

astfel încît $u = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon$. Soluția generalizată care verifică o condiție Cauchy de forma $u(0, x) = u_0(x)$ nu este unică. Pentru a se obține unicitatea se impun soluţiei condiţii suplimentare. Un caz simplu, semnificativ, este următorul. O funcţie $u\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aparţine clasei K dacă este de clasă C^1 pe porţiuni admiţînd discontinuităţi în punctele unui număr finit de curbe netede şi, în plus, în punctele de discontinuitate, cu excepţia posibilă a unui număr finit, există

$$u_+(t_0, x_0) = \lim_{n\to\infty} u(t_n^+, x_n^+),\ u_-(t_0, x_0) = \lim_{n\to\infty} u(t_n^-, x_n^-),$$

unde $(t_n^+, x_n^+) \to (t_0, x_0)$, $(t_n^+, x_n^+) \in D_+$, $(t_n^-, x_n^-) \to (t_0, x_0)$, $(t_n^-, x_n^-) \in D_-$, D_+ D_- fiind domeniile în care curba de discontinuitate, care conţine punctul (t_0, x_0), separă o vecinătate a punctului (t_0, x_0) conţinută în $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}$. (Valorile $u_+(t_0, x_0)$, $u_-(t_0, x_0)$ sînt independente de şirurile (t_n^+, x_n^+) respectiv (t_n^-, x_n^-) considerate). Soluţia generalizată u din clasa K a sistemului definit de f satisface condiţia E (de entropie) dacă în toate punctele de discontinuitate, cu excepţia posibilă a unui număr finit, are loc inegalitatea

$$\left[\frac{f(u_+(t_0, x_0)) - f(u)}{u_+(t_0, x_0) - u} - \frac{f(u_+(t_0, x_0)) - f(u_-(t_0, x_0))}{u_+(t_0, x_0) - u_-(t_0, x_0)}\right] (u_+(t_0, x_0) - u_-)t_0, x_0)) \geqslant 0,$$

pentru orice u situat între $u_-(t_0, x_0)$ şi $u_+(t_0, x_0)$. Se demonstrează că o soluţie generalizată din clasa K, pentru care este verificată condiţia E şi care satisface, în plus, $u(0, x) = u_0(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este unică. *(A. H.)*

soluţii liniar independente ale unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare, elemente liniar independente ale spaţiului vectorial al soluţiilor sistemului; soluţii cu proprietatea că $\sum_j c_j x_j(t) = 0$ pentru orice t implică $c_j = 0$ pentru orice j. *(A. H.)*

spaţii liniare în dualitate v. **sistem dual de spaţii liniare**

spaţii L^p Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi E un spaţiu Banach. Vom nota:

$$\Sigma = \{A \in \mathcal{T} \mid \mu(A) < \infty\} \text{ şi } \mathcal{N} = \{A \in \mathcal{T} \mid \mu(A) = 0\}.$$

Fie $0 < p < \infty$. Notăm

$\mathcal{L}_E^p(T, \mu) = \{f\colon T \to E \mid f$ este μ-măsurabilă şi $\|f\|^p$ este μ-integrabilă$\}$. Aici $\|f\|\colon T \to \mathbb{R}_+$ este funcţia definită prin $t \mapsto \|f(t)\|$. De obicei vom nota $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ în loc de $\mathcal{L}_E^p(T, \mu)$ sau $L^p(T)$ dacă T este un interval al dreptei reale şi μ este măsura Lebesgue. Dacă $E = \Gamma = (\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C})$, scriem numai $\mathcal{L}^p(\mu)$. În spaţiul $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ considerăm subspaţiul $\mathcal{N}_E(\mu) = \{f\colon T \to E \mid$ există $A \in \mathcal{N}$ cu proprietatea că $f(t) = 0$ pentru orice $t \in T \setminus A\}$. Funcţiile din $\mathcal{N}_E(\mu)$ se numesc *funcţii μ-neglijabile* (cu valori în E). Spaţiul cît $\mathcal{L}_E^p(\mu)/\mathcal{N}_E(\mu)$ se notează prin $L_E^p(\mu)$ şi elementele sale (clase de funcţii) se vor nota prin $\widetilde{f}$. Aşadar, dacă $f \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$, vom avea $\widetilde{f} \in L_E^p(\mu)$. Unii autori identifică $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ cu $L_E^p(\mu)$, scriind f în loc de $\widetilde{f}$. Dacă $1 \leqslant p < \infty$, aplicaţia $H\colon \mathcal{L}(\mu)_E^p \to \mathbb{R}_+$, definită prin $H(f) = \|f\|_p := \left(\int \|f^p\|\, d\mu\right)^{1/p}$, este o seminormă. Aşadar, $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ devine în acest caz spaţiu seminormat complet cu

seminorma $f \mapsto \|f\|_p$. Spaţiul normat asociat (este de fapt un spaţiu Banach) este chiar $L_E^p(\mu)$, normat cu norma $\widetilde{f} \mapsto \|\widetilde{f}\|_p$, unde $\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p$, pentru orice reprezentant $f \in \widetilde{f}$. Se va remarca faptul că se foloseşte aceeaşi notaţie $\|\ \|_p$ pentru a se desemna o normă şi o seminormă, dar aceste notaţii sînt tradiţionale. Pentru $f, g \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, avem

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\textit{inegalitatea lui Minkowski}).$$

Dacă $0 < p < 1$, aplicaţia definită pe $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ cu valori în $\mathbb{R}_+$ prin $f \mapsto \|f\|_p$ nu mai este o seminormă. Totuşi, şi în acest caz, spaţiul $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ devine spaţiu liniar topologic semimetrizabil complet cu sistemul fundamental de vecinătăţi ale originii dat de familia $\{V(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$, unde $V(\varepsilon) = \{f \in \mathcal{L}_E^p(\mu) \mid \|f\|_p < \varepsilon\}$. Şi aici am notat $\|f\|_p = \left(\int \|f\|^p\, d\mu\right)^{1/p}$. Spaţiul separat asociat lui $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ este $L_E^p(\mu)$ care este spaţiu liniar topologic metrizabil complet (de fapt, spaţiu cvasinormat) înzestrat cu cvasinorma $\widetilde{f} \mapsto \|\widetilde{f}\|_p$, unde am notat $\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p$ pentru orice $f \in \widetilde{f}$. În sfîrşit, definim şi spaţiul $\mathcal{L}_E^\infty(\mu)$ după cum urmează. Considerăm o funcţie oarecare $f\colon T \to E$ şi o mulţime $M \in \mathcal{N}$. Notăm $A(f, M) = \sup \{\|f(t)\| \mid t \in T \setminus M\} \in [0, \infty]$. Apoi definim $\|f\|_\infty = \inf \{A(f(m) \mid M \in \mathcal{N}\}$. Numim pe f *supremumul esenţial* al lui f (sau *adevăratul maxim* al lui f, sau *supremumul în măsură* al lui f, sau μ-*supremumul* lui f). Unii autori folosesc din acest motiv în loc de $\|f\|_\infty$ notaţiile respective: ess sup(f), sau ad max(f), sau vrai max(f) sau μ-sup(f). Prin definiţie, $\mathcal{L}_E^\infty(\mu) = \{f\colon T \to E \mid f$ este μ-măsurabilă şi $\|f\|_\infty < \infty\}$. Funcţiile din $\mathcal{L}_E^\infty(\mu)$ se numesc *funcţii măsurabile esenţial mărginite*. Spaţiul $\mathcal{L}_E^\infty(\mu)$ devine spaţiu seminormat complet cu seminorma $f \mapsto \|f\|_\infty$. Spaţiul normat asociat (spaţiu Banach) este $L_E^\infty(\mu) = \mathcal{L}_E^\infty(\mu)/\mathcal{N}_E(\mu)$ înzestrat cu norma $\widetilde{f} \mapsto \|\widetilde{f}\|_\infty := \|f\|_\infty$ pentru orice reprezentant $f \in \widetilde{f}$. Şi în acest caz unii autori identifică clasele cu funcţiile. Spaţiile $L_E^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, se numesc şi *spaţii Lebesgue*. Spaţiile $L_E^p(\mu)$, $0 < p < 1$, se numesc şi *spaţii Day*. Dacă $E = \Gamma$, scriem de obicei $L^p(\mu)$ în loc de $L_\Gamma^p(\mu)$. Spaţiile $L_E^p(\mu)$ se numesc în general *spaţii L^p*. Două numere $1 < p, q < \infty$ se numesc *numere conjugate* dacă $(1/p) + (1/q) = 1$. Prin definiţie, ∞ este conjugatul lui 1 şi 1 este conjugatul lui ∞ (*i.e.* facem convenţia $1/\infty = 0$). *Inegalitatea lui Hölder* afirmă că dacă $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, unde $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ sînt conjugate, atunci: a) Produsul fg este în $\mathcal{L}^1(\mu)$; b) Avem $\left|\int fg\, d\mu\right| \leqslant \int |fg|\, d\mu \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. *Inegalitatea lui Hölder* (varianta vectorială). Fie din nou $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ conjugate şi $f \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}_{E^*}^q(\mu)$, unde E^* este dualul lui E. Atunci funcţia (f, g) este în $\mathcal{L}^1(\mu)$ şi

$$\left|\int (f, g)\, d\mu\right| \leqslant \int |(f, g)|\, d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q,$$

unde $(f, g)\colon T \to \Gamma$ se defineşte prin $(f, g)(t) = g(t)(f(t))$. Vom considera, pentru prescurtare, un şir generalizat $\{f_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elemente din $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ (resp. din $L_E^p(\mu)$). Fie, de asemenea, $f \in \mathcal{L}_E^p(\mu)$ (resp. $\widetilde{f} \in L_E^p(\mu)$). Aici $0 < p < \infty$.

Dacă $\|f_\delta - f\|_p \xrightarrow[\delta]{} 0$ spunem că șirul generalizat $\{f_\delta\}_\delta$ *converge la f în medie de ordin p* (dacă $p = 1$, spunem de obicei că $\{f_\delta\}_\delta$ *converge la f în medie*, iar dacă $p = 2$, spunem de obicei că $\{f_\delta\}_\delta$ *converge la f în medie pătratică*). Similar, avem noțiunea de *șir generalizat Cauchy* (*șir generalizat fundamental*) *în medie de ordin p, în medie, în medie pătratică*. Mai menționăm că în spațiul $\mathcal{L}^p_E(\mu)$, spațiul vectorial al funcțiilor Σ-etajate cu valori în E este dens (și aici $0 < p < \infty$). Dacă $0 < p < \infty$ și μ este non-atomică, dualul lui $L^p(\mu)$ este nul (*teorema lui Day*). Dacă $1 \leqslant p \leqslant \infty$, să considerăm $1 \leqslant q \leqslant \infty$ astfel încît p și q sînt conjugate. Avem o aplicație liniară și izometrică H: $L^q_{E^*}(\mu) \to (L^p_E(\mu))^*$, definită prin $H(\widetilde{g}) = V$, unde $V(\widetilde{f}) = \int (f, g)\, d\mu$, pentru orice reprezentanți $f \in \widetilde{f}$, $g \in \widetilde{g}$. Cu alte cuvinte, $L^q_{E^*}(\mu)$ se scufundă în dualul lui $L^p_E(\mu)$. Dacă $1 \leqslant p < \infty$ și μ este σ-finită, atunci aplicația H este bijecție, cu alte cuvinte dualul lui $L^p_E(\mu)$ se identifică cu $L^q_E(\mu)$ dacă și numai dacă E^* are proprietatea Radon-Nikodym. Dacă $p = \infty$, avem o bijecție liniară și izometrică H: $\mathrm{ba}(\mathcal{T}, \mu, E^*) \to (L^\infty_E(\mu))^*$, dată prin $H(m) = V$ cu $V(\widetilde{f}) = \int f\, dm$ pentru orice $f \in \widetilde{f}$. Aici $\mathrm{ba}(\mathcal{T}, \mu, E^*) = \{m: \mathcal{T} \to E^* \mid m$ este aditivă, cu variație finită și $m(A) = 0$ pentru orice $A \in \mathcal{N}\}$. Integrala este cea definită la **funcții total măsurabile.** Norma pe $\mathrm{ba}(\mathcal{T}, \mu, E^*)$ este $\|m\| = |m|(T) =$ variația totală a lui m. Dacă $1 < p < \infty$, spațiul $L^p(\mu)$ este reflexiv. Spațiul $L^p_E(\mu)$ este reflexiv dacă și numai dacă $L^p(\mu)$ și E sînt reflexive. (*I. C.*)

spații $\mathcal{L}^p(\mu)$ și $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon) Fie T un spațiu local compact și μ o măsură Radon pozitivă pe T. Vom considera un spațiu Banach F. Pentru un număr $1 \leqslant p < \infty$ se consideră spațiul $\mathcal{F}^p_F(\mu)$ definit prin $\mathcal{F}^p_F(\mu) = \{f: T \to F \mid N_p(f) < \infty\}$, unde $N_p(f) = \left(\int^* |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$. Se arată că N_p este seminormă pe $\mathcal{F}^p_F(\mu)$. Dacă $\mathcal{K}(T, F) = \{f: T \to F \mid f$ este continuă cu suport compact$\}$, vom nota prin $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ aderența lui $\mathcal{K}(T, F)$ în $\mathcal{F}^p_F(\mu)$ (deoarece $\mathcal{K}(T, F) \subset \mathcal{F}^p_F(\mu)$). Spațiul vectorial $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ este seminormat cu seminorma N_p. Dacă $F = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, vom scrie $\mathcal{L}^p(\mu)$. Funcțiile din $\mathcal{L}^1_F(\mu)$ se numesc *uncții μ-integrabile* (*funcții μ-sumabile*), sau *funcții integrabile în raport cu măsura Radon* μ. În general, funcțiile din $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ se numesc *funcții de putere p integrabilă în raport cu* μ. Dacă $p = 2$, vorbim de *funcții de pătrat integrabi[l] în raport cu* μ. Aplicația liniară H: $\mathcal{K}(T, F) \to F$, definită prin $H(f) = \int f\, d\mu$, este continuă, deci se prelungește în mod unic la o aplicație V: $\mathcal{L}^1_F(\mu) \to F$. Pentru orice f din $\mathcal{L}^1_F(\mu)$ vom pune $V(f) := \int f\, d\mu$ și vom numi $\int f\, d\mu$ *integrala funcției f în raport cu măsura Radon* μ. O mulțime $A \subset T$ se numește *μ-integrabilă* (sau *integrabilă în raport cu măsura Radon* μ) dacă $\varphi_A \in L^1(\mu)$. În acest caz vom nota $\mu(A) = \int \varphi_A\, d\mu$. Avem de fapt $\mu(A) = \mu^*(A)$. Se

arată că mulțimile μ-integrabile formează un semitrib notat cu $\Sigma(\mu)$ și μ definită ca mai sus pe acest semitrib, *i.e.* μ: $\Sigma(\mu) \to \mathbb{R}_+$, $\mu(A) = \mu^*(A)$, este măsură pozitivă. Avem următoarele criterii de integrabilitate: a) Dacă f: $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este inferior sau superior semicontinuă, atunci $f \in \mathcal{T}^1(\mu) \Leftrightarrow \int^* f\, d\mu < \infty$; b) f: $T \to \dot{\mathbb{R}}_+$ este μ-integrabilă $\Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există două funcții pozitive și finite pe T, g superior semicontinuă și h inferior semicontinuă, astfel ca $g \leqslant f \leqslant h$ și $\int (h - g)\, d\mu < \varepsilon$; c) O mulțime deschisă sau închisă care este relativ compactă este μ-integrabilă; d) Fie $A \subset T$. Atunci A este μ-integrabilă $\Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există un compact $K \subset A$ și o mulțime μ-integrabilă deschisă $G \supset A$, astfel încît $\mu(G) - \mu(K) < \varepsilon$. Pentru orice mulțime A μ-integrabilă, avem $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K$ compactă$\}$. La fel, dacă U este deschisă, $\mu^*(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U, K$ compactă$\}$. Dacă f: $T \to F$, atunci $f \in \mathcal{L}^p_F(\mu)$ dacă și numai dacă f este μ-măsurabilă și $N_p(f) < \infty$. În particular, o mulțime $A \subset T$ este μ-integrabilă dacă și numai dacă A este μ-măsurabilă și $\mu^*(A) < \infty$. Spațiul separat asociat lui $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ se notează prin $L^p_F(\mu)$. Așadar, $L^p_F(\mu)$ are drept elemente clase de echivalență față de relația $f \sim g \Leftrightarrow N_p(f - g) = 0$. Se arată că $L^p_F(\mu)$ cu norma $\|\widetilde{f}\|_p$, unde $\|\widetilde{f}\|_p = N_p(f)$ pentru orice f în $\widetilde{f}$, este spațiu Banach. O funcție μ-măsurabilă f: $T \to F$ se numește *funcție esențial mărginită în raport cu măsura Radon* μ dacă $N_\infty(f) < \infty$, unde $N_\infty(f) = \inf\{\alpha > 0 \mid \|f(t)\| \leqslant \alpha$ local μ-a.p.t.$\}$. Atunci spațiul $\mathcal{L}^\infty_F(\mu)$ al funcțiilor esențial mărginite în raport cu măsura Radon μ devine spațiu seminormat cu seminorma $f \mapsto N_\infty(f)$. Se mai notează $N_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup}(f)$ (și se numește *supremumul esențial al lui f*), sau $N_\infty(f) = \mu\text{-}\sup(f)$ sau $N_\infty(f) = \operatorname{ad\,max}(f)$ (și se numește *adevăratul maxim al lui f*) sau $N_\infty(f) = \|f\|_\infty$. Spațiul separat asociat se notează prin $L^\infty_F(\mu)$ și este un spațiu Banach. De fapt, $L^\infty_F(\mu)$ este factorizarea lui $\mathcal{L}^\infty_F(\mu)$ prin subspațiul funcțiilor $: T \to F$ care sînt local neglijabile. Dacă $H \subset T$ este o mulțime μ-neglijabilă și f este o funcție definită pe $T \setminus H$ cu proprietatea că există o funcție μ-integrabilă g definită pe T astfel încît $g(f) = f(t)$ μ-a.p.t. (pe $T \setminus H$), spunem că funcția f definită μ-a.p.t. este μ-integrabilă și punem

$$\int f\, d\mu := \int g\, d\mu. \quad (I.\ C.)$$

spațiile lui Sobolev Fie T o parte deschisă a spațiului $\mathbb{R}^m$ (cu topologia obișnuită), fie $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ și $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$. Fie $\mathcal{H}$ mulțimea funcțiilor complexe φ local integrabile definite pe T, care au proprietatea: pentru orice $k = (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m) \in \mathbb{N}_0^m$, cu $\sum_{j=1}^m \varkappa_j \leqslant n$, funcția φ admite o derivată generalizată $D^k \varphi$ care este o funcție p-integrabilă pe T. Se introduce în $\mathcal{H}$ relația de echivalență: $\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ a.p.t. Se notează cu $W^{np}(T)$ mulțimea claselor de echivalenţă. Această mulţime se organizează ca spaţiu liniar normat cu operaţiile obişnuite cu clasele de echivalenţă şi cu norma

$$\|\varphi\| = \left(\sum_{\nu(k)\leqslant n}\int_T |D^k\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p},$$

unde $\nu(k) = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j$ şi notîndu-se tot cu φ clasa de echivalenţă dată de o funcţie φ. Spaţiile $W^{np}(T)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$, sînt spaţii Banach numite **s.S.** Pentru $p = 2$ ele sînt spaţii Hilbert. *(R. C.)*

spaţiu atomic v. **element discret**

spaţiu Baire, spaţiu topologic în care orice mulţime deschisă nevidă este de categoria a II-a Baire. Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu topologic. Afirmaţiile următoare sînt echivalente: i) $\mathcal{X}$ este un **s.B**; ii) Orice intersecţie numărabilă de mulţimi deschise şi dense în $\mathcal{X}$ este o mulţime densă în $\mathcal{X}$; iii) Orice mulţime de categoria I-a are interior vid. Spaţiile local compacte, spaţiile metrice complete sînt **s.B.** (*teorema lui Baire*). Orice mulţime deschisă nevidă a unui **s.B.** este un **s.B.** Într-un **s.B.** complementara oricărei mulţimi de categoria I-a este un **s.B.** Din următoarea teoremă de mărginire uniformă se pot obţine diverse variante ale *principiului mărginirii uniforme*: Fie $\mathcal{X}$ un **s.B.** şi $\{f_i\}_{i\in I}$ o familie de funcţii continue, definite pe $\mathcal{X}$, cu valori reale, avînd proprietatea că pentru orice $x \in \mathcal{X}$ există $M_x > 0$ astfel încît $|f_i(x)| \leqslant M_x$ pentru orice $i \in I$. Există atunci o mulţime deschisă nevidă $D \subset \mathcal{X}$ şi $K > 0$ astfel încît $|f_i(x)| \leqslant K$ pentru orice $x \in D$ şi pentru orice $i \in I$. *(Gh. Gr.)*

spaţiu Banach v. **spaţiu liniar normat**

spaţiu bornologic, spaţiu local convex în care orice submulţime echilibrată, convexă şi bornivoră este o vecinătate a originii. Orice spaţiu local convex metrizabil este un **s.b.** *(R. C.)*

spaţiu $\mathbb{C}$-analitic Dacă X şi S sînt două varietăţi complexe şi $f\colon X \to S$ o aplicaţie olomorfă, atunci fibrele $f^{-1}(s)$, $s \in S$, ale aplicaţiei f nu sînt în general subvarietăţi complexe ale lui X. Un contraexemplu este fibra $f^{-1}(0)$ a aplicaţiei $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z_1, z_2) := z_1 z_2$, sau fibra $f^{-1}(0)$ a aplicaţiei $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z_1, z_2) = z_1^2 - z_2^3$. Pe de altă parte, fibrele aplicaţiilor olomorfe joacă un rol important în analiza complexă. De aceea a devenit necesară lărgirea cîmpului de investigaţii al analizei complexe în aşa fel încît acesta să includă în afară de varietăţi complexe şi fibrele aplicaţiilor olomorfe. Aşa s-a ajuns la noţiunea de **s. $\mathbb{C}$ a.** (sau *spaţiu complex*) ca noţiune fundamentală a analizei complexe. Procedeul de generalizare care a condus la noţiunea actuală de **s. $\mathbb{C}$ a.** a cuprins două etape. În prima etapă a fost introdusă noţiunea de **s. $\mathbb{C}$ a.** *redus* de către H. Cartan şi J. P. Serre (de unde şi numele de **s. $\mathbb{C}$ a.** *în sensul lui Cartan-Serre* dat **s. $\mathbb{C}$ a.** reduse). Deşi simplă şi naturală noţiunea de **s. $\mathbb{C}$ a.** redus nu permite să distingem, de exemplu, între fibrele unei aplicaţii olomorfe $f\colon X \to \mathbb{C}$, X varietate complexă, şi fibrele aplicaţiei $f^k\colon X \to \mathbb{C}$, unde k este un întreg $\geqslant 2$ şi $f^k = f \cdot f \cdot \ldots \cdot f$ (de k ori). De aceea a fost necesară, într-o a doua etapă, introducerea unei noţiuni mai generale (datorată lui Grothendieck) de **s. $\mathbb{C}$ a.** Pentru definiţia formală, să considerăm un model $(D, \mathcal{O}_D)$ de varietate complexă; aceasta înseamnă că D

este o mulţime deschisă într-un spaţiu numeric complex $\mathbb{C}^n$ şi $\mathcal{O}_D$ fascicolul de funcţii olomorfe pe mulţimile deschise ale lui D. O mulţime închisă $M \subset D$ se numeşte *mulţime analitică* dacă, pentru orice punct $a \in M$, există o mulţime deschisă $U \ni a$ în D şi un număr finit de funcţii olomorfe $f_1, \ldots, f_N$ pe U astfel încît $M \cap U = \{z \in U \mid f_1(z) = \ldots = f_N(z) = 0\}$. Dacă V este o mulţime deschisă în M (*i.e.* $V = M \cap U$ pentru o mulţime deschisă U în D), vom numi *funcţie olomorfă* pe V orice funcţie $f\colon V \to \mathbb{C}$ care admite prelungiri olomorfe locale în spaţiul ambiant D. Funcţiile olomorfe pe mulţimile deschise ale lui M formează un fascicol de $\mathbb{C}$-algebre pe care îl vom nota prin $\mathcal{O}_M^{red}$. Spaţiile inelate $(M, \mathcal{O}_M^{red})$ astfel obţinute se numesc *modele de* **s. $\mathbb{C}$ a.** *reduse*. Fie $M \subset D$ o mulţime analitică (închisă) şi $\mathcal{J}_M \subset \mathcal{O}_D$ idealul lui $\mathcal{O}_D$ definit prin $\mathcal{J}_M(U) = \{f \in \mathcal{O}_D(U) \mid f|_{U\cap M} = 0\}$ pentru orice mulţime deschisă U în D; $\mathcal{J}_M$ se numeşte *idealul lui Cartan* asociat mulţimii analitice M. Se vede atunci fără dificultate că $M := \operatorname{supp} \mathcal{O}_D/\mathcal{J}_M$ şi $\mathcal{O}_D^{red} := \mathcal{O}_D/\mathcal{J}_M|M$. Un fapt mai puţin elementar este că idealul $\mathcal{J}_M$ este de tip finit *(teorema de coerenţă a lui H. Cartan)*. Acest fapt sugerează definiţia următoare: se numeşte *model de* **s. $\mathbb{C}$ a.** orice spaţiu $\mathbb{C}$-inelat de forma $(M, \mathcal{O}_M)$, cu $M = \operatorname{supp} \mathcal{O}_D/\mathcal{J}$ şi $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_D/\mathcal{J}|M$, unde $(D, \mathcal{O}_D)$ este un model de varietate complexă şi $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_D$ un ideal de tip finit. Cu alte cuvinte, un model de **s. $\mathbb{C}$ a.** este un subspaţiu $\mathbb{C}$-inelat închis de prezentare finită al unui model de varietate complexă. Dacă $(M, \mathcal{O}_M)$ este un model de **s. $\mathbb{C}$ a.**, atunci M este o mulţime analitică. Pe de altă parte, din teorema de coerenţă a lui H. Cartan rezultă că orice model de **s. $\mathbb{C}$ a.** redus este în particular un model de **s. $\mathbb{C}$ a.** Reciproca nu este adevărată: dacă $\mathcal{J}$ este idealul lui $\mathcal{O}_D$ generat de funcţia $f(z) := z^2$, atunci $M = \{0\}$, $\mathcal{O}_M^{red} = \mathbb{C}$ dar $\mathcal{O}_M = \mathbb{C}\{z\}/(z^2) \neq \mathbb{C}$. Notăm, pe de altă parte, că modelele de varietăţi complexe sînt modele de **s. $\mathbb{C}$ a.** reduse. Un **s. $\mathbb{C}$ a.** (sau *spaţiu complex*) este un spaţiu $\mathbb{C}$-inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ cu proprietatea că, pentru orice punct $a \in X$, există o mulţime deschisă $U \ni a$ în X şi un izomorfism de spaţii $\mathbb{C}$-inelate $\varphi\colon (U, \mathcal{O}_U) \to (M, \mathcal{O}_M)$, unde $(M, \mathcal{O}_M)$ este un model de **s. $\mathbb{C}$ a.** şi $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|U$. Ex.: 1° Dacă X este o varietate complexă şi $\mathcal{O}_X$ fascicolul funcţiilor olomorfe pe mulţimile deschise ale lui X, atunci $(X, \mathcal{O}_X)$ este un **s. $\mathbb{C}$ a.** În particular, *punctul simplu* $e = (\{0\}, \mathbb{C})$ este un **s. $\mathbb{C}$ a.** 2° Orice model de **s. $\mathbb{C}$ a.** este un **s. $\mathbb{C}$ a.** În particular *punctul dublu* $(\{0\}, \mathbb{C}\{z\}/(z^2))$ este un **s. $\mathbb{C}$ a.** Dacă $(X, \mathcal{O}_X)$ este un **s. $\mathbb{C}$ a.** spaţiul topologic X nu este presupus în general a fi un spaţiu Hausdorff. Totuşi, din definiţie rezultă că orice punct $x \in X$ are o vecinătate care este un spaţiu Hausdorff; în particular, punctele lui X sînt mulţimi închise în X, mai exact, orice mulţime care conţine un singur punct este o mulţime închisă. Morfismele de **s. $\mathbb{C}$ a.** sînt morfisme de spaţii $\mathbb{C}$-inelate avînd ca domeniu şi codomeniu **s. $\mathbb{C}$ a.** Deci **s. $\mathbb{C}$ a.** formează o subcategorie plină a categoriei spaţiilor $\mathbb{C}$-inelate. O proprietate remarcabilă este că, pentru orice **s. $\mathbb{C}$ a.** $(X, \mathcal{O}_X)$, aplicaţia $\varphi \mapsto (\varphi_{1,\mathbb{C}^n}(z_1), \ldots, \varphi_{1,\mathbb{C}^n}(z_n))$ realizează o bijecţie între mulţimea tuturor morfismelor φ de la $(X, \mathcal{O}_X)$ în modelul $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ şi mulţimea $\mathcal{O}_X(X)^n$, unde $z_1, \ldots, z_n$ sînt funcţiile coordonate în $\mathbb{C}^n$. Fie $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ şi $(S, \mathcal{O}_S)$ **s. $\mathbb{C}$ a.** iar $\varphi\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ şi $\psi\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (S, \mathcal{O}_S)$ morfisme de **s. $\mathbb{C}$ a.** Atunci există un **s. $\mathbb{C}$ a.** $(Z, \mathcal{O}_Z)$ şi morfisme $p\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ şi $q\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ astfel încît să fie îndeplinite condiţiile următoare: a) $\varphi \circ p = \psi \circ q$; b) Pentru orice **s. $\mathbb{C}$ a.** $(Z', \mathcal{O}_{Z'})$ şi orice pereche de morfisme $\alpha\colon (Z', \mathcal{O}_{Z'}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ şi $\beta\colon (Z', \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ astfel încît $\varphi \circ \alpha = \psi \circ \beta$, există un unic $\theta\colon (Z', \mathcal{O}_{Z'}) \to (Z, \mathcal{O}_{Z'})$ astfel încît $\alpha = p \circ \theta$ şi $\beta = q \circ \theta$. Acest **s. $\mathbb{C}$ a.** $(Z, \mathcal{O}_Z)$, considerat împreună cu morfismele p şi q, este unic determinat pînă la un izomorfism de diagrame, se numeşte *produsul fibrat* al **s. $\mathbb{C}$ a.** $(X, \mathcal{O}_X)$ şi $(Y, \mathcal{O}_Y)$ peste **s. $\mathbb{C}$ a.** $(S, \mathcal{O}_S)$ şi se notează prin $(X, \mathcal{O}_X) \times_{(S, \mathcal{O}_S)} (Y, \mathcal{O}_Y)$. Pentru orice spaţiu $\mathbb{C}$-inelat $(X, \mathcal{O}_X)$, există un unic morfism p: $(X, \mathcal{O}_X) \to e$, unde e: $= (\{0\}, \mathbf{C})$ este punctul simplu. În particular, dacă $(X, \mathcal{O}_X)$ și $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sînt **s.C a.** putem defini *produsul lor direct* ca produs fibrat peste e prin egalitatea

$$(X, \mathcal{O}_X) \times (Y, \mathcal{O}_Y) := (X, \mathcal{O}_X) \times_e (Y, \mathcal{O}_Y).$$

Un alt caz particular de produs fibrat este *fibra unui morfism de* **s. C a.** Pentru definiția formală, să considerăm mai întîi un **s. C a.** $(X, \mathcal{O}_X)$ și un punct $x \in X$. Se arată atunci că există un unic morfism de **s. C a.** ε: $e \to (X, \mathcal{O}_X)$ cu proprietatea că $\varepsilon_0(0) = x$. Fibra în punctul x a componentei algebrice a lui ε este un morfism de $\mathbf{C}$-algebre ε^*_x: $\mathcal{O}_{X, x} \to \mathbf{C}$, numit *aplicația de evaluare* în punctul x a fascicolului $\mathcal{O}_X$. Fie acum φ: $(X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ un morfism de **s. C a.** și fie ε: $e \to (S, \mathcal{O}_S)$ morfismul definit prin $\varepsilon_0(0) := s$. Considerăm produsul fibrat $(Z, \mathcal{O}_Z) := (X, \mathcal{O}_X) \times_{(S, \mathcal{O}_S)} e$. Acest produs fibrat se notează prin $\varphi^{-1}(s)$ și se numește *fibra* lui φ în punctul $s \in S$; notăm că spațiul topologic subiacent lui $\varphi^{-1}(s)$ coincide cu fibra topologică $\varphi_0^{-1}(s)$ a aplicației continue φ_0. **S. C a.** sînt spații $\mathbf{C}$-inelate locale. Un **s. C a.** se numește *redus* dacă el este un spațiu $\mathbf{C}$-inelat redus. Are loc următoarea teoremă de caracterizare a **s. C a.** reduse. *Teoremă.* Dacă $(X, \mathcal{O}_X)$ este un spațiu $\mathbf{C}$-inelat, condițiile următoare sînt echivalente: i) $(X, \mathcal{O}_X)$ este un **s. C a.** redus; ii) $(X, \mathcal{O}_X)$ este un **s. C a.** și pentru orice punct $x \in X$, inelul $\mathcal{O}_{X, x}$ nu are elemente nilpotente; iii) Pentru orice punct $a \in X$, există o mulțime deschisă $U \ni a$ în X și un izomorfism de spații $\mathbf{C}$-inelate φ: $(U, \mathcal{O}_U) \to (M, \mathcal{O}_M)$, unde $(M, \mathcal{O}_M)$ este un model de **s. C a.** redus și $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X | U$ (un element a într-un inel A se numește *nilpotent* dacă există un întreg $k \geqslant 1$ astfel încît $a^k = 0$).
Această teoremă este legată de *teorema lui Hilbert a zerourilor* (cazul analitic), care se enunță după cum urmează: Fie D o mulțime deschisă în spațiul numeric complex $\mathbf{C}^n$, fie $f_1, ..., f_N$ funcții olomorfe pe D și M: $= \{z \in D \mid f_1(z) = = ... f_N(z) = 0\}$. Dacă $f \in \mathcal{O}_D(D)$ și dacă $f | M = 0$, atunci, pentru orice punct $z \in M$, există un întreg $k_z \geqslant 1$ și germeni $c_1, ..., c_N \in \mathcal{O}_{D, z}$, astfel încît $f_z^{k} = = \sum_{i=1}^{N} c_i f_{i, z}$, unde $f_{i, z}$: $= \rho_z^D(f_i)$ este germenul funcției f_i în punctul z. (*M.J.*)

spațiu Cauchy, orice triplet $(\mathcal{X}, \tau, \Phi)$ unde $\mathcal{X}$ este o mulțime, τ o topologie pe $\mathcal{X}$ iar Φ este o familie de filtre pe $\mathcal{X}$, avînd proprietățile: i) Dacă $\mathcal{G}$ este un filtru astfel încît există $\mathcal{F} \in \Phi$ astfel ca $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, atunci $\mathcal{G} \in \Phi$; ii) Pentru orice $\mathcal{F} \in \Phi$ există $\mathcal{F}_0$ un element minimal în Φ astfel ca $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$; iii) Orice element minimal $\mathfrak{m} \in \Phi$ admite o bază formată din mulțimi τ-deschise; iv) Pentru orice $x \in \mathcal{X}$, filtrul $\mathcal{V}_x$ al vecinătăților lui x este un element minimal în Φ; v) Pentru orice element minimal $\mathfrak{m} \in \Phi$ și orice $M \in \mathfrak{m}$ există $V \in \mathfrak{m}$, $V \subset M$ avînd proprietatea: dacă $\mathcal{F}$ este un element minimal în Φ și $F \cap V \neq \emptyset$, pentru orice $F \in \mathcal{F}$, atunci $M \in \mathcal{F}$. Dacă nu pot apărea confuzii, **s. C.** $(\mathcal{X}, \tau, \Phi)$ se notează cu $\mathcal{X}$. Elementele lui Φ se numesc *filtre Cauchy* ale lui $\mathcal{X}$. În orice **s. C.** există pentru fiecare punct un sistem fundamental de vecinătăți închise. Dacă în spațiul topologic $(\mathcal{X}, \tau)$ fiecare punct admite un sistem fundamental de vecinătăți închise și se notează cu ψ familia filtrelor convergente în $\mathcal{X}$, atunci $(\mathcal{X}, \tau, \psi)$ este un **s. C.** Fie $(\mathcal{X}, \tau, \Phi)$ și $(\mathcal{Y}, \sigma, \Sigma)$ două **s. C.** și f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Se spune că f este o *aplicație Cauchy* dacă este continuă și $f(\Phi) = \Sigma$. Pentru $\mathcal{F} \in \Phi$ se notează cu $f(\mathcal{F})$ filtrul generat de baza de filtru $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$. Dacă f este o bijecție și atît f cît și f^{-1} sînt aplicații Cauchy se spune că f este un izomorfism de **s. C.** între $\mathcal{X}$ și $\mathcal{Y}$. Un **s. C.** $\mathcal{X}$ se numește *complet* dacă este separat și orice filtru Cauchy pe $\mathcal{X}$ este convergent. Fie $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ două **s. C.** Se spune că $\mathcal{Y}$ este un *completat* al lui $\mathcal{X}$ dacă este complet și dacă există o aplicație Cauchy injectivă ρ: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ astfel încît, pentru orice **s. C.** complet, $\mathcal{Z}$ și pentru orice aplicație Cauchy f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ există, și este unică, o aplicație continuă h: $\mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ astfel ca $h \circ \rho = f$. Pentru orice **s. C.** există un completat. Dacă $\mathcal{Y}$ este un completat al lui $\mathcal{X}$ iar ρ este ca în definiția precedentă, atunci $\rho(\mathcal{X})$ este un subspațiu dens al lui $\mathcal{Y}$. Un completat este unic modulo un izomorfism de **s. C.** Noțiunea a fost introdusă în 1968 de M. Jurchescu. (*Gh.Gr.*)

spațiu compact v. **spațiu topologic compact**
spațiu complex v. **spațiu $\mathbf{C}$-analitic**
spațiu conex v. **spațiu topologic conex**
spațiu continuu v. **element discret**
spațiu cu convergență v. **clasă de convergență**
spațiu cu măsură v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**
spațiu cu măsură separabil în sens tare v. **spațiu metric asociat unui spațiu cu măsură**
spațiu cu măsură total σ-finită v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**
spațiu cu proprietatea Radon-Nikodym v. **proprietatea Radon-Nikodym**
spațiu Day v. **spații L^p**
spațiu de acoperire v. **omotopie**
spațiu de cormologie de Rham v. **formă diferențială** (pe o varietate complexă)
spațiu de tip (KB) v. **spațiu reticulat normat**

spațiu de tip Schwartz, spațiu local convex X care are proprietatea că pentru orice vecinătate W a originii există o vecinătate W_0 a originii astfel ca $W_0 \subset \mathrm{Sp}(W)$ (subspațiul liniar generat de W) iar pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o parte finită $A \subset W_0$ astfel ca $W_0 \subset \varepsilon W + A$. Sin.: *spațiu Schwartz.* Într-un **s. t. S.** orice mulțime mărginită este total mărginită. În consecință, un **s. t. S.** separat este normabil dacă și numai dacă este finit-dimensional. Limita inductivă a unui șir de **s. t. S.** este un **s. t. S.** Spațiul $\mathcal{D}_\Gamma(T)$ din teoria distribuțiilor este un **s. t. S.** (*R.C.*)

spațiu discret v. **element discret**
spațiu Fréchet v. **spațiu liniar cvasinormat**
spațiu Gelfand v. **proprietatea Radon-Nikodym**
spațiu Hausdorff v. **spațiu topologic separat**

spațiu Hilbert Se numește *spațiu prehilbertian*, un spațiu liniar normat în care norma verifică condiția

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\textit{legea paralelogramului})$$

Dacă X este un spațiu liniar în raport cu corpul Γ al numerelor reale sau complexe, o funcțională ψ: $X \times X \to \Gamma$ se numește *produs scalar* dacă este o funcțională hermitiană care are proprietatea $\psi(x, x) > 0$, oricare ar fi elementul nenul $x \in X$. Dacă ψ este un produs scalar, atunci formula $p(x) = = \sqrt{\psi(x, x)}$, $x \in X$, definește o normă pe X numită *norma generată de produsul scalar*. Un spațiu liniar normat este un spațiu prehilbertian dacă și numai dacă norma spațiului este generată de un anumit produs scalar. Produsul scalar care generează norma $\|\cdot\|$ a unui spațiu prehilbertian X, se notează $\langle \cdot, \cdot \rangle$, deci $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\forall x \in X$. Dacă spațiul prehilbertian X este real, atunci

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

iar dacă este complex, atunci

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\right).$$

Se numește **s. H.** (sau *spațiu hilbertian*) orice spațiu prehilbertian care este complet ca spațiu liniar normat. Orice **s. H.** este un spațiu Banach uniform convex. Studiul **s. H.** s-a dezvoltat pe baza ideilor din lucrările lui D. Hilbert asupra ecuațiilor integrale, care au condus la considerarea unor spații metrice în care distanța este definită cu ajutorul unui produs scalar. Fie X un **s. H.** Două elemente x, y se numesc *ortogonale*, se notează $x \perp y$, dacă $\langle x, y\rangle = 0$ (noțiunea are evident sens și în spații prehilbertiene). Dacă $A \subset X$ iar $x \in X$ se notează $x \perp A$ dacă $x \perp y$, $\forall y \in A$. Mulțimea $A^{\perp} = \{x \in X \mid x \perp A\}$ se numește *complementul ortogonal* al lui A. Dacă $A^{\perp} = \{0\}$, se spune că A este o *mulțime totală*. O familie $\{e_j\}_{j\in J}$ de elemente din X se numește *familie ortonormală* dacă elementele familiei sînt ortogonale două cîte două și dacă $\|e_j\| = 1$, $\forall j \in J$. Dacă $\{e_j\}_{j\in J}$ este o familie ortonormală iar $x \in X$, atunci numerele $\varphi_j(x) = \langle x, e_j\rangle$, $j \in J$, se numesc *coeficienții Fourier* ai lui x în raport cu familia ortonormală. Familia de numere $\{|\varphi_j(x)|^2\}_{j\in J}$ este sumabilă și

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{j\in J} |\varphi_j(x)|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (\textit{inegalitatca lui Bessel}).$$

(v. **familie sumabilă de elemente**). O familie ortonormală maximală poartă denumirea de *bază ortonormală*. Pentru ca o familie ortonormală de elemente să fie maximală este necesar și suficient ca mulțimea elementelor familiei să fie totală. Dacă $\{e_j\}_{j\in J}$ este o familie ortonormală, atunci următoarele condiții sînt echivalente: 1) Familia $\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază ortonormală; 2) Orice element $x \in X$ se reprezintă sub forma $x = \mathop{\mathrm{S}}\limits_{j\in J} \varphi_j(x)e_j$; 3) Pentru orice element $x \in X$ are loc egalitatea $\|x\|^2 = \mathop{\mathrm{S}}\limits_{j\in J} |\varphi_j(x)|^2$ (*relația lui Parseval*); 4) Subspațiul liniar închis generat de mulțimea $\{e_j \mid j \in J\}$ coincide cu X. Spațiul $L^2_{\Gamma}(T)$ cu norma obișnuită (v. **spațiu liniar normat**) este un **s. H.** în care norma este generată de produsul scalar dat de formula

$$\langle x, y\rangle = \int_T x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t, \quad x, y \in L^2(T)$$

(notînd cu $\bar{\lambda}$ conjugatul unui număr λ). Mulțimea (l^2_{Γ}) a tuturor șirurilor $x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale sau complexe, pentru care seria $\sum\limits_n |\xi_n|^2$ este convergentă, este un **s. H.**, considerînd operațiile obișnuite cu șirurile și norma $\|x\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right)^{1/2}$. Această normă este generată de produsul scalar dat de formula $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n\bar{\eta}_n$, unde $y = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Mai general, fie J o mulțime oarecare de indici și $l^2_{\Gamma}(J)$ mulțimea tuturor familiilor $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ de numere

din Γ (*i.e.* reale sau complexe) pentru care familia $\{|\alpha_j|^2\}_{j\in J}$ este sumabilă. Definind operațiile

$$\{\alpha_j\}_{j\in J} + \{\beta_j\}_{j\in J} = \{\alpha_j + \beta_j\}_{j\in J},$$
$$\lambda\{\alpha_j\}_{j\in J} = \{\lambda\alpha_j\}_{j\in J}, \quad \lambda \in \Gamma,$$

mulțimea $l^2_{\Gamma}(J)$ devine un spațiu liniar. Acesta devine un **s.H.** cu norma $\left\|\{\alpha_j\}_{j\in J}\right\| = \left(\mathop{\mathrm{S}}\limits_{j\in J} |\alpha_j|^2\right)^{1/2}$, generată de produsul scalar dat de

$$\left\langle \{\alpha_j\}_{j\in J}, \{\beta_j\}_{j\in J}\right\rangle = \mathop{\mathrm{S}}\limits_{j\in J} \alpha_j\bar{\beta}_j.$$

Fie acum X un **s.H.** oarecare și $\{e_j\}_{j\in J}$ o bază ortonormală în X. Punînd $h(x) = \{\varphi_j(x)\}_{j\in J}$ se obține un izomorfism între spațiile liniare normate X și $l^2_{\Gamma}(J)$. Dacă X este un **s.H.** separabil infinit-dimensional, atunci X este izomorf cu spațiul (l^2). (*R. C.*)

spațiu hilbertian v. **spațiu Hilbert**

spațiu inelat, o pereche $(X, \mathcal{O}_X)$ unde X este un spațiu topologic și $\mathcal{O}_X$ un fascicol de inele pe X (v. **fascicol**). Aici prin inel se înțelege un inel comutativ cu element unitate iar prin corp un corp comutativ. Dacă $(X, \mathcal{O}_X)$ este un **s.i.**, se spune că X este *spațiul topologic subiacent* **s.i.** $(X, \mathcal{O}_X)$ și că $\mathcal{O}_X$ este *fascicolul* său *structural*. Pentru orice punct $x \in X$, fibra în punctul x al fascicolului structural $\mathcal{O}_X$ este un inel care se notează prin $\mathcal{O}_{X,x}$ sau, simplu, $\mathcal{O}_x$. Uneori **s.i.** $(X, \mathcal{O}_X)$ este indicat prin aceeași literă X, la fel ca spațiul său topologic subiacent. Fiind date două **s.i.** $(X, \mathcal{O}_X)$ și $(Y, \mathcal{O}_Y)$, un *morfism* de **s.i.** $\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ este o pereche $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$, unde $\varphi_0: X \to Y$ este o aplicație continuă și $\varphi_1: \mathcal{O}_Y \to \varphi_{0*}(\mathcal{O}_X)$ un morfism de fascicole de inele pe Y; se spune că φ_0 este *componenta topologică* iar φ_1 *componenta algebrică* ale lui φ. Pentru orice punct $x \in X$, fibra relativă (v. **fascicol**) a lui φ_1 în punctul x se notează prin φ^*_x; evident $\varphi^*_x: \mathcal{O}_{Y,\varphi_0(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ este un morfism de inele. Dacă

$$\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_Y) \quad \text{și} \quad \psi: (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$$

sînt morfisme de **s.i.**, compunerea $\psi\circ\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ este morfismul de **s.i.** cu componentă topologică $(\psi\circ\varphi)_0 := \psi_0\circ\varphi_0$ și componentă algebrică $(\psi\circ\varphi)_1 := \psi_{0*}(\varphi_1)\circ\psi_1$; fibra lui $\psi\circ\varphi$ în punctul $x \in X$ este dată de $(\psi\circ\varphi)^*_x = \varphi^*_x \circ \psi^*_{\varphi_0(x)}$. Evident **s.i.** și morfismele lor formează o categorie; izomorfismele acestei categorii se numesc *izomorfisme* de **s.i.** Ex.: 1° Pentru orice inel A, perechea $(\{0\}, A)$ este un **s.i.** De asemenea, pentru orice morfism de inele $u: B \to A$, $(0, u): (\{0\}, A) \to (\{0\}, B)$ este un morfism de **s.i.** În felul acesta duala categoriei inelelor se realizează ca o subcategorie plină în categoria **s.i.** 2° Fie $(X, \mathcal{O}_X)$ un **s.i.** Un *subspațiu inelat deschis* al lui $(X, \mathcal{O}_X)$ este un **s.i.** de forma $(U, \mathcal{O}_U)$, unde U este o submulțime deschisă a lui X și $\mathcal{O}_U$ restricția lui $\mathcal{O}_X$ la U; avem atunci un morfism $i: (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ avînd drept componentă topologică incluziunea lui U în X și drept fibră în punctul $x \in U$ identitatea lui $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x}$. 3° Varietățile diferențiabile și varietățile complexe se pot considera în mod natural ca **s.i.** Fie $(X, \mathcal{O}_X)$ un **s.i.** Un *ideal* (sau *fascicol de ideale*) în $\mathcal{O}_X$ este un subfascicol de mulțimi $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ cu proprietatea că, pentru orice mulțime deschisă U în X, $\mathcal{J}(U)$ este un ideal în inelul $\mathcal{O}_X(U)$. Evident, subfascicolul de mulțimi $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ este un ideal în $\mathcal{O}_X$ dacă și numai dacă, pentru orice $x \in X$, $\mathcal{J}_x$ este un ideal în $\mathcal{O}_{X,x}$. Un ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ se numește de *tip finit* (sau *finit generat*) dacă, pentru orice punct $a \in X$, există o mulțime deschisă U conţinînd a în X şi un număr finit de secţiuni $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{I}(U)$ astfel încît germenii $s_{1,x} := \rho_x^U(s_1), \ldots, s_{p,x} := \rho_x^U(s_p)$ să genereze $\mathcal{I}_x$ ca ideal în $\mathcal{O}_{X,x}$ pentru orice $x \in U$. Dacă $\mathcal{I}$ este un ideal în $\mathcal{O}_X$ fascicolul cît de grupuri abeliene $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ are o structură canonică evidentă de fascicol de inele. Se spune că un **s.i.** $(Y, \mathcal{O}_Y)$ este un *subspaţiu inelat închis* al lui $(X, \mathcal{O}_X)$ dacă Y este un subspaţiu topologic al lui X şi dacă există un ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ astfel încît $Y = \operatorname{supp} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ şi $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \mid Y$. Avem atunci un morfism de **s.i.** $i: (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ avînd drept componentă topologică incluziunea lui Y în X şi drept fibră în punctul $x \in Y$ aplicaţia canonică $i_x^*: \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$. Se spune că subspaţiul inelat închis $(Y, \mathcal{O}_Y)$ al lui $(X, \mathcal{O}_X)$ este de *prezentare finită* cînd idealul $\mathcal{I}$ este de tip finit. Notăm că suportul oricărui fascicol de inele pe X (egal cu suportul secţiunii globale 1 a fascicolului) este o mulţime închisă în X. În particular, dacă $(Y, \mathcal{O}_Y)$ este un subspaţiu inelat închis al lui $(X, \mathcal{O}_X)$, atunci Y este o submulţime închisă a lui X. În analiză prezintă interes **s.i.** peste un corp de bază k, de regulă corpul numerelor reale $\mathbb{R}$ sau corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$. Pentru definiţiile formale să considerăm un corp fixat k. Prin k-algebră vom înţelege un inel A înzestrat cu un morfism de inele $\alpha_A: k \to A$. Dacă A şi B sînt k-algebre, prin *morfism de k-algebre* de la A la B vom înţelege un morfism de inele $u: A \to B$ astfel încît $\alpha_B = u \circ \alpha_A$. Se numeşte **s.i.** *în k-algebre* (sau *spaţiu k-inelat*) orice **s.i.** $(X, \mathcal{O}_X)$ al cărui fascicol structural este un fascicol de k-algebre; aceasta înseamnă că, pentru orice mulţime deschisă U în X, $\mathcal{O}_X(U)$ este o k-algebră şi, pentru orice pereche de mulţimi deschise U, V în X astfel încît $V \subset U$, aplicaţia de restricţie $\rho_V^U: \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ este un morfism de k-algebre. Evident, dacă $(X, \mathcal{O}_X)$ este un spaţiu k-inelat, atunci fibrele $\mathcal{O}_{X,x}$ ale fascicolului structural $\mathcal{O}_X$ sînt k-algebre. Subspaţiile inelate deschise şi subspaţiile inelate închise ale unui spaţiu k-inelat sînt de asemenea spaţii k-inelate. Dacă $(X, \mathcal{O}_X)$ şi $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sînt spaţii k-inelate, un *morfism de spaţii k-inelate* $\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ este un morfism de **s.i.** astfel încît componenta sa algebrică φ_1 să fie un morfism de fascicole de k-algebre, *i.e.* aplicaţia $\varphi_{1,V}: \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(\varphi_0^{-1}(V))$ să fie morfism de k-algebre pentru orice mulţime deschisă V în Y; o condiţie echivalentă este ca fibra $\varphi_x^*: \mathcal{O}_{Y,\varphi_0(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ să fie morfism de k-algebre pentru orice punct $x \in X$. Spaţiile k-inelate şi morfismele lor formează o categorie; izomorfismele categoriei se numesc *izomorfisme de spaţii k-inelate*. Categoriile geometrice uzuale (în dimensiune finită!) sînt categorii de spaţii $\mathbb{R}$-inelate sau categorii de spaţii $\mathbb{C}$-inelate. Ca exemplu, vom da aici definiţia varietăţilor complexe în termeni de spaţii $\mathbb{C}$-inelate. Funcţiile olomorfe pe mulţimile deschise ale lui $\mathbb{C}^n$ formează un fascicol de $\mathbb{C}$-algebre care se notează prin $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$. Se numeşte *model de varietate complexă* orice subspaţiu inelat deschis al unui spaţiu $\mathbb{C}$-inelat de forma $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$, $n \geqslant 0$. O *varietate complexă* este un spaţiu $\mathbb{C}$-inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ cu proprietatea că, pentru orice punct $a \in X$, există o mulţime deschisă U în X astfel încît $a \in U$ şi astfel încît subspaţiul $\mathbb{C}$-inelat deschis $(U, \mathcal{O}_U)$ al lui $(X, \mathcal{O}_X)$ să fie izomorf cu un model. În mod similar se pot defini, în termeni de spaţii $\mathbb{R}$-inelate, varietăţile diferenţiabile de clasă C^r şi modelele lor. Un spaţiu k-inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ se numeşte *local* dacă, pentru orice punct $x \in X$, inelul $\mathcal{O}_{X,x}$ este local şi există un morfism de k-algebre $\varepsilon_x^*: \mathcal{O}_{X,x} \to k$; acest morfism ε_x^* este atunci unic determinat şi se numeşte *aplicaţia de evaluare a lui $\mathcal{O}_X$ în punctul x*; nucleul lui ε_x^* coincide, evident, cu unicul *ideal maximal* al lui $\mathcal{O}_{X,x}$ notat de obicei prin $\mathfrak{m}_x$. Dacă $(X, \mathcal{O}_X)$ este un spaţiu k-inelat local, U o mulţime deschisă în X şi s o secţiune în $\mathcal{O}_X$ peste U, *valoarea lui s în punctul x* este elementul $s(x) := \varepsilon_x^*(s_x) \in k$, unde $s_x = \rho_x^U(s)$ este germenul definit de s în punctul x. Spaţiul k-inelat local $(X, \mathcal{O}_X)$ se numeşte *redus* dacă, pentru orice mulţime deschisă U în X, fiecare

secţiune $s \in \mathcal{O}_X(U)$ este univoc determinată de valorile ei în diversele puncte $x \in U$, sau, echivalent, dacă secţiunea zero este unica secţiune în $\mathcal{O}_X(U)$ care are valoare zero în orice punct din U. Fie $(X, \mathcal{O}_X)$ şi $(Y, \mathcal{O}_Y)$ spaţii k-inelate locale, primul redus. Atunci orice morfism $\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ este univoc determinat de componenta sa topologică φ_0 şi, pentru orice mulţime deschisă V în Y şi orice secţiune $t \in \mathcal{O}_Y(V)$, avem $s = \varphi_{1,V}(t)$ dacă şi numai dacă $s(x) = t(\varphi_0(x))$. Se obişnuieşte în această situaţie să se identifice morfismul φ cu componenta sa φ_0. De pildă, varietăţile complexe sînt spaţii $\mathbb{C}$-inelate locale reduse şi morfismele între aceste spaţii $\mathbb{C}$-inelate sînt exact aplicaţiile olomorfe. Similar, varietăţile diferenţiabile de o clasă dată C^r, sînt spaţii $\mathbb{R}$-inelate locale reduse şi morfismele lor sînt aplicaţiile de clasă C^r. (*M.J.*)

spaţiu liniar (în raport cu corpul Γ al numerelor reale sau complexe), mulţime nevidă X pentru care s-au dat o aplicaţie $(x, y) \to x + y$ a lui $X \times X$ în X, numită operaţie de *adunare* între elemente, şi o aplicaţie $(\lambda, x) \to \lambda x$ a lui $\Gamma \times X$ în X, numită operaţie de *înmulţire cu numere*, care satisfac următoarele condiţii: $x + y = y + x$, $\forall x, y \in X$; $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in X$; Există un element $\mathbf{0} \in X$ astfel ca $x + \mathbf{0} = x$, $\forall x \in X$; Pentru orice element $x \in X$ există un element $x' \in X$ astfel ca $x + x' = \mathbf{0}$; $1x = x$, $\forall x \in X$; $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall x \in X$; $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall x \in X$; $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall \lambda \in \Gamma$, $\forall x, y \in X$. Sin.: *spaţiu vectorial*. Pentru **s.l.** X, corpul Γ se numeşte *corpul scalarilor* iar elementele lui Γ se numesc *scalari*. Elementul $x + y$ din definiţia **s.l.** se numeşte *suma* elementelor x şi y; elementul $\mathbf{0}$ se numeşte *element nul*, şi el este unic; elementul x' se numeşte *opusul* lui x şi, pentru fiecare element x, opusul este unic şi se notează $-x$; Se notează $x - y$ în loc de $x + (-y)$. Dacă $A, B \subset X$ iar $\lambda \in \Gamma$ se notează

$$A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}.$$

Dacă $\Gamma = \mathbb{R}$, atunci X se numeşte **s.l.** *real* iar dacă $\Gamma = \mathbb{C}$, atunci X se numeşte **s.l.** *complex*. Două **s.l.** X, Y în raport cu acelaşi corp Γ al scalarilor se numesc *izomorfe* dacă există o bijecţie $h: X \to Y$ cu proprietăţile: $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$; $h(\lambda x) = \lambda h(x)$, $\forall \lambda \in \Gamma$, $\forall x \in X$. Aplicaţia h se numeşte *izomorfism de* **s.l.** Noţiunea de **s.l.** se generalizează, înlocuindu-se corpul Γ al numerelor reale sau complexe cu un corp oarecare. Prin **s.l.** vom înţelege însă doar **s.l.** real sau **s.l.** complex. Dacă X este un **s.l.** iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt elemente din X, un element x de forma $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, cu $\lambda_j \in \Gamma$, se numeşte o *combinaţie liniară* de elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. O submulţime G a **s.l.** X se numeşte *subspaţiu liniar* (sau *subspaţiu vectorial*) dacă din $x, y \in G$ rezultă $x + y \in G$ şi $\lambda x \in G$, $\forall \lambda \in \Gamma$. Dacă A este o submulţime a **s.l.** X, atunci cel mai mic subspaţiu liniar care conţine A se numeşte *subspaţiul liniar generat de A* (sau *acoperirea liniară a mulţimii A*) şi se notează $\mathrm{Sp}(A)$. Mulţimea $\mathrm{Sp}(A)$ coincide cu mulţimea tuturor combinaţiilor liniare formate cu elemente din A. Două subspaţii liniare G_1, G_2 ale **s.l.** X se spune că sînt *suplimentare* dacă $G_1 \cap G_2 = \{\mathbf{0}\}$ şi $G_1 + G_2 = X$. Un subspaţiu liniar G al **s.l.** X, care este diferit de X, se numeşte *hipersubspaţiu liniar* (pe scurt *hipersubspaţiu*) dacă este maximal, *i.e.* din $G \subset H$, unde H este un subspaţiu liniar, rezultă sau $G = H$ sau $H = X$. O submulţime E a **s.l.** X se spune că este *liniar independentă* dacă din $A \subset E$ şi $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(E)$ rezultă $A = E$. O submulţime liniar independentă maximală se numeşte *bază algebrică* (sau *bază vectorială*). O submulţime E a **s.l.** X este o bază algebrică dacă şi numai dacă este liniar independentă şi $\mathrm{Sp}(E) = X$. Dacă E_0 este o submulţime liniar independentă a **s.l.** X, există o bază algebrică E astfel ca $E_0 \subset E$.

Dacă E este o bază algebrică a **s.l.** X, atunci orice element $x \in X$ se reprezintă în mod unic ca o combinație liniară de elemente din E. Numărul cardinal al unei baze algebrice a unui **s.l.** X se numește *dimensiunea algebrică* a lui X. Dacă X admite o bază algebrică finită, se spune că X are *dimensiune finită* sau că este *finit-dimensional*; în caz contrar, se spune că X are *dimensiune infinită* sau că este *infinit-dimensional*. Dacă un **s.l.** finit-dimensional are o bază algebrică formată cu n elemente se spune că spațiul are *dimensiunea n* (sau că este *n-dimensional*). Dacă X este un **s.l.** oarecare iar G este un subspațiu liniar, atunci se poate defini în X relația de echivalență: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in G$. Fie $\hat{x}$ clasa de echivalență care conține elementul x și X/G mulțimea claselor de echivalență. Această mulțime devine un **s.l.**, numit **s.l.** *cît* al lui X prin G, definind operațiile: $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$ și $\lambda\hat{x} = \widehat{\lambda x}$ pentru $\lambda \in \Gamma$. În cazul cînd X/G are dimensiunea finită, se spune că subspațiul G are *codimensiune finită*. Dacă $\{X_j\}_{j \in J}$ este o familie de **s.l.** în raport cu același corp Γ, atunci produsul cartezian $\prod_{j \in J} X_j$ devine un **s.l.**, numit **s.l.** *produs* al familiei $\{X_j\}_{j \in J}$, definind operațiile:

$$\{a_j\}_{j \in J} + \{b_j\}_{j \in J} = \{a_j + b_j\}_{j \in J};$$

$$\lambda\{a_j\}_{j \in J} = \{\lambda a_j\}_{j \in J} \quad \text{pentru } \lambda \in \Gamma.$$

Fie X un **s.l.** O submulțime E a lui X se spune că este *convexă* dacă pentru orice elemente $x, y \in E$ are loc incluziunea:

$$\{z \in X \mid z = \lambda x + (1 - \lambda)\, y, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} \subset E.$$

Mulțimea din membrul stîng al acestei incluziuni se numește *segment* (mai complet, *segment liniar*) determinat de x și y. Un punct $x_0 \in X$ se numește *punct frontieră* pentru o mulțime convexă E dacă există $x_1, x_2 \in X$ diferite de x_0 astfel ca

$$\{z \in X \mid z = \lambda x_1 + (1 - \lambda)\, x_0, \quad 0 < \lambda < 1\} \subset E,$$

$$\{z \in X \mid z = \lambda x_0 + (1 - \lambda)\, x_2, \quad 0 < \lambda < 1\} \subset X \setminus E.$$

Dacă $A \subset X$, cea mai mică mulțime convexă care conține A se numește *acoperirea convexă* (sau *înfășurătoarea convexă*) a mulțimii A și se notează co(A). Mulțimea co(A) este mulțimea tuturor elementelor $z \in X$ de forma $z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ cu $x_j \in A$, $0 < \lambda_j \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt submulțimi convexe ale spațiului X, atunci $\mathrm{co}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$ este mulțimea tuturor elementelor de forma $z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, cu $x_j \in A_j$, $0 \leqslant \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, și $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. O submulțime E a spațiului X se spune că este *simetrică* dacă $E = (-1)E$. Mulțimea E se spune că este *echilibrată* dacă din $\lambda \in \Gamma$ și $|\lambda| \leqslant 1$ rezultă $\lambda E \subset E$. Se numește *acoperirea echilibrată* (sau *înfășurătoarea echilibrată*) a unei submulțimi A a lui X și se notează ec(A), cea mai mică mulțime echilibrată care conține A. Mulțimea ec(A) este mulțimea tuturor elementelor $z \in X$ de forma $z = \alpha x$ cu $x \in A$ și $|\alpha| \leqslant 1$. Se numește *acoperirea echilibrată și convexă* (sau *înfășurătoarea echilibrată și convexă*) a mulțimii A și se notează eco(A), cea mai mică mulțime echilibrată și convexă care conține A. Mulțimea eco(A) este mulțimea tuturor elementelor $z \in X$ de forma $z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, cu $x_j \in A$, $\lambda_j \in \Gamma$, $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$. Mulțimea eco(A) coincide cu mulțimea co(ec(A)). Dacă $A, B \subset X$ se spune că B *absoarbe* A (sau că A este *absorbită* de B) dacă există un număr $\varepsilon > 0$ astfel ca din $\lambda \in \Gamma$ și $0 < |\alpha| \leqslant \varepsilon$ să rezulte $\lambda A \subset B$. O submulțime E a lui X se numește *mulțime absorbantă* dacă absoarbe orice element al spațiului. (*R.C.*)

spațiu liniar cît v. **spațiu liniar**

spațiu liniar complet reticulat v. **spațiu liniar ordonat**

spațiu liniar cvasinormat, spațiu liniar X pe care s-a dat o cvasinormă q cu proprietățile: 1) Dacă $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din X și dacă $\lim_n q(x_n) = 0$, atunci $\lim_n q(\lambda x_n) = 0$, oricare ar fi scalarul λ; 2) Dacă $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de scalari și dacă $\lim_n \lambda_n = 0$, atunci $\lim_n q(\lambda_n x) = 0$, oricare ar fi elementul $x \in X$. Înzestrat cu topologia dată de distanța asociată cvasinormei (v. **cvasinormă**) orice **s.l.c.** este un spațiu liniar topologic separat. Pe un **s.l.c.** orice seminormă mărginită este o seminormă continuă. Dacă X este un spațiu local convex separat a cărei topologie τ poate fi definită de o familie numărabilă $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de seminorme, atunci X este un **s.l.c.** în raport cu cvasinorma dată de formula

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)}, \quad x \in X,$$

iar topologia dată de această cvasinormă coincide cu topologia τ. Un **s.l.c.** care este complet ca spațiu metric, se numește *spațiu Fréchet*. Fie T un segment al dreptei reale, Γ corpul numerelor reale sau complexe și $\mathcal{S}$ mulțimea tuturor funcțiilor $x\colon T \to \Gamma$, măsurabile Lebesgue. Se definește în $\mathcal{S}$ relația de echivalență: $x \sim y \Leftrightarrow x(t) = y(t)$, a.p.t. în T. Se notează cu $S_\Gamma(T)$ mulțimea claselor de echivalență. Dacă $\hat{x}$ este clasă de echivalență care conține o funcție x, se definesc operațiile: $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$ și $\lambda\hat{x} = \widehat{\lambda x}$ (unde $(x + y)\,(t) = x(t) + y(t)$ și $(\lambda x)\,(t) = \lambda x(t)$, $\forall t \in T$, iar $\lambda \in \Gamma$). Mulțimea $S_\Gamma(T)$ devine un spațiu liniar. Notînd tot cu x clasa $\hat{x}$, formula

$$q(x) = \int_T \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|}\, \mathrm{d}t, \quad x \in S_\Gamma(T,$$

definește o cvasinormă pe $S_\Gamma(T)$ în raport cu care $S_\Gamma(T)$ este un spațiu Fréchet. Unii autori numesc spațiu Fréchet un spațiu local convex metrizabil și complet. (*R.C.*)

spațiu liniar *n*-dimensional v. **spațiu liniar**

spațiu liniar dirijat v. **spațiu liniar ordonat**

spațiu liniar finit-dimensional v. **spațiu liniar**

spațiu liniar infinit-dimensional v. **spațiu liniar**

spaţiu liniar normat Se numeşte *normă*, orice seminormă p pe un spaţiu liniar X, cu proprietatea: $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Se numeşte **s.l.n.** un spaţiu liniar X pe care s-a fixat o anumită normă p. Sin.: *spaţiu vectorial normat*. Se notează, de obicei, $\| x \| = p(x)$, $\forall x \in X$. Se consideră *distanţa asociată normei*: $d(x, y) = \| x - y \|$ şi topologia dată de această distanţă, care se numeşte *topologia normei*. Într-un **s.l.n.** X, mulţimea $\{x \in X \mid \| x \| < 1\}$ se numeşte *sfera unitate deschisă* (sau *bila unitate deschisă*) iar mulţimea $\{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$ se numeşte *sfera unitate închisă* (sau *bila unitate închisă*). Un **s.l.n.** care este complet ca spaţiu metric, se numeşte *spaţiu Banach*. Astfel de spaţii au fost introduse în anul 1922 de H. Hahn şi S. Banach. Norme pe spaţii particulare au fost însă considerate anterior de F. Riesz şi E. Helly. Două **s. l. n.** X şi Y (ambele reale sau ambele complexe) se numesc *izomorfe* dacă există o bijecţie $h: X \to Y$ cu proprietăţile: $h(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha h(x_1) + \beta h(x_2)$, oricare ar fi elementele $x_1, x_2 \in X$ şi scalarii α, β; $\| h(x) \| = \| x \|$, oricare ar fi $x \in X$. Două norme p, q pe un spaţiu liniar X definesc aceeaşi topologie dacă şi numai dacă există două numere reale $\lambda, \mu > 0$ astfel ca $\lambda p(x) \leqslant q(x) \leqslant \mu p(x)$, $\forall x \in X$. În acest caz normele p şi q se numesc *norme echivalente*. Pentru orice **s.l.n.** X există un spaţiu Banach $\widetilde{X}$ unic, cu excepţia unui izomorfism, astfel ca X să fie izomorf (ca **s.l.n.**) cu un subspaţiu liniar dens al lui $\widetilde{X}$ (înzestrat cu restricţia normei lui $\widetilde{X}$). El se numeşte *completatul* **s.l.n.** X. Dacă X este un **s.l.n.** iar G un subspaţiu liniar închis, atunci în spaţiul liniar cît X/G se poate considera norma

$$\| \hat{x} \| = \inf\{ \| a \| \mid a \in \hat{x}\}, \quad \hat{x} \in X/G$$

care defineşte topologia cît. Cu această normă X/G se numeşte **s.l.n.** *cît* al lui X prin G. Dacă X este un spaţiu Banach, atunci şi X/G este un spaţiu Banach. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sînt **s.l.n.** cu acelaşi corp al scalarilor, atunci în spaţiul liniar produs $\prod_{j=1}^{n} X_j$ se poate considera norma $\| (a_1, a_2, \ldots, a_n) \| = \max_{j=1}^{n} \| a_j \|$, care defineşte topologia produs. Cu această normă, $\prod_{j=1}^{n} X_j$ se numeşte **s.l.n.** *produs* al spaţiilor $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sînt spaţii Banach, atunci şi $\prod_{j=1}^{n} X_j$ este un spaţiu Banach. Un **s. l. n.** se spune că admite o bază Schauder dacă există un şir $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din X astfel ca orice element x al spaţiului să se reprezinte în mod unic sub forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$, unde $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir de scalari iar $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n = \lim_{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$. Şirul de elemente $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se numeşte *bază Schauder* pentru spaţiul X. Orice **s.l.n.** care admite bază Schauder este un spaţiu separabil. În anul 1972, P. Enflo a arătat că există spaţii Banach separabile care nu admit bază Schauder. În următoarele exemple de **s.l.n.** se consideră operaţiile obişnuite cu funcţiile şi se indică normele uzuale. Se notează cu Γ unul din corpurile $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ex.: 1° Dacă T este un spaţiu topologic compact, atunci mulţimea $C_\Gamma(T)$ a funcţiilor continue $x: T \to \Gamma$ este un spaţiu Banach cu norma $\| x \| = \max_{t \in T} | x(t) |$. 2° Dacă $p \in \mathbb{N}$, se notează cu $C^p_\Gamma([0, 1])$ mulţimea funcţiilor $x: [0, 1] \to \Gamma$ care admit derivate continue pînă la ordinul p inclusiv. Considerînd restricţia normei din $C_\Gamma([0, 1])$, spaţiul $C^p_\Gamma([0, 1])$ nu este complet. Considerînd însă norma

$$\| x \| = \sum_{k=0}^{p} \max_{t \in [0, 1]} | x^{(k)}(t) |,$$

unde $x^{(k)}$ înseamnă derivata de ordin k a lui x, $C^p_\Gamma([0, 1])$ devine un spaţiu Banach. 3° Mulţimea $V_\Gamma([0, 1])$ a funcţiilor cu variaţie mărginită $x: [0, 1] \to \Gamma$ este un spaţiu Banach cu norma $\| x \| = | x(0) | + \operatorname{var}_{t \in [0, 1]} x(t)$. 4° Fie acum T un segment al dreptei reale şi să considerăm un număr real $p \geqslant 1$. Fie $\mathcal{L}$ mulţimea funcţiilor $x: T \to \Gamma$ care sînt p-integrabile (*i.e.* funcţia $| x |^p(t) = | x(t) |^p$, $\forall t \in T$, este integrabilă Lebesgue). În mulţimea $\mathcal{L}$ se defineşte relaţia de echivalenţă: $x \sim y \Leftrightarrow x(t) = y(t)$ a.p.t. Se notează cu $L^p_\Gamma(t)$ mulţimea claselor de echivalenţă. Dacă $\hat{x}$ este clasa de echivalenţă care conţine o funcţie x, se definesc operaţiile: $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}$ şi $\lambda \hat{x} = \widehat{\lambda x}$, $\lambda \in \Gamma$. Notînd tot cu x clasa $\hat{x}$, formula $\| x \| = \left(\int_T | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p}$ defineşte o normă în raport cu care $L^p_\Gamma(t)$ este un spaţiu Banach. Spaţiul $L^1_\Gamma(T)$ se notează şi $L_\Gamma(T)$. (*R.C.*)

spaţiu liniar normat cît v. **spaţiu liniar normat**

spaţiu liniar normat produs v. **spaţiu liniar normat**

spaţiu liniar normat strict convex, spaţiu liniar normat cu proprietatea că pentru orice două elemente distincte x, y ale spaţiului, pentru care $\| x \| = \| y \| = 1$, rezultă $\| x + y \| < 2$. Pentru ca un spaţiu liniar normat X să fie strict convex, este necesar şi suficient ca din condiţiile $x, y \in X$, $x \neq y$, $\| x \| \leqslant 1$, $\| y \| \leqslant 1$ şi $\lambda \in (0, 1)$ să rezulte $\| \lambda x + (1 - \lambda) y \| < 1$. (*R.C.*)

spaţiu liniar normat uniform convex, spaţiu liniar normat cu proprietatea că pentru orice număr $\varepsilon \in (0, 1)$ există un număr $\eta(\varepsilon) \in (0, 1)$ astfel ca din condiţiile $\| x \| = \| y \| = 1$ şi $\| x - y \| > \varepsilon$ să rezulte $\| x + y \| < 2(1 - \eta(\varepsilon))$. Un spaţiu liniar normat care este uniform convex este şi strict convex. Orice spaţiu Banach care este uniform convex este un spaţiu reflexiv. Spaţiul Banach $L^p_\Gamma(T)$, $1 < p \in \mathbb{R}$, cu norma obişnuită (v. **spaţiu liniar normat**) este uniform convex. (*R.C.*)

spaţiu liniar ordonat, spaţiu liniar real X înzestrat cu o relaţie de ordine $\leqslant$ care satisface condiţia: dacă $x \leqslant y$ atunci $x + z \leqslant y + z$ şi $\lambda x \leqslant \lambda y$, oricare ar fi elementul $z \in X$ şi numărul $\lambda \geqslant 0$. O astfel de relaţie de ordine se numeşte *ordine liniară*. Un element x al unui **s.l.o.** se numeşte *element pozitiv* dacă $x \geqslant 0$ şi *element negativ* dacă $x \leqslant 0$. Mulţimea elementelor pozitive ale unui **s.l.o.** X se notează X_+. Ea este un con numit *conul pozitiv* al spaţiului X. Condiţia $x \leqslant y$ este echivalentă cu $y - x \in X_+$. Reciproc, dacă E este un con într-un spaţiu liniar real X, atunci se obţine o ordine liniară în X punînd $x \leqslant y$ dacă $y - x \in E$ şi în acest caz $E = X_+$. Dacă X este un **s.l.o.** iar G un subspaţiu liniar înzestrat cu ordinea indusă, atunci G se numeşte *subspaţiu liniar ordonat*. Două **s.l.o.** X, Y se numesc *izomorfe* dacă există o bijecţie $h: X \to Y$ astfel ca $h(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha h(x_1) + \beta h(x_2)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in X$ şi astfel ca relaţia $x_1 \leqslant x_2$ în X să fie echivalentă cu $h(x_1) \leqslant h(x_2)$. Dacă un **s.l.o.** X este izomorf cu un subspaţiu liniar ordonat al unui **s.l.o.** Z, atunci Z se numeşte o *extensie* a lui X. Dacă un **s.l.o.** este o mulţime dirijată la dreapta (sau, echivalent, dirijată la stînga), atunci el se numeşte *spaţiu liniar dirijat*. Un **s.l.o.** este un spaţiu liniar dirijat dacă şi numai dacă orice element al spaţiului se reprezintă ca diferenţa a două elemente pozitive. Se numeşte *element axial* într-un **s.l.o.** X, orice element pozitiv v cu proprietatea că, pentru orice element $x \in X$, există un număr $\lambda > 0$ astfel ca $x \leqslant \lambda v$. Dacă într-un **s.l.o.** X există elemente axiale, atunci X este evident un spaţiu liniar dirijat. Nu există însă elemente axiale în orice spaţiu liniar dirijat. Un **s.l.o.** X se spune că este *arhimedian* dacă orice element $x \in X$ pentru care mulţimea $\{\alpha x \mid 0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}\}$ este majorată este un element negativ. Un **s.l.o.** este arhimedian dacă şi numai dacă pentru orice element pozitiv x al spaţiului are loc egalitatea $\mathbf{0} = \bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} x$ (pentru notaţii v. **mulţime ordonată**). Dacă un **s.l.o.** nenul este arhimedian şi este o mulţime total ordonată, atunci el are dimensiunea (algebrică) unu. Un **s.l.o.** care este o mulţime reticulată se numeşte *spaţiu liniar reticulat*. Se numeşte *spaţiu liniar complet reticulat* (resp. *spaţiu liniar σ-reticulat*), un **s.l.o.** care este o latice relativ completă (resp. latice relativ σ-completă). Pentru ca un spaţiu liniar reticulat să fie un spaţiu liniar complet reticulat (resp. spaţiu liniar σ-reticulat) este necesar şi suficient ca orice mulţime dirijată la stînga de elemente pozitive (resp. orice şir descrescător de elemente pozitive) să aibă margine inferioară. Un spaţiu liniar complet reticulat X se spune că este *(o)-separabil* dacă pentru orice submulţime majorată A a lui X există o parte cel mult numărabilă $B \subset A$ astfel ca $\sup B = \sup A$. Dacă X este un spaţiu liniar complet reticulat (o)-separabil şi dacă $x = (\omega)\text{-}\lim\limits_{\delta \in \Delta} x_\delta$ în X (v. **convergenţa în sensul ordinei**), atunci există un şir crescător de indici $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ astfel ca $x = (o)\text{-}\lim\limits_{n} x_{\delta_n}$. Fie X un **s.l.o.** Dacă $\{x_i\}_{i \in I}$ şi $\{y_j\}_{j \in J}$ sînt familii de elemente din X şi dacă există $\bigvee\limits_{i \in I} x_i$ şi $\bigvee\limits_{j \in J} y_j$, atunci există şi $\bigvee\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (x_i + y_j)$ şi are loc egalitatea

$$\bigvee_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (x_i + y_j) = \bigvee_{i \in I} x_i + \bigvee_{j \in J} y_j;$$

dacă există $\bigvee\limits_{i \in I} x_i$, atunci pentru orice număr $\lambda \geqslant 0$ există şi $\bigvee\limits_{i \in I} \lambda x_i$ şi are loc egalitatea $\bigvee\limits_{i \in I} \lambda x_i = \lambda \bigvee\limits_{i \in I} x_i$. Afirmaţii asemănătoare sînt adevărate şi pentru marginea inferioară. De altfel, dacă există $\bigwedge\limits_{i \in I} x_i$, atunci există şi $\bigvee\limits_{i \in I} (-x_i)$ şi are loc egalitatea $\bigwedge\limits_{i \in I} x_i = -\bigvee\limits_{i \in I} (-x_i)$. Analog, dacă există $\bigvee\limits_{i \in I} x_i$, atunci există şi $\bigwedge\limits_{i \in I} (-x_i)$ şi are loc egalitatea $\bigvee\limits_{i \in I} x_i = -\bigwedge\limits_{i \in I} (-x_i)$. Dacă G este un subspaţiu liniar al lui X şi dacă G este o mulţime plină, atunci în spaţiul liniar cît X/G, mulţimea $H = \{\hat{x} \mid x \in X_+\}$, unde $\hat{x}$ este clasa definită de x, este un con. Cu ordinea liniară dată de acest con, X/G se numeşte **s.l.o.** ***cît***. Dacă $\{X_j\}_{j \in J}$ este o familie de **s.l.o.**, atunci în spaţiul liniar produs $\prod\limits_{j \in J} X_j$ se consideră ordinea liniară:

$$\{a_j\}_{j \in J} \leqslant \{b_j\}_{j \in J} \Leftrightarrow a_j \leqslant b_j, \quad \forall j \in J.$$

Cu această ordine $\prod\limits_{j \in J} X_j$ se numeşte **s.l.o.** *produs*. Se numeşte *subspaţiu liniar majorant* al unui **s.l.o.** X, orice subspaţiu liniar G care are proprietatea: pentru

orice $x \in X$ există $a, b \in G$ astfel ca $a \leqslant x \leqslant b$. Fie X un spaţiu liniar reticulat. Dacă $x \in X$, elementele $x_+ = x \vee \mathbf{0}$, $x_- = (-x) \vee \mathbf{0}$, $|x| = (-x) \vee x$ se numesc respectiv *partea pozitivă*, *partea negativă* şi *modulul* lui x. Au loc următoarele relaţii: $x = x_+ - x_-$; $|x| = x_+ + x_-$; $x_+ \wedge x_- = \mathbf{0}$; $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$, $|x - y| = x \vee y - x \wedge y = |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|$, oricare ar fi elementele x, y, z. Se numeşte *subspaţiu liniar reticulat* al spaţiului X, orice subspaţiu liniar care este o submulţime reticulată. Un subspaţiu liniar G al spaţiului X este un subspaţiu liniar reticulat dacă şi numai dacă din $x \in G$ rezultă $x_+ \in G$. O submulţime E a lui X se numeşte *mulţime solidă* dacă din $|x| \leqslant |y|$ şi $y \in E$ rezultă $x \in E$. Cea mai mică mulţime solidă care conţine o submulţime A a lui X se numeşte *acoperirea solidă* a lui A şi se notează so(A). Are loc egalitatea so$(A) = \bigcup\limits_{x \in A} [-|x|, |x|]$, unde segmentul din formulă este în sensul ordinei. Un subspaţiu liniar care este o mulţime solidă se numeşte *subspaţiu normal*. Orice subspaţiu normal este un subspaţiu liniar reticulat. Dacă G este un subspaţiu normal al lui X, atunci spaţiul ordonat cît X/G este un spaţiu liniar reticulat. Dacă $\{X_j\}_{j \in J}$ este o familie de spaţii liniare reticulate, atunci spaţiul liniar produs $\prod\limits_{j \in J} X_j$ este un spaţiu liniar reticulat. Într-un spaţiu liniar reticulat X, două elemente x, y se numesc *ortogonale*, şi se notează $x \perp y$, dacă $|x| \wedge |y| = \mathbf{0}$. Dacă A este o submulţime a spaţiului liniar reticulat X, atunci mulţimea $A^\perp = \{x \in X \mid x \perp y,\ \forall y \in A\}$ se numeşte *complementul ortogonal* al mulţimii A. Dacă $A^\perp = \{0\}$, mulţimea A se spune că este *totală*. Se numeşte *bandă* a spaţiului liniar reticulat X, orice subspaţiu normal G cu proprietatea: dacă $A \subset G$ şi dacă există $a = \sup A$ în X, atunci $a \in G$. Oricare ar fi submulţimea A a spaţiului X, mulţimea $A^\perp$ este o bandă. Cea mai mică bandă care conţine o submulţime A a lui X se numeşte *banda generată de A*. Dacă X este un spaţiu liniar reticulat arhimedian, atunci o submulţime G a lui X este o bandă dacă şi numai dacă $G = (G^\perp)^\perp$. Dacă X este un spaţiu liniar σ-reticulat, atunci, pentru orice element $v \in X$, banda generată de $\{v\}$ coincide cu mulţimea $(\{v\}^\perp)^\perp$. Dacă T este o mulţime oarecare nevidă iar X este un spaţiu liniar de funcţii reale definite pe T, atunci în X se poate considera ordinea liniară: $x \leqslant y \Leftrightarrow x(t) \leqslant y(t)$, $\forall t \in T$. Această ordine se numeşte *ordinea punctuală*. În raport cu ordinea punctuală, spaţiul liniar $B_{\mathbb{R}}(T)$ al funcţiilor reale mărginite definite pe T este un spaţiu liniar complet reticulat. Dacă T este un spaţiu topologic compact, atunci spaţiul liniar $C_{\mathbb{R}}(T)$ al funcţiilor reale continue definite pe T este un spaţiu liniar reticulat în raport cu ordinea punctuală. Acest spaţiu este complet reticulat dacă şi numai dacă T este un spaţiu extremal. Dacă T este un segment al dreptei reale şi $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$, atunci spaţiul liniar $L^p_{\mathbb{R}}(T)$ (v. **spaţiu liniar normat**) este un spaţiu liniar complet reticulat cu ordinea: $\hat{x} \leqslant \hat{y} \Leftrightarrow x(t) \leqslant y(t)$ a.p.t. În anul 1928, F. Riesz a considerat pentru prima oară ca **s.l.o.** mulţimea funcţionalelor liniare definite pe un spaţiu de funcţii reale continue. Fundamentarea teoriei **s.l.o.** are loc între anii 1935—1937 prin lucrările lui L. V. Kantorovici şi H. Freudenthal iar apoi ale lui H. Nakano şi ale altor autori. (*R.C.*)

spaţiu liniar ordonat arhimedian v. **spaţiu liniar ordonat**
spaţiu liniar ordonat cît v. **spaţiu liniar ordonat**
spaţiu liniar ordonat produs v. **spaţiu liniar ordonat**

spaţiu liniar ordonat topologic, spaţiu liniar ordonat înzestrat cu o topologie liniară pentru care există o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi pline; o astfel de topologie se numeşte *topologie local plină*. Pentru o topologie liniară τ pe un spațiu liniar ordonat X, următoarele condiții sînt echivalente: 1) Topologia τ este local plină; 2) Există o bază $\mathcal{W}$ de vecinătăți ale originii astfel ca pentru orice $W \in \mathcal{W}$, din $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y \in W$ să rezulte $x \in W$; 3) Dacă $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ și $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ sînt șiruri generalizate cu valori în X astfel ca $\mathbf{0} \leqslant x_\delta \leqslant y_\delta$, $\forall \delta \in \Delta$ și $(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta \in \Delta} y_\delta = \mathbf{0}$, atunci $(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta \in \Delta} x_\delta = \mathbf{0}$. Două **s.l.o.t.** se numesc *izomorfe*, dacă ele sînt izomorfe ca spații liniare ordonate printr-o bijecție h astfel ca h și h^{-1} să fie continue în raport cu topologiile date pe cele două spații. Dacă τ este o topologic liniară pe un spațiu liniar ordonat X și dacă se consideră mulțimea $\mathcal{W}$ a acoperirilor pline ale tuturor vecinătăților originii, atunci $\mathcal{W}$ reprezintă o bază de vecinătăți ale originii pentru o topologie local plină τ_0. Topologia τ_0 este cea mai fină topologie local plină majorată de τ și se numește *topologia local plină asociată* topologiei τ. Într-un spațiu **l.o.t.**, orice mulțime (o)-mărginită este topologic mărginită. Dacă τ este o topologic liniară metrizabilă pe un spațiu liniar ordonat X și dacă pentru orice submulțime (τ)-mărginită a lui X, acoperirea sa plină este (τ)-mărginită, atunci topologia τ este local plină. O topologie local convexă pe un spațiu liniar ordonat X este local plină dacă și numai dacă poate fi definită de o mulțime de semi-norme monotone. Un spațiu liniar ordonat înzestrat cu o topologie local convexă și local plină se numește *spațiu ordonat local convex*. Dacă X este un spațiu ordonat local convex (cu topologia τ), atunci orice funcțională liniară (τ)-continuă f pe X se poate reprezenta sub forma $f = g - h$, unde g și h sînt funcționale liniare (τ)-continue și pozitive. Dacă $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este un șir generalizat descrescător de elemente pozitive dintr-un spațiu ordonat local convex separat X (cu topologia τ) și dacă acest șir generalizat converge către $\mathbf{0}$ în topologia slabă $\sigma(X, X_\tau^*)$, atunci el converge către $\mathbf{0}$ și în topologia τ. O topologie liniară τ pe un spațiu liniar ordonat X se numește *topologie* (o)-*continuă* dacă din $x_n \underset{n \in \mathbb{N}}{\downarrow} \mathbf{0}$ în X rezultă $(\tau)\text{-}\lim\limits_n x_n = \mathbf{0}$. Dacă X este un spațiu ordonat local convex separat (cu topologia τ), atunci pentru ca τ să fie (o)-continuă este necesar și suficient ca orice funcțională liniară (τ)-continuă pe X să fie (o)-continuă, *i.e.* din $x = (o)\text{-}\lim\limits_n x_n$ să rezulte $f(x) = \lim\limits_n f(x_n)$ (v. **convergența în sensul ordinei**). Pentru ca topologia definită de o normă $\|\cdot\|$ pe un spațiu liniar ordonat X să fie local plină, este necesar și suficient să existe un număr $\lambda \geqslant 1$ astfel ca din $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y$ în X să rezulte $\|x\| \leqslant \lambda \|y\|$. O astfel de normă se numește *normă cvasimonotonă*; cînd $\lambda = 1$, se numește *normă monotonă*. Dacă X este un **s.l.o.t.** al cărui con pozitiv are interiorul nevid, atunci X este normabil. Dacă X este un spațiu liniar ordonat arhimedian înzestrat cu o normă $\|\cdot\|$, atunci următoarele condiții sînt echivalente: 1) Topologia normei este local plină; 2) Există un număr $\mu > 0$ astfel ca din x, $y \geqslant 0$ și $\|x\| = \|y\| = 1$ să rezulte $\|x + y\| \geqslant \mu$. Un spațiu liniar ordonat înzestrat cu o normă monotonă se numește *spațiu ordonat normat*. Două spații ordonate normate X, Y se numesc *izomorfe* dacă ele sînt izomorfe ca spații liniare ordonate printr-o bijecție h astfel ca $\|h(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in X$. (*R.C.*)

spațiu liniar produs v. **spațiu liniar**

spațiu liniar reticulat v. **spațiu liniar ordonat**

spațiu liniar reticulat cu unitate, spațiu liniar reticulat în care există elemente totale și în care s-a ales un element total și pozitiv. Un astfel de element se numește *element unitate*. Fie X un **s.l.r.u.** și fie $\mathbf{1}$ element unitate. Un element $e \in X$ se numește *element unitar* dacă $e \wedge (\mathbf{1} - e) = \mathbf{0}$. Proiecția elementului unitate pe o componentă oarecare a lui X este un element unitar. Un element

$s \in X$ se numește *element simplu* dacă se poate reprezenta sub forma $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, unde λ_i sînt numere reale iar e_i elemente unitare. Un element $x \in X$ se numește *element mărginit* dacă există un număr $\lambda > 0$ astfel ca $|x| \leqslant \lambda \mathbf{1}$. Dacă într-un **s.l.r.u.** elementul unitate este axial, atunci el se numește *unitate tare*. Fie X un spațiu liniar σ-reticulat cu unitate. Pentru orice element $x \in X$ funcția $g_x : \mathbb{R} \to X$ dată de formula $g_x(\lambda) = [(\lambda \mathbf{1} - x)_+]\mathbf{1}$ (unde $[v]$ este proiectorul principal generat de un element v) se numește *funcția spectrală* a lui x. Dacă Δ este o diviziune a dreptei reale cu punctele λ_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \lambda_i < \lambda_{i+1}$ și $\lambda_{i+1} - \lambda_i \leqslant \varepsilon$, pentru un anumit număr $\varepsilon > 0$, se notează $\nu(\Delta) = \sup (\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ și se pune

$$s(\Delta) = (o)\text{-} \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_i (g_x(\lambda_{i+1}) - g_x(\lambda_i)),$$

unde $\gamma_i \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ iar seria este convergentă în sensul ordinei. Dacă $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de diviziuni iar $\lim\limits_n \nu(\Delta_n) = 0$, atunci $x = (o)\text{-}\lim\limits_n s(\Delta_n)$. Rezultatul se exprimă sub forma $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}g_x(\lambda)$ și constituie *teorema lui H. Freudenthal*. Dacă există un număr $\xi > 0$ astfel ca $|x| \leqslant \xi \mathbf{1}$, atunci $g_x(\lambda) = \mathbf{0}$ pentru $\lambda \leqslant -\xi$ și $g_x(\lambda) = \mathbf{1}$ pentru $\lambda > \xi$. În acest caz $s(\Delta)$ este o sumă finită, iar integrala se reduce la o integrală pe un interval finit. Rezultă că există un șir de elemente simple care (ρ)-converge cu regulatorul $\mathbf{1}$ (v. **convergența în sensul ordinei**) către elementul x. Orice spațiu liniar complet reticulat este izomorf (ca spațiu liniar ordonat) cu un subspațiu normal și total al unui spațiu liniar complet reticulat cu unitate. (*R.C.*)

spațiu liniar reticulat de tipul (o)-**mărginirii** O submulțime E a unui spațiu liniar ordonat X se spune că este (o)-*anulabilă* dacă pentru orice șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din E și orice șir $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de numere pozitive convergent către zero, șirul $\{\lambda_n x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este (o)-convergent către elementul $\mathbf{0}$. Se numește **s.l.r.t.** (o)-**m.** un spațiu liniar reticulat arhimedian în care orice submulțime (o)-anulabilă este (o)-mărginită. În consecință, într-un astfel de spațiu mulțimea submulțimilor (o)-mărginite coincide cu mulțimea submulțimilor (o)-anulabile. De asemenea, într-un astfel de spațiu o submulțime A este (o)-mărginită dacă și numai dacă orice parte cel mult numărabilă a lui A este (o)-mărginită. (*R.C.*)

spațiu liniar reticulat regulat, spațiu liniar reticulat arhimedian în care orice șir (o)-convergent, converge cu regulator. Pentru ca un spațiu liniar reticulat arhimedian să fie regulat, este necesar și suficient ca următoarea condiție să fie satisfăcută: dacă $(o)\text{-}\lim\limits_n x_n = \mathbf{0}$, atunci există un șir $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de numere naturale astfel ca $\lim\limits_n \lambda_n = +\infty$ și $(o)\text{-}\lim\limits_n \lambda_n x_n = \mathbf{0}$. Un **s.l.r.r.** în care pentru orice mulțime numărabilă de șiruri (o)-convergente există un regulator comun de convergență, se numește *spațiu liniar reticulat* σ-*regulat*. Pentru un spațiu liniar reticulat arhimedian X, următoarele condiții sînt echivalente: 1) Spațiul X este σ-regulat; 2) Dacă $(o)\text{-}\lim\limits_m x_{nm} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, atunci există un șir $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de numere naturale cu, $m_n < m_{n+1}$, astfel ca $(o)\text{-}\lim\limits_n x_{nm_n} = 0$; 3) Spațiul X este regulat și pentru orice șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente pozitive există un șir $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale cu $\lambda_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, astfel ca șirul $\{\lambda_n x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ să fie (o)-mărginit.

Spațiul $L^p_{\mathbb{R}}(T)$, $p \geq 1$, cu ordinea obișnuită (v. **spațiu liniar ordonat**) este un spațiu liniar reticulat σ-regulat. Spațiul (s) al tuturor șirurilor de numere reale, cu operațiile obișnuite și cu ordinea

$$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \leqslant \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \xi_n \leqslant \eta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

este de asemenea un spațiu liniar reticulat σ-regulat. Spațiul (s_0) al șirurilor de numere reale care au numai un număr finit de termeni nenuli (organizat ca și (s)) este un **s.l.r.**, dar nu este σ-regulat. (*R.C.*)

spațiu liniar reticulat topologic, spațiu liniar reticulat înzestrat cu o topologie liniară pentru care există o bază de vecinătăți ale originii formată din mulțimi solide; o astfel de topologie se numește *topologie local solidă.* O topologie local solidă este în particular o topologie local plină. Pentru ca o topologie liniară τ pe un spațiu liniar reticulat X să fie local solidă, este necesar și suficient ca τ să fie local plină și ca aplicațiile $(x, y) \to x \vee y$ și $(x, y) \to x \wedge y$ ale lui $X \times X$ în X să fie (τ)-continue. În consecință, o topologie liniară τ pe spațiul liniar reticulat X este local solidă dacă și numai dacă pentru orice șiruri generalizate $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, $\{y_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elemente din X pentru care $|x_\delta| \leqslant |y_\delta|$, $\forall \delta \in \Delta$ și $(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} y_\delta = 0$ rezultă $(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta = 0$. Dacă un **s.l.r.t.** este separat (ca spațiu topologic) atunci: 1) Conul pozitiv este (τ)-închis și în consecință spațiul este arhimedian; 2) Dacă un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente converge cu regulator către un element x, atunci el converge și în topologia spațiului către același element. Dacă în raport cu topologia sa τ, un **s.l.r.t.** este metrizabil și complet, atunci pentru ca un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente să fie (τ)-convergent către un element x, este necesar și suficient ca orice subșir $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ al șirului dat să conțină un subșir convergent cu regulator către x. O topologie local convexă pe un spațiu liniar reticulat este local solidă dacă și numai dacă poate fi definită de o mulțime de seminorme solide. Un spațiu liniar reticulat înzestrat cu o topologie local convexă și local solidă se numește *spațiu reticulat local convex* (sau *latice local convexă*). Dacă un spațiu reticulat local convex este bornologic în raport cu topologia sa, atunci el se numește *spațiu reticulat bornologic.* Pentru un spațiu reticulat local convex X (cu topologia τ) următoarele condiții sînt echivalente: 1) Spațiul X este bornologic; 2) Orice submulțime solidă, convexă și (τ)-bornivoră a lui X este o (τ)-vecinătate a originii; 3) Orice seminormă solidă și (τ)-mărginită este (τ)-continuă. Dacă τ este o topologie local convexă pe un spațiu liniar reticulat X astfel ca X să fie un spațiu bornologic, atunci pentru ca τ să fie local solidă, este necesar și suficient ca următoarea condiție să fie satisfăcută în spațiul X: dacă $|x_n| \leqslant |y_n|$, $n \in \mathbb{N}$, și $(\tau)\text{-}\lim\limits_{n} y_n = 0$, atunci $(\tau)\text{-}\lim\limits_{n} x_n = 0$. Orice subspațiu normal al unui spațiu reticulat bornologic este un spațiu bornologic. Fie acum X un spațiu liniar reticulat și τ o topologie local convexă, local plină în X. Fie $\mathcal{W}$ o bază de vecinătăți ale originii formată din mulțimi echilibrate, convexe și pline. Pentru orice $V \in \mathcal{W}$ fie $\check{V} = \{x \in X \mid [-|x|, |x|] \subset V\}$, unde segmentul se înțelege în sensul ordinei. Sistemul $\{\check{V} \mid V \in \mathcal{W}\}$ reprezintă o bază de vecinătăți ale originii pentru o topologie local convexă și local solidă $\check{\tau}$. Topologia $\check{\tau}$ este cea mai puțin fină topologie local convexă, local solidă care majorează topologia τ. Ea se numește *topologia local solidă asociată* topologiei τ. Dacă conul pozitiv X_+ este (τ)-închis, atunci un șir generalizat monoton $(\check{\tau})$-converge către un element x dacă și numai dacă (τ)-converge către același element. Dacă X este un spațiu reticulat local convex separat, atunci mulțimea X^*_τ a funcționalelor liniare (τ)-continue definite pe X este un subspațiu normal al spațiului liniar complet reticulat X^r al funcționalelor regulate definite pe X; dacă în plus X este bornologic și secvențial (τ)-complet, atunci $X^*_\tau = X^r$. Dacă τ este o topologie local convexă și local plină pe un spațiu liniar reticulat X, atunci $X^*_{\check{\tau}}$ este subspațiul normal generat de X^*_τ în X^r. Dacă X este un spațiu reticulat local convex metrizabil, atunci mulțimea X^*_o a funcționalelor liniare (o)-continue (*i.e.* continue în raport cu (o)-convergența șirurilor) reprezintă componenta generată de $X^*_o \cap X^*_\tau$ în spațiul X^r. O topologie liniară τ pe un spațiu liniar reticulat X se numește *topologie* (ω)-*continuă* dacă din $x_\delta \underset{\delta\in\Delta}{\downarrow} 0$ în X rezultă $(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta = 0$. Dacă X este un spațiu reticulat local convex separat cu topologia τ, atunci pentru ca τ să fie (ω)-continuă este necesar și suficient ca orice funcțională liniară (τ)-continuă pe X să fie (ω)-continuă (*i.e.* din $x = (\omega)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta$ să rezulte $f(x) = \lim\limits_{\delta\in\Delta} f(x_\delta)$) (v. **convergența în sensul ordinei**). Dacă X este un spațiu reticulat bornologic separat (cu topologia τ) secvențial (τ)-complet și dacă τ este (ω)-continuă, atunci funcționalele liniare (τ)-continue pe X coincid cu funcționale liniare (ω)-continue pe X. Se numește *spațiu reticulat local convex de tip* (L) (sau *latice local convexă de tip* (L)), un spațiu reticulat local convex separat a cărui topologie poate fi definită de o mulțime $\mathcal{P}$ de seminorme solide astfel ca dacă $p \in \mathcal{P}$ și $x, y \in X_+$, atunci $p(x+y) = p(x)+p(y)$. Dacă un astfel de spațiu este secvențial (τ)-complet (resp. (τ)-complet), atunci el este σ-reticulat (resp. complet reticulat), topologia τ este (o)-continuă și orice șir crescător și (τ)-mărginit de elemente pozitive este (o)-mărginit. Se numește *spațiu reticulat local convex de tip* (M) (sau *latice local convexă de tip* (M)) un spațiu reticulat local convex separat a cărui topologie τ poate fi definită de o mulțime $\mathcal{P}$ de seminorme solide astfel ca dacă $p \in \mathcal{P}$ și $x, y \in X_+$, atunci $p(x \vee y) = \max\,(p(x), p(y))$. Pentru ca un spațiu reticulat local convex separat X să fie de tip (M) este necesar și suficient să existe în spațiul X o bază de vecinătăți ale originii formată din sublatici. Dacă X este un spațiu reticulat local convex de tip (M) cu topologia τ și dacă X este (τ)-complet, atunci pentru orice mulțime total (τ)-mărginită există marginea superioară. (*R.C.*)

spațiu liniar topologic, spațiu liniar înzestrat cu o topologie τ pentru care aplicațiile $(x, y) \to x+y$ (a lui $X \times X$ în X) și $(\lambda, x) \to \lambda x$ (a lui $\Gamma \times X$ în X, unde Γ este corpul scalarilor) sînt aplicații continue. O astfel de topologie se numește *topologie liniară.* Sin.: *spațiu vectorial topologic.* Elementul nul al unui **s.l.t.** se numește *origine.* Într-un **s.l.t.** există o bază $\mathcal{W}$ de vecinătăți echilibrate și închise ale originii, cu următoarele proprietăți: i) Pentru orice $V \in \mathcal{W}$ există $V_1 \in \mathcal{W}$ cu $V_1 + V_1 \subset V$; ii) Dacă $V \in \mathcal{W}$ iar $0 \neq \lambda \in \Gamma$, atunci $\lambda V \in \mathcal{W}$. Fie acum X un spațiu liniar și $\mathcal{W}$ o mulțime de submulțimi echilibrate și absorbante ale lui X cu următoarele proprietăți: 1) Pentru orice $V \in \mathcal{W}$ există $V_1 \in \mathcal{W}$ cu $V_1 + V_1 \subset V$; 2) Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{W}$, atunci există $V_3 \in \mathcal{W}$ cu $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Există atunci o topologie liniară τ pe X pentru care $\mathcal{W}$ este o bază de vecinătăți ale originii. Un **s.l.t.** este separat dacă și numai dacă pentru orice element, $x \neq 0$ există o vecinătate V a originii astfel ca $x \notin V$. Se numește *subspațiu liniar topologic* al unui **s.l.t.** orice subspațiu liniar înzestrat cu topologia indusă. Dacă X este un **s.l.t.** iar G un subspațiu liniar, atunci în spațiul liniar cît X/G topologia cît este o topologie liniară. Înzestrat cu topologia cît, X/G se numește **s.l.t.** *cît.* Spațiul X/G este separat dacă și numai dacă subspațiul liniar G este închis. Dacă $\{X_j\}_{j\in J}$ este o familie de **s.l.t.** (cu același corp al scalarilor), atunci în spațiul liniar produs $\prod\limits_{j\in J} X_j$ topologia produs este o topologie liniară. Înzestrat cu topologia produs, $\prod_{j \in J} X_j$ se numește **s.l.t.** *produs*. Două spații liniare topologice X, Y (cu același corp al scalarilor) se numesc *izomorfe* dacă există o bijecție $h: X \to Y$ care satisface condițiile:

1) $h(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha h(x_1) + \beta h(x_2)$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall x_1, x_2 \in X$;

2) Aplicațiile h și h^{-1} sînt continue.

Dacă X este un **s.l.t.** separat și dacă există în X o vecinătate total mărginită a originii, atunci spațiul X este finit-dimensional. În particular, dacă X este un **s.l.t.** separat m-dimensional, atunci X este izomorf cu spațiul liniar topologic Γ^m (cu topologia obișnuită). Studiul **s.l.t.** de diverse tipuri (spații local convexe, spații liniare cvasinormate, spații Banach, spații liniare ordonate topologice etc.), precum și studiul operatorilor de diverse tipuri între astfel de spații formează obiectul domeniului matematicii care poartă denumirea de analiză funcțională. (*R.C.*)

spațiu liniar topologic cît v. **spațiu liniar topologic**

spațiu liniar topologic complet Fie X un spațiu liniar topologic. Un șir generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ cu valori în X se numește *șir generalizat Cauchy* (sau *șir generalizat fundamental*) dacă pentru orice vecinătate W a originii există $\delta_0 \in \Delta$ astfel ca $x_{\delta_1} - x_{\delta_2} \in W$ dacă $\delta_1, \delta_2 \geqslant \delta_0$. Dacă Δ este mulțimea numerelor naturale (*i.e.* în cazul unui șir ordinar) se utilizează denumirea de *șir Cauchy*. Orice șir generalizat convergent este un șir generalizat Cauchy, dar reciproca nu este adevărată. Un spațiu liniar topologic X se spune că este *complet* (resp. *secvențial complet*) dacă orice șir generalizat Cauchy (resp. orice șir Cauchy) cu valori în X este convergent către un element al spațiului. Definiția se extinde, într-un mod evident, la submulțimi ale spațiului X, obținîndu-se noțiunea de *mulțime completă* (resp. *mulțime secvențial completă*). Un spațiu liniar topologic în care orice submulțime mărginită și închisă este o mulțime completă, se numește *spațiu liniar topologic cvasicomplet*. Într-un **s.l.t.c.**, orice submulțime închisă este o mulțime completă. Într-un spațiu liniar topologic separat, orice mulțime completă este închisă. Într-un spațiu liniar topologic separat și complet, o submulțime este total mărginită dacă și numai dacă este relativ compactă. (*R.C.*)

spațiu liniar topologic cvasicomplet v. **spațiu liniar topologic complet**

spațiu liniar topologic metrizabil, spațiu liniar topologic a cărui topologie poate fi definită de o distanță. Pentru ca un spațiu liniar topologic separat X să fie metrizabil, este necesar și suficient să existe în X o bază numărabilă de vecinătăți ale originii. Topologia unui **s.l.t.m.** poate fi definită de o cvasinormă. (*R.C.*)

spațiu liniar topologic normabil, spațiu liniar topologic a cărui topologie poate fi definită de o normă. Pentru ca un spațiu liniar topologic separat X să fie normabil, este necesar și suficient să existe în X o vecinătate a originii care să fie convexă și mărginită. (*R.C.*)

spațiu liniar topologic produs v. **spațiu liniar topologic**

spațiu liniar topologic secvențial complet v. **spațiu liniar topologic complet**

spațiu local compact v. **spațiu topologic compact**

spațiu local convex, spațiu liniar topologic în care există o bază de vecinătăți ale originii formată din mulțimi convexe. Topologia unui **s.l.c.** se numește *topologie local convexă*. În orice **s.l.c.** există o bază de vecinătăți ale originii formată din mulțimi echilibrate, convexe și închise, iar mulțimea tuturor submulțimilor echilibrate, convexe, închise și mărginite formează o bază de mulțimi mărginite. Dacă X este un spațiu liniar și $\mathcal{P}$ o mulțime de seminorme pe X, atunci sistemul tuturor mulțimilor de forma

$$E(p_1, p_2, \ldots, p_n; \varepsilon) = \{x \in X \mid p_j(x) < \varepsilon,\ j = 1, 2, \ldots, n\}, \text{ cu } 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ și } p_j \in \mathcal{P},$$

formează o bază de vecinătăți ale originii pentru o topologie local convexă pe X. Această topologie se numește *topologia definită de* $\mathcal{P}$. Ea este separată dacă și numai dacă pentru orice element nenul $x \in X$ există $p \in \mathcal{P}$ astfel ca $p(x) \neq 0$. În acest caz se spune că $\mathcal{P}$ este o ***mulțime suficientă de seminorme*** pe X. Dacă X este un **s.l.c.** oarecare și considerăm o bază $\mathcal{W}$ de vecinătăți echilibrate și convexe ale originii, iar pentru orice $V \in \mathcal{W}$ considerăm funcționala lui Minkowski p_V asociată lui V, atunci p_V este o seminormă, iar topologia spațiului este definită de mulțimea de seminorme $\{p_V \mid V \in \mathcal{W}\}$. Fie X un spațiu liniar. Dacă p_1, p_2 sînt seminorme pe X, se definește relația de ordine $p_1 \leqslant p_2$ prin condiția $p_1(x) \leqslant p_2(x)$, $\forall x \in X$. Dacă $\mathcal{P}$ este o mulțime oarecare de seminorme pe X și dacă notăm cu $\mathcal{P}'$ mulțimea tuturor seminormelor de forma $p'(x) = \max_{j=1}^{n} p_j(x)$, cu $p_j \in \mathcal{P}$, atunci $\mathcal{P}'$ este o mulțime dirijată de seminorme (în raport cu ordinea introdusă) iar topologiile definite de $\mathcal{P}$ și $\mathcal{P}'$ coincid. Dacă $\mathcal{P}$ este o mulțime dirijată de seminorme pe X, atunci o bază de vecinătăți ale originii pentru topologia definită de $\mathcal{P}$ este mulțimea tuturor mulțimilor $E(p; \varepsilon)$, cu $p \in \mathcal{P}$ și $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Orice topologie local convexă este definită de o anumită mulțime dirijată de seminorme. Dacă $\mathcal{P}'$ și $\mathcal{P}''$ sînt mulțimi dirijate de seminorme pe un spațiu liniar X, se spune că $\mathcal{P}'$ este *mai slabă* ca $\mathcal{P}''$ dacă pentru orice $p' \in \mathcal{P}'$ există $p'' \in \mathcal{P}''$ și un număr $\mu > 0$ astfel ca $p'(x) \leqslant \mu p''(x)$, $\forall x \in X$. Se spune că $\mathcal{P}'$ și $\mathcal{P}''$ sînt *echivalente* dacă fiecare este mai slabă decît cealaltă. Topologia definită de $\mathcal{P}'$ este majorată de cea definită de $\mathcal{P}''$ dacă și numai dacă $\mathcal{P}'$ este mai slabă ca $\mathcal{P}''$. În consecință, topologiile definite de $\mathcal{P}'$ și $\mathcal{P}''$ coincid dacă și numai dacă $\mathcal{P}'$ și $\mathcal{P}''$ sînt echivalente. Dacă X este un **s.l.c.** separat, atunci și completatul său $\widetilde{X}$ este un **s.l.c.** Dacă G este un subspațiu liniar al unui **s.l.c.** X, atunci spațiul liniar topologic cît X/G este un **s.l.c.** Dacă $\mathcal{P}$ este o mulțime dirijată de seminorme care definește topologia lui X, atunci topologia spațiului cît este definită de mulțimea $\{\hat{p} \mid p \in \mathcal{P}\}$ a seminormelor de forma

$$\hat{p}(\hat{x}) = \inf\{p(a) \mid a \in \hat{x}\}, \quad \hat{x} \in X/G.$$

Dacă $\{X_j\}_{j \in J}$ este o familie de **s.l.c.**, atunci și spațiul liniar topologic produs $\prod_{j \in J} X_j$ este un **s.l.c.** Dacă $\mathcal{P}_j$ este o mulțime de seminorme care definește topologia lui X_j iar pentru orice $p_j \in \mathcal{P}_j$ punem $\bar{p}_j(\{x_i\}_{i \in J}) = p_j(x_j)$, $x_j \in X_j$, atunci topologia produs este definită de mulțimea de seminorme $\{\bar{p}_j \mid p_j \in \mathcal{P}_j;\ j \in J\}$. Pentru orice **s.l.c.** separat X există o familie $\{X_j\}_{j \in J}$ de spații liniare normate astfel ca X să fie izomorf cu un subspațiu liniar topologic al spațiului liniar topologic produs $\prod_{j \in J} X_j$. Fie acum T un spațiu topologic separat și $C_{\mathbb{R}}(T)$ mulțimea funcțiilor reale continue definite de T. Cu operațiile obținute cu funcțiile, $C_{\mathbb{R}}(T)$ este un spațiu liniar. Pentru orice parte compactă $A \subset T$, punînd

$$p_A(x) = \sup\{|x(t)| \mid t \in A\}, \quad x \in C_{\mathbb{R}}(T),$$

obținem o seminormă pe $C_{\mathbb{R}}(T)$. Topologia local convexă separată definită de mulțimea tuturor acestor seminorme, se numește *topologia convergenței compacte*. Dacă T este un spațiu local compact numărabil la infinit, atunci

$C_{\mathbb{R}}(T)$ cu topologia convergenţei compacte este metrizabil. Dacă T este compact, atunci $C_{\mathbb{R}}(T)$, cu aceeaşi topologie, este normabil. (*R.C.*)

spaţiu local convex reflexiv Fie X un spaţiu local convex cu topologia τ şi $\beta = \beta(X_\tau^*, X)$ topologia tare pe conjugatul X_τ^* al lui X. Spaţiul liniar $(X_\tau^*)_\beta^*$ se va nota X^{**}. Pentru orice $x \in X$ punînd $F_x(f) = f(x)$, $\forall f \in X_\tau^*$, avem $F_x \in X^{**}$. Fie $\Phi(X) = \{F_x \mid x \in X\}$. Dacă $\Phi(X) = X^{**}$, atunci X se spune că este un *spaţiu semireflexiv*. Dacă X este semireflexiv iar topologia τ a lui X coincide cu topologia tare $\beta(X, X_\tau^*)$, atunci X se spune că este un *spaţiu reflexiv*. Spaţiul X este semireflexiv dacă şi numai dacă orice parte a sa care este mărginită în topologia slabă $\sigma(X, X_\tau^*)$ este relativ compactă în aceeaşi topologie. Dacă X este semireflexiv atunci conjugatul său X_τ^* este tonelat în raport cu topologia tare. Spaţiul X este reflexiv dacă şi numai dacă este semireflexiv şi tonelat. În raport cu topologia tare conjugatul unui spaţiu reflexiv este un spaţiu reflexiv. Orice spaţiu liniar normat care este un spaţiu semireflexiv, este un spaţiu Banach şi un spaţiu reflexiv. Orice spaţiu liniar normat X care este reflexiv este secvenţial complet în topologia slabă $\sigma(X, X_\tau^*)$. Un spaţiu liniar normat X este reflexiv dacă şi numai dacă sfera unitate închisă a spaţiului este compactă în topologia slabă $\sigma(X, X_\tau^*)$. (*R.C.*)

spaţiu local convex semireflexiv v. **spaţiu local convex reflexiv**

spaţiu Mackey v. **sistem dual de spaţii liniare**

spaţiu metric v. **distanţă**

spaţiu metric complet, spaţiu metric în care orice şir Cauchy este convergent (v. şi **spaţiu topologic complet**). Amintim că un şir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ în spaţiul metric (X, d) se numeşte *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pentru orice $n, m \geqslant n_\varepsilon$.

Teorema lui Cantor. Un spaţiu metric este complet dacă şi numai dacă orice şir descendent de mulţimi închise cu diametrele tinzînd la zero are intersecţie nevidă (redusă la un punct).

O submulţime A a unui spaţiu metric este completă dacă şi numai dacă orice şir Cauchy de elemente din A converge către un element din A. Într-un **s.m.c.** o mulţime este completă dacă şi numai dacă este închisă. Fie (X, d) un spaţiu metric. Există atunci un **s.m.c.** $(\hat{X}, \hat{d})$ astfel încît X să fie izometric cu (un subspaţiu dens al lui $\hat{X}$. Spaţiul metric $(\hat{X}, \hat{d})$ se numeşte *completatul lui X* v. şi **şir generalizat Cauchy**). Construcţia spaţiului $\hat{X}$ constituie un instrument clasic al analizei matematice şi este o extensie a procedeului lui Cantor de construcţie a mulţimii numerelor reale pornind de la mulţimea numerelor raţionale. Se consideră $\widetilde{X}$ mulţimea şirurilor Cauchy de elemente din X şi se introduce în $\widetilde{X}$ relaţia de echivalenţă

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Se notează $\hat{X} = \widetilde{X}/\sim$. Înzestrată cu distanţa $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$, unde $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{x}$ şi $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{y}$, mulţimea $\hat{X}$ devine un **s.m.c.** Aplicaţia $x \to \hat{x}$, unde $\hat{x}$ este clasa care conţine şirul constant $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, este o izometrie între X şi un subspaţiu dens în $\hat{X}$. (*Gh.Gr.*)

spaţiu metric precompact v. **distanţă**

spaţiu metrizabil v. **spaţiu topologic metrizabil**

spaţiu Montel, spaţiu local convex tonelat, separat, în care orice mulţime mărginită este relativ compactă. Orice **s.M.** este un spaţiu reflexiv. Dacă X este un **s.M.**, atunci conjugatul său X^*, înzestrat cu topologia tare, este tot un s.M. Dacă un spațiu liniar normat este un s.M., atunci el este finit-dimensional. (*R.C.*)

spațiu normal, spațiu topologic separat în care este satisfăcută următoarea axiomă de separare: (T_4) Pentru orice mulțimi închise și disjuncte A, B există mulțimile deschise și disjuncte G, H astfel încît $A \subset G$ și $B \subset H$. Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic. Afirmațiile următoare sînt echivalente: i) T_4; ii) Pentru orice mulțime închisă A și pentru orice mulțime deschisă G, care conține pe A, există o mulțime deschisă H astfel încît $A \subset H$ și $\overline{H} \subset G$; iii) Pentru orice mulțimi închise și disjuncte A, B există o funcție continuă $f : \mathcal{X} \to [0, 1]$ astfel încît $f(A) = 1$ și $f(B) = 0$; iv) Pentru orice mulțime închisă, nevidă, F și pentru orice funcție continuă $f : F \to \mathbb{R}$ există o funcție continuă $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ astfel încît $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in F$; v) Pentru orice funcție superior semicontinuă, mărginită superior, $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ și pentru orice funcție inferior semicontinuă, mărginită inferior, $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ astfel încît $g(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, există o funcție continuă $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ astfel încît $g(x) \leqslant h(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Echivalența dintre T_4 și proprietatea iii) este cunoscută sub numele de *teorema lui Urîson* iar echivalența dintre T_4 și iv) se numește *teorema lui Tietze*. Orice s.n. este complet regulat. Orice subspațiu al unui s.n. este un spațiu complet regulat. Orice spațiu complet este normal. Orice spațiu topologic metrizabil este normal. Unii autori numesc s.n. un spațiu topologic în care este satisfăcută axioma T_4 (deci fără ipoteza de separare). Axioma T_4 este numită de N. Bourbaki *axioma* O_V. (*Gh.Gr.*)

spațiu nuclear Fie X un spațiu local convex. Dacă W este o vecinătate echilibrată și convexă a originii iar p_W funcționala lui Minkowski asociată lui W, atunci mulțimea $p_W^{-1}(0)$ este un subspațiu liniar închis al spațiului X. Să considerăm spațiul liniar cît $X_W = X/p_W^{-1}(0)$ și fie $l_W : X \to X_W$ aplicația canonică (*i.e.* $l_W(x) = \hat{x}$, unde $\hat{x}$ este clasa determinată de elementul x). Formula $\| \hat{x} \|_W = p_W(x)$ definește o normă pe spațiul liniar X_W. Fie $\widetilde{X}_W$ completatul spațiului liniar normat X_W și $\widetilde{l}_W : X \to \widetilde{X}_W$ aplicația definită prin $\widetilde{l}_W(x) = l_W(x)$, $\forall x \in X$ (considerînd $X_W \subset \widetilde{X}_W$). Spațiul local convex X se numește s.n. dacă pentru orice vecinătate echilibrată și convexă W a originii, aplicația $\widetilde{l}_W$ este un operator nuclear. O condiție necesară și suficientă ca un spațiu local convex X să fie nuclear este ca, pentru orice vecinătate echilibrată și convexă W a originii, să existe o vecinătate echilibrată și convexă W_0 a originii astfel ca $W_0 \subset W$ iar aplicația canonică $\widetilde{l}_{W_0W} : X_{W_0} \to \widetilde{X}_W$ (*i.e.* $\widetilde{l}_{W_0W}(l_{W_0}(x)) = \widetilde{l}_W(x)$, $\forall x \in X$) să fie un operator nuclear. În orice s.n. X există o bază $\mathcal{W}$ de vecinătăți echilibrate și convexe ale originii astfel ca pentru orice $W \in \mathcal{W}$ spațiul X_W să fie prehilbertian. Un subspațiu liniar topologic al unui s.n. este un s.n. Dacă un spațiu Banacheste un s.n., atunci el este finit-dimensional. (*R.C.*)

spațiu Oka v. **fascicol coerent**

spațiu ordonat local convex v. **spațiu liniar ordonat topologic**

spațiu ordonat normat v. **spațiu liniar ordonat topologic**

spațiu polonez v. **mulțimi susliniene**; **mulțimi proiective**; **mulțimi analitice**

spațiu prehilbertian v. **spațiu Hilbert**

spațiu reflexiv v. **spațiu local convex reflexiv**

spațiu reticulat Banach v. **spațiul reticulat normat**

spațiu reticulat bornologic v. **spațiu liniar reticulat topologic**

spațiu reticulat local convex v. **spațiu liniar reticulat topologic**

spațiu reticulat normat, spațiu liniar reticulat X înzestrat cu o normă $\| \cdot \|$ care satisface condiția: $|x| \leqslant |y|$, $(x, y \in X) \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$; o astfel de normă se numeşte *normă solidă*. Sin.: *latice normată*. Pentru ca o normă $\|\cdot\|$ pe un spaţiu liniar reticulat X să fie solidă, este necesar şi suficient ca din condiţiile $|x_n|\leqslant|y_n|$, $n\in\mathbb{N}$, şi $\lim_n \|y_n\|=0$ să rezulte $\lim_n\|x_n\|=0$. Se numeşte *spaţiu reticulat Banach* (sau *latice Banach*) orice **s.r.n.** care este complet ca spaţiu liniar normat. Într-un spaţiu reticulat Banach, un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente converge în normă către un element x dacă şi numai dacă din orice subşir $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se poate extrage un subşir care converge cu regulator către x. Prin definiţie, un **s.r.n.** X are *normă (o)-continuă* (resp. *normă (ω)-continuă*) dacă din $x_n \downarrow_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{0}$ (resp. $x_\delta\downarrow_{\delta\in\Delta}\mathbf{0}$) rezultă $\lim_n\|x_n\|=0$ (resp. $\lim_{\delta\in\Delta}\|x_\delta\|=0$). Dacă X este un **s.r.n.**, atunci următoarele două condiţii sînt echivalente: 1) X este un spaţiu liniar σ-reticulat şi are normă (o)-continuă; 2) X este un spaţiu liniar complet reticulat, (o)-separabil şi are normă (ω)-continuă. Dacă X este un spaţiu reticulat Banach cu normă (ω)-continuă, atunci X este un spaţiu liniar complet reticulat (o)-separabil. Într-un spaţiu reticulat Banach cu normă (o)-continuă, un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente converge în normă către un element x dacă şi numai dacă din orice subşir $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se poate extrage un subşir care (o)-converge către x. Dacă X este un **s.r.n.**, atunci norma sa se poate prelungi într-o normă solidă pe extensia Dedekind $\widetilde{X}$ a lui X; dacă X are normă (ω)-continuă, atunci prelungirea este unică. Se numeşte *spaţiu de tip (KB)* orice **s.r.n.** cu normă (o)-continuă, care este σ-reticulat şi satisface condiţia: dacă $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots$ în X şi $\|x_n\|\leqslant\lambda$, $\forall n\in\mathbb{N}$, atunci există $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Într-un spaţiu de tip (KB) o submulţime A este (o)-mărginită dacă şi numai dacă mulţimea $\left\{\bigvee_{j=1}^{n}|x_j| \mid x_j\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ este topologic mărginită. Pentru ca un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente ale unui spaţiu de tip (KB) să fie (o)-convergent către **0**, este necesar şi suficient ca $\lim_n\left\|\bigvee_{j=n}^{n+m}|x_j|\right\|=0$ uniform în raport cu m. Orice spaţiu de tip (KB) este un spaţiu Banach şi un spaţiu σ-regulat. Se numeşte **s.r.n.** *de tip (L)* (sau *latice normată de tip (L)*) orice **s.r.n.** a cărei normă este aditivă pe conul pozitiv: $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ dacă $x,y\geqslant \mathbf{0}$. Dacă un astfel de spaţiu este şi complet ca spaţiu liniar normat, atunci el se numeşte *spaţiu reticulat Banach de tip (L)* (sau *latice Banach de tip (L)*). Orice spaţiu reticulat Banach de tip (L) este un spaţiu de tip (KB). Pentru ca un **s.r.n.** X să fie de tip (L) este necesar şi suficient ca din $x\wedge y=\mathbf{0}$ în X să rezulte $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Se numeşte **s.r.n.** *de tip (M)* (sau *latice normată de tip (M)*) orice **s.r.n.** a cărui normă satisface condiţia: $\|x\vee y\|=\max(\|x\|,\|y\|)$ dacă $x,y\geqslant \mathbf{0}$. Dacă un astfel de spaţiu este şi complet ca spaţiu liniar normat, atunci el se numeşte *spaţiu reticulat Banach de tip (M)* (sau *latice Banach de tip (M)*). Dacă X este un spaţiu liniar reticulat arhimedian în care există elemente axiale, atunci X este un **s.r.n.** de tip (M) în raport cu „norma generată de un element axial u", *i.e.* norma dată de formula $\|x\|=\inf\{\mu>0\mid |x|\leqslant\mu u\}$. Dacă X este un spaţiu liniar σ-reticulat în care există elemente axiale, atunci X este şi un spaţiu Banach în raport cu norma precedentă. Pentru ca un **s.r.n.** X să fie de tip (M), este necesar şi suficient ca din $x\wedge y=\mathbf{0}$ în X să rezulte $\|x+y\|=\max(\|x\|,\|y\|)$. Dacă într-un **s.r.n.** conul pozitiv are interiorul nevid, atunci norma spaţiului este echivalentă cu norma generată de orice element axial. Într-un spaţiu reticulat Banach de tip (M), orice mulţime relativ compactă admite margine

superioară. Dacă X este un **s.r.n.** nenul, care este în acelaşi timp de tip (M) şi de tip (L), atunci X are dimensiunea unu. Dacă X este un **s.r.n.** oarecare, atunci conjugatul său X^*_τ (unde τ este topologia normei) este un subspaţiu normal al spaţiului X^r al funcţionalelor regulate definite pe X; în particular, X^*_τ este un spaţiu liniar complet reticulat; X^*_τ este de asemenea un spaţiu reticulat Banach. Dacă X este un spaţiu reticulat Banach, atunci $X^*_\tau=X^r$. Dacă X este un spaţiu de tip (KB), atunci mulţimea X^*_o a funcţionalelor liniare (o)-continue (*i.e.* continue în raport cu convergenţa în sensul ordinei a şirurilor) definite pe X, precum şi mulţimea X^*_ω a funcţionalelor liniare (ω)-continue (*i.e.* continue în raport cu (ω)-convergenţa şirurilor generalizate) definite pe X, coincid cu X^r. Dacă X este un spaţiu de tip (KB) şi dacă în X există elemente totale, atunci şi în spaţiul X^*_τ există elemente totale iar spaţiul X^*_τ este (o)-separabil. Dacă X este un **s.r.n.** de tip (L) (resp. de tip (M)), atunci X^*_τ este un spaţiu reticulat Banach de tip (M) (resp. de tip (L)). Fie acum X un **s.r.n.** oarecare şi să notăm $X^{**}=(X^*_\tau)^*_\tau$. Are loc egalitatea $X^{**}=(X^*_\tau)^r$, iar X^{**} este un spaţiu liniar complet reticulat şi un spaţiu reticulat Banach. Pentru orice element $x\in X$ fie $F_x(f)=f(x)$, $f\in X^*_\tau$, şi $\Psi(X)=\{F_x\mid x\in X\}$. Mulţimea $\Psi(X)$ este un subspaţiu liniar reticulat al spaţiului X^{**} iar X şi $\Psi(X)$ sînt izomorfe, ca spaţii liniare ordonate normate, prin aplicaţia $x\to F_x$. Dacă **s.r.n.** X este complet reticulat, atunci au loc următoarele rezultate: 1) $\Psi(X)$ este un subspaţiu normal al spaţiului X^{**} dacă şi numai dacă X are normă (o)-continuă; 2) $\Psi(X)$ este o componentă a spaţiului X^{**} dacă şi numai dacă X este un spaţiu de tip (KB). Dacă X este un spaţiu reticulat Banach şi un spaţiu liniar complet reticulat, atunci pentru ca X să fie reflexiv ca spaţiu liniar normat, este necesar şi suficient ca X şi X^*_τ să fie spaţii de tip (KB). Dacă T este un segment al dreptei reale iar $1\leqslant p\in\mathbb{R}$, atunci spaţiul $L^p_{\mathbb{R}}(T)$ cu structurile obişnuite (v. **spaţiu liniar normat, spaţiu liniar ordonat**) este un spaţiu de tip (KB). În particular, $L^1_{\mathbb{R}}(T)$ este un spaţiu reticulat Banach de tip (L). Mai general, dacă T este o mulţime nevidă, $\mathcal{T}$ o σ-algebră de submulţimi ale lui T şi μ o măsură (finită) pe $\mathcal{T}$, atunci **s.r.n.** $L_{\mathbb{R}}(T,\mathcal{T},\mu)$ se defineşte într-un mod analog spaţiului $L^1_{\mathbb{R}}(T)$ de mai sus şi este un spaţiu reticulat Banach de tip (L) în care există elemente totale. Reciproc, dacă X este un spaţiu reticulat Banach de tip (L) cu unitate, atunci X este izomorf (ca spaţiu liniar ordonat normat) cu un spaţiu $L_{\mathbb{R}}(T,\mathcal{T},\mu)$. Dacă X este un spaţiu reticulat Banach în care norma este generată de un element axial, atunci există un spaţiu topologic compact T astfel ca X să fie izomorf (ca spaţiu liniar ordonat normat) cu spaţiul $C_{\mathbb{R}}(T)$ al funcţiilor reale continue pe T înzestrat cu ordinea punctuală şi norma obişnuită (v. **spaţiu liniar normat**). (*R.C.*)

spaţiu Schwartz, v. **spaţiu de tip Schwartz**

spaţiu semireflexiv v. **spaţiu local convex reflexiv**

spaţiu (o)-separabil v. **spaţiu liniar ordonat**

spaţiu simplectic Fie E un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$. O formă *simplectică* σ este o formă biliniară $E\times E\to\mathbb{R}$ care este: 1) (*Antisimetrică*) $\sigma(x,y)=-\sigma(x,y)$; 2) (*Nedegenerată*), *i.e.* $\sigma(x,y)=0$ pentru orice $y\in E$ implică $x=0$. Un spaţiu vectorial E înzestrat cu o formă simplectică se numeşte **s.s.** Dacă X este o varietate diferenţiabilă, o formă simplectică este o 2-formă închisă ω (deci $d\omega=0$) astfel încît ω_x să fie o formă simplectică pe $T^*_x(X)$ pentru orice $x\in X$. O varietate înzestrată cu o formă simplectică se numeşte *varietate simplectică*; o astfel de varietate este întotdeauna de dimensiune pară. Fibratul cotangent $T^*(X)$ are întotdeauna o structură simplectică, dată de 2-forma fundamentală $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\xi_j \wedge \mathrm{d}x_j$, ce apare ca diferențiala exterioară a 1-formei fundamentale $\omega = \sum \xi_j \,\mathrm{d}x_j$; deci $\mathrm{d}\omega = \sigma$. Paranteza Poisson $\{f, g\}$ nu este decît $\sigma(H_f, H_g)$, unde H_f, H_g sînt cîmpurile hamiltoniene definite de f, respectiv g. Fie (E, σ) un s.s. și V un subspațiu al său; se poate defini subspațiul $V^{\perp}$, ortogonalul lui V în raport cu forma simplectică; în particular, dacă V este de dimensiune 1, $V \subset V^{\perp}$ datorită antiliniarității formei σ; un subspațiu V se numește izotropic, respectiv lagrangian, respectiv involutiv dacă $V \subset V^{\perp}$, dacă $V = V^{\perp}$, respectiv $V^{\perp} \subset V$. O varietate X se numește izotropică, respectiv lagrangiană, respectiv involutivă dacă $T^*(X)_x$ este izotropic, respectiv lagrangian, respectiv involutiv pentru orice $x \in X$. Subvarietățile lagrangiene din $T^*(X)$ joacă un rol esențial în studiul operatorilor integrali Fourier. *(G.G.)*

spațiu stonian atașat unui clan de părți v. **reducerea la integrarea pe spații local compacte**

spațiu tangent Fie M o varietate diferențiabilă de clasă C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, și a un punct din M. Pentru orice număr întreg k situat între 1 și r, fie

$$C^k_{M,a} := \varinjlim_{U = \mathring{U} \ni a} C^k(U).$$

Aceasta înseamnă că

$$C^k_{M,a} = (\coprod C^k(U))/\sim,$$

unde U parcurge mulțimea vecinătăților deschise ale lui a în M și unde $\sim$ este relația de echivalență definită prin

$$C^k(U) \ni f \sim g \in C^k(V), \quad a \in U \cap V,$$

dacă și numai dacă există o mulțime deschisă W în M astfel încît $a \in W \subset U \cap V$ și $f \mid W = g \mid W$. Elementele mulțimii $C^k_{M,a}$ se numesc *germeni* (în punctul a) de funcții de clasă C^k. Dacă U este o vecinătate deschisă a lui a în M și dacă $f \in C^k(U)$, clasa de echivalență a lui f în $C^k_{M,a}$ se notează prin f_a sau $\rho^U_a(f)$; se spune atunci că f_a este *germenul lui* f (sau *germenul definit de* f) în punctul a. Există o unică structură de inel pe mulțimea $C^k_{M,a}$ astfel încît aplicația $\rho^U_a: C^k(U) \to C^k_{M,a}$ să fie morfism de inele pentru orice vecinătate deschisă U a lui a. Germenii în a definiți de funcțiile reale constante formează un subinel al lui $C^k_{M,a}$, canonic izomorf cu $\mathbb{R}$; astfel $C^k_{M,a}$ este o $\mathbb{R}$-algebră. O *derivare* (reală) în algebra $C^k_{M,a}$ este o aplicație $\mathbb{R}$-liniară $u: C^k_{M,a} \to \mathbb{R}$ care satisface regula lui Leibniz de derivare a produsului, *i.e.*

$$u(f_a g_a) = u(f_a)\, g(a) + f(a)\, u(g_a).$$

Mulțimea $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^k_{M,a})$ a tuturor derivărilor în algebra $C^k_{M,a}$ are o structură evidentă de spațiu vectorial real. Ex.: Dacă I_ε este intervalul deschis $(-\varepsilon, \varepsilon)$ al dreptei reale, $\varepsilon > 0$, și dacă $\gamma \in C^k(I_\varepsilon, M)$ este un drum de clasă C^k pe M astfel încît $\gamma(0) = a$, aplicația $u: C^k_{M,a} \to \mathbb{R}$, definită prin $u(f_a) = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\right|_{t=0}$, $f_a \in C^k_{M,a}$, este o derivare în algebra $C^k_{M,a}$, numită *derivarea asociată drumului* γ (sau *vectorul viteză al drumului* γ la momentul $t = 0$). Se numește *vector tangent* la M în punctul a orice derivare u în algebra $C^1_{M,a}$ pentru care există un drum $C^1(I_\varepsilon, M)$ cu $\gamma(0) = a$ astfel încît u să fie derivarea asociată lui γ. Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la M în punctul a formează un

subspațiu vectorial al lui $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^1_{M,a})$, notat $T(M)_a$ sau $T_a(M)$ și numit s.t. la M în punctul a.
Teorema bazei. Fie $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ o hartă locală a lui M cu domeniu U conținînd punctul a. Pentru fiecare $i = 1, \ldots, n$, fie $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(a): C^1_{M,a} \to \mathbb{R}$ aplicația definită prin

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a)\,(f_a) = \frac{\partial(f \circ \alpha^{-1})}{\partial t_i}(\alpha(a)),$$

unde $(t_1, \ldots, t_n)$ sînt coordonatele carteziene ale lui $\mathbb{R}^n$. Atunci $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(a) \in T(M)_a$ pentru orice i și n-uplul $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}(a)\right)$ este un reper al spațiului vectorial real $T(M)_a$; în particular, $T(M)_a$ este un spațiu vectorial real de dimensiune n, egală cu dimensiunea varietății M.
Fie N o altă varietate diferențiabilă de clasă C^r și $\varphi \in C^k(M, N)$. Aplicația

$$\varphi^*_a: C^k_{N,\varphi(a)} \to C^k_{M,a}$$

definită prin compunerea cu φ la dreapta, *i.e.* $\varphi^*_a(g_{\varphi(a)}) = (g \circ \varphi)_a$, este un morfism de $\mathbb{R}$-algebre. Dacă u este o derivare în algebra $C^k_{M,a}$, atunci aplicația compusă $u \circ \varphi^*_a$ este o derivare în algebra $C^k_{N,\varphi(a)}$. În cazul $k = 1$, dacă $u \in T(M)_a$, atunci $u \circ \varphi^*_a \in T(N)_{\varphi(a)}$, și anume dacă u este derivarea în algebra $C^1_{M,a}$ asociată drumului $\gamma \in C^1(I_\varepsilon, M)$, $\gamma(0) = a$, atunci $u \circ \varphi^*_a$ este derivarea în algebra $C^1_{N,\varphi(a)}$ asociată drumului $\delta = \varphi \circ \gamma$. Aplicația $\varphi_{*,a}: T(M)_a \to T(N)_{\varphi(a)}$, definită prin $\varphi_{*,a}(u) = u \circ \varphi^*_a$, este $\mathbb{R}$-liniară și se numește *aplicația* (*liniară*) *tangentă* la φ în punctul a. Această aplicație are proprietăți functoriale de tip covariant. Anume, dacă $\varphi = \mathrm{id}_M$, atunci $\varphi_{*,a} = \mathrm{id}_{T(M)_a}$. De asemenea, dacă P este o altă C^r-varietate și dacă $\psi \in C^k(N, P)$, atunci $\psi \circ \varphi \in C^k(M, P)$ și $(\psi \circ \varphi)_{*,a} = \psi_{*,\varphi(a)} \circ \varphi_{*,a}$. Aplicația liniară tangentă $\varphi_{*,a}$ constituie principalul instrument tehnic în studiul local (de ordinul întîi) al aplicațiilor diferențiabile între varietăți diferențiabile. Pentru ilustrarea acestei afirmații considerăm aici trei teoreme fundamentale. În cele ce urmează, $\varphi \in C^k(M, N)$, $1 \leqslant k \leqslant r$, este aplicație diferențiabilă de clasă C^k dată, $a \in M$ un punct fixat, $n = \dim M$, $m = \dim N$.
Teorema aplicației etale (sau *teorema aplicației inverse*). Aplicația liniară tangentă $\varphi_{*,a}: T(M)_a \to T(N)_{\varphi(a)}$ este bijectivă dacă și numai dacă există o vecinătate deschisă U a lui a în M astfel încît mulțimea $\varphi(U)$ să fie deschisă în N și aplicația $\varphi \mid U: U \to \varphi(U)$ să fie un C^k-difeomorfism.
Teorema imersiei locale. Condițiile următoare sînt echivalente: i) Aplicația liniară tangentă $\varphi_{*,a}$ este injectivă; ii) Există o vecinătate deschisă U a lui a în M, o vecinătate deschisă V a lui $\varphi(a)$ în N conținînd mulțimea $\varphi(U)$, o submulțime deschisă D a lui $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 0$, conținînd originea, și o factorizare $\varphi \mid U = h \circ i: U \to V$, unde $i: U \to U \times D$ este aplicația $i(x) = (x, 0)$, $x \in U$, iar $h: U \times D \to V$ un C^k-difeomorfism; iii) Există o vecinătate deschisă V a lui a în M, o vecinătate deschisă V a lui $\varphi(a)$ în N conținînd pe $\varphi(U)$ și o retractă de clasă C^k a aplicației $\varphi \mid U: U \to V$, *i.e.* o aplicație $\rho \in C^k(V, U)$ astfel încît $\rho(\varphi(x)) = x$ pentru orice $x \in U$.
Teorema submersiei locale. Condițiile următoare sînt echivalente: i) Aplicația liniară tangentă $\varphi_{*,a}$ este surjectivă; ii) Există o vecinătate deschisă U a lui a în M, o vecinătate deschisă V a lui $\varphi(a)$ în N conținînd mulțimea $\varphi(U)$, o submulțime deschisă D a lui $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 0$, și o factorizare $\varphi \mid U = \mathrm{pr}_1 \circ h$ a aplicației $\varphi \mid U: U \to V$, unde $\mathrm{pr}_1: V \times D \to V$ este proiecția canonică și

$h : U \to V \times D$ un C^k-difeomorfism; iii) Există o vecinătate deschisă U a lui a în M, o vecinătate deschisă V a lui $\varphi(a)$ în N conţinînd pe $\varphi(U)$ şi o secţiune de clasă C^k în punctul a a aplicaţiei $\varphi \mid U : U \to V$, *i.e.* o aplicaţie $s \in C^k(V, U)$ astfel încît $s(\varphi(a)) = a$ şi $\varphi(s(x)) = x$ pentru orice $x \in U$.
Notăm că în teorema imersiei locale $m \geqslant n$ şi $p = m - n$ iar în teorema submersiei locale $m \leqslant n$ şi $p = n - m$. Se spune că aplicaţia φ este *etală* (resp. *imersie*, resp. *submersie*) în punctul a dacă satisface condiţiile echivalente ale teoremei aplicaţiei etale (resp. teoremei imersiei locale, resp. teoremei submersiei locale). Aplicaţia φ se numeşte *etală* (resp. *imersie*, resp. *submersie*) dacă este etală (resp. imersie, resp. submersie) în fiecare punct $x \in M$. Aplicaţia φ se numeşte *scufundare* dacă este imersie şi omeomorfism pe imagine, şi *scufundare închisă* dacă este o scufundare şi $\varphi(M)$ o submulţime închisă a lui N. Din teorema imersiei locale se obţine
Teorema imaginii. φ este scufundare dacă şi numai dacă $\varphi(M)$ este o subvarietate de clasă C^k a lui N şi aplicaţia $\varphi' : M \to \varphi(M)$, indusă de φ, un C^k-difeomorfism.
Un punct $a \in M$ se numeşte *punct regulat* al lui φ dacă φ este submersie în a şi *punct critic* al lui φ în caz contrar. De pildă, dacă $N = \mathbb{R}$, punctele de extrem local ale lui φ sînt puncte critice ale lui φ. Un punct $b \in N$ se numeşte *valoare regulată* a lui φ, dacă fibra $M_b : = \varphi^{-1}(b)$ este formată numai din puncte regulate, şi *valoare critică* a lui φ în caz contrar. Un punct $b \in N$ se numeşte *valoare lacunară* a lui φ dacă $b \notin \varphi(M)$. Dacă C_φ este mulţimea punctelor critice ale lui φ, atunci $\varphi(C_\varphi)$ este mulţimea valorilor critice ale lui φ; în particular valorile lacunare sînt valori regulate. Din teorema submersiei locale se obţine
Teorema contraimaginii. Dacă $b \in \varphi(M)$ este o valoare regulată a lui φ, atunci $M_b : = \varphi^{-1}(b)$ este o subvarietate de clasă C^k a lui M şi, pentru orice $a \in M_b$, şirul de spaţii vectoriale

$$0 \to T(M_b)_a \xrightarrow{i_{*,a}} T(M)_a \xrightarrow{\varphi_{*,a}} T(N)_b \longrightarrow 0$$

este exact, unde $i : M_b \to M$ este aplicaţia de incluziune.
Obs. În cazul M o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ şi $N = \mathbb{R}^n$, dacă b este o valoare regulată a lui φ şi $a \in M_b : = \varphi^{-1}(b)$, atunci şirul de spaţii vectoriale

$$0 \to T(M_b)_a \xrightarrow{di_a} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi'(a)} \mathbb{R}^m \longrightarrow 0$$

este de asemenea exact, unde di_a este diferenţiala în punctul a a aplicaţiei de incluziune $i : M_b \to \mathbb{R}^n$ şi $\varphi'(a)$ derivata în punctul a a aplicaţiei φ, *i.e.* aplicaţia liniară de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$ definită prin

$$\varphi'(a)\,(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

În ceea ce priveşte întrebarea privind o evaluare globală a mulţimii valorilor critice ale lui φ, răspunsul este furnizat de o teoremă faimoasă:
Teorema lui Sard. În ipoteza M cu bază numărabilă şi $k \geqslant \max(n - m + 1, 1)$, mulţimea valorilor critice ale aplicaţiei $\varphi \in C^k(M, N)$ este local de măsură zero în N, *i.e.* $\beta(\varphi(C_\varphi) \cap V)$ este o mulţime de măsură Lebesgue zero în $\mathbb{R}^m$ pentru orice hartă locală $\beta : V \to \mathbb{R}^m$ a lui N. (*M.J.*)

spaţiu tangent antiolomorf v. **spaţiu tangent olomorf**

spaţiu tangent complex Fie M o varietate diferenţiabilă de clasă C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, şi a un punct din M. Considerăm algebra complexă $C^1_{M,a}(\mathbb{C})$ a germenilor în a de funcţii complexe de clasă C^1 definite pe vecinătăţi deschise ale lui a, *i.e.*

$$C^1_{M,a}(\mathbb{C}) : = \varinjlim_{U = \mathring{U} \ni a} C^1(U, \mathbb{C}).$$

Pentru orice mulţime deschisă U a lui a în M şi orice funcţie $f \in C^1(U, \mathbb{C})$, se notează prin f_a sau $\rho^U_a(f)$ germenul definit de f în punctul a. Orice germen $f_a \in C^1_{M,a}(\mathbb{C})$ se scrie în mod unic sub forma $f_a = f'_a + \mathrm{i} f''_a$ cu $f'_a, f''_a \in C^1_{M,a}$ (v. **spaţiu tangent**). Germenul f_a se numeşte *real* dacă $f''_a = 0$, *i.e.* $f_a = f'_a \in C^1_{M,a}$.
O *derivare* în algebra $C^1_{M,a}(\mathbb{C})$ este o aplicaţie $\mathbb{C}$-liniară $v : C^1_{M,a}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ care verifică regula lui Leibniz de derivare a produsului:

$$v(f_a g_a) = v(f_a)\, g(a) + f(a)\, v(g_a).$$

Mulţimea $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(C^1_{M,a}(\mathbb{C}))$ a tuturor derivatelor algebrei $C^1_{M,a}(\mathbb{C})$ are o structură evidentă de spaţiu vectorial complex. Orice derivare $u \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^1_{M,a})$ (v. **spaţiu tangent**) se extinde în mod unic la o derivare, notată tot cu u, în algebra $C^1_{M,a}(\mathbb{C})$, şi anume prin egalitatea

$$u(f'_a + \mathrm{i} f''_a) = u(f'_a) + \mathrm{i} u(f''_a).$$

În acest mod, spaţiul vectorial real $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^1_{M,a})$ se realizează ca subspaţiu vectorial real al spaţiului vectorial complex $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(C^1_{M,a}(\mathbb{C}))$. Orice derivare în algebra $C^1_{M,a}(\mathbb{C})$ se scrie unic sub forma $v = v_1 + \mathrm{i} v_2$ cu $v_1, v_2 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^1_{M,a})$. Se numeşte *vector tangent complex* la varietatea diferenţiabilă M în punctul a orice derivare $v = v_1 + \mathrm{i} v_2 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(C^1_{M,a}(\mathbb{C}))$ astfel încît v_1 şi v_2 să fie vectori tangenţi la M în punctul a, *i.e.* $v_1, v_2 \in T(M)_a$. Vectorii tangenţi complecşi la M în a formează un subspaţiu vectorial complex al lui $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(C^1_{M,a}(\mathbb{C}))$, notat $T_{\mathbb{C}}(M)_a$ şi numit **s.t.c.** la M în punctul a. Deoarece orice vector $v \in T_{\mathbb{C}}(M)_a$ se scrie în mod unic sub forma $v = v_1 + \mathrm{i} v_2$, cu $v_1, v_2 \in T(M)_a$, rezultă că $T_{\mathbb{C}}(M)_a$ este un complexificat al spaţiului tangent $T(M)_a$. (De aceea o descriere alternativă a s.t.c. la M în punctul a este $T_{\mathbb{C}}(M)_a : = T(M)_a \otimes \mathbb{C}$.) Fie $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistem de coordonate locale pe M cu domeniul U conţinînd punctul a. Din teorema bazei (v. **spaţiu tangent**) rezultă că $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a)\right)$ este un reper al lui $T_{\mathbb{C}}(M)_a$ ca spaţiu vectorial complex, *i.e.* orice $v \in T_{\mathbb{C}}(M)_a$ se scrie în mod unic sub forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a), \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Fiind un complexificat al lui $T(M)_a$, **s.t.c.** $T_{\mathbb{C}}(M)_a$ admite o conjugare evidentă Q, şi anume definită prin $Q(v_1 + \mathrm{i} v_2) = v_1 - \mathrm{i} v_2$, $v_1, v_2 \in T(M)_a$. Evident, aplicaţia Q de la **s.t.c.** $T_{\mathbb{C}}(M)_a$ în el însuşi este antiliniară şi $Q \circ Q = \mathrm{id}$; în plus,

$$T(M)_a = \{v \in T_{\mathbb{C}}(M)_a \mid Qv = v\}.$$

Dacă N este o altă varietate diferenţiabilă de clasă C^r şi dacă $\varphi \in C^1(M, N)$ aplicaţia liniară tangentă $\varphi_{*,a} : T(M)_a \to T(N)_{\varphi(a)}$ se extinde în mod unic la o aplicaţie $\mathbb{C}$-liniară

$$\varphi^c_{*,a} : T_{\mathbb{C}}(M)_a \to T_{\mathbb{C}}(N)_{\varphi(a)},$$

numită *aplicație* $\mathbb{C}$*-liniară tangentă* la φ în punctul a (și notată, de regulă, tot $\varphi_{*,a}$). (*M.J.*)

spațiu tangent geometric Fie M o subvarietate diferențiabilă de clasă C^1 a lui $\mathbb{R}^m$ și a un punct din M. Dacă se notează prin $i: M \to \mathbb{R}^m$ aplicația de incluziune a lui M în $\mathbb{R}^m$ și prin $\mathrm{d}i_a$: $T(M)_a \to \mathbb{R}^m$ diferențiala acestei aplicații în punctul a, **s.t.g.** la M în punctul a se definește ca fiind imaginea aplicației liniare $\mathrm{d}i_a$, *i.e.* subspațiul vectorial $T(M)_a^{\mathrm{geom}}$ al lui $\mathbb{R}^m$ definit prin

$$T(M)_a^{\mathrm{geom}} := \{\mathrm{d}i_a(v) \mid v \in T(M)_a\}.$$

Rezultă că $T(M)_a^{\mathrm{geom}}$ este un spațiu vectorial real de dimensiune n, egală cu dimensiunea subvarietății M, canonic izomorf cu $T(M)_a$ (*v.* **spațiu tangent**). Dacă D este o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ și φ: $D \to \mathbb{R}^m$ o parametrizare locală a lui M astfel încît $a \in \varphi(D)$, **s.t.g.** la M în punctul a este egal cu imaginea diferențialei aplicației φ în punctul a, *i.e.*

$$T(M)_a^{\mathrm{geom}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(c) \;\middle|\; (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

unde $c = \varphi^{-1}(a)$. De asemenea, dacă U este o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^m$ conținînd punctul a și $f: U \to \mathbb{R}^p$ o submersie de clasă C^1 astfel încît $M \cap U = f^{-1}(0)$, atunci

$$T(M)_a^{\mathrm{geom}} = \operatorname{Ker} f'(a) =$$

$$= \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \right\},$$

unde $f'(a)$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ este derivata aplicației f în punctul a, *i.e.* aplicația liniară definită prin $f'(a)(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Ex.: Fie f funcția reală pe $\mathbb{R}^{n+1}$ definită prin $f(x, \dots, x_{n+1}) := x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$. Evident 1 este o valoare regulată nelacunară a lui f, deci sfera $S^n := f^{-1}(1)$ este o subvarietate diferențiabilă de clasă C^∞ a lui $\mathbb{R}^{n+1}$ și **s.t.g.** al lui S^n în punctul $a \in S^n$ este dat de formula

$$T(S^n)_a^{\mathrm{geom}} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle a, x \rangle = 0\}. \quad (M.J.)$$

spațiu tangent olomorf Fie M o varietate complexă și $a \in M$. Un vector tangent complex $v \in T_{\mathbb{C}}(M)_a$ se numește *olomorf* dacă $v(\bar{f}_a) = 0$ pentru orice germen $f_a \in \bar{\mathcal{O}}_{M,a} \subset C^1_{M,a}(\mathbb{C})$, unde prin $\bar{f}_a$ se notează germenul conjugat cu f_a. Mulțimea tuturor vectorilor tangenți olomorfi $v \in T_{\mathbb{C}}(M)_a$ formează un subspațiu vectorial complex al lui $T_{\mathbb{C}}(M)_a$, notat $T'(M)_a$ și numit **s.t.o.** la M în punctul a. Similar, un vector tangent complex $v \in T_{\mathbb{C}}(M)_a$ se numește *antiolomorf* dacă $v(f_a) = 0$ pentru orice germen $f_a \in \bar{\mathcal{O}}_{M,a}$, *i.e.* dacă conjugatul său $\bar{v} := Qv$ este un vector tangent olomorf. Mulțimea tuturor vectorilor tangenți antiolomorfi $v \in T_{\mathbb{C}}(M)_a$ formează un subspațiu vectorial $T''(M)_a \subset T_{\mathbb{C}}(M)_a$, numit *spațiu tangent antiolomorf* la M în punctul a. Dacă $\alpha = (z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \dots$ $\dots, z_n = x_n + \mathrm{i}y_n)$ este un sistem de coordonate locale pe M cu domeniul U conținînd punctul a, vectorii tangenți $\dfrac{\partial}{\partial z_j}(a) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$, $j = 1, \dots, n$, sînt olomorfi și formează un reper în spațiul vectorial complex $T'(M)_a$;

similar, vectorii tangenți $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(a) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$, $j = 1, \dots, n$, sînt antiolomorfi și formează un reper în spațiul vectorial complex $T''(M)_a$. Orice vector tangent complex $v \in T_{\mathbb{C}}(M)_a$ se descompune în mod unic în $v = v' + v''$ cu $v' \in T'(M)_a$ și $v'' \in T''(M)_a$; se spune că v' este *componenta olomorfă* a lui v iar v'' *componenta antiolomorfă* a lui v. Aplicația de la $T(M)_a \subset T_{\mathbb{C}}(M)_a$ în $T'(M)_a$ definită prin $v \mapsto v'$ este $\mathbb{R}$-liniară și bijectivă și este folosită pentru a introduce pe spațiul tangent real $T(M)_a$ o structură de spațiu vectorial complex. Pentru $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$ ca mai sus, această aplicație duce vectorul tangent real $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(a)$ în vectorul tangent olomorf $\dfrac{\partial}{\partial z_j}(a)$ și vectorul tangent real $\dfrac{\partial}{\partial y_j}(a)$ în vectorul tangent olomorf $\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial z_j}(a)$. Descompunerea directă $T_{\mathbb{C}}(M)_a = T'(M)_a \oplus T''(M)_a$ este un invariant analitic. Pentru a preciza, fie N o altă varietate complexă și $\varphi: M \to N$ o aplicație olomorfă. Atunci aplicația liniară tangentă $\varphi_{*,a}$: $T_{\mathbb{C}}(M)_a \to T_{\mathbb{C}}(N)_{\varphi(a)}$ duce vectori tangenți olomorfi (resp. antiolomorfi) în vectori tangenți olomorfi (resp. antiolomorfi), *i.e.* induce aplicații $\mathbb{C}$-liniare $\varphi'_{*,a}$: $T'(M)_a \to T'(N)_{\varphi(a)}$ și $\varphi''_{*,a}$: $T''(M)_a \to T''(N)_{\varphi(a)}$, numite *componenta olomorfă* și respectiv *componenta antiolomorfă* ale lui $\varphi_{*,a}$ (sau *aplicația tangentă olomorfă*, resp. *aplicația tangentă antiolomorfă* la φ în a). Aceste aplicații sînt legate între ele prin egalitatea $\varphi''_{*,a}(\bar{v}) = \overline{\varphi'_{*,a}(v)}$, $v \in T'(M)_a$. Notăm că aplicația de restricție $v \mapsto v \mid \bar{\mathcal{O}}_{M,a}$ de la $T'(M)_a$ la spațiul $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\bar{\mathcal{O}}_{M,a})$ al derivărilor complexe ale inelului $\bar{\mathcal{O}}_{M,a}$ este un izomorfism de spații vectoriale complexe. (*M.J.*)

spațiu T_i *v.* **axiome de separare**

spațiu tonelat, spațiu local convex în care orice mulțime E, care este echilibrată, convexă, absorbantă și închisă, este o vecinătate a originii. O mulțime E cu proprietățile menționate se numește *tonou*. Dacă X este un **s.t.** iar G un subspațiu liniar, atunci spațiul liniar topologic cît X/G este de asemenea un **s.t.** Limita inductivă a unei familii de **s.t.** este un **s.t.** Orice spațiu local convex care este o mulțime de categoria a II-a Baire (în particular orice spațiu Banach) este un **s.t.** (*R.C.*)

spațiu topologic *v.* **topologie**

spațiu topologic cît *v.* **topologie cît**

spațiu topologic compact, spațiu topologic separat avînd proprietatea că pentru orice acoperire deschisă a sa există o subacoperire finită. Se spune uneori pe scurt *spațiu compact*. Fie $\mathcal{X}$ un spațiu topologic. Afirmațiile următoare sînt echivalente: i) Din orice acoperire deschisă a lui $\mathcal{X}$ se poate extrage o subacoperire finită; ii) Orice lanț de mulțimi închise din $\mathcal{X}$ are intersecția nevidă; iii) Orice filtru pe $\mathcal{X}$ are un punct aderent; iv) Orice ultrafiltru pe $\mathcal{X}$ este convergent; v) Pentru orice șir generalizat în $\mathcal{X}$ există un subșir convergent; vi) Orice șir generalizat universal în $\mathcal{X}$ este convergent. Proprietatea i) se numește uneori *axioma Borel-Lebesgue*. Avînd în vedere definiția tatea i) se numește uneori *axioma Borel-Lebesgue*. Avînd în vedere definiția lanțului, proprietatea ii) spune că oricare ar fi familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de mulțimi închise ale lui $\mathcal{X}$, familie cu proprietatea intersecției finite, atunci $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Un spațiu topologic în care este satisfăcută una din proprietățile echivalente i) — vi) se numește *spațiu topologic cvasicompact*. Un spațiu topologic este deci compact dacă este cvasicompact și separat. O submulțime A a spațiului topologic $\mathcal{X}$ se numește *mulțime compactă* (*cvasicompactă*) dacă organizată ca spaţiu topologic cu topologia indusă din $\mathcal{X}$, este un spaţiu topologic compact (cvasicompact). Se mai spune că A este un *compact* (*cvasicompact*). Într-un **s.t.c.** (cvasicompact) orice submulţime închisă este compactă (cvasicompactă). Într-un spaţiu topologic separat orice mulţime compactă este închisă. Mulţimile a căror închidere este compactă (cvasicompactă) se numesc *relativ compacte* (*relativ cvasicompacte*). Într-un spaţiu metric complet, o mulţime este relativ compactă dacă şi numai dacă este total mărginită. Orice **s.t.c.** este normal şi deci complet regulat şi regulat. Dacă $\{X_i\}_{i \in I}$ este o familie de **s.t.c.** (cvasicompacte), atunci spaţiul topologic produs $\mathcal{X} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{X}_i$ este compact (cvasicompact) (*teorema lui Tihonov*). Un spaţiu topologic separat se numeşte *spaţiu local compact* dacă pentru orice punct al spaţiului există o bază de vecinătăţi compacte. Orice spaţiu local compact este uniformizabil (şi deci regulat). Într-un spaţiu local compact, o mulţime este închisă dacă şi numai dacă intersecţia ei cu orice mulţime compactă este o mulţime compactă. Fie $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ o familie de spaţii local compacte. Produsul lor topologic este local compact dacă şi numai dacă, cu excepţia unui număr finit, spaţiile $\mathcal{X}_i$ sînt compacte. Orice **s.t.c.** este local compact. Un spaţiu topologic local compact care este reuniunea unei familii numărabile de submulţimi compacte se numeşte *spaţiu topologic local compact numărabil la infinit* sau *σ-compact*. Într-un spaţiu topologic local compact numărabil la infinit $\mathcal{X}$ există un şir $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mulţimi compacte astfel încît $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathcal{X}$ şi $A_n \subset \operatorname{int} A_{n+1}$. Un spaţiu topologic se numeşte *secvenţial compact* (sau *numărabil compact*) dacă pentru orice şir de puncte din spaţiu există un subşir convergent. Orice **s.t.c.** este secvenţial compact. Un spaţiu metric este compact dacă şi numai dacă este secvenţial compact. **Ex.:** 1° $\mathbb{R}$ cu topologia obişnuită este local compact şi necompact. 2° O submulţime a lui $\mathbb{R}$ este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită (*teorema Borel-Lebesgue*). Această afirmaţie este adevărată în orice spaţiu liniar topologic separat de dimensiune finită. 3° Fie T un **s.t.c.** Fie $C(T)$ spaţiul funcţiilor continue definite pe T, cu valori numerice, spaţiu înzestrat cu distanţa $d(f, g) = \sup\limits_{x \in T} |f(x) - g(x)|$. O mulţime $A \subset C(T)$ este relativ compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi echicontinuă (*teorema Arzela-Ascoli*). 4° O variantă mai generală a teoremei din exemplul precedent este: Fie T un spaţiu local compact, $\mathcal{X}$ un spaţiu uniform şi $A \subset C(T, \mathcal{X})$ o mulţime echicontinuă astfel încît $A(t) = \{f(t) \mid f \in A\}$ să fie relativ compactă în $\mathcal{X}$ pentru orice $t \in T$. Atunci A este relativ compactă în spaţiul $C(T, \mathcal{X})$ înzestrat cu topologia convergenţei compacte. 5° Dreapta reală este un spaţiu topologic local compact numărabil la infinit. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic compactificabil v. **compactificare**

spaţiu topologic complet, spaţiu topologic uniformizabil care considerat ca spaţiu uniform este complet. Deoarece noţiunea se foloseşte de obicei pentru spaţiile topologice (uniformizabile) în care şirurile Cauchy se introduc fără a face apel la structura uniformă, se spune că un spaţiu topologic este *complet* dacă orice şir generalizat Cauchy este convergent. Analog, un spaţiu topologic (uniformizabil) se numeşte *secvenţial complet* dacă orice şir Cauchy de elemente ale spaţiului este convergent. Submulţimea A a spaţiului topologic uniformizabil $\mathcal{X}$ se numeşte *completă* dacă oricare ar fi $\{a_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ un şir generalizat Cauchy (în $\mathcal{X}$) de elemente din A există $a \in A$ astfel încît $\lim\limits_{\delta \in \Delta} a_\delta = a$ (în $\mathcal{X}$). Orice mulţime închisă a unui **s.t.c.** este o mulţime completă. Orice submulţime completă a unui spaţiu topologic separat (uniformizabil) este închisă. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic complet regulat, spaţiu topologic separat şi uniformizabil. Un spaţiu topologic este complet regulat dacă şi numai dacă este homeomorf cu un subspaţiu al unui spaţiu topologic compact. Un spaţiu topologic este complet regulat dacă şi numai dacă este separat şi în el este verificată axioma lui Tihonov. Spaţiile complet regulate se numesc uneori *spaţii Tihonov*. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic conex, spaţiu topologic în care singurele mulţimi în acelaşi timp deschise şi închise sînt $\mathcal{X}$ şi $\varnothing$. Se spune pe scurt *spaţiu conex*. Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu topologic şi A, $B \subset \mathcal{X}$. Se spune că mulţimile A, B sînt *separate* dacă $\bar{A} \cap B = \varnothing$ şi $A \cap \bar{B} = \varnothing$. Mulţimile A şi B sînt separate dacă şi numai dacă sînt disjuncte şi închise în $A \cup B$ înzestrat cu topologia indusă. Dacă $\mathcal{Y}$ este un subspaţiu al lui $\mathcal{X}$ şi A, $B \subset \mathcal{Y}$, atunci A, B sînt separate în $\mathcal{Y}$ dacă şi numai dacă sînt separate în $\mathcal{X}$. Un spaţiu topologic este conex dacă şi numai dacă nu se poate reprezenta ca reuniunea a două submulţimi nevide şi separate. Spaţiul topologic produs $\mathcal{X} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{X}_i$ este conex dacă şi numai dacă fiecare spaţiu $\mathcal{X}_i$ este conex. O submulţime M a spaţiului topologic $\mathcal{X}$ se numeşte *mulţime conexă* dacă înzestrată cu topologia indusă este un **s.t.c.** Dacă M este conexă şi $M \subset A \subset \bar{M}$, atunci A este conexă. În particular, închiderea oricărei mulţimi conexe este o mulţime conexă. Dacă $\{M_i\}_{i \in I}$ este o familie de mulţimi conexe, două cîte două neseparate, atunci $\bigcup\limits_{i \in I} M_i$ este conexă. Dacă pentru orice două puncte x, y ale spaţiului topologic $\mathcal{X}$ există o mulţime conexă conţinînd pe x şi y, atunci $\mathcal{X}$ este conex. Se numeşte *componentă conexă* a spaţiului topologic $\mathcal{X}$ o submulţime conexă M pentru care nu există o submulţime conexă A astfel ca $M \subset A$ şi $M \neq A$. O mulţime conexă M este deci componentă conexă dacă şi numai dacă este element maximal în familia submulţimilor conexe ale lui $\mathcal{X}$, organizată ca mulţime ordonată cu relaţia de incluziune. Orice mulţime conexă este conţinută într-o componentă conexă. Orice componentă conexă este o mulţime închisă. Orice două componente conexe sînt separate. Un spaţiu topologic în care orice componentă conexă se reduce la un punct se numeşte *spaţiu topologic total neconex*. Într-un spaţiu topologic compact şi total neconex familia mulţimilor deschise-închise formează o bază pentru topologia spaţiului. Un spaţiu topologic se numeşte *local conex* dacă orice punct al său admite un sistem fundamental de vecinătăţi conexe. **Ex.:** 1° Singurele mulţimi conexe ale dreptei reale (înzestrată cu topologia obişnuită) sînt intervalele. 2° Într-un spaţiu liniar topologic orice mulţime convexă este conexă. 3° Un spaţiu topologic discret care conţine cel puţin două puncte este local conex dar neconex. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic contractibil v. **omotopie**

spaţiu topologic cu bază numărabilă v. **bază pentru topologia τ**

spaţiu topologic cvasicompact v. **spaţiu topologic compact**

spaţiu topologic de tip Cantor, orice spaţiu topologic de forma A^B unde A este spaţiul topologic discret $\{0; 1\}$ iar pe A^B se consideră topologia produs. Dacă $B = \mathbb{N}$, spaţiul $A^{\mathbb{N}}$, numit *spaţiul lui Cantor*, este un spaţiu topologic perfect, metrizabil, compact, total neconex (se notează şi $2^{\mathbb{N}}$). Topologia lui este generată de distanţa

$$d(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}.$$

Orice spaţiu metric compact total neconex şi perfect este homeomorf în $2^{\mathbb{N}}$. Mulţimea

$$K=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{3^n}\;\middle|\; b_n\in\{0;2\}\right\}$$

se numeşte *mulţimea lui Cantor*. Cu topologia indusă din $\mathbb{R}$, mulţimea lui Cantor este un spaţiu metric compact total neconex şi perfect. Aplicaţia $f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{3^n}\right)=\left\{\frac{1}{2}b_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un homeomorfism între K şi $2^{\mathbb{N}}$. Mulţimea lui Cantor este închisă, rară, nenumărabilă. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic extremal neconex, spaţiu topologic separat în care închiderea oricărei mulţimi deschise este o mulţime deschisă. Se spune, pe scurt, *spaţiu topologic extremal*. Într-un **s.t.e.n.** interiorul oricărei mulţimi închise este o mulţime închisă. Orice **s.t.e.n.** este total neconex. Un spaţiu compact total neconex T este extremal neconex dacă şi numai dacă laticea booleană a tuturor submulţimilor deschise-închise ale lui T este o latice completă. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic local compact v. **spaţiu topologic compact**

spaţiu topologic local conex v. **spaţiu topologic conex**

spaţiu topologic metrizabil, spaţiu topologic $(\mathcal{X},\tau)$ în care există o distanţă d astfel încît τ să coincidă cu topologia generată de d. Se spune, pe scurt, *spaţiu metrizabil*. Un spaţiu topologic este metrizabil dacă şi numai dacă este homeomorf cu un spaţiu metric. Fie pe mulţimea $\mathcal{X}$ o distanţă d şi o structură uniformă $\mathcal{U}$. Se spune că distanţa d este compatibilă cu structura uniformă $\mathcal{U}$ dacă structura uniformă generată de distanţa d coincide cu $\mathcal{U}$. Despre o structură uniformă $\mathcal{U}$ pe mulţimea $\mathcal{X}$, se spune că este metrizabilă dacă există pe $\mathcal{X}$ o distanţă compatibilă cu $\mathcal{U}$. Un spaţiu uniform se numeşte metrizabil dacă structura sa uniformă este metrizabilă. Un spaţiu topologic este deci metrizabil dacă şi numai dacă există o structură uniformă metrizabilă compatibilă cu topologia spaţiului. Există structuri uniforme nemetrizabile compatibile cu topologii metrizabile. Pentru ca o structură uniformă să fie metrizabilă este necesar şi suficient ca ea să fie separată şi să admită o bază numărabilă de împrejurimi. Deoarece orice spaţiu metric este separat complet regulat şi satisface prima axiomă de numărabilitate, rezultă că aceste proprietăţi topologice constituie condiţii necesare de metrizabilitate, condiţii exprimabile fără noţiunea de structură uniformă. În anumite cazuri, unele din aceste condiţii sînt şi suficiente. Astfel, un spaţiu liniar topologic este metrizabil dacă şi numai dacă este separat şi originea admite un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi. De asemenea, un grup topologic este metrizabil dacă şi numai dacă este separat şi unitatea grupului admite un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi. Pentru ca un spaţiu compact să fie metrizabil este necesar şi suficient ca topologia sa să admită o bază numărabilă. Pentru ca un spaţiu topologic cu bază numărabilă să fie metrizabil este necesar şi suficient ca spaţiul să fie regulat (*teorema lui Urîson*). O condiţie necesară şi suficientă de metrizabilitate este dată în *teorema Nagata-Smirnov*: un spaţiu topologic este metrizabil dacă şi numai dacă este separat şi admite o bază σ-local finită. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic numărabil compact v. **spaţiu topologic compact**

spaţiu topologic paracompact, spaţiu topologic regulat avînd şi proprietatea că pentru orice acoperire deschisă $\mathcal{A}$ a sa există o acoperire subordonată deschisă şi local finită. Într-un spaţiu paracompact, pentru orice acoperire deschisă $\mathcal{A}$ există o acoperire închisă local finită subordonată acoperirii $\mathcal{A}$. Orice **s.p.** este normal. Orice spaţiu topologic metrizabil este paracompact.

Pentru orice acoperire deschisă a unui **s.p.** există o partiţie continuă a unităţii subordonată acestei acoperiri. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic perfect v. **punct izolat**

spaţiu topologic produs v. **topologie produs**

spaţiu topologic punctat v. **omotopie**

spaţiu topologic regulat, spaţiu topologic separat în care orice punct admite o bază de vecinătăţi închise. Topologia unui **s.t.r.** se numeşte regulată. Un spaţiu topologic $\mathcal{X}$ este regulat dacă şi numai dacă este separat şi pentru orice mulţime închisă $F\subset\mathcal{X}$ şi pentru orice punct $x\notin F$ există mulţimile deschise G şi D astfel încît $x\in G$, $F\subset D$ şi $G\cap D=\emptyset$. Orice spaţiu liniar topologic separat este regulat. Orice spaţiu topologic local compact este regulat. Unii autori numesc **s.t.r.** un spaţiu topologic în care orice punct admite o bază de vecinătăţi închise (deci nu impun condiţia de separare). (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic secvenţial compact v. **spaţiu topologic compact**

spaţiu topologic secvenţial complet v. **spaţiu topologic complet**

spaţiu topologic separabil, spaţiu topologic în care există o mulţime numărabilă şi densă. Orice spaţiu topologic cu bază numărabilă este separabil. (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic separat, spaţiu topologic avînd proprietatea că pentru orice două puncte distincte x, y există V_x, V_y vecinătăţi pentru x, respectiv y, astfel încît $V_x\cap V_y=\emptyset$. Sin.: *spaţiu Hausdorff* sau *spaţiu* T_2. Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu topologic. Afirmaţiile următoare sînt echivalente: i) $\mathcal{X}$ este un **s.t.s.**; ii) Intersecţia vecinătăţilor închise ale unui punct oarecare se reduce la acel punct; iii) Diagonala spaţiului produs $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ este o mulţime închisă; iv) Limita oricărui şir generalizat convergent în $\mathcal{X}$ este unică. Spaţiile normate, spaţiile metrice sînt **s.t.s.** (*Gh.Gr.*)

spaţiu topologic simplu conex v. **omotopie**

spaţiu topologic total neconex v. **spaţiu topologic conex**

spaţiu topologic uniformizabil v. **structură uniformă**

spaţiu uniform v. **structură uniformă**

spaţiu uniform complet v. **şir generalizat Cauchy**

spaţiu vectorial v. **spaţiu liniar**

spaţiu vectorial normat v. **spaţiu liniar normat**

spaţiu vectorial topologic v. **spaţiu liniar topologic**

spaţiul funcţiilor continue cu suport compact Fie T un spaţiu local compact (în particular T poate fi o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$). Vom nota prin Γ corpul scalarilor, deci $\Gamma=\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$). Pentru orice funcţie $f:T\to\Gamma$, *suportul* lui f este închiderea (calculată în T) a mulţimii $\{t\in T\mid f(t)\neq 0\}$ şi se notează prin $\mathrm{supp}(f)$ (sau $\mathrm{spt}\,f$). Spaţiul vectorial (cu operaţiile naturale) $\mathcal{K}(T)=\{f:T\to\Gamma\mid f$ este continuă şi $\mathrm{supp}(f)$ este compact$\}$ este **s.f.c.s.c.** Dacă T este compact, atunci $\mathcal{K}(T)=\mathcal{C}(T)=\{f:T\to\Gamma\mid f$ este continuă$\}$. Pentru orice compact $K\subset T$ notăm $\mathcal{K}(T,K)=\{f\in\mathcal{K}(T)\mid \mathrm{supp}(f)\subset K\}$. Fiecare spaţiu $\mathcal{K}(T,K)$ este spaţiu Banach cu topologia convergenţei uniforme dată de norma superior definită prin $\|f\|=\sup\{|f(t)|\;|t\in T\}$. Atunci $\mathcal{K}(T)$ să înzestrează cu topologia limită inductivă a topologiilor lui $\mathcal{K}(T,K)$, atunci cînd K parcurge toate compactele lui T. Vom nota această topologie cu $\mathcal{T}$. Dacă T este compact, $\mathcal{T}$ coincide cu topologia de spaţiu Banach a lui $\mathcal{K}(T)=\mathcal{K}(T,T)$. Remarcăm că topologia lui $\mathcal{K}(T)$ este în general mai tare decît topologia convergenţei uniforme pe $\mathcal{K}(T)$, dată de norma superior pe $\mathcal{K}(T)$. Anume, norma superior a unei funcţii f din $\mathcal{K}(T)$ este $\|f\|=\sup\{|f(t)|\;|t\in T\}$. (*I.C.*)

spaţiul funcţiilor esenţial integrabile (în raport cu o măsură Radon) v. **integrala esenţială** (în raport cu o măsură Radon)

spaţiul funcţiilor μ-integrabile v. **integrala Lebesgue abstractă, spaţii L^p, spaţii $\mathcal{L}^p(\mu)$ şi $L^p(\mu)$** (în raport cu o măsură Radon)

spațiul ieșirilor v. **sistem dinamic comandat**

spațiul intrărilor v. **sistem dinamic comandat**

spațiul lui Cantor v. **spațiu topologic de tip Cantor**

spațiul metric asociat unui spațiu cu măsură Vom considera o mulțime nevidă T, un clan $\mathcal{C}$ de părți ale lui T și o măsură aditivă finită μ: $\mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$. Atunci $\mathcal{C}$ devine spațiu semimetric cu semimetrica d definită prin $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ (v. **extinderea măsurilor vectoriale**). Dacă $\mathcal{C}$ este trib și μ este numărabil aditivă, spațiul semimetric de mai sus este complet, în sensul că pentru orice șir Cauchy$\{A_n\}_n$ de elemente din $\mathcal{C}$ există (cel puțin) o mulțime $A \in \mathcal{C}$ astfel încît $A_n \xrightarrow[n]{} A$, *i.e.* $d(A_n, A) \xrightarrow[n]{} 0$. Acum vom considera în plus că μ este și numărabil aditivă. Se poate efectua prelungirea măsurii μ (v. **prelungirea măsurilor pozitive**) și se obține măsura completă μ^* definită pe toate mulțimile μ-măsurabile. Obținem așadar un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, m)$, unde $\mathcal{T}$ sînt mulțimile μ-măsurabile și m este extensia lui m. Vom spune, considerînd pe $(T, \mathcal{T}, m)$ ca punct de plecare, că $\mathcal{C}$ este un *clan de generatori* pentru $(T, \mathcal{T}, m)$. Dacă $\mathcal{C}$ este cel mult numărabil, vom spune că $(T, \mathcal{T}, m)$ este *spațiu cu măsură separabil în sens tare.* Acum vom considera un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și vom introduce pe $\mathcal{T}$ relația de echivalență $\sim$ dată prin faptul că A și B din $\mathcal{T}$ se consideră echivalente (în scris $A \sim B$) dacă $A \Delta B$ este mulțime μ-neglijabilă. Pentru orice A din $\mathcal{T}$ vom considera clasa sa de echivalență $\widetilde{A}$ și vom nota $\widetilde{\mathcal{T}} = \{\widetilde{A} \mid A \in T\}$. Atunci, punînd $\Sigma(m) = \{A \in T \mid m(A) < \infty\}$, semitribul $\Sigma(m)$ al mulțimilor m-integrabile generează spațiul metric $\widetilde{\Sigma}(m) = \{\widetilde{A} \mid A \in \Sigma(m)\}$ înzestrat cu metrica $d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = m(A \Delta B)$, pentru orice $A \in \widetilde{A}$ și $B \in \widetilde{B}$. Mulțimea $\{\widetilde{A} \mid A \in \mathcal{C}\}$ este densă în $\Sigma(m)$, pentru orice clan de generatori $\mathcal{C}$, ceea ce arată că dacă $(T, \mathcal{T}, m)$ este separabil în sens tare, rezultă că spațiul metric $\widetilde{\Sigma}(m)$, numit **s.m.a.s.m.** $(T, \mathcal{T}, m)$, este separabil. Fie acum $(T_1, \mathcal{T}_1, m_1)$ și $(T_2, \mathcal{T}_2, m_2)$ două spații cu măsură. Considerînd echivalențele anterioare, putem considera respectiv clasele de echivalență $\widetilde{\mathcal{T}}_1$ și $\widetilde{\mathcal{T}}_2$. O aplicație bijectivă $H : \widetilde{\mathcal{T}}_1 \to \widetilde{\mathcal{T}}_2$ se numește *izomorfism de spații cu măsură* dacă are proprietățile: a) $H(\widetilde{A \setminus B}) = \widetilde{U \setminus V}$, pentru orice A, B în $\mathcal{T}_1$ și orice selecție $U \in H(\widetilde{A})$, $V \in H(\widetilde{B})$; b) $H\left(\widetilde{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{V}_n$, pentru orice șir $\{A_n\}_n$ de elemente din $\mathcal{T}_1$ și orice selecție $V_n \in H(\widetilde{A}_n)$; c) $m_1(A) = m_2(V)$, pentru orice $A \in \mathcal{T}_1$ și orice selecție $V \in H(\widetilde{A})$. Două spații cu măsură ca mai sus pentru care există un izomorfism de spații cu măsură $H : \widetilde{\mathcal{T}}_1 \to \widetilde{\mathcal{T}}_2$ se numesc *spații cu măsură izomorfe* și spunem că $(T_1, \mathcal{T}_1, m_1)$ este izomorf cu $(T_2, \mathcal{T}_2, m_2)$. *Teorema de izomorfism al spațiilor cu măsură.* Fie $(T, \mathcal{T}, m)$ un spațiu cu măsură avînd proprietățile: 1) Măsura m este probabilistică (*i.e.* $m(T) = 1$); 2) Spațiul metric asociat lui $(T, \mathcal{T}, m)$ este separabil; 3) Măsura m este non-atomică. Atunci $(T, \mathcal{T}, m)$ este izomorf cu $([0, 1], \Sigma, \lambda)$, unde Σ = mulțimile măsurabile Lebesgue ale lui $[0, 1]$ și λ este măsura Lebesgue pe $[0, 1]$. (*I.C.*)

spațiul operatorilor liniari și continui între spații normate Fie X și Y spații liniare normate, cu același corp Γ al scalarilor. Vom nota cu $\mathcal{L}(X, Y)$ mulțimea operatorilor liniari și continui care aplică X în Y. Cu operațiile obișnuite cu operatorii (*i.c.* $(U_1 + U_2)(x) = U_1(x) + U_2(x)$, $\forall x \in X$ și $(\lambda U)(x) = \lambda U(x)$,

$\forall x \in X$, pentru $\lambda \in \Gamma$) mulțimea $\mathcal{L}(X, Y)$ este un spațiu liniar. Dacă $U : X \to Y$ este un operator liniar, o condiție necesară și suficientă ca U să fie continuă este să existe un număr $\mu > 0$ astfel ca $\|U(x)\| \leqslant \mu \|x\|$, $\forall x \in X$. Pe spațiul liniar $\mathcal{L}(X, Y)$ se poate deci considera norma $\|U\| = \sup\{\|U(x)\| \mid \|x\| \leqslant 1\}$, *i.e.* cel mai mic număr real μ care verifică inegalitatea precedentă pentru orice $x \in X$. Dacă Y este un spațiu Banach, atunci și $\mathcal{L}(X, Y)$ este un spațiu Banach. Se notează cu $\mathcal{L}(X)$ spațiul $\mathcal{L}(X, X)$. Dacă $X = C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ (spațiul funcțiilor reale continue pe $[0, 1]$ cu norma obișnuită; v. **spațiu liniar normat**) iar $\varphi: [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci punînd

$$(U(x))(s) = \int_0^1 \varphi(s, t)\, x(t)\, dt, \quad x \in X, \quad s \in [0, 1],$$

avem $U \in \mathcal{L}(X)$ și $\|U\| = \max\limits_{s \in [0, 1]} \int_0^1 |\varphi(s, t)|\, dt$. (*R.C.*)

spațiul proiectiv complex Considerăm spațiul topologic cît $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, unde $\sim$ este relația de echivalență pe $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ definită prin $z \sim z'$ dacă și numai dacă există $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ astfel încît $z' = \lambda z$; deci clasele de echivalență sînt exact subspațiile vectoriale complexe de dimensiune 1 ale lui $\mathbb{C}^{n+1}$. Pentru orice punct $z = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, se notează prin $[z_0 : \ldots : z_n]$ clasa de echivalență a lui z în $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Pentru orice $i \in \{0, \ldots, n\}$, $U_i := \{[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_i \neq 0\}$ este o submulțime deschisă a lui $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, iar aplicația $\alpha_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, definită prin

$$\alpha_i([z_0 : \ldots : z_n]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

este o hartă complexă pe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Mulțimea $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ este un atlas complex pe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. **S.p.c.** de dimensiune n este varietatea complexă care se obține înzestrînd spațiul topologic $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ cu structura complexă definită de $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$. Se numește *varietate proiectivă* o varietate complexă care admite o scufundare olomorfă închisă într-un spațiu proiectiv complex $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. (*M. J.*)

spațiu proiectiv real v. **varietate diferențiabilă**

spațiul reticulat al măsurilor cu semn Fie T o mulțime nevidă și $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T. Vom nota $\mathrm{fa}(\mathcal{C}) = \{m : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \mid m$ este finit aditivă$\}$ care devine spațiu vectorial în mod canonic. Pe $\mathrm{fa}(\mathcal{C})$ avem relația de ordine $\leqslant$ definită prin $m \leqslant n :\Leftrightarrow m(A) \leqslant n(A)$ pentru orice A din $\mathcal{C}$. Se arată că orice parte majorată a lui $\mathrm{fa}(\mathcal{C})$ are margine superioară și orice parte minorată în fa $(\mathcal{C})$ are margine inferioară. Anume, o parte $\mathcal{U}$ de măsuri pozitive din $\mathrm{fa}(\mathcal{C})$ are inferiorul $\inf \mathcal{U} = m$ dat astfel: pentru orice A din $\mathcal{C}$ avem $m(A) = \inf\left\{\sum_{i \in I} m_{\alpha_i}(E_i) \,\middle|\, \text{mulțimea } I \text{ este finită și nevidă, familia } \{E_i\}_{i \in I} \text{ este formată cu mulțimi mutual disjuncte din } \mathcal{C} \text{ cu } \bigcup_{i \in I} E_i = A \text{ și } \{m_{\alpha_i}\}_{i \in I} \text{ sînt în } \mathcal{U}\right\}$.

Dacă notăm $\mathrm{ba}(\mathcal{C}) = \{m \in \mathrm{fa}(\mathcal{C}) \mid m$ este mărginită$\}$, atunci cu ordinea de mai sus, ba($\mathcal{C}$) devine spațiu complet reticulat normat cu norma $\|m\| = \bar{m}(T)$ = variația totală a lui m. Semnificația notațiilor m^+, m^- și $|m|$ pentru un element m din ba($\mathcal{C}$) coincide cu cea de la descompunerea Jordan a măsurilor (v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**). Un subspațiu complet reticulat al lui ba($\mathcal{C}$) este bca($\mathcal{C}$) $= \{m \in$ ba($\mathcal{C}$) $\mid m$ este numărabil aditivă$\}$. Vom spune că o măsură m din ba($\mathcal{C}$) se numește *măsură pur finit aditivă* dacă unica măsură numărabil aditivă $n : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ cu proprietatea că $n \leqslant |m|$ este măsura nulă $n = 0$.

Teorema de descompunere Yosida-Hewitt (varianta reală). Pentru orice m din ba($\mathcal{C}$) există o scriere unică $m = m_1 + m_2$, unde m_1 este numărabil aditivă și m_2 este pur finit aditivă.

Teorema de descompunere Yosida-Hewitt (varianta vectorială). Dacă X este un spațiu Banach și $m : \mathcal{C} \to X$ este o măsură finit aditivă și s-aditivă, atunci m se scrie în mod unic sub forma $m = m_1 + m_2$, unde m_1 și m_2 sînt măsuri finit aditive și s-aditive cu proprietățile: a) Măsura m_1 este numărabil aditivă; b) Pentru orice funcțională liniară și continuă x' din X^*, dualul lui X, măsura $x' \circ m_2$ este pur finit aditivă. În plus, dacă m este cu variație mărginită rezultă că m_1 și m_2 sînt și ele cu variație mărginită. Avem pentru orice $E \in \mathcal{C}$ egalitatea $|m_1|(E) + |m_2|(E) = |m|(E)$.

Vom spune că două măsuri m și n din ba($\mathcal{C}$) sînt *singulare* (sau *mutual singulare*) dacă $|m| \wedge |n| = 0$ și se notează acest lucru prin $m \perp n$. Cu alte cuvinte, $m \perp n$ dacă și numai dacă unica măsură pozitivă aditivă $u \in$ ba($\mathcal{C}$), cu $u \leqslant |m|$ și $u \leqslant |n|$, este măsura nulă $u = 0$. Se poate da o definiție similară pentru două măsuri aditive cu valori pozitive extinse $m : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ și $n : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. În fine, dacă m și n sînt măsuri aditive definite pe $\mathcal{C}$ cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$ sau într-un spațiu Banach X, vom spune că ele sînt singulare dacă $|m| \perp |n|$. Dacă $m : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o măsură numărabil aditivă și A este o mulțime m-măsurabilă, vom spune că m *este concentrată* pe A dacă mulțimea $T \setminus A$ este m-neglijabilă. Presupunînd că $m, n : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sînt măsuri numărabil aditive și pozitive concentrate pe mulțimi disjuncte rezultă că $m \perp n$. Reciproc, dacă m și n sînt mutual singulare și $m + n$ are proprietatea sumei directe, există două mulțimi disjuncte M și N astfel încît m este concentrată pe M și n este concentrată pe N.

Teorema de descompunere a lui Lebesgue. Fie $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură pozitivă (numărabil aditivă) și $m : \mathcal{C} \to X$ o măsură numărabil aditivă cu variație finită $|m|$ (unde X este un spațiu Banach). Să presupunem că $m + \mu$ are proprietatea sumei directe. Atunci m se scrie unic sub forma $m = m_1 + m_2$ unde $m_1, m_2 : \mathcal{C} \to X$ sînt măsuri numărabil aditive cu variație finită astfel încît $n \ll \mu$ și $m_2 \perp \mu$. Avem, pentru orice E în $\mathcal{C}$, egalitatea $|m|(E) = |m_1|(E) + |m_2|(E)$ (v. **continuitate absolută**). (*I.C.*)

spațiul topologic al funcțiilor olomorfe pe un domeniu Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu (*i.e.* o mulțime deschisă și conexă) și $\mathcal{O}(D)$ mulțimea funcțiilor olomorfe definite pe D cu valori complexe. Cu operațiile algebrice definite punctual, $\mathcal{O}(D)$ este un spațiu vectorial peste corpul numerelor complexe. Fie $Q \subset D$ o mulțime compactă și $p_Q : \mathcal{O}(D) \to \mathbb{R}_+$ definită prin $p_Q(f) = \max\limits_{z \in Q} |f(z)|$. Spațiul $\mathcal{O}(D)$ se organizează ca spațiu vectorial topologic cu topologia τ generată de familia de seminorme $\{p_Q \mid Q \subset D,\ Q$ compact$\}$, numită, în general, topologia convergenței compacte. Un șir $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ din $\mathcal{O}(D)$ converge în topologia τ către $f \in \mathcal{O}(D)$ dacă și numai dacă $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform pe orice compact către f. Într-o abordare ce nu presupune considerații de topologie generală afirmația

precedentă se ia drept definiție a convergenței șirului $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ către f, în $\mathcal{O}(D)$. Există un șir $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mulțimi compacte astfel ca $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n = D$ și $Q_m \subset \operatorname{int} Q_{m+1}$ (se spune că șirul $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *exhaustează* pe D). Următoarele familii de seminorme sînt echivalente cu familia inițială și deci generează aceeași topologie: $\{p_{Q_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $p_n(f) = \max \{|f^{(k)}(z)| \mid z \in Q_n,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$. Cu topologia τ spațiul $\mathcal{O}(D)$ este un spațiu metric complet. Dacă $\tau\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$, atunci $\tau\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}$ pentru orice ordin de derivare k. Pentru $f \in \mathcal{O}(D)$ și G un domeniu mărginit, cu $\bar{G} \subset D$, fie $\omega(f, G)$ ordinul lui f relativ la G ($\omega(f, G) = +\infty$ dacă f este funcția nulă și $\omega(f, G) = \sum\limits_{\substack{f(z)=0 \\ z \in G}} \omega(f, z)$ dacă f nu este funcția nulă, cu $\omega(f, z)$ notîndu-se ordinul zeroului z pentru f). Fie $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$ convergent către $f \in \mathcal{O}(D)$. Dacă f nu se anulează pe frontiera lui G, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît $\omega(f_n, G) = \omega(f, G)$, $\forall n \geqslant n_0$. Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, f_n nu se anulează în D, atunci f este sau funcția nulă sau f nu se anulează în D. Dacă $\tau\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ și dacă pentru orice n, f_n este injectivă, atunci f este constantă sau f este injectivă (*teorema lui Hurwitz*). O mulțime $M \subset \mathcal{O}(D)$ se numește *mărginită* în $\mathcal{O}(D)$ dacă ea este mărginită în topologia local convexă τ, deci dacă și numai dacă pentru orice compact $Q \subset D$ există $r > 0$ astfel ca $|f(z)| \leqslant r$, pentru orice $f \in M$ și orice $z \in Q$. Orice mulțime mărginită în $\mathcal{O}(D)$ este egal continuă. O mulțime $M \subset \mathcal{O}(D)$ este compactă dacă și numai dacă este mărginită și închisă. Dacă $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir mărginit în $\mathcal{O}(D)$, atunci există un subșir $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergent în $\mathcal{O}(D)$ (*teorema lui Montel*). Dacă șirul $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit în $\mathcal{O}(D)$ și dacă $\{f_n\}_n$ converge pe o mulțime care are cel puțin un punct de acumulare în D, atunci șirul $\{f_n\}_n$ este convergent în $\mathcal{O}(D)$ (*teorema lui Vitali*). (*Gh.Gr.*)

spațiul Wiener v. **măsura Wiener**

spectru (al unui element x al unei algebre X cu unitate), mulțimea scalarilor λ pentru care elementul $x - \lambda u$ (unde u este elementul unitate al algebrei) nu este inversabil. Într-o algebră Banach complexă unitară, **s.** oricărui element este nevid. Dacă X este o algebră Banach, complexă, comutativă, unitară, iar $\mathcal{F}$ este mulțimea caracterelor algebrei X, atunci **s.** unui element x este mulțimea $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$. (*R.C.*)

spectrul singular al unei hiperfuncții Fie f o hiperfuncție definită pe mulțimea deschisă Ω din $\mathbb{R}^n$, U o vecinătate complexă (în $\mathbb{C}^n$) a lui Ω ($U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$) și $\eta_0 \neq 0$ un vector cotangent. Se spune că f este microanalitică în vecinătatea lui $(x_0, i\eta_0)$ dacă se poate reprezenta sub forma $f = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j(x + i\Gamma_j 0)$, unde φ_j sînt olomorfe pe $U \cap (\mathbb{R} + i\Gamma_j)$, Γ_j sînt conuri ce verifică $\Gamma_j \subset \{\xi \mid \langle \xi, \eta_0 \rangle \geqslant 0\} = \{\eta_0\}^{\perp}$, iar $\varphi_j(x + i\Gamma_j 0)$ valoarea la bord $b_{\Gamma_j}\varphi_j$. *Spectrul singular* al lui f este mulțimea acelor $(x, i\eta)$ în care f nu este microanalitică. Acest spectru singular, notat SS(f) sau, în cazul în care f este o distribuție $\mathrm{WF}_A(f)$ (frontul de undă analitic al lui f), poate fi deci considerat ca definit pe fibratul cotangent al lui Ω. Cum însă are importanță nu atît vectorul nenul

η, cît direcţia pe care acesta o defineşte, este natural să se considere $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ factorizat la acţiunea (multiplicativă) a lui $\mathbb{R}_+$. Notînd $S^* = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}/\mathbb{R}_+$ şi ţinînd cont de faptul că Ω poate fi considerată scufundată nu în $\mathbb{R}^n$, ci în $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + \mathrm{i}\mathbb{R}^n$, spectrul singular poate fi considerat ca o mulţime din $\Omega \times \mathrm{i}S^*$, fibratul în cosfere normale ale lui Ω. Această definiţie se datorează lui M. Sato. În cazul particular al distribuţiilor există mai multe definiţii, toate echivalente, dintre care cea mai uşor utilizabilă este cea datorată lui Bros-Iagolnitzer, care poate fi dată şi pentru funcţionale analitice (şi deci pentru hiperfuncţii, acestea fiind local sume de astfel de funcţionale). Anume, fie $u \in \mathscr{A}'(\mathbb{R}^n)$ şi $T_\lambda u(z) = u_y e^{-\lambda(z-y)^2/2}$, unde $z \in \mathbb{C}^n$ şi $z^2 = z_1^2 + \ldots + z_n^2$. Punctul $(x_0, \xi_0) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nu aparţine lui $\mathrm{WF}_A(u)$ dacă există o vecinătate a lui $x_0 - \mathrm{i}\xi_0$ şi constante pozitive K şi c astfel încît $|T_\lambda u(z)| \leqslant K e^{\lambda(|\xi_0|^{2/2} - c)}$ pentru $z \in V$, $\lambda > 0$; $T_\lambda u$ se numeşte *transformata Fourier-Bros-Iagolnitzer a lui V*. (*G.G.*)

spectrul unui operator v. **spectru, măsură spectrală**

speranţa condiţionată (a unei funcţii relativ la o σ-algebră) v. **martingal**

stabilitatea asimptotică a unei soluţii (a unui sistem de ecuaţii diferenţiale) Soluţia x se numeşte *asimptotic stabilă* dacă este stabilă şi dacă în plus există $\delta_0 > 0$ cu proprietatea că pentru orice soluţie y cu $|y(t_0) - x(t_0)| \leqslant \delta_0$ are loc $\lim\limits_{t \to \infty} (y(t) - x(t)) = 0$. Stabilitatea asimptotică este uniformă dacă există δ_0 şi funcţii δ şi T astfel încît $|y(t_0) - x(t_0)| \leqslant \delta(\varepsilon)$ implică $|y(t) - x(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$, iar $|y(t_0) - x(t_0)| \leqslant \delta_0$ implică $|y(t) - x(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$. (*A.H.*)

stabilitatea exponenţială a unei soluţii (a unui sistem de ecuaţii diferenţiale) Soluţia x este *exponenţial stabilă* dacă există $\delta_0 > 0$, $k > 0$, $\alpha > 0$ cu proprietatea că dacă y este o soluţie care verifică $|y(t_0) - x(t_0)| < \delta_0$, atunci $|y(t) - x(t)| \leqslant k e^{-\alpha(t-t_0)} |y(t_0) - x(t_0)|$ pentru $t \geqslant t_0$. (*A.H.*)

stabilitatea orbitală a unei traiectorii (a unui sistem dinamic) proprietatea traiectoriei de a fi mulţime ω-limită pentru toate traiectoriile care intersectează o vecinătate a ei. (*A.H.*)

stabilitatea unei soluţii (a unui sistem de ecuaţii diferenţiale), soluţia x se numeşte *stabilă* dacă pentru orice t_0 şi orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon, t_0)$ cu proprietatea că orice soluţie y cu $|y(t_0) - x(t_0)| < \delta(\varepsilon, t_0)$ verifică $|y(t) - x(t)| < \varepsilon$ pentru orice $t > t_0$. Dacă δ nu depinde de t_0 stabilitatea se numeşte *uniformă*. S.s. modelează proprietatea unei mişcări de a nu se modifica prea mult ca urmare a unor perturbaţii mici. (*A.H.*)

structură $\mathbb{R}$-analitică v. **varietate analitică reală**

structură complexă v. **varietate analitică complexă**

structură diferenţiabilă v. **varietate diferenţiabilă**

structură uniformă, extensie a structurilor de spaţiu metric, de spaţiu liniar topologic, permiţînd înglobarea diverselor noţiuni de „elemente apropiate de un anumit ordin" într-o teorie generală. Fie $\mathcal{X}$ o mulţime şi $U \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Se notează:

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{X}\}, \quad U^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in U\};$$
$$U \circ U = \{(x, y) \mid \exists\, z \in \mathcal{X} \text{ astfel ca } (x, z) \in U \text{ şi } (z, y) \in U\}.$$

Se spune că pe spaţiul $\mathcal{X}$ s-a dat o **s.u.** dacă s-a dat o familie $\mathcal{U}$ de părţi ale produsului cartezian $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, cu următoarele proprietăţi: i) $U \in \mathcal{U}$ şi $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}$; ii) $U, V \in \mathcal{U} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}$; iii) $\Delta \subset U$, $\forall U \in \mathcal{U}$; iv) $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$; v) Pentru orice $U \in \mathcal{U}$ există $W \in \mathcal{U}$ astfel ca $W \circ W \subset U$. Mulţimea $\mathcal{X}$ înzestrată cu familia $\mathcal{U}$ se numeşte *spaţiu uniform* şi se notează $(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ sau tot cu $\mathcal{X}$ dacă nu există posibilitatea unor confuzii. Pentru simplificare, familia $\mathcal{U}$ se numeşte uneori **s.u.** pe $\mathcal{X}$. Elementele lui $\mathcal{U}$ se numesc *împrejurimi*. O împrejurime U se numeşte *simetrică* dacă $U = U^{-1}$. O familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ se numeşte *sistem fundamental de împrejurimi* dacă pentru orice $U \in \mathcal{U}$ există $V \in \mathcal{B}$ astfel ca $V \subset U$. Familia împrejurimilor simetrice din $\mathcal{U}$ formează un sistem fundamental de împrejurimi pentru $\mathcal{U}$. Pentru fiecare $x \in \mathcal{X}$ şi $V \in \mathcal{U}$ se notează $V(x) = \{y \in \mathcal{X} \mid (x, y) \in V\}$, $\mathcal{V}(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$. Există, şi este unică, o topologie pe $\mathcal{X}$, în care $\mathcal{V}_{(x)}$ este familia vecinătăţilor lui $x (x \in \mathcal{X})$. Această topologie se va numi *topologie generată de* s.u. $\mathcal{U}$. Consideraţiile topologice asupra spaţiului uniform $\mathcal{X}$ se fac întotdeauna relativ la topologia generată de structura sa uniformă. Astfel, prin spaţiu uniform separat se va înţelege un spaţiu uniform în care topologia generată de structura sa uniformă este separată. Într-un spaţiu topologic, prin „y este în vecinătatea V a lui x" se pot face aprecieri locale despre apropierea unui punct de altul. Într-un spaţiu uniform se poate da o evaluare mai completă, se poate distinge că anumite elemente sînt vecine de un anumit ordin, dat apriori. Fie V o împrejurime în spaţiul uniform $\mathcal{X}$. Se spune că elementele $x, y \in \mathcal{X}$ sînt *vecine de ordin V* dacă $(x, y) \in V$. Se extinde astfel conceptul de „elemente la distanţa r" dintr-un spaţiu metric. De fapt, generalizarea este mai completă căci orice **s.u.** poate fi generată de o familie de semidistanţe. Fie $\mathcal{X}$ o mulţime. Se numeşte *semidistanţă* pe $\mathcal{X}$ orice aplicaţie $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ avînd proprietăţile: i) $d(x, x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$; ii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$; iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$. Fie pe mulţimea $\mathcal{X}$ o familie $\{d_i\}_{i \in I}$ de semidistanţe. Fie $\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid \exists\, \varepsilon > 0$ şi $J \subset I$, J finită astfel ca $V_{(J, \varepsilon)} \subset U\}$ unde $V_{(J, \varepsilon)} = \{(x, y) \mid d_i(x, y) < \varepsilon, \ \forall i \in J\}$. Familia $\mathcal{U}$ este o **s.u.** pe X şi se numeşte **s.u.** generată de familia $\{d_i\}_{i \in I}$ de semidistanţe. Pe mulţimea semidistanţelor pe $\mathcal{X}$ se consideră ordinea $d_1 \leqslant d_2 \Leftrightarrow d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$. Dacă familia $\{d_i\}_{i \in I}$ de semidistanţe este dirijată, atunci **s.u.** generată este: $\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid \exists \varepsilon > 0$ şi $i \in I$ astfel ca $V_{(i, \varepsilon)} \subset U\}$. Pentru orice familie $\{d_i\}_{i \in I}$ de semidistanţe există o familie dirijată $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de semidistanţe care generează aceeaşi **s.u.** Orice **s.u.** poate fi obţinută în modul descris mai sus. Mai precis, fie $\mathcal{U}$ o **s.u.** pe mulţimea $\mathcal{X}$. Există o familie de semidistanţe pe $\mathcal{X}$ astfel încît **s.u.** generată de această familie coincide cu $\mathcal{U}$. Fie $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ două spaţii uniforme şi $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ familiile corespunzătoare de împrejurimi. O bijecţie $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se numeşte *izomorfism de* **s.u.** dacă $g(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, unde $g : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ este definită prin $g(x, y) = (f(x), f(y))$. Se spune în acest caz că spaţiile uniforme $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ sînt *izomorfe*. Un spaţiu topologic este *uniformizabil* dacă există o **s.u.** care generează topologia spaţiului. Se spune atunci că *topologia* spaţiului este *uniformizabilă*. Deoarece într-un spaţiu uniform orice punct admite un sistem fundamental de vecinătăţi închise, există spaţii topologice care nu sînt uniformizabile (Ex. 4°). Spaţiile metrice, spaţiile liniare topologice, spaţiile local compacte sînt uniformizabile. Orice subspaţiu al unui spaţiu compact este uniformizabil. Un spaţiu topologic $\mathcal{X}$ este uniformizabil dacă şi numai dacă pentru orice $x_0 \in \mathcal{X}$ şi orice vecinătate V a lui x_0 există o funcţie continuă $f : \mathcal{X} \to [0, 1]$ astfel ca $f(x_0) = 0$ şi $f(x) = 1$ pentru orice $x \in \mathcal{X} \setminus V$. Ex.: 1° Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu compact şi $\mathcal{U} = \{U \mid U$ vecinătate a lui Δ în $\mathcal{X} \times \mathcal{X}\}$ (se înzestrează $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ cu topologia produs). Atunci $\mathcal{U}$ este o **s.u.** pe X. Topologia generată de $\mathcal{U}$ coincide cu topologia iniţială a lui $\mathcal{X}$. 2° Fie $\mathcal{X}$ o mulţime şi $\{f_i\}_{i \in I}$ o familie de aplicaţii definite pe $\mathcal{X}$ cu valori reale. Fie $d_i(x, y) = |f_i(x) - f_i(y)|$. Atunci $\{d_i\}_{i \in I}$ este o familie de semidistanţe care generează o **s.u.** în care toate aplicaţiile f_i sînt uniform continue. 3° Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu liniar topologic, $\mathcal{V}$ familia vecinătăţilor originii şi pentru $V \in \mathcal{V}$ fie $U_V = \{(x, y) \mid x - y \in V\}$. Fie $\mathcal{U} = \{U \mid \exists V \in \mathcal{V}$ astfel ca $U_V \subset U\}$. Familia $\mathcal{U}$ este o **s.u.** compatibilă cu topologia lui $\mathcal{X}$. 4° $(\mathbb{R}, \tau_\omega)$, unde $\tau_\omega = \{\emptyset\} \cup \{A \mid \mathbb{R} \setminus A$ este cel mult numărabilă$\}$ este un spaţiu topologic neuniformizabil. (*Gh.Gr.*)

sublatice v. **mulţime ordonată**
submersie v. **spaţiu tangent**
submulţime cofinală v. **şir generalizat**
submulţime ordonată v. **mulţime ordonată**
submulţime reticulată v. **mulţime ordonată**
subspaţii liniare suplimentare v. **spaţiu liniar**
subspaţiu al unui spaţiu metric v. **distanţă**
subspaţiu al unui spaţiu topologic v. **topologie indusă**
subspaţiu liniar v. **spaţiu liniar**
subspaţiu liniar majorant v. **spaţiu liniar ordonat**
subspaţiu liniar ordonat v. **spaţiu liniar ordonat**
subspaţiu liniar reticulat v. **spaţiu liniar ordonat**
subspaţiu liniar topologic v. **spaţiu liniar topologic**
subspaţiu normal v. **spaţiu liniar ordonat**
subspaţiu normat v. **variaţie; cvasivariaţie; semivariaţie**
subspaţiu vectorial v. **spaţiu liniar**
subşir v. **şir generalizat**
subvarietate complexă v. **varietate analitică complexă**
subvarietate diferenţiabilă v. **varietate diferenţiabilă**
sumă Darboux v. **integrabilitate Riemann**
sumă directă v. **sumă directă topologică**

sumă directă topologică Fie $\{X_j\}_{j\in J}$ o familie de spaţii liniare (cu acelaşi corp al scalarilor) şi fie $X = \prod_{j\in J} X_j$ spaţiul liniar produs. Subspaţiul liniar Y format din mulţimea elementelor $y = \{X_j\}_{j\in J}$ din X pentru care $x_j \neq 0$ doar pentru un număr finit de indicii se numeşte *suma directă* a familiei $\{X_j\}_{j\in J}$ şi se notează $Y = \sum_{j\in J} X_j$. Să presupunem acum că $\{X_j\}_{j\in J}$ este o familie de spaţii local convexe (cu acelaşi corp al scalarilor). Cea mai fină topologie local convexă pe Y pentru care aplicaţia $l_j : X_j \to Y$ dată de formula $l_j(x_j) = \{\delta_{ij}x_j\}_{i\in J}$ (unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker) este continuă, oricare ar fi $j\in J$, se numeşte *topologia sumă directă*. Spaţiul liniar $\sum_{j\in J} X_j$ înzestrat cu această topologie se numeşte **s.d.t.** a familiei $\{X_j\}_{j\in J}$ de spaţii local convexe. O bază de vecinătăţi ale originii în **s.d.t.** este sistemul tuturor mulţimilor W de forma $W = \mathrm{eco}\Big(\bigcup_{j\in J} l_j(W_j)\Big)$, unde W_j este o vecinătate oarecare a originii în X_j (iar eco înseamnă acoperirea echilibrată şi conexă). Topologia sumă directă este mai fină decît urma topologiei produs din spaţiul $\prod_{j\in J} X_j$. Dacă orice spaţiu X_j este separat, atunci şi spaţiul $\sum_{j\in J} X_j$ este separat în raport cu topologia sumă directă. (*R.C.*)

sumă Kolmogorov (ataşată unei multifuncţii şi unei partiţii) v. **integrala Kolmogorov**

sumă Lebesgue (ataşată unei funcţii şi unei diviziuni) v. **integrala Lebesgue abstractă**

sumă Riemann v. **integrabilitate Riemann, integrala multiplă**

suportul singular al unei distribuţii. Dacă u este o distribuţie definită pe mulţimea deschisă Ω, suportul său singular, notat sing supp u (sau sing spt u), este mulţimea punctelor din Ω în vecinătatea cărora u nu este de clasă C^∞, sau, echivalent, sing supp u este complementara celei mai mari mulţimi deschise din Ω (în sensul incluziunii) în care u poate fi reprezentată ca o funcţie indefinit derivabilă. (*G.G.*)

suportul unei distribuţii v. **distribuţie**

suportul unei funcţii, mulţimea $\overline{\{x \mid f(x)\neq 0\}}$, unde f este o funcţie definită pe un spaţiu topologic cu valori în mulţimea numerelor reale (sau complexe). **S.f.** f este deci cea mai mică mulţime închisă pe complementara căreia funcţia ia valoarea zero. Se notează supp f sau spt f. (*Gh.Gr.*)

suportul unei măsuri finite pe un spaţiu metric separabil Fie (T, d) un spaţiu metric separabil şi $\mathcal{B}$ borelienele lui T. Se consideră o măsură (numărabil aditivă şi finită) $m : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$. În aceste condiţii există o mulţime închisă $S\subset T$ cu $m(S) = m(T)$, care are proprietatea următoare: pentru orice mulţime închisă $D\subset T$ cu $m(D) = m(T)$ avem $D\supset S$. Mulţimea S se numeşte *suportul măsurii m*. Se arată că $S = \{x\in T \mid m(U) > 0$ pentru orice vecinătate deschisă U a lui $x\}$. (*I.C.*)

suportul unei măsuri Radon Fie T un spaţiu local compact şi $G\subset T$ un subspaţiu local compact al lui T (de exemplu, G poate fi o mulţime deschisă). Pentru orice măsură Radon μ pe T putem defini *restricţia lui* μ *la* G care este măsura Radon $\mu|G$ pe G dată, pentru orice g din $\mathcal{K}(G)$, prin formula $\mu|G(g) = \mu(f)$, unde $f\in\mathcal{K}(T)$ se defineşte astfel: $f(x) = 0$ dacă $x\notin G$ şi $f(x) = g(x)$ dacă $x\in G$. Aici $\mathcal{K}(T)$ este spaţiul funcţiilor scalare continue cu suport compact definite pe T.
Principiul localizării. Dacă $\{G_i\}_i$ este o familie de mulţimi deschise ale lui T şi μ, ν sînt două măsuri Radon pe T astfel încît $\mu|G_i = \nu|G_i$ pentru orice i, atunci $\mu|G = \nu|G$, unde $G = \bigcup_i G_i$.

Să considerăm o măsură Radon μ pe T şi fie $\mathcal{G} = \{U\subset T \mid U$ este deschisă şi $\mu|U = 0\}$. Atunci, fie U_0 reuniunea familiei $\mathcal{G}$; avem $U_0\in\mathcal{G}$. *Suportul* lui μ, notat supp(μ) (sau spt μ), este mulţimea $T\setminus U_0$. Un element x din T este în supp(μ) dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a lui x există o funcţie f din $\mathcal{K}(T)$ cu supp$(f)\subset V$ şi $\mu(f)\neq 0$. Dacă μ este o măsură Radon reală, avem

$$\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(|\mu|) = \mathrm{supp}(\mu^+) \cup \mathrm{supp}(\mu^-),$$

iar dacă μ este o măsură Radon complexă, avem

$$\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(|\mu|) = \mathrm{supp}(\mu_1^+) \cup \mathrm{supp}(\mu_1^-) \cup \mathrm{supp}(\mu_2^+) \cup \mathrm{supp}(\mu_2^-),$$

unde $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, μ_1 şi μ_2 fiind măsuri Radon reale. Dacă $g: T\to\Gamma = \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) este o funcţie continuă şi μ o măsură Radon,

$$\mathrm{supp}(g\mu) = \mathrm{supp}(\mu) \cap \overline{\{x\in T \mid g(x)\neq 0\}}$$ (v. **măsură Radon**).

Dacă supp(μ) este o mulţime compactă spunem că μ este *măsură Radon cu suport compact*. Orice astfel de măsură Radon este mărginită. **S.m.R.** pozitive μ este complementara celei mai mari mulţimi deschise neglijabile în raport cu μ (v. **prelungirea măsurilor Radon**). Se numeşte *măsură punctuală* o măsură Radon care are suportul format numai dintr-un punct. Orice măsură punctuală μ are forma $\mu = \alpha\delta_t$, unde α este un număr nenul şi δ_t măsura Dirac concentrată într-un punct t din T. O măsură μ cu suport finit de forma supp$(\mu) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ este o combinaţie liniară de forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{\alpha_i}$ cu α_i numere nenule.

Orice măsură Radon este punct aderent vag pentru mulțimea A a măsurilor Radon cu suport finit (v. **topologia vagă**). (*I.C.*)

suprafața riemanniană a unei funcții analitice globale Fie $\mathbf{f}$ o funcție analitică globală (peste sfera lui Riemann S). Considerăm mulțimea

$$\dot{R}(\mathbf{f}) := \{\varphi_z \mid \varphi \in \mathbf{f},\ z \in D_\varphi\}$$

și aplicațiile π, f de la $\dot{R}(\mathbf{f})$ în S definite prin $\pi(\varphi_z) := z$ și $f(\varphi_z) := \varphi(z)$, unde prin φ_z se notează germenul definit de funcția olomorfă φ în punctul $z \in D_\varphi$. Pentru orice $\varphi \in \mathbf{f}$, aplicația π induce o bijecție $h_\varphi : \widetilde{D}_\varphi \to D_\varphi$, unde $\widetilde{D}_\varphi := \{\varphi_z \mid z \in D_\varphi\}$. Pe mulțimea $\dot{R}(\mathbf{f})$ există o unică topologie astfel încît mulțimile $\widetilde{D}_\varphi$ să fie deschise și aplicațiile h_φ omeomorfisme pentru toate elementele $\varphi \in \mathbf{f}$. Înzestrată cu această topologie, $\dot{R}(\mathbf{f})$ este o suprafață topologică, π o transformare interioară și f o aplicație continuă (chiar o transformare interioară exceptînd cazul trivial cînd funcția analitică globală $\mathbf{f}$ este constantă, *i.e.* cînd aplicația f este constantă). Suprafața riemanniană de acoperire $(\dot{R}(\mathbf{f}), \pi)$ se numește *suprafața riemanniană puncturată* a lui $\mathbf{f}$, iar aplicația $f : \dot{R}(\mathbf{f}) \to \mathbb{C}$ realizarea lui $\mathbf{f}$ ca funcție în sens uzual. Fie $\widetilde{R}(\mathbf{f})$ compactificarea Kerékjártó-Stoilow a suprafeței topologice $\dot{R}(\mathbf{f})$. Un element frontieră $\alpha \in \widetilde{R}(\mathbf{f}) \setminus \dot{R}(\mathbf{f})$ se numește *punct singular algebric* al lui $\mathbf{f}$ dacă satisface condițiile următoare: 1) Există o mulțime deschisă $U \in \alpha$ cu frontiera ∂U compactă și un omeomorfism $h : U \to \dot{D}$ care duce pe α în zero (într-un sens evident), unde $\dot{D}$ este discul puncturat $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. 2) Imaginile prin π și f ale filtrului α (*i.e.* filtrele generate de mulțimile $\pi(M)$ și respectiv $f(M)$ cu $M \in \alpha$) sînt convergente în S. (Un fapt netrivial este că dacă α este un punct singular algebric se poate alege pentru h chiar un izomorfism analitic.) Mulțimea $R(\mathbf{f}) := \dot{R}(\mathbf{f}) \cup \{\alpha \mid \alpha$ punct singular algebric al lui $\mathbf{f}\}$ este o suprafață topologică (realizată ca submulțime deschisă a lui $\widetilde{R}(\mathbf{f})$) iar π și f se extind prin continuitate la aplicații definite pe întreg $R(\mathbf{f})$, notate în continuare prin π și f respectiv. Mai mult, $\pi : R(\mathbf{f}) \to S$ este o transformare interioară iar $f : R(\mathbf{f}) \to S$ o transformare interioară sau o aplicație constantă. Suprafața riemanniană de acoperire $(R(\mathbf{f}), \pi)$ se numește **s.r.f.a.g.f.** Pentru a defini punctele singulare transcendente (*i.e.* nealgebrice) ale lui $\mathbf{f}$, compactificarea Kerékjártó-Stoilow nu mai este suficientă. Matematicianul român S. Stoilow a propus definiția următoare: Fie $\gamma : [0, 1) \to R(f)$ un drum care converge la frontiera ideală a lui $R(\mathbf{f})$ în sensul că, pentru orice compact $K \subset R(\mathbf{f})$, există $t_0 \in [0, 1)$ astfel încît $\gamma(t) \in R(\mathbf{f}) \setminus K$ pentru $t > t_0$. Dacă drumul $\pi \circ \gamma$: $[0, 1) \to S$ converge la un punct $z_0 \in S$, se spune, după Stoilow, că z_0 este un punct singular transcendent al lui $\mathbf{f}$, definit de drumul γ. Este convenabil să se precizeze definiția lui Stoilow după cum urmează. Fie $\Gamma(\mathbf{f})$ mulțimea tuturor drumurilor $\gamma : [0, 1) \to R(\mathbf{f})$ cu proprietățile următoare: 1) Drumul γ converge la frontiera ideală a lui $R(\mathbf{f})$; 2) Drumul $\pi \circ \gamma$ converge la un punct din S. În mulțimea $\Gamma(\mathbf{f})$ introducem o relație de echivalență, și anume $\gamma \sim \delta$ dacă și numai dacă drumurile $\pi \circ \gamma$ și $\pi \circ \delta$ converg la același punct $z_0 \in S$ și, în plus, pentru orice vecinătate V a lui z_0 în S, există o componentă conexă U a lui $\pi^{-1}(V)$ în $R(\mathbf{f})$ și $t_0 \in [0, 1)$ astfel încît punctele $\gamma(t)$ și $\delta(t)$ să aparțină amîndouă lui U pentru orice $t > t_0$. Vom numi *punct singular transcendent* al lui f orice clasă de echivalență de drumuri $\gamma \in \Gamma(\mathbf{f})$. Un punct singular transcendent poate fi definit de asemenea în termeni de filtre, și anume ca fiind un filtru α pe $R(\mathbf{f})$ cu proprietățile următoare: 1) α converge la frontiera ideală a lui $R(\mathbf{f})$, *i.e.*, pentru orice compact $K \subset R(\mathbf{f})$ există $M \in \alpha$ astfel încît $M \cap K = \emptyset$; 2) Filtrul generat de mulțimile $\pi(M)$ cu $M \in \alpha$ este convergent la un punct $z_0 \in S$; 3) Pentru orice mulțime $M \in \alpha$, există o vecinătate deschisă V a lui z_0 în S și o componentă conexă U a lui $\pi^{-1}(V)$ astfel încît $U \in \alpha$ și $U \subset M$. Punctul singular transcendent α al lui $\mathbf{f}$, considerat ca filtru, se numește *punct de ramificație transcendent* (sau *punct critic transcendent*) al lui $\mathbf{f}$ dacă aplicația $\pi | M$ este neinjectivă pentru orice $M \in \alpha$. Notăm că definiția precedentă a punctelor singulare transcendente ale unei funcții analitice globale $\mathbf{f}$ se poate utiliza într-o situație mai generală, anume în definirea unei frontiere accesibile pentru orice spațiu topologic X peste S cu S un spațiu topologic separat și X un spațiu conex, local compact și local conex. (*M.J.*)

suprafață v. **integrala de suprafață**

suprafață diferențiabilă v. **hipersuprafață diferențiabilă**

suprafață riemanniană, o varietate complexă conexă de dimensiune complexă 1. Sin. : *suprafață riemanniană abstractă* sau *suprafață riemanniană Weyl-Radó*. **S.r.** și aplicațiile olomorfe între **s.r.** formează o categorie; izomorfismele acestei categorii se numesc *izomorfisme analitice* sau *reprezentări conforme*. Clasele de echivalență de **s.r.** (modulo reprezentările conforme) se numesc *tipuri* conforme. Ex.: 1° *Sfera lui Riemann*. Fie $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ sfera topologică de dimensiune 2, $\alpha : S^2 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{C}$ proiecția stereografică din polul nord $e_3 := (0, 0, 1)$ și $\beta : S^2 \setminus \{-e_3\} \to \mathbb{C}$ proiecția stereografică din polul sud $-e_3 := (0, 0, -1)$, *i.e.*

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3} \quad \text{și} \quad \beta(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 + x_3},$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in S^2.$$

Dacă notăm prin $\overline{\beta}$ conjugata aplicației β, *i.e.* $\overline{\beta}(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - \mathrm{i}x_2)/(1 + x_3)$, $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, atunci $\{\alpha, \overline{\beta}\}$ este un atlas complex pe S^2. **S.r.** obținută înzestrînd S^2 cu structura complexă definită de acest atlas se numește sfera lui Riemann. 2° *Planul complex extins* $\widetilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ este o **s.r.** cu structura complexă definită de atlasul $\{\varphi, \psi\}$, unde φ este identitatea lui $\mathbb{C}$ iar $\psi : \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ aplicația definită prin $\psi(z) = 1/z$ cînd $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ și $\psi(\infty) = 0$. Proiecția stereografică α se extinde prin continuitate la un izomorfism analitic $h : S^2 \to \widetilde{\mathbb{C}}$ și avem $h(e_3) = \infty$ și $\psi \circ h = \overline{\beta}$; acest izomorfism analitic este folosit pentru identificarea sferei lui Riemann cu planul complex extins. 3° Orice submulțime deschisă conexă a lui $S^2 \simeq \widetilde{\mathbb{C}}$ este o **s.r.**, de pildă *planul complex* $\mathbb{C}$ și *discul unitate* $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. 4° O suprafață topologică R admite structuri complexe (*i.e.* structuri de **s.r.**) dacă și numai dacă R este orientabilă și cu bază numărabilă (*teorema lui Radó*).

Teorema de reprezentare conformă a lui Riemann. Orice **s.r.** simplu conexă poate fi reprezentată conform pe una din următoarele trei **s.r.**: 1) Sfera lui Riemann $S^2 = \widetilde{\mathbb{C}}$; 2) Planul complex $\mathbb{C}$: 3) Discul unitate D.

În alți termeni, teorema de reprezentare a lui Riemann afirmă că există exact trei tipuri de **s.r.** simplu conexe: 1) *Tipul eliptic* reprezentat de sfera lui Riemann; 2) *Tipul parabolic* reprezentat de planul complex $\mathbb{C}$; 3) *Tipul hiperbolic* reprezentat de discul unitate D. Teorema de reprezentare conformă a lui Riemann poate fi de asemenea interpretată în sensul că pe o suprafață topologică simplu conexă compactă există o unică structură complexă, iar pe o suprafață topologică simplu conexă necompactă există exact două asemenea structuri complexe (modulo izomorfisme analitice). Notăm că structurile complexe existente pe torul topologic $T: = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ formează o familie depinzînd de un parametru complex, în timp ce în cazul torului topologic de gen $g > 1$ aceste structuri formează o familie care depinde de $3g-3$ parametri complecși (numiți *moduli*). Problema găsirii de criterii de recunoaștere a apartenenței unei s.r. necompacte la tipul parabolic sau la cel hiperbolic se numește *problema tipului*. De pildă, o s.r. simplu conexă necompactă R este de tip parabolic dacă și numai dacă ea satisface una din condițiile următoare: 1) Nu există funcții armonice mărginite neconstante definite pe $R \setminus \Delta$ care iau valoarea limită 0 în orice punct al frontierei lui Δ, unde $\Delta \subset R$ este un disc compact (într-o hartă locală a lui R) fixat. 2) Nu există funcții armonice pozitive neconstante pe R. 3) Nu există funcții armonice mărginite neconstante pe R. 4) Nu există funcții olomorfe mărginite neconstante pe R etc. Asemenea criterii pot fi utilizate pentru o clasificare dichotomică a s.r. necompacte arbitrare (*i.e.* nu neapărat simplu conexe). De pildă, se notează prin O_G, O_{HP}, O_{HB}, O_{AB} etc., clasa tuturor s.r. compacte R care satisfac, respectiv, condițiile 1), 2), 3), 4) etc. Notăm că $O_G \subset O_{HP} \subset O_{HB} \subset O_{AB}$ și că aceste incluziuni sînt stricte. În problema clasificării dichotomice a s.r. necompacte o contribuție esențială a adus școala finlandeză creată de Rolf Nevanlinna; de asemenea contribuții semnificative au adus școala japoneză și școala românească, aceasta din urmă creată de Simion Stoilow. Fiind dată o s.r. R, o *prelungire* a lui R este o s.r. R' împreună cu o aplicație olomorfă injectivă $\varphi: R \to R'$. O s.r. se numește *maximală* dacă, pentru orice prelungire $\varphi: R \to R'$ a lui R, rezultă $\varphi(R) = R'$, *i.e.* φ este un izomorfism analitic. De pildă, s.r. compacte sînt maximale. Pe de altă parte, orice s.r. R admite o prelungire $\varphi: R \to R'$ în care R' este o s.r. maximală. În general prelungirea maximală a unei s.r. R nu este unică. Problema unicității prelungirii maximale a s.r. conduce la rezultate semnificative în teoria clasificării dichotomice a s.r. Fie R o s.r. Dacă m este o funcție meromorfă pe R, orice punct singular $a \in S(m)$ este un pol, deci aplicația $\tilde{m}: R \to \tilde{\mathbb{C}}$, definită prin $\tilde{m} \mid D(m): = m$ și $\tilde{m}(a): = \infty$ pentru orice $a \in S(m)$, este o aplicație olomorfă. Invers, fiind dată o aplicație olomorfă $\varphi: R \to \tilde{\mathbb{C}}$, $\varphi \not\equiv \infty$, există o unică funcție meromorfă m pe R astfel încît $\tilde{m} = \varphi$, și anume $m: = \varphi | D(m)$, unde $D(m): = R \setminus \varphi^{-1}(\infty)$. Funcțiile meromorfe pe R se identifică deci în mod natural cu aplicațiile olomorfe $\not\equiv \infty$ de la R la $\tilde{\mathbb{C}}$. Formele diferențiale de tip (1,0) pe o s.r. R se numesc, simplu, *diferențiale* pe R. O diferențială ω pe R se numește *olomorfă* sau de *prima speță* dacă, pentru orice *parametru local* (*hartă locală*) z pe R, $\omega \mid U = \Phi\, dz$ cu Φ funcție olomorfă pe U, unde U este domeniul lui z. Se numește *diferențială meromorfă* sau *diferențială de speța a treia* pe R orice diferențială ω definită pe o submulțime deschisă $D(\omega)$ a lui R și avînd proprietățile următoare: 1) $S(\omega): = R \setminus D(\omega)$ este o submulțime închisă și discretă a lui R; 2) Pentru orice parametru local z pe R, $\omega | U \cap D(\omega) = m dz$ cu m o funcție meromorfă pe U astfel încît $S(m) = S(\omega) \cap U$, unde U este domeniul lui z. Dacă ω este o diferențială meromorfă pe R, mulțimea $S(\omega)$ se numește mulțimea *singulară* a lui ω iar elementele ei *polurile* lui ω. Dacă a este un pol al lui ω și dacă parametrul local z este ales astfel încît $z(a) = 0$ și $U \cap S(\omega) = \{a\}$, atunci $m = z^{-p}\, \Phi$, unde Φ este o funcție olomorfă pe U și p un întreg $\geqslant 1$; acest întreg p nu depinde de alegerea parametrului z (cu proprietățile indicate mai sus) și se numește *ordinul polului* a al lui ω. *Reziduul* lui ω în punctul a este numărul complex

$$\mathrm{Rez}(\omega\,;\, a): = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \omega,$$

unde K este un compact conținut în U, domeniul lui z, de forma $K = \{x \in U \mid |z(x)| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, iar ∂K bordul orientat al lui K. O diferențială meromorfă ω pe R se numește de *speța a doua* dacă $\mathrm{Rez}(\omega\,; a) = 0$ pentru orice $a \in S(\omega)$. *Teorema reziduurilor* (pe o suprafață riemanniană). Dacă ω este o diferențială meromorfă pe R și $K \subset R$ un compact cu frontiera de clasă C^1 pe porțiuni astfel încît $S(\omega) \cap \partial K = \emptyset$, atunci

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \omega = \sum_{a \in \mathring{K} \cap S(\omega)} \mathrm{Rez}(\omega\,;\, a). \qquad (M.J.)$$

suprafață riemanniană de acoperire, noțiune introdusă de Riemann în dizertația sa inaugurală în scopul uniformizării funcțiilor analitice globale. Definiția lui Riemann, bazată pe considerații de natură geometric-intuitivă, a fost precizată de Stoilow după cum urmează. Fie S sfera lui Riemann identificată cu planul complex extins $\tilde{\mathbb{C}}$. O s.r.a. este o pereche (R, π), unde R este o suprafață topologică și $\pi: R \to S$ o aplicație satisfăcînd condiția următoare: pentru orice punct $a \in R$, există o vecinătate deschisă U a lui a în R, un număr întreg $\nu \geqslant 1$ și un omeomorfism h de la U pe discul unitate $D: = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ astfel încît $\pi(h^{-1}(z)) = \pi(a) + z^{\nu}$ dacă $\pi(a) \in \mathbb{C}$ și $\pi(h^{-1}(z)) = z^{-\nu}$ dacă $\pi(a) = \infty$. Dacă (R, π) este o s.r.a., există pe o unică structură de suprafață riemanniană Weyl-Radó astfel încît aplicația $\pi: R \to S$ să fie olomorfă; R se consideră întotdeauna ca suprafață riemanniană Weyl-Radó cu această structură.

Teorema 1 (Stoilow). O pereche (R, π) formată dintr-o suprafață topologică R și o aplicație $\pi: R \to S$ este o s.r.a. dacă și numai dacă π este o transformare interioară.

Ex.: Dacă f este o funcție analitică globală, atunci $(\mathring{R}(\mathrm{f}), \pi)$ și $(R(f), \pi)$ sînt s.r.a. (*v.* **suprafața riemanniană a unei funcții analitice globale**).

Teorema 2. Pentru orice s.r.a. (R, π), există o funcție analitică globală f și un izomorfism analitic $h: R \to R(\mathrm{f})$ care comută cu proiecțiile.

La fel ca Riemann, Stoilow a folosit ideea de suprafață riemanniană pentru studiul funcțiilor analitice globale. În această perspectivă Stoilow a introdus două clase remarcabile de s.r.a.: clasa $\mathcal{I}$ și clasa suprafețelor riemanniene normal exhaustibile. O s.r.a. (R, π) se numește de *clasă* $\mathcal{I}$ dacă pentru orice disc deschis D din S și orice componentă conexă U a lui $\pi^{-1}(D)$, mulțimea $D \setminus \pi(U)$ este total discontinuă, *i.e.* componentele sale conexe se reduc la puncte. Denumirea vine de la numele matematicianului F. Iversen care a demonstrat că dacă

f este o funcție meromorfă neconstantă pe $\mathbb{C}$, atunci **s.r.a.** $(\mathbb{C}, f)$ este de clasă $\mathcal{G}$.
Teorema 3 (Stoilow). Dacă (R, π) este o **s.r.a.** de clasă $\mathcal{G}$, atunci, pentru orice element frontieră α al lui R, filtrul $\pi(\alpha)$ generat de mulțimile $\pi(M)$ cu $M \in \alpha$ este convergent sau aderența sa umple întreg spațiul S (în primul caz α se numește *element frontieră punctual* iar în al doilea *element frontieră total etalat*). În plus, dacă R nu admite elemente frontieră total etalate, atunci aplicația π este proprie, *i.e.* mulțimea $\pi^{-1}(K)$ este compactă pentru orice mulțime compactă $K \subset S$.
Teorema 4 (Stoilow). 1) Dacă **f** este o funcție analitică globală care verifică o relație întreagă (*i.e.* există o funcție olomorfă neconstantă G pe $\mathbb{C}^2$ astfel încît $G(z, \varphi(z)) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathbf{f}$ și orice $z \in D_\varphi$), atunci s.r.a. $(R(\mathbf{f}), \pi)$ este de clasă $\mathcal{G}$. 2) Dacă (R, π) este o **s.r.a.** și dacă $R \in O_G$, atunci (R, π) este de clasă $\mathcal{G}$.
O s.r.a. (R, π) se numește *normal exhaustibilă* dacă există o exhaustiune $\{R_\nu\}$ a lui R cu mulțimi deschise relativ compacte R_ν astfel încît aplicația $\pi | R_\nu : R_\nu \to \pi(R_\nu)$ să fie proprie. Stoilow a demonstrat o teoremă a discurilor pentru s.r.a. normal exhaustibile cu R simplu conexă, iar ulterior, în teza sa de doctorat, Cabiria Andreian Cazacu a adus contribuții remarcabile la studiul **s.r.a.** normal exhaustibile cu R arbitrară. (*M.J.*)

suprafață topologică v. **varietate topologică**

supremum v. **mulțime ordonată**

supremumul esențial al unei funcții v. **funcții total măsurabile**, **spații** $L^p(\mu)$ și $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon), **spații** L^p

sursa unui morfism v. **categorie**

Ș

șa, punct staționar x_0 (soluție constantă, punct de echilibru) al unui **sistem dinamic** $x' = f(x)$, $f(x_0) = 0$, cu proprietatea că matricea $(Df)(x_0)$ (cu altă notație $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, matricea jacobiană) are valorile proprii reale nenule, nu toate de același semn. (*A. H.*)

șir Fie A o mulțime nevidă. Se numește ș. cu valori în A sau ș. de elemente din A (pe scurt, **ș.**, dacă mulțimea A este subînțeleasă), orice funcție $f: \mathbb{N} \to A$. Notînd $f(n) = x_n$ pentru orice n natural, vom putea identifica funcția f cu familia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și vom vorbi despre ș. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sau, mai scurt, $\{x_n\}_n$. Considerînd și o funcție strict crescătoare $M: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, să notăm $M(p) = n_p$ pentru orice p natural. Funcția compusă $f \circ M: \mathbb{N} \to A$ este tot un ș. cu valori în A și se numește un *subșir* al ș. f. Ținînd seama că pentru orice p natural avem $(f \circ M)(p) = f(M(p)) = x_{M(p)} = x_{n_p}$, rezultă că subșirul de mai sus se poate identifica cu familia $\{x_{n_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$. Pentru a desemna faptul că $\{x_{n_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ este un subșir al ș. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se scrie de multe ori $\{x_{n_p}\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sau $\{x_{n_p}\}_p \subset \{x_n\}_n$. De exemplu, dacă $M(p) = n_p = 2p$ pentru orice p natural, vom obține subșirul $\{x_{2p}\}_p \subset \{x_n\}_n$. Acest subșir se numește subșirul termenilor de rang par al ș. $\{x_n\}_n$. Similar, dacă $M(p) = n_p = 2p - 1$ pentru orice p natural, obținem subșirul termenilor de rang impar al ș. $\{x_n\}_n$ (v. și **șir generalizat**). (*I. C.*)

șir Cauchy v. **șir numeric**, **șir generalizat Cauchy**

șir Cauchy (într-un spațiu liniar topologic) v. **spațiu liniar topologic complet**

șir Cauchy (într-un spațiu metric) v. **spațiu metric**

șir Cauchy constructiv, șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale cu proprietatea că pentru orice număr întreg strict pozitiv k există un întreg pozitiv p_k astfel încît din $m, n \geqslant p_k$ rezultă $|x_m - x_n| < 1/k$. (*S. M.*)

șir convergent (de numere) v. **șir numeric**

șir convergent (într-un spațiu metric) v. **distanță**

șir convergent (într-un spațiu topologic) v. **șir generalizat convergent**

șir (o)-**convergent** v. **convergența în sensul ordinei**

șir crescător de funcții v. **șir de funcții**

șir de funcții Fie $\mathcal{F}(X, Y)$ mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea X cu valori în mulțimea Y. Se numește **ș.f.** (definite pe X cu valori în Y) orice șir în $\mathcal{F}(X, Y)$. Noțiunea are în primul rînd un substrat topologic, șirurile convergente de diferite tipuri constituind o clasă prioritară în familia **ș.f.** ale analizei matematice. În cele ce urmează se consideră **ș.f.** cu valori numerice, deci Y **va fi** $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, unele considerații avînd loc și într-un cadru mai general ($Y = \mathbb{C}^n$, Y spațiu metric, Y spațiu topologic). Se spune că ș.f. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este *convergent în punctul* $x \in X$ dacă șirul $\{f_n(x)\}_n$ este convergent. Dacă șirul $\{f_n\}_n$ converge în fiecare punct $x \in X$ către $f(x)$, se spune că $\{f_n\}_n$ *converge punctual* (sau *simplu*) către f iar funcția f se numește *limita punctuală* a șirului $\{f_n\}_n$. În cazul funcțiilor numerice aceasta înseamnă că, pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $x \in X$, există numărul natural $n(\varepsilon, x)$ (depinde de ε și de x) astfel ca $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

$\forall n \geqslant n(\varepsilon, x)$. Se spune că şirul $\{f_n\}_n$ *converge uniform* pe mulţimea X către funcţia f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul n_ε (depinde numai de ε) astfel încît $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ şi $\forall x \in X$. Şirul $\{f_n\}_n$ converge uniform la f dacă şi numai dacă şirul $\{\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge către zero. Are loc *criteriul lui Cauchy de convergenţă uniformă a ş.f.*: Şirul $\{f_n\}$ converge uniform pe X dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall n, m \geqslant n_\varepsilon$, $\forall x \in X$. Orice şir uniform convergent este simplu convergent, reciproca nefiind adevărată (v. şirul $f_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$). Tipurile de convergenţă prezentate se pot caracteriza topologic în sensul că pe $\mathcal{F}(X, Y)$ se pot construi topologii în care convergenţa topologică a unui şir (generalizat) este echivalentă cu convergenţa punctuală (resp. uniformă). Dacă X este un spaţiu topologic iar funcţiile f_n sînt continue şi şirul $\{f_n\}_n$ converge uniform către f, atunci f este continuă. O afirmaţie mai generală este legată de noţiunea de convergentă cvasiuniformă (v. **convergenţă cvasiuniformă Arzela-Hobson**). O condiţie suficientă de convergenţă uniformă este dată de *teorema lui Dini*: Dacă X este un spaţiu topologic compact (de exemplu $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$) iar $f_n: X \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_n$ formînd un şir crescător (sau descrescător) de funcţii continue, convergent punctual la funcţia continuă f, atunci $\{f_n\}_n$ converge uniform către f (şirul $\{f_n\}_n$ se numeşte *crescător* (resp. *descrescător*) dacă $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ (resp. $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$), $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall x \in X$). Dacă funcţiile $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ sînt de clasă C^1 şi există $x_0 \in [a, b]$ astfel încît $\{f_n(x_0)\}_n$ este convergent şi dacă şirul derivatelor $\left\{\frac{df_n}{dx}\right\}_n$ converge uniform pe $[a, b]$, atunci $\{f_n\}_n$ converge uniform pe $[a, b]$, limita sa f fiind o funcţie de clasă C^1 şi

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{df_n}{dx}(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Dacă $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ sînt integrabile Riemann şi $\{f_n\}_n$ converge uniform către f atunci f este integrabilă Riemann şi

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt, \quad \forall x \in [a, b]$$

(v. şi **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**). (*Gh. Gr.*)

şir de mulţimi care tinde regulat la o mulţime v. **derivarea măsurilor**

şir de mulţimi care tinde regulat la un punct v. **derivarea măsurilor**

şir de mulţimi mutual disjuncte v. **funcţie de mulţime**

şir de reţele indefinit de fin v. **derivarea măsurilor**

şir de reţele regulat (relativ la o măsură) v. **derivarea măsurilor**

şir dublu aproape mărginit de numere reale, şir dublu $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,\ldots}$, cu proprietatea că se transformă într-un şir mărginit prin suprimarea unui număr finit de linii şi coloane, *i.e.* prin interzicerea unui număr finit de valori, convenabil alese, pentru i şi j. Altfel spus, şirul dublu este aproape mărginit dacă există un număr M şi un număr natural N astfel încît să avem $|a_{ij}| < M$, de îndată ce $i > N$, $j > N$. (*S. M.*)

şir dublu convergent de numere reale, şir dublu $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,\ldots}$, cu proprietatea că oricărui număr $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr natural n_ε astfel încît să avem $|a_{i+m,\, j+n} - a_{ij}| < \varepsilon$ de îndată ce $n_\varepsilon < i, j$ şi oricare ar fi m şi n. (*S. M.*)

şir dublu mărginit de numere reale, şir $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,\ldots}$ cu proprietatea că există un număr real M astfel încît $|a_{ij}| < M$ pentru orice numere naturale i şi j. (*S. M.*)

şir dublu monoton de numere reale Şirul dublu $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,\ldots}$ este monoton crescător dacă pentru $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ şi pentru orice numere naturale i, j avem $a_{i+m,\, j+n} - a_{ij} \leqslant 0$. Dacă în aceleaşi condiţii avem $a_{i+m,\, j+n} - a_{i,j} \geqslant 0$ şirul este monoton descrescător. Un şir dublu este monoton dacă este monoton crescător sau monoton descrescător. (*S. M.*)

şir fundamental (de numere) v. **şir numeric**

şir generalizat (în mulţimea $\mathcal{X}$), orice funcţie definită pe o mulţime dirijată la dreapta cu valori în $\mathcal{X}$. Dacă Δ este o mulţime dirijată la dreapta iar pentru $f: \Delta \to \mathcal{X}$ şi $\delta \in \Delta$ se notează $x_\delta = f(\delta)$, pentru ş.g. f se foloseşte notaţia $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$. Dacă $\Delta = \mathbb{N}$ se spune că f este un *şir* în $\mathcal{X}$ şi se notează $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ş.g. $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ se numeşte ş.g. *universal* în $\mathcal{X}$ dacă pentru orice mulţime $A \subset \mathcal{X}$ există $\delta_0 \in \Delta$ astfel încît

$$\{x_\delta | \delta \geqslant \delta_0\} \subset A \quad \text{sau} \quad \{x_\delta | \delta \geqslant \delta_0\} \subset \mathcal{X} \setminus A.$$

Fie $\mathcal{U}$ un ultrafiltru de părţi ale lui $\mathcal{X}$ şi pe $\mathcal{U}$ ordinea $U \leqslant V \Leftrightarrow V \subset U$. Fie $x_U \in U$, $U \in \mathcal{U}$. Ş.g. $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ este un ş.g. universal în $\mathcal{X}$. Orice ş.g. constant este un ş.g. universal. Fie $g = \{y_d\}_{d \in D}$ şi $f = \{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ două ş.g. în $\mathcal{X}$. Ş.g. g se numeşte *subşir* al ş.g. f dacă există o aplicaţie $\varphi: D \to \Delta$ cu proprietăţile: i) Pentru orice $\delta \in \Delta$, există $d_0 \in D$ astfel încît $\varphi(d) \geqslant \delta$ pentru orice $d \geqslant d_0$, $d \in D$; ii) $g = f \circ \varphi$. Pentru orice ş.g. există un subşir care este ş.g. universal. Submulţimea D a mulţimii dirijate Δ se numeşte *cofinală* în Δ dacă pentru orice $\delta \in \Delta$ există $d \in D$ astfel ca $d \geqslant \delta$. Fie $\varphi: D \to \Delta$, $\varphi(d) = d$ pentru orice $d \in D$ şi fie $f: \Delta \to \mathcal{X}$ un ş.g. Atunci $f \circ \varphi$ este un subşir al lui f. Dacă pentru f se foloseşte notaţia $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, atunci pentru subşirul $f \circ \varphi$ se foloseşte notaţia $\{x_\delta\}_{\delta \in D}$. Noţiunea de ş.g. se întîlneşte în consideraţii de spaţii topologice, de spaţii ordonate (v. **şir generalizat convergent, funcţie continuă, punct aderent, spaţiu topologic compact**). (*Gh. Gr.*)

şir generalizat Cauchy Fie $(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ un spaţiu uniform şi $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ un şir generalizat în $\mathcal{X}$. Se spune că $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este un ş.g.C. sau *şir generalizat fundamental*, dacă pentru orice împrejurime $U \in \mathcal{U}$ există $\delta_0 \in \Delta$ astfel încît $(x_\delta, x_{\delta'}) \in U$ pentru orice $\delta, \delta' \geqslant \delta_0$. Dacă $\Delta = \mathbb{N}$ se spune atunci că $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este *şir Cauchy*. Dacă structura uniformă a spaţiului $\mathcal{X}$ este generată de familia $\{d_i\}_{i \in I}$ de semidistanţe, atunci şirul $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este un ş.g.C. în $\mathcal{X}$ dacă şi numai dacă pentru orice $i \in I$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_0 \in \Delta$ astfel încît $d_i(x_\delta, x_{\delta'}) \leqslant \varepsilon$ pentru orice $\delta, \delta' \geqslant \delta_0$. Următoarele două afirmaţii se întîlnesc de obicei ca definiţii ale noţiunii de ş.g.C.: 1) Fie $(\mathcal{X}, d)$ un spaţiu semimetric; şirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy în $\mathcal{X}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît $d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$ pentru orice $n, m \geqslant n_0$. 2) Dacă $\mathcal{X}$ este un spaţiu liniar topologic atunci $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este ş.g.C. în $\mathcal{X}$ dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a originii există $\delta_0 \in \Delta$ astfel ca $x_\delta - x_{\delta'} \in V$ pentru orice $\delta, \delta' \geqslant \delta_0$. Fie pentru şirul generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ baza de filtru $\mathcal{B} = \{A_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, unde $A_\delta = \{x_{\delta'} \mid \delta' \geqslant \delta\}$ şi fie $\mathcal{F}$ filtrul generat de $\mathcal{B}$. Şirul generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este Cauchy dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este un filtru Cauchy. Orice şir generalizat convergent este un ş.g.C. Există ş.g.C. care nu sînt convergente (v. Ex. 2°). Un spaţiu uniform $\mathcal{X}$ se numeşte *complet* dacă orice ş.g.C. în $\mathcal{X}$ este convergent. O submulţime a unui spaţiu uniform se numeşte *mulţime completă* dacă înzestrată cu structura uniformă indusă este un spaţiu uniform complet. Submulţimea A a spaţiului uniform $\mathcal{X}$ este completă dacă şi numai dacă oricare ar fi $\{a_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ un ş.g.C. (în $\mathcal{X}$) de elemente din A există $a \in A$ astfel încît $\lim_{\delta \in \Delta} a_\delta = a$ (în $\mathcal{X}$). Orice submulţime închisă a unui spaţiu uniform complet este mulţime completă. Orice submulţime completă a unui spaţiu uniform separat este închisă. Metoda clasică a lui Cantor de construcţie a mulţimii numerelor reale din mulţimea numerelor raţionale se extinde canonic la cazul spaţiilor metrice pentru construcţia completatului unui asemenea spaţiu. Rezultatul şi metoda se pot extinde şi la spaţii uniforme. Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu uniform separat. Există, şi este unic modulo un izomorfism de spaţii uniforme, un spaţiu uniform separat şi complet $\widetilde{\mathcal{X}}$ astfel încît $\mathcal{X}$ să fie izomorf cu un subspaţiu dens în $\widetilde{\mathcal{X}}$. Spaţiul $\widetilde{\mathcal{X}}$ se numeşte *completatul spaţiului uniform* $\mathcal{X}$. Sensul unicităţii din definiţia precedentă este următorul: Dacă $\widetilde{\mathcal{X}}_1$ şi $\widetilde{\mathcal{X}}_2$ sînt două spaţii uniforme separate şi complete care conţin subspaţii dense şi izomorfe cu $\mathcal{X}$, atunci $\widetilde{\mathcal{X}}_1$ şi $\widetilde{\mathcal{X}}_2$ sînt izomorfe (ca spaţii uniforme). Pentru modele de astfel de completări v. **completatul unui spaţiu metric, completatul unui spaţiu liniar topologic.** Ex.: 1° Un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale este Cauchy dacă şi numai dacă şirul generalizat $\{x_n - x_m\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ este convergent către zero. 2° Fie $\mathbb{Q}$ mulţimea numerelor raţionale organizată ca spaţiu metric cu distanţa $d(x, y) = |x - y|$. Orice şir monoton şi mărginit în $\mathbb{Q}$ este un şir Cauchy (în $\mathbb{Q}$). Şirul definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$ este un şir Cauchy în $\mathbb{Q}$ care nu este convergent (în $\mathbb{Q}$). 3° Dreapta reală cu topologia obişnuită este un spaţiu uniform complet. 4° Orice spaţiu topologic compact este uniform complet (în raport cu structura uniformă compatibilă cu topologia). (*Gh. Gr.*)

şir generalizat Cauchy (într-un spaţiu liniar topologic complet) v. **spaţiu liniar topologic complet**

şir generalizat Cauchy μ-a.p.t. v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat Cauchy aproape sigur v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat Cauchy μ-aproape uniform v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat Cauchy în μ-măsură v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat Cauchy în medie de ordin p v. **spaţii L^p**

şir generalizat Cauchy în probabilitate v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat convergent, şir generalizat $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ într-un spaţiu topologic $(\mathcal{X}, \tau)$ avînd proprietatea că există $x \in \mathcal{X}$ astfel încît pentru orice vecinătate V a lui x există $\delta_0 \in \Delta$ astfel ca $x_\delta \in V$ pentru orice $\delta \geqslant \delta_0$. Se spune că $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ este un ş.g.c. către x. Pentru a preciza topologia, se spune că şirul considerat este *τ-convergent* (către x). Se notează

$$\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta = x \quad (\text{sau } \tau\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta = x, \text{ sau } x_\delta \xrightarrow[\delta\in\Delta]{} x, \text{ sau } x_\delta \to x).$$

Punctul x se numeşte *limita* şirului. Şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente ale spaţiului topologic $\mathcal{X}$ este deci convergent către $x \in \mathcal{X}$ dacă pentru orice vecinătate V a lui x există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît $x_n \in V$ pentru orice $n \geqslant n_0$. Dacă spaţiul topologic $\mathcal{X}$ este separat, atunci orice **ş.g.c.** are limită unică (şi reciproc). **Ş.g.c.** din $\mathcal{X}$ au următoarele proprietăţi caracteristice (v. şi **topologia generată de o clasă de convergenţă**): *i*) Dacă $x_\delta = x$ pentru orice $\delta \in \Delta$, atunci $\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta = x$; ii) Dacă şirul generalizat $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ converge către x, atunci orice subşir generalizat al său converge către x; iii) Dacă şirul generalizat $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ nu converge către x, atunci există un subşir generalizat al său care nu conţine nici un subşir generalizat convergent către x; iv) Pentru orice mulţime dirijată Δ şi orice familie $\{A_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de mulţimi dirijate fie $B = \{(\delta, a) \mid \delta \in \Delta,\ a \in A_\delta\}$. Dacă $f: B \to \mathcal{X}$ şi există $x \in \mathcal{X}$ astfel ca $\lim\limits_{\delta\in\Delta} \lim\limits_{a\in A_\delta} f(\delta, a) = x$, atunci $\lim f \circ g = x$, unde $g: \Delta \times \prod\limits_{\delta\in\Delta} A_\delta \to A$ este definită prin $g(\delta, h) = (\delta, h(\delta))$ (pe $\Delta \times \prod\limits_{\delta\in\Delta} A_\delta$ se consideră ordinea produs). Noţiunea de ş.g.c. a apărut din necesitatea de a suplini în diverse consideraţii topologice o anumită insuficienţă a familiei şirurilor obişnuite (v. **funcţie continuă, spaţiu topologic compact** etc.). Ex.: 1° Fie $\mathcal{V}_x$ familia vecinătăţilor punctului x din spaţiul topologic $\mathcal{X}$. Fie pe $\mathcal{V}_x$ ordinea: $V_1 \leqslant V_2 \Leftrightarrow V_2 \subset V_1$. Pentru fiecare $V \in \mathcal{V}_x$, fie $x_V \in V$. Şirul generalizat $\{x_V\}_{V\in\mathcal{V}_x}$ converge către x. 2° Fie $\Delta = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu ordinea produs. Un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale este Cauchy dacă şi numai dacă şirul generalizat $\{x_n - x_m\}_{(n,m)\in\Delta}$ converge către zero. 3° Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ şi Δ familia diviziunilor lui $[a, b]$ ordonată cu : $\delta_1 \leqslant \delta_2 \Leftrightarrow \delta_2$ este mai fină decît δ_1. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann. Pentru $\delta \in \Delta$ fie x_δ o sumă Riemann corespunzătoare partiţiei δ şi funcţiei f. Atunci şirul generalizat $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ converge către $\int_a^b f(x)\,dx$. 4° Fie $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ cu topologia obişnuită, $\Delta = (0, +\infty)$ cu ordinea din $\mathbb{R}$ şi $x_\delta = \dfrac{1}{\delta}$, $\delta \in \Delta$. Atunci $\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta = 0$. Mulţimea $\{x_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ nu este mărginită în $\mathbb{R}$. (*Gh. Gr.*)

şir generalizat convergent μ-a.p.t. v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat convergent aproape sigur v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat convergent μ-aproape uniform v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat convergent μ-asimptotic v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat convergent în μ-măsură v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat convergent în μ-medie v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat convergent în probabilitate v. **tipuri de convergenţă folosite în teoria măsurii**

şir generalizat (ω)-convergent v. **convergenţa în sensul ordinei**

şir generalizat fundamental v. **şir generalizat Cauchy**

şir generalizat universal v. **şir generalizat**

şir monoton de mulţimi v. **clasă de mulţimi**

şir numeric, funcţie $f: \mathbb{N} \to \Gamma$, unde $\Gamma = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Notăm $f(n) = x_n$ pentru orice număr natural n şi identificăm pe f cu familia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sau, mai scurt, cu familia $\{x_n\}_n$. Aşadar, vom vorbi despre şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sau şirul $\{x_n\}_n$. Considerînd şi o funcţie strict crescătoare $M: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, să notăm $M(p) = n_p$ pentru orice p, deci $n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$ Funcţia compusă $f \circ M: \mathbb{N} \to \Gamma$ este tot un **ş.n.** şi poartă numele de *subşir* al şirului f. Deoarece $(f \circ M)(p) = f(M(p)) = f(n_p) = x_{n_p}$, rezultă că subşirul de mai sus se poate identifica cu familia $\{x_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ sau $\{x_{n_p}\}_p$. Pentru a desemna faptul că $\{x_{n_p}\}_p$ este un subşir al şirului $\{x_n\}_n$ se scrie de multe ori $\{x_{n_p}\}_p \subset \{x_n\}_n$. De exemplu, dacă $M(p) = 2p = n_p$ (resp. $M(p) = 2p - 1 = n_p$) pentru orice p natural obţinem subşirul $\{x_{2p}\}_p \subset \{x_n\}_n$ (resp. $\{x_{2p-1}\}_p \subset \{x_n\}_n$) numit subşirul termenilor de rang par (resp. impar) al şirului $\{x_n\}$. Un **ş.n.** $\{x_n\}_n$ se numeşte *şir mărginit* dacă există un număr strict pozitiv A cu proprietatea că $|x_n| \leqslant A$ pentru orice

n natural. În cazul cînd $\Gamma = \mathbb{R}$, şirul $\{x_n\}_n$ se numeşte *şir crescător* (resp. *strict crescător*) dacă $x_n \leqslant x_{n+1}$ (resp. $x_n < x_{n+1}$) pentru orice n. Similar, $\{x_n\}_n$ se numeşte *şir descrescător* (resp. *strict descresător*) dacă $x_n \geqslant x_{n+1}$ (resp. $x_n > x_{n+1}$) pentru orice n. Un şir care este crescător sau descrescător se numeşte *şir monoton*, iar un şir care este strict crescător sau strict descrescător se numeşte *şir strict monoton*. Vom spune că un element x din Γ este *limita şirului* $\{x_n\}_n$ dacă pentru orice vecinătate V a lui x există un număr natural n_V cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geqslant n_V$ avem $x_n \in V$. Aceasta revine la următoarele: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n(\varepsilon)$ cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geqslant n(\varepsilon)$ avem $|x_n - x| < \varepsilon$. Un ş.n. $\{x_n\}_n$ pentru care există $x \in \Gamma$ care este limita lui $\{x_n\}_n$ se numeşte ş.n. *convergent*. Se arată că un ş.n. $\{x_n\}_n$ este convergent dacă şi numai dacă $\{x_n\}_n$ este ş.n. *Cauchy* (sau *şir fundamental*), *i.e.*: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon)$ număr natural cu proprietatea că pentru orice numere naturale $m \geqslant n(\varepsilon)$ şi $n \geqslant n(\varepsilon)$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$ (*criteriul lui Cauchy de existenţă a limitei unui* ş.n.). Orice ş.n. convergent este mărginit, nu şi reciproc. Vom spune că un şir $\{x_n\}_n$ de numere reale are limita ∞ (resp. $-\infty$) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n(\varepsilon)$ cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geqslant n(\varepsilon)$ avem $x_n > \varepsilon$ (resp. $x_n < -\varepsilon$). Un ş.n. $\{x_n\}_n$ pentru care există x (finit sau nu) astfel încît x este limita lui $\{x_n\}_n$ se numeşte *şir care are limită*. Se arată că limita unui ş.n. care are limită este unică. În toate cazurile, dacă $\{x_n\}_n$ este un ş.n. care are limita x vom scrie $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$, sau $x_n \xrightarrow[n]{} x$, sau $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Dacă un şir are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită. Un şir monoton este convergent dacă şi numai dacă este mărginit. Să considerăm acum un ş.n. $\{x_n\}_n$. Un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (dacă $\{x_n\}_n$ este un şir de numere reale) sau $x \in \mathbb{C}$ (dacă $\{x_n\}_n$ este un şir de numere complexe) se numeşte *punct limită* al şirului $\{x_n\}_n$ dacă pentru orice vecinătate V a lui x există o infinitate de termeni $x_n \in V$, *i.e.* mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$ este infinită. Pentru orice şir $\{x_n\}_n$ de numere reale mulţimea punctelor sale limită (din $\overline{\mathbb{R}}$) este nevidă. În acest caz, există cel mai mare punct limită, numit *limita superioară a şirului* $\{x_n\}_n$ şi notat $\limsup\limits_n x_n$ sau $\overline{\lim\limits_n}\, x_n$. De asemenea, există cel mai mic punct limită, numit *limita inferioară a şirului* $\{x_n\}_n$ şi notat $\liminf\limits_n x_n$ sau $\underline{\lim\limits_n}\, x_n$. Avem formulele: a) $\limsup\limits_n x_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ unde $a_n = \sup\{x_k \mid k \geqslant n\}$ pentru orice n natural. Pe scurt, $\limsup\limits_n x_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k \geqslant n} x_k$; b) $\liminf\limits_n x_n = \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $b_n = \inf\{x_k \mid k \geqslant n\}$ pentru orice n natural. Pe scurt, $\liminf\limits_n x_n = \sup\limits_n \inf x_k$. Şi în cazul real şi în cel complex se arată că x este punct limită al şirului $\{x_n\}_n$ dacă şi numai dacă există un subşir $\{x_{n_p}\}_p \subset \{x_n\}_n$ astfel încît $x_{n_p} \xrightarrow[p]{} x$. Un şir are limită dacă şi numai dacă are un singur punct limită (care este limita şirului). (*I. C.*)

şir regulat de numere raţionale, şir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de numere raţionale cu proprietatea că pentru orice numere întregi strict pozitive m şi n avem $|x_m - x_n| \leqslant \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. (*S. M.*)

şir strict crescător v. **şir numeric**

şir strict descrescător v. **şir numeric**

şir strict monoton v. **şir numeric**

şir uniform convergent de funcţii reale Şirul $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funcţii reale definite pe $A \subset \mathbb{R}^n$ este *uniform convergent* pe A către f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există n_ε natural astfel încît de îndată ce $n > n_\varepsilon$ avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, oricare ar fi x în A. Convergenţa uniformă păstrează continuitatea şi integrabilitatea Riemann. (*S. M.*)

T

tensor covariant v. **algebra Grassmann**

teorema Alaoglu-Bourbaki v. **conjugatul unui spațiu local convex**

teorema aplicației deschise (pentru funcții olomorfe). Dacă Ω este o mulțime deschisă conexă în $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, și dacă f este o funcție olomorfă neconstantă pe Ω, atunci aplicația $f: \Omega \to \mathbb{C}$ este deschisă, *i.e.* mulțimea $f(U)$ este deschisă în $\mathbb{C}$ pentru orice submulțime deschisă U a lui Ω. (*M. J.*)

teorema aplicației deschise (pentru operatori) v. **operator deschis**

teorema aplicației deschise a lui Brouwer v. **teorema de separare Jordan-Brouwer**

teorema aplicației etale v. **spațiu tangent**

teorema aplicației inverse v. **teorema funcției inverse**

teorema Arzela-Ascoli v. **spațiu topologic compact**

teorema Banach-Steinhaus Fie X un spațiu Banach, Y un spațiu liniar normat și $\{U_j\}_{j\in J}$ o familie de operatori liniari și continui care aplică X în Y astfel ca pentru orice $x \in X$ familia $\{U_j(x)\}_{j\in J}$ să fie mărginită în Y. Atunci în spațiul liniar normat $\mathcal{L}(X, Y)$ al operatorilor liniari și continui care aplică X în Y (cu norma $\| U \| = \sup \{\| U(x) \| \mid \| x \| \leqslant 1\}$, $U \in \mathcal{L}(X, Y)$) familia $\{U_j\}_{j\in J}$ este mărginită. Această teoremă este cunoscută și sub denumirea de *principiul mărginirii uniforme.* (*R. C.*)

teorema Borel-Lebesgue v. **spațiu topologic compact**

teorema Cartan-Thullen v. **domeniu de olomorfie**

teorema Cauchy-Kovalevskaia, una dintre cele mai importante teoreme de **existență** din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. În cazul operatorilor liniari enunțul său este: Fie Ω o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$, $P(x, \mathrm{D})$ un operator liniar de ordin $m > 0$ cu coeficienți analitici în Ω. Fie de asemenea $\sum$ o suprafață (deci de codimensiune 1) analitică în Ω, nicăieri caracteristică față de operatorul P și a cărei normală exterioară ν este definită în orice punct. Fie date pe $\sum$ funcțiile $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ analitice. Există o vecinătate ω a lui $\sum$ în Ω și o soluție analitică unică u în ω a problemei lui Cauchy

$$P(x, \mathrm{D})u = f, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j u = \varphi_j \text{ în } \textstyle\sum,\ j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Teorema este adevărată, mai general, pentru sisteme sub forma normală (v. **problema lui Cauchy**). Un enunț analog, dar mai precis, se poate da în cazul olomorf (din care decurge imediat teorema de mai înainte), în sensul că vecinătatea în care există soluția este independentă de membrul drept și de datele inițiale. În contextul $\mathcal{D}$-modulelor coerente M. Kashiwara a dat o formulare, în termeni de algebră omologică, a **t. C. K.** și a demonstrat în acest context o versiune generală a acestei teoreme. În cazul în care $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$, P fiind un operator liniar de ordin m cu coeficienți analitici, Y o hipersuprafață necaracteristică față de P, iar $\mathcal{D}$ fascicolul operatorilor cu coeficienți olomorfi, enunțul clasic devine

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) \mid Y = \mathcal{O}^m_Y, \quad \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \mid Y = 0,$$

unde $\mathcal{O}$ este fascicolul funcțiilor olomorfe pe $\mathbb{C}^n$ (sau, mai general, pe o varietate analitică complexă). Rezultatul general al lui Kashiwara se referă la module coerente și are un enunț analog. (*G. G.*)

teorema celor trei cercuri a lui Hadamard Fie f o funcție olomorfă pe coroana $R < |z| < R'$, unde $0 \leqslant R < R' \leqslant \infty$, și fie $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $R < r < R'$. **T.t.c.H.** afirmă că $\log M(r)$ este o funcție convexă de $\log r$, *i.e.*

$$\log M(r_2) \leqslant \frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)} \log M(r_1) + \frac{\log(r_2/r_1)}{\log(r_3/r_1)} \log M(r_3)$$

cînd $R < r_1 < r_2 < r_3 < R'$. Această teoremă se obține aplicînd principiul maximului, în coroana compactă $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$, funcției subarmonice $\varphi(z) := \log |f(z)| + \lambda \log |z|$, unde λ este un număr real care se determină apoi în mod convenabil. (*M. J.*)

teorema Choquet-Bishop-De Leeuw Fie X un spațiu local convex separat și $K \subset X$ o mulțime compactă și convexă. Atunci, pentru orice punct x din K, există o măsură probabilistică $\mu_x : \mathcal{B} \to [0, 1]$ (aici $\mathcal{B}$ este mulțimea părților boreliene ale lui K) astfel încît pentru orice x' din X^* să avem $x'(x) = \int_K x'(t)\, \mathrm{d}\mu_x(t)$. Aici X^* este dualul algebrico-topologic al lui X iar integrarea este de tip Lebesgue abstract. (*I. C.*)

teorema contraimaginii v. **spațiu tangent**

teorema de acoperire a lui Vitali v. **acoperire Vitali**

teorema de alternanță a lui Cebîșev v. **polinom de cea mai bună aproximare uniformă**

teorema de anulare analitică v. **domeniu Runge**

teorema de anulare topologică v. **domeniu Runge**

teorema de aproximare a lui Mergelyan v. **teorema de aproximare a lui Runge**

teorema de aproximare a lui Runge Dacă Ω este o mulțime deschisă în $\mathbb{C}$ și $K \subset \Omega$ o mulțime compactă, atunci condițiile următoare sînt echivalente: a) Orice funcție olomorfă pe o vecinătate a lui K poate fi aproximată uniform pe K prin funcții din $\mathcal{O}(\Omega)$; b) Mulțimea $\Omega \setminus K$ nu are componente conexe relativ compacte în Ω; c) $K = \hat{K}_\Omega$, *i.e.* pentru orice punct $z \in \Omega \setminus K$, există o funcție olomorfă f pe Ω astfel încît $|f(z)| > \sup\limits_K |f|$.

În cazul $\Omega = \mathbb{C}$, teorema precedentă se poate enunța astfel: Pentru K o mulțime compactă în $\mathbb{C}$ condițiile următoare sînt echivalente: a) Orice funcție olomorfă pe o vecinătate a lui K este uniform aproximabilă pe K prin polinoame $\mathbb{C}$-analitice; b) Mulțimea $\complement K = \mathbb{C} \setminus K$ este conexă; c) Pentru orice $z \in \complement K$, există un polinom $\mathbb{C}$-analitic f astfel încît $|f(z)| > \sup\limits_K |f|$. Acest enunț poate fi întărit după cum urmează.

Teorema de aproximare a lui Mergelyan. Fie $K \subset \mathbb{C}$ o mulțime compactă cu complementară conexă. Atunci orice funcție continuă $f: K \to \mathbb{C}$, olomorfă pe $\mathring{K}$, este uniform aproximabilă pe K prin polinoame, *i.e.*, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un polinom $\mathbb{C}$-analitic P astfel încît $|f(z) - P(z)| < \varepsilon$ pentru orice $z \in K$. (*M. J.*)

teorema de aproximare a lui Whitney v. **funcție $\mathbb{R}$-analitică**

teorema de clasificare a curbelor eliptice v. **funcție modulară**

teorema de coerență a lui H. Cartan v. **spațiu $\mathbb{C}$-analitic**

teorema de coerență a lui Oka v. **fascicol coerent**

teorema de compactificare a lui Alexandrov v. **compactificare**

teorema de completitudine a lui Slutki v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii**

teorema de convergență a lui Vitali Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură, X un spațiu Banach și p un număr strict pozitiv. Fie și $\{f_n\}_{1 \leqslant n \leqslant \infty}$ un șir de elemente din $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ (v. **spații** L^p). Următoarele afirmații sînt echivalente: 1) $f_n \xrightarrow[n]{} f_\infty$ în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$; 2) Avem simultan i) $f_n \xrightarrow[n]{} f_\infty$ în μ-măsură; ii) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $E_\varepsilon \in \mathcal{T}$ cu $\mu(E_\varepsilon) < \infty$ și $\| \varphi_{T \setminus E_\varepsilon} f_n \|_p < \varepsilon$ pentru orice $1 \leqslant n \leqslant \infty$. Aici φ_A este funcția caracteristică a mulțimii A. (*I. C.*)

teorema de convergență a lui Weierstrass v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă), **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)

teorema de convergență dominată a lui Lebesgue Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură, X un spațiu Banach și p un număr strict pozitiv. Vom considera un șir $\{f_n\}_n$ de funcții din $\mathcal{L}^p_X(\mu)$(v. **spații** L^p) și o funcție $f\colon T \longrightarrow X$. Se presupune că există o funcție $u\colon T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietatea că u^p este μ-integrabilă și avem pentru orice număr natural n inegalitatea $\| f_n(t) \| \leqslant u(t)$ a.p.t. Dacă $f_n(t) \xrightarrow[n]{} f(t)$ μ-a.p.t. (sau dacă $f_n \xrightarrow[n]{} f$ în μ-măsură), atunci $f \in \mathcal{L}^p_X(\mu)$ și $f_n \xrightarrow[n]{} f$ în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$.

Cînd $p = 1$ avem și $\lim\limits_n \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$ pentru $A \in \mathcal{T}$ (integralele fiind Bochner). În cazul $n = 1$ și $X = \mathbb{R}$, teorema admite următoarea variantă: Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură și $\{f_n\}_n$ un șir de funcții reale μ-măsurabile (*i.e.* $\mathcal{T}$-măsurabile). Se presupune că există $u\colon T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ care este funcție μ-integrabilă și care are proprietatea că $|f_n(t)| \leqslant u(t)$ μ-a.p.t. pentru orice n. Atunci funcțiile f_n, precum și funcțiile $\liminf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_n f_n$ sînt μ-integrabile și avem

$$\int (\liminf_n f_n) \, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\mu \leqslant \limsup_n \int f_n \, d\mu \leqslant \int (\limsup_n f_n) \, d\mu.$$

(*I. C.*)

teorema de convexitate a lui Liapunov v. **mulțimea valorilor unei măsuri**

teorema de densitate a lui Lebesgue v. **punct Lebesgue al unei funcții**

teorema de descompunere a lui Hahn v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

teorema de descompunere a lui Jordan v. **măsuri pozitive și măsuri cu semn**

teorema de descompunere a lui Lebesgue Dacă $\mathcal{A}$ este o σ-algebră de părți ale unei mulțimi T și $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ este o măsură cu semn, vom spune că μ este *total σ-finită* dacă există un șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi din $\mathcal{A}$ cu $\mu(A_n)$ finit pentru orice n și $\bigcup\limits_n A_n = T$.

T.d.L. (variantă scalară). Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{T}$ o σ-algebră de părți ale lui T și $m, \mu\colon \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ măsuri cu semn total σ-finite. Atunci m se scrie în mod unic sub forma $m = m_0 + m_1$, unde $m_0, m_1\colon \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ sînt măsuri cu semn total σ-finite astfel încît $m_0 << \mu$ și $m_1 \perp \mu$ (v. **continuitate absolută**, **spațiul reticulat al măsurilor cu semn**).

În cele ce urmează vom considera o mulțime nevidă T, un clan de părți ale lui T, notat cu $\mathcal{C}$, și un spațiu Banach X. Vom prezenta două variante vectoriale ale **t.d.L.**

T.d.L. (varianta vectorială numărabil aditivă). Fie $m\colon \mathcal{C} \to X$ o măsură numărabil aditivă cu variație finită $|m|\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ și $\mu\colon \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură numărabil aditivă. Se presupune că măsura pozitivă $|m| + \mu$ are proprietatea sumei directe. Atunci m poate fi scrisă în mod unic sub forma $m = m_0 + m_1$, unde $m_0, m_1\colon \mathcal{C} \to X$ sînt măsuri cu variație finită și $m_0 << \mu$ și $m_1 \perp \mu$.

T.d.L. (variantă vectorială finit aditivă). Fie $m\colon \mathcal{C} \to X$ o măsură s-aditivă și $\mu\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ o măsură aditivă și finită. Atunci m poate fi scrisă în mod unic sub forma $m = m_0 + m_1$, unde m_0 și m_1 sînt măsuri s-aditive astfel încît $m_0 << \mu$ și $x' \circ m \perp \mu$ pentru orice x' în X'. În plus, dacă m are variație mărginită, atunci m_0 și m_1 au și ele variație mărginită. La fel, dacă m și μ sînt numărabil aditive, atunci m_0 și m_1 sînt numărabil aditive. Scrierea $m = m_0 + m_1$ se numește (în toate cazurile prezentate) *descompunerea Lebesgue* a măsurii m în raport cu μ (v. și **spațiul reticulat al măsurilor cu semn**, **măsuri Radon definite prin densități**). (*I. C.*)

teorema de descompunere Hewitt-Yosida v. **spațiul reticulat al măsurilor cu semn**

teorema de diviziune a lui Malgrange v. **teorema de pregătire a lui Malgrange**

teorema de diviziune a lui Weierstrass v. **teorema de pregătire a lui Weierstrass**

teorema de duplicație pentru funcția p v. **funcție eliptică**

teorema de duplicație pentru funcțiile trigonometrice v. **funcția exponențială**

teorema de existență a lui Peano v. **problema lui Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale**

teorema de extindere a lui Hahn v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

teorema de extindere a lui Kluvanek v. **extinderea măsurilor vectoriale**

teorema de extindere Carathéodory-Hahn v. **extinderea măsurilor pozitive definite pe un clan**

teorema de extindere Carathéodory-Hahn-Kluvanek v. **extinderea măsurilor vectoriale**, **măsură vectorială**

teorema de factorizare a lui Hadamard v. **funcție întreagă**

teorema de factorizare a lui Weierstrass v. **funcție întreagă**

teorema de inversiune locală v. **teorema funcției inverse**

teorema de mărginire a lui Nikodym v. **variație**; **cvasivariație**; **semivariație**

teorema de medie a lui Lagrange Fie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b). Există $a < \xi < b$ cu proprietatea $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$ (varianta clasică). Fie f diferențiabilă constructiv pe $[a, b]$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există x constructiv în $[a, b]$ cu proprietatea $|f(b) - f(a) - (b - a) f'(x)| \leqslant \varepsilon$, unde f' este derivata din definiția diferențiabilității constructive (varianta constructivă). (*S. M.*)

teorema de pregătire a lui Malgrange, analogul diferențiabil al teoremei de pregătire a lui Weierstrass, care se enunță după cum urmează: Fie g o funcție de clasă C^∞ în $x = (s, t)$ într-o vecinătate a lui $(0, 0)$ în $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ astfel încît

$$g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial t}(0, 0) = \ldots = \frac{\partial^{p-1} g}{\partial t^{p-1}}(0, 0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial^p g}{\partial t^p}(0, 0) \neq 0$$

pentru un $p \in \mathbb{N}$, unde $s = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ și $t = x_n$. Atunci: a) g admite o factorizare $g = hP$ cu h, P funcții de clasă C^∞ într-o vecinătate a lui $(0, 0)$ în $\mathbb{R}^n$, $h(0, 0) \neq 0$ și $P(s, t) = t^p + c_1(s)t^{p-1} + \ldots + c_p(s)$, unde $c_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, p$; b) Orice funcție f de clasă C^∞ în (s, t) într-o vecinătate a lui $(0, 0)$ în $\mathbb{R}^n$ admite o descompunere de forma $f = qg + r$ cu r, q funcții de clasă C^∞ pe o vecinătate a lui $(0, 0)$ și $r(s, t) = \sum_{i=0}^{p-1} r_i(s)t^i$.
Notăm că, spre deosebire de cazul analitic al lui Weierstrass, în **t.p.M.** descompunerile din a) și b) nu se realizează în mod unic. Notăm de asemenea că la fel ca în cazul analitic se folosește uneori denumirea de **t.p.M.** numai pentru aserțiunea a), în timp ce aserțiunea b) este numită *teorema de diviziune a lui Malgrange*. (*M. J.*)

teorema de pregătire a lui Weierstrass, rezultat fundamental în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, constînd din două părți, și anume: Fie g o funcție olomorfă în $z = (s, w)$ într-o vecinătate a lui $(0, 0)$ în $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ astfel încît

$$g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial w}(0, 0) = \ldots = \frac{\partial^{p-1} g}{\partial w^{p-1}}(0, 0) = 0 \text{ și } \frac{\partial^p g}{\partial w^p}(0, 0) \neq 0$$

pentru un $p \in \mathbb{N}$, unde $s = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ și $w = z_n$. Atunci: a) g admite o factorizare unică $g = hP$ cu h, P funcții olomorfe pe o vecinătate a lui $(0, 0)$, $h(0, 0) \neq 0$, $P(s, w) = w^p + c_1(s)\, w^{p-1} + \ldots + c_p(s)$ și $c_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, p$; b) Orice funcție olomorfă f pe o vecinătate a lui $(0, 0)$ admite descompunerea unică $f = qg + r$ cu r, q funcții olomorfe într-o vecinătate a lui $(0, 0)$ și $r(s, w) = \sum_{i=0}^{p-1} r_i(s)w^i$.
Un polinom P în variabila w ca în a) se numește *polinom Weierstrass* sau *polinom distins* în w. Notăm că aserțiunea a) se poate obține din b) pentru $f = w^p$. Uneori prin **t.p.W.** se înțelege numai aserțiunea a), în timp ce aserțiunea b) este numită *teorema de diviziune* (sau *lema de pregătire*) *a lui Weierstrass*. O variantă globală a **t.p.W.** este următoarea: Fie S o varietate complexă, D un disc deschis în $\mathbb{C}$, $M = S \times D$ și g o funcție olomorfă pe M. Presupunem că există $p \in \mathbb{N}$ astfel încît funcția $D \ni w \mapsto g(s, w) \in \mathbb{C}$, $s \in S$, să admită exact p zerouri (fiecare zero fiind numărat de atîtea ori cît este ordinul său de multiplicitate). Atunci: a) g admite descompunerea unică $g = hP$ cu $h, P \in \mathcal{O}(M)$, $h(s, w) \neq 0$ pentru orice punct $(s, w) \in M$ și $P(s, w) = w^p + c_1(s)w^{p-1} + \ldots + c_p(s)$, unde c_i sînt funcții olomorfe pe S; b) Orice funcție olomorfă f pe M admite descompunerea unică $f = qg + r$ cu r, $q \in \mathcal{O}(M)$ și r polinom în w de grad $< p$. Dintre aplicațiile **t.p.W.** menționăm aici următoarea
Teoremă. Pentru orice număr întreg $n \geqslant 0$, inelul $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ este factorial (de unică factorizare) și noetherian.
Notăm că dacă M este o varietate complexă de dimensiune n și x un punct din M, fibra $\mathcal{O}_{M, x}$ a fascicolului $\mathcal{O}_M$ este izomorfă cu $\mathcal{O}_n$ pentru structura de $\mathbb{C}$-algebră, în particular este un inel factorial și noetherian. Notăm de asemenea că dezvoltarea Taylor în punctul $0 \in \mathbb{C}^n$ furnizează un izomorfism de $\mathbb{C}$-algebre între $\mathcal{O}_n$ și *algebra* $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ *a seriilor de puteri convergente* (*i.e.* cu domeniu de convergență nevid) cu coeficienți numere complexe (*M. J.*)

teorema de prelungire a lui Hartogs Pentru $n \geqslant 2$, fie Ω o mulțime deschisă în $\mathbb{C}^n$ și K o mulțime compactă în $\mathbb{C}^n$, conținută în Ω și astfel încît

mulţimea $\Omega\setminus K$ să fie conexă (ceea ce implică Ω conexă). Atunci orice funcţie olomorfă f pe $\Omega\setminus K$ admite o prelungire olomorfă la întreg Ω, *i.e.* există o funcţie olomorfă F pe Ω astfel încît $F(z) = f(z)$ pentru $z \in \Omega\setminus K$; această funcţie F este unică (v. **principiul prelungirii analitice**).
Din această teoremă, valabilă exclusiv în cazul $n \geqslant 2$, rezultă, în particular, că o funcţie olomorfă f pe o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, nu admite zerouri izolate şi nici puncte singulare izolate neaparente. (*M.J.*)

teorema de prelungire a lui Whitney v. **teorema lui Borel**

teorema de recurenţă a lui Kac v. **teorie ergodică**

teorema de recurenţă a lui Poincaré v. **teorie ergodică, sistem dinamic**

teorema de reprezentare a lui Riesz, teoremă fundamentală care stabileşte legătura între noţiunea clasică de măsură (privită ca o funcţie de mulţime) şi noţiunea de măsură în sensul lui Bourbaki (măsura este o aplicaţie liniară şi continuă). Vom prezenta mai multe versiuni ale acestei teoreme. Notăm cu Γ corpul scalarilor reali sau complecşi.
T.r.R. (varianta clasică). Fie $a < b$ numere reale şi $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \Gamma \mid f$ este continuă$\}$ care devine spaţiu Banach cu norma convergenţei uniforme: $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in [a,b]\}$. Atunci orice funcţională liniară şi continuă $T : \mathcal{C}([a,b]) \to \Gamma$ provine dintr-o funcţie cu variaţie mărginită. Mai precis, pentru T există o funcţie cu variaţie mărginită $g : [a,b] \to \Gamma$ cu proprietatea că pentru orice $f \in \mathcal{C}([a,b])$ avem $T(f) = \int_a^b f dg$. În plus, g poate fi aleasă astfel încît $\| T \| = \bigvee_a^b g$, variaţia totală a lui g.
T.r.R. a fost ulterior generalizată în mai multe variante. Fie un spaţiu topologic normal T şi să notăm cu $\mathcal{B}_1$ algebra generată de mulţimile deschise ale lui T. Spaţiul vectorial $\mathrm{rba}(\mathcal{B}_1) = \{\mu : \mathcal{B}_1 \to \Gamma \mid \mu$ aditivă, regulată şi cu variaţie mărginită$\}$ devine spaţiu Banach cu norma $\|\mu\| = |\mu|(T)$. De asemenea, $\mathcal{BC}(T) = \{f : T \to \Gamma \mid f$ este continuă şi mărginită$\}$ devine spaţiu Banach cu norma convergenţei uniforme: $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$. Pentru orice $f \in \mathcal{BC}(T)$ se poate defini integrala $\int f\, d\mu$ după cum urmează. Există un şir $\{f_n\}_n$ de funcţii $\mathcal{B}_1$-etajate astfel încît $f_n \xrightarrow[n]{} f$ uniform. Pentru orice f_n $\left(\text{de forma } \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_{A_i},\ A_i \in \mathcal{B}_1,\ a_i \in \Gamma\right)$ putem defini $\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i\, \mu(A_i)$. Atunci există $\lim_n \int f_n\, d\mu := \int f\, d\mu$ (definiţia este coerentă, v. şi **funcţie total măsurabilă**). Cu notaţiile de mai sus, spaţiile Banach $\mathrm{rba}(\mathcal{B}_1)$ şi $\mathcal{BC}(T)^*$ sînt izomorfe, în sensul că există o aplicaţie bijectivă liniară şi izometrică $H : \mathrm{rba}(\mathcal{B}_1) \to \mathcal{BC}(T)^*$, definită prin $H(\mu) = x'_\mu$. Anume, $x'_\mu(f) = \int f\, d\mu$ pentru orice $f \in \mathcal{BC}(T)$. Acum vom considera un spaţiu compact T. Avem $\mathcal{C}(T) = \mathcal{BC}(T)$, unde $\mathcal{C}(T) = \{f : T \to \Gamma \mid f$ este continuă$\}$. Notăm cu $\mathcal{B}$ borelienele lui T. Spaţiul $\mathrm{rca}(\mathcal{B}) = \{\mu : \mathcal{B} \to \Gamma \mid \mu$ este numărabil aditivă şi regulată$\}$ devine spaţiu Banach cu norma dată de variaţia totală: $\|\mu\| = |\mu|(T)$.

Teorema de reprezentare Riesz-Kakutani (varianta compactă). Cu notațiile de mai sus, spațiile $\mathcal{C}(T)^*$ și $\mathrm{rca}(\mathcal{B})$ sînt izomorfe. Aplicația de izometrie este $J : \mathrm{rca}(\mathcal{B}) \to \mathcal{C}(T)$, definită prin $J(\mu) = x'_\mu$, unde $x'_\mu(f) = \int f \, d\mu$.
Aici integrala este aceeași ca la enunțul teoremei precedente, dar poate fi interpretată și ca integrală Bochner.
Teorema de reprezentare Riesz-Kakutani (varianta local compactă). Fie T un spațiu local compact: a) Există o bijecție $L \leftrightarrow \mu$ între funcționalele liniare pozitive $L : K(T) \to \mathbf{R}$ și măsurile boreliene pozitive și regulate $\mu : \mathcal{B} \to \mathbf{R}_+$. Aici $K(T) = \{f : T \to \mathbf{R} \mid f$ este continuă și are suport compact$\}$ iar $\mathcal{B}$ este semitribul mulțimilor boreliene relativ compacte ale lui T. Bijecția este dată prin $L(f) = \int f \, d\mu$ pentru orice $f \in K(T)$; b) Bijecția definită la a) dă naștere unui izomorfism liniar $L \leftrightarrow \mu$ între funcționalele liniare și continue $L : K(T) \to \Gamma$ și măsurile boreliene și regulate $\mu : \mathcal{B} \to \Gamma$ (aici $K(T)$ se consideră înzestrat cu topologia limită inductivă (v. **spațiul funcțiilor continue cu suport compact**); c) Bijecția definită la a) dă naștere și unui izomorfism liniar $L \leftrightarrow \mu$ între aplicațiile liniare și continue $L : K(T) \to \Gamma$ și măsurile boreliene regulate și mărginite $\mu : \mathcal{B} \to \Gamma$ (aici $K(T)$ se consideră înzestrat cu topologia convergenței uniforme dată de norma superior (v. **spațiul funcțiilor continue cu suport compact**). (*I.C.*)

teorema de reprezentare a lui Stone v. **reprezentarea laticilor booleene**

teorema de reprezentare conformă a lui Riemann v. **transformare conformă, suprafață riemanniană**

teorema de reprezentare Loomis-Sikorski v. **reprezentarea laticilor booleene**

teorema de reprezentare Riesz-Kakutani v. **teorema de reprezentare a lui Riesz**

teorema de scufundare a lui Sobolev. rezultat fundamental în studiul regularităților soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale care afirmă, în esență, următoarele: Dacă o distribuție are derivatele pînă la un anumit ordin de pătrat integrabil (sau de putere p-integrabilă), atunci distribuția este chiar o funcție cu o anumită regularitate, deci evaluări privind normele în spațiul L^2, sau L^p, ale derivatelor dau informații asupra distribuției însăși. O variantă a teoremei are următorul enunț: Fie Ω o mulțime deschisă din $\mathbf{R}^n$, fie $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ și $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$, cu $1 < p < n$. Rezultă că $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, unde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{n}$. Dacă distribuția f are toate derivatele local în $L^2(\Omega)$, atunci f rezultă chiar indefinit derivabilă. Există enunțuri mult mai generale de acest tip; acestea se numesc teoreme de scufundare pentru că ele asigură scufundarea (printr-o aplicație liniară continuă, care în cazuri importante rezultă compactă) a spațiilor Sobolev în diferite spații de funcții derivabile sau continue Hölder. (*G.G.*)

teorema de scufundare proiectivă (a unei suprafețe riemanniene compacte) v. **divizor**

teorema de scufundare Remmert-Bishop-Narasimhan v. **varietate Stein**

teorema de selecție Kuratowski — Ryll-Nardzewski Fie T o mulțime nevidă, $\mathcal{T}$ o σ-algebră de părți ale lui T și X un spațiu polonez. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea părților închise nevide ale lui X și $F : T \to \mathcal{F}$ o funcție. Se presupune că pentru orice mulțime deschisă $G \subset X$ avem: $\{t \in T \mid F(t) \cap G \neq \varnothing\} \in \mathcal{T}$.

În aceste condiții există o *selecție măsurabilă* a familiei $\{F(t)\}_{t \in T}$, *i.e.* o funcție $f : T \to X$ astfel încît: a) $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ pentru orice mulțime boreliană B a lui X; b) $f(t) \in F(t)$, pentru orice t din T. (*I.C.*)

teorema de separare Jordan-Brouwer Fie $\varphi : S^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ o aplicație continuă și injectivă, unde S^{n-1} este sfera de dimensiune $n - 1$, *i.e.*

$$S^{n-1} := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Dacă $n \geqslant 2$, mulțimea $\mathbf{R}^n \setminus \varphi(S^{n-1})$ are exact două componente conexe fiecare dintre ele avînd ca frontieră pe $\varphi(S^{n-1})$.
(În cazul $n = 2$, enunțul precedent se numește *teorema de separare a lui Jordan*.) Din **t.s.J.B.** se obțin următoarele două rezultate.
Teorema aplicației deschise a lui Brouwer. Dacă M și N sînt varietăți topologice de aceeași dimensiune și $\varphi : M \to N$ o aplicație continuă injectivă, atunci $\varphi(M)$ este o submulțime deschisă a lui M și aplicația $M \to \varphi(M)$, indusă de φ, un omeomorfism.
Teorema lui Brouwer (de invarianță a dimensiunii varietăților topologice). Dacă M și N sînt varietăți topologice și $\varphi : M \to N$ un omeomorfism, atunci din $M = \dim N$. (*M.J.*)

teorema determinantului v. **algebra Grassmann**

teorema Dinculeanu-Kluvanek v. **măsură regulată**

teorema divergenței v. **integrare pe o varietate riemanniană orientată**

teorema ergodică v. **sistem dinamic**

teorema funcției inverse Fie m un număr natural, $U \subset \mathbf{R}^m$ o mulțime deschisă și $a \in U$. Fie și $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) : U \to \mathbf{R}^m$ o funcție de clasă C^1 (*i.e.* toate derivatele $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_i}$ sînt funcții continue pe U). Se presupune că jacobianul $\det\left(\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m}$ este nenul. Atunci h se inversează local în jurul lui a. Mai precis, există o mulțime deschisă $G \subset U$ cu $a \in G$ și o mulțime deschisă $H \subset \mathbf{R}^m$ astfel încît funcția $g : G \to H$, definită prin $g(x) = h(x)$ pentru orice x din G, să fie bijectivă și inversa ei $g^{-1} : H \to G$ să fie de clasă C^1.
Această teoremă mai este cunoscută sub numele de *teorema de inversiune locală* sau *teorema aplicației inverse*. În același cadru, se presupune că avem $\det\left(\left(\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant m}\right) \neq 0$ pentru orice x din U. Atunci h se inversează local în jurul fiecărui punct x din U, *i.e.* pentru orice x din U există o mulțime deschisă $G_x \subset U$ cu $x \in G_x$ și o mulțime deschisă $H_x \subset \mathbf{R}^m$ astfel încît funcția $g_x : G_x \to H_x$, definită prin $g_x(t) = h(t)$, să fie bijectivă și inversa ei $g_x^{-1} : H_x \to G_x$ să fie de clasă C^1 (Se spune în aceste condiții că h este difeomorfism local.) (*I.C.*)

teorema funcțiilor implicite I. *Cazul unei ecuații și al unei funcții implicite de o variabilă.* Se consideră două intervale deschise U, V ale dreptei reale și două puncte $a \in U$, $b \in V$. Fie $F : U \times V \to \mathbf{R}$ o funcție cu derivate parțiale de ordin k continue (vom scrie $F(x, y)$ pentru $x \in U$ și $y \in V$). Se presupune că: i) Avem $F(a,b) = 0$; ii) Avem $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. În aceste condiții există două numere strict pozitive r și s astfel încît $(a - r, a + r) \subset U$ și $(b - s, b + s) \subset V$, precum și o funcție $h : (a - r, a + r) \to (b - s, b + s)$, derivabilă de k ori, cu derivata de ordin k continuă, care are proprietățile:

α) Avem $h(a) = b$; β) Pentru orice x în $(a - r,\ a + r)$ avem $F(x,h(x)) = 0$; γ) Derivata lui h se calculează după formula

$$h'(t) = -\frac{\partial F}{\partial x}(t,h(t)) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(t,\ h(t))$$

pentru orice t în $(a - r,\ a + r)$.

II. *Cazul unei ecuaţii şi al unei funcţii implicite de mai multe variabile.* Se consideră un număr natural $m > 1$, o mulţime deschisă $U \subset \mathbb{R}^m$ şi un interval deschis $V \subset \mathbb{R}$, precum şi două puncte $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in U$ şi $b \in V$. Fie $F : U \times V \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivate parţiale de ordin k continue (vom scrie $F(x,y)$ pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U$ şi $y \in V$). Se presupune că: i) Avem $F(a,b) = 0$; ii) Avem $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. În aceste condiţii există două numere strict pozitive r şi s astfel încît $B(a, r) \subset U$ (unde $B(a, r)$ este bila de centru a şi rază r, distanţa fiind cea euclidiană) şi $(b - s,\ b + s) \subset V$, precum şi o funcţie $h : B(a, r) \to (b - s,\ b + s)$ cu derivate parţiale continue de ordin k, care are proprietăţile: α) Avem $h(a) = b$; β) Pentru orice x în $B(a,r)$ avem $F(x, h(x)) = 0$; γ) Derivatele parţiale ale lui h se calculează după formula

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(t) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,\ h(t)) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(t,\ h(t))$$

pentru orice $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ în $B(a,r)$.

III. *Cazul unui sistem de $n > 1$ ecuaţii şi a n funcţii implicite.* Se consideră două numere naturale $m,n > 1$, două mulţimi deschise $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, precum şi două puncte $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in U$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V$. Fie $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : U \times V \to \mathbb{R}^n$ o funcţie vectorială ale cărei componente scalare $F_1, F_2, \ldots, F_n$ au derivate parţiale de ordin k continue (vom scrie $F(x,y)$ pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$, deci avem $F(x,y) = (F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_n), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_n))$. Se presupune că i) Avem $F(a,b) = 0$; ii) Avem

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(a,b) = \det\left(\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,\ b)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}\right) \neq 0.$$

În aceste condiţii există două numere strict pozitive r şi s astfel încît $B(a,r) \subset U$, $B(b, s) \subset V$, precum şi o funcţie $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$: $B(a, r) \to B(b, s)$ cu derivate parţiale continue de ordin k, avînd proprietăţile: α) Avem $h(a) = b$; β) Pentru orice x în $B(a,r)$ avem $F(x,h(x)) = 0$; γ) Derivatele parţiale ale componentelor scalare h_i se calculează după formulele

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(t) = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)}(t,\ h(t))}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(t,\ h(t))},$$

$i = 1,2, \ldots, n$, $j = 1,2, \ldots, m$; pentru orice t în U. În toate cazurile funcţia h se va numi *funcţie implicită* (determinată de ecuaţia $F(x,y) = 0$ în primele două cazuri şi determinată de sistemul $F(x,y) = 0$ în al treilea caz). Spunem că am obţinut funcţia h prin rezolvarea ecuaţiei $F(x,y) = 0$ în raport cu

în jurul lui (a,b). Funcţia implicită este, local, unica funcţie avînd proprietăţile $F(a,b) = 0$ şi $F(x,h(x)) \equiv 0$ într-o vecinătate a lui a. (*I.C.*)

teorema fundamentală a algebrei v. **principiul variaţiei argumentului, corpul numerelor complexe**

teorema fundamentală Cauchy-Morera-Goursat v. **funcţie olomorfă** (de o variabilă complexă)

teorema Gauss-Ostrogradski v. **integrarea pe o varietate riemanniană orientată, formula Gauss-Ostrogradski**

teorema Gelfand-Mazur v. **corp Banach**

teorema Gelfand-Naimark v. **algebră Banach involutivă**

teorema gradului local v. **principiul variaţiei argumentului**

teorema graficului închis v. **operator închis**

teorema Hahn-Banach Fie X un spaţiu liniar real, p o funcţională subliniară pe X şi f_0 o funcţională liniară definită pe un subspaţiu liniar X_0 şi satisfăcînd condiţia: $f_0(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X_0$. Atunci f_0 se poate prelungi într-o funcţională liniară f pe X astfel ca $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$. Din această teoremă rezultă că dacă X este un spaţiu liniar real iar p o funcţională subliniară pe X, atunci pentru orice element x_0 al lui X există o funcţională liniară f pe X astfel ca $f(x_0) = p(x_0)$ şi $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$. Tot din **t.H.B.** se deduce următoarea propoziţie: dacă X este un spaţiu liniar real, E un clin în X, p o funcţională subliniară pe X iar q o funcţională supraliniară pe E astfel ca $q(y) \leq p(y)$, $\forall y \in E$, atunci există o funcţională liniară f pe X astfel ca $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$ şi $q(y) \leq f(y)$, $\forall y \in E$. Dacă X este un spaţiu liniar (real sau complex), p o seminormă pe X iar f_0 o funcţională liniară definită pe un subspaţiu liniar X_0 astfel ca $|f_0(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X_0$, atunci f se poate prelungi într-o funcţională liniară f pe X astfel ca $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$. (*R.C.*)

teorema Hille-Yosida-Phillips v. **grupuri de operatori**

teorema imaginii v. **spaţiu tangent**

teorema imersiei locale v. **spaţiu tangent**

teorema Krein-Milman v. **punct extremal** (al unei mulţimi convexe)

teorema Lebesgue-Nikodym v. **teorema Radon-Nikodym, măsuri definite prin densităţi, măsuri Radon definite prin densităţi**

teorema Lebesgue-Radon-Nikodym v. **teorema Radon-Nikodym, măsuri definite prin densităţi, măsuri Radon definite prin densităţi**

teorema lui Abel v. **divizor, serie de puteri**

teorema lui Alexandrov v. **măsură regulată**

teorema lui Baire (pentru funcţiile de prima clasă) O funcţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este de prima clasă a lui Baire dacă şi numai dacă mulţimea punctelor sale de discontinuitate în raport cu orice mulţime închisă este o mulţime de prima categorie Baire. (*S.M.*)

teorema lui Beppo-Levi Fie $(\mathcal{T}, T, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $\{U_n\}_n$ un şir de funcţii μ-măsurabile (*i.e.* $\mathcal{T}$-măsurabile) pozitive $U_n : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Se presupune că $\{U_n\}$ este un şir crescător şi fie $U : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ funcţia limită, *i.e.* $U(t) = \lim_n U_n(t) = \sup_n U_n(t)$ pentru orice t în T. Avem $\lim_n \int U_n\, d\mu = \sup_n \int U_n\, d\mu = \int U\, d\mu$. O altă variantă este următoarea: Fie $U : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ suma şirului $\{U_n\}_n$, *i.e.* $U(t) = \sum_n^{\infty} U_n(t)$ pentru orice t în T (v. şi **funcţie de mulţime**). Avem $\int U\, d\mu = \sum_n^{\infty} \int U_n\, d\mu$. (*I. C.*)

teorema lui Bochner v. **tub, înfășurătoare de olomorfie, funcție de tip pozitiv**

teorema lui Borel Pentru orice familie $\{c_\alpha\}_{\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n}$ de numere $c_\alpha \in \mathbb{R}$, există o funcție $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ astfel încît $\frac{1}{\alpha!}\,\mathrm{D}^\alpha f(0) = c_\alpha$, $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$.
Această teoremă a fost generalizată de Whitney după cum urmează:
Teorema de prelungire a lui Whitney. Fie U o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$, A o submulțime închisă a lui U și, pentru orice $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$, f_α o funcție reală continuă pe A. Pentru existența unei funcții $f\in C^\infty(U)$ astfel încît $\mathrm{D}^\alpha f\,|A = f_\alpha$ pentru toți $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$ este necesar și suficient ca, pentru orice $p\in\mathbb{N}$ și orice compact $K\subset A$, să avem

$$f_\alpha(x) = \sum_{|\beta|\leqslant p}\frac{(x-y)^\beta}{\beta!}f_{\alpha+\beta}(y) + o(|x-y|^p)$$

uniform pentru $x, y\in K$ și $|x-y|\to 0$.
Am folosit următoarea notație: fiind dată o funcție reală sau complexă f definită pe o submulțime X a lui $\mathbb{R}^n$, un punct $a\in X$ și un număr $p\in\mathbb{N}$, se scrie $f(x) = o(|x-a|^p)$ pentru $x\in X$ și $|x-a|\to 0$ dacă există o funcție reală pozitivă ε pe X astfel încît $\varepsilon(x)\to 0$ cînd $x\to a$ și astfel încît $|f(x)|\leqslant\varepsilon(x)\,|x-a|^p$ pentru orice $x\in X$. (*M.J.*)

teorema lui Brouwer v. **teorema de separare Jordan-Brouwer**
teorema lui Day v. **spații L^p**
teorema lui Carathéodory v. **măsură exterioară**
teorema lui Cauchy pentru funcții olomorfe Fie D o mulțime deschisă din planul complex $\mathbf{C}$, $f: D\to\mathbf{C}$ o funcție olomorfă pe D și λ, μ drumuri rectificabile și omotope în D. Atunci $\int_\lambda f = \int_\mu f$. În particular, dacă λ este un drum rectificabil închis, omotop cu zero în D, atunci $\int_\lambda f = 0$. Dacă D este un domeniu simplu conex, atunci $\int_\lambda f = 0$ pentru orice drum rectificabil și închis în D (v. și **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă)). (*Gh.Gr.*)
teorema lui Choquet v. **mulțime universală măsurabilă**
teorema lui R. Cristescu v. **integrala Hellinger**
teorema lui Dini v. **șir de funcții, serie de funcții**
teorema lui Dolbeault v. **formă diferențială** (pe o varietate complexă)
teorema lui Egorov v. **tipuri de convergență folosite în teoria măsurii, funcții și mulțimi măsurabile** (în raport cu o măsură Radon)
teorema lui Freudenthal v. **spațiu reticulat cu unitate**
teorema lui Fubini v. **măsură pe spațiu produs, măsură produs**
teorema lui Fuchs v. **punct singular** (al soluției unui sistem de ecuații diferențiale)
teorema lui Grauert v. **problema lui Levi, varietate Stein**
teorema lui Hartogs v. **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)
teorema lui Hilbert a zerourilor v. **spațiu C-analitic**
teorema lui Holmgren Fie $P(x,\mathrm{D}_x)$ un operator diferențial liniar cu coeficienți analitici într-o mulțime deschisă $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Fie Σ o hipersuprafață de clasă C^1 în Ω, care nu este caracteristică în nici un punct față de $P(x,\mathrm{D}_x)$

și care împarte Ω în două părți Ω_+, Ω_-. Atunci există o vecinătate ω a lui Σ avînd proprietatea că orice distribuție u, soluție a ecuației $P(x,\mathrm{D}_x)u = 0$ în Ω, care se anulează în Ω_+ (sau în Ω_-) se anulează și în ω. Condiția de analiticitate a coeficienților și faptul că Σ este necaracteristică pentru P sînt esențiale. Dacă una din aceste condiții nu este verificată concluzia teoremei este falsă. (*G.G.*)

teorema lui Kakutani v. **reducerea la integrarea pe spații local compacte**
teorema lui Kluvanek v. **măsură vectorială**
teorema lui Knowles v. **mulțimea valorilor unei măsuri vectoriale**
teorema lui Kuratowski v. **operator de închidere**
teorema lui Lindelöf v. **bază pentru topologia τ**
teorema lui Lindenstrauss v. **proprietatea Radon-Nikodym**
teorema lui Liouville v. **inegalitățile lui Cauchy**
teorema lui Luzin v. **măsură regulată, funcții și mulțimi măsurabile** (în raport cu o măsură Radon)
teorema lui S. Marcus v. **atom al unei măsuri**
teorema lui Montel v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă)
teorema lui Morera v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă)
teorema lui Pettis v. **măsură vectorială**
teorema lui Plancherel v. **funcție de tip pozitiv**
teorema lui Pontriaghin v. **grupul caracterelor unui grup comutativ**
teorema lui Rademacher v. **mulțime nemăsurabilă**
teorema lui Radó v. **functor, suprafață riemanniană**
teorema lui de Rham v. **formă diferențială** (pe o varietate diferențiabilă)
teorema lui Ribakov v. **continuitate absolută**
teorema lui Rodrigues v. **polinoame ortogonale**
teorema lui Rolle Fie f reală continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b) și fie $f(a) = f(b)$. Există $a<\xi<b$ astfel încît $f'(\xi) = 0$ (varianta clasică). Fie f constructiv diferențiabilă pe $[a,b]$ și fie $f(a) = f(b)$. Pentru orice $\varepsilon>0$ există x constructiv în $[a,b]$ cu proprietatea $|f'(x)|\leqslant\varepsilon$, derivata fiind aceea din definiția diferențiabilității constructive (varianta constructivă). (*S.M.*)
teorema lui Rouché v. **principiul variației argumentului**
teorema lui Sard v. **spațiu tangent**
teorema lui Segal v. **măsură localizabilă**
teorema lui Stegall v. **proprietatea Radon-Nikodym**
teorema lui Stokes v. **integrare pe o varietate diferențiabilă orientată, integrare pe o varietate riemanniană orientată**
teorema lui Stoilow v. **functor, transformare interioară, suprafață riemanniană de acoperire**
teorema lui Taylor (constructivă) Fie f de $(n+1)$ ori diferențiabilă constructiv pe intervalul I. Fie ε o constantă pozitivă și fie a, b puncte din I. Există c cu proprietatea $\min\{a,b\}\leqslant c\leqslant\max\{a,b\}$ astfel încît

$$\left| R - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n\,(b-a)\right| \leqslant \varepsilon,$$

unde

$$R = f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k.$$

Dacă f este indefinit constructiv diferențiabilă pe $I = (a - c, a + c)$, astfel încît pentru orice r în $(0, c)$, $\frac{r^n f^n}{n!} \to 0$ pentru $n \to \infty$ pe I, atunci din **t.T.** rezultă că seria Taylor $\sum(f^{(n)}(a)/n!)\,(x - a)^n$ converge către f pe I. (*S.M.*)

teorema lui Tietze v. **spațiu normal**

teorema lui Tihonov v. **spațiu topologic compact**

teorema lui Tonelli v. **măsură pe spațiu produs**

teorema lui Uhl v. **mulțimea valorilor unei măsuri vectoriale**

teorema lui Ulam (privind extinderea măsurilor difuze) Se consideră mulțimea tuturor numerelor ordinale strict mai mici decît primul ordinal nenumărabil. Cardinalul acestei mulțimi se notează cu $\aleph_1$. Se arată că $\aleph_1$ este primul element al mulțimii bincordonate a tuturor numerelor cardinale strict mai mari decît $\aleph_0$, cardinalul mulțimii numerelor naturale. *Ipoteza continuului* afirmă că $\aleph_1 = \mathfrak{C}$, unde $\mathfrak{C}$ este cardinalul mulțimii numerelor reale. Fie T o mulțime nevidă și $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T cu proprietatea că pentru orice t din T avem $\{t\} \in \mathcal{C}$. O măsură numărabil aditivă $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numește *măsură difuză* dacă $\mu(\{t\}) = 0$ pentru orice t din T.

T.U. Dacă T este o mulțime de cardinal $\aleph_1$, atunci nu există nici o măsură finită difuză și nenulă $\mu: \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (unde $\mathcal{P}(T)$ este mulțimea părților lui T). (*I.C.*)

teorema lui Urison v. **spațiu normal**

teorema lui Weierstrass v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară, funcție întreagă**

teorema lui Zorn v. **mulțime ordonată, axioma alegerii**

teorema Luzin-Menșov Fie $E \subset \mathbb{R}$ măsurabilă Lebesgue și fie X o parte închisă a lui E astfel încît orice punct din X este punct de densitate pentru E. În aceste condiții există o mulțime perfectă P, $X \subset P \subset E$, pentru care orice punct din X este punct de densitate. (*S.M.*)

teorema Mackey-Arens v. **sistem dual de spații liniare**

teorema mare a lui Picard v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

teorema Markov-Kakutani Fie X un spațiu liniar topologic separat, E o submulțime convexă și compactă a lui X și $\mathcal{U}$ o mulțime de operatori afini și continui definiți pe E cu valori în E astfel ca $U_2U_1 = U_1U_2$, oricare ar fi $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Există atunci un element $a \in E$ astfel ca $U(a) = a$ pentru orice $U \in \mathcal{U}$. (*R.C.*)

teorema mediei v. **funcție olomorfă** (de o variabilă complexă), **funcție armonică**

teorema mică a lui Picard v. **funcție olomorfă pe o coroană circulară**

teorema monodromiei v. **prelungire analitică**

teorema muchiei clinului, teoremă de prelungire analitică, pusă în evidență de Bogoliubov în legătură cu studiul relațiilor de dispersie. Versiunea lui Bogoliubov este următoarea: Fie Γ_1 un clin deschis din $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_2 = -\Gamma_1$ (prin con se înțelege o mulțime invariantă la omotetii reale pozitive) $T(\Gamma_1)$, respectiv $T(\Gamma_2)$ tuburile de bază Γ_1, respectiv Γ_2 (*i.e.* $T(\Gamma_k) = \mathbb{R}^n \times i\Gamma_k$, $k = 1, 2$), ω o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ iar Ω o vecinătate complexă a sa. Fie de asemenea $f_k \in \mathcal{O}(\Omega \cap T(\Gamma_k))$, $k = 1, 2$, două funcții olomorfe, avînd aceleași valori la bord: $\lim\limits_{y \to 0,\, y \in \Gamma_1} f_1(x + iy) = \lim\limits_{y \to 0,\, y \in \Gamma_2} f_2(x + iy)$ (convergența fiind uniformă, în raport cu $y \to 0$, pe fiecare mulțime compactă din $\Omega \cap T(\Gamma_k)$). Atunci există o mulțime deschisă $\Omega' \subset \Omega$ independentă de f_1, f_2 și o funcție olomorfă f în Ω' astfel încît $f = f_k$ în $\Omega' \cap T(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$, deci are loc prelungirea analitică în jurul „muchiei" comune pe care sînt definite valorile la bord. (Un analog clasic al acestui rezultat în C^1 este o teoremă de prelungire a lui Painlevé.) Dacă se consideră valori la bord mai generale, de pildă, ca distribuții, sau, mai general, ca hiperfuncții, ceea ce reprezintă generalizarea naturală și cea mai cuprinzătoare, se obține un enunț analog, dar în care figurează mai multe clinuri. Enunțul general se datorează lui Martineau: Fie $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ clinuri deschise și proprii, *i.e.* $\Gamma_j \cap \Gamma_j^a = \emptyset$, unde Γ^a este mulțimea ce se obține din Γ prin aplicația antipodală $a:(x, i\xi) \to (x, -i\xi)$. Fie φ_j funcții olomorfe pe $\Omega \cap T(\Gamma_j)$ astfel încît $\sum\limits_{j=1}^{N} b\varphi_j = 0$, unde $b\varphi_j$ este valoarea la bord a lui φ_j în sensul hiperfuncțiilor (v. **hiperfuncție**). Atunci există $\varphi_{j,k}$ olomorfe pe $\Omega \cap (T(Z_j) \cap \cap\, T(Z_k)$ pentru orice $j = 1, \ldots, N$ astfel încît $\varphi_j = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_{j,k}$ pentru orice j și $\varphi_{j,k} = -\varphi_{k,j}$ pentru orice j, k. În această variantă mult mai generală teorema admite o demonstrație mai simplă și mai conceptuală, utilizînd esențial legătura între noțiunea de valoare la bord și spectrul singular al unei hiperfuncții (v. **hiperfuncții**). Această teoremă are importante aplicații în analiza complexă. În literatura de specialitate este cunoscută sub denumirea de *teorema «Edge of the Wedge»* (*G.G.*)

teorema Poincaré-Volterra-Radó v. **funcție analitică globală**

teorema Radon-Nikodym Se consideră T o mulțime nevidă și $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui T. Notăm cu Γ corpul numerelor reale sau complexe.

T.R.N. (varianta pozitivă). Fie $\mu, m : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ două măsuri numărabil aditive. Se presupune că măsura μ este localizabilă și are proprietatea submulțimii finite (ceea ce se întîmplă, în particular, dacă μ este total σ-finită, v. **măsură localizabilă**). Dacă m este absolut continuă în raport cu μ, atunci există o funcție μ-măsurabilă $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$, astfel încît pentru orice A din $\Sigma(\mu) = \{B \in \mathcal{C} \mid \mu(B) < \infty\}$ avem echivalența: $A \in \Sigma(m) \Leftrightarrow f\varphi_A$ este μ-integrabilă. În plus, în acest caz avem $m(A) = \int_A f\, d\mu$.

T.R.N. (varianta scalar pozitivă). Fie $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ și $m : \mathcal{C} \to \Gamma$ măsuri numărabil aditive. Se presupune că μ este localizabilă și are proprietatea submulțimii finite și m este absolut continuă în raport cu μ (în sensul că $|m|$ este absolut continuă în raport cu μ, unde $|m|$ este modulul măsurii m). Atunci există o funcție $f : T \to \Gamma$ care este local μ-integrabilă și are proprietatea că $m(A) = \int_A f\, d\mu$ pentru orice A din $\Sigma(|m|)$. Funcția f este μ-integrabilă dacă și numai dacă m este mărginită.

T.R.N. (varianta scalară). Fie $m, \mu : \mathcal{C} \to \Gamma$ măsuri numărabil aditive. Se presupune că $|\mu|$ este localizabilă și are proprietatea submulțimii finite și m este absolut continuă în raport cu μ (în sensul că $|m|$ este absolut continuă în raport cu $|\mu|$). Atunci există o funcție local $|\mu|$-integrabilă $f : T \to \Gamma$ care are proprietatea că $m(A) = \int_A f\, d\mu$ pentru orice A din $\Sigma(|m|)$.

În general, funcția f nu este unic determinată dar dacă și altă funcție g are proprietățile lui f rezultă că $f(t) = g(t)$, cu excepția unei mulțimi local $|\mu|$-neglijabile. Dacă $\mathcal{C}$ este algebră și $|\mu|$ este total σ-finită, putem alege funcția f măsurabilă în raport cu tribul generat de $\mathcal{C}$. Funcția f se numește *derivata Radon-Nikodym* a lui m în raport cu μ. Așadar, schematic **t.R.N.** se prezintă astfel: $m << \mu \Leftrightarrow m = f\mu$ (v. **continuitate absolută, măsuri definite prin densități**).

În cazul particular cînd μ este măsura Lebesgue pe un interval $T \subset \mathbb{R}$, iar f este derivata Radon-Nikodym a lui m în raport cu μ, se obișnuiește să se scrie $m = f\,dx$ sau $m = f(x)dx$. Similar, dacă μ este măsura Lebesgue n-dimensională pe o mulțime măsurabilă Lebesgue $T \subset \mathbb{R}^n$, scriem $m = f\,dx$ sau $m = f\,dx_1 dx_2 \dots dx_n$ etc. **T.R.N.** mai este cunoscută sub numele de *teorema Lebesgue-Radon-Nikodym* sau *teorema Lebesgue-Nikodym*. (*I. C.*)

teorema reziduurilor v. **reziduu, suprafață riemanniană**

teorema Rieffel-Huff-Davis-Phelps v. **proprietatea Radon-Nikodym**

teorema Riemann-Roch v. **divizor**

teorema Schauder-Tihonov Dacă X este un spațiu local convex separat iar E o submulțime convexă și compactă a lui X, atunci orice operator continuu $U: E \to E$ are un punct fix, *i.e.* există un element $x_0 \in E$ astfel că $U(x_0) = x_0$. (*R. C*).

teorema Sierpiński-Erdös v. **principiul dualității între măsură și categorie**

teorema Stone-Weierstrass Fie T un spațiu topologic compact și $C_{\mathbb{R}}(T)$ algebra Banach a funcțiilor reale continue definite pe T (cu operațiile și norma obișnuite: $\| x \| = \max \{| x(t) | \mid t \in T\}$, $x \in C_{\mathbb{R}}(T)$). Dacă Y este o subalgebră a algebrei $C_{\mathbb{R}}(T)$, care conține funcția identic unu și care separă punctele lui T (*i.e.* dacă $t_1, t_2 \in T$ și $t_1 \neq t_2$, atunci există $y \in Y$ cu $y(t_1) \neq y(t_2)$), atunci închiderea lui Y coincide cu $C_{\mathbb{R}}(T)$. Din această teoremă se deduce că dacă Y este o subalgebră a algebrei Banach $C_{\mathbb{C}}(T)$ a funcțiilor complexe continue pe T, dacă subalgebra Y conține funcția identic unu și separă punctele lui T, iar din $y \in Y$ rezultă $\bar{y} \in Y$ (unde $\bar{y}$ este conjugata lui y), atunci închiderea lui Y coincide cu $C_{\mathbb{C}}(T)$. (*R. C.*)

teorema submersiei locale v. **spațiu tangent**

teorema valorii proprii v. **teorie ergodică**

teoreme de tip Paley-Wiener, rezultate care leagă creșterea transformatei Fourier-Laplace a unei distribuții cu suport compact de mărimea suportului. Mai precis: 1) O funcție întreagă $U(\zeta)$ este transformata Fourier-Laplace a unei distribuții cu suportul conținut în bila închisă de rază R, $\{| x | \leqslant R\}$ dacă și numai dacă există constante C și N astfel încît

$$| U(\zeta) | \leqslant C(1 + | \zeta |)^N \, e^{R\,|\operatorname{Im} \zeta|};$$

2) O funcție întreagă U este transformata Fourier-Laplace a unei funcții indefinit derivabile cu suportul în bila $\{| x | \leqslant R\}$ dacă și numai dacă pentru fiecare întreg k există o constantă C_k astfel încît

$$| U(\zeta) | \leqslant C_k(1 + | \zeta |)^{-k} \, e^{R\,|\operatorname{Im} \zeta|}.$$

În cele de mai sus am numit transformată Fourier-Laplace a unei distribuții u cu suport compact, prelungirea analitică la întreg $\mathbb{C}^n$ a transformatei Fourier a lui u, definită de $\hat{u}(\xi) = u_x(e^{-i<x,\xi>})$. Enunțurile de mai sus pot fi precizate utilizînd funcția de sprijin a unei mulțimi convexe compacte și caracterizînd cu ajutorul său creșterea transformatei Fourier-Laplace a unei distribuții avînd suportul conținut în mulțimea convexă respectivă. Sub forma prezentată enunțurile aparțin lui L. Schwartz. Enunțul original al lui Paley-Wiener se referea doar la caracterizarea transformatei Fourier-Laplace a unei funcții de pătrat integrabil cu suportul compact din $\mathbb{R}$. (*G. G.*)

teoremele A și B ale lui Cartan v. **varietate Stein**

teoremele de aproximare ale lui Weierstrass Dacă f este o funcție reală, continuă pe intervalul real $[a, b]$ închis și mărginit, atunci există un șir $\{P_n\}$ de funcții polinomiale care converge pe $[a, b]$ uniform către f (*prima teoremă de aproximare a lui Weierstrass*). O demonstrație constructivă a acestei teoreme, în sensul obținerii efective a unor polinoame P_n cu proprietatea indicată a fost obținută de S. Bernstein. Polinoamele sale au expresia

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1 - x)^{n-k} f(k/n),$$

considerațiile făcîndu-se pe intervalul $[0, 1]$. O generalizare a teoremei lui Weierstrass a fost obținută de M. H. Stone (v. **teorema Stone-Weierstrass**). Dacă f este o funcție continuă pe intervalul $[0,2\pi)]$ și $f(0) = f(2\pi)$, atunci există un șir $\{T_n\}$ de funcții polinomiale trigonometrice care converge uniform pe $[0,2\pi]$ către funcția f (*a doua teoremă de aproximare a lui Weierstrass*). (Un polinom trigonometric $T_n(x)$ de ordin n are forma

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos x + b_n \sin x.)$$

Dintre toate polinoamele trigonometrice de ordin n, cel care dă cea mai bună aproximare în medie pătratică a unei funcții f integrabile pe $[0, 2\pi]$, este polinomul Fourier $F_n(x)$ de ordin n al lui f pe $[0, 2\pi]$, ai cărui coeficienți sînt dați de formulele lui Fourier: $a_i = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos ix\, dx$, $b_i = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin ix\, dx$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (*S. M.*)

teoremele lui L'Hôpital caracterizează comportamentul raportului a două funcții derivabile f și g într-un punct în care f și g tind amîndouă la zero sau una tinde la infinit. Fie f și g două funcții reale definite și derivabile pe intervalul $I = (a, b)$, $g'(x) \neq 0$ pe I. Fie H_1 ipoteza constînd în $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ pentru $x \to b$. Fie H_2 ipoteza $\lim |g(x)| = +\infty$ pentru $x \to b$. Dacă este îndeplinită una oarecare dintre ipotezele H_1 și H_2, atunci

$$\liminf_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \liminf_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Rezultă de aici că: Dacă raportul $f'(x)/g'(x)$ are limită în b, atunci raportul $f(x)/g(x)$ are limită în b și cele două limite sînt egale. Această ultimă afirmație conține teoremele clasice ale lui L'Hôpital, care se enunță de obicei separat după cum are loc ipoteza H_1 sau ipoteza H_2. În varianta clasică, H_2 este înlocuită cu ipoteza mai restrictivă: $\lim g(x) = \lim f(x) = +\infty$ pentru $x \to b$. Reciproca **t. L'H.** nu este valabilă; din faptul că raportul f/g are limită în b nu rezultă că raportul f'/g' are limită în b. Teoreme similare se pot da pentru limita la dreapta în a. Uneori, pentru stabilirea existenței și valorii limitei raportului $f(x)/g(x)$ este necesară aplicarea de mai multe ori a **t. L'H.**, pînă se ajunge la un număr natural n pentru care raportul derivatelor de ordinul n ale lui f și g în punctul considerat are limită; valoarea acestei limite va fi și valoarea limitei raportului f/g. Ex.: $f(x) = x \sin x - x^2 \cos x$, $g(x) = x^2 - \sin^2 x$; limita raportului f/g în origine este egală cu zero. În alte cazuri, se poate întîmpla ca raportul derivatelor de ordin n să nu aibă limită pentru nici un număr natural n; în această situație **t. L'H.** nu este aplicabilă. Fie f și g două funcții reale definite pe intervalul real I și fie a un punct interior lui I. Dacă $f(a) = g(a) = 0$ și dacă derivatele la dreapta f'_+ și g'_+ ale lui f și g există, sînt finite în a și $g'_+(a) \neq 0$, atunci raportul f/g admite limită la dreapta în a iar această limită este egală cu $f'_+(a)/g'_+(a)$. Ex.: $f(x) = x^2$ pentru x rațional, $f(x) = 0$ pentru x irațional, $g(x) = \sin x$. Raportul f/g are în origine limita egală cu 0. (*S. M.*)

teoria distribuțiilor v. **distribuție**

teoria potențialului, domeniu fundamental al analizei matematice născut din problemele matematice ridicate de studiul legii gravitației a lui Newton, și care este legată de numele lui Laplace, Lagrange, Poisson, Green și Gauss. Lui G. Green și C.F. Gauss se datorează denumirea de potențial. Gauss a fost acela care a remarcat că metodele **t.p.** se pot aplica la o serie de alte probleme ale fizicii matematice. Fie $\Omega = \Omega^+$ un domeniu relativ compact din $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = S$ o varietate fără frontieră, și $\Omega^- = \mathbb{R}^n \setminus (\Omega^+ \cup S)$. Fie apoi

$$E(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n^{(n-2)}} \, \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n > 2, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & n = 2, \end{cases}$$

soluția fundamentală a operatorului lui Laplace $\Delta u = \sum\limits_{x=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Aici $\omega_n = 2\pi^{n/2}\,\Gamma(n/2)$ este aria sferei unitate în $\mathbb{R}^n$. Următoarele integrale, considerate ca funcții de $x \in \mathbb{R}^n$, joacă un rol fundamental în teoria potențialului:

$$\int_\Omega \rho(y) E(x, y)\, dy; \quad \int_S \mu(y) E(x, y)\, dS(y); \quad \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y).$$

Ele se numesc, respectiv, *potențialul de volum* (de densitate ρ), *potențialul de simplu strat* (de densitate μ) și *potențialul de dublu strat* (de densitate ν); aici n_y este normala exterioară la S, iar $\dfrac{\partial}{\partial n_y}$ derivarea după normala exterioară. Importanța acestor potențiale constă în faptul că prin intermediul lor se pot reprezenta soluțiile problemei lui Dirichlet (sau ale problemei lui Neumann) pentru ecuația lui Laplace (sau ecuația lui Poisson). Dacă Φ este o funcție de clasă C^2 pe $\overline{\Omega}$, cu $\partial\Omega$ varietate de clasă C^2, atunci are loc formula lui Green:

$$q(x)\,\Phi(x) = -\int_\Omega \Delta\Phi(y) E(x, y)\, dy + \int_S \left(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y) - \Phi(y) \frac{\partial E(x, y)}{\partial n_y} \right) dS(y),$$

unde $q(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega = \Omega^+, \\ 1/2, & x \in \partial\Omega, \\ 0, & x \in \Omega^-. \end{cases}$ reprezintă $-\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y)$,

i.e. saltul la trecerea prin S a potențialului de dublu strat. În particular, dacă funcția Φ este armonică, se obține reprezentarea lui Φ ca o sumă de

potențiale de simplu și dublu strat avînd ca densitate pe $\mu(y) = \dfrac{\partial y}{\partial n_y}$, respectiv $\nu(y) = -u(y)$. Punctul central al teoriei (clasice) a potențialului îl constituie studiul problemelor Dirichlet și Neumann (v. **problema lui Dirichlet, problema lui Neumann**). Dacă metoda potențialelor (*i.e.* căutarea soluției sub formă de potențiale) poate furniza soluția în cazul domeniilor cu frontieră regulată, pentru domenii mai generale acest lucru nu mai este posibil după cum au arătat S. Zaremba, H. Lebesgue. Studiul existenței și unicității soluției problemei lui Dirichlet pentru domenii cît mai generale a fost efectuat cu alte metode, deosebit de importantă fiind metoda Perron-Wiener. Astfel N. Wiener a arătat că dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu relativ compact arbitrar, iar φ o funcție continuă arbitrară pe $\partial\Omega$, atunci există o (unică) soluție generalizată $H_\varphi(x)$ a problemei lui Dirichlet. Mai general, M. Brelot a arătat că o condiție necesară și suficientă pentru ca o funcție măsurabilă pe $\partial\Omega$ să fie rezolubilă (*i.e.* să existe H_φ) este ca φ să fie integrabilă în raport cu măsura armonică pe $\partial\Omega$. Soluția generalizată $H_\varphi(x)$ nu are proprietatea că $\lim\limits_{x \to x_0} H_\varphi(x) = \varphi(x_0)$ pentru orice $x_0 \in \partial\Omega$. Acele puncte pentru care egalitatea are loc se numesc regulate. Se poate arăta că mulțimea punctelor regulate este densă în $\partial\Omega$ și, mai mult, punctele neregulate sînt de capacitate exterioară zero. De metoda lui Perron-Wiener sînt legate și funcțiile subarmonice introduse de F. Riesz. Dezvoltarea **t.p.** și introducerea unei serii de concepte, cum sînt capacitatea, funcțiile subarmonice și cele superarmonice etc., au condus la constituirea unei noi ramuri a **t.p.**, teoria abstractă (sau axiomatică) a potențialului ce studiază cadrul cel mai general în care poate avea loc o teorie rezonabilă a potențialului. Noțiunea centrală a acestei teorii este cea de spațiu armonic. Un *spațiu armonic* este un spațiu local compact X înzestrat cu un fascicol $\mathcal{F}$ avînd următoarele proprietăți: 1) $\mathcal{F}(U)$ este format din funcții $u: U \to \overline{\mathbb{R}}$ (U deschis arbitrar în X); 2) Dacă $U \subset V \subset X$ sînt mulțimi deschise, restricția oricărei secțiuni din $\mathcal{F}(V)$ la U aparține lui $\mathcal{F}(U)$; 3) Pentru orice U mulțime deschisă, $\mathcal{F}(U)$ este un spațiu vectorial de funcții continue pe U; 4) $\mathcal{F}$ este nedegenerat, *i.e.* pentru orice $x \in X$ există în vecinătatea lui x o funcție u din fascicol nenulă în punctul x. Un astfel de fascicol se numește *armonic*. Pentru ca spațiul să fie armonic se cer îndeplinite proprietăți suplimentare de către funcțiile fascicolului $\mathcal{F}$. Astfel, în ceea ce privește convergența, trebuie să fie îndeplinită, în funcție de axiomaticile utilizate, una din proprietățile următoare: 5) *Proprietatea de convergență a lui Bauer*. Dacă un șir local mărginit de funcții din $\mathcal{F}$, crescător pe o mulțime deschisă U, tinde către v, funcția v aparține fascicolului; 5) *Proprietatea de convergență a lui Doob*. Dacă funcția limită v este finită pe o mulțime densă ea aparține fascicolului); 5″) *Proprietatea de convergență a lui Brelot*. Dacă limita v a unui șir crescător de funcții din $\mathcal{F}$ pe o mulțime deschisă este finită într-un punct x, atunci v aparține fascicolului. Dacă fascicolul $\mathcal{F}$ pe X are proprietatea că pentru orice mulțime deschisă U, $\mathcal{F}(U)$ este un con convex de funcții inferior semicontinue se spune că $\mathcal{F}$ este un *fascicol hiperarmonic*; fascicolul $U \to \mathcal{F}(U) \cap (-\mathcal{F}(U))$ este în acest caz armonic. Existența unui fascicol hiperarmonic pe X permite utilizarea metodei Perron pentru a se obține soluția generalizată a problemei lui Dirichlet În plus, trebuie să aibă loc: 6) *Axioma rezolubilității*. Există o bază de mulțimi deschise în X pentru care pentru orice funcție f cu suport compact pe ∂U există în $\mathcal{F}(U)$ o soluție generalizată (în sensul Perron-Wiener) a problemei lui Dirichlet pe U cu data f pe ∂U; 7) *Axioma majorantei*. Dacă o funcție inferior semicontinuă u pe U verifică pentru orice mulțime V relativ compactă. $\overline{V} \subset U$ condiția

$$\sup \{V \in \mathcal{F}(U), v(x) \leqslant u(x), \ x \in \partial V\} = \mu^V u \leqslant u \text{ pe } V,$$

atunci $u \in \mathcal{F}(U)$. Un spațiu cu aceste proprietăți (sau proprietăți analoage, eventual slăbite) permite construirea unei **t.p.** Spațiul $X = \mathbb{R}^n$ și $\mathcal{F}$ fascicolul funcțiilor armonice este un spațiu armonic. De asemenea, $X = \mathbb{R}^n$ și $\mathcal{F}$ fascicolul soluțiilor ecuației căldurii este un spațiu armonic. Ecuațiile eliptice degenerate furnizează alte exemple de spații armonice. Există legături profunde între **t.p.** și teoria probabilităților, puse în evidență pentru prima dată de Hunt. În teoria axiomatică a potențialului școala românească a adus contribuții remarcabile. (*G. G.*)

teorie ergodică Fie (X, Σ, m) un spațiu cu măsură. O aplicație măsurabilă $T: X \to X$, *i.e.* $T^{-1}(A) \in \Sigma$ pentru orice $A \in \Sigma$, se numește *transformare care conservă măsura* (pe scurt, t.c.m.) dacă pentru orice $A \in \Sigma$ avem $m(T^{-1}(A)) = m(A)$. O t.c.m. bijectivă cu proprietatea că și T^{-1} este t.m.c. se numește *transformare invertibilă care conservă măsura* (pe scurt, t.i.c.m.). Pentru orice T t.c.m. și orice $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se pune în evidență operatorul liniar și izometric $_T U: L^p(m) \to L^p(m)$ care acționează prin $U_T(\widetilde{f}) = \widetilde{f \circ T}$. Dacă T este t.i.c.m. și $p = 2$, atunci U_T este un operator unitar în spațiul Hilbert $L^2(m)$. Pentru orice t.c.m. T și orice număr natural n notăm $T \circ T \circ \ldots \circ T = T^n$ (compunere de n ori). Scriem $T^0 = 1_X$, unde $1_X: X \to X$, $1_X(x) = x$ pentru orice x din X. Vom spune că x este *punct recurent relativ la E și T* dacă există n natural astfel încît $T^n(x) \in E$.

Teorema de recurență a lui Poincaré (varianta abstractă). Dacă măsura m este finită și $E \in \Sigma$ există o mulțime m-neglijabilă M astfel încît orice x din $E \setminus M$ este punct recurent relativ la E și T (se presupune că T este t.c.m.).

Teorema de recurență a lui Poincaré (varianta topologică). Dacă X este o mulțime deschisă și mărginită inclusă în $\mathbb{R}^n$, iar $T: X \to X$ este un homeomorfism, atunci există o mulțime A de prima categorie Baire și de măsură Lebesgue nulă astfel încît orice punct x din $X \setminus A$ este recurent relativ la T și orice vecinătate deschisă $V \subset X$ a lui x.

Dacă $m(X) = 1$ și $E \in \Sigma$ cu $m(E) > 0$, putem considera mulțimea M de mai sus (varianta abstractă) și definim $n_E: X \to \mathbb{R}$ prin $n_E(x) = \infty$ dacă $x \in E \cap M$ $n_E(x) =$ cel mai mic număr natural n cu proprietatea $T^n(x) \in E$ dacă $x \in E \setminus M$ și $n_E(x) = 0$ dacă $x \notin E$.

Teorema de recurență a lui Kac. Dacă $m(X) = 1$ și T este ergodică (v. mai departe) atunci n_E este m-integrabilă și avem $\int n_E(x)\, dm(x) = 1$.

Teorema ergodică medie (varianta abstractă). Se consideră un spațiu Hilbert H și $U: H \to H$ o izometrie. Fie $P: H \to H$ proiectorul pe subspațiul închis $Y = \{x \in H \mid U(x) = x\}$. Atunci, pentru orice element x din H, avem

$$\lim_n \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} U^i(x)\right) = P(x).$$

În consecință, cu notațiile de la început, avem

Teorema ergodică medie. Fie T t.c.m. Pentru orice $f \in \mathcal{L}^2(m)$, există $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{f \circ T^i} = \widetilde{g}$ în $L^2(m)$ și funcția g este invariantă la T (*i.e.* $g = g \circ T$ m-a.p.t.).

Teorema ergodică individuală. Fie T t.c.m. Pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(m)$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) := f^*(x)$$

există m-aproape pentru orice x din X. În plus, funcția f^* este și ea în $\mathcal{L}^1(m)$ și f^* este invariantă la T. Dacă m este finită, rezultă că

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i \xrightarrow[n]{} f^* \text{ în } \mathcal{L}^1(m), \text{ deci în particular avem}$$

$$\int f^*\, dm = \int f\, dm.$$

Dacă T este t.c.m. și $A \in \Sigma$, vom spune că A este invariantă la T dacă $T^{-1}(A) \approx A$ (*i.e.* mulțimea $T^{-1}(A) \Delta A$ este m-neglijabilă). Prin definiție, o t.c.m. T se numește *transformare ergodică* (sau *transformare metric tranzitivă*) dacă avem echivalența: A este invariantă la T dacă și numai dacă $m(A) = 0$ sau $m(X \setminus A) = 0$. O t.c.m. T care nu este ergodică se numește *transformare decompozabilă*. Așadar, aceasta înseamnă că există $A, B \in \Sigma$ cu $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$ și $m(A) > 0$, $m(B) > 0$, astfel încît A și B sînt mulțimi invariante la T. Se arată că o t.c.m. T este ergodică dacă și numai dacă singurele funcții măsurabile invariante la T sînt funcțiile constante m-a.p.t. Pentru T ergodică, putem preciza rezultatul din teorema ergodică individuală. În acest caz, dacă m este și finită, rezultă că f este egală m-a.p.t. cu

$$\frac{1}{m(X)}\int f\, dm, \text{ iar dacă } m(X) = \infty, \text{ atunci } f^* = 0 \ m\text{-a.p.t.}$$

Teorema valorii proprii. Se presupune că m este finită. Fie T t.i.c.m. Atunci T este ergodică dacă și numai dacă 1 este valoare proprie simplă pentru operatorul unitar $U_T: L^2(m) \to L^2(m)$. Dacă T este ergodică, toate valorile proprii ale lui U_T sînt simple și ele formează un subgrup al grupului multiplicativ $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Ex.: 1° $X = \mathbb{R}$, $\Sigma =$ mulțimile măsurabile Lebesgue ale lui $\mathbb{R}$, $m =$ măsura Lebesgue. Aplicația (care este *t.i.c.m.*) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x + 1$ nu este ergodică. 2° $X = Z$, $\Sigma =$ părțile lui $\mathbb{Z}$, $m =$ măsura cardinal (dată de $m(\{i\}) = 1$ pentru orice $i \in \mathbb{Z}$). Aplicația (care este t.i.c.m.) $T: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $T(i) = i + 1$, este ergodică. 3° $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\Sigma = X \cap \mathcal{B} = \{X \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$, unde $\mathcal{B}$ sînt mulțimile măsurabile Lebesgue ale lui $\mathbb{R}^2$ identificat cu $\mathbb{C}$. Măsura probabilistică $m: \Sigma \to [0, 1]$ se definește prin $m(A) = \frac{\lambda(B)}{2\pi}$, unde λ este măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$ și $U(B) = A$. Am notat $U: [0, 2\pi] \to X$, $U(t) = e^{it}$. Aplicația (care este t.i.c.m.) $T_c: X \to X$ se definește prin $T_c(z) = cz$. Aici $c \in X$ este fixat. Se arată că T_c este ergodică dacă și numai dacă nu există n natural astfel încît $c^n = 1$. (*I. C.*)

tipuri de convergență folosite în teoria măsurii Vom considera un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$. Prin X vom nota: a) sau un spațiu Banach normat cu norma $x \to |x|$, în particular $X = \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) normat cu modulul obișnuit; b) sau dreapta reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}$ (se admite că $|-\infty| = |\infty| = \infty$). De asemenea, vom considera un șir generalizat de funcții μ-măsurabile notat $\{f_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ (sau, mai simplu, $\{f_\delta\}_\delta$ dacă nu mai specificăm mulțimea dirijată de indexare Δ), unde $f_\delta: T \to X$ pentru orice δ în Δ. În particular, se pot considera șiruri de funcții $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (sau $\{f_n\}_n$), luînd $\Delta = \mathbb{N}$. În fine, fie și $f: T \to X$

o funcție μ-măsurabilă. Vom spune că șirul generalizat $\{f_\delta\}$ *converge la f μ-a.p.t.* (este un *șir generalizat convergent la f μ-a.p.t.* sau este un *șir generalizat convergent la f a.p.t. în raport cu* μ) dacă: există o mulțime μ-neglijabilă $M \subset T$ cu proprietatea că pentru orice t din $T \setminus M$ avem $f_\delta(t) \xrightarrow[\delta]{} f(t)$. În cazul cînd μ este o probabilitate, spunem că $\{f_\delta\}_\delta$ *converge la f aproape sigur*. Vom spune că $\{f_\delta\}_\delta$ este un *șir generalizat Cauchy* (sau *fundamental*) *a.p.t. în raport cu* μ dacă există o mulțime μ-neglijabilă $M \subset T$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice t din $T \setminus M$ există δ_0 din Δ astfel încît pentru orice δ', δ'' din Δ, $\delta' \geq \delta_0$ și $\delta'' \geq \delta_0$ să avem

$$|f_{\delta'}(t) - f_{\delta''}(t)| < \varepsilon \text{ (sau } |f_{\delta'}(t) - f_{\delta''}(t)| \leq \varepsilon).$$

Avem implicația: $\{f_\delta\}_\delta$ convergent μ-a.p.t. la $f \Rightarrow \{f_\delta\}_\delta$ fundamental în raport cu μ (implicație valabilă cînd f este finită, în cazul $X = \overline{\mathbb{R}}$). Dacă μ este probabilitate vom spune că $\{f_\delta\}_\delta$ este *Cauchy (fundamental) aproape sigur*. Vom spune că șirul generalizat $\{f_\delta\}_\delta$ *converge la f în μ-măsură* (este un *șir generalizat convergent la f în μ-măsură*) dacă pentru orice număr strict pozitiv a avem $\mu(A(a, \delta)) \xrightarrow[\delta]{} 0$, unde $A(a, \delta) = \{t \in T \mid |f_\delta(t) - f(t)| \geq a\}$ (sau, echivalent, $A(a, \delta) = \{t \in T \mid |f_\delta(t) - f(t)| > a\}$). Dacă μ este probabilitate, spunem că $\{f_\delta\}_\delta$ converge la f în probabilitate. Dacă $\mu(T) < \infty$ avem implicația (valabilă pentru șiruri de funcții): $\{f_n\}_n$ converge la f μ-a.p.t. $\Rightarrow \{f_n\}_n$ converge la f în μ-măsură. Vom spune că $\{f_\delta\}_\delta$ este *Cauchy* (sau *fundamental*) *în μ-măsură*, dacă pentru orice a strict pozitiv și pentru orice ε strict pozitiv există $\delta(a, \varepsilon)$ în Δ astfel încît pentru orice δ' și δ'' în Δ, $\delta' \geq \delta(a, \varepsilon)$ și $\delta'' \geq \delta(a, \varepsilon)$ să avem $\mu(\{t \in T \mid |f_{\delta'}(t) - f_{\delta''}(t)| > a\}) < \varepsilon$; fiecare din inegalitățile stricte poate fi înlocuită cu una nestrictă. Avem implicația: $\{f_\delta\}_\delta$ converge la f în μ-măsură $\Rightarrow \{f_\delta\}_\delta$ este fundamental în μ-măsură. În cazul cînd μ este probabilitate, vom spune că $\{f_\delta\}_\delta$ este *Cauchy (fundamental) în probabilitate*. Avem și implicațiile (valabile pentru șiruri de funcții): 1) $\{f_n\}_n$ fundamental în μ-măsură $\Rightarrow$ există o funcție măsurabilă $f: T \to X$ astfel încît $\{f_n\}_n$ converge la f în μ-măsură (*teorema de completitudine a lui Slutki*); 2) $\{f_n\}_n$ convergent la f în μ-măsură $\Rightarrow$ există un subșir $\{f_{n_k}\}_k$ al lui $\{f_n\}_n$ convergent la f μ-a.p.t. Se spune ca $\{f_\delta\}_\delta$ *converge la f μ-aproape uniform* (este un *șir generalizat convergent la f μ-aproape uniform*, sau $\{f_\delta\}_\delta$ *converge la f μ-asimptotic*, sau $\{f_\delta\}_\delta$ este un *șir generalizat convergent la f μ-asimptotic*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime μ-măsurabilă F cu proprietatea că $\mu(F) < \varepsilon$ și astfel încît $\{f_\delta\}_\delta$ converge la f uniform pe $T \setminus F$. Ultima expresie înseamnă pentru orice $h > 0$ există $\delta(h)$ în Δ astfel încît pentru orice $\delta \geq \delta(h)$ și orice t în $T \setminus F$ avem $|f_\delta(t) - f(t)| < h$. În această definiție presupunem că f_δ și f sînt funcții finite μ-a.p.t. Avem următoarele implicații (valabile pentru șiruri de funcții): 1) $\{f_n\}_n$ convergent la f μ-aproape uniform $\Rightarrow \{f_n\}_n$ convergent la f μ-a.p.t.; 2) Dacă presupunem în plus că $\mu(T) < \infty$, atunci: $\{f_n\}_n$ convergent la f μ-a.p.t. $\Rightarrow \{f_n\}_n$ convergent la f μ-aproape uniform (*teorema lui Egorov*); 3) $\{f_n\}_n$ convergent la f μ-aproape uniform $\Rightarrow \{f_n\}_n$ convergent la f în μ-măsură. Vom spune că $\{f_\delta\}_\delta$ este un șir generalizat *Cauchy μ-aproape uniform* (*fundamental μ-aproape uniform*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime μ-măsurabilă F cu proprietatea că $\mu(F) < \varepsilon$ și astfel încît $\{f_\delta\}_\delta$ este uniform Cauchy pe $T \setminus F$ (*i.e.* pentru orice $h > 0$ există $\delta(h)$ în Δ astfel încît pentru orice δ' și δ'' în Δ, $\delta' \geq \delta(h)$, $\delta'' \geq \delta(h)$ și pentru orice t în $T \setminus F$ avem $|f_{\delta'}(t) - f_{\delta''}(t)| < h$). Se presupune că f_δ sînt finite μ-a.p.t. Avem implicațiile: 1) $\{f_\delta\}_\delta$ convergent μ-aproape uniform la $f \Rightarrow \{f_\delta\}_\delta$ fundamental μ-aproape uniform; 2) $\{f_n\}_n$ șir de funcții fundamental în μ-măsură $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ există un subșir $\{f_{n_k}\}$ fundamental μ-aproape uniform. Pentru convergența în medie de ordin p (*i.e.* convergența în $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ sau în $L^p(\mu)$ (v. **spații** L^p, **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ **și** $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon)). (*I. C.*)

tonou v. **spațiu tonelat**

topologia convergenței compacte v. **spațiu local convex, topologii de convergență uniformă**

topologia convergenței mărginite v. **topologii de convergență uniformă**

topologia convergenței punctuale v. **topologii de convergență uniformă**

topologia convergenței simple v. **topologia vagă, topologii de convergență uniformă**

topologia convergenței uniforme v. **topologii de convergență uniformă, spațiul funcțiilor continue cu suport compact**

topologia definită de o mulțime de seminorme v. **spațiu local convex**

topologia discretă v. **topologie**

topologia generată de o mulțime de părți, topologia pentru care acea mulțime de părți este o subbază. Fie $\mathfrak{X}$ o mulțime și $\mathcal{A}$ o mulțime de părți ale lui $\mathfrak{X}$. Fie $\mathcal{B}$ mulțimea intersecțiilor finite de mulțimi din $\mathcal{A}$. Topologia generată de $\mathcal{A}$ este topologia pentru care $\mathcal{B}$ este o bază **de** mulțimi deschise. Topologia τ este generată de mulțimea $\mathcal{A}$ dacă și numai dacă τ este cea mai puțin fină topologie (pe $\mathfrak{X}$) în care mulțimile din $\mathcal{A}$ sînt deschise. (*Gh. Gr.*)

topologia indiscretă v. **topologie**

topologia inferioară a lui $\mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}$) v. **funcție semicontinuă**

topologia local plină asociată v. **spațiu liniar ordonat topologic**

topologia local solidă asociată v. **spațiu liniar reticulat topologic**

topologia lui Mackey v. **sistem dual de spații liniare**

topologia (*o*)-**mărginirii** (pe un spațiu liniar ordonat X), cea mai fină topologie local convexă pe X, pentru care orice mulțime (*o*)-mărginită este mărginită topologic. O bază de vecinătăți ale originii pentru **t.**(*o*) **m.** este mulțimea tuturor submulțimilor $E \subset X$ care sînt echilibrate, convexe și care au proprietatea: pentru orice submulțime (*o*) mărginită $A \subset X$ există un număr $\varepsilon > 0$ astfel ca $\varepsilon A \subset E$. Dacă X este un spațiu liniar dirijat arhimedian în care există un element axial u, atunci funcționala lui Minkowski asociată segmentului (în sensul ordinei) $[-u, u]$ este o normă care definește **t.** (*o*) **m.** pe X; în particular **t.**(*o*) **m.** este, în acest caz, local plină. Dacă X este un spațiu liniar reticulat, atunci **t.** (*o*) **m.** pe X este local solidă și este cea mai fină topologic pe X care este, în același timp, local convexă și local solidă. Dacă într-un spațiu liniar reticulat arhimedian X există elemente axiale, atunci convergența cu regulator pentru șiruri de elemente din X coincide cu convergența în **t.**(*o*)-**m.** Dacă X este un spațiu reticulat local convex care este bornologic (ca spațiu local convex), atunci pentru ca topologia sa să coincidă cu **t.**(*o*) **m.** este necesar și suficient ca orice seminormă solidă pe X să fie mărginită pe orice submulțime topologic mărginită a lui X. (*R. C.*)

topologia normei v. **spațiu liniar normat**

topologia obișnuită a lui $\mathbb{R}$ v. **topologie**

topologia obișnuită a lui $\mathbb{R}^n$ v. **topologie produs, distanță**

topologia slabă v. **sistem dual de spații liniare, conjugatul unui spațiu local convex**

topologia slăbită v. **sistem dual de spații liniare**

topologia superioară a lui $\mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}$) v. **funcție semicontinuă**

topologia tare v. **sistem dual de spații liniare**

topologia trivială v. **topologie**

topologia vagă Fie T un spațiu local compact, $K(T)$ spațiul funcțiilor continue cu suport compact pe T și $\mathcal{M}(T)$ spațiul vectorial al măsurilor Radon pe T. Pe spațiul $\mathcal{M}(T)$ se consideră topologia local convexă separată $\sigma(\mathcal{M}(T), K(T))$ care se numește **t.v.** (sau *topologia convergenței simple*) pe spațiul $\mathcal{M}(T)$. Un sistem fundamental de vecinătăți ale lui 0 în **t. v.** este dat de mulțimile de forma

$$V(f_1, f_2, \ldots, f_n; \varepsilon) = \{\mu \in \mathcal{M}(T) \mid |\mu(f_i)| \leqslant \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

unde f_i sînt în $K(T)$ și $\varepsilon > 0$. Aplicația $t \to \varepsilon_t$ este un homeomorfism al lui T pe $\{\varepsilon_t \mid t \in T\}$ cu topologia indusă de **t.v.** Aici ε_t este măsura Dirac concentrată în t. *(I. C.)*

topologie Fie $\mathcal{X}$ o mulțime și $\mathcal{T}$ o familie de părți ale lui $\mathcal{X}$ avînd proprietățile: i) $\mathcal{X}, \emptyset \in \mathcal{T}$; ii) Intersecția oricăror două elemente din $\mathcal{T}$ este un element din $\mathcal{T}$; iii) Reuniunea oricărei familii de elemente din $\mathcal{T}$ este un element din $\mathcal{T}$. Se spune că $\mathcal{T}$ generează pe $\mathcal{X}$ o *structură topologică* τ, pe scurt o **t.** Unii autori numesc **t.** *pe* $\mathcal{X}$ orice familie $\mathcal{T}$ cu proprietățile i)–iii). O pereche $(\mathcal{X}, \tau)$ în care $\mathcal{X}$ este o mulțime iar τ o **t.** pe $\mathcal{X}$ se numește *spațiu topologic*. Dacă nu există posibilitatea unei confuzii, nu se mai precizează **t.** și se spune *spațiul topologic* $\mathcal{X}$. Orice element din familia $\mathcal{T}$ se numește *mulțime deschisă în topologia* τ (sau *mulțime* τ*-deschisă*) iar dacă nu există posibilitatea unei confuzii, *mulțime deschisă*. O mulțime V a spațiului topologic $\mathcal{X}$ se numește *vecinătate* a punctului $x \in \mathcal{X}$ dacă există o mulțime deschisă G astfel ca $x \in G \subset V$. Mai general, V este o vecinătate a mulțimii $A \subset \mathcal{X}$ dacă există o mulțime deschisă G astfel ca $A \subset G \subset V$. O submulțime G a spațiului topologic $\mathcal{X}$ este deschisă dacă și numai dacă este vecinătate pentru fiecare punct al său. Fie τ_1 și τ_2 două **t.** pe mulțimea $\mathcal{X}$. Dacă orice mulțime τ_1-deschisă este τ_2-deschisă se spune că **t.** τ_2 este *mai fină* decît **t.** τ_1 sau că τ_1 este *mai puțin fină* decît τ_2 și se notează $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Se spune, de asemenea, că τ_1 este *mai slabă* decît τ_2 sau că τ_2 este *mai tare* decît τ_1. Relația introdusă este o relație de ordine pe mulțimea **t.** (v. și **compararea topologiilor**). **T.** în care familia mulțimilor deschise este $\{\mathcal{X}, \emptyset\}$ se numește **t.** *indiscretă* sau **t.** *trivială* pe $\mathcal{X}$. **T.** generată de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, unde $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ este familia tuturor părților lui $\mathcal{X}$, se numește **t.** *discretă* pe $\mathcal{X}$. Familia reuniunilor de intervale deschise ale lui $\mathbb{R}$ generează o topologie pe $\mathbb{R}$, numită **t.** *obișnuită* a lui $\mathbb{R}$. *(Gh. Gr.)*

topologie cît Fie $(\mathcal{X}, \tau)$ un spațiu topologic, R o relație de echivalență pe $\mathcal{X}$, φ aplicația canonică definită pe $\mathcal{X}$ cu valori în $\mathcal{X}/R$. Se numește **t.c.** cea mai tare topologie pe $\mathcal{X}/R$ în care aplicația φ este continuă. Pentru această topologie se utilizează notația $\hat{\tau}$. Spațiul topologic $(\mathcal{X}/R, \hat{\tau})$ se numește *spațiu topologic cît*. Dacă $\mathcal{T}$ este familia de mulțimi deschise din $\mathcal{X}$, atunci $\hat{\mathcal{T}} = \{G \mid G \subset \mathcal{X}/R,\ \varphi^{-1}(G) \in \mathcal{T}\}$ este familia mulțimilor deschise în **t.c.** O mulțime A a lui $\mathcal{X}$ se numește *saturată* în raport cu relația de echivalență R dacă pentru orice $x \in A$ clasa de echivalență a lui x este inclusă în A. Atunci $\hat{\mathcal{T}} = \{\varphi(D) \mid D$ deschisă și saturată în $\mathcal{X}\}$. Relația de echivalență R se numește *închisă* dacă mulțimea $\{(x, y) \mid xRy\}$ este închisă în $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ înzestrat cu topologia produs. Dacă $\mathcal{X}$ este separat, φ este deschisă iar R este închisă, atunci $(\mathcal{X}/R, \hat{\tau})$ este un spațiu topologic separat. Fie $\mathcal{Y}$ un spațiu topologic și $f\colon \mathcal{X}/R \to \mathcal{Y}$. Aplicația f este continuă dacă și numai dacă $f \circ \varphi$ este continuă. Ex.: 1° Fie $\mathcal{X}$ un spațiu liniar, p o seminormă pe $\mathcal{X}$, τ topologia generată de această seminormă, $N = p^{-1}(0)$. Fie pe $\mathcal{X}$ relația de echivalență $xNy \Leftrightarrow x - y \in N$. **T.c.** pe $\mathcal{X}/N$ este generată de norma $\|\hat{x}\| = p(x)$, $x \in \hat{x}$,

$\hat{x} \in \mathcal{X}/N$. 2° Fie $\mathcal{X} = [0, 2\pi]$ cu topologia indusă din $\mathbb{R}$ și pe $\mathcal{X}$ relația de echivalență

$$R = \{(x, x) \mid x \in (0, 2\pi)\} \cup \{(0; 2\pi)\}.$$

Spațiul topologic cît $\mathcal{X}/R$ este homeomorf cu $\{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ înzestrată cu topologia indusă din $\mathbb{C}$. 3° Fie $\mathcal{X}$ un spațiu liniar normat, $\mathcal{Y}$ un subspațiu închis în $\mathcal{X}$ și $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{Y}$. **T. c.** pe $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ este generată de norma $\|\hat{x}\| = \inf\{\|x\| \mid x \in \hat{x}\}$, $\hat{x} \in \mathcal{X}/\mathcal{Y}$. *(Gh. Gr.)*

topologie compatibilă cu dualitatea v. sistem dual de spații liniare

topologie (o)**-continuă v. spațiu liniar ordonat topologic**

topologie (ω)**-continuă v. spațiu liniar reticulat topologic**

topologie finală v. topologie inductivă

topologie inductivă Fie $\mathcal{X}$ o mulțime, $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ o familie de spații topologice și pentru fiecare $i \in I$ fie $f_i\colon \mathcal{X}_i \to \mathcal{X}$. Se numește **t.i.** (sau *topologie finală*) generată de familia $\{f_i\}_{i \in I}$ cea mai fină topologie pe $\mathcal{X}$ în care toate aplicațiile f_i sînt continue. Dacă se notează cu $\mathcal{T}_i$ familia mulțimilor deschise din $\mathcal{X}_i$, atunci $\mathcal{T} = \{G \mid f_i^{-1}(g) \in \mathcal{T}_i,\ \forall i \in I\}$ este familia mulțimilor deschise în **t. i.** generată de $\{f_i\}_{i \in I}$. În particular, dacă $(\mathcal{Y}, \tau)$ este un spațiu topologic și $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, atunci **t.i.** generată de f se numește *imaginea topologiei* τ prin funcția f. Topologia cît este un exemplu de astfel de topologie. O funcție g definită pe spațiul $\mathcal{X}$ înzestrat cu **t. i.** generată de $\{f_i\}_{i \in I}$, cu valori într-un spațiu topologic, este continuă dacă și numai dacă toate funcțiile $g \circ f_i$ sînt continue. *(Gh. Gr.)*

topologie indusă Fie $(\mathcal{X}, \tau)$ un spațiu topologic și $\mathcal{T}$ familia mulțimilor deschise din $\mathcal{X}$. Fie $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. Topologia dată pe $\mathcal{Y}$ de familia de mulțimi $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}} = \{\mathcal{Y} \cap D \mid D \in \mathcal{T}\}$ se numește **t. i.** pe $\mathcal{Y}$ de topologia τ și se notează $\tau_{\mathcal{Y}}$. Se mai spune că $\tau_{\mathcal{Y}}$ este *restricția* topologiei τ la $\mathcal{Y}$ sau *urma* topologiei τ pe $\mathcal{Y}$. Orice element din $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ se numește *mulțime deschisă în* $\mathcal{Y}$. Orice submulțime a lui $\mathcal{Y}$, închisă în $\tau_{\mathcal{Y}}$, se numește *mulțime închisă* în $\mathcal{Y}$ sau $\tau_{\mathcal{Y}}$-închisă. Fie $A \subset \mathcal{Y}$. Mulțimea A este $\tau_{\mathcal{Y}}$-închisă dacă și numai dacă există $F \subset \mathcal{X}$, F închisă, astfel încît $A = F \cap \mathcal{Y}$. Punctul $y \in \mathcal{Y}$ este punct de acumulare al lui A în topologia $\tau_{\mathcal{Y}}$ dacă și numai dacă y este punct de acumulare al lui A în topologia τ. Închiderea lui A în $\tau_{\mathcal{Y}}$ este intersecția dintre $\mathcal{Y}$ și închiderea lui A în $\mathcal{X}$. *(Gh. Gr.)*

topologie inițială v. topologie proiectivă

topologie liniară v. spațiu liniar topologic

topologie local convexă v. spațiu local convex

topologie local plină v. spațiu liniar ordonat topologic

topologie local solidă v. spațiu liniar reticulat topologic

topologie produs Fie $\{\mathcal{X}_j\}_{j \in J}$ o familie de spații topologice și $\mathcal{X} = \prod\limits_{j \in J} \mathcal{X}_j$ produsul cartezian al mulțimilor $\mathcal{X}_j$. Fie $\mathrm{pr}_j\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_j$ numită *aplicația de proiecție* pe $\mathcal{X}_j$, funcția definită prin $\mathrm{pr}_j(x) = x_j$, unde $x = \{x_j\}_{j \in J}$. Se numește **t. p.** cea mai puțin fină topologie pe $\mathcal{X}$ în care toate aplicațiile pr_j sînt continue. Mulțimea $\mathcal{X}$ cu **t. p.** se numește *spațiul topologic produs* (al spațiilor $\mathcal{X}_j$). Fie $\mathcal{T}_j$ familia mulțimilor deschise din $\mathcal{X}_j$. Familia $\mathcal{G} = \bigcup\limits_{j \in J} \{\mathrm{pr}_j^{-1}(D) \mid D \in \mathcal{T}_j\}$ este o subbază a **t. p.** Familia $\mathcal{D} = \{E \mid E = \prod\limits_{j \in J} G_j,\ G_j \in \mathcal{T}_j,\ \exists I \subset J,$ I finită, astfel încît $G_j = \mathcal{X}_j$ dacă $j \notin I\}$ este o bază pentru **t.p.** Se spune că elementele lui $\mathcal{D}$ sînt *mulțimi deschise elementare în* **t.p.** Aplicațiile pr_j sînt deschise. Spațiul topologic produs $\mathcal{X}$ este separat dacă și numai dacă toate spațiile $\mathcal{X}_j$ sînt separate. Orice produs de spații topologice cvasicompacte (compacte) este un spațiu topologic cvasicompact (compact) (*teorema lui Tihonov*). Fie $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ un șir generalizat în $\mathcal{X}$ și $x \in \mathcal{X}$. Șirul $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ converge către x dacă și numai dacă $\{\mathrm{pr}_j(x_\delta)\}_{\delta \in \Delta}$ converge către $\mathrm{pr}_j(x)$ pentru orice $j \in J$. Un produs numărabil de spații topologice semimetrizabile este un spațiu topologic semimetrizabil. Fie $\mathcal{Y}$ un spațiu topologic. O aplicație f definită pe $\mathcal{Y}$ cu valori în spațiul topologic produs $\mathcal{X}$ este continuă dacă și numai dacă toate aplicațiile $\mathrm{pr}_j \circ f$ sînt continue. Fie $A = \prod_{j \in J} A_j \subset \prod_{j \in J} X_j$. Atunci $\bar{A} = \prod_{j \in J} \bar{A}_j$. Fie spațiile topologice $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ și spațiul topologic produs $\mathcal{X} = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{X}_j$. Fie $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}$ și pentru fiecare x_i fie $\mathcal{V}x_i$ o bază de vecinătăți a lui x_i. Familia $\left\{ \prod_{i=1}^{n} V_i \mid V_i \in \mathcal{B}x_i \right\}$ este atunci o bază de vecinătăți a lui x. Ex.: 1° Fie $\mathbb{R}$ cu topologia obișnuită și $n \in \mathbb{N}$. Dacă în $\mathbb{R}^n$ s-a considerat **t.p.** se spune că $\mathbb{R}$ a fost înzestrat cu topologia obișnuită. Familia produselor carteziene de n intervale deschise din $\mathbb{R}$ constituie o bază pentru **t. p.** în $\mathbb{R}^n$. Orice normă pe $\mathbb{R}^n$ generează topologia obișnuită a lui $\mathbb{R}^n$. Analog se vorbește despre topologia obișnuită a lui $\mathbb{C}^n$ dacă pe $\mathbb{C}$ s-a considerat topologia obișnuită. 2° Fie $\mathcal{X}_0$ un spațiu topologic și $\mathcal{X}_j = \mathcal{X}_0$ pentru orice $j \in J$. Pentru spațiul produs $\mathcal{X} = \prod_{j \in J} \mathcal{X}_j$ se utilizează notația $\mathcal{X}_0^J$. Un șir $\{f_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ de elemente din spațiul topologic produs $\mathcal{X}$ converge către $f \in \mathcal{X}$ dacă și numai dacă $f_\delta(x) \to f(x)$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$. **T.p.** se mai numește în acest caz *topologia convergenței punctuale.* (*Gh. Gr.*)

topologie proiectivă Fie $\mathcal{X}$ o mulțime, $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ o familie de spații topologice și pentru fiecare $i \in I$, $f_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$. Se numește **t.p.** (sau *topologie inițială*) generată de familia $\{f_i\}_{i \in I}$, cea mai puțin fină topologie pe $\mathcal{X}$ în care toate funcțiile f_i sînt continue. Dacă se notează cu $\mathcal{T}_i$ familia mulțimilor deschise din $\mathcal{X}_i$, atunci $\{f_i^{-1}(G_i) \mid G_i \in \mathcal{T}, \ i \in I\}$ este o subbază pentru **t.p.** generată de familia $\{f_i\}_{i \in I}$. În particular, dacă $(\mathcal{Y}, \tau)$ este un spațiu topologic și $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, atunci **t.p.** generată de f este topologia în care familia mulțimilor deschise este $\{f^{-1}(G) \mid G$ deschisă în $\mathcal{Y}\}$. Această topologie se mai numește și *preimaginea topologiei* τ prin funcția f. În cazul în care $\mathcal{X} = \prod_{i \in I} \mathcal{X}_i$ iar pr_i este aplicația de proiecție pe $\mathcal{X}_i$, topologia generată de familia $\{\mathrm{pr}_i\}_{i \in I}$ este topologia produs pe $\mathcal{X}$. O funcție g definită pe un spațiu topologic $\mathcal{Y}$ cu valori în $\mathcal{X}$ înzestrat cu **t. p.** generată de $\{f_i\}_{i \in I}$ este continuă dacă și numai dacă toate funcțiile $f \circ g$ sînt continue. Dacă toate spațiile $\mathcal{X}_i$ sînt separate și dacă pentru orice puncte distincte $x, y \in \mathcal{X}$ există $i \in I$ astfel ca $f_i(x) \neq f_i(y)$, atunci **t.p.** generată de $\{f_i\}_{i \in I}$ este separată. (*Gh. Gr.*)

topologie uniformizabilă v. **structură uniformă**

topologii de convergență uniformă (într-un spațiu de operatori) Fie X o mulțime nevidă oarecare și Y un spațiu liniar topologic. Fie $F(X, Y)$ mulțimea tuturor funcțiilor care aplică X în Y. Mulțimea $F(X, Y)$ este un spațiu liniar în raport cu operațiile: $(U_1 + U_2)(x) = U_1(x) + U_2(x)$; $(\lambda U)(x) = \lambda U(x)$, $x \in X$, unde $U_1, U_2, U \in F(X, Y)$ iar λ aparține corpului scalarilor lui Y. Fie $\mathcal{G}$ un subspațiu liniar al spațiului $F(X, Y)$ și $\mathcal{M}$ o mulțime de submulțimi ale lui X astfel ca $U(A)$ să fie mărginită în Y oricare ar fi $U \in \mathcal{G}$ și $A \in \mathcal{M}$. Fie $\mathcal{W}$ o bază de vecinătăți echilibrate ale originii în spațiul Y și pentru orice $A \in \mathcal{M}$ și $W \in \mathcal{W}$ să punem $H(A, W) = \{U \in \mathcal{G} \mid U(A) \subset W\}$. Mulțimea tuturor mulțimilor de forma $\bigcap_{i=1}^{n} H(A_i, W_i)$ formează o bază de vecinătăți ale originii pentru o topologie liniară $\tau(\mathcal{M})$ în spațiul $\mathcal{G}$, numită *topologia convergenței uniforme* pe $\mathcal{M}$. Dacă mulțimea $\mathcal{M}$ este dirijată față de incluziune, atunci o bază de vecinătăți ale originii pentru topologia $\tau(\mathcal{M})$ este sistemul $\{H(A, W) \mid A \in \mathcal{M}, W \in \mathcal{W}\}$. Dacă $\mathcal{M}$ este mulțimea tuturor părților finite ale lui X, atunci $\tau(\mathcal{M})$ se numește *topologia convergenței simple* sau *topologia convergenței punctuale*. Să presupunem acum că și X este un spațiu liniar topologic cu același corp al scalarilor ca Y și fie $\mathcal{L}(X, Y)$ mulțimea operatorilor liniari și continui care aplică X în Y. Mulțimea $\mathcal{L}(X, Y)$ este un subspațiu liniar al spațiului $F(X, Y)$. Pentru orice mulțime $\mathcal{M}$ de submulțimi mărginite ale lui X se poate considera în $\mathcal{L}(X, Y)$ topologia $\tau(\mathcal{M})$ a convergenței uniforme pe $\mathcal{M}$. Dacă $\mathcal{M}$ este mulțimea tuturor submulțimilor mărginite ale lui X, atunci $\tau(\mathcal{M})$ se numește *topologia convergenței mărginite.* Dacă $\mathcal{M}$ este mulțimea tuturor submulțimilor compacte (resp. total mărginite), atunci $\tau(\mathcal{M})$ se numește *topologia convergenței compacte* (resp. *topologia convergenței total mărginite*). Dacă spațiul Y este locul convex, atunci pentru orice mulțime $\mathcal{M}$ de submulțimi mărginite ale lui X topologia $\tau(\mathcal{M})$ este local convexă. Dacă $\mathcal{P}$ este o mulțime de seminorme care definește topologia lui Y și dacă pentru orice $p \in \mathcal{P}$ și $A \in \mathcal{M}$ se pune $p_A(U) = \sup \{p(U(x)) \mid x \in A\}$, $U \in \mathcal{L}(X, Y)$, se obține o seminormă pe $\mathcal{L}(X, Y)$ iar topologia $\tau(M)$ este definită de mulțimea de seminorme $\{p_A \mid p \in \mathcal{P}, A \in \mathcal{M}\}$. Fie X și Y două spații liniare topologice oarecare (cu același corp al scalarilor) și $\mathcal{M}$ o mulțime de submulțimi mărginite ale lui X. Dacă $\mathcal{Z}$ este o submulțime egal continuă a spațiului $\mathcal{L}(X, Y)$, atunci urma topologiei convergenței total mărginite pe $\mathcal{Z}$ coincide cu urma topologiei simple; dacă Y este separat iar $\mathcal{Z}_0$ este închiderea mulțimii $\mathcal{Z}$ în spațiul $F(X, Y)$ înzestrat cu topologia convergenței simple, atunci $\mathcal{Z}_0$ este o mulțime egal continuă de operatori. Dacă X și Y sînt spații local convexe iar X este tonelat, atunci orice submulțime a lui $\mathcal{L}(X, Y)$ care este mărginită în topologia convergenței simple este egal continuă. (*R.C.*)

topos, o categorie $\mathcal{E}$ cu următoarele proprietăți: 1) $\mathcal{E}$ este cartezian închisă, *i.e.* are produse fibrate, obiect final e și, pentru orice obiect X din $\mathcal{E}$, functorul $Y \mapsto Y \times X$ de la $\mathcal{E}$ la $\mathcal{E}$ admite un adjunct la dreapta; 2) $\mathcal{E}$ admite un subobiect generic, *i.e.* există un obiect $\omega \in \mathcal{E}$ și un morfism $e \to \omega$ cu proprietatea că, pentru orice monomorfism $X \to S$ din $\mathcal{E}$, există un unic morfism $S \to \omega$ astfel încît $X \simeq S \times_\omega e$ ca obiecte peste S. Noțiunea de **t.** a fost introdusă de Grothendieck și ulterior lărgită de Lawhere. (*M. J.*)

traiectorie a unui sistem dinamic, imaginea unei soluții x a sistemului dinamic definit de $x' = f(x)$. Pentru un grup de transformări cu un parametru, traiectoria (orbita) unui punct p este mulțimea $\{T_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$. (*A. H.*)

traiectorie care trece printr-un punct v. sistem dinamic

transcendentele lui Painlevé, funcții analitice globale care apar ca integrale ale uneia oarecare din următoarele *ecuații ale lui Painlevé*:

1) $w'' = 6w^2 + z$,

2) $w'' = 2w^3 + zw + a$,

3) $w'' = \dfrac{w'^2}{w} + e^z(aw^2 + b) + e^{2z}\left(cw^3 + \dfrac{d}{w}\right)$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ și b sau $d \neq 0$,

4) $w'' = \dfrac{w'^2}{2w} + \dfrac{3}{2}w^3 - 4zw^3 + 2(z^2 - \alpha)w + \dfrac{\beta}{w}$,

5) $$w'' = w'^2\left[\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right] - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left[\alpha w + \frac{\beta}{w}\right] + \gamma\frac{w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1},$$

6) $$w'' = \frac{w'^2}{2}\left[\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right] - \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right]w' + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[\alpha + \beta\frac{z}{w^2} + \gamma\frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right];$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Notăm că, integralele ecuațiilor 1)—4) sînt funcții meromorfe pe $\mathbb{C}$, în timp ce integralele ecuației 5) au puncte critice transcendente în $z = 0$ și $z = \infty$, iar integralele ecuației 6) au puncte critice transcendente în $z = 0$, $z = 1$ și $z = \infty$. (*M. J.*)

transformare canonică, o transformare $\Phi: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ($\mathbb{R}^{2n}$ considerat ca spațiu fazelor: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = T^*(\mathbb{R}^n)$) care invariază parantezele Poisson. Dacă Φ este canonică, atunci (și numai atunci) jacobianul transformării este o aplicație simplectică (A este simplectică dacă $A^tJA = J$, unde $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, I fiind matricea identitate din $\mathbb{R}^n$). **T.c.** care joacă un rol important în mecanica analitică, generează în mod natural operatori integrali Fourier. (*G. G.*)

transformare conformă Fie D și Ω două domenii din planul complex $\mathbb{C}$. Se numește **t.c.** (sau *reprezentare conformă* sau *izomorfism analitic*) a lui D pe Ω orice funcție olomorfă și bijectivă definită pe D cu valori în Ω. Familia **t.c.** ale unui domeniu D pe el însuși formează grup față de operația de compunere a funcțiilor. Acest grup se va numi *grupul conform al domeniului* D. Grupul conform al planului complex $\mathbb{C}$ este format din toate funcțiile de forma $f(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Grupul conform al discului $B = \{z \mid |z| < r\}$ este format din toate funcțiile de forma $f(z) = \lambda\dfrac{r^2(z-a)}{r^2 - z\bar{a}}$, unde $a \in B$ iar $|\lambda| = 1$. Dacă D este un domeniu simplu conex, $D \neq \mathbb{C}$ și $A = \{z \mid |z| < 1\}$, există o **t.c.** a lui D pe A (*teorema de reprezentare conformă a lui Riemann*). (*Gh. Gr.*)

transformare decompozabilă v. **teorie ergodică**

transformare interioară, noțiune fundamentală în teoria topologică a funcțiilor de o variabilă complexă, introdusă de matematicianul român S. Stoilow. Dacă M și S sînt suprafețe topologice, o **t.i.** de la M la S este o aplicație $\varphi: M \to S$ cu proprietățile următoare: a) φ este continuă; b) φ este deschisă, *i.e.* mulțimea $\varphi(U)$ este deschisă în S pentru orice mulțime deschisă U în M; c) φ este 0-dimensională în sensul că fibrele lui φ sînt 0-dimensionale, *i.e.* pentru orice punct $s \in S$ fiecare componentă conexă a fibrei $\varphi^{-1}(s)$ se reduce la un punct.

Teorema lui Stoilow. Fie dată aplicația $\varphi: M \to S$, unde M este o suprafață topologică și S sfera lui Riemann. Condițiile următoare sînt echivalente: i) φ este o **t.i.**; ii) Există o structură de suprafață riemanniană abstractă pe M astfel încît φ să devină o aplicație olomorfă; iii) Există o funcție analitică globală f și o factorizare

$$\varphi = \pi \circ h: M \xrightarrow{h} R \xrightarrow{\pi} S,$$

unde (R, π) este suprafața riemanniană a lui f și h un omeomorfism. Această teoremă a lui Stoilow furnizează o soluție pentru problema caracterizării topologice a funcțiilor analitice, cunoscută sub numele de *problema lui Brouwer*. În cazul cînd suprafața topologică M este de gen zero, teorema lui Stoilow se poate enunța astfel: O aplicație $\varphi: M \to S$ este o **t.i.** dacă și numai dacă φ admite o factorizare

$$\varphi = \pi \circ h: M \xrightarrow{h} R \xrightarrow{\pi} S,$$

unde R este o submulțime deschisă a lui S, π o aplicație olomorfă neconstantă și h un omeomorfism. (*M. J.*)

transformare metrică tranzitivă v. **teorie ergodică**

transformare normală (în spații euclidiene), transformare T bijectivă a unui domeniu dintr-un plan Ouv într-un domeniu dintr-un plan Oxy, dată de funcții $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ continue, cu derivate parțiale de primul și al doilea ordin continue astfel încît jacobianul transformării T nu se anulează în nici un punct din interiorul domeniului considerat în planul Ouv. Intervine în teorema de schimbare de variabile la integrala dublă. Extensie la spații de dimensiune superioară. (*S. M.*)

transformare omografică, funcție complexă de forma $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ unde a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ (dacă $ad = bc$ funcția f este constantă). Sin.: *funcție omografică* sau *transformare Möbius*. Se prelungește la $\widetilde{\mathbb{C}}$ astfel: dacă $c \neq 0$, $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$, $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$; dacă $c = 0$, $f(\infty) = \infty$. Orice **t.o.** este o bijecție de la $\widetilde{\mathbb{C}}$ la $\widetilde{\mathbb{C}}$. Orice **t.o.** se poate obține compunînd următoarele funcții: $t(z) = z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (*translație*); $o(z) = rz$ unde $r \in \mathbb{R}_+$ (*omotetie de centru zero*); $r(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in [0, 2\pi)$ (*rotație*). Se pot folosi și: $s(z) = \bar{z}$ (*simetrie față de axa reală*); $i(z) = \dfrac{1}{z}$ (*inversiune de centru zero și modul 1*). Compunerea a două **t.o.** este tot o **t.o.** Dacă Δ este un cerc în $\widetilde{\mathbb{C}}$, atunci $f(\Delta)$ este un cerc în $\widetilde{\mathbb{C}}$, pentru orice funcție omografică f (dreptele se consideră cercuri cu centrul ∞ și rază ∞). Dacă $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, distincte două cîte două, atunci $\dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ se numește *raport anarmonic* al numerelor z_1, z_2, z_3, z_4 și se notează (z_1, z_2, z_3, z_4). Orice **t.o.** invariază raportul anarmonic, în sensul că: $(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Pentru orice trei puncte distincte

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ și orice alte trei puncte distincte $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}$, există și este unică o **t.o.** f, astfel ca $f(z_j) = v_j$ pentru orice $f \in \{1, 2, 3\}$ iar f verifică ecuația

$$\frac{f(z) - v_1}{f(z) - v_2} \cdot \frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Dacă pentru $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ are loc $f(w) = w$, se spune că w este punct fix al **t.o.** f. Punctele fixe ale **t.o.** f sînt soluțiile (în $\widetilde{\mathbb{C}}$) ale ecuației $cz^2 + (d - a)z - b = 0(*)$. Ecuația precedentă are cel mult două rădăcini în $\widetilde{\mathbb{C}}$. Dacă o **t.o.** are punct fix unic în $\widetilde{\mathbb{C}}$ ea se numește *parabolică*. Dacă $c = 0$ se spune că **t.o.** are pe ∞ ca punct fix, celălalt punct fix fiind $\dfrac{b}{d - a}$ dacă $a \neq d$. Dacă $c = 0$ și $a = d$ se spune că **t.o.** are punct fix dublu la ∞. În acest caz $f(z) = z + \lambda$ și f se consideră parabolică. Dacă **t.o.** f are cel puțin trei puncte fixe, distincte două cîte două, atunci ea este identitatea și deci dacă două **t.o.** coincid în cel puțin trei puncte sînt identice. Dacă **t.o.** are două puncte fixe distincte z_1 și z_2, atunci

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = \frac{z - z_1}{u - z_2} \frac{a - cz_1}{a - cz_2}.$$

Numărul $k(f) = \dfrac{a - cz_1}{a - cz_2}$ se numește *multiplicatorul* lui f și este $\neq 1$ pentru **t.o.** neparabolice. În funcție de $k(f)$, **t.o.** neparabolice se clasifică astfel: **t.o.** f se numește *hiperbolică* dacă $k(f) \in \mathbb{R}_+$, $k(f) \neq 1$; *eliptică* dacă $|k(f)| = 1$ și $k(f) \in \mathbb{R}$; *loxodromică* dacă $|k(f)| \neq 1$ și $k(f) \notin \mathbb{R}$. (Identitatea este, prin definiție, o **t.o.** parabolică.) *(Gh. Gr.)*

transformarea Fourier (în $\mathbb{R}^n$) Fie $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ o funcție integrabilă în raport cu măsura Lebesgue m. *Transformata Fourier* a funcției u este funcția $F(u): \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definită prin

$$F(u)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i<x, y>} u(y)\, dm(y),$$

unde, dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sînt în $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ este produsul scalar obișnuit. Notăm că integrala de mai sus există. Unii autori scriu $\mathcal{F}u$ în loc de $F(u)$. Uneori se definește transformata Fourier prin

$$F(u)(x) = \int e^{-i<x, y>} u(y)\, dm(y).$$

Transformata Fourier inversă a lui u este funcția $F^-(u): \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definită prin

$$F^-(u)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i<x, y>} u(y)\, dm(y).$$

O funcție $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se numește ***rapid descrescătoare la infinit*** dacă este de clasă C^∞ și are proprietatea că pentru orice număr natural k și pentru orice numere întregi pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ avem

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^k \left| \frac{\partial^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} u}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \ldots \partial x_n^{a_n}} (x) \right| < \infty.$$

Aici $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Orice funcție rapid descrescătoare la infinit este m-integrabilă. Notăm cu $S(\mathbb{R}^n)$ spațiul vectorial al tuturor funcțiilor rapid descrescătoare la infinit. Funcția $x \to e^{-\|x\|^2}$ este în $S(\mathbb{R}^n)$. Pentru orice $u \in S(\mathbb{R}^n)$ avem $F(u) \in S(\mathbb{R}^n)$ și $F^-(u) \in S(\mathbb{R}^n)$. Pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere întregi pozitive și orice funcție u de clasă C^∞ vom scrie

$$D^{a_1, a_2, \ldots, a_n} u = \frac{\partial^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} u}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \ldots \partial x_n^{a_n}}.$$

De asemenea, pentru orice număr complex c și orice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ întregi pozitive vom defini funcția $(cJ)^{a_1, a_2, \ldots, a_n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ prin

$$(cJ)^{a_1, a_2, \ldots, a_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}.$$

Atunci, pentru orice u și v din $S(\mathbb{R}^n)$ avem relațiile:

a) $D^{a_1, a_2, \ldots, a_n} F(u) = F((-iJ)^{a_1, a_2, \ldots, a_n} u)$;

a′) $D^{a_1, a_2, \ldots, a_n} F^-(u) = F^-((iJ)^{a_1, a_2, \ldots, a_n} u)$;

b) $F(D^{a_1, a_2, \ldots, a_n} u) = (iJ)^{a_1, a_2, \ldots, a_n} F(u)$;

b′) $F^-(D^{a_1, a_2, \ldots, a_n} u) = (iJ)^{a_1, a_2, \ldots, a_n} F^-(u)$;

c) $F(u * v) = (2\pi)^{n/2} F(u) F(v)$;

c′) $F^-(u * v) = (2\pi)^{n/2} F^-(u) F^-(v)$;

d) $F(uv) = (2\pi)^{-n/2} F(u) * F(v)$;

d′) $F^-(uv) = (2\pi)^{-n/2} F^-(u) * F^-(v)$;

e) $F(F^-(u)) = u$;

e′) $F^-(F(u)) = u$.

Pentru o prezentare în cadru abstract (v. **transformarea Fourier** (pentru măsuri Radon)). *(I. C.)*

transformarea Fourier (pentru măsuri Radon) Fie G un grup local compact și comutativ cu unitate e. Vom nota cu $\hat{G}$ grupul caracterelor lui G și cu $\mathcal{M}^1(G)$ spațiul vectorial al măsurilor Radon mărginite pe G, iar μ va fi măsura Haar pe G. Pentru orice m din $\mathcal{M}^1(G)$, *transformata Fourier* a lui m este funcția $\hat{m}: \hat{G} \to \mathbb{C}$ definită prin $\hat{m}(u) = \int u(x)\, dm(x)$. Aplicația $m \to \hat{m}$ se numește **t.F.** În particular, dacă $\tilde{f} \in L^1(\mu)$ și $m = f\mu$ (v. **măsură Radon definită prin densități**) transformata Fourier a funcției f este transformata Fourier a măsurii Radon m și se notează prin $\hat{f}$. Cu alte cuvinte, $\hat{f}\colon \hat{G} \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(u) = \int u(x) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$. Remarcăm că dacă f și f' coincid μ-a.p.t., atunci $\hat{f}$ și $\hat{f}'$ coincid, deci putem spune că $\hat{f}$ este transformata Fourier a lui $\hat{f}$ din $L^1(\mu)$. Se arată că pentru orice măsură m din $\mathcal{M}^1(G)$, $\hat{m}$ este o funcție mărginită (avem $|\hat{m}(u)| \leqslant \|m\|$ pentru orice u din $\hat{G}$) și uniform continuă (pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui $\hat{e}$ astfel încît oricare ar fi u din $\hat{G}$ și oricare ar fi v din V avem $|\hat{m}(u) - \hat{m}(vu)| < \varepsilon$; aici $\hat{e}$ este caracterul identic egal cu 1 pe G). Pentru orice f din $\mathcal{L}^1(\mu)$ avem $\|f\|_\infty = \lim\limits_{n} (\|f^n\|_1)^{1/n}$, unde $f^n = f * f * f * \ldots * f$ (de n ori). Pentru cele ce urmează v. **spații** $\mathcal{L}^p(\mu)$ și $L^p(\mu)$ (în raport cu o măsură Radon). Să notăm $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) \mid f$ este funcție de tip pozitiv$\}$ (v. **funcție de tip pozitiv**). Se arată că spațiul vectorial generat de $\mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{P}$, pe care îl vom nota prin $\mathcal{S}(\mu)$, este dens în $\mathcal{L}^2(\mu)$. Fie atunci, luînd clasele de echivalență de egalitate μ-a.p.t., $S(\mu) = \{\widetilde{f} \mid f \in \mathcal{S}(\mu)\} \subset L^2(\mu)$. Rezultă că $S(\mu)$ este dens în $L^2(\mu)$. Se arată că există o măsură Haar ν, convenabilă pe $\hat{G}$, cu proprietatea următoare: pentru orice funcție f din $\mathcal{S}(\mu)$ rezultă că $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\nu)$ și avem pentru μ-aproape orice x din G egalitatea

$$f(x) = \int u(x)\, \hat{f}(u)\, \mathrm{d}\nu(u) \quad \textit{(formula de inversiune a lui Fourier).}$$

Cu aceleași notații, avem și
Teorema lui Plancherel. Există o bijecție liniară și izometrică $V\colon L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ cu proprietatea că pentru orice $\widetilde{f}$ în $S(\mu)$ avem $V(\widetilde{f}) = \widetilde{\hat{f}}$ (= clasa transformatei Fourier $\hat{f}$ calculată în $L^2(\nu)$). Ex.: Vom lua $G = \mathbb{R}^n$ cu structura de grup aditiv și măsura Lebesgue drept măsură Haar. Se știe că $\hat{G}$ este izomorf cu $\mathbb{R}^n$ (v. **grupul caracterelor unui grup comutativ**). Atunci, dacă $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ este integrabilă Lebesgue, transformata sa Fourier poate fi definită, luînd un număr real nenul a fixat, după cum urmează:

$$\hat{f}\colon \hat{G} \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(T_y^a) = \int T_y^a(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\langle x,\, y\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Identificînd pe $\hat{G}$ cu $\mathbb{R}^n$ vom considera transformata Fourier a lui f definită pe $\mathbb{R}^n$, deci

$$\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(y) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\langle x,\, y\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pentru $a = 1$, se obține

$$\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(x) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\, t\rangle} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

iar pentru $a = -1$ se obține

$$\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(x) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\, t\rangle} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Din rațiuni de calcul, se consideră transformata Fourier $\hat{f}$ a unei funcții integrabile Lebesgue $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ca fiind definită prin $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\, t\rangle} f(t)\,\mathrm{d}t. \quad (I.\ C.)$$

transformarea în coordonate polare v. **integrală multiplă**

transformarea în coordonate sferice v. **integrală multiplă**

transformarea Laplace, operator liniar ce constituie un instrument de bază în calculul funcțional. Fie $\mathcal{L}$ mulțimea funcțiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avînd proprietățile: i) $f(t) = 0$ dacă $t < 0$; ii) Pe orice interval mărginit din $[0, \infty)$ funcția f are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate; iii) Există M, $\lambda > 0$ astfel ca $|f(t)| \leqslant M\mathrm{e}^{\lambda t}$ pentru orice $t \geqslant 0$. Cu operațiile algebrice definite punctual, $\mathcal{L}$ este spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$ și conține, spre exemplu, funcțiile mărginite și continue pe $[0, \infty)$ sau funcțiile de forma t^α, $\mathrm{e}^{\gamma t}$, $t^\alpha \mathrm{e}^{\gamma t}$ $(\alpha > -1)$ pe $[0, \infty)$. Pentru $f \in \mathcal{L}$, funcția $\Phi(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$, se numește *transformata Laplace* a funcției f. Aplicația $f \to \Phi$ se numește **t.L.** Funcția Φ este definită și olomorfă pe semiplanul $\{\mathrm{Re}\, z > \lambda\} \subset \mathbb{C}$ (unde λ este cel din iii)), ceea ce, mai puțin precis, se exprimă prin: „definită pentru $\mathrm{Re}\, z$ suficient de mare". Se notează $\Phi = L(f)$ sau $f \doteqdot \Phi$ sau $f \to \Phi$. Analogia unor proprietăți cu cele ale transformatei Fourier rezultă din observația că $\Phi(s)$ este transformata Fourier a funcției $f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$ $(z = \alpha + \mathrm{i}\beta')$. Formulele următoare sînt valabile pentru $\mathrm{Re}\, z$ suficient de mare:

1) $L\left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f_j\right)(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j L(f_j)(z)$, $c_j \in \mathbb{C}$, $f_j \in \mathcal{L}$;

2) $L(f_s)(z) = \mathrm{e}^{-sz} L(f)(z)$, unde pentru $s > 0$, $f_s(t) = f(t - s)$;

3) Dacă $\alpha > 0$, $f \in \mathcal{L}$ și $g(t) = f(\alpha t)$, atunci $L(g)(z) = (1/\alpha)\, L(f)(z/\alpha)$;

4) $L(f')(z) = zL(f)(z) - zf(0)$;

5) $L\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)(z) = (1/z)\, L(f)(z)$;

6) $L(tf)(z) = -z(Lf)'(z)$. (*Gh. Gr.*)

transformarea operatorilor diferențiali Cu ajutorul operatorilor integrali Fourier sau a celor microdiferențiali se pot reduce operatorii diferențiali (sau, mai general, pseudodiferențiali) la anumite forme standard fără a afecta rezolubilitatea lor locală sau proprietățile de regularitate ale soluțiilor. Un rezultat important în această direcție este
Teorema lui Egorov. Fie $a \in S^0 = S^0_{1,0}$ un simbol eliptic, Φ o transformare canonică (v. **transformare canonică**), iar F_Φ, respectiv $F_{\Phi^{-1}} = (F_\Phi)^*$ operatorii integrali Fourier asociați lui a și Φ. Se presupune că $\Phi\colon (x, \lambda\xi) \to (y, \lambda\eta)$, $\lambda > 0$, și că pentru $|\xi| = 1$, Φ este o perturbare suficient de mică a operatorului identic. Dacă $p(y, \eta)$ este un simbol din S^m, atunci $\widetilde{p}(x, \mathrm{D}) = F_{\Phi^{-1}} \circ p(y, \mathrm{D}) \circ F_\Phi$, unde simbolul lui p aparține de asemenea lui S^m și se poate alege $a(x, \xi)$ astfel încît $\widetilde{p}(x, \xi) = p \circ \Phi(x, \xi)$ modulo S^{m-1}.
Această teoremă are importante aplicații. Astfel, de exemplu, dacă **simbolul** $p(x, \xi)$ este de tip principal (*i.e.* simbolul principal $p_m(x, \xi)$ al lui $\boldsymbol{p(x, \xi)}$

are proprietatea că $p_m(x, \xi) = 0$, $\xi \neq 0$, implică grad $p_m(x, \xi) \neq 0$) şi real, atunci, local, există o transformare canonică, ca mai sus, astfel ca $p(x, \xi) = \eta_1$. Aceasta înseamnă că local studiul operatorului de tip principal $p(x, \mathrm{D})$ s-a redus la cel al operatorului simplu $\frac{\partial}{\partial y_1}$. Operatorii integrali Fourier utilizaţi în această reducere fiind eliptici proprietăţile de regularitate ale operatorului iniţial $p(x, \mathrm{D})$ se păstrează. O astfel de reducere nu poate fi realizată în general prin operatori pseudodiferenţiali. Rezultate mai puternice se obţin în cazul operatorilor cu coeficienţi analitici, mai precis, în cazul $\mathcal{E}$-modulelor (v. **operatori microdiferenţiali**). Ca o ilustrare a acestui fapt, fie $P(x, \mathrm{D})$ şi $Q(x, \mathrm{D})$ doi operatori pseudodiferenţiali de ordin m, cu aceeaşi parte principală, şi astfel ca vectorul $\mathrm{grad}_{(x, \xi)}\, P(x, \xi)$ să nu fie paralel cu vectorul $(0, \eta)$. Atunci, local, există operatori microdiferenţiali de ordin finit, inversabili, $R(x, \mathrm{D})$ şi $S(x, \mathrm{D})$ astfel ca $P(x, \mathrm{D})\, R(x, \mathrm{D}) = S(x, \mathrm{D})\, Q(x, \mathrm{D})$ (enunţ cu totul analog teoremei lui Egorov). Mai general, pentru $\mathcal{E}$-module admisibile (*i.e.* $\mathcal{E}$-module $\mathcal{M}$ care local sînt de forma $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^f} \widetilde{\mathcal{M}}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ fiind un $\mathcal{E}^f$-modul, unde cu $\mathcal{E}^f$ s-a notat fascicolul operatorilor microdiferenţiali de ordin finit) ce verifică unele condiţii naturale privind varietatea caracteristică char $\mathcal{M} = V$ şi pentru care forma Levi generalizată are signatură constantă (q, p) (Dacă V este dat de ecuaţiile $f_1 = \ldots = f_d = 0$, forma Levi generalizată este, prin definiţie, forma $L(\xi) = \sum_{i \leqslant j, k \leqslant d} \{f_j, f_k\}\, (x, \mathrm{i}\eta)\, \xi^j \xi^k$, unde $\{f_j, f_k\}$ este paranteza Poisson a funcţiilor f_i, f_k, are loc următorul rezultat.

Teorema Sato-Kashiwara-Kawai. Un sistem M, ca mai sus, este microlocal izomorf cu un sumand direct al unei sume directe de sisteme $\mathcal{M}_0$ care în vecinătatea punctului $(x, \mathrm{i}\eta) = (0, 0, \ldots, 0, i) \in \mathrm{i}S^*\Omega$ are forma următoare:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u = 0, \quad j = 1, \ldots, d \quad (\textit{operator de tip de Rham})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{r+2k-l}} + \mathrm{i}\, \frac{\partial}{\partial x_{r+2k}}\right) u = 0, \quad k = 1, \ldots, s$$

$$(\textit{operator de tip Cauchy-Riemann});$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{r+2k-1}} + \mathrm{i} x_{r+2s+l}\, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) u = 0, \quad l = 1, \ldots, q$$

$$(\textit{operator de tip Lewy-Mizohata});$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{r+2s+l}} - \mathrm{i} x_{r+2s+l}\, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0, \quad l = q + 1, \ldots, p + q,$$

unde $r = 2$ codim V − codim $(V \cap \overline{V})$, $s =$ codim $(V \cap \overline{V})$ − codim $V - (p + q)$. În acest mod, prin transformări analoage transformărilor canonice, numite de Sato transformări cuantizate de contact (unei astfel de transformări i se asociază în mod natural un operator microdiferenţial), orice $\mathcal{E}$-modul admisibil se reduce în esenţă la aceste tipuri; are deci loc o teoremă de structură locală a sistemelor supradeterminate generale, în cadrul analitic. (*G. G.*)

transformata Fourier a unei funcţii v. **transformarea Fourier** (pentru măsuri Radon), **transformarea Fourier** (în $\mathbb{R}^n$)

transformata Fourier a unei măsuri v. **transformarea Fourier** (pentru măsuri Radon)

transformata Fourier inversă a unei funcţii v. **transformarea Fourier** (în $\mathbb{R}^n$)

translator v. **operator regulat**

translaţie v. **transformare omografică**

trib v. **clasă de mulţimi**

trib ereditar v. **clasă de mulţimi**

trivializare locală v. **fibrat vectorial**

tub Dacă ω este o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, **t.** de bază ω în $\mathbb{C}^n$ este, prin definiţie, mulţimea deschisă $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Re}\, z \in \omega\}$, unde, pentru $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, se pune $\mathrm{Re}\, z = (\mathrm{Re}\, z_1, \ldots, \mathrm{Re}\, z_n)$. O teoremă importantă despre **t.** datorată lui Bochner afirmă următoarele: Fie Ω un **t.** deschis în $\mathbb{C}^n$ cu bază ω conexă şi fie $\widetilde{\Omega}$ **t.** de bază co (ω) (unde co (ω) este înfăşurătoarea convexă a lui ω). Atunci pentru orice funcţie olomorfă f pe Ω există o funcţie olomorfă F pe $\widetilde{\Omega}$ astfel încît $F = f$ pe Ω. O aplicaţie interesantă a teoremei lui Bochner este următoarea: Fie P o funcţie întreagă în $\mathbb{C}^n$ şi $A = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid P(\xi + \mathrm{i}\eta) \neq 0$ pentru orice $\eta \in \mathbb{R}^n\}$, unde $\xi + \mathrm{i}\eta = (\xi_1 + \mathrm{i}\eta_1, \ldots, \xi_n + \mathrm{i}\eta_n)$. Atunci toate componentele conexe ale mulţimii $\mathring{A}$ sînt convexe. (*M. J.*)

U, V, W

ultrafiltru (pe mulțimea X), filtru $\mathcal{U}$ avînd proprietatea următoare: oricare ar fi filtrul $\mathcal{F}$ pe X astfel încît $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ rezultă $\mathcal{F} = \mathcal{U}$. Un filtru $\mathcal{F}$ este u. dacă și numai dacă este element maximal al mulțimii filtrelor (pe X) organizată ca mulțime ordonată cu relația de incluziune. Pentru orice filtru $\mathcal{F}$ există $\mathcal{U}$ un u. astfel încît $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Fie $x \in X$. Familia de părți $\mathcal{U}_x = \{U \mid U \subset X,\ x \in U\}$ este un u. pe X. Un filtru $\mathcal{F}$ pe X este u. dacă și numai dacă una din următoarele afirmații este satisfăcută: i) $A \subset X$ și $A \cap F \neq \emptyset$ pentru orice $F \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$; ii) $A \subset X \Rightarrow A$ sau $X \setminus A$ aparține lui $\mathcal{F}$. Fie $f: X \to Y$ o aplicație surjectivă și $\mathcal{U}$ un u. pe X. Atunci $\{f(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ este un u. pe Y. Dacă $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este un șir generalizat universal în X, atunci

$$\{U \mid U \subset X \text{ există } \delta \in \Delta \text{ astfel ca } \{x_{\delta'} \mid \delta' \geqslant \delta\} \subset U\}$$

este un u. pe X. (*Gh.Gr.*)

unitate aproximativă pentru convoluție v. **algebră grupală**

unitate tare v. **spațiu reticulat cu unitate**

urma unei topologii v. **topologie indusă**

valoare absolută (pe un corp K), orice funcție f definită pe K cu valori reale pozitive, avînd proprietățile: i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; ii) $f(xy) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in K$; iii) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in K$. Se notează de obicei $f(x) = |x|$. Aplicația $d(x, y) = |x - y|$ este o distanță pe K. Perechea $(K, |\ |)$, unde K este un corp iar $|\ |$ o v.a. pe K se numește *corp valuat*. $(K, |\ |)$ se numește corp valuat *discret* dacă $|x| = 1$ pentru $x \neq 0$ și *nediscret* în caz contrar. (*Gh.Gr.*)

valoare critică v. **spațiu tangent**

valoare lacunară v. **spațiu tangent**

valoare proprie v. **număr propriu**

valoare regulată v. **spațiu tangent**

valoarea principală (a unei integrale improprii) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe orice interval compact. Dacă există și este finită limita $\lim\limits_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} f(x)\,dx$, această limită se numește v.p. a integralei $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ și se notează

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} f(x)\,dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Dacă $f: [a, b] \setminus \{c\}$ este integrabilă Riemann pe orice interval $I \subset [a, b] \setminus \{c\}$ și dacă există și este finită

$$\lim_{\varepsilon > 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right),$$

această limită se numește **v.p.** *a integralei improprii* $\int_a^b f(x)\,dx$ și se notează

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right) = \text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx. \quad (\textit{Gh.Gr.})$$

variabilă aleatoare v. **funcție măsurabilă în raport cu o măsură**

variabilă aleatoare normal distribuită v. **integrala stochastică**

variabilă aleatoare normală v. **integrala stochastică**

variabile aleatoare independente v. **integrala stochastică**

variația relativă la o diviziune Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ și fie Δ o diviziune $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ a lui $[a, b]$. Variația $\bigvee_\Delta(f)$ a funcției f relativă la diviziunea Δ este $\sum\limits_{i=1}^{n} |(f(x_i) - f(x_{i-1})|$. Prin trecerea la o diviziune mai fină variația crește. (*S.M.*)

variația totală (a unei funcții $f: [a, b] \to \mathbb{R}$), supremumul mulțimii variațiilor lui f relative la diferite diviziuni ale lui $[a, b]$. Se notează $\operatorname*{var}\limits_{t \in [a,b]} f(t)$ sau $\bigvee\limits_a^b f$. **V.t.** este finită numai în cazul funcțiilor cu variație mărginită. Fiind dată o funcție f derivabilă cu derivata integrabilă Riemann, **v.t.** a lui f pe $[a, b]$ este $\int_a^b |f'(x)|\,dx$. (*S.M.*)

variație; cvasivariație; semivariație Vom considera o măsură aditivă $m: \mathcal{A} \to X$, unde $\mathcal{A}$ este clan de părți ale lui T și X este spațiu Banach. Funcției de mulțime m i se atașează în mod canonic:

1) *Cvasivariația* lui m este funcția de mulțime $\tilde{\tilde{m}}: \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin $\tilde{\tilde{m}}(A) = \sup\{\|m(B)\| \mid B \in \mathcal{A},\ B \subset A\}$. Este clar că m este măsură local mărginită dacă și numai dacă m este măsură cu cvasivariație finită, *i.e.* $\tilde{\tilde{m}}(A) < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$. Similar, m este măsură mărginită dacă și numai dacă m este măsură cu cvasivariație mărginită, *i.e.* $\tilde{\tilde{m}}(T) < \infty$. Cvasivariația are proprietățile: $\tilde{\tilde{m}}(\emptyset) = 0$, $\tilde{\tilde{m}}$ este funcție de mulțime crescătoare iar restricția lui $\tilde{\tilde{m}}$ la $\mathcal{A}$ este finit subaditivă. Dacă m este măsură vectorială (deci numărabil aditivă) și dacă $\mathcal{A}$ este semitrib, atunci restricția lui $\tilde{\tilde{m}}$ la $\mathcal{A}$ este numărabil subaditivă și $\tilde{\tilde{m}}(A_n) \to 0$ pentru orice șir descrescător $\{A_n\}_n$ de mulțimi $A_n \in$ cu proprietatea că $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

2) *Variația* lui m este funcția de mulțime $\overline{m}: \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită prin

$$\overline{m}(A) = \sup\left\{\sum_{i \in I} \|m(A_i)\| \mid \{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{F}(A)\right\}.$$

Am notat prin $\mathcal{F}(A)$ mulțimea tuturor familiilor finite $\{A_i\}_{i \in I}$ de mulțimi mutual disjuncte $A_i \in \mathcal{A}$ cu proprietatea că $A_i \subset A$ pentru orice i în I. Dacă $A \in \mathcal{A}$, atunci

$$\overline{m}(A) = \sup\left\{\sum_{i \in I} \|m(A_i)\| \;\middle|\; \{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{F}(A) \text{ și } \bigcup_{i \in I} A_i = A\right\}.$$

Restricția lui $\overline{m}$ la $\mathcal{A}$ se notează cu $|m|$ și se numește *modulul* măsurii m. Pentru orice $A \subset T$ numim $\overline{m}(A)$ *variația* lui m pe A, iar $\overline{m}(T)$ se numește *variația totală* a lui m. Noțiunile coincid cu cele definite la măsuri reale extinse. Dacă $\overline{m}(T) < \infty$ spunem că măsura m este *măsură cu variație mărginită*, iar dacă $|m|(A) < \infty$, pentru orice $A \in \mathcal{A}$, spunem că m este *măsură cu variație finită*. O măsură aditivă cu variație mărginită este s-aditivă. Se arată că $\overline{m}$ este finit aditivă pe $\mathcal{A}_\lambda$, clasa locală generată de $\mathcal{A}$ (v. **clasă de mulțimi**), în sensul că $\overline{m}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \overline{m}(A_i)$, pentru orice familie finită $\{A_i\}_{i \in I}$ de mulțimi mutual disjuncte $A_i \in \mathcal{A}_\lambda$. Dacă m este numărabil aditivă, atunci $\overline{m}$ este numărabil aditivă pe $\mathcal{A}_\lambda$ (*i.e.* $\overline{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}(A_n)$ pentru orice șir $\{A_n\}_n$ de mulțimi mutual disjuncte, $A_n \in \mathcal{A}_\lambda$). Se arată că $\overline{m}$ este cea mai mică dintre funcțiile de mulțime $\mu : \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ care are proprietățile: μ este crescătoare, finit superaditivă și verifică inegalitatea $\|m(A)\| \leq \mu(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$. Dacă $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este măsură aditivă pozitivă, atunci $\overline{m}(A) = m(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$ și avem $\overline{m}(A) = \overline{\overline{m}}(A)$ pentru orice $A \subset T$. Dacă $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ este măsură reală aditivă, atunci pentru orice $A \subset T$ avem $\widetilde{\overline{m}}(A) \leqslant \overline{m}(A) \leqslant 2\widetilde{\overline{m}}(A)$, iar dacă $m : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ este măsură complexă aditivă avem $\widetilde{\overline{m}}(A) \leqslant \overline{m}(A) \leqslant 4\widetilde{\overline{m}}(A)$ pentru orice $A \subset T$. Rezultă că dacă $\mathcal{A}$ este semitrib și $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) este măsură scalară, atunci m este cu variație finită, iar dacă $\mathcal{A}$ este trib, atunci m este cu variație mărginită.

3) Pentru a defini semivariația unei măsuri vom considera trei spații Banach X, E și F astfel încît $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F) = \{V : E \to F \mid V$ este liniară și continuă$\}$, vom considera că există o aplicație liniară și izometrică $h : X \to \mathcal{L}(E, F)$ (se spune că X se scufundă în $\mathcal{L}(E, F)$). De exemplu, spațiul Banach X fiind dat, avem: a) $X \hookrightarrow X'' = \mathcal{L}(X', \Gamma)$, unde Γ este $\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$). Aici h este scufundarea canonică, $h(x) = x''$, unde $x''(x') = x'(x)$ pentru orice x' din X'; b) $X \hookrightarrow \mathcal{L}(\Gamma, X)$. Aici h este izomorfismul canonic dat de $h(x) = V$, unde $V(\alpha) = \alpha x$ pentru orice α din Γ. În aceste condiții $\widetilde{m}_{E,F} : \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\widetilde{m}_{E,F}(A) = \sup\left\{\left\|\sum_{i \in I} m(A_i)\,(x_i)\right\| \;\middle|\; \{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{F}(A) \text{ și } \{x_i\}_{i \in I} \in BF\right\},$$

unde $\mathcal{F}(A)$ a fost definită la variație și BF este mulțimea tuturor familiilor finite de elemente $x_i \in E$ cu $\|x_i\| \leqslant 1$. Aceeași remarcă asupra familiei $\{A_i\}_i$, în cazul cînd $A \in \mathcal{A}$, ca cea făcută la variație. Funcția $\widetilde{m}_{E,F}$ se numește *semivariația* măsurii m (relativ la scufundarea $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$). Se pot demonstra inegalitățile valabile pentru orice $A \subset T$ și orice spații Banach E, F astfel încît $X \hookrightarrow L(E, F)$): i) $\widetilde{m}_{\Gamma,X}(A) \leqslant \widetilde{m}_{E,F}(A) \leqslant \widetilde{m}_{X',\Gamma}(A) = \overline{m}(A)$; ii) $\widetilde{\overline{m}}(A) \leqslant \widetilde{m}_{E,F}(A)$; iii) $\widetilde{m}_{\Gamma,X}(A) \leqslant 4\widetilde{\overline{m}}(A)$. Dacă $m : \mathcal{A} \to X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, \Gamma) = E'$, atunci $\widetilde{m}_{E,\Gamma}(A) = \overline{m}(A)$ pentru orice $A \subset T$. Dacă $m : \mathcal{A} \to X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$, vom considera un subspațiu normant H al lui F' (*i.e.* $H \subset F'$ este un subspațiu vectorial și pentru orice $y \in F$ avem $\|y\| = \sup\{ |y'(y)| \; y' \in H$ și $\|y'\| \leqslant 1\})$. Pentru orice $y' \in H$ vom considera măsura finit aditivă $m_{y'} : \mathscr{A} \to E'$ dată prin $m_{y'}(A) = x'$, unde $x'(x) = y'(m(A)(x))$ pentru orice $A \in \mathscr{A}$ și $x \in E$. Se arată atunci că $\widetilde{m}_{\Gamma, X}(A) = \sup\{\overline{m}_{y'}(A) \mid y' \in H, \|y'\| \leqslant 1\}$. În cazul particular cînd $E = \Gamma$ și $F = X$, deci $X \hookrightarrow \mathscr{L}(\Gamma, X)$, vom lua $H = X'$ și, folosind izomorfismul între $\mathscr{L}(\Gamma, \Gamma)$ și Γ, vom identifica, pentru orice $x' \in X'$, măsura $m_{x'}$, definită mai sus, cu măsura scalară $x' \circ m : \mathscr{A} \to \Gamma$ dată prin $(x' \circ m)(A) = x'(m(A))$, ultima relație rămînînd valabilă și pentru $x' \circ m$ în loc de $m_{y'}$. Se arată că $m_{E, F}$ este finit subaditivă pe $\mathscr{A}_\lambda$, clasa locală generată de $\mathscr{A}$ (*i.e.* $\widetilde{m}_{E, F}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i \in I} \widetilde{m}_{E, F}(A_i)$ pentru orice familie finită $\{A_i\}_{i \in}$ de mulțimi $A_i \in \mathscr{A}_\lambda$. Dacă m este numărabil aditivă, atunci $\widetilde{m}_{E, F}$ este numărabil subaditivă pe $\mathscr{A}_\lambda$ $\left(i.e.\ \widetilde{m}_{E,F}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{m}_{E,F}(A_n)\right.$ pentru orice șir $\{A_n\}$ de mulțimi $\left.A_n \in \mathscr{A}_\lambda\right)$. Dacă $\widetilde{m}_{E, F}(A) < \infty$ pentru orice $A \in \mathscr{A}$ spunem că m este *măsură cu semivariație finită* (relativ la scufundarea $X \hookrightarrow \mathscr{L}(E, F)$), iar dacă $\widetilde{m}_{E, F}(T) < \infty$, spunem că m este *măsură cu semivariație mărginită* (relativ la scufundarea $X \hookrightarrow \mathscr{L}(E, F)$).

Teorema de mărginire a lui Nikodym. Fie $\mathscr{A}$ un trib de părți ale mulțimii nevide T și X un spațiu Banach. Considerăm o familie $\{m_i\}_{i \in I}$ de măsuri vectoriale aditive și mărginite $m_i : \mathscr{A} \to X$. Dacă pentru orice $A \in \mathscr{A}$ avem $\sup_{i \in I} \|m_i(A)\| < < \infty$, rezultă că $\sup_{i \in I} \widetilde{\widetilde{m}}_i(T) < \infty$ (echivalent cu faptul că $\sup_{i \in I} (\widetilde{m}_i)_{\Gamma, X}(T) < \infty$). (*I.C.*)

varietate abeliană v. **latice de perioade**

varietate analitică complexă, noțiune fundamentală a analizei complexe pluridimensionale care se obține printr-un procedeu de localizare operat în categoria avînd ca obiecte mulțimile deschise în spații numerice $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 0$, și ca morfisme aplicațiile olomorfe. Fie M un spațiu topologic separat. O *hartă complexă* (de dimensiune n) pe M este o aplicație $\alpha = (z_1, \ldots, z_n) : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ avînd ca *domeniu* U_α o submulțime deschisă a lui M, ca *imagine* $\alpha(U_\alpha)$ o submulțime deschisă a lui $\mathbb{C}^n$ și astfel încît aplicația $U_\alpha \to \alpha(U_\alpha)$ indusă de α să fie un omeomorfism. O *structură complexă* sau o *structură* $\mathbb{C}$*-analitică* pe M este o mulțime $\mathscr{A}$ de hărți complexe pe M satisfăcînd condițiile următoare: 1) Toate hărțile $\alpha \in \mathscr{A}$ au aceeași dimensiune; 2) Pentru orice pereche de hărți $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$, aplicația de tranziție $\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ este olomorfă, deci un izomorfism analitic; 3) Domeniile hărților $\alpha \in \mathscr{A}$ formează o acoperire a mulțimii M; 4) Dacă β este o hartă complexă pe M și dacă aplicația $\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ este un izomorfism analitic pentru orice $\alpha \in \mathscr{A}$, atunci $\beta \in \mathscr{A}$. O mulțime $\mathscr{A}_0$ de hărți complexe pe M satisfăcînd condițiile 1) — 3) se numește *atlas complex* sau *atlas* $\mathbb{C}$*-analitic* pe M. Pentru orice atlas complex $\mathscr{A}_0$ pe M, există o unică structură complexă $\mathscr{A}$ pe M astfel încît $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$; astfel o structură complexă pe M se poate defini (și se definește) prin indicarea unui atlas complex. O **v.a.c.** (sau, simplu, *varietate complexă*) este un spațiu topologic separat M înzestrat cu o structură complexă $\mathscr{A}_M$; se folosește uneori notația explicită $(M, \mathscr{A}_M)$ pentru a indica **v.a.c.** (v. **spațiu inelat** pentru o definiție alternativă în termeni de fascicole). Fie $(M, \mathscr{A}_M)$ o **v.a.c.**; hărțile $\alpha \in \mathscr{A}_M$ se numesc *hărți locale* sau *hărți structurale* ale lui M; orice atlas $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_M$ se numește *atlas structural* al lui M. Dimensiunea unei varietăți complexe M este, prin definiție, dimensiunea hărților locale ale lui M.

Dacă **v.a.c.** $(M, \mathcal{A}_M)$ este de dimensiune n, M este o varietate topologică de dimensiune $2n$, numită *varietatea topologică subiacentă* (sau *spațiul topologic subiacent*) lui M. Fie U o mulțime deschisă a lui M; o funcție complexă f definită pe U se numește *olomorfă* sau **C**-*analitică* dacă funcția $f \circ \alpha^{-1}$ este olomorfă pe mulțimea deschisă $\alpha(U_\alpha) \subset \mathbf{C}^n$ pentru orice hartă $\alpha \in \mathcal{A}_M$ astfel încît $U_\alpha \subset U$; de fapt, este suficient ca această condiție să fie îndeplinită numai pentru o familie dată de hărți $\alpha \in \mathcal{A}_M$ ale căror domenii acoperă pe U. Mulțimea tuturor funcțiilor olomorfe pe U se notează prin $\mathcal{O}(U)$; uneori se folosește notația alternativă $A(U)$ pentru $\mathcal{O}(U)$. Înzestrată cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire, mulțimea $\mathcal{O}(U)$ este un inel (comutativ și unitar) care conține pe **C** ca subinel, *i.e.* $\mathcal{O}(U)$ este o **C**-algebră. Dacă f este o funcție olomorfă pe U și dacă $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in U$, atunci funcția $1/f$ este olomorfă pe U. Pentru orice punct $a \in M$, limita inductivă $\mathcal{O}_{M,a} := \varinjlim_{U = \mathring{U} \ni a} \mathcal{O}(U)$ este o **C**-algebră locală cu corp rezidual izomorf cu **C** (pentru structura de **C**-algebră). Elementele lui $\mathcal{O}_{M,a}$ se numesc *germeni* în a de funcții olomorfe definite pe vecinătăți deschise ale lui a; dacă $a \in U$ și $f \in \mathcal{O}(U)$, se notează prin f_a germenul definit de f în punctul a. Oricărei hărți complexe $\alpha = (z_1, ..., z_n): U \to \mathbf{C}^n$ pe un spațiu topologic i se asociază harta reală $\widetilde{\alpha} = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n): U \to \mathbf{R}^{2n}$, unde $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, ..., n$. Dacă $(M, \mathcal{A}_M)$ este o **v.a.c.** mulțimea $\{\widetilde{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{A}_M\}$ este un C^k-atlas pe M, deci definește o C^k-structură diferențiabilă $\widetilde{\mathcal{A}}_M(k)$ pe M pentru orice $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Se spune că $(M, \widetilde{\mathcal{A}}_M(k))$ este *varietate diferențiabilă de clasă* C^k *subiacentă varietății complexe* $(M, \mathcal{A}_M)$. Rezultă că, pentru orice submulțime deschisă U a lui M, orice punct $a \in M$ și orice $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, sînt bine definite algebrele reale $C^k(U, \mathbf{C})$ și $C^k_{M,a}(\mathbf{C})$, și spațiile tangente $T(M)_a$ și $T_{\mathbf{C}}(M)_a$. Dacă varietatea complexă M este de dimensiune n, spațiul tangent $T(M)_a$ este un spațiu vectorial real de dimensiune $2n$, iar spațiul tangent complex $T_{\mathbf{C}}(M)_a$ un spațiu vectorial complex de dimensiune $2n$. Notăm de asemenea că spațiul tangent complex $T_{\mathbf{C}}(M)_a$ admite o descompunere directă canonică în două subspații vectoriale complexe de dimensiune n: spațiul tangent olomorf $T'(M)_a$ și spațiul tangent antiolomorf $T''(M)_a$ (v. **spațiu tangent olomorf**). Fie M și N două **v.a.c.** O aplicație $\varphi : M \to N$ se numește *olomorfă* sau **C**-*analitică* sau, simplu, *analitică* dacă, pentru orice punct $a \in M$, există o hartă locală $\alpha : U \to \mathbf{C}^n$ pe M și o hartă locală $\beta: V \to \mathbf{C}^m$ pe N astfel încît $a \in U$, $\alpha(U) \subset V$ și aplicația $\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1} : \alpha(U) \to \mathbf{C}^m$ să fie olomorfă (v. **funcție olomorfă** (de mai multe variabile complexe)). Varietățile complexe și aplicațiile olomorfe formează o categorie; izomorfismele acestei categorii se numesc izomorfisme analitice (mai precis izomorfisme **C**-analitice). Notăm că dacă varietățile complexe M și N au aceeași dimensiune, orice aplicație olomorfă bijectivă $\varphi : M \to N$ este un izomorfism analitic. Varietățile complexe conexe de dimensiune $n = 1$ se numesc *suprafețe riemanniene abstracte* sau, simplu, *suprafețe riemanniene*, iar izomorfismele analitice între suprafețe riemanniene se mai numesc *reprezentări conforme*. Noțiunea de izomorfism analitic permite în particular definirea unei relații de echivalență în mulțimea tuturor structurilor complexe pe o varietate topologică M: două structuri complexe $\mathcal{A}'$ și $\mathcal{A}''$ pe M se numesc *echivalente* dacă există un izomorfism analitic $h: (M, \mathcal{A}') \to (M, \mathcal{A}'')$. Una din marile probleme ale analizei complexe este descrierea mulțimii claselor de echivalență de structuri complexe existente pe o varietate topologică compactă. Ex.: 1° Spațiul numeric $\mathbf{C}^n$ are o structură complexă canonică, și anume definită de harta $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}$. 2° Dacă M este o varietate complexă, orice submulțime deschisă U a lui M este o varietate complexă, și anume cu structura complexă $\mathcal{A}_U := \{\alpha \in \mathcal{A}_M \mid U_\alpha \subset U\}$. 3° *Subvarietate complexă.* Fie M o varietate complexă de dimensiune n și p un întreg astfel încît $0 \leqslant p \leqslant n$. O submulțime M' a lui M se numește *subvarietate complexă de dimensiune* p a lui M dacă, pentru orice punct $a \in M'$, există o hartă locală $\alpha = (z_1, ..., z_n)$ pe M astfel încît $a \in U_\alpha$ și

$$M' \cap U = \{x \in U_\alpha \mid z_{p+1}(x) = 0, ..., z_n(x) = 0\}. \qquad (*)$$

Dacă M' este o subvarietate complexă a lui M, orice hartă α cu proprietatea $(*)$ induce o hartă complexă $\alpha' : M' \cap U_\alpha \to \mathbf{C}^p$ pe M', iar mulțimea hărților α' astfel obținute formează un atlas complex pe M', deci definesc o structură complexă pe M'. 4° *Produsul direct.* Dacă M și N sînt **v.a.c.**, există o unică structură complexă pe produsul direct topologic $M \times N$ astfel încît pentru orice hartă $\alpha \in \mathcal{A}_M$ și orice hartă $\beta \in \mathcal{A}_N$, aplicația $\alpha \times \beta$ să fie o hartă locală pe $M \times N$. Se spune că **v.a.c.** $M \times N$ astfel definită este produsul direct al varietăților M și N. 5° Sfera topologică $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ admite o structură complexă. Mai mult, orice două structuri complexe pe S^2 sînt echivalente (*teorema de reprezentare conformă a lui Riemann* în cazul eliptic). 6° Existența unei structuri complexe pe un produs direct $M \times N$ de varietăți topologice nu implică existența de structuri complexe pe factori. De pildă, varietatea produs $S^1 \times S^{2p+1}$, p întreg mai mare decît zero, are structuri complexe, în timp ce S^1 și S^{2p+1} nu admit structuri complexe fiind de dimensiune impară. 7° *Varietăți de acoperire.* Fie M și N două varietăți topologice și $\pi : M \to N$ o aplicație continuă cu proprietatea că orice punct $b \in N$ are o vecinătate deschisă V astfel încît aplicația $\pi \mid U: U \to V$ să fie un omeomorfism pentru orice componentă conexă U a lui $\pi^{-1}(V)$, deci perechea (M, π) este o varietate de acoperire peste N (v. **omotopie**). Dacă N este o varietate complexă, există o unică structură complexă pe M astfel încît π să fie o aplicație olomorfă. (*M.J.*)

varietate analitică reală, o pereche $(M, \mathcal{A})$, unde M este un spațiu topologic separat și $\mathcal{A}$ o structură analitică reală pe M. Sin.: *varietate* $\mathbb{R}$-*analitică*. Prin *structură analitică* (sau *structură* $\mathbb{R}$-*analitică*) pe $\mathbb{R}$ se înțelege o mulțime $\mathcal{A}$ de hărți reale pe M (v. **varietate diferențiabilă**) cu proprietățile următoare: 1) Toate hărțile $\alpha \in \mathcal{A}$ au aceeași dimensiune; 2) Pentru orice pereche de hărți α, $\beta \in \mathcal{A}$, aplicația de tranziție $\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \beta(U_\alpha \cap B_\beta)$ este $\mathbb{R}$-analitică; 3) $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$; 4) Dacă β este o hartă reală pe M și aplicația de tranziție $\beta \circ \alpha^{-1}$ este un izomorfism $\mathbb{R}$-analitic pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$, atunci $\beta \in \mathcal{A}$. O mulțime $\mathcal{A}$ de hărți reale pe M satisfăcînd condițiile 1)—3) se numește *atlas* $\mathbb{R}$-*analitic* pe M. Pentru orice atlas $\mathbb{R}$-analitic $\mathcal{A}_0$ pe M există o unică structură $\mathbb{R}$-analitică pe M astfel încît $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$. Astfel o structură $\mathbb{R}$-analitică pe M se poate defini (și se definește) prin indicarea unui atlas $\mathbb{R}$-analitic. Dacă $(M, \mathcal{A})$ este o **v.a.r.**, hărțile $\alpha \in \mathcal{A}$ se numesc *hărți locale* sau *hărți structurale* ale lui M; de asemenea, orice atlas $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ se numește *atlas structural* al lui M. Dacă $(M, \mathcal{A})$ este o **v.a.r** există o unică C^∞-structură $\mathcal{A}_{\mathrm{dif}}$ pe M astfel încît $A \subset A_{\mathrm{dif}}$; se spune că $(M, \mathcal{A}_{\mathrm{dif}})$ este *varietatea diferențiabilă de clasă* C^∞ *subiacentă lui* $(M, \mathcal{A})$. Multe din varietățile diferențiabile uzuale sînt, în fapt, subiacente unor varietăți $\mathbb{R}$-analitice. De pildă, varietatea $\mathbb{R}^n$, sfera S^n, spațiul proiectiv $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sînt în acest sens **v.a.r.** De asemenea, în același sens, produsul direct a două **v.a.r.** este o **v.a.r.** Fie $(M, \mathcal{A})$ o **v.a.r.** O funcție reală f pe M se numește $\mathbb{R}$-analitică dacă $f \circ \varphi^{-1}$ este o funcție $\mathbb{R}$-analitică pe mulțimea $\alpha(U_\alpha)$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$; de altfel, este suficient ca această condiție să fie îndeplinită de hărțile α dintr-un atlas structural al lui M. Funcțiile

$\mathbb{R}$-analitice pe M sînt de clasă C^∞ (pentru structura $\mathcal{A}_{\text{dif}}$) și formează un inel care conține constantele reale (deci o $\mathbb{R}$-algebră). Date două **v.a.r.** $(M, \mathcal{A})$ și $(N, \mathcal{B})$, o aplicație $\varphi : M \to N$ se numește $\mathbb{R}$-*analitică* dacă, pentru orice punct $a \in M$, există $\alpha \in \mathcal{A}$ și $\beta \in \mathcal{B}$ astfel încît $a \in U_\alpha$, $\varphi(U_\alpha) \subset U_\beta$ și aplicația $\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha) \to \beta(U_\beta)$ să fie $\mathbb{R}$-analitică. **V.a.r.** și aplicațiile $\mathbb{R}$-analitice formează o categorie; izomorfismele acestei categorii se numesc izomorfisme $\mathbb{R}$-analitice. Pentru ca o aplicație $\varphi : M \to N$ să fie un izomorfism $\mathbb{R}$-analitic este necesar și suficient ca φ să fie bijectivă și atît φ cît și φ^{-1} să fie aplicații $\mathbb{R}$-analitice. (*M.J.*)

varietate caracteristică Fie P un operator diferențial liniar scalar, definit pe o mulțime deschisă Ω din $\mathbb{R}^n$, sau, mai general, pe o varietate diferențiabilă X, și fie simbolul său principal $p(x, \xi)$. Atunci char $P = \{(x, \xi) \in T^*(\Omega)\setminus\{0\}, p(x, \xi) = 0\}$ se numește **v.c.** a operatorului P. Denumirea de varietate trebuie înțeleasă în sensul geometriei algebrice, char P putînd avea singularități. O suprafață $\varphi(x) = c$ în Ω este caracteristică în punctul x_0 dacă $p(x_0, \operatorname{grad} \varphi(x_0)) = 0$ și $\varphi(x_0) = c$. Se poate da o definiție analoagă în cazul operatorilor liniar generali. Pe de altă parte, în cazul operatorilor diferențiali cu coeficienți analitici, sau, într-o prezentare intrinsecă cu ajutorul noțiunii de $\mathcal{D}$-modul, **v.c.** i se poate da altă definiție; anume dacă M este un $\mathcal{D}$-modul coerent (totul se petrece pe $\mathbb{C}^n$ sau, mai general, pe o varietate analitică complexă), $\mathcal{D}$ fiind fascicolul operatorilor diferențiali liniari cu coeficienți analitici, există cel puțin local o filtrare a lui $\mathcal{M}$ (supusă unor condiții suplimentare naturale); se poate deci considera graduatul asociat, gr $\mathcal{M}$, care este un gr $\mathcal{D}$-modul coerent (aici gr $\mathcal{D}$ este graduatul asociat filtrării pe $\mathcal{D}$ date de ordin). Fie acum I anulatorul lui gr $\mathcal{M}$, care este un ideal coerent în gr $\mathcal{D}$. Se definește $V =$ char $\mathcal{M}$ ca fiind varietatea zerourilor lui I; cum gr $\mathcal{D}$ se identifică cu fascicolul funcțiilor olomorfe pe fibratul cotangent, și polinomiale pe fibre, rezultă că V este o submulțime analitică a fibratului cotangent stabilă față de omotetiile fibrei. O definiție echivalentă este următoarea: π fiind proiecția canonică a fibratului cotangent pe bază, $\mathcal{E}$ fascicolul operatorilor microdiferențiali pe fibratul cotangent, fascicolul $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{E} \times_{\pi^{-1}(\mathcal{D})} \pi^{-1}(\mathcal{M})$ este $\mathcal{E}$-modul coerent, și char $\mathcal{M} = \operatorname{supp}(\widetilde{\mathcal{M}})$. Aceste formulări algebrice permit numeroase interpretări și generalizări și se datorează în esență lui M. Sato și M. Kashiwara. Noțiunea clasică de caracteristică a fost introdusă de Cauchy. Pentru operatori pseudodiferențiali, **v.c.** se definește astfel: Dacă P este un operator pseudodiferențial de ordin m, p simbolul său definit pe mulțimea deschisă X din $\mathbb{R}^n$, punctul $(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n\setminus\{0\} = T^*X\setminus\{0\}$ este caracteristic (pentru P) dacă $\lim_{t \to +\infty} p(x, t\xi) | t^{-m} = 0$. Mulțimea punctelor caracteristice formează **v.c.** Această definiție este invariantă la difeomorfisme, deci noțiunea de **v.c.** se poate defini și pentru operatori pseudodiferențiali pe varietăți. Importanța noțiunii de **v.c.** constă în faptul că proprietățile operatorului diferențial (sau $\mathcal{D}$-modulului) se exprimă în general în termeni legați de **v.c.** (*G.G.*)

varietate complexă v. **varietate analitică complexă**

varietate diferențiabilă, un spațiu topologic separat înzestrat cu o structură diferențiabilă. O asemenea structură se definește fie în termeni de fascicole (v. **spațiu inelat**), fie cu ajutorul unui atlas, *i.e.* prin indicarea hărților locale ale varietății; explicităm aici cea de a doua modalitate în cazul cel mai important, și anume cazul C^∞. Fie M un spațiu topologic separat. O *hartă reală* pe M este o aplicație $\alpha = (x_1, \ldots, x_n) : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, unde U_α este o submulțime deschisă a lui M, $\alpha(U_\alpha)$ o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$, iar aplicația de la U_α la $\alpha(U_\alpha)$, indusă de α, un omeomorfism; U_α se numește *domeniul* lui α, $\alpha(U_\alpha)$ *imaginea* lui α, iar n *dimensiunea* hărții α. Un *atlas* pe M este o mulțime $\mathcal{A}$ de

hărți ale lui M care satisface condițiile următoare: 1) Domeniile hărților $\alpha \in \mathcal{A}$ acoperă pe M; 2) Pentru orice cuplu de hărți $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ astfel încît $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, hărțile α și β sînt C^∞-*compatibile*, *i.e.* aplicația de tranziție $\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ este un C^∞-difeomorfism; 3) Există un întreg $n \geqslant 0$ cu proprietatea că toate hărțile $\alpha \in \mathcal{A}$ sînt de dimensiune n (acest n se numește *dimensiunea* atlasului $\mathcal{A}$). Se numește *atlas maximal* (sau *structură diferențiabilă*) pe M un element maximal în mulțimea, ordonată prin incluziune, a tuturor atlaselor lui M. Pentru definirea unei structuri diferențiabile pe M este suficient să indicăm un atlas $\mathcal{A}$; în fapt, există atunci o unică structură diferențiabilă $\widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încît $\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$. O structură diferențiabilă pe M poate fi interpretată, de asemenea, ca fiind o clasă de echivalență de atlase pe M: două atlase $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ pe M se numesc *echivalente* dacă mulțimea $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ este un atlas, ceea ce revine la faptul că $\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{B}}$. O **v.d.** este un cuplu $(M, \mathcal{A}_M)$, unde M este un spațiu topologic separat și $\mathcal{A}_M$ un atlas maximal pe M. Dacă $(M, \mathcal{A}_M)$ este o **v.d.**, spațiul topologic M este o varietate topologică, numită *varietatea topologică subiacentă* lui $(M, \mathcal{A}_M)$. Dacă $\alpha = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}_M$, α se numește *hartă locală* a lui M, iar n-uplul format din componentele $x_1, \ldots, x_n$ ale lui M se numește *sistem de coordonate locale* pe M; orice atlas $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_M$ se numește *atlas structural* al lui M. Notația $(M, \mathcal{A}_M)$ pentru o **v.d.** este folosită numai în situații cînd absența indicării atlasului maximal $\mathcal{A}_M$ poate duce la confuzii. De regulă, o **v.d.** este indicată prin aceeași literă M, la fel ca varietatea topologică subiacentă. Dimensiunea unei **v.d.** M, notată dim M, se definește ca fiind dimensiunea atlasului $\mathcal{A}_M$ și este egală cu dimensiunea varietății topologice subiacente; dacă dim $M = n$ se spune că M este o **v.d.** n-dimensională. Ex.: 1° *Spațiul numeric* $\mathbb{R}^n$ este o **v.d.** n-dimensională cu structura definită de atlasul $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$, unde $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ este identitatea lui $\mathbb{R}^n$; componentele $x_1, \ldots, x_n$ ale acestei hărți, *i.e.* proiecțiile canonice ale lui $\mathbb{R}^n$, se numesc în acest context *coordonate carteziene* pe $\mathbb{R}^n$. O hartă locală a lui $\mathbb{R}^n$ este o aplicație $\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ astfel încît U și $\alpha(U)$ să fie submulțimi deschise ale lui $\mathbb{R}^n$, iar aplicația de la U la $\alpha(U)$, indusă de α, un C^∞-difeomorfism. 2° *Sfera* $S^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) | \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ este o **v.d.** n-dimensională, și anume cu structura diferențiabilă definită de atlasul $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta\}$, unde $\alpha : S^n\setminus\{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$, $\beta : S^n\setminus\{(0, \ldots, 0, -1)\} \to \mathbb{R}^n$ sînt aplicațiile definite prin

$$\alpha(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}}, \quad \beta(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 + x_{n+1}};$$

α se numește *proiecția stereografică din polul nord* $e_{n+1} := (0, \ldots, 0, 1)$, iar β *proiecția stereografică din polul sud* $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, -1)$, ale sferei S^n. 3° *Spațiul proiectiv real* $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ are o structură canonică de **v.d.** n-dimensională. Prin definiție, $\mathbb{P}^n$ este mulțimea tuturor dreptelor lui $\mathbb{R}^{n+1}$ care trec prin origine, *i.e.* $\mathbb{P}^n$: $(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$, unde $\sim$ este relația de echivalență definită prin $x \sim y$ dacă $(\exists) t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ astfel încît $y = tx$. Fie $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n$ aplicația canonică, *i.e.* aplicația care duce punctul $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ în clasa lui de echivalență, notată $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$. Topologia lui $\mathbb{P}^n$ este topologia cît, *i.e.* o submulțime U a lui $\mathbb{P}^n$ este deschisă dacă și numai dacă mulțimea $\pi^{-1}(U)$ este deschisă în $\mathbb{R}^{n+1}$. Pentru fiecare $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, fie $U_i := \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n | x_i \neq 0\}$ și $\alpha_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ aplicația definită prin

$$\alpha_i([x_0 : x_1 : \ldots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Mulțimea $\mathcal{A} := \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ este un atlas pe $\mathbb{P}^n$ care definește structura diferențiabilă a lui $\mathbb{P}^n$. Dacă M este o **v.d.** n-dimensională, orice submulțime deschisă U a lui M este de asemenea o v.d. n-dimensională, și anume cu atlasul maximal $\mathscr{A}_U := \{\alpha \in \mathscr{A}_M \mid U_\alpha \subset U\}$. O submulțime S a lui M se numește *subvarietate diferențiabilă* a lui M dacă există un întreg p, $0 \leqslant p \leqslant n$, și, pentru orice punct $a \in S$, o hartă locală $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$: $: U \to \mathbb{R}^n$ a lui M astfel încît $a \in U$ și

$$U \cap S = \{s \in U \mid x_{p+1}(s) = \ldots = x_n(s) = 0\}. \qquad (*)$$

S este atunci o **v.d.** p-dimensională, $\mathscr{A}_S$ fiind unicul atlas maximal pe S cu proprietatea că $\alpha_S \in \mathscr{A}_S$ pentru orice hartă locală $\alpha \in \mathscr{A}_M$ satisfăcînd condiția $(*)$, unde α_S: $U \cap S \to \mathbb{R}^p$ este aplicația definită prin $\alpha_S(s) = (\alpha_1(s), \ldots, \alpha_p(s))$ pentru $s \in U \cap S$. Subvarietățile p-dimensionale ale lui $\mathbb{R}^n$ se numesc *curbe* în cazul $p = 1$, *suprafețe* dacă $p = 2$ și *hipersuprafețe* cînd $p = n - 1$. De pildă, S^n este o hipersuprafață în $\mathbb{R}^{n+1}$. *Produsul direct* a două **v.d.** $(M, \mathscr{A}_M)$ și $(N, \mathscr{A}_N)$ este **v.d.** $(M \times N, \mathscr{A}_{M \times N})$, unde $M \times N$ este produsul direct topologic al spațiilor M și N, iar $\mathscr{A}_{M\times N}$ unicul atlas maximal pe $M \times N$ care conține hărțile de forma $\alpha \times \beta$ cu $\alpha \in \mathscr{A}_M$ și $\beta \in \mathscr{A}_N$; notăm că $\dim M \times N = \dim M + \dim N$. De exemplu, dacă $p + q = n$, atunci $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$, produs direct de **v.d.** *Torul real* n-dimensional T_n se definește ca fiind **v.d.** $T^n := S^1 \times \ldots \times S^1$ (de n ori), produsul direct a n **v.d.** egale cu S^1. Fie M și N două **v.d.** O aplicație $\varphi: M \to N$ se numește *aplicație diferențiabilă* (de clasă C^∞) dacă pentru orice punct $a \in M$, există o hartă $\alpha \in \mathscr{A}_M$ și o hartă $\beta \in \mathscr{A}_N$ astfel încît $a \in U_\alpha$, $\varphi(U_\alpha) \subset U_\beta$ și aplicația $\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$: $\alpha(U_\alpha) \to \beta(U_\beta)$ să fie de clasă C^∞. Se notează prin $C^\infty(M, N)$ mulțimea tuturor aplicațiilor diferențiabile (de clasă C^∞) de la M la N. **V.d.** și aplicațiile diferențiabile formează o categorie, categoria **v.d.** (de clasă C^∞). Izomorfismele acestei categorii se numesc *difeomorfisme* (sau C^∞-*difeomorfisme*). De exemplu, pentru orice hartă $\alpha \in \mathscr{A}_M$, aplicația $\alpha' : U \to \alpha(U)$, indusă de α, este un difeomorfism. Prin analogie cu cele de mai sus, se poate defini categoria **v.d.** de clasă C^r (C^r-varietăți) pentru orice $r \in \mathbb{N}$ și, de asemenea, categoria varietăților analitice reale (C^ω-varietăți). Dacă M și N sînt două C^k-varietăți, se notează prin $C^k(M, N)$ mulțimea tuturor aplicațiilor diferențiabile de clasă C^k de la M la N. Mulțimea $\widetilde{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ se ordonează prin relația de ordine a lui $\mathbb{N}$ și relația $\nu < \infty < \omega$ pentru orice $\nu \in \mathbb{N}$. Dacă $(M, \mathscr{A}_M)$ este o C^r-varietate și k un element al mulțimii $\widetilde{\mathbb{N}}$ astfel încît $k \leqslant r$, există un unic C^k-atlas maximal $\mathscr{A}_M(k)$ cu proprietatea că $\mathscr{A}_M \subset \mathscr{A}_M(k)$; de exemplu, $\mathscr{A}_M(r) = \mathscr{A}_M$. Cuplul $(M, \mathscr{A}_M(k))$ este o C^k-varietate, numită C^k-*varietatea subiacentă* a C^r-varietății $(M, \mathscr{A}_M)$. Cînd se vorbește de o C^k-subvarietate S a unei C^r-varietăți M se înțelege că S este o subvarietate diferențiabilă a C^k-varietății subiacente lui M. În mod similar, dacă M și N sînt C^k-varietăți, *prin aplicație diferențiabilă de clasă* C^k de la M la N se înțelege o aplicație diferențiabilă de clasă C^k de la C^k-varietatea subiacentă lui M la C^k-varietatea subiacentă lui N etc. **V.d.** introduse mai sus sînt finit-dimensionale, *i.e.* modelate pe spații euclidiene. În mod analog se pot defini **v.d.** *banachiene*, în particular, **v.d.** *hilbertiene*. Condiția ca spațiul topologic subiacent unei **v.d.** să fie separat este uneori omisă în definiția **v.d.**, în special în cazul unor problematici cu caracter local. Pe de altă parte, în studiul global al **v.d.** acestea se presupun, de regulă, paracompacte și conexe. (*M.J.*)

varietate diferențiabilă orientabilă v. **orientare** (a unei varietăți diferențiabile)

varietate diferențiabilă orientată v. **orientare** (a unei varietăți diferențiabile)

varietate liniară Fie X un spațiu liniar și Γ corpul scalarilor (*i.e.* $\Gamma = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Pentru orice elemente $x, y \in X$ să punem $D(x,y) = \{\lambda x + (1 - \lambda) y \mid \lambda \in \Gamma\}$. O submulțime E a lui X se numește **v.l.** dacă din $x, y \in E$ rezultă $D(x,y) \subset E$. Pentru două elemente distincte $x, y \in X$ mulțimea $D(x, y)$ se numește *dreapta* determinată de x și y. O **v.l.** conține odată cu două elemente distincte și dreapta determinată de acestea; de aceea o **v.l.** este numită și *mulțime plană*. O submulțime E a spațiului X este o **v.l.** dacă și numai dacă pentru orice element $a \in E$ mulțimea $E - a$ este un subspațiu liniar al lui X. Se numește *hiperplan* o **v.l.** H cu $H \neq X$ și care este maximală, *i.e.* are proprietatea că din $H \subset E$, unde E este o **v.l.** rezultă sau $H = E$ sau $E = X$. O submulțime H a lui X este un hiperplan dacă și numai dacă există un hipersubspațiu G și un element $a \in X$ astfel ca $H = G + a$. De asemenea, o submulțime H a lui X este un hiperplan dacă și numai dacă se reprezintă sub forma $H = \{x \in X \mid f(x) = \lambda\}$, unde f este o funcțională liniară nenulă definită pe X iar $\lambda \in \Gamma$. Fie acum X un spațiu liniar real (deci $\Gamma = \mathbb{R}$). Fie H un hiperplan reprezentat sub forma precedentă și să notăm

$$H_1 = \{x \in X \mid f(x) \leqslant \lambda\}, \quad H_2 = \{x \in X \mid f(x) \geqslant \lambda\}.$$

Dacă A este o submulțime a lui X și dacă sau $A \subset H_1$ sau $A \subset H_2$, se spune că mulțimea A se află de aceeași parte a hiperplanului H. Dacă A și B sînt două submulțimi ale spațiului X și dacă $A \subset H_1$ și $B \subset H_2$, atunci se spune că H *separă* A de B. Fie E o submulțime convexă a lui X. Dacă mulțimea E se află de aceeași parte a hiperplanului H și dacă $H \cap E \neq \emptyset$, atunci H se numește *hiperplan de sprijin* pentru mulțimea E. Dacă p este o funcțională subliniară pe X și $0 < \mu \in \mathbb{R}$, atunci oricare ar fi punctul frontieră al mulțimii convexe $E = \{x \in X \mid p(x) \leqslant \mu\}$ există un hiperplan de sprijin pentru E care trece prin x_0 (*i.e.* $x_0 \in E$). Această afirmație este o consecință a teoremei Hahn-Banach. (*R.C.*)

varietate olomorf-convexă v. **varietate Stein**

varietate proiectivă v. **spațiul proiectiv complex**

varietate riemanniană, o varietate diferențiabilă M înzestrată cu o metrică riemanniană. Dacă varietatea M este de clasă C^r, prin *metrică riemanniană* pe M se înțelege o familie $S = \{S_x\}_{x \in M}$, unde $S_x = \langle \ldots \rangle_x$ este un produs scalar pe spațiul tangent $T(M)_x$, satisfăcînd condiția următoare: Pentru orice punct $a \in M$, există o hartă locală $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ pe M, astfel încît $a \in U_\alpha$ și funcțiile $g_{ij} : U_\alpha \to \mathbb{R}$, definite prin $g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right\rangle_x$, să fie de clasă C^{r-1}, $i, j = 1, \ldots, n$. Cu notația de mai sus rezultă că $S \mid U_\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$, în sensul că, pentru orice $x \in U$ și orice pereche de vectori $u, v \in T(M)_x$,

$$S_x(u, v) = \langle u, v\rangle_x = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, u_i v_j.$$

Ex.: 1° Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt coordonatele carteziene pe $\mathbb{R}^n$, $S = \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i$ este o metrică riemanniană pe varietatea $M = \mathbb{R}^n$, numită *metrica euclidiană*. 2° Dacă M' este o altă varietate diferențiabilă de clasă C^r și $\varphi \in C^r(M, M')$ o imersie, atunci pentru orice metrică riemanniană S' pe M', avem o metrică S pe M, definită prin

$$S_x(u, v) = S'_x(\varphi_{*,x}\, u, \varphi_{*,x}\, v), \quad x \in M, \; u, v \in T(M)_x.$$

Se spune că metrica riemanniană S pe M astfel definită este *imaginea inversă* prin imersia φ a metricii riemanniene S'. 3° Pe orice varietate diferențiabilă paracompactă M există metrici riemanniene. (Demonstrația se face folosind o partiție a unității.) Fie M o **v.r.** și $\gamma : [a, b] \to M$ un drum de clasă C^1 pe M. *Lungimea* lui γ se definește prin

$$\text{lung}\,(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t),\ \gamma'(t)\rangle_{\gamma(t)}}\, \mathrm{d}t,$$

unde $\gamma'(t) \in T(M)_{\gamma(t)}$ este vectorul viteză al drumului γ în punctul t, *i.e.* $\gamma'(t) = \gamma_{*,t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(t)\right)$. Dacă imaginea lui γ este conținută în domeniul U al unei hărți locale $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ a lui M, rezultă

$$\text{lung}\,(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,\ j=1} g_{ij}(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)\, \gamma_j'(t)}\ \mathrm{d}t,$$

unde $\gamma_i := x_i \circ \gamma$ și γ_i' este derivata funcției γ_i, $i = 1, \dots, n$. În acord cu această definiție a lungimii, se utilizează pentru o metrică riemanniană notația clasică $\mathrm{d}s^2$ în loc de S; $\mathrm{d}s$ se numește *elementul de lungime* pe M. (*M.J.*)

varietate Stein, o varietate complexă M cu bază numărabilă satisfăcînd condițiile următoare: α) M este *olomorf-convexă*, *i.e.*, pentru orice mulțime compactă $K \subset \Omega$, mulțimea $\hat{K} = \{x \in M \mid |f(x)| \leqslant \sup_K |f| \text{ pentru orice } f \in \mathcal{O}(M)\}$ este de asemenea compactă; β) Funcțiile olomorfe globale pe M separă punctele lui M, *i.e.*, pentru orice pereche de puncte $a, b \in M$ astfel încît $a \neq b$, există o funcție $f \in \mathcal{O}(M)$ astfel încît $f(a) \neq f(b)$; γ) Pentru orice punct $a \in M$ se poate găsi un sistem de coordonate locale în vecinătatea lui a format din funcții olomorfe globale, *i.e.* există $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(M)$ și o vecinătate deschisă U a lui a în M astfel încît aplicația $\alpha := f \mid U : U \to \mathbb{C}^n$ să fie o hartă locală a lui M, unde $f = (f_1, \dots, f_n)$. Ex.: 1° Orice suprafață riemanniană necompactă este o **v.S.**; în particular orice submulțime deschisă a planului complex $\mathbb{C}$ este o **v.S.** 2° O mulțime deschisă Ω a lui $\mathbb{C}^n$ este o **v.S.** dacă și numai dacă Ω este un domeniu de olomorfie. 3° Dacă M și N sînt **v.S.**, produsul direct $M \times N$ este de asemenea o **v.S.** 4° Orice subvarietate complexă închisă a unei **v.S.** este o **v.S.** 5° Dacă M este o varietate complexă oarecare, submulțimile deschise ale lui M care sînt **v.S.** formează o bază a lui M stabilă la intersecția finită. Notăm că varietățile compacte nu sînt **v.S.** De asemenea, pentru $n \geqslant 2$, $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ nu este o **v.S.** (v. **teorema de prelungire a lui Hartogs**). Dintre teoremele mari ale teoriei **v.S.** menționăm aici următoarele:
Teorema 1 (*teoremele A și B ale lui H. Cartan*). Dacă M este o **v.S.** și $\mathcal{F}$ un fascicol coerent pe M, atunci: A) Pentru orice $x \in M$, fibra $\mathcal{F}_x$ este generată ca $\mathcal{O}_{M,x}$-modul de germeni în x definiți de secțiunile globale ale lui $\mathcal{F}$; B) $H^q(M, \mathcal{F}) = 0$ pentru $q \geqslant 1$ (v. **coomologia fascicolelor**).
Notăm că teorema B caracterizează **v.S.** Mai exact, dacă M este o varietate complexă cu bază numărabilă și dacă teorema B are loc pentru orice ideal coerent $\mathcal{I}$ al lui $\mathcal{O}_M$ astfel încît fascicolul cît $\mathcal{O}_M/\mathcal{I}$ să aibă suport discret, atunci M este o **v.S.**
Teorema 2 (de caracterizare, a lui H. Grauert). O varietate complexă M este o **v.S.** dacă și numai dacă satisface condițiile următoare: c_0) Mulțimea componentelor conexe ale lui M este cel mult numărabilă; c_1) M este olomorf-convexă; c_2) Pentru orice punct $a \in M$ există un număr natural p și o aplicație olomorfă $f : M \to \mathbb{C}^p$ astfel încît a să fie punct izolat în fibra $f^{-1}(f(a))$. În particular rezultă că β) este o condiție superfluă în definiția **v.S.**
Teorema 3 (de scufundare Remmert-Bishop-Narasimhan). Orice **v.S.** de dimensiune n admite o scufundare olomorfă închisă în $\mathbb{C}^{2n+1}$ (și reciproc, v. Ex. 4°).
Teorema 4 (soluția problemei Levi, a lui Grauert). O varietate complexă M este o **v.S.** dacă și numai dacă admite o funcție de exhaustiune $\varphi \in C^\infty(M)$ strict plurisubarmonică.

(O funcție reală continuă φ pe M se numește *funcție de exhaustiune* a lui M dacă, pentru orice număr real c, mulțimea $M_c := \{x \in M \mid \varphi(x) < c\}$ este relativ compactă.)
Teorema 5 (H. Cartan). Pe o **v.S.** M, ecuația $\bar{\partial} u = f$ are o soluție $u \in C^{p,q}(M)$ pentru orice formă diferențială $f \in C^{p,q+1}(M)$ astfel încît $\bar{\partial} f = 0$, $p, q \geqslant 0$.
În cazul $M = \Omega$ o mulțime deschisă în $\mathbb{C}^n$, reciproca teoremei 5 este de asemenea adevărată. Notăm de asemenea că pe o **v.S.** orice problemă Cousin aditivă și orice problemă Poincaré au soluții și că pe o **v.S.** M astfel încît $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$ orice problemă Cousin multiplicativă are soluție (v. **funcție meromorfă** (pe o varietate complexă)). Menționăm în fine
Principiul lui Oka. Pe o **v.S.** obstrucția la existența de soluții olomorfe globale pentru probleme care admit soluții olomorfe locale este pur topologică, *i.e.* o asemenea problemă admite o soluție olomorfă globală dacă și numai dacă ea admite o soluție topologică globală. Un exemplu este
Teorema lui Grauert. Doi fibrați vectoriali olomorfi pe o **v.S.** sînt analitic izomorfi dacă și numai dacă ei sînt topologic izomorfi. (*M.J.*)

varietate topologică, un spațiu topologic separat M astfel încît există $n \in \mathbb{N}$ și, pentru orice punct $a \in M$, o vecinătate deschisă U a lui a în M care este omeomorfă cu $\mathbb{R}^n$. Numărul natural n care apare în această definiție se numește *dimensiunea* lui M și se notează dim M; o **v.t.** de dimensiune n se mai numește **v.t.** n-dimensională. Dimensiunea unei **v.t.** este un invariant topologic al varietății (v. **teorema de separare Jordan-Brouwer**). Notăm că pentru o **v.t.** conexă M condițiile următoare sînt echivalente: i) M este paracompactă; ii) M este numărabilă la infinit; iii) M are o bază numărabilă de mulțimi deschise; iv) M este un spațiu topologic metrizabil. O **v.t.** conexă de dimensiune 2 se numește *suprafață topologică*. (*M.J.*)

varietatea lui Jacobi v. **divizor**
vecinătate a unei mulțimi v. **topologie**
vecinătate a unui punct v. **topologie**
vecinătate la dreapta (la stînga) v. **derivata Fréchet laterală**
vector aleator n-dimensional v. **măsură gaussiană** (în $\mathbb{R}^n$)
vector aleator normal distribuit v. **măsură gaussiană** (în $\mathbb{R}^n$)
vector propriu v. **număr propriu**
vector tangent antiolomorf v. **spațiu tangent olomorf**
vector tangent complex v. **spațiu tangent complex**
vector tangent exterior v. **domeniu**
vector tangent interior v. **domeniu**
vector tangent la o varietate v. **spațiu tangent**
vector tangent olomorf v. **spațiu tangent olomorf**
vector viteză v. **spațiu tangent**

wronskian, funcție a cărei valoare într-un punct este determinantul matricii avînd drept coloane valorile în acel punct ale unor soluții ale unui sistem liniar de ecuații diferențiale. **W.** este soluție a ecuației diferențiale liniare definită de funcția $t \mapsto \operatorname{Tr} A(t)$, unde $\operatorname{Tr} A$ este urma matricii A egală cu suma elementelor de pe diagonala matricii. (*A.H.*)

Z

zerourile unei funcții olomorfe Fie D o mulțime deschisă în $\mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă și $a \in D$ astfel ca $f(a) = 0$. Dacă există o vecinătate V a lui a astfel încît $f(z) \neq 0$ pentru orice $z \in V \setminus \{a\}$, atunci f admite în jurul lui a o dezvoltare în serie Taylor de forma

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{cu} \quad c_p \neq 0,\ p \geq 1.$$

Numărul p se numește *ordinul zeroului* a și se notează $\omega(f,a)$. În caz contrar există o vecinătate a lui a în care f ia numai valoarea zero și în acest caz, prin definiție, ordinul zeroului a este $+\infty$. Dacă D este un domeniu, $A = \{a \in D \mid f(a) = 0\}$, $A_1 = \operatorname{int} A$ și A_2 este mulțimea formată din punctele izolate ale lui A, atunci $A_1 = \emptyset$ sau $A_2 = \emptyset$. O funcție olomorfă pe un domeniu și care nu este funcția nulă are deci numai zerouri izolate. Mulțimea **z.f.o.** și neidentic nule pe un domeniu este o mulțime finită sau numărabilă. Dacă f și g sînt funcții olomorfe pe același domeniu D și dacă sînt egale pe o mulțime care are cel puțin un punct de acumulare în D, atunci $f(z) = g(z)$ pentru orice $z \in D$ (*teorema de identitate a funcțiilor olomorfe*). Dacă D este un domeniu, $f: D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă, G un domeniu mărginit astfel ca $\overline{G} \subset D$, *ordinul funcției* f *relativ la domeniul* G este $+\infty$ dacă f este funcția nulă și $\sum_{z \in G,\, f(z)=0} \omega(f, z)$ dacă f nu este funcția nulă. Se notează $\omega(f,G)$. Fie $a \in D$ și $r > 0$ astfel ca $\overline{B}(a, r) = \{z \mid |z-a| \leq r\} \subset D$. Fie $\partial B(a, r)$ drumul $t \to a + r e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$. Dacă f nu se anulează pe suportul drumului $\partial B(a, r)$ atunci:

$$\omega(f;\, B(a, r)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f'}{f}. \qquad (Gh.Gr.)$$

zonoform v. **măsură conică**
zonoid v. **mulțimea valorilor unei măsuri**

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

1. Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
2. Ahlfors, L. V., Sario, L., *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, 1960.
3. Andreian-Cazacu, C., Deleanu, A., Jurchescu, M., *Topologie, categorii, suprafețe riemanniene*, Ed. Academiei, București, 1966.
4. Andreian-Cazacu, C., *Teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
5. Arnold, V. I., *Metodele matematice ale mecanicii clasice*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
6. Bănică, C., Stănășilă, O., *Metode algebrice în teoria globală a spațiilor complexe*, Ed. Academiei R. S. România, București, 1974.
7. Bishop, R. L., Crittenden, R. J., *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York and London, 1964.
8. Boboc, N., *Funcții complexe*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1969.
9. Boboc, N., Bucur, Gh., *Măsură și capacitate*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
10. Bourbaki, N., *Topologie générale*, Ch. I—X, 6 vol., Hermann, Paris, 1940—1949.
11. Bourbaki, N., *Intégration*, Ch. I—VIII, 4 vol., Hermann, Paris, 1940—1949.
12. Bourbaki, N., *Variétés différentielles et analytiques*, 2 vol., Hermann, Paris, 1967, 1971.
13. Bruckner, A. M., *Differentiation of Real Functions*, Lecture Notes in Mathematics, **659**, Springer, Berlin, 1978.
14. Cartan, H., *Théorie élémentaire de la théorie des fonctions analytiques d'une ou plusieures variables*, Hermann, Paris, 1961.
15. Chandrasekharan, K., *Arithmetical Functions*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
16. Chandrasekharan, K., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.
17. Chițescu, I., *Spații de funcții*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
18. Colojoară, I., *Analiză matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980.
19. Cristescu, R., *Spații liniare ordonate și operatori liniari*, Ed. Academiei R. S. România, București, 1970.
20. Cristescu, R., *Spații liniare topologice*, Ed. Academiei R. S. România, București, 1974.
21. Cristescu, R., *Analiză funcțională*, Ed. Didactică și Pedagogică, ed. a IV-a, București, 1983.
22. Cristescu, R., *Structuri de ordine în spații liniare normate*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
23. Diestel, J., Uhl, J. J. Jr., *Vector Measures*, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1977.
24. Dieudonné, J., *Calcul infinitesimal*, Hermann, Paris, 1968.

25. Dinculeanu, N., *Integrarea pe spații local compacte*, Ed. Academiei R. S. România, București, 1965.
26. Field, M. J., *Several Complex Variables and Complex Manifolds*, vol. I–II, London Mathematical Society, Lecture Note Series, **65–66**, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochella, Melbourne, Sydney, 1982.
27. Ghika, Al., *Analiză funcțională*, Ed. Academiei R. S. România, București, 1967.
28. Gelfand, I. M., Șilov, G. E., *Funcții generalizate*, vol. I, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1984.
29. Godement, R., *Théorie des faisceaux*, ed. a III-a, Hermann, Paris, 1973.
30. Golubev, V. V., *Lecții po analiticeskoi teorii differențialnîh uravnenii*, Gostehteorizdat, Moscova-Leningrad, 1950.
31. Griffiths, P. Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, New York, 1978.
32. Grigore, Gh., *Lecții de analiză numerică*, Tipografia Universității București, 1984.
33. Halanay, A., *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, Ed. Academiei R. P. Române, București, 1963.
34. Halanay, A., *Ecuații diferențiale*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1972.
35. Hörmander, L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, D. Van Nostrand, Princeton, 1967.
36. Hörmander, L., *The Analysis of Linear Differential Operathors*, vol. I–IV, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1983.
37. Iftimie, V., *Operatori pseudodiferențiali și integrala Fourier*, Tipografia Universității București, 1978.
38. Jurchescu, M., *Introducere în analiza pe varietăți*, Tipografia Universității București, 1978.
39. Jurchescu, M., *Introduzione agli spazi analitici*, vol. I–II, C.N.R. Perugia, 1971, 1974.
40. Kelley, J., *General Topology*, D. Van Nostrand, Princeton, 1957.
41. Kodaira, K., *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.
42. Lang, S., *Differential Manifolds*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1972.
43. Marcus, S., *Noțiuni de analiză matematică*, Ed. Științifică, București, 1967.
44. Marinescu, Gh. *Spații vectoriale normate*, Ed. Academiei R. P. Române, 1954.
45. Marinescu, Gh., *Analiză numerică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1969.
46. Marinescu, Gh., *Analiză matematică*, vol. I–II, Ed. Academiei R. S. România, București, 1983, 1984.
47. Narasimhan, R., *Analysis on Real and Complex Manifolds*, Masson & Cie, Paris, North-Holland, Amsterdam, 1968.
48. Natanson, I. P., *Teoria funcțiilor de variabilă reală*, Ed. Tehnică, București, 1957.
49. Nicolescu, M., *Analiză matematică*, vol. I–III. Ed. Tehnică, București, 1957, 1958, 1960.
50. Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S., *Analiză matematică*, vol. I–III, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
51. Niculescu, C., Popa, N., *Elemente de teoria spațiilor Banach*, Ed. Academiei R. S. România, București, 1981.

52. Păltineanu, C., *Elemente de teoria aproximării funcțiilor continue*, Ed. Academiei R. S. România, București, 1982.
53. Popa, N., *Produse tensoriale topologice și bornologice*, Ed. Academiei R. S. România, București, 1978.
54. Saks, S., *Theory of the Integral*, Hafner Publishing Company, New York, 1937.
55. Sato, T., Kashiwara, M., Kawai, I., *Hyperfunctions and Pseudodifferential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
56. Stoilow, S., *Leçons sur les principe topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1938.
57. Stoilow, S., *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, vol. I–II, Ed. Academiei R. P. Române, București, 1954, 1958.
58. Suciu, I., *Algebre de funcții*, București, Ed. Academiei R. S. România, București, 1969.
59. Teleman, C., *Elemente de topologie și varietăți diferențiabile*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1964.
60. Thomson, B. S., *Real Functions*, Lecture Notes in Mathematics, **1170**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
61. Vladimirov, V. S., *Ecuațiile fizicii matematice*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1980.