

**MARIAN PEARSICĂ**



**ELECTROTEHNICA**



MARIAN PEARSICĂ - ELECTROTEHNICĂ

**I.S.B.N. 973 – 8415 – 17 – 9**

EDITURA ACADEMIEI FORȚELOR AERIENE  
„HENRI COANDĂ”

**MARIAN PEARSICĂ**

# ELECTROTEHNICA

**BRAȘOV 2004**

Recenzent științific	Prof. univ. dr. ing. <b>Dan Bidian</b>
Consilier editorial	<b>Doina Ciuciuc</b>
Tehnoredactor	Autorul
	M. m. <b>Crețu Aurel</b>
	<b>Izabela Wagner</b>
Coperta și grafica	Autorul
Corector	Autorul

© 2004 - Editura Academiei Forțelor Aeriene  
"Henri Coandă"  
Electrotehnică  
Marian Pearsică

Toate drepturile rezervate Editurii Academiei Forțelor  
Aeriene "Henri Coandă" - Brașov.

Editura Academiei Forțelor Aeriene  
"Henri Coandă"

**ISBN 973-8415-17-9**

# INTRODUCERE

## 1. OBIECT ȘI CONȚINUT

Electrotehnica se ocupă cu studiul stărilor și fenomenelor electrice, magnetice și electromagnetice cu scopul utilizării lor în tehnică.

Energia electromagnetică este forma de energie cea mai utilizată în diferite domenii prezentând o serie de avantaje în comparație cu alte forme de energie și anume:

- se obține ușor din alte forme de energie, producerea energiei electrice în centrale electrice având loc în condiții economice avantajoase;
- se transformă ușor și cu randamente ridicate în alte forme de energie;
- se transmite ușor, economic și practice instantaneu la mari distanțe, fie direct prin mediul înconjurător, fie dirijat prin linii electrice;
- se distribuie ușor la un număr mare de consumatori de puteri diferite cu ajutorul rețelelor electrice, putând fi divizată și utilizată în părți oricât de mici.

Centralele electrice producătoare de energie sunt de mai multe tipuri: termoelectrice, hidroelectrice, nucleare etc., constituind unități puternice, cu puteri de ordinul a sute și mii de megawatt, încadrate în sisteme energetice unice, naționale sau internaționale, permițând valorificarea avantajoasă a surselor energetice naturale. Energia electrică este utilizată în toate sectoarele de activitate în cele mai diverse moduri. O aplicație directă a legilor și fenomenelor fundamentale ale electrotehnicii este realizarea de echipamente electrice, printre care, mașinile electrice ocupă un loc deosebit de important.

Cursul elaborat se adresează studenților de la Academia Forțelor Aeriene “Henri Coandă”, precum și celor care vor să înțeleagă modul în care se transmite energia electromagnetică, cum se pot calcula circuitele electrice, cum funcționează și care sunt caracteristicile transformatoarelor electrice, amplificatoarelor magnetice, mașinilor electrice rotative de curent continuu și curent alternativ, traductoarelor electrice de poziție.

Cursul este structurat în două volume: Electrotehnică (mărimi de stare ale corpurilor și câmpului electromagnetic; legi și teoreme ale teoriei macroscopice a electromagnetismului; circuite electrice de curent continuu; circuite electrice în regim permanent sinusoidal; circuite electrice trifazate; circuite electrice liniare în regim tranzitoriu; circuite electrice liniare în regim periodic nesinusoidal; circuite electrice neliniare în regim variabil; cuadripoli; câmpul electrostatic în vid și în corpuri; condensatori electrice; energie și forțe în câmp electrostatic; câmpuri electrocinetice; câmpul magnetic staționar în vid și în corpuri; inductivități și circuite magnetice; energie și forțe în câmp magnetic; ecuațiile câmpului electromagnetic; metode generale de calcul a câmpurilor electrice și magnetice) și Mașini electrice (transformatoare electrice; ampli-

ficatoare magnetice; mașina electrică asincronă, mașina electrică sincronă, mașini electrice de curent continuu; mașini electrice speciale).

Legile și teoremele electrotehnicii au fost exprimate cu ajutorul unor noțiuni de matematici superioare, necesitând cunoașterea algebrei și analizei vectoriale, a calculului diferențial și integral.

Scopul acestui curs este cunoașterea elementelor fundamentale de electrotehnică și a principiilor constructive și de funcționare ale mașinilor electrice, cu aplicații în tehnica militară.

## 2. SCURT ISTORIC

Primele cunoștințe despre electricitate și magnetism datează din antichitate când Thales din Milet (sec. VI î.e.n.) a descoperit fenomenul electrizării, iar prima lucrare, care se referă la fenomenele electrizării și magnetizării, a apărut în anul 1600 sub titlul “De magnetete” și aparține fizicianului W. Gilbert.

În secolul al XVIII-lea Lomonosov și Franklin au efectuat studii asupra electricității atmosferice. În 1785 Coulomb a determinat relația forțelor de interacțiune dintre corpurile punctiforme încărcate cu sarcini electrice precum și dintre magnetii punctiformi. La sfârșitul secolului al XVIII-lea medical Galvani și fizicianul Volta descoperă și construiesc pilele electrice. În 1819 Oersted descoperă forțele exercitate de un conductor străbătut de curent electric asupra acului magnetic. În 1820 Ampère studiază câmpul magnetic produs de un solenoid și explică starea de magnetizare a corpurilor prin curenți moleculari. În 1831 Faraday descoperă fenomenul inducției electromagnetice și introduce conceptul de câmp.

La baza teoriei circuitelor electrice stau lucrările lui Ohm (1827) și Kirchhoff (1845). În 1873 Maxwell elaborează teoria microscopică a câmpului electromagnetic, expusă în lucrarea “Tratat despre electricitate și magnetism”. În perioada 1887...1889 Hertz confirmă experimental existența undelor electromagnetice. Lebedev pune în evidență experimental presiunea luminii (1900...1910).

În țara noastră primele lucrări în domeniul teoriei electromagnetice au apărut la sfârșitul secolului al XVIII-lea și sunt legate de activitatea astronomului M. Hell (1720...1792), fost profesor la Universitatea Iezuită din Cluj. Primele cunoștințe sistematizate de electricitate la un nivel înalt, au fost predate la noi în țară de către profesorul P. Poni (1841...1923) la Universitatea din Iași, iar prima catedră de electricitate apare în anul 1889 la Universitatea din București și a fost condusă de profesorul D. Negreanu (1858...1908), autor a numeroase lucrări din domeniul electricității și magnetismului.

Numeroși oameni de știință au adus contribuții importante la studiul teoretic și experimental al electrotehnicii. Se remarcă academicianul N. Vasilescu-Karpen (1870...1964), primul în lume care a repudiat existența și utilizarea maselor magnetice la studiul magnetismului și a propus utilizarea

curenților purtători de înaltă frecvență în telefonie la mare distanță. A. Maior (1882...1964) a inventat un sistem de telefonie multiplă prin curenți purtători și s-a preocupat de transmiterea energiei electrice cu ajutorul curenților de înaltă frecvență. Academicianul C. I. Budeanu (1886...1959) a avut contribuții importante în studiul regimului deformat, a puterii reactive și a factorului de putere din rețelele electrice. I. S. Gheorghiu (1885...1968) a adus contribuții originale în electrotehnica industrială, elaborând primul proiect de electrificare a căii ferate București-Brașov. Profesorul C. A. Parteni (1900...1956) a studiat probleme ale comutației la mașinile electrice de curent continuu, a studiat mașina asincronă cu ajutorul teoriei cuadripolului electric. Academicianul R. Răduleț (1904...1984) a avut contribuții importante în teoria generală a câmpului electromagnetic, în domeniul liniilor electrice lungi, în domeniul sudurii electrice, în domeniul pătrunderii câmpului electromagnetic în conductoarele masive din cuptoarele electrice de inducție; a întemeiat școala românească de cercetare electrotehnică bazată pe teoria câmpului. Ed. Nicolau (n. 1992) a făcut cercetări originale în domeniul relațiilor de reciprocitate în electricitate, al antenelor și oscilatorilor electrice, al propagării undelor electromagnetice și al dispozitivelor cibernetice.

Cercetările din domeniul electrotehnicii și-au găsit numeroase aplicații în țara noastră. Prima uzină electrică a fost construită în București în anul 1882, fiind construită în anul 1884 o nouă uzină electrică la Timișoara, destinată iluminatului electric. În anul 1896 se introduce tracțiunea electrică, fiind dat în folosință tramvaiul electric din București, iar în anul 1897 se construiesc primele linii de tramvai electric și la Brăila, Iași și Arad. În anul 1938 existau aproape 600 de centrale electrice cu o putere totală instalată de aproximativ 500MW, iar în 1965 puterea totală instalată era de 3500MW. În anul 1985 producția de energie electrică era de 121kWh, fiind realizată în hidrocentrale și termocentrale. Prima centrală nucleară din țara noastră este cea de la Medgidia, care a intrat parțial în funcțiune în anul 1997, asigurând în final 40% din necesarul de energie electrică al țării. În ultima perioadă de timp se fac cercetări în vederea utilizării surselor de energie neconvenționale, pentru obținerea energiei electrice prin metode ecologice.

### 3. TEORII ALE FENOMENELOR ELECTROMAGNETICE

Studiul fenomenelor electromagnetice a fost influențat de două mari descoperiri din domeniul fizicii moderne și anume, teoria relativității și teoria cuantelor. După scara la care sunt studiate fenomenele electromagnetice se disting teorii macroscopice și teorii microscopice ale fenomenelor electromagnetice, aplicarea unei teorii sau a alteia depinzând de problemele care se studiază.

Teoria acțiunii la distanță. Se consideră că forțele și momentele se transmit instantaneu prin spațiu, de la corpul ce acționează până la corpul asupra căruia

se exercită acțiunea, oricare ar fi distanța dintre corpuri. Această teorie are la bază mecanica clasică ale cărei baze au fost puse de Newton, legea atracției universale influențând cel mai mult cercetările în domeniul fenomenelor electrice și magnetice. Teoria acțiunii la distanță prezintă interes decât sub aspect istoric, fiind infirmată experimental.

Teoria macroscopică clasică a electromagnetismului (Teoria lui Maxwell). Teoria a fost inițiată de către M. Faraday și elaborată în liniile ei principale de către J. C. Maxwell pentru corpuri în stare de repaus. Conform acestei teorii, se consideră că acțiunile ponderomotoare electrice și magnetice se transmit din aproape în aproape, prin spațiu și în timp, cu o viteză foarte mare dar finită. Dezvoltarea teoriei și pentru corpuri în mișcare a fost realizată de către H. Hertz în cadrul concepțiilor prerelativiste, vorbindu-se astfel de electrodinamica corpurilor în mișcare, respective de teoria macroscopică Maxwell-Hertz.

Teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice se bazează pe teoria acțiunii prin contiguitate, un rol primordial revenindu-i câmpului electromagnetic, care stă la baza transmiterii din aproape în aproape, cu viteză foarte mare însă finită, a interacțiunilor și stărilor electromagnetice. Câmpul electromagnetic poate fi generat de corpurile care se găsesc în anumite stări sau poate avea o existență independentă, sub formă de unde electromagnetice. Cele două laturi componente ale câmpului electromagnetic sunt câmpul electric și câmpul magnetic.

Teoria macroscopică relativistă a fenomenelor electromagnetice. Prezintă o formulare mai generală a legilor și fenomenelor electromagnetice, astfel încât acestea să fie valabile și la viteze foarte mari ale corpurilor, comparabilă cu viteza de propagare a luminii în vid (viteze relativiste). Legile acestei teorii sunt valabile în raport cu oricare sistem de referință inerțial, trecerea de la un sistem de referință la altul făcându-se pe baza transformării Lorentz.

Teoria microscopică clasică a fenomenelor electromagnetice (Teoria electronilor). Această teorie, ale cărei baze au fost puse de Lorentz, păstrează conceptul de câmp, dar în același timp admite și o structură discontinuă a corpurilor, recunoscându-se și caracterul discontinuu al sarcinii electrice. Pe baza acestei teorii pot fi interpretate microscopic unele proprietăți electrice și magnetice ale corpurilor, care nu pot fi explicate în cadrul teoriei macroscopice. În această teorie electronul ocupă o poziție centrală, determinând prin mișcarea sa o serie de fenomene electrice și magnetice. Teoria electronilor a primit o formulare mai generală în cadrul teoriei relativității restrânse, vorbindu-se astfel de teoria microscopică relativistă.

Teoria cuantică. Această teorie se bazează pe mecanica cuantică și ondulatorie. În cadrul teoriei cuantice, electronul, pe lângă masă și sarcină electrică elementară, mai posedă un moment cinetic propriu denumit spin și corespunzător, un moment magnetic de spin. Constituirea electrodinamicii cuantice, care are ca problemă principală cuantificarea câmpului electromag-

netic, reprezintă o etapă importantă în dezvoltarea fenomenelor electromagnetice la scară microscopică. Cuantele câmpului electromagnetic sunt fotonii, iar electronii și pozitronii sunt cuantele unui câmp, denumit câmp electro-pozitronic. Problemele din acest curs sunt prezentate în cadrul teoriei clasice a lui Maxwell-Hertz, făcându-se și unele referiri la scară microscopică pentru o mai bună înțelegere a diferitelor fenomene.

#### 4. MĂRIMI FIZICE. LEGI ȘI TEOREME

Mărimile fizice sunt utilizate în studiul fenomenelor fizice și corespund unor proprietăți fizice care pot fi caracterizate cantitativ. O mărime fizică este complet determinată când se cunosc: unitatea sa de măsură, procedeul de măsurare și valoarea sa ca rezultat al măsurării. Din punct de vedere al modului cum mărimile fizice se introduc într-o teorie, acestea se împart în:

- mărimi primitive, care se introduc direct pe cale experimentală, indicându-se concret unitatea de măsură și procedeul de măsurare;
- mărimi derivate, care se pot defini cu ajutorul mărimilor primitive sau a altor mărimi cunoscute.

În afara mărimilor primitive din alte domenii (lungime, masă, timp, temperatură etc.), în studiul fenomenelor electromagnetice se utilizează o serie de mărimi primitive specifice. Starea electromagnetică a corpurilor se caracterizează cu următoarele mărimi primitive: sarcina electrică,  $q$ ; momentul electric,  $\bar{p}$ ; densitatea curentului electric de conducție,  $\bar{J}$ ; momentul magnetic,  $\bar{m}$ . Starea locală a câmpului electromagnetic se caracterizează macroscopic cu ajutorul următoarelor mărimi vectoriale: intensitatea câmpului electric,  $\bar{E}$ ; inducția electrică,  $\bar{D}$ ; intensitatea câmpului magnetic,  $\bar{H}$ ; inducția magnetică,  $\bar{B}$ , din care, ca mărimi primitive se poate alege perechea  $\bar{E}$  și  $\bar{B}$ . În afara mărimilor menționate mai sus, în studiul fenomenelor electromagnetice se utilizează și mărimi derivate (fluxul electric, tensiunea electrică, fluxul magnetic, capacitatea electrică, rezistența electrică, inductivitatea etc.).

Între mărimile fizice ale unui domeniu de cercetare se pot stabili anumite dependențe, respective relații de legătură. Legile sunt relațiile care redau cele mai generale cunoștințe despre fenomenele unui domeniu de cercetare și care nu pot fi deduse pe cale logică în cadrul domeniului de studiu, din alte relații. Teoremele sunt relațiile care se deduc din legile domeniului de cercetare prin analiza logică. Legile teoriei macroscopice se împart în legi generale și legi de material. Legile de material au în expresia lor anumiți factori specifici diverselor materiale, factori numiți parametri de material.

Studiul fenomenelor electromagnetice se face în următoarea succesiune:

- se introduc mărimile primitive și principalele mărimi derivate;
- se expun legile și teoremele aferente acestor fenomene;



- se verifică practice consecințele legilor și teoremelor expuse, în limitele aproximației dată de teoria adoptată.

## 5. REGIMURILE FENOMENELOR ELECTROMAGNETICE

În teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice se disting după modul de variație în timp a mărimilor primitive sau derivate care intervin următoarele regimuri: regimul static, regimul staționar, regimul cvasistaționar și regimul nestaționar sau variabil al fenomenelor electromagnetice.

Regimul static este un caz particular al regimului staționar și se caracterizează prin următoarele: mărimile fizice nu variază în timp; mediile conductoare din sistemele respective nu sunt parcurse de curenți electrici; nu au loc transformări de energie; stare de imobilitate relativă a corpurilor. Există un regim static pentru câmpul electric numit regim electrostatic și un regim static pentru câmpul magnetic, produs de magneți permanenți, numit regim magnetostatic. Regimul staționar presupune toate mărimile constante în timp, dar cu posibilitatea transformării energiei câmpului electric și magnetic în alte forme de energie (mediile conductoare sunt parcurse de curenți electrici,  $\vec{J} \neq 0$ ).

Regimul cvasistaționar se caracterizează prin variații suficient de lente ale mărimilor fizice în raport cu timpul pentru a putea neglija la producerea câmpului magnetic, respectiv în legea circuitului magnetic, densitatea curentului de deplasare în raport cu densitatea curentului de conducție.

Regimul nestaționar sau variabil se caracterizează prin variația rapidă în timp a mărimilor electrice și magnetice. În acest caz, densitatea curentului de deplasare nu se mai poate neglija, iar variațiile sunt suficient de rapide pentru apariția undelor electromagnetice, care se propagă în mediul înconjurător.

Se pot distinge prin urmare, următoarele tipuri de câmpuri, în ordinea crescătoare a gradului lor de generalitate: câmpuri statice, câmpuri staționare, câmpuri cvasistaționare și câmpuri nestaționare.

Într-un regim nestaționar există o interdependență între mărimile de stare ale câmpului electric și câmpului magnetic variabile în timp. Astfel, variației în timp a câmpului magnetic îi corespunde un câmp electric și reciproc, variației în timp a câmpului electric îi corespunde un câmp magnetic.

În cazul regimurilor statice, datorită absenței curenților de conducție, dispăre legătura dintre câmpul electric și câmpul magnetic, cele două câmpuri fiind complet independente și putând fi studiate separate.

În teoria circuitelor electrice se utilizează în mod curent și noțiunile de regim permanent și regim tranzitoriu, care corespund unui alt criteriu de clasificare ce are în vedere modificarea formei de variație în timp a mărimilor fizice. Se poate vorbi de regimuri permanente atât la circuite în regim staționar, cât și la circuite în regim variabil. Regimurile tranzitorii presupun întotdeauna regimuri variabile și anume, regimuri de scurtă durată.

# 1. MĂRIMI DE STARE ALE CORPURILOR ȘI CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

**Câmpul electromagnetic** este un sistem fizic diferit de corpuri, care poate exista atât în interiorul corpurilor cât și în vid și care stă la baza transmiterii din aproape în aproape, cu viteză foarte mare dar finită, a stărilor și interacțiunilor electromagnetice.

## 1.1. STAREA DE ÎNCĂRCARE ELECTRICĂ A CORPURILOR

**Starea de electrizare** a corpurilor este acea stare în care acestea sunt capabile să exercite acțiuni ponderomotoare de natură electrică asupra altor corpuri. Corpurile se pot electriza prin frecare, prin contact cu corpurile electrizate, prin influență electrostatică, prin iradiere cu radiații Roentgen sau ultraviolete, prin încălzire (efect piroelectric), prin deformare (efect piezoelectric), prin efecte chimice, prin efecte fotoelectrice etc. Electrizarea se explică microscopic printr-un surplus sau un minim de electroni.

Starea de electrizare poate fi:

- stare de încărcare cu sarcină electrică;
- stare de polarizare.

**Starea de încărcare electrică** este acea stare de electrizare care este complet caracterizată prin sarcina electrică  $q$ . Această stare poate fi pusă în evidență prin experiențe simple. Astfel, dacă se freacă un baton de sticlă cu o bucată de mătase și apoi se separă cele două corpuri, se constată că atât între ele cât și asupra corpurilor ușoare din apropiere, se exercită forțe și cupluri care nu existau înainte. Se poate spune că cele două corpuri s-au încărcat cu sarcini electrice. Astfel, mătasea s-a încărcat cu sarcină electrică negativă, ca urmare a trecerii electronilor de pe baton pe ea, iar batonul rămâne încărcat cu sarcină electrică pozitivă, ca urmare a plecării electronilor.

**Sarcina electrică  $q$**  este mărimea primitivă scalară de stare a corpurilor, care caracterizează la scară microscopică starea de electrizare a acestora, fiind independentă de poziția și orientarea lor. Sarcina electrică negativă elementară aparține electronului și are valoarea,  $q_e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ . Protonul din nucleu conține sarcina electrică pozitivă elementară, egală ca valoare cu sarcina electronului. Unitatea de măsură a sarcinii electrice este **Coulombul (C)**.

Sarcina electrică are următoarele proprietăți:

- este o mărime scalară algebrică, putând fi pozitivă sau negativă;
- la scară microscopică sarcina electrică este cuantificată, valoarea sa fiind un multiplu al sarcinii electronului;
- sarcina electrică se conservă: într-un sistem izolat de corpuri electrizate suma algebrică a sarcinilor repartizate în diferite puncte ale sistemului este constantă.

Pentru caracterizarea locală a stării de electrizare a corpurilor s-au definit densitățile de sarcină electrică.

**Densitatea de volum  $\rho_v$  a sarcinii electrice**, corespunzătoare situației când sarcina unui corp este repartizată în volumul său, se definește prin relația:

$$\rho_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \left[ \frac{C}{m^3} \right] \quad (1.1)$$

unde  $\Delta q$  este sarcina electrică cuprinsă în volumul  $\Delta V$ .

**Densitatea de suprafață  $\rho_s$  a sarcinii electrice**, corespunzătoare unei repartiții a sarcinii electrice pe suprafațe subțiri sau pe corpuri electroconductoare, se definește prin relația:

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad (1.2)$$

unde  $\Delta q$  este sarcina electrică distribuită pe suprafața  $\Delta S$ .

**Densitatea de linie  $\rho_l$  a sarcinii electrice**, corespunzătoare unei repartiții a sarcinii electrice pe fire electroconductoare subțiri, se definește prin relația:

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \left[ \frac{C}{m} \right] \quad (1.3)$$

unde  $\Delta q$  este sarcina electrică distribuită pe suprafața  $\Delta l$ .

Domeniile  $\Delta V$ ,  $\Delta S$  și  $\Delta l$  considerate în relațiile de mai sus sunt suficient de mici pentru ca mărimile macroscopice să aibă o variație neglijabilă în cuprinsul lor.

Sarcina electrică poate fi situată și pe corpuri ale căror dimensiuni geometrice sunt neglijabile în raport cu distanțele ce le separă. Aceste corpuri se numesc corpuri punctiforme, iar sarcinile electrice respective se numesc sarcini electrice punctiforme.

Sarcina electrică dintr-un domeniu finit tridimensional, care conține o repartiție de volum a sarcinii în volumul  $V$ , o repartiție de suprafață pe suprafața  $S$ , o repartiție de linie pe curba  $C$  și respectiv, o repartiție pe  $n$  corpuri punctiforme, se calculează cu relația:

$$q = \iiint_V \rho_v dV + \iint_S \rho_s dS + \int_C \rho_l dl + \sum_{i=1}^n q_i \quad (1.4)$$

Un corp se găsește în stare neutră dacă suma algebrică a sarcinilor pe care le posedă este egală cu zero.

## 1.2. CÂMPUL ELECTRIC

**Câmpul electric** este un sistem fizic diferit de corpuri, care exercită direct acțiuni ponderomotoare asupra unor corpuri electrizate situate în regiunea din spațiu unde el există. Câmpul electric poate fi recunoscut și explorat cu ajutorul corpului de probă electrizat, care îndeplinește următoarele condiții:

- este izolat perfect față de alte corpuri;
- sarcina electrică cu care este încărcat este foarte mică pentru a nu modifica câmpul electric în care este introdus;
- dimensiunea sa este foarte mică (corp punctiform) pentru a se putea studia local câmpul electric în care este introdus.

Cauzele care produc câmpul electric sunt sarcinile electrice ale corpurilor și câmpul magnetic variabil în timp. Câmpul electric produs de sarcini electrice se mai numește și câmp electric coulombian. Câmpul electrostatic este una din stările limită ale câmpului electromagnetic, determinată de sarcini electrice invariabile în timp, situate pe corpuri în repaus.

Pentru caracterizarea câmpului electrostatic în vid, se introduce o mărime vectorială primitivă, numită **intensitatea câmpului electric în vid în regim electrostatic**,  $\vec{E}_0$ . S-a constatat experimental că forța  $\vec{F}$  care se exercită asupra unui corp de probă încărcat cu sarcina electrică  $q$  și situat într-un câmp electric, depinde de sarcina electrică a corpului și de o mărime care caracterizează câmpul electric în punctul în care s-a introdus corpul de probă. Acea mărime s-a numit intensitatea câmpului electric, iar forța  $\vec{F}$  este dată de relația:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}_0 \quad (1.5)$$

care exprimă matematic procesul de interacțiune dintre câmpul electric și corpurile punctiforme electrizate, reprezentând **legea acțiunii ponderomotoare în câmpul electrostatic** asupra corpurilor punctiforme.

**Inducția electrică**  $\vec{D}$  este o mărime fizică vectorială, care împreună cu intensitatea câmpului electric caracterizează starea locală câmpului electric. Atunci când câmpul electric este situat în vid, unde nu apare fenomenul de polarizare electrică, inducția electrică se exprimă astfel:

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad (1.6)$$

unde  $\epsilon_0$  este o constantă universală numită permitivitatea vidului și având valoarea:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{F}{m} \quad (1.7)$$

Unitatea de măsură pentru intensitatea câmpului electric este **Voltul pe metru (V/m)**, iar unitatea de măsură pentru inducția electrică este **Coulombul pe metru pătrat (C/m<sup>2</sup>)**.

Pentru a caracteriza în mod similar câmpul electric în corpurile polarizate, ar trebui practică, în jurul unui punct din corp, o cavitate vidă, suficient de mică pentru a nu perturba câmpul din domeniul exterior cavității. În cavitate se poate măsura o forță electrică, exercitată asupra unui corp de probă electrizat.

Dacă se notează cu  $\vec{E}$ , intensitatea câmpului electric într-un punct al corpului înainte practicării cavității (câmp electric datorat sarcinilor electrice

adevărate și de polarizație) și cu  $\vec{E}_{p\text{cav}}$ , intensitatea câmpului electric datorat sarcinilor de polarizație apărute prin practicarea cavității, atunci intensitatea câmpului electric în vidul cavității  $\vec{E}_{\text{cav}}$  va fi dată de relația:

$$\vec{E}_{\text{cav}} = \vec{E} + \vec{E}_{p\text{cav}} \quad (1.8)$$

**Liniile câmpului electric** sunt acele linii fictive din spațiu la care vectorul intensitatea câmpului electric este permanent tangent. Sensul liniilor câmpului electric este același cu sensul intensității câmpului electric. Liniile de câmp electric sunt linii deschise, începând din punctele unde sunt situate sarcini electrice pozitive și sfârșindu-se în punctele unde sunt situate sarcini electrice negative. Un astfel de câmp se numește câmp potențial.

Reprezentând totalitatea liniilor de câmp electric dintr-un plan se obține spectrul liniilor de câmp electric. În figura 1.1 sunt prezentate spectrele liniilor de câmp electric produs de o sarcină electrică punctiformă și respectiv, de două sarcini electrice punctiforme vecine.

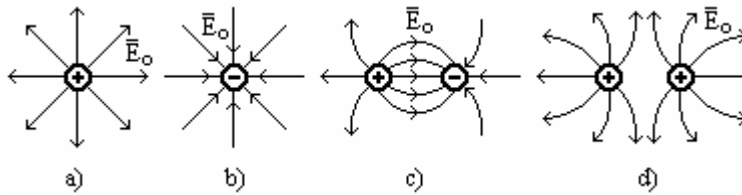


Fig. 1.1 Spectrele liniilor câmpului electric produs de: a) o sarcină punctiformă pozitivă; b) o sarcină punctiformă negativă; c) două sarcini punctiforme de semne contrare; d) două sarcini punctiforme de același semn

Tubul de câmp electric este constituit din totalitatea liniilor de câmp electric cuprinse în interiorul unei suprafețe ce se sprijină pe un contur închis și are o anumită secțiune transversală  $\Delta S$ .

Ecuția diferențială a liniilor de câmp electric se obține ținând cont de faptul că vectorii  $\vec{E}$  și  $d\vec{l}$  sunt coliniari, ceea ce înseamnă că produsul lor vectorial este nul. Vectorul  $d\vec{l}$  se numește element de linie, are sensul lui  $\vec{E}$ , fiind un mic vector tangent la linia câmpului electric. În coordonate carteziene vectorii  $\vec{E}$  și  $d\vec{l}$  au expresiile:

$$\vec{E} = \vec{i} \cdot E_x + \vec{j} \cdot E_y + \vec{k} \cdot E_z; \quad d\vec{l} = \vec{i} \cdot l_x + \vec{j} \cdot l_y + \vec{k} \cdot l_z \quad (1.9)$$

iar produsul vectorial dintre  $\vec{E}$  și  $d\vec{l}$  devine:

$$\vec{E} \times d\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad (1.10)$$

Calculând determinantul și ținând cont de faptul că un vector este nul când toate componentele sale după cele trei axe sunt nule, se obține ecuația diferențială a liniilor câmpului electric:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1.11)$$

### 1.3. CÂMPUL ELECTRIC IMPRIMAT

Intensitatea câmpului electric imprimat  $\vec{E}_i$  nu este un câmp electric propriu-zis ci o mărime echivalentă cu ajutorul căreia se exprimă forțele de natură neelectrică care acționează asupra particulelor electrizate. **Câmpurile imprimate** pot fi localizate într-un întreg domeniu (câmpuri imprimate de volum) sau numai pe anumite suprafețe de discontinuitate (câmpuri imprimate pe interfețe sau de contact).

#### Câmpuri electrice imprimate de accelerație

Aceste câmpuri electrice imprimate apar în conductoarele accelerate, ca de exemplu într-un disc metalic inițial neîncărcat cu sarcină electrică, care se rotește în jurul axei sale. Electronii liberi din metal sunt supuși unor forțe centrifuge radiale și ca urmare se vor deplasa spre marginea discului, astfel că, la periferia discului se separă sarcina electrică negativă, iar în centrul discului se separă sarcina electrică pozitivă.

Procesul de separare a sarcinilor electrice are loc până la stabilirea echilibrului electrostatic, când forța electrică datorată câmpului electric coulombian  $\vec{E}_C$ , produs prin separarea sarcinilor din disc, compensează acțiunea forței centrifuge:

$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{neel} = q\vec{E}_C + q\vec{E}_i = q(\vec{E}_C + \vec{E}_i) \Rightarrow \vec{E}_C + \vec{E}_i = 0 \quad (1.12)$$

unde  $\vec{E}_i$  este intensitatea câmpului electric imprimat.

Din momentul în care electronii se pun în mișcare și până în momentul stabilirii echilibrului electrostatic, apare în disc o stare electrocinetică caracterizată printr-o deplasare de scurtă durată a electronilor, deplasare datorată câmpului electric imprimat de accelerație.

#### Câmpuri electrice imprimate de volum termoelectrice

Aceste câmpuri electrice imprimate apar ca urmare a unei încălziri neuniforme a unui conductor metalic. Datorită diferenței de temperatură (a agitației termice diferite), electronii vor difuza din zona de agitație termică mai mare (temperatură mai ridicată) în zona cu agitație termică mai scăzută (temperatură mai scăzută). Regiunea cu temperatură mai ridicată se va încărca pozitiv, iar regiunea cu temperatură mai scăzută se va încărca negativ (efectul Thomson).

### Câmpuri electrice imprimate de contact voltaice

Aceste câmpuri electrice imprimate apar pe suprafața de contact a două metale care se găsesc la aceeași temperatură și nu sunt supuse acțiunii vreunui agent extern. Câmpul electric imprimat de contact este pus în evidență prin apariția unei diferențe de potențial ( $V_1 - V_2$ ) între cele două conductoare. Această diferență de potențial se explică prin faptul că în stratul de neomogenitate, forțele datorate agitației termice ce se exercită asupra electronilor din acest strat, nu se compensează și apare o deplasare a electronilor din zona mai densă în zona mai puțin densă.

În stratul de contact al celor două conductoare se stabilește o diferență de potențial egală și de semn contrar cu t.e.m. imprimată de contact.

### Câmpuri electrice imprimate de contact termoelectrice

Se consideră un circuit conductor închis, format din două conductoare electrice din materiale diferite (fig. 1.2) sudate la ambele capete. Dacă se supun cele două suduri la temperaturi diferite ( $T_A > T_B$ ), în circuit apare un curent electric (efect Seebeck).

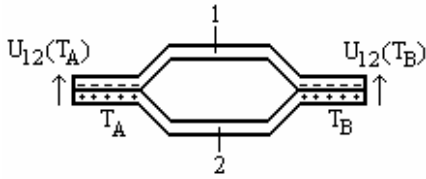


Fig. 1.2 Câmpul electric imprimat termoelectric

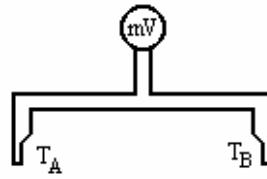


Fig. 1.3 Schema unui termocuplu

Pe principiul câmpurilor imprimate termoelectrice se construiesc termocuplurile întrebuințate pentru determinarea diferenței de temperatură, prin măsurarea tensiunii care apare între cele două capete ale metalelor diferite nesudate între ele, cu ajutorul unui milivoltmetru magnetoelectric de curent continuu (fig. 1.3).

### Câmpuri electrice imprimate de contact galvanice

Aceste câmpuri imprimate apar la contactul dintre un metal și un electrolit, ca urmare a diferenței care există între presiunea de dizolvare a metalului în electrolit și presiunea osmotică (de depunere) a ionilor din electrolit pe metal.

La introducerea unei bare de cupru într-o soluție de sulfat de cupru, presiunea osmotică este mai mare decât presiunea de dizolvare și ca urmare ionii de cupru se depun pe bara de cupru, aceasta încărcându-se pozitiv, iar soluția negativ. Câmpul electric imprimat va avea sensul spre metal, iar câmpul electric coulombian spre soluție. T.e.m. care apar între metale (electrozi) și soluție se numesc tensiuni de electrod, acestea măsurându-se în raport cu un electrod de referință, al cărui potențial de electrod se consideră nul.

### Câmpuri electrice imprimate fotovoltaice

Aceste câmpuri electrice imprimate apar pe suprafața de separație dintre un metal și un semiconductor, la iluminarea acestei suprafețe. Energia fotonilor incidenti este transmisă electronilor. Stratul de separație are proprietăți de conductibilitate unidirecțională și ca urmare electronii vor trece mai ușor într-un sens decât în celălalt. Această asimetrie este echivalentă existenței unor forțe neelectrice medii necompensate în cele două sensuri, adică a unui câmp electric imprimat. Pe baza acestui fenomen sunt realizate fotoelementele utilizate ca surse de energie electrică.

### 1.4. STAREA DE POLARIZAȚIE ELECTRICĂ

Există corpuri neîncărcate electric (neutre din punct de vedere electric), care într-un câmp electric exterior sunt supuse unor acțiuni ponderomotoare și produc câmp electric. Aceste corpuri sunt polarizate electric, iar starea lor se numește **stare de polarizație electrică**.

Stare de polarizație poate fi obținută prin deformare mecanică (piezoelectricitate), încălzire (piezoelectricitate), topire și solidificare într-un câmp electric intens (electreți), fie prin simpla introducere a corpurilor într-un câmp electric. Corpurile din prima categorie prezintă o polarizație permanentă (cristale de cuarț, sare Seignette, turmalină, electreți - rășini, plexiglas), iar cele din a doua categorie se află într-o stare de polarizație temporară (se menține atât timp cât corpurile se află într-un câmp electric exterior, produs de alte corpuri).

În materialele dielectrice, sub acțiunea unui câmp electric exterior, sarcinile electrice pozitive și negative, legate și neseperabile ale atomilor și moleculelor, se deplasează în mod elastic, cele pozitive în sensul câmpului exterior, iar cele negative în sens contrar, atomul sau molecula fiind transformată într-un dipol electric elementar. Prin **dipol electric** se înțelege un sistem de sarcini electrice egale și de semne contrare ( $+q$  și  $-q$ ) și situate la o distanță  $\Delta l$  foarte mică (fig. 1.4).

Dipolul electric se caracterizează printr-o mărime vectorială numită moment electric,  $\vec{p}_d$ :

$$\vec{p}_d = q \cdot \Delta \vec{l} \quad (1.13)$$

unde vectorul  $\Delta \vec{l}$  este orientat de la sarcina negativă la sarcina pozitivă.

Există dielectrics cu molecule polare (HCl, H<sub>2</sub>O, NO<sub>2</sub>), ale căror molecule se prezintă sub forma unor dipoli electrics elementari orientați în toate direcțiile, în mod dezordonat. Prin introducerea acestora într-un câmp electric, moleculele polare se orientează după direcția câmpului electric (fig. 1.4). Există dielectrics cu molecule nepolare (O<sub>2</sub>, N, H<sub>2</sub>, Ge, Si) la care dipolii elementari apar numai prin

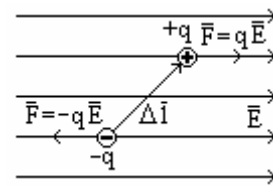


Fig. 1.4 Dipolul electric



deformarea atomilor când aceștia sunt introduși într-un câmp electric.

Fenomenul de orientare a dipolilor electrici elementari după o anumită direcție se numește **polarizare electrică**.

Pentru caracterizarea stării de polarizare a unui mic corp dielectric se utilizează o mărime fizică vectorială primitivă, numită moment electric ( $\bar{\mathbf{p}}$ ), care intervine în relațiile:

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{p}} \times \bar{\mathbf{E}}_o; \quad \bar{\mathbf{F}} = \text{grad} \left( \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_o \right) \quad (1.14)$$

unde:  $\bar{\mathbf{E}}_o$  reprezintă intensitatea câmpului electric în vid în punctul în care se află corpul;  $\bar{\mathbf{C}}$  - cuplul electric care acționează asupra corpului orientându-l după direcția câmpului electric;  $\bar{\mathbf{p}}$  - momentul electric;  $\bar{\mathbf{F}}$  - forța electrică care se exercită asupra corpului introdus într-un câmp electric neuniform; săgeata verticală indică mărimea vectorială asupra căreia se aplică gradientul.

În cazul în care corpul are atât polarizație electrică permanentă cât și polarizație temporară, momentul electric are expresia:

$$\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}_p + \bar{\mathbf{p}}_t \quad (1.15)$$

unde:  $\bar{\mathbf{p}}_p$  reprezintă momentul electric permanent, iar  $\bar{\mathbf{p}}_t$  - momentul electric temporar. Unitatea de măsură a momentului electric este **Coulomb metru (Cm)**.

Pentru caracterizarea locală a stării de polarizație electrică se utilizează o mărime vectorială derivată, numită **polarizație electrică ( $\bar{\mathbf{P}}$ )**. Este definită ca densitatea de volum a momentelor electrice și se calculează cu relația:

$$\bar{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\mathbf{p}}}{\Delta V} = \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dV} \left[ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right] \quad (1.16)$$

unde:  $\Delta \bar{\mathbf{p}} = \sum_{(\Delta V)} \bar{\mathbf{p}}_i$ , reprezintă suma vectorială a momentelor electrice din volumul  $\Delta V$  al corpului considerat.

Ca și momentul electric, polarizația electrică are două componente:

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}_p + \bar{\mathbf{P}}_t \quad (1.17)$$

Polarizația permanentă  $\bar{\mathbf{P}}_p$  depinde de factorii neelectrici, iar polarizația temporară  $\bar{\mathbf{P}}_t$  depinde de intensitatea locală a intensității câmpului electric.

### 1.5. STAREA ELECTROKINETICĂ

**Electrocinetica** studiază stările electrice ale conductoarelor parcurse de curenți electrici de conducție. În electrocinetică sunt prezentate mărimile fizice

care caracterizează starea electrocinetică, legile și fenomenele caracteristice pentru regimul staționar cât și pentru regimul nestaționar.

Trecerea curentului electric prin conductoare determină o stare specifică acestora, denumită **stare electrocinetică**, caracterizată printr-o transformare a energiei electromagnetice în alte forme de energie.

Starea electrocinetică poate fi pusă în evidență printr-o serie de efecte, cele mai importante fiind:

- efecte calorice, evidențate prin căldura dezvoltată la trecerea curentului electric prin conductoare;
- efecte electrochimice, care constau în reacțiile chimice ce au loc la trecerea curentului electric prin electroliți;
- efecte mecanice, care constau în interacțiuni electrodinamice (forțe și momente exercitate între conductoarele parcurse de curent) și în interacțiuni electromagnetice (forțe și momente între conductoarele parcurse de curent și câmpul electromagnetic);
- efecte luminoase, care apar în becurile cu incandescență sau în cele cu descărcări electrice în gaze;
- efecte magnetice, care apar în jurul conductoarelor parcurse de curent electric;
- efecte electrice, care apar la descărcarea unui condensator.

În stare electrocinetică, sarcinile electrice se mișcă ordonat cu o anumită viteză, aceasta însemnând că intensitatea câmpului electric în metale și în celelalte conductoare are o valoare diferită de zero, ceea ce constituie deosebirea esențială între fenomenul electrostatic și fenomenul electrocinetic.

Legând capetele unui conductor metallic la bornele unei surse de tensiune, între care se menține o diferență de potențial constantă ( $V_1 - V_2 = \text{const.}$ ), în interiorul conductorului apare un câmp electric constant, vectorul intensității câmpului electric,  $\vec{E}$ , fiind orientat de la capătul cu potențial mai mare,  $V_1$ , spre capătul cu potențial mai mic,  $V_2$  (fig. 1.5).

Asupra unui electron liber din metal va acționa o forță electrică,  $\vec{F} = q\vec{E}$ , orientată în sens opus față de intensitatea câmpului electric, deoarece sarcina electronului este negativă. Sub acțiunea acestei forțe, electronul se deplasează cu viteza  $\vec{v}$  de la potențialul mai mic spre potențialul mai mare.

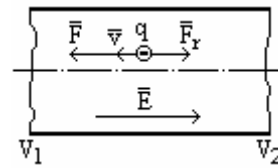


Fig. 1.5 Conductor în stare electrocinetică

În timpul deplasării electronilor apare o forță de frecare  $\vec{F}_r$ , care se opune mișcării, datorită ciocnirilor dintre electroni și ceilalți atomi. Starea electrocinetică este însoțită de dezvoltare de căldură, datorită “frecării” care are loc în mișcarea sarcinilor electrice.

**Curentul electric** reprezintă o deplasare ordonată a particulelor încărcate cu sarcină electrică. Mișcarea particulelor încărcate electric se poate face în interiorul corpurilor sau în vid. Curentul electric poate fi: curent electric de conducție, curent electric de deplasare, curent electric de convecție etc.

Orice mișcare ordonată de sarcini electrice într-un mediu conductor determină **curentul electric de conducție**. După natura purtătorilor de sarcini electrice, ioni sau electroni, curentul de conducție se numește curent de conducție ionic sau electronic, iar corpul respectiv va prezenta o conducție ionică (electrolizii) sau electronică (metalele).

Proprietatea corpurilor de a “conduce” se numește conductibilitate electrică și se caracterizează local printr-un parametru de material, numit conductivitate electrică.

Caracterizarea stării electrocinetice se face cu ajutorul **intensității curentului electric de conducție  $i$** , care reprezintă suma algebrică a sarcinilor electrice,  $\Delta q$ , ale particulelor microscopice libere care trec printr-o secțiune a conductorului în unitatea de timp:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int_0^t i dt \quad (1.18)$$

Intensitatea curentului electric de conducție este o mărime scalară și prin definiție sensul pozitiv al curentului electric este sensul în care se deplasează sarcinile electrice pozitive. Unitatea de măsură a intensității curentului electric este **Amperul [A]**.

Dacă sarcinile electrice se deplasează în conductor cu viteză constantă, curentul electric **I** este constant în timp (curent continuu), ceea ce înseamnă că aceeași secțiune este străbătută de cantități egale de sarcini electrice la intervale de timp egale:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I \cdot t \quad (1.19)$$

Pentru caracterizarea locală a stării electrocinetice s-a introdus o mărime fizică vectorială numită densitatea curentului electric de conducție,  $\vec{J}$ , definită astfel încât fluxul acestui vector printr-o secțiune **S** a conductorului să fie egal cu intensitatea curentului electric de conducție prin acea secțiune:

$$i_s = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS \quad (1.20)$$

unde sensul elementului de suprafață  $d\vec{S}$  se stabilește cu regula burghiului drept, după ce în prealabil a fost ales un sens de parcurgere a conturului suprafeței **S**.

În cazul conductoarelor omogene rectilinii și filiforme, de secțiune constantă **S**, străbătute de un curent electric continuu și uniform repartizat în secțiune **I<sub>s</sub>**, densitatea curentului de conducție se definește astfel:

$$\vec{J} = \frac{I_S}{S} \vec{n} = J \vec{n} \quad (1.21)$$

unde  $\vec{n}$  este versorul normalei secțiunii transversale  $S$  a conductorului. Unitatea de măsură a densității de curent electric este **Amperul pe metru pătrat** [ $A/m^2$ ].

**Liniile de curent** sunt liniile tangente în fiecare punct la direcția locală a vectorului densitate de curent. Volumul limitat de suprafața tubulară formată dintr-un ansamblu de linii de curent, care trec printr-o curbă închisă, se numește **tub de curent**.

**Curentul de deplasare** printr-o suprafață fixă  $S$  situată într-un câmp electric este determinat de viteza de variație a fluxului electric prin suprafața respectivă. Rezultă că există curent de deplasare numai când câmpul electric este variabil în timp.

**Densitatea curentului de deplasare** într-un punct de pe suprafața  $S$  este egală cu viteza de variație a inducției electrice în punctul respectiv:

$$\vec{J}_D = \frac{d\vec{D}}{dt} \quad [A/m^2] \quad (1.22)$$

**Intensitatea curentului de deplasare** printr-o suprafață fixă  $S$  este definită ca fiind fluxul vectorului densitatea curentului de deplasare prin suprafața respectivă:

$$i_{D_S} = \iint_S \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S} \quad (1.23)$$

**Curentul electric de convecție** constă în mișcarea sarcinilor electrice datorită mișcării macroscopice a întregului corp. astfel, prin deplasarea unui corp încărcat cu sarcina electrică  $q$ , cu viteza  $\vec{v}$  față de un sistem fix, apare o deplasare ordonată a sarcinii electrice, deci un curent electric (fig. 1.6).

Intensitatea curentului de convecție se definește ca fiind limita raportului dintre suma algebrică a sarcinilor electrice  $\Delta q$  care traversează o suprafață fixă  $S$  (prin mișcarea întregului corp) într-un interval de timp de durată  $\Delta t$ , când  $\Delta t$  tinde la zero și când limita există:

$$i_{v_S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{J}_v \cdot d\vec{S} \quad (1.24)$$

unde  $\vec{J}_v$  este vectorul densitate a curentului electric de convecție definit prin relația:

$$\vec{J}_v = \rho_v \cdot \vec{v} \quad (1.25)$$

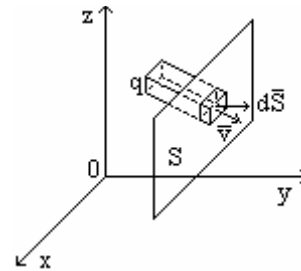


Fig. 1.6 Figură explicativă la calculul intensității curentului electric de convecție

În relația (1.25)  $\rho_v$  reprezintă densitatea de volum a sarcinii electrice a corpului care se mișcă cu viteza  $\vec{v}$  față de sistemul fix.

## 1.6. CÂMPUL MAGNETIC

În zona învecinată corpurilor magnetizate sau în jurul conductoarelor parcurse de curent există o stare nouă, denumită **câmp magnetic**, care se manifestă prin forțe și cupluri ce acționează asupra acestor conductoare parcurse de curent sau asupra acestor corpuri magnetizate. În spațiul în care există un câmp electric variabil în timp există și un câmp magnetic variabil în timp și invers, existența unui câmp magnetic variabil în timp presupune existența unui câmp electric variabil în timp. Cele două câmpuri se condiționează reciproc, constituind împreună **câmpul electromagnetic**.

Curenții determinați de mișcarea ordonată a sarcinilor electrice, denumiți și curenți liberi, produc atât în interiorul conductoarelor cât și în exteriorul lor câmp magnetic. Curentul de conducție continuu, care străbate un conductor în repaus, produce un câmp magnetic staționar. Curenții moleculari (curenții lui Ampère) denumiți și curenți legați sunt caracteristici corpurilor magnetizate și produc, la rândul lor câmp magnetic.

În concluzie, câmpul magnetic este produs de curenți liberi și legați, precum și de câmpul electric variabil în timp.

Mărimile vectoriale de stare locală ale câmpului magnetic sunt: **inducția magnetică**,  $\vec{B}$  și **intensitatea câmpului magnetic**,  $\vec{H}$ . Unitatea de măsură a inducției magnetice este **Tesla [T]**, iar unitatea de măsură a intensității câmpului magnetic este **Amper/metru [A/m]**.

Inducția câmpului magnetic a fost pusă în evidență experimental, fiind o mărime primitivă. S-a constatat că dacă un mic corp electrizat, având sarcina electrică  $q$ , se mișcă cu viteza  $\vec{v}$  în vid, în câmp magnetic, atunci asupra sa se exercită o forță perpendiculară pe direcția de mișcare (**forța lui Lorentz**) și care este dată de relația:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}_0 \quad (1.26)$$

Mărimea vectorială  $\vec{B}_0$ , astfel introdusă în relația (1.26), caracterizează câmpul magnetic în punctul în care se află micul corp electrizat și poartă numele de inducția magnetică în vid.

Dacă corpul electrizat este introdus simultan atât într-un câmp magnetic cât și într-un câmp electric de intensitate  $\vec{E}_0$ , forța care se va exercita asupra va fi dată de relația:

$$\vec{F} = q (\vec{E}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0) \quad (1.27)$$

Considerând un element de conductor  $d\vec{l}$ , filiform, parcurs de un curent de conducție cu intensitatea  $i$ , situat în vid, în câmp magnetic, experiența arată că

asupra sa se exercită o forță, numită **forță Laplace**, care este dată de relația (**legea acțiunii ponderomotoare în câmpul magnetic**):

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}_0 \quad (1.28)$$

unde elementul de linie  $d\vec{l}$  este luat în lungul conductorului, în sensul curentului  $i$ .

Intensitatea câmpului magnetic în vid  $\vec{H}_0$  este o mărime de stare derivată a câmpului magnetic și este definită prin relația:

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (1.29)$$

unde  $\mu_0$  este o constantă universală, numită **permeabilitatea magnetică a vidului** și are valoare:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad (1.30)$$

unde **H** este **Henry**, unitatea de măsură a inductivității.

Pentru explorarea câmpului magnetic în vid se utilizează un corp de probă numit **bucă de curent** (o mică spiră închisă de arie  $S$  și parcursă de curentul  $i$ ). Bucă de curent se caracterizează prin **vectorul momentului buclei**  $\vec{m}_b$ , definit astfel:

$$\vec{m}_b = i\vec{S} = iS\vec{n} \quad (1.31)$$

unde  $\vec{n}$  este versorul normal la suprafața spirei, având sensul dat prin regula burghiului drept (sensul de înaintare a burghiului, dacă este răsucit în sensul curentului  $i$ ).

Prin introducerea buclei de curent într-un câmp magnetic uniform, aflat în vid, se constată că asupra ei va acționa un cuplu, în raport cu centrul ei de masă, care este proporțional cu momentul buclei și cu inducția magnetică în vid, în punctul în care se află bucla de curent:

$$\vec{C} = \vec{m}_b \times \vec{B}_0 \quad (1.32)$$

**Liniile câmpului magnetic** sunt acele linii fictive din spațiu la care vectorul inducție magnetică este permanent tangent, sensul liniei fiind același cu sensul lui  $\vec{B}$ . Liniile de câmp magnetic sunt linii închise, ceea ce conferă un caracter solenoidal câmpului vectorilor inducției magnetice.

Ecuatiile liniilor câmpului magnetic se obțin ținând cont de faptul că vectorii  $\vec{B}$  și  $d\vec{l}$  sunt coliniari, ceea ce înseamnă că produsul lor vectorial este nul:

$$d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \quad (1.33)$$

În coordonate carteziene vectorii  $\vec{B}$  și  $d\vec{l}$  au expresiile:

$$\vec{B} = \vec{i} \cdot B_x + \vec{j} \cdot B_y + \vec{k} \cdot B_z; \quad d\vec{l} = \vec{i} \cdot l_x + \vec{j} \cdot l_y + \vec{k} \cdot l_z \quad (1.34)$$

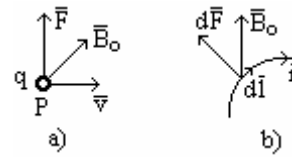


Fig. 1.7 Forța lui Lorentz (a) și forța lui Laplace

iar produsul vectorial dintre  $\vec{B}$  și  $d\vec{l}$  devine:

$$\vec{B} \times d\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad (1.35)$$

Calculând determinantul se obține:

$$\vec{B} \times d\vec{l} = \vec{i}(dy B_z - dz B_y) + \vec{j}(dz B_x - dx B_z) + \vec{k}(dx B_y - dy B_x) = 0 \quad (1.36)$$

și ținând cont de faptul că un vector este nul când toate componentele sale după cele trei axe sunt nule, se obține ecuația diferențială a liniilor câmpului electric:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (1.36)$$

Liniile de câmp magnetic se reprezintă astfel încât numărul lor pe unitatea de suprafață transversală să fie proporțional cu modulul inducției magnetice, formând astfel **spectrul câmpului magnetic** (ansamblul liniilor de câmp magnetic dintr-un plan).

Spectrul câmpului magnetic, creat de un conductor rectiliniu, filiform și foarte lung, străbătut de un curent electric  $I$ , este format din cercuri situate în plane perpendiculare pe direcția conductorului și având centrul pe axa conductorului (fig. 1.8 a). Sensul liniilor este dat de regula burghiului drept sensul în care trebuie rotit burghiul pentru ca înaintarea lui să fie în sensul curentului).

Spectrul liniilor de câmp magnetic, creat de o spiră circulară, străbătută de un curent electric, este prezentat în figura 1.8 b. Liniile de câmp magnetic sunt situate în plane perpendiculare pe axul spirei trecând prin centrul ei.

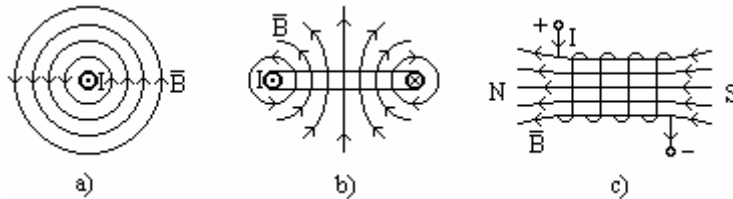


Fig. 1.8 Spectrul liniilor de câmp magnetic produs de: un conductor infinit lung (a); o spiră circulară (b); un solenoid (c)

Spectrul liniilor de câmp magnetic al unui solenoid străbătut de un curent electric este prezentat în figura 1.8 c. Solenoidul este o bobină care se obține prin înfășurarea unui conductor pe suprafața laterală a unui cilindru. Câmpul magnetic din interiorul bobinei se poate considera omogen dacă lungimea bobinei este mult mai mare decât diametrul ei. Sensul liniilor de câmp magnetic este dat de regula burghiului drept.

**Tubul de câmp magnetic** este constituit din totalitatea liniilor de câmp magnetic cuprinse în interiorul unei suprafețe ce se sprijină pe un contur închis și are o anumită secțiune transversală  $\Delta S$ .

### 1.7. STAREA DE MAGNETIZARE A CORPURILOR

Prin introducerea corpurilor într-un câmp magnetic, acestea trec într-o nouă stare, numită **stare de magnetizare**, în care sunt supuse unor acțiuni ponderomotoare suplimentare față de cele condiționate de starea lor electrocinetică sau de starea lor de mișcare. Corpurile în stare de magnetizare produc în jurul lor un câmp magnetic, care se manifestă prin exercitarea de acțiuni ponderomotoare asupra unor corpuri electrizate în mișcare, asupra unor conductoare parcurse de curenți electrici de conducție sau asupra altor corpuri magnetizate.

În mod natural există anumiți oxizi de fier, numiți magneți naturali, care au proprietatea de a produce câmp magnetic. Magneții pot fi produși în mod artificial prin magnetizarea anumitor substanțe (oțel, nichel, cobalt și aliajele lor), numite materiale feromagnetice.

Stările de magnetizare ale corpurilor pot fi **temporare** (când depind de intensitatea câmpului magnetic exterior) sau **permanente** (când nu depind de intensitatea câmpului magnetic exterior). Experiența arată că magnetizația temporară este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic exterior.

Starea de magnetizare a unui corp mic se caracterizează printr-o mărime vectorială de stare numită **moment magnetic**  $\vec{m}$ . Asupra acestui corp, aflat în vid și introdus într-un câmp magnetic, vor acționa un cuplu  $\vec{C}$  și o forță  $\vec{F}$ , date de relațiile:

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B}_0; \quad \vec{F} = \text{grad} \left( \vec{m} \cdot \vec{B}_0 \right) \quad (1.37)$$

Cuplul  $\vec{C}$  care acționează asupra corpului are o valoare maximă atunci când momentul magnetic este perpendicular pe vectorul inducție magnetică, micul corp tinzând să se orienteze pe direcția câmpului magnetic. Forța  $\vec{F}$  se exercită numai în câmpuri neuniforme și este îndreptată spre regiunile de câmp intens.

Momentul magnetic  $\vec{m}$  caracterizează complet starea de magnetizare a corpurilor. Direcția lui se numește direcția de magnetizare a corpului, iar dreapta suport a vectorului  $\vec{m}$ , orientată în sensul acestuia se numește axă de magnetizare. Dacă momentul magnetic se anulează în lipsa câmpului magnetic exterior, se numește **moment magnetic temporar**  $\vec{m}_t$ , iar dacă la anularea câmpului magnetic mai rămâne un moment magnetic, acesta se numește



**moment magnetic permanent**  $\bar{m}_p$ . În general, momentul magnetic  $\bar{m}$  se poate exprima cu relația:

$$\bar{m} = \bar{m}_p + \bar{m}_t \quad (1.38)$$

Pentru caracterizarea locală a stării de magnetizare a unui corp de dimensiuni mari se utilizează o mărime vectorială derivată, numită **magnetizație** ( $\bar{M}$ ). Este definită ca densitatea de volum a momentelor magnetice și se calculează cu relația:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{m}}{\Delta V} = \frac{d\bar{m}}{dV} \left[ \frac{A}{m} \right] \quad (1.39)$$

unde:  $\Delta \bar{m} = \sum_{(\Delta V)} \bar{m}_i$ , reprezintă suma vectorială a momentelor magnetice din volumul  $\Delta V$  al corpului considerat.

Ca și momentul magnetic, magnetizația are două componente:

$$\bar{M} = \bar{M}_p + \bar{M}_t \quad (1.40)$$

Dacă se cunoaște în fiecare punct magnetizația unui corp de dimensiuni mari, momentul său magnetic va fi:

$$\bar{m} = \iiint_{V_{corp}} \bar{M} dV \quad (1.41)$$

Unitatea de măsură a momentului magnetic este **Amper metru pătrat** ( $Am^2$ ), iar a magnetizației este **Amper/metru** ( $A/m$ ).

Magnetizația corpurilor se poate explica prin mișcările electronilor din cadrul unui atom sau al unei molecule, pe orbite în jurul nucleului (mișcare orbitală) și în jurul axelor proprii (mișcare de spin). Un electron în mișcarea sa orbitală constituie o buclă de curent, care este echivalentă cu un corp mic magnetizat. Buclei de curent îi corespunde un moment magnetic orbital  $\bar{m}_o$  și un moment magnetic de spin  $\bar{m}_s$ . Momentul magnetic al unui atom este determinat de suma vectorială a momentelor magnetice orbitale și de spin.

Moleculele la care momentul magnetic rezultat este nul în lipsa unui câmp magnetic exterior se numesc **molecule nepolare**, iar moleculele la care acest moment magnetic rezultat este diferit de zero în lipsa câmpului magnetic exterior, se numesc **molecule polare**.

Materialele cu magnetizație temporară se împart, din punct de vedere al proprietăților magnetice, în două categorii: **materiale diamagnetice** (de exemplu cuprul), care se magnetizează în sens opus câmpului magnetic exterior (sunt substanțe nepolare); **materiale paramagnetice** (de exemplu aluminiul), care se magnetizează în sensul câmpului magnetic exterior (sunt substanțe polare). Din categoria materialelor paramagnetice fac parte **materialele feromagnetice**, care se magnetizează extrem de puternic și care prezintă histerezis și magnetizație permanentă.

## 2. LEGI ȘI TEOREME ALE TEORIEI MACROSCOPICE A ELECTROMAGNETISMULUI

### 2.1. LEGILE STĂRILOR TEMPORARE

#### 2.1.1. LEGEA POLARIZAȚIEI TEMPORARE

La corpurile cu polarizare temporară starea de polarizație a acestora depinde, într-un anumit mod de câmpul electric aplicat.

**Legea polarizației temporare** este o lege generală de material care se poate determina pe cale experimentală și precizează faptul că vectorul polarizare temporară  $\bar{P}_t$  este o funcție de intensitatea câmpului electric  $\bar{E}$ , care se stabilește în dielectric:

$$\bar{P}_t = \bar{P}_t(\bar{E}) \quad (2.1)$$

Forma acestei relații depinde de dielectricul considerat și de condițiile în care are loc polarizarea.

Există diferite categorii de materiale dielectrice. Un corp este omogen dacă are aceleași proprietăți fizice în toate punctele sale; în caz contrar corpul este neomogen. Dacă proprietățile fizice în vecinătatea unui punct oarecare dintr-un corp sunt aceleași după toate direcțiile, corpul este izotrop; în caz contrar corpul este anizotrop.

Pentru materialele izotrope, polarizația electrică temporară  $\bar{P}_t$  este egală cu produsul dintre intensitatea câmpului electric  $\bar{E}$ , susceptivitatea electrică  $\chi_e$  a materialului și permitivitatea  $\epsilon_0$  a vidului:

$$\bar{P}_t = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \bar{E} . \quad (2.2)$$

În general, susceptivitatea electrică  $\chi_e$ , care este un parametru de material scalar adimensional, depinde de punctul considerat din corp și de intensitatea câmpului electric. În cazul dielectricilor liniari polarizația temporară  $\bar{P}_t$  este direct proporțională cu  $\bar{E}$ , ceea ce înseamnă că  $\chi_e$  este independentă de  $\bar{E}$ . Dacă susceptivitatea electrică depinde de  $\bar{E}$ ,  $\chi_e = \chi_e(\bar{E})$ , dielectricii sunt neliniari. Pentru vid și aer,  $\chi_e = 0$ .

#### 2.1.2. LEGEA MAGNETIZAȚIEI TEMPORARE

**Legea magnetizației temporare** este o lege generală de material care exprimă dependența locală dintre componenta temporară a magnetizației  $\bar{M}_t$  și intensitatea câmpului magnetic  $\bar{H}$ :

$$\overline{M}_t = \overline{M}_t(\overline{H}) \quad (2.3)$$

Pentru materialele liniare și izotrope, magnetizația temporară este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic care o determină:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H}, \quad (2.4)$$

unde  $\chi_m$  este o mărime scalară care depinde de material și se numește susceptivitate magnetică.

## 2.2. LEGILE CONSTITUTIVE

### 2.2.1. LEGEA LEGĂTURII DINTRE INDUCȚIA ELECTRICĂ $\overline{D}$ , INTENSITATEA CÂMPULUI ELECTRIC $\overline{E}$ ȘI POLARIZAȚIA $\overline{P}$

Într-un punct dintr-un mediu polarizat, există următoarea relație de legătură dintre mărimile de stare  $\overline{D}$  și  $\overline{E}$  ale câmpului electric și vectorul polarizație electrică  $\overline{P}$ :

$$\overline{D} = \epsilon_0 \cdot \overline{E} + \overline{P}, \quad (2.5)$$

Relația (2.5) reprezintă o lege generală, valabilă în orice regim al câmpului electromagnetic. Polarizația electrică  $\overline{P}$  este egală în orice punct al unui dielectric (polarizat) cu suma dintre polarizația permanentă  $\overline{P}_p$  și polarizația temporară  $\overline{P}_t$ :

$$\overline{P} = \overline{P}_p + \overline{P}_t. \quad (2.6)$$

În cazul mediilor izotrope fără polarizație permanentă, ținând cont de legea polarizației temporare (rel. 2.2), legea legăturii dintre  $\overline{D}$ ,  $\overline{E}$  și  $\overline{P}$  devine:

$$\overline{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\overline{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \overline{E} = \epsilon \overline{E}, \quad (2.7)$$

unde:  $\epsilon$  reprezintă permitivitatea absolută a dielectricului ( $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ ), iar  $\epsilon_r$  - permitivitatea relativă a dielectricului ( $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ ).

Rezultă că în cazul vidului ( $\epsilon_r = 1$ ), legea legăturii dintre  $\overline{D}$ ,  $\overline{E}$  și  $\overline{P}$  va avea forma particulară:

$$\overline{D}_0 = \epsilon_0 \overline{E}_0 \quad (2.8)$$

În cazul mediilor dielectrice izotrop vectorii  $\overline{D}$ ,  $\overline{E}$  și  $\overline{P}$  sunt coliniari, iar în cazul materialelor anizotrope (cristalele) acești vectori nu mai sunt coliniari, iar susceptivitatea electrică și permitivitatea reprezintă mărimi tensoriale (fiecare componentă a inducției electrice este o funcție de toate componentele intensității câmpului electric). În cazul dielectricilor anizotropi, legea legăturii dintre  $\overline{D}$ ,  $\overline{E}$  și  $\overline{P}$  are următoarea formă:

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \left( 1 + \overline{\chi}_e \right) \overline{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \overline{\varepsilon}_r \overline{\mathbf{E}} = \overline{\varepsilon} \overline{\mathbf{E}}, \quad (2.8)$$

unde mărimile  $\overline{\chi}_e$ ,  $\overline{\varepsilon}_r$  și  $\overline{\varepsilon}$  sunt tensori simetrici de ordinul 2.

La dielectricii anizotropi există, în general, trei direcții privilegiate triortogonale, numite axele electrice ale cristalului, după care dacă ar fi orientată intensitatea câmpului electric, polarizația electrică și inducția electrică ar avea aceeași orientare.

### 2.2.2. LEGEA LEGĂTURII DINTRE INDUCȚIA MAGNETICĂ $\overline{\mathbf{B}}$ , INTENSITATEA CÂMPULUI MAGNETIC $\overline{\mathbf{H}}$ ȘI MAGNETIZAȚIA $\overline{\mathbf{M}}$

În fiecare punct dintr-un mediu magnetizat, între mărimile de stare ale câmpului magnetic  $\overline{\mathbf{B}}$  și  $\overline{\mathbf{H}}$  și magnetizația  $\overline{\mathbf{M}}$  există următoarea relație de legătură:

$$\overline{\mathbf{B}} = \mu_0 \left( \overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{M}} \right). \quad (2.9)$$

În cazul mediilor izotrope vectorii  $\overline{\mathbf{B}}$ ,  $\overline{\mathbf{H}}$  și  $\overline{\mathbf{M}}$  au aceeași orientare, iar în cazul mediilor anizotrope au orientări diferite. Prin magnetizația  $\overline{\mathbf{M}}$  se înțelege în cazul general atât magnetizația temporară  $\overline{\mathbf{M}}_t$  cât și magnetizația permanentă  $\overline{\mathbf{M}}_p$  ( $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}}_p + \overline{\mathbf{M}}_t$ ).

În cazul mediilor izotrope fără magnetizație permanentă, ținând cont de legea magnetizației temporare (rel. 2.4), legea legăturii dintre  $\overline{\mathbf{B}}$ ,  $\overline{\mathbf{H}}$  și  $\overline{\mathbf{M}}$  devine:

$$\overline{\mathbf{B}} = \mu_0 (1 + \chi_m) \overline{\mathbf{H}} = \mu_0 \mu_r \overline{\mathbf{H}} = \mu \overline{\mathbf{H}}, \quad (2.10)$$

unde:  $\mu$  reprezintă permeabilitatea absolută ( $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ ), iar  $\mu_r$  - permeabilitatea relativă a materialului ( $\mu_r = 1 + \chi_m$ ).

Rezultă că în cazul vidului ( $\mu_r = 1$ ), legea legăturii dintre  $\overline{\mathbf{B}}$ ,  $\overline{\mathbf{H}}$  și  $\overline{\mathbf{M}}$  va avea forma particulară:

$$\overline{\mathbf{B}}_0 = \mu_0 \overline{\mathbf{H}}_0 \text{ sau } \overline{\mathbf{H}}_0 = \nu_0 \overline{\mathbf{B}}_0 \quad (2.11)$$

unde  $\nu_0$  reprezintă reluctivitatea vidului.

În cazul materialelor anizotrope liniare (medii cristaline) legea magnetizației temporare se scrie în general sub forma:

$$\overline{\mathbf{M}}_t = \overline{\chi}_m \overline{\mathbf{H}} \quad (2.12)$$

unde  $\overline{\chi}_m$  reprezintă tensorul susceptivității magnetice.

Legea legăturii dintre  $\overline{\mathbf{B}}$ ,  $\overline{\mathbf{H}}$  și  $\overline{\mathbf{M}}$ , ținând cont de relația (2.12), devine:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.13)$$

unde  $\mu$  reprezintă tensorul permeabilității magnetice absolute.

### 2.3. LEGEA FLUXULUI ELECTRIC. TEOREMA LUI GAUSS

Fluxul electric printr-o suprafață  $S$  închisă sau deschisă este o mărime scalară, care se definește ca fiind integrala de suprafață a vectorului inducție electrică  $\vec{D}$  prin această suprafață (fig. 2.1):

$$\Psi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \vec{D} d\vec{S} = \iint_{S_\Gamma} D dS \cos \alpha \quad (2.14)$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre vectorul inducție electrică și vectorul element de suprafață (unghiul  $\alpha$  poate fi mai mic sau mare de  $90^\circ$ , conducând la valori pozitive sau negative ale fluxului electric).

În cazul suprafețelor deschise sensul pozitiv al vectorului  $d\vec{S}$  se stabilește cu regula burghiului drept în funcție de sensul de parcurgere a curbei  $\Gamma$ .

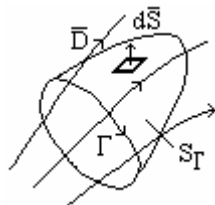


Fig. 2.1 Figură explicativă la definirea fluxului electric

În cazul suprafețelor închise, sensul lui  $d\vec{S}$  se alege spre exteriorul suprafeței, normal la suprafață.

**Legea fluxului electric** a fost determinată experimental și se enunță astfel: **fluxul electric printr-o suprafață închisă  $\Sigma$  este numeric egal cu sarcina electrică totală  $q_\Sigma$  conținută în interiorul acelei suprafețe:**

$$\Psi_\Sigma = \iint_{\Sigma} \vec{D} d\vec{S} = q_\Sigma \quad (2.15)$$

Relația (2.15) reprezintă forma integrală a legii fluxului electric.

Considerând o repartire a sarcinii electrice  $q_\Sigma$  în întregul volum  $V_\Sigma$  al suprafeței  $\Sigma$ , cu densitatea de volum a sarcinii electrice  $\rho_v$  și aplicând teorema lui Gauss-Ostrogradski relației (2.15) se obține forma locală a legii fluxului electric:

$$\iiint_{V_\Sigma} \text{div} \vec{D} dV = \iiint_{V_\Sigma} \rho_v dV \Rightarrow \quad (2.16)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_v \quad (2.17)$$

**În orice punct din câmpul electric omogen, divergența inducției electrice este egală cu densitatea de volum a sarcinii electrice.**

**Teorema lui Gauss** este un caz particular al legii fluxului electric și se referă la fluxul vectorului intensitatea câmpului electric în vid, calculat pentru o suprafață închisă.

Conform acestei teoreme, fluxul vectorului  $\vec{E}_0$  printr-o suprafață închisă

este proporțional cu sarcina electrică totală existentă pe corpuri în interiorul acestei suprafețe, factorul de proporționalitate fiind  $1/\epsilon_0$ :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\Sigma} \quad (2.18)$$

Dacă în interiorul suprafeței închise nu există corpuri încărcate cu sarcini electrice, teorema lui Gauss se exprimă prin relația:

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.19)$$

În cazul unei repartiții în volumul suprafeței  $\Sigma$  a sarcinii electrice, aplicând teorema lui Gauss-Ostrogradski relației (2.18) se obține forma locală a teoremei lui Gauss:

$$\operatorname{div} \vec{E}_o = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_v \quad (2.20)$$

Din legea fluxului electric rezultă unitatea de măsură a fluxului electric care este **Coulombul (C)**.

### Aplicație

Să se determine intensitatea câmpului electric produs de o sarcină electrică punctiformă  $q > 0$ , într-un punct  $P$  situat în vid la distanța  $r$  de sarcină, utilizând teorema lui Gauss.

Se consideră o suprafață sferică închisă de rază  $r$ , în centrul căreia se află sarcina  $q$  (fig. 2.2). Datorită simetriei punctelor de pe suprafața sferei considerate față de sarcina  $q$ , în toate aceste puncte vectorii  $\vec{E}_o$  și  $d\vec{S}$  sunt coliniari, iar  $\vec{E}_o = \text{const}$ . Rezultă:

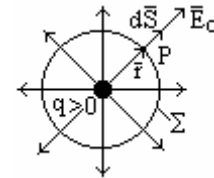


Fig. 2.2

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} E_o \cdot dS = E_o \iint_{\Sigma} dS = E_o \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

de unde se obține valoarea intensității câmpului electric:

$$E_o = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

## 2.4. LEGEA FLUXULUI MAGNETIC

Se consideră o suprafață deschisă  $S_{\Gamma}$  delimitată de o curbă  $\Gamma$  și situată într-un câmp magnetic. Fluxul magnetic  $\Phi_{S_{\Gamma}}$  prin suprafața considerată, se definește prin integrala de suprafață a vectorului inducție magnetică  $\vec{B}$ :

$$\phi_{S_r} = \iint_{S_r} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_r} B dS \cos \alpha \quad (2.21)$$

Fluxul magnetic este o mărime scalară, în funcție de unghiul  $\alpha$  dintre vectorii  $\vec{B}$  și  $d\vec{S}$  putând avea valori pozitive sau negative. Dacă liniile de câmp sunt normale la suprafață ( $\alpha = 0$ ) și dacă vectorul  $\vec{B}$  are aceeași valoare prin orice punct al suprafeței considerate, atunci:

$$\phi_{S_r} = B \cdot S_r \quad (2.22)$$

Unitatea de măsură a fluxului magnetic este **Weberul [W]**.

**Legea fluxului magnetic** a fost stabilită experimental și se enunță astfel: **fluxul magnetic prin orice suprafață închisă  $\Sigma$  este întotdeauna nul, oricare ar fi natura și starea de mișcare a mediilor prin care trece suprafața  $\Sigma$  și oricare ar fi variația în timp a inducției magnetice:**

$$\phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.23)$$

Relația (2.23) reprezintă forma integrală a legii fluxului magnetic. Forma locală a legii fluxului magnetic se obține aplicând teorema lui Gauss-Ostrogradski în relația (2.23):

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_{\Sigma}} \text{div } \vec{B} \cdot dV = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.24)$$

În orice punct din câmpul magnetic divergența vectorului inducție magnetică este nulă. Rezultă că liniile câmpului magnetic sunt linii închise, câmpul magnetic având un caracter solenoidal.

Legea fluxului magnetic are următoarele **consecințe**:

1. Fluxul magnetic depinde numai de conturul pe care se sprijină suprafața.

Dacă se consideră o curbă închisă  $\Gamma$  aflată într-un câmp magnetic și două suprafețe deschise oarecare  $S_{r_1}$  și  $S_{r_2}$  care se sprijină pe acea curbă (fig. 2.3), fluxul magnetic prin suprafața închisă  $\Sigma$  ( $S_{r_1} \cup S_{r_2}$ ) este nul conform legii fluxului magnetic:

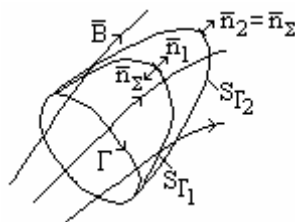


Fig. 2.3 Figură explicativă la prima la prima consecință a legii fluxului magnetic

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\Sigma} = \iint_{S_{r_1}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{r_1} + \iint_{S_{r_2}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{r_2} = -\iint_{S_{r_1}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{r_1} + \iint_{S_{r_2}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{r_2} = 0 \quad (2.25)$$

$$\iint_{S_{r_1}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{r_1} = \iint_{S_{r_2}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{r_2} \Rightarrow \phi_{S_{r_1}} = \phi_{S_{r_2}} \quad (2.26)$$

Conform relației (2.26) fluxul magnetic are aceeași valoare prin toate

suprafețele deschise care se sprijină pe același contur.

2. Liniile de câmp magnetic sunt linii închise.

Dacă aceste linii ar porni sau ar sfârși într-un punct, atunci fluxul magnetic printr-o suprafață închisă care înconjoară punctul ar fi diferit de zero.

3. Fluxul magnetic se conservă în jurul unui tub de linii de câmp (fig. 2.4).

Aplicând legea fluxului magnetic unui tub de flux (volumul delimitat de totalitatea liniilor de câmp care trec prin punctele unei curbe închise  $\Gamma$ ) rezultă:

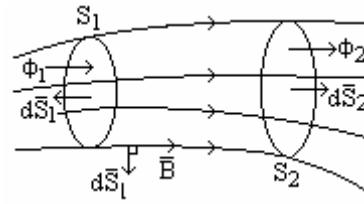


Fig. 2.4 Conservarea fluxului magnetic printr-un tub de flux

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S}_{\Sigma} = \iint_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_{S_1} + \iint_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_{S_2} + \iint_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_{S_1} = -\iint_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_2 = 0 \quad (2.27)$$

$$\iint_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_2 \Rightarrow \phi_{S_{r1}} = \phi_{S_{r2}} \quad (2.28)$$

deoarece pe suprafața laterală fluxul magnetic este nul ( $\vec{B} \perp d\vec{S}_l$ ).

**Câmpul inducției magnetice  $\vec{B}$  derivă dintr-un potențial vector.**

Deoarece divergența rotorului unui vector este întotdeauna egală cu zero, rezultă că vectorul inducție magnetică poate fi scris sub forma rotorului unui vector:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (2.29)$$

Mărimea vectorială  $\vec{A}$  astfel introdusă, poartă numele de potențial magnetic vector. Fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă  $S_{\Gamma}$  mărginită de curba închisă  $\Gamma$ , poate fi exprimat cu ajutorul potențialului magnetic vector astfel:

$$\phi_{S_{\Gamma}} = \iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} d\vec{S} = \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} \quad (2.30)$$

La scrierea relației (2.30) s-a utilizat teorema lui Stokes și această relație arată faptul că fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă depinde numai de conturul care limitează suprafața (prima consecință a legii fluxului magnetic).

Unitatea de măsură a potențialului magnetic vector este **Weber pe metru** [W/m].

**2.5. LEGEA CONSERVĂRII SARCINII ELECTRICE. TEOREMA CONTINUITĂȚII LINIILOR DE CURENT**

Se consideră o suprafață  $\Sigma$  închisă în interiorul căreia există corpuri încărcate electric și care trece, în general, prin dielectrice și medii conductoare (fig. 2.5). Se arată experimental, că dacă sarcina electrică din interiorul



suprafeței  $\Sigma$  variază, această variație presupune implicit apariția unui curent electric de conducție prin suprafața  $\Sigma$ . Un exemplu simplu este prezentat în figura 2.6; un condensator în prealabil încărcat este descărcat printr-un conductor metalic de rezistență  $R$ .

S-a constatat experimental că intensitatea curentului electric de conducție care trece prin circuit în timpul descărcării condensatorului, este egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice  $q_{\Sigma}$  de pe armătura condensatorului din interiorul suprafeței  $\Sigma$ :

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \quad (2.31)$$

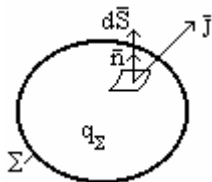


Fig. 2.5 Curentul de conducție printr-o suprafață închisă

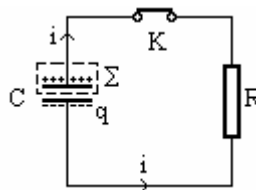


Fig. 2.6 Figură explicativă la legea conservării sarcinii electrice

Relația (2.31) poate fi generalizată considerând că există și corpuri încărcate electric în mișcare și ca urmare, pe lângă intensitatea curentului de conducție, există și intensitatea curentului de convecție:

$$i_{v_{\Sigma}} + i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \quad (2.32)$$

Relația (2.32) reprezintă **legea conservării sarcinii electrice** sub formă integrală și se enunță astfel: **suma dintre intensitățile curentului electric de conducție  $i_{\Sigma}$  și curentului electric de convecție  $i_{v_{\Sigma}}$ , care ies dintr-o suprafață fixă și închisă  $\Sigma$  este egală în fiecare moment cu viteza de scădere a sarcinii electrice  $q_{\Sigma}$  localizată în interiorul suprafeței.**

În cazul unei repartiții a sarcinii electrice în volumul suprafeței  $\Sigma$ , cu densitatea de volum a sarcinii electrice  $\rho_v$ , forma integrală dezvoltată a legii conservării sarcinii electrice este următoarea:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{J} + \rho_v \vec{v}) d\vec{S} = -\iiint_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dV \quad (2.33)$$

Aplicând teorema lui Gauss-Ostrogradski în membrul stâng al relației (2.33) se obține forma locală a legii conservării sarcinii electrice:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{J} + \rho_v \vec{v}) d\vec{S} = \iiint_{V_{\Sigma}} \text{div}(\vec{J} + \rho_v \vec{v}) dV = -\iiint_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dV \Rightarrow \quad (2.34)$$

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{J} + \rho_v \vec{v}) \quad (2.35)$$

În regim electrocinetic staționar, în care mărimile sunt constante în timp, legea conservării sarcinii electrice devine:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt} = 0 \quad (2.36)$$

Relația (2.36) reprezintă **teorema continuității liniilor de curent** și se enunță astfel: **intensitatea curentului electric de conducție care trece printr-o suprafață închisă este nulă** (intensitatea curentului care iese din suprafața închisă este egală cu intensitatea curentului care intră în suprafața respectivă). Liniile de curent sunt linii închise, deci curentul continuu circulă numai prin circuite electrice închise.

O consecință a teoremei continuității liniilor de curent este următoarea: curentul continuu are aceeași intensitate de-a lungul unui tub de curent și în particular de-a lungul unui conductor electric neramificat (de exemplu, latura unei rețele electrice).

În regim electrostatic  $\vec{i}_\Sigma = \vec{0}$ , rezultând  $q_\Sigma = \text{constant}$ , adică sarcina electrică a unui sistem izolat de conductori este constantă (teorema conservării sarcinii electrice în regim electrostatic).

## 2.6. LEGEA CONDUȚIEI ELECTRICE

În fiecare punct al unui mediu conductor în stare electrocinetică, între intensitatea câmpului electric și densitatea curentului de conducție există o anumită dependență care poate fi scrisă sub forma generală:

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E}) \quad (2.37)$$

Forma explicită a acestei relații depinde de natura și starea mediului conductor. Relația (2.37) este o lege de material și reprezintă **legea conducției electrice în formă locală**.

Într-un caz general asupra purtătorilor de sarcină electrică din mediile conductoare pot să acționeze și forțe care nu sunt de natură electrică:

$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{neel} = q(\vec{E} + \vec{E}_i) \neq 0 \quad (2.38)$$

În prezența câmpurilor imprimare, legea conducției electrice pentru medii izotrope și liniare devine:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i) \text{ sau } \vec{E} + \vec{E}_i = \rho \vec{J} \quad (2.39)$$

unde:  $\vec{E}_i$  este intensitatea câmpului electric imprimat;  $\rho$  - rezistivitatea materialului și depinde atât de material cât și de temperatură;  $\sigma$  - conductivitatea electrică a materialului (este inversul rezistivității).

În conductoare omogene și neaccelerate unde nu există câmp electric

imprimat, relația (2.39) devine:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \text{ sau } \vec{E} = \rho \vec{J} \quad (2.40)$$

Într-un mediu omogen, izotrop și neaccelerat, vectorul densității de curent coincide ca direcție și sens cu vectorul intensității câmpului electric, iar liniile de curent coincid cu liniile câmpului electric. În cazul mediilor conductoare anizotrope intensitatea câmpului electric și densitatea curentului electric nu mai au aceeași orientare. Pentru un material anizotrop, liniar și fără câmpuri imprimate, legea conducției electrice se poate scrie sub forma:

$$\vec{J} = \overset{\equiv}{\sigma} \vec{E} \text{ sau } \vec{E} = \overset{\equiv}{\rho} \vec{J} \quad (2.41)$$

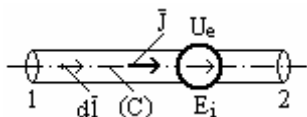
unde:  $\overset{\equiv}{\sigma}$  este tensorul conductivității electrice, iar  $\overset{\equiv}{\rho}$  este tensorul rezistivității electrice.

Pentru circuite filiforme, pentru care densitatea curentului electric este constantă în toate punctele unei secțiuni transversale, se utilizează forma integrală a legii conducției electrice. Pentru aceasta se consideră o porțiune de circuit filiform (fig. 2.7) în care se găsește o sursă de câmp electric imprimat. Integrând forma locală a legii conducției electrice (rel. 2.39) pe curba  $C$  (axa conductorului) între punctele **1** și **2**, rezultă:

$$\int_{1(C)}^2 (\vec{E} + \vec{E}_i) d\vec{l} = \int_{1(C)}^2 \rho \vec{J} d\vec{l} \quad (2.42)$$

Deoarece circuitul este filiform ( $\vec{J} = \vec{i}/S$ ;  $\vec{J}$  paralel cu  $d\vec{l}$ ), rezultă:

$$\vec{J} d\vec{l} = J dl = \frac{i dl}{S} \quad (2.43)$$



unde:  $S$  este secțiunea conductorului, iar  $i$  este intensitatea curentului prin conductor.

Ținând cont de relația (2.43), relația (2.42) devine:

$$\int_{1(C)}^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_{1(C)}^2 \vec{E}_i d\vec{l} = i \int_{1(C)}^2 \rho \frac{dl}{S} \quad (2.44)$$

Fig. 2.7 Figură explicativă la calculul formei integrale a legii conducției electrice

Se fac următoarele notații:

$$u_{12} = u_r = \int_{1(C)}^2 \vec{E} d\vec{l} \text{ - tensiunea în lungul firului;}$$

$$u_{ei} = u_{e12} = \int_{1(C)}^2 \vec{E}_i d\vec{l} \text{ - tensiunea electromotoare imprimată;}$$

$$R_{12} = \int_{1(C)}^2 \rho \frac{dl}{S} \text{ - rezistența electrică a porțiunii de circuit.}$$

Cu notațiile făcute se obține forma integrală a legii conducției electrice:

$$u_{12} + u_{e12} = i \cdot R_{12} \quad (2.45)$$

care se enunță astfel: **pentru o porțiune neramificată de circuit filiform, suma dintre tensiunea electrică în lungul firului și tensiunea electrică imprimată a surselor ce se găsesc în acea porțiune de circuit, este egală cu produsul dintre intensitatea curentului și o mărime scalară R, caracteristică circuitului, numită rezistență electrică.**

Pentru un circuit închis ( $u_{12} = 0$ ,  $u_{e12} = u_e$ ), relația (2.45) devine:

$$u_e = R i \quad (2.46)$$

unde  $u_e$  este t.e.m. de contur. Relația (2.46) arată cauza fizică care stabilește curentul electric de conducție printr-un circuit închis și anume t.e.m.  $u_e$ , care poate fi produsă fie de câmpuri electrice imprimate (elemente galvanice), fie de câmpuri electrice solenoidale (generatoare electrice).

Aplicată la circuitele electrice de curent continuu, legea conducției electrice sub formă integrală se mai numește și **legea lui Ohm**, iar pentru o porțiune pasivă de circuit electric (fără surse de câmp electric imprimat) are forma:

$$U_b = R I \quad (2.47)$$

unde  $U_b$  este tensiunea la bornele circuitului de rezistență  $R$ .

Din legea lui Ohm, **rezistența** unui conductor este numeric egală cu raportul dintre tensiunea electrică continuă aplicată conductorului și curentul care-l străbate:

$$R = \frac{U_b}{I} \quad (2.48)$$

Rezistența unui conductor de secțiune  $S$  și rezistivitate  $\rho$ , delimitat între punctele **1** și **2** este dată de relația:

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} \quad (2.49)$$

iar în cazul unui conductor omogen de lungime  $l$ , rezistența întregului conductor va fi:

$$R_{12} = \rho \frac{l}{S} \quad (2.50)$$

Mărimea inversă rezistenței se numește conductanță și se notează cu  $G$  ( $G = 1/R$ ). În sistemul internațional de unități, rezistența electrică are ca unitate de măsură **Ohmul** [ $\Omega$ ], iar conductanța – **Siemensul** [ $S$ ]. Elementul de circuit caracterizat complet prin rezistență electrică se numește rezistor.

Rezistivitatea  $\rho$  a materialelor conductoare depinde liniar de temperatură, dacă diferențele de temperatură sunt mici. Relația de calcul a rezistivității  $\rho_\theta$ , la temperatura  $\theta$ , în funcție de rezistivitatea  $\rho_0$  de la temperatura de referință  $\theta_0$ , este următoarea:

$$\rho_{\theta} = \rho_0 [1 + \alpha(\theta - \theta_0)] \quad (2.51)$$

unde  $\alpha$  reprezintă coeficientul de creștere a rezistivității cu temperatura. Coeficientul  $\alpha$  poate fi pozitiv (la majoritatea metalelor) sau negativ (la cărbune, constantan, electroliți).

## 2.7. LEGEA TRANSFORMĂRII ENERGIEI ÎN CONDUCTOARE

Starea electrocinetică este caracterizată prin existența unui curent electric și printr-o transformare a energiei câmpului electromagnetic în alte forme de energie. Joule și Lenz au stabilit experimental că în orice conductor electric parcurs de curent electric se dezvoltă căldură.

Forma locală a legii transformării energiei în conductoare este dată de relația (2.52) și se enunță astfel: **puterea electromagnetică  $p$  cedată unității de volum a conductorului de către câmpul electromagnetic în procesul de conducție, este egală cu produsul scalar dintre intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și densitatea curentului electric de conducție  $\vec{J}$ :**

$$p = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (2.52)$$

Forma integrală a legii transformării energiei în conductoare se enunță astfel: **puterea electromagnetică primită de un conductor filiform de la câmpul electromagnetic în procesul de conducție este egală cu produsul dintre tensiunea electrică în lungul conductorului,  $u_f$ , și intensitatea curentului din conductor,  $i$ :**

$$P = u_f \cdot i \quad (2.53)$$

Dacă se ține seama de legea conducției electrice (rel. 2.45), relația (2.53) devine:

$$P = Ri^2 - u_e \cdot i = P_R - P_G. \quad (2.54)$$

Primul termen al relației (2.45),  $P_R = Ri^2 \geq 0$ , reprezintă puterea disipată ireversibil sub formă de căldură în conductoare de către câmpul electromagnetic. Dezvoltarea de căldură este caracteristică stării electrocinetice și poartă numele de **efect electrocaloric** sau **efect Joule-Lenz**. Al doilea termen al relației,  $P_G = u_e \cdot i$ , poate fi pozitiv sau negativ și reprezintă puterea primită sau cedată de sursa de câmp electric imprimat. Sursa de tensiune electromotoare debitează energie dacă sensurile curentului și tensiunii electromotoare coincid,  $u_{ei} \cdot i > 0$ , iar dacă sensurile diferă, sursa primește energie,  $u_{ei} \cdot i < 0$ .

Unitatea de măsură a puterii este **Wattul [W]**, iar a energiei este **Joulul [J]**. În electrotehnică se utilizează pentru energie o unitate mai mare, **Kilowattora [kWh]**:  $1\text{kWh} = 10^3\text{W} \cdot 3600\text{s} = 3,6 \cdot 10^6\text{J}$ .

Efectul electrocaloric al curentului electric are largi aplicații în tehnică, ca de exemplu: iluminatul electric; încălzirea electrică în cuptoarele electrice cu

rezistență, cu arc electric sau prin inducție; sudura electrică; tratamentele termice prin metode electrice (călirea prin curenți de medie și înaltă frecvență).

## 2.8. LEGEA CIRCUITULUI MAGNETIC. TEOREMA LUI AMPÈRE

**Legea circuitului magnetic** exprimă legătura dintre intensitatea câmpului magnetic și curenții care produc acest câmp.

**Tensiunea magnetică** între două puncte **A** și **B** ale unei curbe  $\Gamma$  este integrala de linie a intensității câmpului magnetic  $\vec{H}$  în lungul curbei  $\Gamma$ , între punctele **A** și **B**:

$$u_{m_{AB}} = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{H} d\vec{l} \quad (2.55)$$

**Tensiunea magnetomotoare** (t.m.m.) a curbei  $\Gamma$  reprezintă circulația vectorului intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$  în lungul curbei  $\Gamma$ :

$$u_{mm_{\Gamma}} = \oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} \quad (2.56)$$

**Solenația** printr-o suprafață deschisă mărginită de conturul  $\Gamma$  (fig. 2.8) se definește ca fiind suma algebrică a intensităților curenților din conductoarele care trec prin suprafața respectivă:

$$\theta_{S_{\Gamma}} = \sum_{k=1}^n i_k \quad (2.57)$$

În această sumă sunt pozitivi curenții care au sensul normalei  $\vec{n}$ , iar cei care au sensul opus normalei  $\vec{n}$  intră în sumă cu semnul minus (sensul normalei  $\vec{n}$  se asociază cu sensul de parcurgere a conturului curbei  $\Gamma$  după regula burghiului drept). Pentru figura 2.8, solenația este  $\theta_{S_{\Gamma}} = i_1 - i_2 + i_3$ .

În cazul general, solenația se calculează cu relația:

$$\theta_{S_{\Gamma}} = \iint_{S_{\Gamma}} \vec{J} d\vec{S} \quad (2.58)$$

Legea circuitului magnetic s-a stabilit experimental și în formă integrală se enunță astfel: **în orice moment, t.m.m.  $u_{mm_{\Gamma}}$ , de-a lungul oricărei curbe închise  $\Gamma$  este egală cu suma dintre solenația  $\theta_{S_{\Gamma}}$  prin orice suprafață deschisă mărginită de curba  $\Gamma$  și viteza de variație a fluxului electric  $\psi_{S_{\Gamma}}$  care străbate o suprafață deschisă  $S_{\Gamma}$  mărginită de acest contur:**

$$u_{mm_{\Gamma}} = \theta_{S_{\Gamma}} + \frac{d\psi_{S_{\Gamma}}}{dt} \quad (2.59)$$

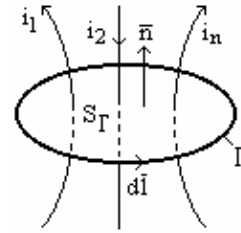


Fig. 2.8 Figură explicativă la definirea solenației

Ținând cont de relațiile de definiție pentru mărimile care intervin în această lege se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \iint_{S_{\Gamma}} \bar{J} d\bar{S} + \frac{d}{dt} \iint_{S_{\Gamma}} \bar{D} d\bar{S} \quad (2.60)$$

Pentru cazul corpurilor în mișcare curba  $\Gamma$  și  $S_{\Gamma}$  trebuie considerate în mișcare odată cu corpurile. Astfel, derivata în raport cu timpul a fluxului electric, care intervine în această relație, referindu-se la o suprafață mobilă, trebuie interpretată ca o derivată substanțială. Dacă se notează cu  $\bar{v}$  viteza corpurilor în raport cu sistemul de referință considerat, se obține forma integrală dezvoltată a legii circuitului magnetic pentru corpuri în mișcare:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \iint_{S_{\Gamma}} \bar{J} d\bar{S} + \iint_{S_{\Gamma}} \left[ \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{D} \times \bar{v}) + \bar{v} \text{div} \bar{D} \right] d\bar{S} \quad (2.61)$$

Forma locală se obține din forma integrală prin transformarea integralei de linie din membrul stâng în integrală de suprafață (teorema lui Stokes):

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot} \bar{H} d\bar{S} = \iint_{S_{\Gamma}} \left[ \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{D} \times \bar{v}) + \bar{v} \text{div} \bar{D} \right] d\bar{S} \quad (2.62)$$

de unde rezultă:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{D} \times \bar{v}) + \rho_v \cdot \bar{v}; \quad \text{div} \bar{D} = \rho_v \quad (2.63)$$

Seminificația termenilor din relația (2.63) este următoarea:  $\bar{J}$  reprezintă densitatea curentului de conducție;  $\bar{J}_C = \rho_v \cdot \bar{v}$  - densitatea curentului de convecție;  $\bar{J}_R = \text{rot}(\bar{D} \times \bar{v})$  - densitatea curentului Roentgen;  $\bar{J}_D = \partial \bar{D} / \partial t$  - densitatea curentului de deplasare. Din punct de vedere practic, termenii  $\bar{J}_C$  și  $\bar{J}_R$  nu prezintă interes, putând fi neglijați în raport cu ceilalți. De altfel, în cazul mașinilor electrice, care reprezintă un domeniu important de aplicație a legilor fenomenelor electromagnetice pentru corpuri în mișcare, se pot neglija și curenții de deplasare, câmpul magnetic fiind stabilit practic numai de curenții de conducție.

Pentru corpurile aflate în stare de repaus, deoarece variația fluxului electric se datorează numai variației locale a inducției electrice, forma integrală a legii circuitului magnetic devine:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \iint_{S_{\Gamma}} \bar{J} d\bar{S} + \iint_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{S} \quad (2.64)$$

Forma locală a legii circuitului magnetic pentru medii în repaus se obține aplicând teorema lui Stokes în relația (2.64), rezultând în final:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (2.65)$$

Deci în cazul general, într-un punct din mediu, se consideră că intervine atât densitatea curentului de conducție cât și densitatea curentului de deplasare. În practică se întâlnesc cazuri în care unul dintre acești termeni este neglijabil față de celălalt. Astfel, la dielectrici se consideră numai curentul de deplasare, în timp ce la conductoare se consideră numai curentul de conducție.

Din forma integrală a legii circuitului magnetic (rel. 2.60) rezultă cauzele care produc câmp magnetic: curenții electrici de conducție (starea electrocinetică a corpurilor); curenții de deplasare (variația în timp a câmpului electric); curenții de convecție (mișcarea corpurilor încărcate cu sarcini electrice); curenții Roentgen (mișcarea dielectricilor polarizați).

Prin particularizarea legii circuitului magnetic în cazul unui regim staționar ( $d\psi_{S_r} / dt = 0$ ), se obține **teorema lui Ampère**:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \iint_{S_r} \bar{J} d\bar{S} \quad (2.66)$$

Forma locală a teoremei lui Ampère este următoarea:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} \quad (2.67)$$

Forma integrală a legii circuitului magnetic permite să se calculeze în general doar tensiunea magnetomotoare de-a lungul unei curbe închise oarecare, iar în ceea ce privește forma locală, pentru diferite aplicații este util să se cunoască expresia unui vector în diferite sisteme de coordonate.

### **Aplicatie**

Utilizând teorema lui Ampère, să se determine intensitatea câmpului magnetic produs de: o bobină cilindrică parcursă de curent; un conductor filiform, rectiliniu și infinit lung parcurs de curent.

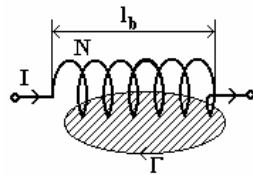


Fig. 2.9

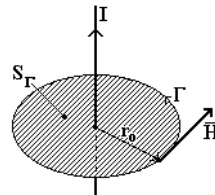


Fig. 2.10

Se notează cu  $l_b$  lungimea bobinei, cu  $N$  numărul de spire și cu  $I$  curentul prin bobină (fig. 2.9). Efectuând integrala de linie a intensității câmpului magnetic de-a lungul conturului închis  $\Gamma$ , se obține:



$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot I$$

Ținând seama că-n interiorul bobinei câmpul magnetic este practic omogen și că-n exterior intensitatea câmpului magnetic este neglijabilă, rezultă:

$$H \cdot l_b \cong N \cdot I$$

de unde se obține pentru intensitatea câmpului magnetic relația:

$$H \cong \frac{N \cdot I}{l_b}$$

Se consideră conturul închis  $\Gamma$  identic cu linia câmpului magnetic, de formă circulară cu raza  $r_0$  (fig. 2.10). Având în vedere că  $\vec{H}$  are aceeași valoare în toate punctele conturului, prin aplicarea teoremei lui Ampère rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \int_0^{2\pi r_0} dl = 2\pi \cdot r_0 \cdot H = I$$

de unde se obține pentru intensitatea câmpului magnetic relația:

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

## 2.9. LEGEA INDUCȚIEI ELECTROMAGNETICE

Fenomenul de **inducție electromagnetică** constă în producerea unei tensiuni electromotoare (t.e.m.) într-un circuit sau în general în lungul unei curbe închise, datorită variației în timp a fluxului magnetic care prin orice suprafață deschisă mărginită de acea curbă. Sensul t.e.m. induse este astfel încât efectele ei se opun cauzei care a produs-o (**regula lui Lenz**).

**Legea inducției electromagnetice** s-a stabilit experimental și sub formă integrală se enunță astfel: **t.e.m. produsă prin inducție electromagnetică, în lungul unei curbe închise  $\Gamma$ , este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață sprijinită pe acea curbă.**

$$u_{e_r} = - \frac{d\phi_{s_r}}{dt} \quad (2.68)$$

Ținând cont de relațiile de definiție ale mărimilor care intervin în relația (2.68), se obține:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{s_r} \vec{B} d\vec{S} \quad (2.69)$$

Pentru aplicarea legii inducției electromagnetice trebuie să se țină seama de următoarele reguli:

- curba închisă  $\Gamma$  este luată, în general, în lungul conductoarelor electrice, însă poate fi dusă și prin izolantși sau vid;
- dacă mediul este în mișcare, curba  $\Gamma$  este atașată corpurilor în mișcare;

- sensul de integrare pe curba  $\Gamma$  (sensul lui  $\vec{d\mathbf{l}}$ ) și normala la suprafața  $S_\Gamma$  (sensul lui  $\vec{d\mathbf{S}}$ ) sunt asociate după regula burghiului drept;
- dacă conturul  $\Gamma$  este luat în lungul conductorului unei bobine cu  $N$  spire practic suprapuse, fluxul magnetic care intervine în calculul t.e.m. induse este fluxul magnetic printr-o suprafață care se sprijină pe întregul contur, adică fluxul prin toate spirele. Dacă se notează fluxul magnetic fascicular cu  $\phi_f$  (fluxul printr-o singură spirală), în legea inducției electromagnetice intervine fluxul total  $\phi = N\phi_f$ :

$$u_{e_r} = -N \frac{d\phi_f}{dt} \quad (2.70)$$

- în regim staționar sau static, când fluxul magnetic nu variază în timp, t.e.m. indusă este nulă, deoarece derivata fluxului magnetic în raport cu timpul este egală cu zero, ceea ce înseamnă că teorema potențialului electrostatic este un caz particular al legii inducției electromagnetice:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (2.71)$$

În cazul mediilor în mișcare cu viteza  $\vec{v}$ , dezvoltând membrul drept al relației (2.69) se obține:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \iint_{S_\Gamma} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{div} \vec{B} + \operatorname{rot} (\vec{B} \times \vec{v}) \right] d\vec{S} \quad (2.72)$$

Deoarece,  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  (din legea fluxului magnetic) și aplicând teorema lui Stokes în membrul stâng al relației (2.72), se obține:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (2.73)$$

Relația (2.73) arată că tensiunea electromotoare are două surse: variația inducției magnetice în timp (**t.e.m. de transformare**, care apare la transformatoarele electrice) și mișcarea (**t.e.m. de mișcare**, care apare în mașinile electrice).

Forma locală a legii inducției electromagnetice se obține aplicând teorema lui Stokes în membrul stâng al relației (2.73):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.74)$$

În cazul mediilor aflate în stare de repaus, forma integrală a legii devine:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (2.75)$$

rezultând forma locală:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (2.76)$$

Câmpurile electrice induse prin inducție electromagnetică (câmpurile solenoidale) au circulația diferită de zero ( $\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} \neq \mathbf{0}$ ), și sunt câmpuri rotaționale, cu linii de câmp închise.

Legile circuitului magnetic și respectiv, inducției electromagnetice arată interdependența dintre câmpul electric și câmpul magnetic în regim nestaționar.

O aplicație a legii inducției electromagnetice o reprezintă **curenții turbionari**.

Conform legii inducției electromagnetice, în spațiul în care fluxul magnetic este variabil, apare un câmp electric ale cărui linii de câmp sunt închise și se află în plane perpendiculare pe direcția fluxului magnetic. Dacă spațiul în care fluxul magnetic variază se află în corpuri electroconductoare (oțel, cupru etc.), atunci câmpul magnetic variabil crează în aceste conductoare curenți induși, numiți curenți turbionari.

De exemplu, la trecerea curentului alternativ printr-o bobină cu miez de fier masiv, în miez se vor induce tensiuni electromotoare, care vor da naștere unor curenți turbionari, ce se închid în plane perpendiculare pe vectorul inducție magnetică.

Curenții turbionari care apar într-un miez feromagnetic, provoacă încălzirea miezului prin efect Joule-Lenz, micșorând randamentul instalației electrice și de asemenea, potrivit regulii lui Lenz, exercită o acțiune de demagnetizare la creșterea fluxului magnetic. Pentru reducerea pierderilor, miezurile se fabrică din tole izolate între ele, micșorându-se astfel secțiunea circuitului și valoarea curenților turbionari.

Pentru o serie de dispozitive curenții turbionari pot fi utilizați rațional pentru funcționarea acestora. O aplicație a curenților turbionari este utilizarea acestora în procesul de încălzire a metalelor în vederea forjării sau călirii lor superficiale.

O altă aplicație a legii inducției electromagnetice o reprezintă realizarea mașinilor electrice atât de curent continuu cât și de curent alternativ. Practic, principiul de funcționare a tuturor generatoarelor electrice se bazează pe fenomenul inducției electromagnetice.

### 3. CÂMPUL ELECTROSTATIC ÎN VID ȘI ÎN CORPURI

#### 3.1. POTENȚIALUL ELECTRIC. TEOREMA POTENȚIALULUI ELECTROSTATIC

**Potențialul electric**  $V$ , este o mărime fizică scalară care caracterizează nivelul local de electrizare, valoarea sa modificându-se de la un punct la altul al câmpului electric cât și în timp. În regim electrostatic, potențialul electric este constant în timp, fiind numai o funcție de spațiu  $V = V(x, y, z)$ .

Valoarea potențialului electric într-un punct se poate stabili numai în raport cu un **potențial electric de referință**. Se consideră potențial electric de referință  $V_0$  potențialul Pământului sau potențialul punctelor situate la o distanță foarte mare de corpurile electrizate (la infinit).

Valoarea potențialului electric de referință se consideră convențional egală cu zero,  $V_0 = 0$ .

Diferența de potențial,  $V_1 - V_2$ , între punctele  $P_1$  și  $P_2$  din câmpul electrostatic în vid sau în alt mediu, se poate defini prin intermediul lucrului mecanic corespunzător forței exercitate de câmp asupra unui corp de probă încărcat cu sarcina electrică  $q > 0$ , care se deplasează lent după o traiectorie oarecare, din punctul  $P_1$  în punctul  $P_2$  (fig. 3.1).

Lucrul mecanic elementar efectuat la deplasarea corpului de probă pe distanța elementară  $d\vec{l}$  (element de traiectorie, luat în sensul deplasării) este dat de relația:

$$dL = \vec{F} d\vec{l} = q \vec{E}_0 d\vec{l} \quad (3.1)$$

Lucrul mecanic total se calculează cu relația:

$$L_{1-2} = \int_{P_1}^{P_2} dL = \int_{P_1}^{P_2} q \vec{E}_0 d\vec{l} \quad (3.2)$$

Prin definiție, diferența de potențial între punctele considerate este egală cu raportul dintre lucrul mecanic  $L_{1-2}$  și sarcina electrică a corpului de probă  $q$ , care este constantă tot timpul deplasării:

$$V_1 - V_2 = \frac{L_{1-2}}{q} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_0 d\vec{l} \quad (3.3)$$

Diferența de potențial între cele două puncte nu depinde de drumul parcurs de la  $P_1$  la  $P_2$ , ci numai de coordonatele celor două puncte și de sensul de parcurgere a traiectoriei. Dacă cele două puncte sunt suficient de apropiate unul față de altul, trecând în relația (3.3) la limită se obține diferențiala potențialului electric:

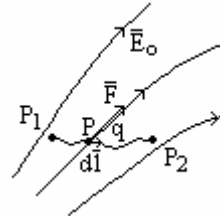


Fig. 3.1 Figură explicativă la calculul potențialului electric

$$dV = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} (V_2 - V_1) = -\vec{E}_0 \cdot d\vec{l} \quad (3.4)$$

Pentru a defini potențialul electric într-un punct se consideră potențialul unuia din cele două puncte ca fiind potențialul electric de referință, de exemplu  $V_2 = V_0$ . Rezultă:

$$V_1 = V_0 + \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} \quad (3.5)$$

Considerând punctul  $P_2$  situat la infinit, iar corpurile încărcate, care produc câmpul electric aflate într-un domeniu limitat, se obține:

$$V_1 = \int_{P_1}^{\infty} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} \quad (3.6)$$

**Potențialul electric într-un punct din câmpul electrostatic este numeric egal cu lucrul mecanic corespunzător forței exercitate de câmp asupra unui corp de probă încărcat cu sarcină electrică unitară și pozitivă, când acest corp se deplasează din punctul respectiv la infinit.**

Unitatea de măsură a potențialului electric este **Voltul** [V].

### Teorema potențialului electrostatic

Se consideră un câmp electric de intensitate  $\vec{E}_0$ , în vid și în el o curbă închisă  $\Gamma$ , de-a lungul căreia se deplasează încet un corp punctiform încărcat cu sarcina electrică  $q > 0$ . Forța electrică care acționează asupra corpului de probă este  $\vec{F} = q\vec{E}_0$  (fig. 3.2).

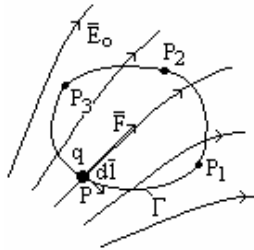


Fig. 3.2 Figură explicativă la teorema potențialului electrostatic

Lucrul mecanic corespunzător forței  $\vec{F}$ , atunci când corpul de probă se deplasează de-a lungul conturului închis considerat  $P - P_1 - P_2 - P_3 - P$  este egal cu zero, respectiv diferența de potențial între punctul de început și cel de sfârșit al traiectoriei este nulă:

$$V_P - V_P = \frac{L_{P-P}}{q} = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3.7)$$

Relația (3.7) reprezintă **teorema potențialului electrostatic** sub formă integrală: **circulația vectorului intensitatea câmpului electric  $\vec{E}_0$  de-a lungul unui contur închis este nulă.**

În sens fizic, teorema potențialului electrostatic precizează că în câmpul electrostatic nu are loc o transformare de energie dintr-o formă în alta prin intermediul lucrului mecanic.

Din relația (3.7) rezultă că intensitatea câmpului electric în vid este egală cu gradientul cu semn schimbat al unei funcții scalare de punct  $V$ , care este

potențialul electric în punctul respectiv:

$$\vec{E}_o = -\text{grad}V \quad (3.8)$$

La o repartiție dată a potențialului electric, intensitatea câmpului electric este univoc determinată.

Teorema potențialului electrostatic se poate exprima local și prin ecuații cu derivate parțiale, satisfăcute de componentele vectorului  $\vec{E}_o$  și exprimate sub formă vectorială cu ajutorul rotorului lui  $\vec{E}_o$ .

Dacă se aplică teorema lui Stokes relației (3.7) rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_o \cdot d\vec{l} = \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot} \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \text{rot} \vec{E}_o = 0 \quad (3.9)$$

Un câmp care derivă dintr-un potențial într-un anumit domeniu, are rotorul intensității câmpului nul în orice punct al domeniului.

### **Aplicatie**

Să se calculeze potențialul unui punct **P** aflat în câmpul electrostatic produs de un corp punctiform încărcat cu sarcina electrică **q**. Se consideră punctul de referință **P<sub>o</sub>** al infinit și potențialul său egal cu zero.

Din relația (3.6) se obține:

$$V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{R} = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon R} \quad (3.10)$$

Extinzând relația (4.10) pentru cazul în care câmpul electric este produs de corpuri încărcate cu sarcini electrice distribuite în volum, pe suprafață, pe corpuri filiforme, ale căror densități de sarcină electrică sunt cunoscute, precum și de către corpuri punctiforme rezultă:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \iiint_V \frac{\rho_v \cdot dv}{r} + \iint_S \frac{\rho_s \cdot ds}{r} + \int_C \frac{\rho_l \cdot dl}{r} + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k} \right] \quad (3.11)$$

## **3.2. TENSIUNEA ELECTRICĂ**

Integrala de linie a intensității câmpului electric  $\vec{E}$ , între două puncte din câmp oarecare, **P<sub>1</sub>** și **P<sub>2</sub>**, se numește **tensiune electrică**, **U<sub>12</sub>**, între punctele respective (fig. 3.3 a):

$$U_{1-2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.12)$$

Tensiunea electrică, care se definește atât într-un regim staționar cât și variabil, caracterizează câmpul electric de-a lungul curbei considerate. Unitatea de măsură pentru tensiunea electrică ca și pentru potențialul electric este **Voltul [V]**.

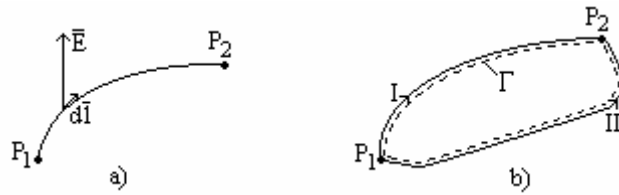


Fig. 3.3 Figură explicativă la definiția tensiunii electrice

Dacă se schimbă sensul de integrare, respectiv sensul elementului de linie  $d\vec{l}$ , valoarea tensiunii rămâne neschimbată, însă se schimbă semnul acesteia:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} d\vec{l} \Rightarrow U_{1-2} = -U_{2-1} \quad (3.13)$$

Sensul de integrare ales se numește și sens de referință al tensiunii electrice. Într-un regim staționar integrala de linie a intensității câmpului electric între două puncte depinde exclusiv de poziția în câmp a celor două puncte, fiind independentă de forma traiectoriei. Aceasta este o consecință a teoremei potențialului electrostatic.

Dacă se consideră curba închisă  $\Gamma$ , formată din traiectoriile **I** și **II** alese arbitrar, care unesc punctele  $P_1$  și  $P_2$  (fig. 3.3 b), integrând după curba  $\Gamma$  se obține:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \int_{P_1(I)}^{P_2} \vec{E} d\vec{l} + \int_{P_2(II)}^{P_1} \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (3.14)$$

Ținând seama de relația (3.13), rezultă:

$$U_{1-2} = \int_{P_1(I)}^{P_2} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{P_2(II)}^{P_1} \vec{E} d\vec{l} = \int_{P_1(II)}^{P_2} \vec{E} d\vec{l} \quad (3.15)$$

care arată că în regim staționar tensiunea electrică între două puncte nu depinde de linia considerată între cele două puncte.

În regim staționar (electrostatic), tensiunea electrică dintre două puncte este egală cu diferența potențialelor punctelor considerate. Ținând seama de caracterul potențial al câmpului electric se poate scrie:

$$U_{1-2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{P_1}^{P_2} \nabla V d\vec{l} = - \int_{P_1}^{P_2} dV = V_1 - V_2 \quad (3.16)$$

Spre deosebire de regimul staționar, în regim variabil al câmpului electric, tensiunea electrică între două puncte din câmp depinde, în general, de traiectoria considerată și nu este egală cu diferența de potențial dintre punctele respective. Într-un astfel de regim, intensitatea câmpului electric are și o componentă solenoidală.

### 3.3. CÂMPUL ELECTROSTATIC ÎN VID

Pentru stabilirea expresiilor intensității câmpului electric și a potențialului electric în funcție de distribuția sarcinilor electrice care produc câmpul, există în principal, două căi. O primă cale pleacă de la **relația lui Coulomb**, pe baza căreia se stabilește în mod simplu expresia intensității câmpului electric corespunzător unei sarcini electrice punctiforme. Aplicând principiul superpoziției se stabilește apoi, expresia intensității câmpului electric pentru o distribuție oarecare de sarcini electrice.

O abordare mai generală a problemei determinării câmpului electrostatic se poate face în cadrul teoriei câmpurilor de vectori, având ca punct de plecare **teorema unicității**. În conformitate cu această teoremă, vectorul câmp într-un punct din interiorul unui domeniu este complet determinat dacă în fiecare punct al domeniului considerat se cunosc divergența și rotorul vectorului câmp precum și condițiile pe frontiera domeniului.

În cazul particular al câmpurilor care prezintă anumite simetrii, intensitatea câmpului electric se poate calcula relativ simplu în funcție de sarcina electrică, cu ajutorul **legii fluxului electric**.

Aplicarea expresiilor intensității câmpului electric și a potențialului electric, a legii fluxului electric și a unor teoreme pentru calculul câmpului reprezintă metoda elementară de calcul. În afară de calculul direct se pot aplica și alte metode, cum sunt metoda imaginilor electrice și metodele generale de determinare a câmpurilor (metoda funcțiilor analitice și a reprezentării conforme, metoda separării variabilelor, metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite etc.).

#### 3.3.1. RELAȚIA LUI COULOMB

Se consideră două corpuri încărcate electric, situate în vid, distanța dintre corpuri fiind destul de mare în comparație cu dimensiunile lor liniare, pentru a putea fi considerate punctiforme (fig. 3.4).

Fizicianul francez **Ch. Coulomb** a măsurat cu ajutorul unei balanțe electrice de torsiune forțele de interacțiune dintre cele două corpuri punctiforme și a stabilit experimental formula:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (3.17)$$

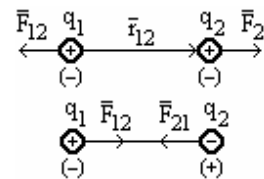


Fig. 3.4 Figură explicativă la forța lui Coulomb

**Forța  $F_{12}$  exercitată în vid de un corp punctiform încărcat cu sarcina electrică  $q_1$  asupra unui alt corp punctiform încărcat cu sarcina electrică  $q_2$ , este proporțională cu produsul sarcinilor electrice și invers propor-**



țională cu pătratul distanței  $r_{12}$  dintre ele, fiind orientată după direcția care le unește.

Sensurile forțelor sunt astfel încât, corpurile încărcate cu sarcini electrice de același semn se resping, iar cele încărcate cu sarcini electrice de semne contrare se atrag.

Dacă asupra unui corp punctiform, încărcat cu sarcina electrică  $q$ , se exercită forțe produse de  $n$  corpuri punctiforme situate în vid și încărcate cu sarcinile electrice  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , forța rezultantă se obține prin aplicarea principiului superpoziției (suprapunerii efectelor) fiind egală cu suma vectorială a forțelor care acționează asupra corpului încărcat cu sarcina  $q$ , datorate sarcinilor  $q_k$ :

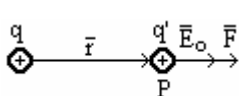
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^3} \vec{r}_k \quad (3.18)$$

unde vectorul  $\vec{r}_k$  este orientat de la sarcina  $q_k$  la sarcina  $q$ .

### 3.3.2. RELAȚII DE CALCUL PENTRU INTENSITATEA CÂMPULUI ELECTRIC

#### Câmp electric produs de sarcini punctiforme

Se consideră un corp punctiform situat în vid și încărcat cu sarcina electrică  $q$  (fig. 3.5). Intensitatea câmpului electric în vid într-un punct  $P$  situat la distanța  $r$  de corpul punctiform, va fi egală cu raportul dintre forța care acționează asupra unui mic corp de probă electrizat, plasat în acest punct și sarcina  $q'$  a acestuia:



$$\vec{E}_o = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (3.19)$$

**Intensitatea câmpului electric este proporțională cu sarcina electrică și invers proporțională cu pătratul distanței până la punctul considerat.**

Pentru sarcini punctiforme se verifică principiul superpoziției forțelor.

Pe baza acestui principiu, intensitatea câmpului electric  $\vec{E}_o$  în vid, produs de  $n$  corpuri punctiforme electrizate, este egală cu suma geometrică a intensităților pe care le-ar produce fiecare din cele  $n$  corpuri în parte (teorema superpoziției):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^3} \vec{r}_k \quad (3.20)$$

unde vectorul  $\vec{r}_k$  este orientat de la sarcina  $q_k$  spre punctul respectiv.

Fig. 3.5 Figură explicativă la calculul intensității câmpului electric produs de o sarcină punctiformă

**Câmp electric produs în vid de către un corp de formă oarecare  
având sarcina repartizată în volum, pe suprafață sau liniar**

Se consideră un corp masiv, de o formă oarecare, cu sarcina  $q$  repartizată continuu și uniform în volum, de densitate  $\rho_v$  cunoscută (fig. 3.6). Un element de volum  $dV$ , care conține sarcina electrică  $dq = \rho_v dV$  poate fi considerat ca un corp punctiform. Conform relației (3.19) câmpul electric produs de sarcina  $dq$  în punctul  $P$ , aflat la distanța  $\vec{r}$  de elementul de volum  $dV$  va fi:

$$d\vec{E}_o = \frac{\rho_v dV}{4\pi\epsilon_o r^3} \vec{r} \quad (3.21)$$

Intensitatea câmpului electric  $\vec{E}_o$  în punctul  $P$ , se obține prin integrarea relației (3.21) pe întregul volum al corpului:

$$\vec{E}_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iiint_V \frac{\rho_v \vec{r}}{r^3} dV \quad (3.22)$$

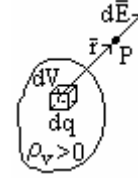


Fig. 3.6 Figură explicativă la calculul câmpului electric

Dacă corpul este încărcat cu sarcină electrică repartizată numai pe suprafața sa, cu densitatea de suprafață a sarcinii  $\rho_s$ , câmpul electric  $\vec{E}_o$  în punctul  $P$  va fi dat de relația:

$$\vec{E}_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iint_S \frac{\rho_s \vec{r}}{r^3} dS \quad (3.23)$$

În cazul corpurilor filiforme, cu densitatea de sarcină liniară  $\rho_l$ , intensitatea câmpului electric este dată de relația:

$$\vec{E}_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_C \frac{\rho_l \vec{r}}{r^3} dl \quad (3.24)$$

Dacă într-o regiune a spațiului există corpuri încărcate cu sarcini electrice cu densitățile de volum  $\rho_v$ , de suprafață  $\rho_s$  și de linie  $\rho_l$ , precum și un sistem de  $n$  corpuri punctiforme încărcate cu sarcinile  $q_k$ , intensitatea câmpului electric în vid, într-un punct  $P$  oarecare, se obține prin superpoziția câmpurilor:

$$\vec{E}_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[ \iiint_V \frac{\rho_v \vec{r}}{r^3} dV + \iint_S \frac{\rho_s \vec{r}}{r^3} dS + \int_C \frac{\rho_l \vec{r}}{r^3} dl + \sum_{k=1}^n \frac{q_k \vec{r}_k}{r_k^3} \right] \quad (3.25)$$

### 3.4. CONDUCTOARE ÎN REGIM ELECTROSTATIC

În regim electrostatic, intensitatea câmpului electric în interiorul unui conductor omogen și neîncărcat electric, introdus într-un câmp electric exterior, este egală cu zero. În caz contrar, în concordanță cu legea conducerii electrice,

conductorul ar fi străbătut de un curent electric, deci s-ar găsi în stare electrocINETICĂ și nu electrostatică.

### 3.4.1. ECHILIBRUL ELECTROSTATIC

Se consideră un câmp electric omogen de intensitate  $\vec{E}_0$  în care se introduce un corp metalic de formă sferică, neîncărcat electric și izolat față de pământ și față de alte corpuri (fig. 3.7).

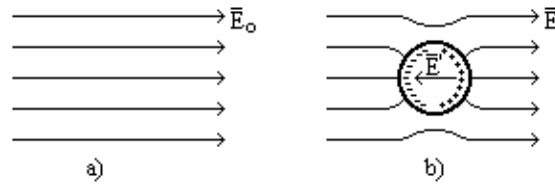


Fig. 3.7 Liniile câmpului electric iniiform în vid – a) și în prezența unei sfere metalice – b)

Asupra electronilor liberi din metal acționează forța  $\vec{F} = q\vec{E}$ , orientată în sens opus față de intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ , deoarece sarcina unui electron,  $q$ , este negativă. Sub acțiunea forței  $\vec{F}$  electronii se deplasează în sens opus câmpului electric, având astfel loc o separare a sarcinilor electrice în sfera metalică. Pe suprafața opusă intensității câmpului electric se acumulează sarcini electrice negative, iar pe suprafața din direcția lui  $\vec{E}$  rămân sarcini electrice pozitive necompensate.

Datorită separării sarcinilor electrice din interiorul sferei metalice, apare un nou câmp electric coulombian, de intensitate  $\vec{E}'$ , determinat de aceste sarcini și opus câmpului inițial  $\vec{E}_0$ . Astfel, câmpul rezultat din sfera metalică va fi:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad (3.26)$$

Sarcinile electrice din sfera metalică se vor separa până în momentul în care se stabilește **echilibrul electrostatic**, caracterizat printr-un câmp electric de intensitate zero în interiorul sferei metalice:

$$\vec{E} = 0 \quad (3.27)$$

Procesul de separare, într-un câmp electric exterior, a unor sarcini electrice egale și de semn contrar pe suprafața unui conductor inițial neîncărcat, se numește **influență electrostatică**, iar sarcinile astfel rezultate se numesc și sarcini separate prin influență.

Pentru conductoare neomogene sau care se găsesc la temperaturi neuniforme sau sunt accelerate, regimul electrostatic se atinge când intensitatea câmpului electric ia anumite valori determinate de starea fizico-chimică și de

natura conductorului. Această proprietate se caracterizează cu ajutorul unei mărimi vectoriale de material numită intensitatea câmpului electric imprimat  $\vec{E}_i$ , care este egală cu intensitatea câmpului electric care se stabilește în conductori la atingerea stării de echilibru, luată cu semn schimbat:

$$\vec{E}_i = -\vec{E} \Rightarrow \vec{E} + \vec{E}_i = 0 \quad (3.28)$$

Relația (3.27) reprezintă condiția de echilibru electrostatic în conductoarele omogene neaccelerate, iar relația (3.28), condiția de echilibru electrostatic în conductoarele neomogene sau accelerate.

### 3.4.2. CONSECINȚELE ECHILIBRULUI ELECTROSTATIC

Din condiția de echilibru electrostatic pentru conductoarele omogene și neaccelerate rezultă următoarele **consecințe**:

a) Toate punctele de pe suprafața sau din interiorul unui conductor omogen și neaccelerat au același potențial. Deoarece  $\vec{E} = \mathbf{0}$ , tensiunea între două puncte **A** și **B** oarecare va fi:

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_A = V_B \quad (3.29)$$

Suprafața conductorului metalic este o suprafață echipotențială (suprafața care unește toate punctele în care potențialul are aceeași valoare) și în consecință, liniile câmpului electric vor fi întotdeauna perpendiculare pe suprafața conductoarelor metalice omogene și neaccelerate.

b) Sarcina electrică de pe conductoarele omogene și neaccelerate este repartizată numai pe suprafața acestora. În regim de echilibru electrostatic, deoarece  $\vec{E} = \mathbf{0}$ , în interiorul corpului metalic nu există linii de câmp, deci nu pot exista nici sarcini electrice de unde să înceapă sau unde să se sfârșească liniile câmpului electric.

c) Liniile de câmp din exteriorul conductorului nu pătrund în interiorul cavităților goale (efectul de ecran). Corpul conductor cu cavitate constituie un **ecran electrostatic**.

d) Sub acțiunea unui câmp electric exterior, un conductor inițial neîncărcat, se încarcă superficial cu sarcini electrice. Pentru ca să fie îndeplinită condiția de echilibru electrostatic, este necesar să apară în interiorul conductorului un câmp electric propriu al repartiției de sarcini, care să compenseze câmpul electric exterior:

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_{\text{propriu}} \quad (3.30)$$

Fenomenul se numește influență electrostatică, iar conductorul s-a încărcat prin influență. Influența electrostatică intervine și are un rol important în instalațiile de înaltă tensiune, la apariția pe liniile de transport a unor supratensiuni datorită descărcărilor atmosferice etc.

### 3.5. CÂMPUL ELECTROSTATIC ÎN MEDII DIELECTRICE

#### 3.5.1. POTENȚIALUL ȘI INTENSITATEA CÂMPULUI ELECTRIC

În prezența dielectricilor câmpul electric se poate considera ca fiind contribuția atât a sarcinilor electrice libere cât și a sarcinilor de polarizație (sarcini legate), care țin cont de starea de polarizare a dielectricilor.

Potențialul  $V$  în prezența dielectricilor se poate scrie sub forma:

$$V = V_0 + V' \quad (3.31)$$

unde  $V_0$  corespunde sarcinilor electrice libere, respectiv câmpului electric corespunzător în vid, iar  $V'$  corespunde sarcinilor de polarizație.

Pentru simplificarea se consideră numai o repațiție de volum și de suprafață a sarcinii electrice într-un anumit spațiu limitat, iar suprafața de frontieră a domeniului la infinit. În cazul acesta  $V_0$  va avea expresia:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_q} \frac{\rho_v}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_q} \frac{\rho_s}{r} dS \quad (3.32)$$

Pentru determinarea potențialului  $V'$  se pleacă de la expresia potențialului electric al dipolului electric și se aplică corespunzător teorema superpoziției. Pentru un element de volum  $dV$  din dielectricul polarizat momentul electric al acestuia este  $\bar{P} dV$ , unde  $\bar{P}$  este vectorul polarizație.

Presupunând că în interiorul domeniului considerat există și suprafețe de discontinuitate  $S_d$  pentru componenta normală a polarizației electrice, se obține în final pentru potențialul  $V'$  expresia []:

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_p} \frac{\rho'_v}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_d} \frac{\rho'_s}{r} dS \quad (3.33)$$

unde:  $\rho'_v = -\text{div } \bar{P}$ ,  $\rho'_s = -\text{div}_s \bar{P}$ , iar  $V_p$  este volumul în care există sarcini de polarizație.

Într-o scriere simplificată expresia potențialului  $V$  în prezența dielectricilor, se poate scrie sub forma:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_v + \rho'_v}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_s + \rho'_s}{r} dS \quad (3.34)$$

Rezultă că potențialul electric produs de un sistem de corpuri încărcate electric în prezența dielectricilor, se obține însumând potențialul pe care l-ar produce aceleași sarcini electrice în absența dielectricilor și potențialul corespunzător sarcinilor de polarizație. Având expresia potențialului electric se poate calcula intensitatea câmpului electric  $\bar{E} = -\nabla V$ .

În cazul unui sistem de corpuri încărcate electric situate într-un mediu liniar, izotrop, omogen și fără polarizație permanentă, astfel încât în toate

punctele domeniului să se poată considera permitivitatea aceeași ( $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_r \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \text{const.}$ ), la aceeași distribuție de sarcini electrice adevărate, în fiecare punct al domeniului mărimile  $\bar{\mathbf{E}}$  și  $\mathbf{V}$  sunt de  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  mai mici decât în vid:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V \frac{\rho_v}{r} dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_S \frac{\rho_s}{r} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_l \frac{\rho_l}{r} dl + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\varepsilon r_k} \quad (3.35)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = -\nabla \mathbf{V} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V \frac{\rho_v \bar{\mathbf{r}}}{r^3} dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_S \frac{\rho_s \bar{\mathbf{r}}}{r^3} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_l \frac{\rho_l \bar{\mathbf{r}}}{r^3} dl + \sum_{k=1}^n \frac{q_k \bar{\mathbf{r}}_k}{4\pi\varepsilon r_k^3} \quad (3.36)$$

Față de cazul precedent s-au considerat și sarcini cu distribuție liniară precum și un sistem de  $n$  conductoare punctiforme. În concluzie, în prezența unui dielectric izotrop, liniar și omogen în întreg domeniul, expresiile de calcul ale mărimilor  $\mathbf{V}$  și  $\bar{\mathbf{E}}$  sunt aceleași ca și în cazul câmpului electric în vid, cu deosebirea că permitivitatea vidului  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  este înlocuită cu permitivitatea absolută a materialului  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_r \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0$ .

### 3.5.2. METODA IMAGINILOR ELECTRICE

**Metoda imaginilor electrice** se aplică la rezolvarea unor probleme de câmpuri electrostatice atunci când intervin suprafețe de frontieră  $\Sigma$ , care sunt suprafețe de discontinuitate, reprezentate fie de prezența unor corpuri conductoare, fie de suprafața de separație dintre dielectrici diferiți.

Metoda se bazează pe următorul artificiu: se înlocuiește efectul suprafeței conductoare  $\Sigma$  cu efectul unui sistem de sarcini fictive (numite **sarcini imagine**), de valori și poziții astfel alese, încât în câmpul rezultat al sarcinilor reale ( $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ ) și al imaginilor ( $\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}'_2, \dots, \mathbf{q}'_m$ ;  $m \geq n$ ) suprafața  $\Sigma$  să fie echipotențială (fig. 3.8).

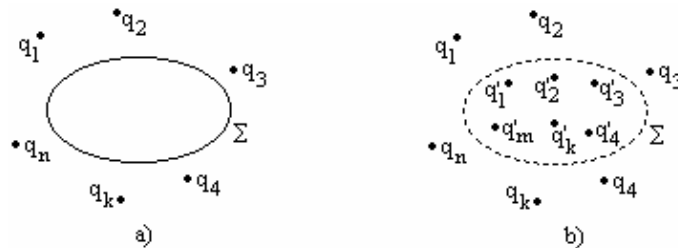


Fig. 3.8 a) Sistem de sarcini în prezența suprafeței conductoare  $\Sigma$ ;  
b) Sistem de sarcini în mediu omogen

Această substituție nu modifică condițiile de frontieră pentru câmpul electric din afara suprafeței  $\Sigma$ . În acest fel, problema determinării câmpului

electric corespunzător sistemului de sarcini electrice în prezența unei suprafețe conductoare este înlocuită cu problema determinării câmpului unui sistem de sarcini electrice mai complicat, dar situate într-un mediu omogen.

Rezultă că metoda imaginilor electrice reduce rezolvarea unei probleme de câmp cu anumite condiții pe frontieră, la rezolvarea unei probleme de câmp fără condiții pe frontieră și considerarea unui mediu omogen în întreg spațiul. Calculele sunt mai simple atunci când intervin repartiții particulare de sarcini electrice (punctiforme, filiforme) iar suprafața  $\Sigma$  prezintă o anumită simetrie.

Metoda imaginilor electrice este utilizată la determinarea câmpului electric și respectiv a capacității liniei electrice în prezența solului. De asemenea, mai poate fi aplicată relativ simplu în cazul sarcinilor electrice punctiforme, în prezența unor plane sau a unor sfere conducătoare și în cazul conductoarelor electrice rectilinii, încărcate uniform (pe lungime), cu axele paralele, în prezența unor plane sau a unor cilindri sau cavități cilindrice conductoare, cu axele paralele.

### 3.6. TEOREME REFERITOARE LA CÂMPUL ELECTROSTATIC

#### 3.6.1. TEOREMA UNICITĂȚII

Se consideră un sistem de  $n$  conductoare situate într-un mediu dielectric izotrop și liniar (fig. 3.9). Se presupune că dielectricul este fără sarcină electrică liberă și fără polarizație electrică permanentă. Domeniul considerat este mărginit de suprafața exterioară  $\Sigma$  și de suprafețele  $S_1, S_2, \dots, S_n$  ale celor  $n$  conductoare.

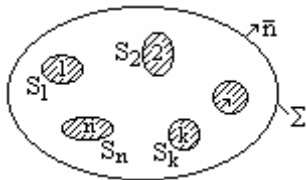


Fig. 3.9 Figură explicativă la teorema unicității

În condițiile menționate câmpul electric din domeniul considerat este un câmp laplacian ( $\nabla^2 V = 0$ ). Rezultă că acest câmp este univoc determinat dacă se cunosc condițiile pe întreaga frontieră.

Dacă domeniul este presupus infinit extins ( $\Sigma \rightarrow \infty$ ), iar la infinit câmpul este egal cu zero (sistemele de conductoare se află la distanță finită), în conformitate cu

**teorema unicității**, câmpul electrostatic în acest caz este univoc determinat dacă se cunosc: fie potențialele conductoarelor, fie sarcinile conductoarelor, fie potențialele unora dintre conductoare și sarcinile celorlalte conductoare.

Teorema unicității este valabilă atât în cazul dielectricilor izotropi (omogeni și neomogeni) cât și neliniari; în cazul dielectricilor neliniari se consideră însă o polarizație electrică reversibilă, respectiv fără ciclu de polarizație. Teorema unicității se poate formula și în cazuri mai generale. În acest sens, se poate ține seama și de existența în interiorul domeniului a unei

distribuții de sarcini electrice, a unor dielectrici cu polarizație electrică permanentă sau suprafețe de discontinuitate pentru permitivitatea electrică.

### 3.6.2. TEOREMA RECIPROCITĂȚII

Se consideră două stări oarecare de electrizare ale unui sistem de  $n$  conductoare. Într-o stare electrostatică fie  $V_1, V_2, \dots, V_n$  potențialele și  $q_1, q_2, \dots, q_n$  sarcinile electrice ale celor  $n$  conductoare. În cea de a doua stare se consideră potențialele  $V_1', V_2', \dots, V_n'$  și sarcinile electrice ale conductoarelor  $q_1', q_2', \dots, q_n'$ . Se arată că între sarcinile electrice și potențialele conductoarelor există următoarea relație de legătură:

$$\sum_{k=1}^n q_k V_k' = \sum_{k=1}^n q_k' V_k \quad (3.37)$$

cunoscută și sub denumirea de **teorema reciprocității** (Green). Teorema reciprocității nu este valabilă în cazul dielectricilor neliniari, însă este valabilă și în cazul când în domeniul considerat se găsesc și alte conductoare neîncărcate electric.

Pentru demonstrarea teoremei se pleacă de la forma locală a teoremei reciprocității în câmp electrostatic:

$$\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}}' = \bar{\mathbf{E}}' \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad (3.38)$$

în care mărimile de stare  $\bar{\mathbf{E}}$  și  $\bar{\mathbf{D}}$  ale câmpului electric corespund unei stări electrostatice, iar mărimile  $\bar{\mathbf{E}}'$  și  $\bar{\mathbf{D}}'$  corespund celeilalte stări. Mediul fiind presupus izotrop și liniar în fiecare punct din câmp rezultă  $\bar{\mathbf{D}} = \epsilon \bar{\mathbf{E}}$  și  $\bar{\mathbf{D}}' = \epsilon \bar{\mathbf{E}}'$ , din care rezultă imediat relația (3.38).

Teorema reciprocității are o serie de consecințe pentru unele regimuri particulare. De exemplu, se consideră conductorul  $k$  încărcat cu sarcina electrică  $q_k$ , toate celelalte conductoare fiind neîncărcate și fie  $V_i$  potențialul conductorului  $i$  datorat sarcinii  $q_k$ . Se consideră apoi numai conductorul  $i$  încărcat cu sarcina electrică  $q_i'$  și fie  $V_k'$  potențialul conductorului  $k$  corespunzător sarcinii electrice  $q_i'$ . Ținând seama de aceste condiții în teorema reciprocității, rezultă relația:

$$q_k V_k' = q_i' V_i \quad (3.39)$$

iar dacă sarcinile electrice sunt presupuse egale ( $q_k = q_i'$ ) rezultă că și potențialele vor fi egale:

$$V_k' = V_i \quad (3.40)$$

Rezultă că potențialul conductorului  $i$  datorită prezenței unei sarcini pe conductorul  $k$  este egal cu potențialul pe care aceeași sarcină presupusă acum pe conductorul  $i$  l-ar stabili pe conductorul  $k$ .



În mod analog se pot considera și alte stări particulare ale sistemului. Astfel, într-o stare, potențialul  $V_k$  se consideră diferit de zero, potențialele tuturor celorlalte conductoare fiind nule, iar sarcina electrică corespunzătoare pe conductorul  $i$  este  $q_i$ . În a doua stare, numai potențialul  $V_i'$  al conductorului  $i$  este diferit de zero, iar sarcina electrică pe conductorul  $k$  este  $q_k'$ . Introducând aceste valori în relația (3.37) se obține:

$$q_k' V_k = q_i V_i' \quad (3.41)$$

iar dacă potențialele în cele două stări sunt egale ( $V_k = V_i'$ ), sarcinile  $q_i$ , respectiv  $q_k'$  vor rezulta de asemenea egale.

### 3.6.3. TEOREMA SUPERPOZIȚIEI

Se consideră un sistem de  $n$  conductoare care au potențialele  $V_1, V_2, \dots, V_n$  și sarcinile electrice  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Mediul dielectric în care sunt situate corpurile conductoare este presupus liniar, izotrop, fără sarcini electrice și fără polarizație electrică.

**Teorema superpoziției câmpurilor electrostatice** se exprimă sub forma următoare: dacă sarcinile electrice ale tuturor conductoarelor cresc sau scad de  $\lambda$  ori, atunci și potențialul într-un punct din câmp și implicit potențialul fiecăruia din conductoare în parte, crește respectiv scade de  $\lambda$  ori.

Teorema superpoziției câmpurilor electrostatice apare ca o consecință a liniarității ecuațiilor câmpului electrostatic în mediile liniare.

Această teoremă se poate deduce în mod simplu plecând de la teorema reciprocității. Adăugând ambilor termeni ai relației (3.37) termenul  $\sum_{k=1}^n q_k V_k$  și

respectiv,  $\sum_{k=1}^n q_k' V_k$  se obțin relațiile:

$$\sum_{k=1}^n q_k (V_k + V_k') = \sum_{k=1}^n (q_k + q_k') V_k \quad (3.42)$$

$$\sum_{k=1}^n (q_k + q_k') V_k' = \sum_{k=1}^n q_k' (V_k + V_k') \quad (3.43)$$

Relațiile (3.42) și (3.43) exprimă faptul că dacă sarcinilor  $q_1, q_2, \dots, q_n$  le corespund potențialele  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , respectiv sarcinilor  $q_1', q_2', \dots, q_n'$  le corespund potențialele  $V_1', V_2', \dots, V_n'$ , atunci sarcinilor  $(q_1 + q_1'), (q_2 + q_2'), \dots, (q_n + q_n')$  le corespund potențialele  $(V_1 + V_1'), (V_2 + V_2'), \dots, (V_n + V_n')$ .

## 4. CONDENSATORUL ELECTRIC. ENERGIE ȘI FORȚE ÎN CÂMP ELECTROSTATIC

### 4.1. CONDENSATORUL ELECTRIC. CAPACITATEA ELECTRICĂ

Sistemul format din două conductoare (omogene și neaccelerate) încărcate cu sarcini electrice egale și de semne contrare, între care există un dielectric oarecare, însă neîncărcat electric și fără polarizație permanentă se numește **condensator electric** (fig. 4.1). Cele două conductoare încărcate electric poartă numele de armăturile condensatorului.

Se consideră un câmp electric complet (toate liniile de câmp care încep de pe unul din conductoare se termină pe celălalt).

Mediile dielectrice se caracterizează prin faptul că nu conțin decât un număr neglijabil de purtători liberi de sarcini electrice, care sub acțiunea câmpului electric, se pot deplasa pe distanțe nelimitate (aceste medii au conductivitatea practic egală cu zero).

Condensatorul electric este caracterizat

printr-o mărime fizică scalară numită **capacitate electrică (C)**. Capacitatea electrică este egală cu raportul pozitiv dintre valoarea sarcinii electrice  $q$  a unuia dintre conductoare și diferența de potențial dintre el și cel de-al doilea:

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{q_2}{V_2 - V_1} = \frac{q}{U} \quad (4.1)$$

Mărimea inversă capacității capacității electrice se numește **elastanță capacitivă (S)**:

$$S = 1/C \quad (4.2)$$

Dacă dielectricul este liniar, în conformitate cu teorema superpoziției, sarcina electrică de pe armături variază direct proporțional cu diferența de potențial dintre acestea. Deci, capacitatea electrică este independentă de sarcina  $q$  de pe armături și de diferența de potențial  $U$  dintre armături, fiind o mărime caracteristică a condensatorului respectiv (capacitatea unui condensator electric depinde de geometria și dimensiunile sistemului de armături precum și de natura dielectricului dintre acestea).

Noțiunea de capacitate nu intervine numai la condensator ci și în cazul unor sisteme tehnice din cele mai diferite ca realizare și scop. Astfel, se poate vorbi și despre capacitatea unui conductor. În acest caz trebuie să ne imaginăm cea de a doua armătură situată la infinit, având convențional potențialul nul. Rezultă că în cazul unui conductor încărcat cu sarcina  $q$  și având potențialul  $V$ ,

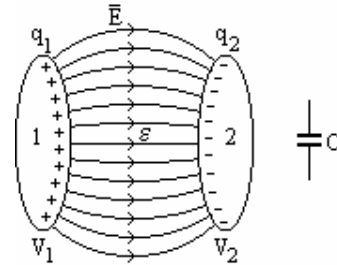


Fig. 4.1 Condensatorul electric

capacitatea electrică este următoarea:

$$C = q / V \quad (4.3)$$

Unitatea de măsură a capacității electrice este **Faradul [F]**.

## 4.2. CALCULUL CAPACITĂȚII CONDENSATOARELOR

Pentru calculul capacității unui condensator electric se procedează în modul următor:

- se presupun armăturile condensatorului încărcate cu sarcinile electrice  $+q$  și  $-q$ ;
- se determină intensitatea câmpului electric în dielectricul dintre armături cu ajutorul legii fluxului electric;
- se calculează tensiunea electric  $U$  dintre armături;
- se determină capacitatea condensatorului folosind relația (4.1).

### 4.2.1. CAPACITATEA UNUI TUB DE CÂMP ELECTRIC

În figura 4.2 este reprezentat un tub de câmp electric, cărui îi corespunde la capete, pe conductoarele 1 și 2, sarcinile electrice  $\Delta q$  și  $-\Delta q$ , cu  $\Delta q > 0$ . Dielectricul dintre armături este presupus liniar și omogen de permitivitate  $\epsilon$ . Se consideră câmpul electric dintre cele două conductoare metalice ca fiind un câmp complet (toate liniile de câmp care pleacă de pe primul conductor se termină pe al doilea conductor).

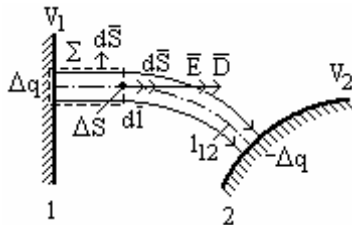


Fig. 4.2 Figură explicativă la calculul capacității unui tub de câmp electric

Se consideră o suprafață închisă  $\Sigma$  care conține în interiorul ei sarcina  $\Delta q$ . Suprafața  $\Sigma$  este formată din suprafața laterală a tubului de câmp și secțiunile de bază ce o delimitează (prima secțiune se află în conductorul 1, iar cealaltă de arie  $\Delta S$ , este o secțiune prin tubul de câmp electric).

În condițiile menționate, dacă se aplică legea fluxului electric se obține:

$$\iint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Delta q \quad (4.4)$$

deoarece câmpul electric în interiorul conductorului este nul (condiția echilibrului electrostatic), iar prin suprafața laterală a tubului de câmp electric considerat fluxul este nul pentru că vectorii  $\vec{D}$  și  $d\vec{S}$  sunt perpendiculari (produsul lor scalar va fi egal cu zero).

Din relația (4.4) rezultă următoarea concluzie: **de-a lungul unui tub de câmp electric fluxul electric se conservă** (fluxul electric prin orice secțiune a tubului de câmp electric are aceeași valoare).

Pentru determinarea expresiei capacității electrice se pleacă de la definiția elastoanței capacitive:

$$S = \frac{1}{C} = \frac{V_1 - V_2}{\Delta q} = \frac{\int_1^2 \bar{E} d\bar{l}}{\iint_{\Delta S} \bar{D} d\bar{S}} = \int_1^2 \frac{\bar{E} d\bar{l}}{\iint_{\Delta S} \bar{D} d\bar{S}} \quad (4.5)$$

Ținând cont de faptul că vectorii  $\bar{dl}$ ,  $\bar{dS}$ ,  $\bar{E}$  și  $\bar{D}$  sunt coliniari și că inducția electrică  $\bar{D}$  este o mărime constantă în toare punctele suprafeței  $\Delta S$ , se obține:

$$\frac{1}{C} = \int_1^2 \frac{E dl}{D \iint_{\Delta S} dS} = \int_1^2 \frac{E dl}{\epsilon E \Delta S} = \int_1^2 \frac{dl}{\epsilon \Delta S} \quad (4.6)$$

relație care permite determinarea capacității electrice pentru diferite tipuri de condensatoare.

#### 4.2.2. CAPACITATEA ELECTRICĂ A UNOR SISTEME SIMPLE

##### Capacitatea condensatorului plan

Condensatorul plan este format din două armături plane paralele, de diferite forme, de arie  $S$ , separate printr-un dielectric de grosime  $d$  și permitivitate  $\epsilon$  (fig. 4.3). Sarcinile electrice de pe armături sunt  $q$  și  $-q$  ( $q > 0$ ), iar diferența de potențial este  $V_1 - V_2$ . Câmpul electric în spațiul dintre armături se consideră omogen, de intensitate,  $\bar{E} = \text{const.}$

Pentru determinarea capacității condensatorului plan se aplică legea fluxului electric suprafeței închise  $\Sigma$ , care are o formă paralelipipedică (fig. 4.3) și conține în interiorul ei sarcina pozitivă  $q$ . În final, se obține relația (4.6) unde secțiunea  $\Delta S$  este egală cu suprafața  $S$  a unei armături:

$$\frac{1}{C} = \int_1^2 \frac{dl}{\epsilon S} = \frac{d}{\epsilon S} \Rightarrow C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (4.7)$$

Condensatoarele plane, se construiesc de obicei, numai pentru capacități mici și tensiuni mari, dielectricul fiind în general sticla sau materiale ceramice. Pentru a obține capacități mari, dar la tensiuni mici, armăturile se realizează din foite subțiri de

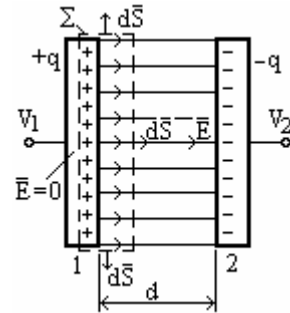


Fig. 4.3 Condensatorul plan

hârtie metalizată care se rulează sub forma unor cilindri.

**Capacitatea condensatorului sferic**

Armăturile condensatorului sferic sunt două sfere concentrice, prima de rază  $R_1$ , iar cea de-a doua de rază  $R_2$  (fig. 4.4). Se consideră dielectricul dintre armături liniar și omogen de permitivitate  $\epsilon$ .

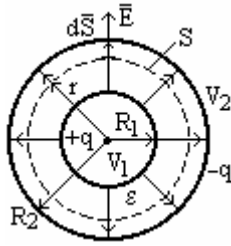


Fig. 4.4 Condensatorul sferic

Câmpul electric dintre armături, de intensitate  $\vec{E}$ , este simetric față de centrul suprafețelor sferice și nu are efect de margine.

Pentru determinarea capacității condensatorului sferic se aplică relația (4.6), în care secțiunea  $\Delta S$  prin tubul de câmp electric este o sferă concentrică cu cele două armături, de rază  $r$ , cu  $R_1 < r < R_2$ .

Se obține relația:

$$\frac{1}{C} = \int_1^2 \frac{dl}{\epsilon S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\epsilon 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (4.8)$$

Pentru a determina capacitatea unei sfere metalice de rază  $R_1$ , în relația (4.8), raza celei de-a doua armături se consideră infinită ( $R_2 \rightarrow \infty$ ):

$$C = 4\pi\epsilon R_1 \quad (4.9)$$

**Capacitatea condensatorului cilindric**

Condensatorul cilindric are armăturile de forma a doi cilindri metalici concentrice, de înălțime  $h$  și de raze  $R_1$  și  $R_2$  (fig. 4.5).

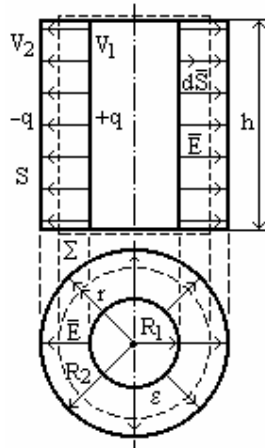


Fig. 4.5 Condensatorul cilindric

Se consideră dielectricul dintre armături liniar și omogen de permitivitate  $\epsilon$ .

Pentru determinarea capacității condensatorului cilindric se aplică relația (4.6), în care secțiunea  $\Delta S$  prin tubul de câmp electric este suprafața laterală a unui cilindru rază  $r$ , concentric cu cele două armături, cu  $R_1 < r < R_2$ .

Capacitatea condensatorului cilindric se calculează în ipoteza că se neglijează efectul de margine. Se obține relația:

$$\frac{1}{C} = \int_1^2 \frac{dl}{\epsilon S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\epsilon 2\pi r h} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\epsilon h} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln R_2/R_1} \quad (4.10)$$

### 4.3. GRUPAREA CONDENSATOARELOR

Se consideră o rețea de condensatoare inițial neîncărcată electric, alimentată pe la bornele **A** și **B** cu tensiunea  $U_{AB} = V_A - V_B$  (fig. 4.6). Se notează cu  $q_A$  ( $q_A = q > 0$ ) sarcina electrică primită pe la borna **A** și cu  $q_B$  ( $q_B = -q$ ) sarcina electrică primită la borna **B**. Se numește **capacitate echivalentă** a rețelei de condensatoare față de bornele **A** și **B**, mărimea definită de relația:

$$C_e = \frac{q_A}{V_A - V_B} = \frac{q_B}{V_B - V_A} = \frac{q}{U_{AB}} \quad (4.11)$$

adică capacitatea unui condensator, care dacă ar fi conectat în locul grupării reale de condensatoare, în exteriorul sistemului nu s-ar constata nici o schimbare (la aceeași diferență de potențial aplicată ar rezulta aceeași sarcină pe armături).

#### Legarea în paralel a condensatoarelor

Sarcina echivalentă a  $n$  condensatoare de capacități  $C_1, C_2, \dots, C_n$  legate în paralel (fig. 4.7) este dată de relația:

$$q_e = q_1 + q_2 + \dots + q_n = C_1 U_{AB} + C_2 U_{AB} + \dots + C_n U_{AB} = C_{ep} U_{AB} \quad (4.12)$$

Comparând relațiile (4.11) și (4.12) rezultă:

$$C_{ep} = \sum_{k=1}^n C_k \quad (4.13)$$

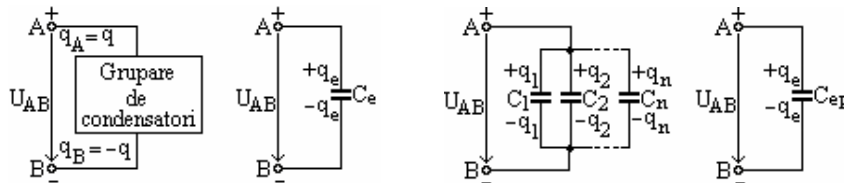


Fig. 4.6 Condensatorul echivalent Fig. 4.7 Legarea în paralel a condensatoarelor

#### Legarea în serie a condensatoarelor

Sarcina echivalentă a  $n$  condensatoare de capacități  $C_1, C_2, \dots, C_n$  legate în serie (fig. 4.8) este dată de relația:

$$q_e = q_1 = q_2 = q_n = q \quad (4.14)$$

Încărcarea condensatoarelor are loc astfel: sarcina  $+q$  care intră pe la borna **A** apare pe prima armătură (pozitivă) a condensatorului  $C_1$ . Această sarcină

determină apariția prin influență electrostatică a sarcinii  $-q$  pe cea de a doua armătură. Conform teoremei conservării sarcinii electrice, apare sarcina  $q_2 = +q$  pe prima armătură a condensatorului  $C_2$ . procesul se repetă până la armătura a doua a ultimului condensator, care se încarcă cu sarcina  $-q$  de la sursă. Tensiunea  $U_{AB}$  la bornele **A** și **B** va fi dată de relația:

$$U_{AB} = \frac{q}{C_{es}} = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n} \quad (4.15)$$

Rezultă capacitatea echivalentă:

$$\frac{1}{C_{es}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (4.16)$$

Capacitatea echivalentă este mai mică decât cea mai mică capacitate legată în serie.

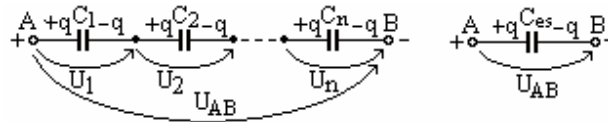


Fig. 4.8 Legarea în serie a condensatoarelor

Un condensator plan cu  $n$  straturi de dielectrici de permitivități relative  $\epsilon_{rk}$  și grosimi  $d_k$  este echivalent echivalent cu o rețea de  $n$  condensatoare legate în serie, condensatorul  $C_k$  având permitivitatea relativă  $\epsilon_{rk}$  și grosimea  $d_k$ . Ținând cont de relațiile (4.7) și (4.16) rezultă capacitate condensatorului respectiv:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{\epsilon_{rk}}} \quad (4.17)$$

#### 4.4. ECUAȚIILE DE CAPACITATE ALE LUI MAXWELL

**Ecuatiile de capacitate ale lui Maxwell** reprezintă relațiile de legătură între sarcinile și potențialele electrice ale unui sistem de  $n$  conductoare situate într-un mediu dielectric izotrop și liniar, neîncărcat electric și fără polarizație electrică permanentă.

Se consideră un conductor  $k$  din cele  $n$  conductoare și se presupune că sarcinile electrice ale tuturor conductoarelor sunt nule cu excepția conductorului  $i$ , a cărui sarcină electrică este  $q_i$ . Potențialul conductorului  $k$ , corespunzător sarcinii electrice  $q_i$  este dat de relația:

$$(V_k)_i = S_{ki} q_i \quad (4.18)$$

unde  $S_{ki}$  este un factor de proporționalitate.

Dacă se presupun toate conductoarele încărcate cu sacini electrice, pe baza teoremei superpoziției, rezultă potențialul electric  $V_k$  al conductorului  $k$ :

$$V_k = \sum_{i=1}^n (V_k)_i = S_{k1}q_1 + S_{k2}q_2 + \dots + S_{kn}q_n \quad (4.19)$$

Considerând cele  $n$  conductoare, se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} V_1 = S_{11}q_1 + S_{12}q_2 + \dots + S_{1n}q_n \\ V_2 = S_{21}q_1 + S_{22}q_2 + \dots + S_{2n}q_n \\ \dots \\ V_n = S_{n1}q_1 + S_{n2}q_2 + \dots + S_{nn}q_n \end{cases} \quad (4.20)$$

care reprezintă prima formă a ecuațiilor de capacitate ale lui Maxwell. Coeficienții  $S_{ki}$  [ $F^{-1}$ ] se numesc coeficienți de potențial (pentru  $k \neq i$  – coeficienți de potențial mutuali;  $k = i$  – coeficienți de potențial proprii). Pentru coeficienții de potențial mutuali se verifică condiția de reciprocitate,  $S_{ki} = S_{ik}$ ,  $k \neq i$ .

Coeficienții de potențial au următoarele semnificații:

$$S_{ki} = \left( \frac{V_k}{q_i} \right)_{q_{k \neq i} = 0}; \quad S_{kk} = \left( \frac{V_k}{q_k} \right)_{q_{i \neq k} = 0} \quad (4.21)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (4.20) în raport cu sarcinile electrice, se obține cea de a doua formă a relațiilor de capacitate ale lui Maxwell:

$$\begin{cases} q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + \dots + c_{1n}V_n \\ q_2 = c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + \dots + c_{2n}V_n \\ \dots \\ q_n = c_{n1}V_1 + c_{n2}V_2 + \dots + c_{nn}V_n \end{cases} \quad (4.22)$$

unde coeficienții  $c_{kk}$  se numesc coeficienți de capacitate iar  $c_{ki}$  ( $k \neq i$ ) se numesc coeficienți de influență electrică. Coeficienții de influență electrică respectă condiția de reciprocitate,  $c_{ki} = c_{ik}$ ,  $k \neq i$ .

Semnificația coeficienților este următoarea:

$$c_{ki} = \left( \frac{q_k}{V_i} \right)_{V_{k \neq i} = 0}; \quad c_{kk} = \left( \frac{q_k}{V_k} \right)_{V_{i \neq k} = 0} \quad (4.23)$$

Sistemul de ecuații (4.22) se poate transforma astfel încât sarcina electrică a unui conductor să fie exprimată în funcție de diferența de potențial dintre acel conductor și celelalte conductoare. Dacă primei ecuații a sistemului (4.22)

se adaugă și se scade mărimea  $\sum_{i=2}^n c_{i2}V_i$  se obține:

$$q_1 = V_1(c_{11} + c_{12} + \dots + c_{1n}) - (V_1 - V_2)c_{12} - \dots - (V_1 - V_n)c_{1n} \quad (4.24)$$





electrostatic. Într-o stare de încărcare electrică intermediară, conductoarele au sarcinile electrice  $q_1', q_2', \dots, q_n'$ , egale cu o fracțiune din sarcinile electrice finale,  $q_k' = \lambda q_k$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), iar potențialele electrice  $V_1', V_2', \dots, V_n'$ , unde  $V_k' = \lambda V_k$ . Aceste sarcini electrice intermediare produc într-un punct din spațiu un câmp electric de intensitate  $\vec{E}'$ .

Pentru a trece sistemul de conductoare din starea intermediară considerată în starea înfinit apropiată, în care sarcinile de pe corpuri sunt  $q_k' + dq_k'$ , iar potențialele  $V_k' + dV_k'$ , trebuie aduse de la înfinit pe corpurile respective sarcinile electrice elementare  $dq_k'$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), efectuând pentru aceasta lucrul mecanic elementar  $dL$ :

$$dL = \sum_{k=1}^n \int_{\infty}^{M_k} dq_k' \vec{E}' d\vec{l} = \sum_{k=1}^n dq_k' \int_{\infty}^{M_k} \vec{E}' d\vec{l} \quad (4.29)$$

unde  $dq_k' \vec{E}'$  este forța electrică care acționează asupra sarcinii  $dq_k'$ .

Deoarece  $\int_{\infty}^{M_k} \vec{E}' d\vec{l} = -V_k'$ , se obține:

$$dL = -\sum_{k=1}^n V_k' dq_k' \Rightarrow dW_e = \sum_{k=1}^n V_k' dq_k' \quad (4.30)$$

Ținând cont de faptul că  $V_k' = \lambda V_k$  și  $dq_k' = q_k d\lambda$  rezultă:

$$dW_e = \sum_{k=1}^n V_k q_k \lambda d\lambda \quad (4.31)$$

Energia câmpului electrostatic va fi egală cu lucrul mecanic efectuat pentru atingerea stării finale ( $\lambda = 1$ ) pornind de la starea inițială ( $\lambda = 0$ ):

$$W_e = \sum_{k=1}^n V_k q_k \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k q_k \quad (4.32)$$

Într-o formă generală, considerând un domeniu înfinit extins în interiorul căruia există o distribuție de volum a sarcinii electrice cu densitatea de volum  $\rho_v$ , o distribuție superficială cu densitatea de suprafață  $\rho_s$  și un sistem de  $n$  conductoare încărcate electric, energia câmpului electrostatic are expresia:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_v dV + \frac{1}{2} \iint_S \rho_s dS + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k q_k \quad (4.33)$$

### Aplicație

Să se determine energia electrostatică înmagazinată în câmpul electric al unui condensator electric, care are capacitatea  $C$  și este încărcat cu sarcina electrică  $q$ .

Cele două armături ale condensatorului electric sunt două conductoare încărcate cu sarcinile electrice  $q$  și  $-q$  și care au potențialele electrice  $V_1$  și  $V_2$ .

Conform relației (4.32) energia câmpului electric este:

$$W_e = \frac{1}{2}q_1V_1 + \frac{1}{2}q_2V_2 = \frac{1}{2}qV_1 - \frac{1}{2}qV_2 = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 \quad (4.34)$$

Relația (4.32) nu indică localizarea corectă a energiei câmpului electrostatic. Pentru aceasta se definește **densitatea de volum a energiei câmpului electric**  $w_e$  (energia electrică într-un punct din câmpul electric):

$$w_e = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W_e}{\Delta V} = \frac{dW_e}{dV} \quad (4.35)$$

Pentru a determina densitatea de volum a energiei electrice în funcție de mărimile de stare ale câmpului electric  $\bar{\mathbf{D}}$  și  $\bar{\mathbf{E}}$  se consideră câmpul electric omogen din interiorul unui condensator plan, pentru care este valabilă relația:

$$w_e = \frac{W_e}{V_d} = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{V_d} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon S}{V_d}d^2E^2 = \frac{\epsilon SdE^2}{2V_d} = \frac{\epsilon E^2}{2} \Rightarrow$$

$$w_e = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{D}} \quad (4.36)$$

unde  $V_d = Sd$  reprezintă volumul dielectricului dintre armături.

Rezultă că energia câmpului electrostatic localizat într-un volum  $V$  se poate calcula în funcție de mărimile de stare ale câmpului electric cu relația:

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{D}} dV \quad (4.37)$$

Unitatea de măsură a energiei electrice este **Joulul [J]**, iar densității de energie electrică este **Joulul pe metru cub [J/m<sup>3</sup>]**.

#### 4.5.2. TEOREMELE FORȚELOR GENERALIZATE

Calculul acțiunilor ponderomotoare care se exercită asupra corpurilor într-un câmp electric se poate face plecând de la expresia energiei sistemului pe baza unor teoreme, numite forțele generalizate.

Un sistem de corpuri poate fi caracterizat din punct de vedere al configurației geometrice printr-un număr de parametrii scalari denumiți coordonate generalizate sau lagrangiene. Numărul minim al acestora reprezintă numărul de grade de libertate ale sistemului. Coordonatele generalizate se notează cu  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  și pot fi distanțe, unghiuri, arii, volume etc.

Când coordonatele generalizate au variații elementare  $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, \dots, d\mathbf{x}_m$ , forțele generalizate  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$  care se exercită asupra corpurilor, efectuează un lucru mecanic elementar:

$$dL = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k d\mathbf{x}_k \quad (4.38)$$

Mărimile scalare  $\mathbf{X}_k$  care intervin în relația (4.38) se numesc forțe generalizate. Forța generalizată nu este o forță propriu-zisă. Dacă, de exemplu,  $\mathbf{x}_k$  este o deplasare,  $\mathbf{X}_k$  este componenta unei forțe după direcția deplasării; dacă  $\mathbf{x}_k$  este un unghi de rotație,  $\mathbf{X}_k$  este componenta momentului unei forțe în raport cu axul de rotație etc.

Se presupune că toate cele  $n$  corpuri sunt fixe în afară de corpul  $i$ , care poate să-și modifice numai coordonata  $\mathbf{x}_k$ . Lucrul mecanic efectuat de sursele de energie exterioară pentru variația cu  $d\mathbf{x}_k$  a sarcinilor electrice ale celor  $n$  corpuri trebuie să acopere creșterea de energie a câmpului electric și lucrul mecanic efectuat de forța generalizată  $\mathbf{X}_k$  asupra corpului  $i$ :

$$\sum_{k=1}^n V_k dq_k = dW_e + X_k dx_k \quad (4.39)$$

În cazul unui sistem de corpuri electrizate, calculul unei forțe generalizate  $\mathbf{X}_k$ , se poate face în două ipoteze.

a) Sistemul este izolat din punct de vedere energetic (nu există schimb de energie cu exteriorul, ceea ce înseamnă că sarcinile tuturor conductoarelor sunt constante,  $\mathbf{q} = \text{const.}$ ).

În acest caz, principiul de conservare a energiei se scrie sub forma:

$$dL + (dW_e)_{q=\text{const.}} = 0 \quad (4.40)$$

Ținând cont de faptul că se presupune că în cursul deplasării virtuale variază numai coordonata generalizată  $\mathbf{x}_k$ , rezultă:

$$X_k dx_k + (dW_e)_{q=\text{const.}} = 0 \quad (4.41)$$

Expresia energiei câmpului electrostatic pentru un sistem de  $n$  conductoare, ținând cont de relațiile de capacitate ale lui Maxwell, este dată de relația:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k V_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n S_{ki} q_k q_i \quad (4.42)$$

Deoarece coeficienții de potențial  $S_{ki}$  depind de configurația geometrică a sistemului de conductoare, rezultă că energia câmpului electrostatic este o funcție de sarcinile conductoarelor și de coordonatele generalizate ale sistemului:

$$W_e = W_e(q_1, q_2, \dots, q_n; x_1, x_2, \dots, x_m) \Rightarrow \quad (4.43)$$

$$(dW_e)_{q=\text{const.}} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{q=\text{const.}} dx_k \quad (4.44)$$

Considerând că variază numai coordonata generalizată  $\mathbf{x}_k$  rezultă:

$$X_k dx_k + \left( \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{q=\text{const.}} dx_k = 0 \Rightarrow \quad (4.45)$$

$$X_k = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{q=\text{const.}} \quad (4.46)$$

b) Potențialele tuturor conductoarelor sunt menținute constante (în acest caz are loc un schimb de energie cu exteriorul),  $\mathbf{V} = \mathbf{const.}$  Rezultă:

$$dL + (dW_e)_{V=\text{const.}} = dW_{\text{ext.}} \quad (4.47)$$

unde  $dW_{\text{ext.}}$  reprezintă energia elementară primită de sistem din exterior în timpul deplasării virtuale.

Pentru ca potențialele conductoarelor să fie menținute constante trebuie ca sarcinile acestora să crească cu valorile elementare  $dq_k$ , obținându-se:

$$dW_{\text{ext.}} = \sum_{k=1}^n V_k dq_k \Rightarrow dL + (dW_e)_{V=\text{const.}} = \sum_{k=1}^n V_k dq_k \quad (4.48)$$

Ținând cont de faptul că:  $W_e = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^n V_k q_k$ ;  $V_k = \text{const.}$ , rezultă:

$$(dW_e)_{V=\text{const.}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k = \frac{1}{2} dW_{\text{ext.}} \Rightarrow dL = (dW_e)_{V=\text{const.}} \quad (4.50)$$

Expresia energiei câmpului electrostatic pentru un sistem de  $n$  conductoare, ținând cont de relațiile de capacitate ale lui Maxwell, este dată de relația:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k V_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ki} V_k V_i \quad (4.51)$$

Deoarece coeficienții de capacitate  $c_{ki}$  depind de configurația geometrică a sistemului de conductoare, rezultă că energia câmpului electrostatic este o funcție de potențialele conductoarelor și de coordonatele generalizate ale sistemului:

$$W_e = W_e(V_1, V_2, \dots, V_n; x_1, x_2, \dots, x_m) \Rightarrow \quad (4.52)$$

$$(dW_e)_{V=\text{const.}} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{V=\text{const.}} dx_k \quad (4.53)$$

Deoarece s-a presupus că variază numai coordonata generalizată  $x_k$  rezultă:

$$X_k dx_k = \left( \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{V=\text{const.}} dx_k \Rightarrow X_k = \left( \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{V=\text{const.}} \quad (4.54)$$

Relațiile (4.46) și (4.54) reprezintă teoremele **forțelor generalizate în câmpul electrostatic**. Indiferent de ipoteza de calcul adoptată ( $\mathbf{q} = \mathbf{const.}$  sau  $\mathbf{V} = \mathbf{const.}$ ) forța generalizată trebuie să rezulte aceeași. Dacă în urma calculelor, forța generalizată  $X_k$  are o valoare pozitivă, atunci aceasta acționează în sensul majorării coordonatei generalizate  $x_k$  și dacă forța generalizată are o valoare negativă, atunci va acționa în sensul micșorării coordonatei generalizate.

## 5. CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT CONTINUU

### 5.1. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

#### 5.1.1. ELEMENTE INTRODUCTIVE

**Circuitul electric** se definește ca fiind ansamblul mediilor prin care poate circula curentul electric. Aceste medii pot fi medii conductoare, semiconductoare sau dielectrice. În medii conductoare și semiconductoare există curenți electrici de conducție, iar în medii dielectrice există curenți electrici de deplasare.

Din punct de vedere al repartiției densității de curent în secțiunea conductoarelor, circuitele electrice se clasifică în **circuite electrice filiforme** (densitatea curentului este constantă în secțiunea circuitului) și **circuite electrice masive** (repartiția curentului în secțiune nu este uniformă).

După regimul de funcționare, circuitele electrice se clasifică în **circuite de curent continuu** (c.c.), caracterizate numai prin existența curentului electric de conducție în conductoare, intensitate sa fiind constantă în timp și **circuite electrice în regim variabil**, la care curenții și tensiunile electrice ce intervin sunt mărimi variabile în timp (există curenți electrici de conducție în conductoare și curenți de deplasare în dielectricul condensatoarelor din circuit).

Circuitele electrice de curent continuu au ca elemente componente **rezistoare** (elemente pasive) și **surse de energie electrică** (elemente active). Rezistența electrică a rezistorului, t.e.m. și rezistența interioară a sursei de t.e.m. reprezintă parametrii elementelor respective.

După proprietățile de material ale elementelor circuitului electric, circuitele se împart în **circuite electrice liniare** (au parametrii independenți de valorile tensiunilor și curenților din circuit) și **neliniare** (au parametrii dependenți de valorile curenților și tensiunilor).

Mai multe elemente de circuit sunt conectate în serie atunci când acestea formează un conductor neramificat (sunt parcurse de același curent electric). Extremitățile distincte sau suprapuse ale elementelor de circuit se numesc borne. Un ansamblu de circuite electrice, conectate între ele într-un mod oarecare, poartă numele de **rețea electrică**. Din punct de vedere topologic, elementele principale ale unei rețele electrice sunt: laturile, nodurile și ochiurile.

**Latura** (ramura) este o porțiune neramificată de circuit, formată din elemente conectate în serie parcurse de același curent și cuprinsă între două noduri vecine. Numărul de laturi ale unei rețele se notează cu **L**. **Nodul** este punctul de conexiune a cel puțin trei elemente de circuit. Numărul de noduri ale unei rețele se notează cu **N**. **Ochiul** (bucla) este un contur închis realizat de-a lungul laturilor rețelei, începând de la un nod și ajungând la același nod, fără a

parcure o latură de două ori. Un ochi de rețea este **independent** față de un sistem de ochiuri dat, atunci când conține cel puțin o latură de rețea care nu a fost conținută de celelalte ochiuri ale rețelei. Numărul de ochiuri independente ale unei rețele se notează cu  $O$ . Între numărul de ochiuri independente  $O$ , numărul de laturi  $L$  și de noduri  $N$  ale unei rețele electrice, există următoarea relație de legătură, care poartă numele de **teorema lui Euler**:

$$O = L - N + 1 \tag{5.1}$$

În figura 5.1 este prezentată o rețea electrică. Nodurile rețelei electrice sunt: **A, B, C și D**, rezultând  $N = 4$ . Laturile rețelei electrice sunt: **AC, AB, AD, BC, BD și CD**, rezultând  $L = 6$ . Conform relației (5.1) numărul de ochiuri independente este  $O = 3$ , un sistem de ochiuri independente fiind format din ochiurile: **ABCA, ABDA și CBDC**. Un circuit de excepție este circuitul serie, neramificat (fig. 5.2), care are o singură latură și un singur ochi.

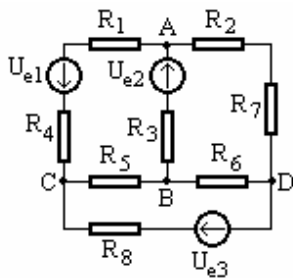


Fig. 5.1 Rețea electrică

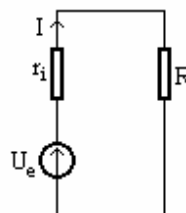


Fig. 5.2 Circuit simplu neramificat

Se numește **sens de referință** sau sens pozitiv al unei mărimi fizice scalare (tensiune sau curent), sensul vectorului element de integrare ( $d\vec{l}$ ,  $d\vec{S}$ ) stabilit fie arbitrar, fie pe baza unor reguli.

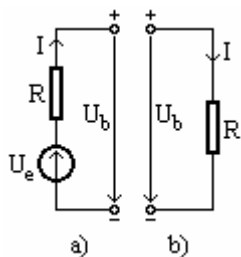


Fig. 5.3 Convenția de semne: a) generatoare; b) receptoare

T.e.m.  $U_e$  este pozitivă când sensul elementului de integrare  $d\vec{l}$ , prin interiorul sursei, este orientat de la borna negativă spre cea pozitivă. Curentul electric  $I$  este pozitiv când elementul de suprafață  $d\vec{S}$  are același sens cu vectorul densitate de curent  $\vec{J}$  sau când unghiul dintre cei doi vectori este mai mic de  $90^\circ$ .

Sensul de referință al tensiunii de la borne  $U_b$  se indică în schemă printr-o săgeată între borne.

Există două convenții privind asocierea sensurilor de referință ale tensiunii la bornele unei laturi de rețea și a curentului ce trece prin aceasta. Pentru

laturile receptoare, curentul  $\mathbf{I}$  și tensiunea la borne  $U_b$  au sensurile din figura 5.3 a. Puterea la borne  $P_b = \mathbf{I}U_b$  este primită de la rețea, dacă este pozitivă și este redată rețelei, dacă este negativă. Pentru laturile generatoare, curentul  $\mathbf{I}$  și tensiunea la borne  $U_b$  au sensurile din figura 5.3 b. Puterea la borne  $P_b = \mathbf{I}U_b$  este cedată de rețea, dacă este pozitivă, și este primită de rețea, dacă este negativă.

### 5.1.2. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF

#### Teorema întâi a lui Kirchhoff

Pentru stabilirea acestei teoreme se consideră o suprafață închisă  $\Sigma$  care înconjoară un nod  $N$  al unei rețele electrice (fig. 5.4). Dacă se aplică suprafeței  $\Sigma$  legea conservării sarcinii electrice, pentru regimul electrocinetic staționar, se obține:

$$I_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \bar{\mathbf{J}} d\bar{\mathbf{S}} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} = 0 \quad (5.2)$$

Integrala de suprafață a densității de curent este diferită de zero numai pentru suprafețele deschise  $S_1, S_2, S_3$  și  $S_4$  rezultate din intersecția conductoarelor cu suprafața  $\Sigma$ , unde  $\bar{\mathbf{J}} \neq \mathbf{0}$ . Ținând cont de faptul că vectorul  $d\bar{\mathbf{S}}$  este orientat spre exteriorul suprafeței închise și că  $\bar{\mathbf{J}}$  are sensul de referință indicat de săgeți (sensul curentului), se obține:

$$\iint_{\Sigma} \bar{\mathbf{J}} d\bar{\mathbf{S}} = \iint_{S_1} \bar{\mathbf{J}}_1 d\bar{\mathbf{S}} + \iint_{S_2} \bar{\mathbf{J}}_2 d\bar{\mathbf{S}} + \iint_{S_3} \bar{\mathbf{J}}_3 d\bar{\mathbf{S}} + \iint_{S_4} \bar{\mathbf{J}}_4 d\bar{\mathbf{S}} = 0 \quad (5.3)$$

Deoarece fluxul vectorului  $\bar{\mathbf{J}}$  prin suprafața secțiunii transversale a unui conductor este intensitatea curentului electric prin conductorul respectiv, se obține:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0 \quad (5.5)$$

Generalizând relația (5.5) rezultă

$$\sum_{k \in N} I_k = 0 \quad (5.6)$$

Relația (5.6) reprezintă **prima teoremă a lui Kirchhoff** și se enunță astfel: **în regim electrocinetic staționar, suma algebrică a intensităților curenților din laturile care concură într-un nod  $N$  al unei rețele electrice este nulă.**

Această teoremă se mai poate enunța: suma intensităților curenților care intră într-un nod este egală cu suma intensităților curenților care ies din nod. Prima teoremă a lui Kirchhoff este valabilă și în cazul circuitelor de curent

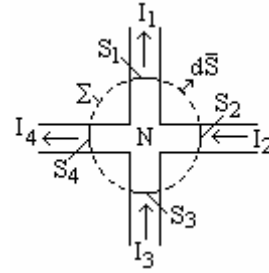


Fig. 5.4 Figură explicativă la demonstrarea primei teoreme a lui Kirchhoff



alternativ, deoarece legea conservării sarcinii electrice rămâne valabilă și în regim cvasistaționar.

### **Teorema a doua a lui Kirchhoff**

Se consideră un ochi de rețea  $q$ , având un anumit număr de laturi (fig. 5.5). Pentru stabilirea teoremei a doua a lui Kirchhoff se aplică forma locală a legii conducerii electrice, care se integrează de-a lungul curbei  $\Gamma$  ce trece prin axa conductorilor, care formează ochiul  $q$ . Se obține:

$$\oint_{\Gamma} (\bar{E} + \bar{E}_i) d\bar{l} = \oint_{\Gamma} \rho \bar{J} d\bar{l} \quad (5.7)$$

În regim electrocinetic staționar:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} d\bar{l} = 0 \quad \text{și} \quad \oint_{\Gamma} \bar{E}_i d\bar{l} = \sum_{k \in q} U_{ek} \quad (5.8)$$

unde  $U_{ek}$  reprezintă t.e.m. a sursei din latura  $k$  a ochiului  $q$ .

Membrul drept al relației (5.8) devine:

$$\oint_{\Gamma} \rho \bar{J} d\bar{l} = \sum_{k \in q} I_k \int_{l_k} \rho \frac{d\bar{l}}{S} = \sum_{k \in q} I_k R_k \quad (3.9)$$

unde  $R_k$  reprezintă rezistența laturii  $k$  a ochiului  $q$ , iar  $I_k$  – intensitatea curentului electric prin latura  $k$ . Din relațiile (5.7), (5.8) și (5.9) rezultă:

$$\sum_{k \in q} U_{ek} = \sum_{k \in q} R_k I_k \quad (5.10)$$

relație care reprezintă expresia matematică a teoremei a doua a lui Kirchhoff, care se enunță astfel: **în regim electrocinetic staționar, suma algebrică a t.e.m. ale surselor din laturile unui ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune pe laturile ochiului.**

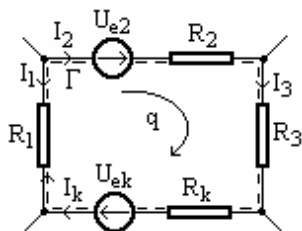


Fig. 5.5 Figură explicativă la demonstrarea teoremei a doua a lui Kirchhoff

Se iau cu semnul plus t.e.m. care au același sens cu sensul de integrare a ochiului (marcat cu o săgeată curbă în interiorul ochiului), și cu semnul minus cele care au sens contrar sensului de integrare a ochiului. Căderea de tensiune pe un rezistor se ia cu semnul plus dacă sensul curentului prin rezistor coincide cu sensul de integrare a laturii respective; în caz contrar, căderea de tensiune pe rezistor se ia cu semnul minus.

Teorema a doua a lui Kirchhoff se poate aplica și la ochiuri de rețea de curent alternativ. Numărul de ecuații independente ce se pot scrie cu teorema a doua a lui Kirchhoff pentru o rețea electrică este egal cu numărul ochiurilor independente.

### 5.1.3. GRUPAREA REZISTOARELOR ȘI SURSELOR DE CURENT CONTINUU

În rețelele electrice rezistoarele pot fi grupate în serie, paralel, mixt, stea sau triunghi. **Rezistența echivalentă**  $R_e$  este definită pentru o rețea de c.c. cu două borne de acces, ca fiind raportul pozitiv dintre tensiunea între aceste borne  $U_b$  și intensitatea  $I$  a c.c. care intră în rețea pe la una din borne și iese prin cealaltă:

$$R_e = \frac{U_b}{I} > 0 \quad (5.11)$$

#### Gruparea în serie a rezistoarelor

Se consideră  $n$  rezistoare de rezistențe  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , legate în serie ca în figura 5.6. Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff aplicată ochiului  $q$ , se obține:

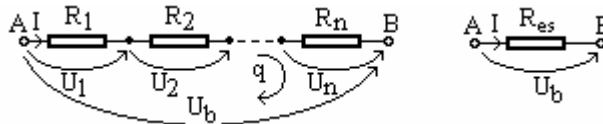


Fig. 5.6 Gruparea în serie a  $n$  rezistoare

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n - U_b = 0 \quad \text{sau} \quad (5.12)$$

$$I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = U_b = IR_{es} \Rightarrow R_{es} = \sum_{k=1}^n R_k \quad (5.13)$$

Rezultă că în cazul legării în serie a  $n$  rezistoare, rezistența echivalentă este egală cu suma rezistențelor celor  $n$  rezistoare.

#### Gruparea în paralel a rezistoarelor

Se consideră  $n$  rezistoare de rezistențe  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , legate în paralel ca în figura 5.7. Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului  $A$ , se obține:

$$I = \frac{U_b}{R_{ep}} = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U_b}{R_1} + \frac{U_b}{R_2} + \dots + \frac{U_b}{R_n} \quad (5.14)$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{R_{ep}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (5.15)$$

Rezultă că în cazul legării în paralel (derivație) a  $n$  rezistoare, inversul rezistenței echivalente este egal cu suma inverselor rezistențelor rezistoarelor componente.

Inversul rezistenței se notează cu  $G$  și se numește **conductanță**, rezultând:

$$G_{ep} = \sum_{k=1}^n G_k \quad (5.16)$$

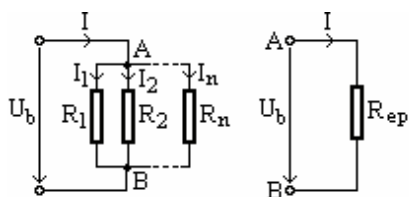


Fig. 5.7 gruparea în paralel a  $n$  rezistoare

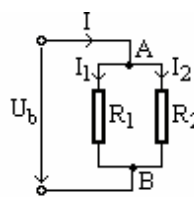


Fig. 5.8 Divizorul de curent

**Divizorul de curent**

Valorile intensităților curenților din două rezistoare legate în paralel în funcție de curentul total  $I$  (fig. 5.8) se calculează cu relațiile:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (5.17)$$

**Gruparea surselor de curent continuu**

**Legarea în serie** a surselor se utilizează atunci când se urmărește obținerea unei tensiuni mai mari pe rezistența de sarcină  $R$  (fig. 5.9 a). Tensiunea totală electromotoare va fi:

$$U_e = \sum_{k=1}^n U_{ek} \quad (5.18)$$

În cazul a  $n$  surse de t.e.m. identice de t.e.m.  $U_e$  și rezistențe interne  $r_i$ , legate în serie valorile t.e.m.  $U_{et}$  și a rezistenței interne  $r_{it}$  a sursei echivalente sunt:

$$U_{et} = n U_e; \quad r_{it} = n r_i \quad (5.19)$$

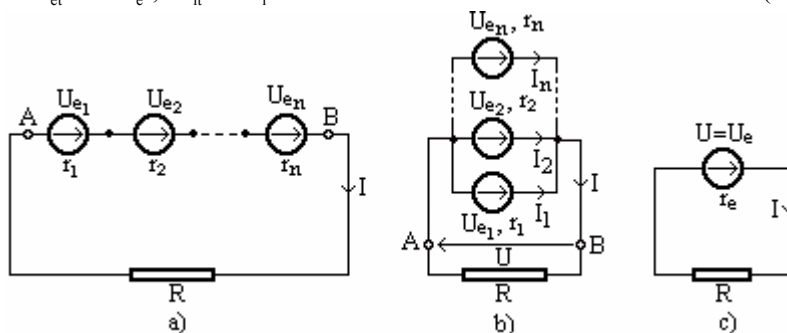


Fig. 5.9 Legarea surselor de c.c. în: a) serie, b) paralel; c) schema paralel echivalentă

La legarea în serie a celor  $n$  surse, curentul  $I$  din circuit nu trebuie să depășească curentul nominal al sursei celei mai mici (se pot lega în serie și surse cu tensiuni diferite).

**Legarea în paralel** (fig. 5.9 b) a surselor de curent continuu se realizează cu surse care au aceeași t.e.m. și aceeași rezistență internă. Circuitul echivalent al schemei în paralel este cel din figura 5.9 c. Tensiunea  $U$ , care se stabilește la bornele sarcinii, este aceeași cu oricare dintre t.e.m. ale surselor componente, din care se scade căderea de tensiune pe rezistențele interne:

$$U = U_{e1} - r_1 I_1 = U_{e2} - r_2 I_2 = \dots = U_{en} - r_n I_n \quad (5.20)$$

În cazul a  $n$  surse de t.e.m. identice de t.e.m.  $U_e$  și rezistențe interne  $r_i$ , legate în paralel valorile t.e.m.  $U_{et}$  și a rezistenței interne  $r_{it}$  a sursei echivalente sunt:

$$U_{et} = U_e ; \quad r_{it} = \frac{r_i}{n} \quad (5.21)$$

În cazul conexiunii serie – paralel se obține:

$$U_{et} = n U_e ; \quad r_{it} = \frac{n}{m} r_i \quad (5.22)$$

unde  $n$  este numărul de elemente legate în serie pe ramură, iar  $m$  - numărul de elemente legate în paralel.

#### 5.1.4. METODE DE REZOLVARE A CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE

##### Metoda teoremelor lui Kirchhoff

Fiind dată o rețea electrică la care se cunosc valorile t.e.m. și ale rezistențelor laturilor, se pune problema determinării prin calcul a intensităților curenților care trec prin laturile rețelei. Dacă se cunosc o parte din valorile t.e.m., rezistențelor și curenților din laturi, se pot determina prin calcul celelalte mărimi necunoscute (t.e.m., curenți, rezistențe).

Pentru rezolvarea unei rețele electrice prin metoda teoremelor lui Kirchhoff se procedează astfel:

- se stabilesc numărul de noduri  $N$  și numărul de laturi  $L$  ale rețelei;
- se aleg sensuri de referință pentru curenții și t.e.m. necunoscute din laturi și se figurează pe schema electrică;
- se stabilesc ochiurile independente și sensurile de referință pentru ele;
- se scriu cele  $p = N - 1$  ecuații pentru noduri, aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff, și  $q = L - N + 1$  ecuații pentru ochiuri, aplicând cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff;
- se rezolvă sistemul de ecuații obținut;
- dacă prin rezolvarea ecuațiilor, curenții apar cu semne negative, sensurile reale ale acestor curenți sunt opuse celor adoptate arbitrar.



Sistemul de ecuații cu care se determină potențialele nodurilor se obține prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff, curenții din laturile concurente într-un nod fiind exprimați în funcție de ceilalți parametri ai elementelor conținute de laturi (fig. 5.10 a). Pentru potențialul unui nod trebuie să se admită o valoare arbitrară și anume valoarea  $0$ , care este potențialul electric al Pământului. Pentru o latură de rețea (fig. 5.10 b) se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff, latura fiind luată după convenția de la receptoare:

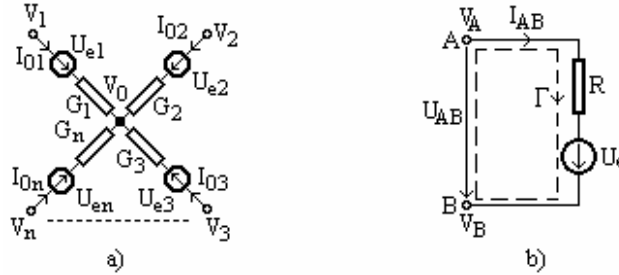


Fig. 5.10 Figură explicativă: a) nodul de rețea; b) latura de rețea

$$U_e = I_{AB} \cdot R - U_{AB}; \quad U_{AB} = V_A - V_B \quad (5.24)$$

Curentul  $I_{AB}$  se calculează cu relația:

$$I_{AB} = \frac{U_e}{R} + \frac{U_{AB}}{R} = G \cdot U_e + G(V_A - V_B) \quad (5.25)$$

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff pentru nodul de potențial  $V_0$  se obține:

$$\sum_{k=0}^n I_{Ok} = I_{O1} + I_{O2} + \dots + I_{On} = 0 \quad (5.26)$$

Conform relației (5.25) curenții pentru fiecare latură concurentă în nodul de potențial  $V_0$ , se scriu:

$$\begin{cases} I_{O1} = G_1 \cdot U_{e1} + G_1(V_0 - V_1) \\ I_{O2} = G_2 \cdot U_{e2} + G_2(V_0 - V_2) \\ \dots \\ I_{On} = G_n \cdot U_{en} + G_n(V_0 - V_n) \end{cases} \quad (5.27)$$

Adunând aceste relații și ordonându-le, se obține:

$$V_0 \left( \sum_{k=1}^n G_k \right) - \sum_{k=1}^n G_k \cdot V_k + \sum_{k=1}^n G_k \cdot U_{ek} = 0 \quad (5.28)$$

Relația (5.28) se scrie pentru toate nodurile rețelei, rezultând un sistem de ecuații, care în urma rezolvării dă valorile potențialelor  $V_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $V_0$  fiind unul dintre aceste potențiale.

Curenții din laturi se calculează cu relația (5.25).

### **Metoda superpoziției**

Algoritmul de calcul se bazează pe principiul suprapunerii efectelor (teorema superpoziției) aplicabil la rețelele electrice liniare. Conform metodei superpoziției, intensitatea curentului electric într-o latură a unei rețele liniare, cu mai multe surse de tensiune electromotoare, este egală cu suma algebrică a intensităților curenților electrici pe care i-ar stabili în acea latură fiecare dintre surse în parte.

Pentru rezolvarea unei rețele electrice prin această metodă, se procedează astfel:

- a) se anulează t.e.m. ale tuturor surselor din rețea, cu excepția uneia (păstrând rezistențele lor interioare), și se calculează curenții din rețeaua mai simplă obținută în acest mod;
- b) se repetă aceste operații pentru fiecare t.e.m. în parte;
- c) se calculează curenții reali prin însumarea algebrică a curenților obținuți anterior, în fiecare latură.

Pentru exemplificare se consideră rețeaua electrică din figura 5.11. Se consideră, mai întâi, că în rețea acționează numai sursa cu t.e.m.  $U_{e1}$ , iar t.e.m.  $U_{e2}$  se presupune zero, păstrându-se numai rezistența internă  $r_2$  a acesteia (fig. 5.11 a). În continuare, se consideră că în rețea acționează numai sursa a doua și se procedează în același mod (fig. 5.11 b). Se procedează la fel dacă rețeaua conține trei sau mai multe surse.

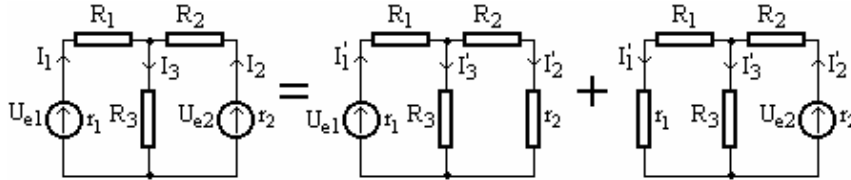


Fig. 5.11 Figură explicativă la metoda superpoziției: a) rețeaua dată  
b), c) rețeaua cu câte o sursă

Rezolvând circuitele din figurile 5.11 a și 5.11 b, se obțin valorile curenților  $I_1'$ ,  $I_2'$ ,  $I_3'$ , respectiv  $I_1''$ ,  $I_2''$  și  $I_3''$ . În exemplul prezentat, curenții reali din laturi se obțin cu relațiile:

$$I_1 = I_1' - I_1''; \quad I_2 = -I_2' + I_2''; \quad I_3 = I_3' + I_3'' \quad (3.29)$$

### **Metoda transfigurării**

Metoda transfigurării este aplicabilă atât la rețele pasive cât și la rețele active. Uneori, pentru calculul unei rețele electrice, este necesar ca o conexiune în stea să se transfigureze într-o conexiune în triunghi sau invers (fig. 5.12).

Se consideră rezistoarele  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  și  $R_{31}$  conectate în triunghi. Transfigurând conexiunea în triunghi în conexiunea în stea (fig. 5.12), rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$  trebuie determinate în funcție de rezistențele  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  și  $R_{31}$ , astfel încât cele două conexiuni să fie echivalente.

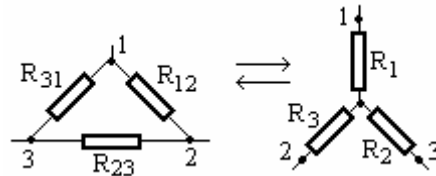


Fig. 5.12 Transfigurarea triunghi – stea

Se pune condiția ca rezistențele echivalente dintre bornele 1-2, 2-3 și 3-1 să fie aceleași pentru cele două conexiuni. Cu borna 1 în gol, pentru conexiunea în triunghi, se obține rezistența echivalentă:

$$\frac{1}{R'_{e1}} = \frac{1}{R_{12} + R_{31}} + \frac{1}{R_{23}} \Rightarrow R'_{e1} = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (5.30)$$

Pentru conexiunea în stea, cu borna 1 în gol, rezultă rezistența echivalentă:

$$R''_{e1} = R_2 + R_3 \quad (5.31)$$

Conform condiției puse anterior:

$$R'_{e1} = R''_{e1} \Rightarrow R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (5.32)$$

Analog se fac calculele, lăsând pe rând bornele 2 și respectiv, 3 în gol. Se obțin relațiile:

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (5.33)$$

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (5.34)$$

Adunând cele trei relații obținute și simplificând cu 2, rezultă relația:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{23}R_{31} + R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (5.35)$$

Scăzând pe rând din relația (5.35) relațiile (5.32), (5.33) și respectiv, (5.34) se obțin următoarele expresii pentru rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$ :

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (5.36)$$

Pentru transfigurarea conexiunii în stea într-o conexiune în triunghi, demonstrația se face similar cu cea prezentată anterior, considerând pe rând bornele 2-3, 3-1 și 1-2 în scurtcircuit. Calculând rezistențele echivalente la conexiunile în stea și în triunghi și punând condiția de egalitate, se obțin:



$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \quad (5.37)$$

**Teorema generatorului echivalent de tensiune (Helmholtz – Thèvenin)**

Orice rețea liniară și activă poate fi înlocuită în raport cu o latură a sa **AB**, printr-un generator de tensiune echivalent, având tensiunea electromotoare egală cu tensiunea de mers în gol față de bornele laturii respective  $U_{AB0}$  și rezistența internă egală cu rezistența echivalentă, în raport cu aceleași borne  $R_{AB0}$ , a rețelei pasivizate (fig. 5.13). Metoda este utilizată pentru determinarea intensității curentului dintr-o latură a rețelei electrice:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}} \quad (5.38)$$

Pentru calculul intensității curentului dintr-o latură pasivă **AB** a unei rețele electrice prin această metodă se procedează în felul următor:

- se elimină latura respectivă din rețea și se calculează în aceste condiții tensiunea  $U_{AB0}$  și rezistența  $R_{AB0}$ ;
- cu ajutorul relației (5.38), în care  $R_{AB}$  reprezintă rezistența laturii eliminate, se determină intensitatea curentului necunoscut.

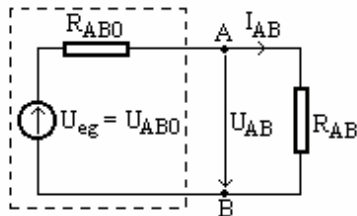


Fig. 5.13 Generatorul echivalent de tensiune

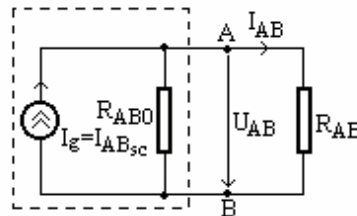


Fig. 5.14 Generatorul echivalent de curent

**Teorema generatorului echivalent de curent (Norton)**

Tensiunea  $U_{AB}$  produsă în sarcină de o rețea liniară care alimentează un rezistor exterior de rezistență  $R_{AB}$  (fig. 5.14) este egală cu raportul dintre curentul de scurtcircuit  $I_{ABsc}$ , pe care îl debitează rețeaua când bornele **A** și **B** sunt scurtcircuitate și suma dintre conductanța exterioară  $G_{AB}$  și conductanța  $G_{AB0}$  a restului rețelei pasivizată, raportată la bornele **A** și **B**:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} \quad (5.39)$$

**Teorema transferului maxim de putere**

Se consideră circuitul electric din figura 5.15, în care se cunosc valoarea t.e.m.  $U_e$  și rezistența interioară a sursei  $r_i$ . Se cere să se determine valoarea rezistenței  $R$ , pentru care puterea dată de generator pe la bornele  $A$  și  $B$  este maximă.

Conform legii lui Ohm, curentul  $I$  prin circuit are expresia:

$$I = \frac{U_e}{R + r_i} \quad (5.40)$$

Puterea la borne este dată de relația:

$$P_{AB} = U_{AB} \cdot I = R I^2 = \frac{R \cdot U_e^2}{(R + r_i)^2} \quad (5.41)$$

Funcția  $P_{AB} = P_{AB}(R)$  este continuă și pozitivă și se anulează pentru  $R = 0$  și  $R = \infty$ .

Rezultă că în intervalul cuprins între  $0$  și  $\infty$  funcția are un maxim, care se obține anulând derivata întâi:

$$\frac{dP_{AB}}{dR} = \frac{R^2(r_i^2 - R^2)}{(R + r_i)^4} = 0 \Rightarrow R = r_i \quad (5.42)$$

**Teorema transferului maxim de putere** se enunță astfel: **o sarcină conectată între două borne ale unei surse de t.e.m. absoarbe o putere maximă dacă rezistența ei este egală cu rezistența interioară a sursei.** O astfel de sarcină se spune că este adaptată la sursă.

În condițiile transferului maxim de putere, puterea maximă debitată de sursă  $P_{ABmax}$ , puterea furnizată de sursă  $P_g$  și randamentul  $\eta$  sunt date de relațiile:

$$P_{ABmax} = \frac{U_e^2}{4r_i}; \quad P_g = U_e \cdot I = \frac{U_e^2}{2r_i}; \quad \eta = \frac{P_{ABmax}}{P_g} = 0,5 \quad (5.43)$$

**Teorema conservării puterilor (bilanțul puterilor)**

Într-o rețea electrică de curent continuu cu  $L$  laturi, suma puterilor absorbite de rezistoare este egală cu suma dintre puterile debitate de surse și puterea primită de la borne:

$$\sum_{k=1}^L R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^L U_{ek} I_k + P_b \quad (5.44)$$

Cazuri particulare:

a) dacă rețeaua este izolată față de exterior

$$\sum_{k=1}^L R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^L U_{ek} I_k \quad (5.45)$$

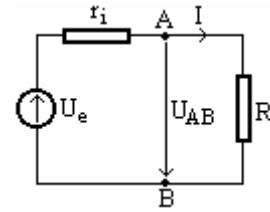


Fig. 5.15 Figură explicativă la teorema transferului maxim de putere

b) dacă rețeaua este pasivă

$$\sum_{k=1}^L R_k I_k^2 = P_b \quad (5.46)$$

Teorema conservării puterilor ajută la verificarea corectitudinii rezolvării rețelelor electrice.

## 5.2. CIRCUITE ELECTRICE NELINIARE

### 5.2.1. ELEMENTE DE CIRCUIT REZISTIVE NELINIARE

Toate elementele de circuit pasive, a căror caracteristică tensiune-curent  $U(I)$  în curent continuu nu este o linie dreaptă trecând prin origine, se numesc elemente de circuit neliniare sau **rezistoare neliniare**. Circuitele electrice, care conțin elemente neliniare, se numesc **circuite neliniare**.

Elementele rezistive neliniare se caracterizează prin relația caracteristică tensiune la borne – curent  $U(I)$ , numită și caracteristică volt-ampere, cele două mărimi având sensurile de referință asociate după regula de la receptoare. Această relație poate fi dată analitic, grafic sau numeric, sub formă de tabel.

După aspectul caracteristicii  $U(I)$ , rezistoarele neliniare pot fi simetrice (fig. 5.16 a) sau nesimetrice (fig. 5.16 b), după cum caracteristica lor este simetrică (funcție impară) sau nu în raport cu originea axelor.

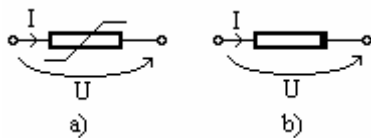


Fig. 5.16 Simboluri pentru rezistoare neliniare: a) simetrice; b) nesimetrice

Ca exemple de elemente neliniare simetrice pot fi date: lămpile cu incandescență cu filament de cărbune sau de wolfram; termistoarele; rezistoarele din carbură de siliciu (tirit, vilit, varistor etc.) sau cu oxid de zinc; tuburile baretor; tuburile cu descărcări în gaze cu electrozi simetrici; arc electric etc.

Ca elemente neliniare nesimetrice pot fi amintite: dioda cu vid (kenotron), diodele cu semiconductoare; tuburile electronice; tranzistoarele și alte dispozitive cu semiconductoare nesimetrice.

Rezistoarele neliniare pot fi caracterizate prin rezistența statică  $R_s$  și prin rezistența dinamică  $R_d$  (fig. 5.17), care sunt definite astfel:

$$R_s = \frac{U}{I}; \quad R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (5.47)$$

Valorile acestor rezistențe depind de punctul de funcționare pe caracteristica  $U(I)$ , însă acestea variază numai între anumite limite și permit o comparație cu elementele liniare.

La rezistoarele neliniare a căror caracteristică volt-ampere trece prin origine,

rezistența statică este o mărime mereu pozitivă, pe când rezistența dinamică poate fi atât pozitivă cât și negativă (de exemplu la termistor sau la arcul electric).

La elementele neliniare care funcționează în regim variabil de temperatură (neliniaritatea caracteristicii fiind determinată de variația temperaturii datorită efectului Joule-Lenz produs de curent), trebuie făcută deosebirea între caracteristica în regim termic staționar și cea în regim termic variabil (tranzitoriu).

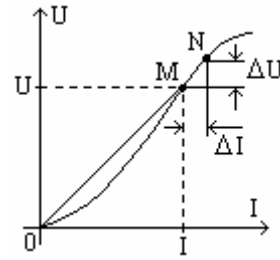


Fig. 5.17 Definirea rezistențelor elementelor neliniare

### 5.2.2. CALCULUL CIRCUITELOR NELINIARE DE C.C.

Pentru rezolvarea circuitelor neliniare de curent continuu se utilizează relațiile obținute prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, urmate de scrierea relațiilor constitutive:

$$\sum_{k \in N} I_k = 0 \quad (5.48)$$

$$\sum_{k \in q} U_{ek} = \sum_{k \in q} U_{pk} \quad (5.49)$$

$$U_{pk} = U_{pk}(I_k) \quad (5.50)$$

unde  $I_k$  sunt curenții din laturi;  $U_{ek}$  – t.e.m. ale surselor de tensiune ale laturilor;  $U_{pk}$  – tensiunile la bornele părții pasive a laturilor, obținute prin adunarea relațiilor constitutive ale elementelor pasive.

Atunci când relațiile constitutive ale elementelor neliniare sunt date analitic, în principiu se poate încerca o rezolvare analitică a sistemului de ecuații neliniare obținut. Această rezolvare prezintă însă dificultăți deosebite, deoarece sistemul va conține ecuații transcendente sau de grad superior, pentru care nu există metode generale de rezolvare și nu este asigurată unicitatea soluției. În cazul general, soluția poate fi obținută numai prin metode numerice, iar în cazul sistemelor cu soluții multiple trebuie făcute și precizări suplimentare, care să permită găsirea soluției curențe.

Pentru circuite neliniare simple, cea mai intuitivă este metoda de rezolvare grafico-analitică, care constă în următoarele: se construiesc grafic relațiile constitutive ale laturilor circuitului într-un plan  $[U, I]$ ; se scriu ecuațiile circuitului cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff; se determină soluțiile acestor ecuații prin construcții grafice, de compunere a caracteristicilor parțiale în conformitate cu ecuațiile stabilite, respectiv prin găsirea punctelor de funcționare la intersecții de caracteristici.

La rezolvarea circuitelor neliniare pot fi aplicate și metode iterative de rezolvare numerică (metoda micilor variații). Rezolvarea pleacă fie de la o stare

inițială dată, fie de la starea „zero” (toate sursele au t.e.m. nule și toți curenții sunt nuli). Prin modificarea treptată a tensiunii surselor, prin variații mici, se determină puncte de funcționare succesive, până se ajunge la starea finală.

Componentele mici, lent variabile ale tensiunilor sau curenților, față de o stare de referință, satisfac ecuațiile unui circuit liniar, în care elementele sunt caracterizate prin rezistențele lor dinamice:

$$\sum_{k \in N} \Delta I_k = 0 \quad (5.51)$$

$$\sum_{k \in q} \Delta U_{ek} = \sum_{k \in q} \Delta U_k \quad (5.52)$$

$$\Delta U_k = R_{dk} \Delta I_k \quad (5.53)$$

$$R_{dk} = \left[ \frac{\Delta U_k}{\Delta I_k} \right]_{I=I_{k0}} \quad (5.54)$$

unde  $R_{dk}$  reprezintă rezistența dinamică a elementului în punctul de funcționare ( $U_{k0}$ ,  $I_{k0}$ ). În cazul în care rezistențele dinamice au valori negative nu este asigurată unicitatea soluției sistemului.

### Exemplu de circuit neliniar

#### Rezistor neliniar conectat în serie cu un rezistor liniar

Ecuația circuitului din figura 5.18 a, cu notațiile și cu sensurile de referință din figură, este următoarea:

$$U_e = R I + U(I)$$

ecuație, care se poate pune sub forma următoare:

$$U_e - R I = U(I)$$

Această relație conduce la soluția grafică din figura 5.18 b: în planul  $[U, I]$  se construiește dreapta  $E - R I$  și curba  $U(I)$ ; la intersecția lor se găsește punctul de funcționare.

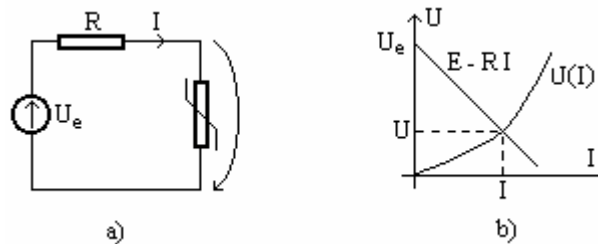


Fig. 5.18 Determinarea punctului de funcționare în cazul unui rezistor neliniar în circuit serie

## 6. CÂMPURI ELECTROKINETICE

### 6.1. CÂMPUL ELECTROKINETIC ÎN MEDII CONDUCTOARE MASIVE

#### 6.1.1. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROKINETIC

Câmpul electrokinetic este câmpul de vectori al densității de curent  $\bar{\mathbf{J}}$ . În medii conductoare extinse (pământul, electroliții, dielectricul imperfect izolanț, porțiuni de conductoare metalice masive etc.) determinarea repartiției densității de curent implică utilizarea metodelor teoriei câmpurilor de vectori.

În general problemele de câmp electrokinetic staționar se formulează astfel: se consideră un domeniu conductor  $\mathbf{D}$  liniar, de regulă fără câmp electric imprimat ( $\bar{\mathbf{E}}_i = \mathbf{0}$ ), în regim staționar. În acest domeniu sau pe suprafața sa sunt aduși  $n$  curenți ( $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$ ), prin electrozi de conductivitate foarte mare față de cea a mediului conductor al domeniului  $\mathbf{D}$ , sau sunt date potențialele electrozilor. În calcule electrozii se consideră echipotențiali, de potențiale  $V_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Curenții de aducție formează un sistem complet, adică:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (6.1)$$

Dacă se află în interiorul domeniului  $\mathbf{D}$ , electrozii sunt alimentați din exterior prin fire izolate foarte subțiri. În conformitate cu teorema continuității curentului de conducție, curenții  $I_k$  aduși prin aceste fire sunt egali cu fluxul densității de curent prin suprafețele  $\Sigma_k$  ce delimitează electrozii (suprafețe practic închise, cu excepția punctelor prin care trec firele izolate care aduc curenții):

$$I_k = \iint_{\Sigma_k} \bar{\mathbf{J}}_k \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (6.2)$$

În interiorul domeniului conductor  $\mathbf{D}$ , ecuațiile câmpului electrokinetic staționar sunt reprezentate de formele locale ale teoremei continuității curentului de conducție, teoremei potențialului electric staționar și legii conducției electrice (se presupune un domeniu fără câmpuri imprimate iar mediul se consideră izotrop):

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \text{ sau } \bar{\mathbf{E}} = -\nabla V \quad (6.3)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{J}} = 0 \quad (6.4)$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}} \quad (6.5)$$

Aceste ecuații trebuie integrate în condițiile date pe frontiera exterioară a domeniului  $\mathbf{D}$  și ținând cont de suprafețele echipotențiale  $\Sigma_k$  ale electrozilor,

pentru fiecare electrod fiind dat potențialul  $V_k$  sau curentul  $I_k$ .

Înlocuind relația (6.5) în relația (6.4) se obține:

$$\operatorname{div}(\sigma \bar{E}) = \sigma \operatorname{div} \bar{E} + \bar{E} \operatorname{grad} \sigma = 0 \quad (6.6)$$

din care rezultă că, dacă mediul este și omogen ( $\nabla \sigma = 0$ ), se obține  $\operatorname{div} \bar{E} = 0$ .

Rezultă că ecuațiile câmpului electric în condițiile menționate sunt:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \operatorname{div} \bar{E} = 0 \quad (6.7)$$

care corespund unui câmp laplacian,  $\nabla^2 V = 0$ . Integrând ecuația lui Laplace ținând cont de condițiile de frontieră, se obține funcția de potențial  $V$ , ceea ce permite determinarea lui  $\bar{E} = -\nabla V$  și  $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ .

Considerând inducția electrică  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$  în condițiile menționate, se obține:

$$\operatorname{div} \bar{D} = \epsilon \operatorname{div} \bar{E} + \bar{E} \operatorname{grad} \epsilon = 0 \quad (6.8)$$

deoarece  $\operatorname{div} \bar{E} = 0$ , iar mediul fiind presupus omogen,  $\nabla \epsilon = 0$ . Ținând cont de legea fluxului electric, rezultă că într-un mediu conductor izotrop și omogen, fără câmpuri imprimare, în regim electrocinetic staționar, densitatea de volum a sarcinii electrice în fiecare punct al domeniului considerat este nulă.

### 6.1.2. CONDIȚII DE TRECERE LA SUPRAFAȚA DE SEPARAȚIE DINTRE DOUĂ MEDII CONDUCTOARE

Se consideră suprafața de separație dintre două medii conductoare în regim electrocinetic (fig. 6.1). Ținând seama de relațiile (6.3) și (6.4), rezultă:

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad J_{1n} = J_{2n} \quad (6.9)$$

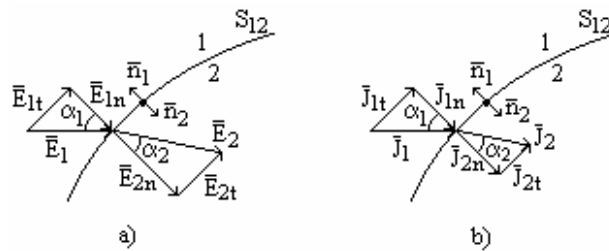


Fig. 6.1 Componentele intensității câmpului electric - a) și densității curentului electric de conducție - b) la suprafața de separație dintre două medii conductoare

Cele două medii fiind presupuse izotrope, liniare și omogene, având conductivitățile  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  și permitivitățile  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$ , din relațiile (6.9) rezultă:

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \Rightarrow \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (6.10)$$

$$\sigma_2 J_{1t} = \sigma_1 J_{2t} \Rightarrow \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (6.11)$$

care relevă faptul că  $S_{12}$  este o suprafață de discontinuitate pentru componenta normală a intensității câmpului electric și respectiv, pentru componenta tangențială a densității curentului electric de conducție.

Cu notațiile din figura 6.1 și ținând cont de relațiile stabilite, se obține:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (6.12)$$

relație care reprezintă **teorema refracțiilor liniilor de câmp în regim electrocinetic staționar**.

Se vor considera unele cazuri particulare. Astfel, se presupune că unul din medii este perfect conductor iar celălalt are o anumită conductivitate finită (fig. 6.2).

În mediul 1 densitatea de curent are valori finite, corespunzătoare curentului de alimentare  $i$  care trece prin suprafața  $S_{12}$ . Deoarece  $\sigma_1 = \infty$ , din legea lui Ohm rezultă că intensitatea câmpului electric în mediul 1 este nulă, ceea ce înseamnă că în cel de-al doilea mediu conductor  $\bar{J}_2$  și  $\bar{E}_2$  sunt vectori perpendiculari pe suprafața de separație  $S_{12}$ . Acest caz se întâlnește în practică la suprafața de contact dintre electrozii metalici de conductivitate ridicată și un mediu care are o conductivitate mult mai mică.

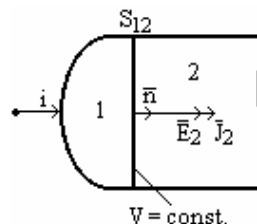


Fig. 6.2 Suprafața de separație dintre un mediu perfect conductor și un mediu cu o conductivitate finită

Un alt caz particular se referă la suprafața de separație dintre un conductor parcurs de curent și dielectricul, respectiv aerul din jurul său (fig. 6.3).

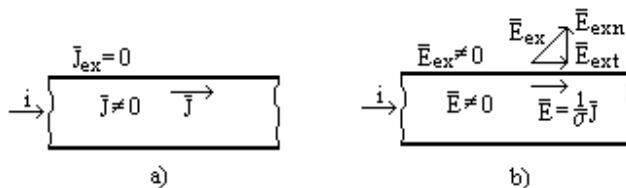


Fig. 6.3 Componentele densității de curent - a) și intensității câmpului electric b) - la suprafața de separație dintre un conductor parcurs de curent și un dielectric

Ținând cont de faptul că în dielectric curentul este nul și de conservarea componentei normale a densității de curent, rezultă că în conductor densitatea de curent și implicit intensitate câmpului electric au numai componente tangențiale. Dacă se ține cont de conservarea componentei tangențiale a



câmpului electric rezultă că în exteriorul conductorului componenta tangențială a intensității câmpului electric este egală cu intensitatea câmpului electric din conductor ( $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{E}$ ). În exteriorul conductorului intensitatea câmpului electric poate avea și o componentă normală,  $\mathbf{E}_{\text{exn}}$  (fig. 6.3 b), care corespunde unor sarcini adevărate superficiale pe suprafața acestuia. Componenta normală apare datorită faptului că între punctele conductorului și ale altor conductoare din apropiere sau pământ există o diferență de potențial, deci un câmp electric.

Discontinuitatea componente normale a intensității câmpului electric în suprafața de separație dintre două medii conductoare diferite relevă faptul că în suprafața respectivă există sarcini electrice.

### 6.1.3. REZISTENȚA ELECTRICĂ

**Rezistența electrică  $R$**  este un parametru global al unor sisteme fizice (conductor sau element de circuit) pe care le caracterizează din punct de vedere al conducției electrice, respectiv al transformărilor ireversibile de energie care au loc. Sistemele realizate în practică pentru a avea o anumită rezistență se numesc **rezistoare**.

Se consideră un mediu conductor izotrop și liniar, fără câmpuri imprimare, având o formă oarecare și fiind străbătut de un curent continuu  $\mathbf{I}$  (regim staționar), prin alimentare din exterior pe la bornele **1** și **2** (fig. 6.4). Suprafețele electrozilor de contact, care sunt perfect conductori, sunt echipotențiale.

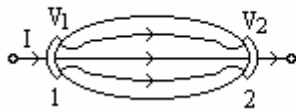


Fig. 6.4 Conductor izotrop și liniar

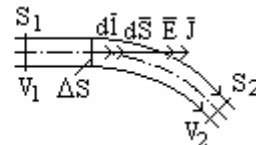


Fig. 6.5 Tub de curent

Se arată experimental că diferența de potențial  $V_1 - V_2$  dintre cei doi electrozi este direct proporțională cu intensitatea curentului  $\mathbf{I}$  (legea lui Ohm), factorul de proporționalitate fiind rezistența electrică a sistemului considerat:

$$V_1 - V_2 = R \cdot I \Rightarrow R = \frac{V_1 - V_2}{I} \quad (6.13)$$

Mărima reciprocă se numește conductanță,  $\mathbf{G} = 1/R$ . Relația (6.13) se poate stabili și prin integrarea corespunzătoare a formei locale a legii conducției electrice.

Se consideră un tub de curent de secțiune  $\Delta S$ , cuprins între două suprafețe echipotențiale  $S_1$  și  $S_2$  de potențiale  $V_1$  și respectiv,  $V_2$  (fig. 6.14). Dacă se notează cu  $\Delta \mathbf{I}$  intensitatea curentului electric care străbate tubul de curent, pentru rezistența electrică a acestuia se obține expresia:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{\int_1^2 \bar{E} d\bar{l}}{\iint_{\Delta S} \bar{J} d\bar{S}} = \int_1^2 \frac{\bar{E} d\bar{l}}{\iint_{\Delta S} \bar{J} d\bar{S}} = \int_1^2 \frac{E dl}{J \Delta S} = \int_2^1 \frac{dl}{\sigma \Delta S} \quad (6.14)$$

în care s-a ținut cont de proprietatea unui tub de curent de a fi străbătut de același curent prin orice secțiune și de faptul că vectorii  $\bar{E}$ ,  $\bar{J}$ ,  $d\bar{l}$  și  $d\bar{S}$  au aceeași orientare. S-a considerat aceeași valoare a densității de curent în toate punctele unei secțiuni transversale, perpendiculară pe linia mijlocie de curent.

Cu relația (6.14) se poate calcula rezistența electrică în diferite cazuri. Calculul este relativ simplu și în cazul unor medii conductoare masive dacă există anumite simetrii. Într-un caz mai general, calculul rezistenței electrice reprezintă o problemă de câmp, care trebuie rezolvată pentru fiecare caz în parte prin metode adecvate.

#### 6.1.4. ANALOGIA DINTRE CÂMPUL ELECTRODINAMIC STAȚIONAR ȘI CÂMPUL ELECTROSTATIC

Relațiile stabilite pentru câmpul electrocinetic staționar arată existența unei analogii formale între acest câmp și câmpul electrostatic în medii dielectrice. În ambele situații câmpul electric este potențial ( $\text{rot } \bar{E} = \mathbf{0}$ ), iar potențialul electric satisface ecuația lui Laplace. Pentru medii izotrope și liniare sunt valabile relațiile:

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (\text{în câmp electrocinetic}); \quad \bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (\text{în câmp electrostatic}) \quad (6.15)$$

Considerându-se curenții de alimentare prin electrozi metalici și sarcina electrică a conductoarelor care produc câmpul electrostatic, se pot scrie relațiile:

$$I = \iint \bar{J} d\bar{S} \quad \text{și} \quad q = \iint \bar{D} d\bar{S} \quad (6.16)$$

Parametrii globali,  $R$  și  $C$ , introduși în cele două regimuri au următoarele relații de definiție:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} \quad \text{și} \quad \frac{1}{C} = \frac{V_1 - V_2}{q_1} \quad (6.17)$$

Expresiile parametrilor  $R$  și  $C$  pentru un tub de curent și respectiv, pentru un tub de câmp electric sunt următoarele:

$$R = \int \frac{dl}{\sigma S} \quad \text{și} \quad \frac{1}{C} = \int \frac{dl}{\epsilon S} \quad (6.18)$$

Dacă există și câmp imprimat, legii conducției electrice valabilă în acest caz,  $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_i)$ , îi corespunde în câmpul electrostatic relația  $\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \bar{P}_p$ , unde  $\bar{P}_p$  reprezintă polarizația permanentă.

Din compararea relațiilor prezentate rezultă următoarea corespondență între mărimile din cele două regimuri:

$$\begin{aligned} \bar{E} &\leftrightarrow \bar{E} & I &\leftrightarrow q & \sigma &\leftrightarrow \varepsilon & \sigma \bar{E}_i &\leftrightarrow \bar{P}_p \\ \bar{J} &\leftrightarrow \bar{D} & V &\leftrightarrow V & G &\leftrightarrow C \end{aligned} \quad (6.19)$$

O asemenea corespondență biunivovă a mărimilor, care asigură transformarea ecuațiilor unui grup de fenomene fizice în ecuațiile altui grup de fenomene fizice, se numește analogie fizică. Orice problemă a unui grup poate fi rezolvată sau studiată prin mijlocirea problemei analoge (cu aceeași configurație geometrică) din al doilea grup, care constituie un model al primei probleme. Astfel, pe baza corespondențelor stabilite pot fi rezolvate unele probleme de câmp electrocinetic staționar utilizând rezultatele cunoscute din studiul câmpului electrostatic și invers.

## 6.2. PRIZE DE PĂMÂNT

**Priza de pământ** este un electrod metalic îngropat în pământ care realizează o legătură conductoare cu pământul. Prizele de pământ pot fi de suprafață sau de adâncime, iar principalele caracteristici ale acestora sunt următoarele: tensiunea în raport cu sfera de la infinit; rezistența de răspândire (rezistența între priză și sfera de la infinit); repartiția tensiunii la suprafața solului; tensiunea de pas.

Problema prizelor de pământ constă în determinarea rezistenței pământului la trecerea curentului în sol și se rezolvă prin analogia dintre câmpul electrocinetic staționar și câmpul electrostatic. Deoarece conductivitatea metalului este cu multe ordine de mărime mai mare decât cea a solului, suprafața prizei de pământ se poate considera echipotențială, iar liniile de curent în pământ perpendiculare pe electrod.

Pentru exemplificare se consideră o priză de pământ de forma unei sfere de rază  $a$ , confecționată dintr-un material bun conductor de electricitate (de exemplu cupru) și introdusă complet în pământ. Se consideră că pământul are conductivitatea  $\sigma$ , neglijabilă față de conductivitatea conductorului din care este realizată priză. Circuitul se închide printr-un conductor de alimentare  $A$  (presupus izolat) și un al doilea electrod introdus în pământ la o distanță foarte mare, teoretic prin sfera de rază infinită. Liniile de curent sunt dirijate dinspre electrodul sferic, în cazul în care curentul este adus pe sferă și invers în cazul contrar.

Datorită simetriei, câmpul electrocinetic în jurul electrodului este radial, iar suprafețele echipotențiale sunt concentrice cu electrodul sferic (fig. 6.6 a). La o distanță  $r$  de centrul sferei densitatea de curent are valoarea:

$$J = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (6.20)$$

Intensitatea câmpului electric în mediul de conductivitate  $\sigma$  este dată de relația (vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{J}$  au același sens):

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \quad (6.21)$$

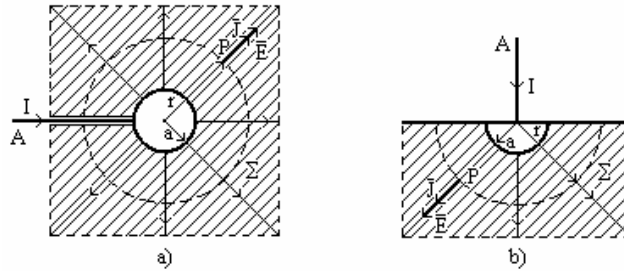


Fig. 6.6 Câmpul electrocinetic al prizei de pământ sferice – a) și respectiv, semisferice – b)

Diferența de potențial dintre suprafața electrodului sferic și un punct  $M$  situat la distanța  $r$  de centrul sferei este dată de relația:

$$U_{0M} = \int_a^r \vec{E} d\vec{l} = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_a^r \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \quad (6.22)$$

Când distanța  $r$  tinde la infinit, tensiunea tinde la o limită finită:

$$U_0 = \frac{I}{4\pi\sigma a} \quad (6.23)$$

Rezistența de trecere între electrodul sferic metalic și pământ (răspândire) se determină cu relația:

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma a} \quad (6.24)$$

Pentru a determina mărimile electrice caracteristice unei prize semisferice (fig. 6.6 b) se procedează în mod analog, rezultând pentru rezistența de dispersie valoarea:

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a} \quad (6.25)$$

Se numește tensiune de pas, tensiunea dintre două puncte de pe suprafața pământului, situate la o distanță egală cu un pas  $p$  al omului. Pentru tensiunea de pas,  $U_p$ , la distanța  $r$  de centrul unei prize semisferice, se obține relația:

$$U_p = \int_{r-\frac{p}{2}}^{r+\frac{p}{2}} \vec{E} d\vec{r} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{r-\frac{p}{2}} - \frac{1}{r+\frac{p}{2}} \right) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{p}{r^2 - (p/2)^2} \quad (6.26)$$

Pericolul cel mai mare există în vecinătatea prizei și anume atunci când un picior este pe marginea prizei. În relația (6.26), considerând  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{p}/2$ , se obține tensiunea de pas maximă,  $U_{pmax}$ :

$$U_{pmax} = \frac{I}{2\pi\sigma a} \frac{p}{a+p} = U_0 \frac{p}{a+p} \quad (6.27)$$

### **Exemplu**

Se consideră următoarele date: raza prizei semisferice echivalente  $\mathbf{a} = 1\text{m}$ , curentul de trecere în pământ prin stâlpul pus sub tensiune  $\mathbf{I} = 75\text{A}$  și conductivitatea solului  $\sigma \cong 10^{-2}\text{S/m}$ . Pentru rezistența de dispersie a prizei semisferice se obține valoarea  $\mathbf{R} = 16\Omega$ , iar pentru tensiunea prizei,  $U_0 = 1,2\text{kV}$ . Considerând lungimea de pas  $\mathbf{p} = 70\text{cm}$ , pentru tensiunea de pas maximă se obține valoarea,  $U_{pmax} = 500\text{V}$ , care este o valoare periculoasă.

În general o priză de pământ este formată din mai mulți electrozi, situați în puncte spațiale diferite, care sunt conectați în paralel. Prezența electrozilor multipli modifică câmpul densității de curent față de cazul când există un singur electrod, datorită faptului că “solul” devine neomogen. Dacă electrozii prizei de pământ se consideră punctiformi sau de dimensiuni foarte mici, neglijabile față de distanța dintre electrozi, atunci se poate neglija modificarea proprietăților solului datorită prezenței electrozilor multipli, problema rezolvându-se ca într-un mediu omogen. Pentru determinarea soluției problemei prizei de pământ cu electrozi multipli se poate utiliza și superpoziția câmpurilor electrocinetice ale diferiților electrozi, deoarece relațiile sunt liniare.

### **6.3. CURENTUL ELECTRIC PRIN ELECTROLIȚI**

Se numesc **conductoare de specia a doua (electroliti)**, conductoarele în care trecerea curentului electric este însoțită de reacții chimice și de un transport de substanță. Prin topirea la temperaturi înalte sau prin dizolvarea în anumite medii (apă, alcool, amoniac etc.) unele substanțe devin electroliti și vor avea o conductibilitate electrică mult mai mare decât în stare pură.

#### **Disociația electrolitică**

Dacă într-un vas cu apă se introduce sare de bucătărie ( $\text{NaCl}$ ), aceasta se dizolvă și majoritatea moleculelor de clorură de sodiu se desfac în ioni de sodiu pozitivi ( $\text{Na}^+$ ) și ioni de clor negativi ( $\text{Cl}^-$ ):



Fenomenul de desfacere a moleculelor dizolvate în ioni, independent de prezența sau absența curentului electric, se numește **disociație electrolitică**. Se numește grad de disociere,  $\alpha$ , raportul dintre numărul de molecule disociate și numărul total de molecule dizolvate (la electroliti tari cum sunt acizii, bazele și sărurile  $\alpha \approx 1$ , iar la electroliti slabi,  $\alpha \ll 1$ ). Disociația electrolitică se

datorează faptului că moleculele solventului slăbesc forțele electrice coulombiene care leagă ionii substanței dizolvate.

Electroliții au o conductibilitate ionică, curentul electric prin electroliți fiind un flux de ioni pozitivi în sensul curentului și un flux de ioni negativi în sens contrar. Purtătorii de sarcină electrică sunt fragmente de moleculă, conductibilitatea electrică fiind legată și de un transport de substanță, deoarece ionii ajungând la electrozii vasului se descarcă de sarcina pe care o au (primind sau cedând electroni) și se transformă în molecule neutre.

### Electroliza

**Electroliza reprezintă reacțiile chimice produse într-o soluție de electrolit la trecerea curentului electric.** În toți electroliții ionii pozitivi se deplasează în sensul curentului, iar ionii negativi se deplasează în sens invers.

Cei doi electrozi (conductori de specia întâi) introduși în vasul cu electrolit se numesc: **anod** (electrodul de intrare a curentului în electrolit) și **catod** (electrodul de ieșire a curentului). În figura 6.7 este prezentată deplasarea ionilor în electrolit. Ionii negativi din soluție sunt atrași de electrodul pozitiv (anod) și din acest motiv se numesc **anioni**, iar ionii pozitivi sunt atrași de electrodul negativ (catod) și se numesc **cationi**. Ionii ajunși la electrozi se neutralizează (se descarcă de sarcina electrică) obținându-se în vecinătatea electrozilor molecule sau radicali neutri din punct de vedere electric, din substanța respectivă.

**Legea electrolizei** înglobează cele două relații stabilite de Faraday, reprezentând relația care există între masa unui element sau radical chimic, care apare la unul dintre electrozii unei băi electrolitice și sarcina electrică care trece prin baie.

Conform acestei legi, masa **m** de substanță care se depune în timpul **t** la un electrod al băii electrolitice, este proporțională cu sarcina electrică care trece prin baie și cu echivalentul chimic al elementului depus:

$$m = \frac{A}{F_0 \nu} \int_{t_0}^{t_0+t} i dt = \frac{A q}{F_0 \nu} \quad (6.29)$$

unde: **A** reprezintă masa unui atom gram de substanță depusă;  **$\nu$**  – valența produsului depus;  **$F_0$**  – constanta lui Faraday ( **$F_0 = 96490\text{C/echivalent gram}$** );  **$A/\nu$**  – echivalentul chimic al substanței depuse; **q** – sarcina electrică care trece prin baia electrolitică în timpul **t**. Constanta lui Faraday nu depinde de natura electrolitului, în electrochimie fiind considerată ca unitate de sarcină electrică și

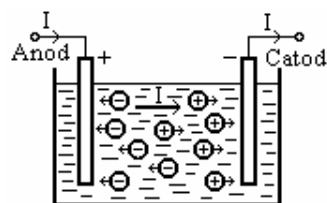


Fig. 6.7 Deplasarea ionilor în electrolit

denumită Faraday,  $F_0 = 96490 \text{ C}$ .

Electroliza are numeroase aplicații în industrie: producerea sau rafinarea unor metale; acoperirea obiectelor cu un strat subțire dintr-un metal (galvanostegie), ca de exemplu nichelarea, cromarea, argintarea etc.; reproducerea formei unui obiect (galvanoplastie); obținerea unor produse chimice. Electroliza are și efecte negative, ca de exemplu coroziunea electrochimică, care duce la distrugerea treptată a piesei în punctele în care se corodează.

### **Pile electrice (elemente galvanice)**

La introducerea unui electrod într-un electrolit, în stratul de contact dintre electrod și electrolit apare un câmp electric imprimat galvanic și o tensiune de contact între electrod și soluția electrochimică, care depinde de natura electrodului, de valența lui, de concentrația electrolitului, de temperatură etc.

Tensiunea care apare între electrod și soluție se numește **tensiune de electrod** sau **potențial de electrod**, care se măsoară în raport cu un electrod normal de hidrogen.

Se numește **pilă electrică (element galvanic)** un generator de c.c. electrochimic, alcătuit în principal din doi electrozi de natură diferită (conductori de specia întâi) introduși într-un electrolit. T.e.m. obținută are o valoare ridicată dacă tensiunile de electrod ale celor doi electrozi sunt mult diferite.

**Elementul Leclanché** este format dintr-un electrod de cărbune și unul de zinc cufundați într-o soluție de clorură de amoniu (fig. 6.8). Electrodul de cărbune este introdus într-un vas poros umplut cu bioxid de mangan, care are rolul de depolarizant.

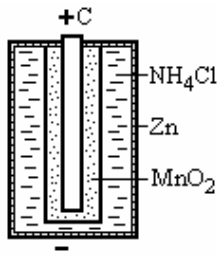


Fig. 6.8 Elementul Leclanché

T.e.m. a elementului Leclanché este de **1,5V**, iar rezistența sa interioară este de **0,3Ω**. Electrodul de zinc are forma unui vas de formă cilindrică, în care se află electrolitul (clorura de amoniu) sub formă de pastă.

Elementul Leclanché este utilizat sub formă de pilă electrică uscată. Elementele galvanice se mai numesc și elemente primare. Ele sunt caracterizate prin rezistențe interne mari, curenți mici și prin faptul că reacțiile chimice care au loc sunt ireversibile.

Readucerea unei pile galvanice epuizate în stare de funcționare se poate realiza numai prin reînnoirea substanțelor active.

### **Acumulatori electrice**

Acumulatorii electrice sunt elemente secundare, reversibile, deoarece reacțiile chimice care au loc în interiorul lor sunt reversibile și depind de sensul curentului. La aceste elemente în timpul încărcării lor, energia electrică se transformă în energie chimică, iar în perioada de descărcare, energia chimică se

transformă în energie electrică. Cele mai utilizate acumulatori sunt acumulatorii acide (cu plumb) și acumulatorii alcalini (fero-nichel).

#### Acumulatorii acide (cu plumb)

Electrozii sunt realizați din grătare de plumb, care în stare inițială (neformată) sunt acoperite cu o pastă de oxizi de plumb (miniu  $Pb_3O_4$ , litargă  $PbO$ ). Electrozii sunt cufundați într-o soluție apoasă de acid sulfuric. Prin operația de “formare” (care constă în alimentarea acumulatorului de la o sursă de t.e.m. de c.c.) pasta electrozilor se transformă în  $PbO_2$  de culoare cafenie la plăcile pozitive și în plumb spongios de culoare cenușie la plăcile negative. Vasul acumulatorului se realizează din sticlă sau ebonită.

În urma descărcării acumulatorului starea finală a electrozilor este aceeași, deci nu mai poate debita curent, concentrația acidului scade la descărcare, electrolitul ajungând la o densitate de  $1,18 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$ . Prin încărcarea acumulatorului se stabilește starea inițială și concentrația electrolitului crește, densitatea lui ajungând la  $1,21 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$ .

Un element de acumulator încărcat are o tensiune de cca **2,2V**. La funcționare tensiunea scade repede la valoarea **1,95...2V**, rămânând un timp constantă, după care scade brusc. Când tensiunea ajunge la **1,8V** trebuie să se oprească descărcarea elementului deoarece reacțiile chimice devin ireversibile. La încărcare, tensiunea elementului crește mai întâi rapid până la valoarea de **2,2V**, care se menține un timp constantă, după care la sfârșitul încărcării, tensiunea crește brusc până la valoarea de **2,6V**.

Principalele caracteristici tehnice ale unui acumulator cu plumb sunt: tensiunea acumulatorului, care este determinată de numărul de elemente legate în serie; capacitatea acumulatorului [**Ah**] pentru o anumită durată de descărcare; curentul de descărcare, respectiv încărcare, maxim admisibil; randamentul energetic, care are valori de **0,7...0,8**; randamentul în cantitate de electricitate cu valori de **0,85...0,9**; rezistența internă a unui element; durata de funcționare, care depinde de construcția acumulatorului și de condițiile de exploatare (numărul de cicluri de încărcare-descărcare este de **100...1000**).

#### Acumulatorii alcalini (fero-nichel)

Electrozii acestui tip de acumulator sunt realizați din grătare de oțel nichelat în care se presează masa activă ( $NiOH_3$  la electrodul pozitiv și fier spongios la electrodul negativ). Electrozii sunt cufundați într-o soluție apoasă de hidroxid de potasiu (KOH). Vasul acumulatorului este din tablă de oțel inoxodabil.

În urma descărcării acumulatorului concentrația electrolitului rămâne constantă. Tensiunea unui element este de **1,45V**, descărcarea lui fiind permisă până la **1,15V**. Randamentul acestor acumulatori este redus (**0,52...0,55**).

Acumulatorii alcalini au următoarele avantaje: au greutate mai mică și sunt mai ușor de transportat; sunt insensibile la trepidații; nu necesită o îngrijire pretențioasă, fiind executate într-o formă închisă etanș; nu degajă vapori nocivi.



Acumulatorii electrice sunt utilizați ca surse de c.c. Principalele domenii de aplicație sunt: alimentarea circuitelor de protecție, automatizare, semnalizare din centrale și stații electrice; în telefonie; la antrenarea motoarelor electrice mici; la iluminatul de siguranță precum și la alimentarea electromobilelor și electrocarilor.

#### 6.4. CURENTUL CONTINUU ÎN VID ȘI ÎN GAZE

Vidul și gazele sunt izolanți foarte buni, dar în anumite condiții (temperatură ridicată, câmp electric intens, ionizare etc.) permit trecerea curentului electric.

##### Emisia electronică

Electronii liberi din metale se găsesc într-o continuă mișcare fără a putea părăsi metalul datorită forțelor de atracție ale ionilor pozitivi din rețeaua cristalină. Smulgerea electronilor din metal s-ar putea realiza printr-un lucru mecanic de extracție  $L = q_e U$ , unde  $U$  este diferența de potențial pe care trebuie să o parcurgă electronul de sarcină  $q_e$ , astfel încât energia sa cinetică să fie suficientă pentru ieșirea lui din metal. Fenomenul de părăsire a suprafeței metalului de către electroni se numește **emisie electronică a metalelor**.

Electronii pot căpăta energia necesară pentru smulgerea lor din metal, prin încălzirea metalului, iradierea lui sau prin introducerea acestuia într-un câmp electric puternic. Energia  $W_0$  necesară electronului pentru a învinge forțele de atracție care-l atrag spre interiorul metalului se numește **energie de ieșire**, iar **potențialul de ieșire**  $V_0$  se definește cu relația:

$$V_0 = W_0 / q_e \quad (6.30)$$

Pentru a părăsi suprafața metalului, electronul trebuie să efectueze un lucru mecanic, rezultă că între suprafața metalului și interiorul lui există o diferență de potențial, care poartă numele de **barieră de potențial**.

##### Emisia termoelectronică

Dacă metalul este încălzit, agitația termică a electronilor liberi crește, rezultând o creștere a energiei lor cinetice și ca urmare numărul de electroni emiși crește. Dacă se consideră că electronii formează un gaz perfect, aceștia pot părăsi metalul numai dacă energia lor cinetică devine mai mare decât lucrul mecanic de extracție:

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{3}{2} k T \geq q_e U \quad (6.31)$$

de unde rezultă temperatura absolută necesară:

$$T = \frac{2q_e U}{3k} \quad (6.32)$$

La temperaturi de peste **1000°C** numărul electronilor emiși crește mult.

Electronii emiși de metalul adus la incandescență vor forma un nor cu sarcina negativă, care va împiedica emisiunea celorlalți electroni. Aplicând o tensiune electrică din exterior, electronii emiși vor fi accelerați și vor forma un curent electric.

#### Emisiunea fotoelectronică

Dacă suprafața unui metal este supusă unui flux de energie radiantă, energia cinetică a electronilor liberi crește și deci emisiunea electronilor este mai mare. La căderea unui flux luminos asupra unei suprafețe metalice se constată o emisiune de electroni numită **emisiune fotoelectronică**. Smulgerea electronilor din metal este posibilă numai dacă frecvența undelor luminoase depășește o anumită valoare  $f_0$ , denumită **prag fotoelectric**, care depinde de substanța corpului iradiat. Metalele alcaline (Na, K, Li etc.) au pragul fotoelectric în zona vizibilă a spectrului. Viteza electronilor emiși depinde de lungimea de undă a luminii și nu de intensitatea luminoasă. Intensitatea luminii are influență asupra debitului de electroni emiși. Dispozitivele în care are loc efectul fotoelectric se numesc **fotoelemente**.

#### Emisiunea autoelectronică

Dacă două metale se încarcă cu sarcină electrică, metalul **A** cu sarcină pozitivă și metalul **B** cu sarcină negativă, între cele două conductoare apare un câmp electrostatic. Dacă acest câmp este puternic se constată că electronii liberi din metalul **B** (catod) sunt smulși din metal trecând prin mediul înconjurător și îndreptându-se spre metalul **A** (anod). Acest fenomen de smulgere a electronilor liberi din metal, sub acțiunea unui câmp electric puternic, se numește **emisiune autoelectronică**.

#### Descărcări electrice în gaze

Gazele în condiții normale sunt dielectrice. În anumite condiții însă, gazele pot deveni conductoare, conductibilitatea gazelor realizându-se prin ionizarea lor. Cauzele care produc ionizarea gazelor sunt: ridicarea temperaturii gazelor; iradierea gazului cu ajutorul radiațiilor Roentgen, ultraviolete sau cosmice; trecerea prin gaz a unui flux de electroni obținuți prin emisiune termoelectronică a unui metal incandescent; acțiunea unui câmp electric puternic.

În gaze curentul electric constă într-o deplasare ordonată a ionilor pozitivi în sensul curentului și a ionilor negativi în sens contrar. Când ajung la electrozi, ionii cedează sarcinile electrice devenind molecule neutre. Pentru a menține un curent electric prin gaze este necesar ca ionizarea să fie menținută permanent.

**Ionizarea** gazului constă în acțiunea de descompunere a moleculelor gazului în ioni pozitivi, ioni negativi și electroni. Ionii pozitivi și cei negativi se pot recombină dând naștere moleculelor neutre. După o perioadă de timp se stabilește o stare statistic staționară, când numărul perechilor de ioni care se recombină este egal cu numărul perechilor de ioni care se formează prin ionizare.

Se consideră un gaz ionizat care se află între doi electrozi la care se aplică o tensiune electrică. Sub acțiunea câmpului electric, ionii pozitivi ai gazului sunt transportați la catod, iar ionii negativi la anod, unde ionii vor ceda surplusul de sarcină electrică transformându-se în molecule neutre. Dacă tensiunea care se aplică celor doi electrozi este mică, intensitatea curentului electric este de asemenea mică. Dacă sursa de ionizare își încetează acțiunea, curentul devine egal cu zero. Rezultă că există o descărcare neautonomă, dependentă de sursa de ionizare.

În cazul unui câmp electric intens, ionii din gaz sunt puternic accelerați și capătă energii cinetice mari. În mișcarea lor spre electrozi, ionii lovesc moleculele neutre ale gazului, smulgând acestora electroni și formând astfel perechi de ioni. Acești ioni noi formați vor fi și ei accelerați și vor descompune și ei la rândul lor alte molecule neutre. Se produce astfel o ionizare în avalanșă, o creștere puternică a concentrației ionilor, ceea ce duce la o creștere rapidă a curentului electric. În acest stadiu, factorul ionizator extern poate să-și înceteze acțiunea, curentul electric va continua să crească datorită ionizării în avalanșă. Are astfel loc o descărcare autonomă, independentă de sursa de ionizare.

Descărcarea autonomă poate să apară sub mai multe forme, unele dintre acestea fiind prezentate în continuare.

Descărcarea obscură constituie faza premergătoare aprinderii descărcărilor autonome și se produce la presiunea atmosferică, nefiind însoțită de fenomene luminoase (valoarea intensității curentului electric este de ordinul  $10^{-11}$  A).

Efectul Corona constituie faza de trecere de la descărcarea obscură la cea luminescentă. Intensitatea curentului electric este de ordinul  $10^{-6}$  A, iar trecerea curentului electric este însoțită de o lumină slabă, albastruie și de zgomote.

Descărcările luminescente iau naștere în tuburile cu gaze rarefiate, fiind utilizate pentru reclame și semnalizatoare optice. Culoarea coloanei luminoase depinde de natura gazului: roșu pentru neon, albastru pentru argon, verde pentru bioxid de carbon, cărămiziu pentru hidrogen etc.

Descărcările prin scânteie au loc între doi electrozi reci la o presiune atmosferică normală și la o diferență de potențial foarte mare. Descărcarea are loc intermitent.

Descărcările în arc apar când electrodul negativ este în stare de incandescență, iar curentul electric va avea valori foarte mari. Descărcarea în arc ia naștere dintr-o descărcare luminescentă, când tensiunea dintre electrozi depășește o anumită valoare. Între electrozi apare o coloană de descărcare puternic luminată numită **arc electric**.

Arcul electric are largi aplicații tehnice: ca sursă de lumină la proiectoare, sursă de căldură la sudarea metalelor și ca sursă de căldură în cuptoarele cu arc, unde temperatura poate ajunge la valoarea de **4000°C**.

## 7. CÂMPUL MAGNETIC STAȚIONAR ÎN VID ȘI ÎN CORPURI

### 7.1. CÂMPUL MAGNETIC ÎN VID

Ținând seama de formele locale ale legii fluxului magnetic și legii circuitului magnetic valabilă în regim staționar și cvasistaționar, pentru inducția magnetică în vid,  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$  și intensitatea câmpului magnetic se obțin ecuațiile:

$$\operatorname{div} \vec{B}_0 = 0; \operatorname{rot} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{H}_0 = 0; \operatorname{rot} \vec{H}_0 = \vec{J} \quad (7.2)$$

În cazul câmpurilor magnetice situate în exteriorul mediilor parcurse de curenți electrici, deoarece în acest caz  $\vec{J} = 0$ , ecuațiile pentru intensitatea câmpului magnetic devin:

$$\operatorname{div} \vec{H}_0 = 0; \operatorname{rot} \vec{H}_0 = 0 \quad (7.3)$$

În cazul mediilor omogene, dacă câmpul magnetic prezintă o anumită simetrie, intensitatea câmpului magnetic se poate determina în mod simplu cu ajutorul legii circuitului magnetic. O abordare mai generală a problemei determinării câmpului magnetic se face în cadrul teoriei câmpului de vectori, rezolvarea simplificându-se dacă se utilizează potențialul magnetic vector (rel. 2.29). În afara mediilor conductoare parcurse de curenți, câmpul magnetic se poate calcula și cu ajutorul potențialului magnetic scalar.

Rezultatele stabilite pentru câmpuri magnetice în vid se aplică practic și pentru cazul unui mediu magnetic omogen în întreg domeniul, prin înlocuirea lui  $\mu_0$  cu  $\mu$ .

#### 7.1.1. FORMULA LUI BIOT-SAVART-LAPLACE

**Formula lui Biot-Savart-Laplace** reprezintă relația de calcul a intensității câmpului magnetic  $\vec{H}_0$  produs într-un punct din spațiul vid de către un curent electric  $I$ , care trece printr-un conductor filiform în repaus (fig. 7.1):

$$\vec{H}_0 = \frac{I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (7.4)$$

unde:  $d\vec{l}$  este elementul de linie luat în lungul conductorului, în sensul curentului  $I$ ,  $\vec{r}$  - vectorul de poziție orientat de la elementul de linie spre punctul  $P$ ;  $\Gamma$  - curba care delimitează conductorul filiform.

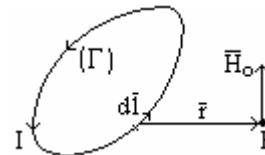


Fig. 7.1 Mărimile care intervin în formula lui Biot-Savart-Laplace

Relația (7.4) este valabilă numai pentru curbe închise, rezultatul calculului pe curbe neînchise fiind lipsit de semnificație fizică (curentul continuu este întotdeauna închis).

Sub formă diferențială formula lui Biot-Savart-Laplace se scrie astfel:

$$d\vec{H}_o = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (7.5)$$

Dacă la producerea câmpului magnetic participă curenții electrici din  $n$  conductoare, intensitatea câmpului magnetic se calculează cu relația:

$$d\vec{H}_o = \frac{I_k}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{d\vec{l}_k \times \vec{r}_k}{r_k^3} \quad (7.6)$$

unde  $I_k$  este curentul electric care străbate conductorul  $k$ , iar  $\vec{r}_k$  este vectorul de poziție orientat de la elementul de linie  $d\vec{l}_k$  (aparține conductorului  $k$ ) spre punctul  $P$  în care se calculează intensitatea câmpului magnetic.

### Aplicație

Un conductor rectiliniu filiform, de lungime  $l_1$ , parcurs de un curent de intensitatea  $I$ , se află în aer (fig. 7.2). Să se determine intensitatea câmpului magnetic  $H$  într-un punct oarecare  $P$  aflat la distanța  $d$  de axa conductorului, utilizând formula lui Biot-Savart-Laplace.

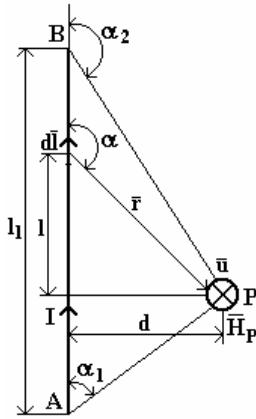


Fig. 7.2 Conductor rectiliniu și filiform, parcurs de curent

Intensitatea câmpului magnetic în punctul  $P$  este dată de relația lui Biot-Savart-Laplace:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_A^B \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{I \cdot \vec{u}}{4\pi} \int_A^B \frac{dl \cdot r \cdot \sin \alpha}{r^3}$$

unde  $\vec{u}$  reprezintă un versor perpendicular pe planul figurii (fig. 7.2).

Din figură rezultă:

$$l = d \cdot \text{ctg}(\pi - \alpha) = -d \cdot \text{ctg} \alpha ;$$

$$r = \frac{d}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{d}{\sin \alpha} ; \quad dl = \frac{d \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

unde ultima relație rezultă din diferențierea relației care exprimă pe  $l$ .

Rezultă intensitatea câmpului magnetic:

$$\vec{H} = \frac{I \cdot \vec{u}}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d \cdot d\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \frac{d^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{I \cdot \vec{u}}{4\pi \cdot d} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{I \cdot \vec{u}}{4\pi \cdot d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

**Observație:** Dacă punctul  $P$  se află la distanța  $d$  de mijlocul lungimii conductorului, relația de mai sus, ținând seama că  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$  devine:

$$\bar{H} = \frac{I \cdot \bar{u}}{2\pi \cdot d} \cos \alpha_1$$

### 7.1.2. PROPIETĂȚI GENERALE ALE CÂMPULUI MAGNETIC ÎN VID PRODUS DE CIRCUITE DE CURENT CONTINUU

Prin calcul direct, se pot verifica următoarele relații, în orice punct din vid, în regim staționar:

$$\operatorname{div} \bar{B}_o = 0; \operatorname{rot} \bar{B}_o = 0 \quad (7.7)$$

Inducția magnetică în vid poate fi calculată cu formula lui Biot-Savart-Laplace, prin superpoziție:

$$\bar{B}_o = \sum_{k=1}^n \bar{B}_{ok} = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_o I_k}{4\pi} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\bar{l}_k \times \bar{r}_k}{r_k^3} \quad (7.8)$$

suma fiind extinsă asupra tuturor circuitelor filiforme închise, neramificate, respectiv asupra tuturor ochiurilor independente ale circuitelor ramificate (în acest caz  $I_k$  sunt curenți ciclici).

Se verifică direct relațiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\bar{l}_k \times \bar{r}_k}{r_k^3} &= - \oint_{\Gamma_k} d\bar{l}_k \operatorname{rot} \frac{\bar{r}_k}{r_k^3} = 0, \\ \operatorname{rot} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\bar{l}_k \times \bar{r}_k}{r_k^3} &= - \oint_{\Gamma_k} \left[ d\bar{l}_k \operatorname{div} \frac{\bar{r}_k}{r_k^3} - (d\bar{l}_k \operatorname{grad}) \frac{\bar{r}_k}{r_k^3} \right] \Rightarrow \\ \operatorname{rot} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\bar{l}_k \times \bar{r}_k}{r_k^3} &= - \oint_{\Gamma_k} (d\bar{l}_k \operatorname{grad}) \frac{\bar{r}_k}{r_k^3} = - \oint_{\Gamma_k} d \left( \frac{\bar{r}_k}{r_k^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

deoarece integrala pe o curbă închisă a unei diferențiale totale (exacte) este nulă.

Din prima relație (7.7) rezultă că inducția magnetică în vid este un câmp solenoidal (fără surse), al cărui flux printr-o suprafață închisă este nul (legea fluxului electric):

$$\iint_{\Sigma} \bar{B}_o \cdot d\bar{S} = 0 \quad (7.10)$$

Această proprietate rămâne valabilă și în cazul în care suprafața  $\Sigma$  este străbătută de conductoare filiforme și chiar și în cazul general al unui câmp magnetic în regim oarecare nestaționar.

A doua relație (7.7) arată că în punctele din vid câmpul magnetic este irotational, adică poate fi derivat dintr-un potențial magnetic scalar  $V_m$ :

$$\vec{H}_o = \frac{\vec{B}_o}{\mu_o} = -\text{grad } V_m \quad (7.11)$$

### 7.1.3. ACȚIUNI PONDEROMOTOARE ÎN CÂMP MAGNETIC

#### Forța care se exercită asupra unui conductor străbătut de curent electric și situat într-un câmp magnetic

Se consideră un element de linie  $d\vec{l}$  dintr-un conductor filiform parcurs de curentul  $I$  și situat într-un câmp magnetic exterior de inducție  $\vec{B}$  (fig. 7.3). Forța care se exercită asupra elementului de circuit (forța lui Laplace) are următoarea expresie:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (7.12)$$

unde  $d\vec{l}$  are orientarea intensității curentului electric.

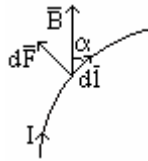


Fig. 7.3 Conductor filiform parcurs de curent și aflat în câmp magnetic

Integrând de-a lungul curbei oarecare  $\Gamma$  de dispunere a conductorului, rezultă forța totală care se exercită asupra unui conductor parcurs de curent și situat într-un câmp magnetic exterior:

$$\vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{l} \times \vec{B} \quad (7.13)$$

Dacă se notează cu  $\alpha$  unghiul pe care elementul  $d\vec{l}$  îl face cu inducția magnetică, pentru valoarea forței elementare se obține expresia:

$$dF = I dl B \sin \alpha \quad (7.14)$$

Rezultă că forța este nulă dacă  $\alpha = 0$  și este maximă dacă  $\alpha = \pi/2$ . Dacă pentru lungimea  $l$  a conductorului inducția magnetică este constantă și este normală la direcția conductorului, pentru forța lui Laplace se obține expresia simplă:

$$F = IlB \quad (7.15)$$

În ceea ce privește orientarea forței, se observă că aceasta este perpendiculară pe planul constituit din elementul de linie  $d\vec{l}$  și inducția magnetică  $\vec{B}$ . Sensul forței se schimbă dacă se inversează fie sensul curentului, fie sensul câmpului magnetic.

#### Forța dintre conductoare filiforme parcurse de curenți electrici

În figura 7.4 se consideră două circuite filiforme oarecare, coplanare, situate în vid și parcurse de curenții  $I_1$  și  $I_2$ . Pentru calculul forțelor care intervin (forțe electrodinamice) se poate considera că fiecare din cele două circuite se află în câmpul magnetic al celuilalt.

Astfel, forța totală care se exercită asupra conductorului 2 este dată de relația:

$$\vec{F}_2 = I_2 \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12} \quad (7.16)$$

Dacă se ține cont de expresia inducției magnetice  $\vec{B}_{12}$  în punctele conductorului 2, corespunzătoare câmpului magnetic produs de circuitul 1:

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{r^3} \quad (7.17)$$

expresia forței devine:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r})}{r^3} \quad (7.18)$$

Valoarea forței  $F_2$  se poate scrie și sub forma:

$$F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl_1 dl_2 \quad (7.19)$$

În conformitate cu principiul acțiunii și reacțiunii, forțele care acționează asupra celor două circuite sunt egale:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad (7.20)$$

Relația (7.19) se poate scrie și sub forma simplificată:

$$F = K I_1 I_2 \quad (7.21)$$

unde constanta  $K$  depinde numai de

configurația și poziția relativă a celor două circuite.

Un caz particular se referă la două conductoare filiforme, rectilinii și paralele de lungime teoretic infinită, situate în aer la distanța  $d$  unul de celălalt (fig. 7.6).

În aceste condiții, pentru forța care acționează asupra conductoarelor, corespunzătoare unei lungimi  $l$  a acestora ( $F_1 = F_2 = F$ ) se obține expresia:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{l}{d} \quad (7.22)$$

fiind forțe de atracție dacă curenții au același sens și forțe de respingere dacă curenții au sensuri contrare. Forțele de interacțiune se manifestă și între porțiuni de conductoare care aparțin aceluiași circuit.

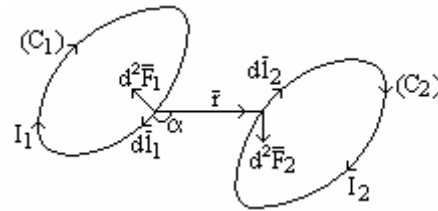


Fig. 7.5 Forțele electrodinamice dintre două conductoare filiforme parcurse de curenți

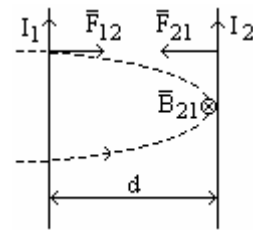


Fig. 7.6 Forțele electrodinamice dintre două conductoare filiforme, paralele și infinite



La stabilirea expresiei forței totale de obicei se pleacă de la forțele elementare. Astfel, forța elementară pe care o exercită asupra elementului  $d\vec{l}_2$  câmpul magnetic corespunzător numai elementului  $d\vec{l}_1$  parcurs de curentul  $I_1$  este dată de relația:

$$d^2\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_{12} \quad (7.23)$$

Dacă se ține seama de expresia inducției elementare,  $d\vec{B}_{12} = \mu_0 d\vec{H}_{12}$ , se obține relația:

$$d^2\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r})}{r^3} \quad (7.24)$$

care se numește și **formula lui Grassman**. În general forțele elementare  $d^2\vec{F}_1$  și  $d^2\vec{F}_2$  sunt diferite, acestea fiind egale și de semn contrar numai în cazul particular a două conductoare rectilinii paralele, infinite de lungi.

## 7.2. CÂMPUL MAGNETIC STAȚIONAR ÎN MEDII MAGNETICE

### 7.2.1. CLASIFICAREA MATERIALELOR DIN PUNCT DE VEDERE MAGNETIC

În funcție de valorile permeabilității magnetice relative, materialele se clasifică în:

a) **Materiale diamagnetice** la care momentul magnetic atomic sau molecular este nul (materiale cu molecule nepolare). Dacă se introduc aceste materiale într-un câmp magnetic exterior, apare un moment magnetic orbital suplimentar, la fiecare moleculă în parte, în sens contrar câmpului magnetic exterior, astfel încât câmpul magnetic din interiorul materialului este mai slab decât cel exterior și ca urmare  $\mu_r < 1$ ,  $\chi_m < 0$  (de ordinul a  $10^{-5}$ ). Din această categorie fac parte: hidrogenul, gazele inerte, carbonul, cuprul, argintul, aurul etc.

b) **Materiale paramagnetice** la care momentele magnetice orbitale și de spin nu sunt nule (materiale cu molecule polare). Magnetizarea microscopică este însă nulă datorită agitației termice. Prin introducerea acestor materiale într-un câmp magnetic exterior, are loc o orientare a momentelor magnetice, astfel încât acestea să devină omoparalele cu direcția câmpului magnetic exterior. Ca urmare, câmpul magnetic interior este mai intens, rezultând  $\mu_r > 1$ ,  $\chi_m > 0$  (de ordinul a  $10^{-3}$ ). Din această categorie fac parte: aluminiu, platina, cromul, azotul etc. Deoarece permeabilitățile relative ale acestor două clase de materiale sunt foarte apropiate de unitate, în calculele practice se consideră pentru acestea valorile,  $\mu_r \approx 1$ ,  $\chi_m \approx \mu_0$ .

c) **Materiale feromagnetice** la care relația  $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H})$  nu are o variație liniară, permeabilitatea magnetică a lor fiind dependentă de intensitatea câmpului magnetic și de starea lor anterioară de magnetizare. Din această categorie fac

parte: fierul, nichelul, cobaltul și unele aliaje ale acestora. La aceste materiale apare un efect cuantic numit **cuplaj de schimb**, care face ca între atomii vecini să apară un cuplaj magnetic rigid (momentele magnetice să devină paralele), chiar dacă agitația termică a moleculelor se apune acestui cuplaj. Dacă temperatura crește peste o anumită valoare, denumită **temperatură Curie**, cuplajul de schimb dispare brusc, rămânând numai efectul paramagnetic. Pentru fier, temperatura Curie este de **1043K**, iar pentru nichel de **633K**.

Un corp feromagnetic introdus într-un câmp magnetic exterior, determină un câmp magnetic propriu în același sens și foarte intens în raport cu câmpul magnetic exterior, astfel încât câmpul magnetic interior este foarte intens.

Pentru trasarea curbei  $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H})$  se procedează astfel (fig. 7.7): se introduce materialul nemagnetizat într-un câmp magnetic variabil. La început se constată că la o creștere a intensității câmpului magnetic (inițial avea valoarea zero), apare o creștere rapidă a inducției magnetice din material, după care creșterea este mai lentă și la un moment dat, inducția magnetică rămâne practic constantă. Se spune că materialul s-a saturat,  $\mathbf{B}_s$  reprezentând inducția magnetică de saturație, iar  $\mathbf{OA}$  curba de primă magneti-

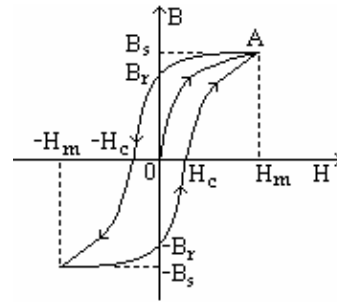


Fig. 7.7 Ciclul de histerezis magnetic

zare. Dacă se micșorează valoarea intensității câmpului magnetic, se constată că inducția magnetică scade lent și ajunge ca la  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  inducția magnetică să fie diferită de zero,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_r$ . Valoarea  $\mathbf{B}_r$  reprezintă inducția magnetică remanentă. Dacă se schimbă sensul câmpului magnetic și se crește intensitatea acestui câmp, se constată că inducția magnetică va scădea brusc și că va lua valoarea zero pentru o anumită valoare a intensității câmpului magnetic,  $-\mathbf{H}_c$ , numită intensitatea câmpului magnetic coercitiv.

Crescând în continuare valoarea intensității câmpului magnetic, se constată o creștere a inducției magnetice, dar având semnul schimbat. Când intensitatea câmpului magnetic ia valoarea  $-\mathbf{H}_m$ , se constată că inducția magnetică rămâne practic constantă (materialul s-a saturat). Micșorând intensitatea câmpului magnetic până la anulare, schimbând apoi sensul câmpului magnetic și crescând valoarea acestuia până la  $\mathbf{H}_m$ , se obține o curbă închisă numită **ciclu de histerezis**.

În timpul descrierii ciclului de histerezis, materialul absoarbe o cantitate de energie de la câmpul electromagnetic, energie care se transformă în energie calorică. Această energie calorică reprezintă pierderile prin histerezis, pierderi a căror valoare este proporțională cu aria delimitată de ciclul de histerezis.

### 7.2.2. TEOREMELE REFRAȚIEI LINIILOR DE CÂMP MAGNETIC LA SUPRAFAȚA DE SEPARAȚIE A DOUĂ MEDII

O consecință foarte importantă a legilor fluxului magnetic și circuitului magnetic o reprezintă refracția liniilor de câmp magnetic la suprafața de separație a două medii cu permeabilități magnetice diferite.

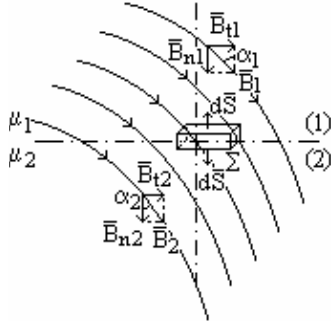


Fig. 7.8 Figură explicativă pentru prima teoremă a refracției liniilor de câmp magnetic

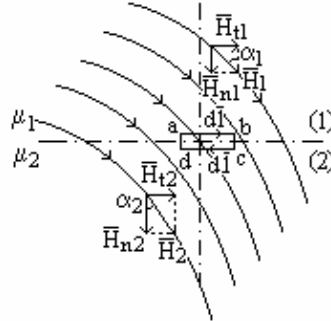


Fig. 7.9 Figură explicativă pentru a doua teoremă a refracției liniilor de câmp magnetic

#### Prima teoremă

Se consideră două medii cu permeabilitățile  $\mu_1$  și  $\mu_2$  despărțite de o suprafață plană. Liniile de câmp magnetic din mediul 1 care cad pe suprafața de separație sub un unghi de incidență  $\alpha_1$ , trec în mediul 2, suferind o refracție (fig. 7.8). Mărimile care se referă la mediul 1 vor avea indicele 1, iar cele care se referă la mediul 2 vor avea indicele 2.

Vectorul inducție magnetică poate fi descompus în două componente, una normală la suprafața de separație,  $\mathbf{B}_n = \mathbf{B} \cos\alpha$  și una tangentă la suprafață,  $\mathbf{B}_t = \mathbf{B} \sin\alpha$ . Aplicând legea fluxului magnetic unei suprafețe închise  $\Sigma$ , de formă paralelipipedică, de înălțime foarte mică, cu suprafețele bazelor de arie  $\Delta A$  plasate în cele două medii, rezultă:

$$\iint_{\Sigma} \bar{\mathbf{B}} d\bar{\mathbf{S}} = \iint_{S_1} \bar{\mathbf{B}}_1 d\bar{\mathbf{S}}_1 + \iint_{S_2} \bar{\mathbf{B}}_2 d\bar{\mathbf{S}}_2 = 0 \quad (7.25)$$

deoarece fluxul magnetic prin suprafața laterală  $S_1$  este nul ( $\mathbf{S}_1 \approx \mathbf{0}$ ).

Deoarece suprafețele bazelor sunt foarte mici, mărimile  $\mathbf{B}_1$  și  $\mathbf{B}_2$  pot fi considerate constante pe suprafețele paralelipipedului, rezultând:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \bar{\mathbf{B}}_1 d\bar{\mathbf{S}}_1 \cos(180^\circ - \alpha_1) + \iint_{S_2} \bar{\mathbf{B}}_2 d\bar{\mathbf{S}}_2 \cos \alpha_2 &= -\iint_{S_1} \bar{\mathbf{B}}_{n1} d\bar{\mathbf{S}}_1 + \iint_{S_1} \bar{\mathbf{B}}_{n1} d\bar{\mathbf{S}}_1 = \\ &= -\mathbf{B}_{n1} \Delta A + \mathbf{B}_{n2} \Delta A = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} \end{aligned} \quad (7.26)$$

**La suprafața de separație a două medii diferite, componentele normale ale inducției magnetice se conservă.**

Teorema a doua

Dacă în zona de separație a celor două medii se consideră un contur dreptunghiular **abcd**, foarte plat cu  $\mathbf{l}_{bc} = \mathbf{l}_{ad} \approx \mathbf{0}$  (fig. 7.9), căruia i se aplică teorema lui Ampère, rezultă (se ține cont că solenația este nulă):

$$\oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{H}} d\bar{\mathbf{l}} = \int_a^b \bar{\mathbf{H}}_1 d\bar{\mathbf{l}} + \int_b^c \bar{\mathbf{H}} d\bar{\mathbf{l}} + \int_c^d \bar{\mathbf{H}}_2 d\bar{\mathbf{l}} + \int_d^a \bar{\mathbf{H}} d\bar{\mathbf{l}} = \int_a^b \mathbf{H}_1 dl \cos(90^\circ - \alpha_1) + \int_c^d \mathbf{H}_2 dl \cos(90^\circ + \alpha_2) = H_{t1} l_{ab} - H_{t2} l_{cd} = 0 \Rightarrow H_{t1} = H_{t2} \quad (7.27)$$

**La suprafața de separație a două medii cu permeabilități diferite, componentele tangențiale ale intensității câmpului magnetic se conservă.**

Teorema a treia

Relațiile (7.26) și (7.27) se pot restrânge dacă se scriu tangentele trigonometrice ale unghiurilor făcute de liniile de câmp cu normala la planul de separație:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_{n1}} = \frac{\mu_1 H_{t1}}{B_{n1}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_{n2}} = \frac{\mu_2 H_{t2}}{B_{n2}} \quad (7.28)$$

Împărțind relațiile (7.28) și ținând cont de relațiile (7.26) și (7.27), rezultă:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (7.29)$$

unde  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  sunt unghiurile făcute de liniile de câmp magnetic în cele două medii cu normala la suprafața de separație.

Relația (7.29) permite stabilirea formei liniilor de câmp magnetic în jurul pieselor feromagnetice, la care  $\mu = \mu_0 \mu_r \gg \mu_0$ . La trecerea liniilor de câmp din piesă în aer, rezultă  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \mu_r \operatorname{tg} \alpha_2$ . Dacă se consideră  $\mu_{rFe} = 10^4$ , rezultă  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 10^4 \operatorname{tg} \alpha_2$ , deci  $\alpha_1 \gg \alpha_2$ . Se poate spune că practic liniile de câmp magnetic în aer sunt normale la suprafețele corpurilor feromagnetice, iar în interiorul pieselor, liniile sunt tangente la suprafața de separație.

### 7.2.3. CÂMPUL MAGNETIC ÎNTR-O CAVITATE

În corpurile, câmpul magnetic poate fi explorat utilizând un corp de probă (bucla de curent) și măsurând acțiunile ponderomotoare ale câmpului magnetic asupra corpului de probă. Pentru a introduce corpul de probă, trebuie practică în prealabil o cavitate vidă în corpul magnetizat (fig. 7.10).

Se constată experimental că oricât de mică ar fi cavitatea, inducția magnetică  $\bar{\mathbf{B}}_{cav}$ , măsurată în vidul cavității, depinde de forma și de orientarea

cavității. Prin practicarea cavității se elimină un volum magnetizat (parcurs de curent de conducție), iar pe pereții cavității apar curenți amperieni. Deoarece efectul momentului magnetic, respectiv al curentului de conducție al volumului elementar dizlocat tinde uniform către zero odată cu volumul, rămâne să fie luat în considerare numai efectul curenților amperieni care apar pe suprafața cavității, la dimensiuni oricât de mici ale cavității.

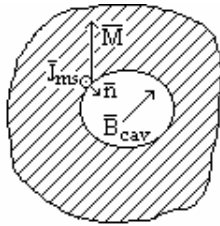


Fig. 7.10 Câmpul magnetic într-o cavitate

Dacă se consideră  $\vec{B}$  inducția magnetică în punctul considerat al corpului, înaintea practicării cavității și  $\vec{B}_{\text{Pcav}}$  inducția magnetică suplimentară datorită practicării cavității (inducția magnetică proprie a cavității), rezultă inducția magnetică în cavitate:

$$\vec{B}_{\text{cav}} = \vec{B} + \vec{B}_{\text{Pcav}} \quad (7.30)$$

Pentru definirea câmpului magnetic în corp este suficient să se aleagă două cavități particulare, în formă de fantă cu anumite orientări, ca în cazul câmpului electrostatic.

#### 7.2.4. MĂRIMI DE STARE ALE CÂMPULUI MAGNETIC ÎN MEDII MAGNETICE

Ecuatiile câmpului magnetic referitoare la inducția magnetică, în prezența unor medii magnetice sunt următoarele:

$$\text{div } \vec{B} = 0; \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \text{rot } \vec{M} \quad (7.31)$$

Cea de a doua ecuație se obține ținând cont de legea legăturii dintre  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  și  $\vec{M}$  și de faptul că  $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ .

Prin definiție, se numește intensitatea câmpului magnetic într-un punct din corpul magnetizat o mărime de stare a câmpului magnetic, egală cu raportul dintre vectorul inducției magnetice care se stabilește în vidul unei cavități de forma unei fante extrem de plate, având normala orientată perpendicular pe vectorul magnetizație (fig. 7.11) și permeabilitatea vidului:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_{f \perp \vec{L} \vec{M}}}{\mu_0} \quad (7.32)$$

Se numește inducție magnetică într-un punct al corpului magnetizat o mărime de stare a câmpului magnetic egală cu vectorul inducției magnetice din vidul unei cavități de forma unei fante extrem de plate, având normala orientată paralel cu vectorul magnetizație (fig. 7.12):

$$\vec{B} = \vec{B}_{f \parallel \vec{M}} \quad (7.33)$$

În acest caz câmpul propriu al fantei este nul (nu apar curenți amperieni pe

peretii fantei).

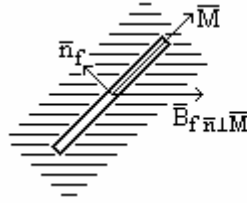


Fig. 7.11 Fantă pentru definirea intensității câmpului magnetic

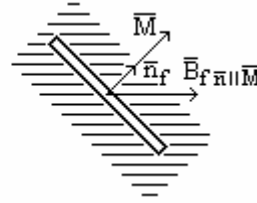


Fig. 7.12 Fantă pentru definirea inducției magnetice

Se observă că în corpuri câmpul magnetic este determinat atât de o influență exterioară cât și de o proprietate magnetică a corpului. Rezultă că se poate alege oricare pereche de mărimi dintre  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{M}$  pentru a caracteriza câmpul magnetic în medii magnetice.

### 7.2.5. METODA IMAGINILOR

Calculul câmpului magnetic produs de curenții ce străbat un sistem de conductoare filiforme situate în medii magnetice liniare însă neomogene pe porțiuni, poate fi efectuat în unele cazuri în mod avantajos, aplicând **metoda imaginilor**. Dacă se consideră două medii magnetice diferite, rezolvarea problemei în cadrul acestei metode se reduce la rezolvarea a două probleme mai simple în care intervin medii omogene.

Pentru prezentarea metodei se prezintă cazul din figura 7.13 a, în care suprafața de separație  $S_{12}$  dintre cele două medii este plană și se consideră un singur conductor rectiliniu, paralel cu suprafața  $S_{12}$ , parcurs de curentul  $\mathbf{I}$  și situat în mediul 1.

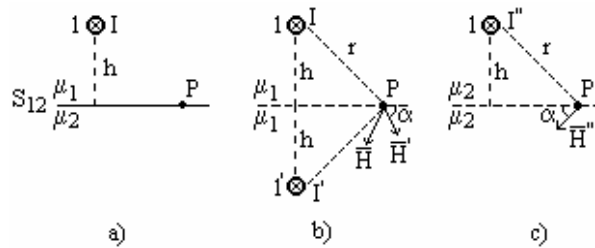


Fig. 7.13 Figură explicativă pentru prezentarea metodei imaginilor

Câmpul magnetic în domeniul 1 (în întreg domeniul mediul magnetic se consideră omogen de permeabilitate  $\mu_1$ ) se presupune stabilit de curentul dat  $\mathbf{I}$

și de curentul  $I'$ , încă necunoscut, care străbate conductorul imagine  $1'$  al curentului  $I$  în raport cu suprafața  $S_{12}$  (fig. 7.13 b).

Pentru determinarea câmpului magnetic în mediul 2, se admite că acesta este produs de curentul  $I''$ , încă necunoscut, care străbate conductorul 1, mediul în întreg domeniul fiind acum presupus omogen și de permeabilitate  $\mu_2$  (fig. 7.13 c). cele două necunoscute  $I'$  și  $I''$  rezultă din condițiile de trecere la suprafața  $S_{12}$ . Pentru componentele tangențiale ale câmpului magnetic în cele două medii se obțin relațiile:

$$H_{t1} = (H - H') \cos \alpha = (I - I') \frac{\cos \alpha}{2\pi r} \quad (7.34)$$

$$H_{t2} = H'' \cos \alpha = I'' \frac{\cos \alpha}{2\pi r} \quad (7.35)$$

din egalitatea cărora ( $H_{t1} = H_{t2}$ ), rezultă relația:

$$I - I' = I'' \quad (7.36)$$

Componentele normale ale inducției magnetice sunt date de relațiile:

$$B_{n1} = \mu_1 (H + H') \sin \alpha = (I + I') \frac{\sin \alpha}{2\pi r} \mu_1 \quad (7.37)$$

$$B_{n2} = \mu_2 H'' \sin \alpha = \mu_2 I'' \frac{\sin \alpha}{2\pi r} \quad (7.38)$$

din egalitatea cărora ( $B_{n1} = B_{n2}$ ), se obține relația:

$$\mu_1 (I + I') = \mu_2 I'' \quad (7.39)$$

Rezolvarea ecuațiilor (7.36) și (7.39) conduce la următoarele expresii pentru necunoscutele  $I'$  și  $I''$ :

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I; \quad I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \quad (7.40)$$

Dacă sunt mai multe conductoare parcurse de curenți se determină curenții imagine pentru fiecare dintre curenții dați prin procedeul arătat, iar pentru calculul câmpului magnetic în cele două medii se aplică corespunzător principiul superpoziției.

## 8. CIRCUITE MAGNETICE ȘI INDUCTIVITĂȚI. ENERGIE ȘI FORȚE ÎN CÂMP MAGNETIC

### 8.1. CIRCUITE MAGNETICE

**Circuitul magnetic** este un sistem de corpuri feromagnetice despărțite prin întrefieruri (aer), care permite închiderea liniilor de câmp magnetic (fig. 8.1). Conform teoremelor refracțiilor liniilor de câmp magnetic, acestea sunt practic tangențiale pe fața interioară a suprafețelor corpurilor feromagnetice și perpendiculare pe aceste suprafețe la ieșirea din ele. Deoarece componentele tangențiale ale intensității câmpului magnetic se conservă la suprafața corpurilor, componenta tangențială a inducției magnetice din corpul feromagnetic,  $B_t = \mu H_t$ , este mult mai mare ca în exterior ( $\mu \gg \mu_0$ ) și se poate considera că liniile de câmp magnetic sunt conduse prin corpuri feromagnetice cum este condus curentul electric prin conductoare.

Majoritatea liniilor de câmp magnetic se închid prin fier și întrefier, adică prin porțiunile utile ale circuitului magnetic și crează **fluxul magnetic fascicular util**. Liniile de câmp care se închid parțial prin aer și parțial prin circuitul magnetic se numesc **linii de dispersie**, iar fluxul creat de ele se numește **flux de dispersie**.

Câmpul magnetic dintr-un circuit magnetic poate fi produs de magneți permanenți sau de bobine de excitație (curentul electric care străbate bobina de excitație poate fi curent continuu sau curent alternativ). Porțiunea unui circuit magnetic pe care se află dispusă o înfășurare se numește miez sau coloană, iar porțiunea fără înfășurare se numește jug.

Există o mare varietate de circuite magnetice. Dacă permeabilitatea mediului este independentă de inducția magnetică circuitul este liniar, iar în caz contrar circuitul magnetic este neliniar. Circuitul magnetic este omogen dacă este realizat din medii cu aceeași permeabilitate magnetică și este neomogen dacă este realizat din medii cu permeabilități diferite. Din punct de vedere a configurației geometrice există circuite magnetice ramificate și respectiv, circuite magnetice neramificate.

#### 8.1.1. RELUCTANȚA MAGNETICĂ

Se consideră o porțiune dintr-un tub de câmp magnetic, suficient de subțire, pentru a putea considera fluxul magnetic uniform în secțiune (fig. 8.2). În porțiunea respectivă mediul magnetic se consideră omogen și izotrop de

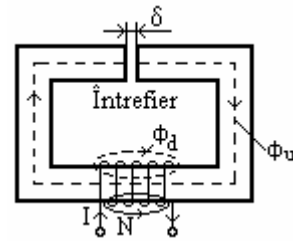


Fig. 8.1 Circuit magnetic cu întrefier



permeabilitate magnetică  $\mu$ . Curba  $\Gamma$  corespunde unei linii a câmpului magnetic iar  $\Delta S$  reprezintă a secțiune prin tubul de câmp magnetic. Ținând cont de condițiile considerate vectorii  $d\vec{l}$ ,  $d\vec{S}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  sunt coliniari.

Tensiunea magnetică de-a lungul curbei  $\Gamma$  (axa tubului), între secțiunile tubului **A** și **B** este dată de relația:

$$u_{mAB} = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{H} d\vec{l} = \int_{A(\Gamma)}^B H dl = \int_{A(\Gamma)}^B \frac{\vec{B} \cdot \vec{S}}{\mu \cdot S} dl = \int_{A(\Gamma)}^B \frac{\phi_f}{\mu \cdot S} dl \quad (8.1)$$

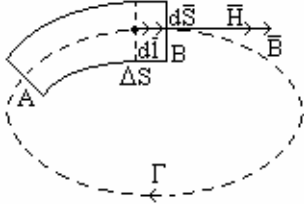


Fig. 8.2 Tub de flux magnetic

Deoarece tubul de flux magnetic  $\phi_f$  se conservă de-a lungul unui tub de câmp magnetic (consecință a legii fluxului magnetic), rezultă pentru tensiunea magnetică dintre punctele **A** și **B** relația:

$$u_{mAB} = \phi_f \int_{A(\Gamma)}^B \frac{dl}{\mu S} \quad (8.2)$$

**Reluctanța magnetică** corespunzătoare tubului de flux considerat se definește ca fiind

mărimea pozitivă a raportului dintre tensiunea magnetică și fluxul magnetic fascicular:

$$R_m = \frac{u_{mAB}}{\phi_f} = \int_{A(\Gamma)}^B \frac{dl}{\mu S} \quad (8.3)$$

Reluctanța magnetică depinde de natura materialului și de caracteristicile circuitului magnetic, fiind o mărime analoagă rezistenței electrice. Pentru o porțiune omogenă de circuit ( $S = \text{const.}$ ,  $\mu = \text{const.}$ ) reluctanța magnetică va fi:

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (8.4)$$

unde  $l$  reprezintă lungimea medie a unei linii de câmp magnetic.

Permeanța magnetică  $\Lambda_m$  este inversa reluctanței magnetice și este analoagă conductanței electrice:

$$\Lambda_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\phi_f}{u_m} \quad (8.5)$$

Unitatea de măsură a reluctanței magnetice este **Amper/Weber** [A/Wb], iar a permeanței magnetice este **Weber/Amper** [Wb/A].

Relația (8.2) se poate scrie și sub forma:

$$u_m = \phi_f \cdot R_m \quad (8.6)$$

care reprezintă "**legea lui Ohm**" pentru circuite magnetice, fiind analoagă legii lui Ohm pentru circuite electrice.

### 8.1.2. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF PENTRU CIRCUITE MAGNETICE

#### Teorema întâi a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

Se consideră un nod  $N$  al unui circuit magnetic și o suprafață  $\Sigma$  închisă, care înconjoară acest nod (fig. 8.3). Se aplică suprafeței considerate legea fluxului magnetic, neglijând fluxul de disperse. Se obține:

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B}_2 d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{B}_3 d\vec{S} + \iint_{S_4} \vec{B}_4 d\vec{S} \quad (8.7)$$

sau:

$$\phi_{f1} - \phi_{f2} - \phi_{f3} + \phi_{f4} = 0 \quad (8.8)$$

Generalizând relația (8.8) pentru un nod oarecare  $N$ , rezultă:

$$\sum_{k \in N} \phi_{fk} = 0 \quad (8.9)$$

**Suma algebrică a fluxurilor magnetice care străbat secțiunile laturilor unui circuit magnetic ce converg într-un nod al acestuia este nulă.**

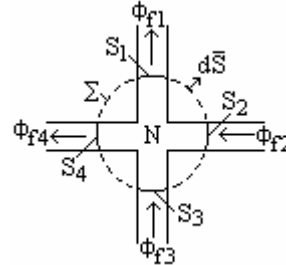


Fig. 8.3 Nod de circuit magnetic

#### Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

Se consideră un ochi de circuit magnetic și un sens arbitrar de referință corespunzător sensului de integrare a lui  $\vec{H}$  (fig. 8.4). Se aplică legea circuitului magnetic curbei  $\Gamma$  (linia mediană a circuitului) pentru un regim staționar:

$$\theta_{S_\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k \in O_j} u_{mk} \Rightarrow \sum_{k \in O_j} \theta_k = \sum_{k \in O_j} R_{mk} \phi_{fk} \quad (8.10)$$

**Suma algebrică a solenațiilor care înlanțuie laturile unui ochi de circuit magnetic este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică pe laturile circuitului considerat.**

Solenațiile și fluxurile magnetice care au același sens cu sensul de integrare prin latură se iau cu semnul plus, iar celelalte cu semnul minus. Din analiza teoremelor lui Kirchhoff

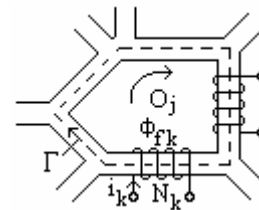


Fig. 8.4 Ochi de circuit magnetic

pentru rețele electrice și pentru rețele magnetice rezultă posibilitatea rezolvării circuitelor magnetice cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff. Pentru simplificare, se poate figura schema electrică echivalentă a schemei magnetice, în care sursele de t.e.m. sunt înlocuite cu solenațiile corespunzătoare, curenții electrice – prin fluxurile magnetice fasciculare din laturi, iar rezistențele laturilor – prin reluctanțele laturilor.

### 8.1.3. GRUPAREA RELUCTANȚELOR MAGNETICE

Reluctanța magnetică  $R_m$  echivalentă a unei porțiuni de circuit magnetic cu două borne de acces și fără solenații pe laturi, este egală cu raportul dintre tensiunea magnetică aplicată între cele două borne și fluxul magnetic fascicular care intră prin prima bornă și iese prin borna a doua:

$$R_{me} = \frac{u_m}{\phi_f} \quad (8.11)$$

#### Gruparea în serie a reluctanțelor magnetice

Dacă se aplică teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice, circuitului magnetic din figura 8.5 a, se obține:

$$u_m = \sum_{k=1}^5 u_{mk} = \sum_{k=1}^5 R_{mk} \phi_{fk} = \phi_f \sum_{k=1}^5 R_{mk} = \phi_f R_{mes} \Rightarrow \quad (8.12)$$

$$R_{mes} = \sum_{k=1}^5 R_{mk} \quad (8.13)$$

deoarece se neglijează fluxurile magnetice de dispersie și astfel, fluxul magnetic este același prin toate laturile. Generalizând relația (8.13) rezultă că reluctanța magnetică echivalentă a  $n$  laturi conectate în serie este egală cu suma reluctanțelor laturilor:

$$R_{mes} = \sum_{k=1}^n R_{mk} \quad (8.14)$$

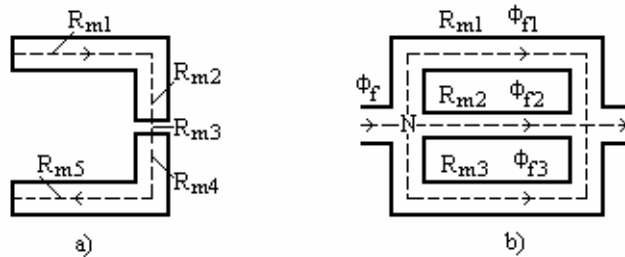


Fig. 8.5 Gruparea reluctanțelor magnetice: a) – în serie; b) – în paralel

#### Gruparea în paralel a reluctanțelor magnetice

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice nodului  $N$  din figura 8.5 b, se obține:

$$\phi_f = \sum_{k \in N} \phi_{fk} = \sum_{k \in N} \frac{u_m}{R_{mk}} = u_m \sum_{k \in N} \frac{1}{R_{mk}} = \frac{u_m}{R_{mep}} \Rightarrow \quad (8.15)$$

$$\frac{1}{R_{mep}} = \sum_{k \in N} \frac{1}{R_{mk}}; \quad \Lambda_{mep} = \sum_{k \in N} \Lambda_{mk} \quad (8.16)$$

Din relația (8.16) rezultă că inversa reluctanței magnetice echivalente a  $n$  laturi fără bobine, conectate în paralel, este egală cu suma inverselor reluctanțelor laturilor sau, permeanța echivalentă a  $n$  laturi conectate în paralel este egală cu suma permeanțelor laturilor.

#### 8.1.4. CALCULUL CIRCUITELOR MAGNETICE

Dacă se presupun cunoscute proprietățile de material (curbele de magnetizare), geometria și dimensiunile circuitelor magnetice, problema de calcul a circuitelor magnetice poate fi pusă sub următoarele forme:

- Să se determine solenația necesară pentru ca într-o secțiune a circuitului magnetic să rezulte un anumit flux, respectiv inducție magnetică (problema directă).
- Să se determine fluxul magnetic, respectiv inducția magnetică într-o secțiune a circuitului magnetic sau în diferitele laturi ale acestuia, atunci când se cunosc solenațiile (problema inversă).

În cazul **circuitelor magnetice liniare**, reluctanțele diferitelor laturi fiind constante, este avantajos să se efectueze calculul pe baza schemelor electrice echivalente ale acestora. În general, structurile circuitelor magnetice care intervin în practică nu sunt prea complexe, fiind de obicei suficient să se aplice teoremele lui Kirchhoff.

**Circuite magnetice neliniare.** Se consideră un circuit magnetic neramificat constituit dintr-o succesiune de medii feromagnetice și un întrefier. Se presupune circuitul magnetic împărțit în  $n$  porțiuni, fiecare de secțiune practic constantă, astfel încât inducția magnetică să se poată considera aceeași în lungul ei. Aplicând legea circuitului magnetic pentru o linie mijlocie de câmp în lungul circuitului, rezultă solenația  $\theta$ :

$$\theta = \sum H_k l_k = H_\delta \delta + \sum_{k=1}^n H_{fk} l_{fk} \quad (8.17)$$

unde:  $H_\delta$  este intensitatea câmpului magnetic în întrefier;  $H_{fk}$  - intensitatea câmpului magnetic în porțiunea  $k$  din fier;  $\delta$  - lungimea întrefierului;  $l_{fk}$  - lungimea porțiunii  $k$  de fier.

Dacă dispersia este neglijabilă (întrefier mic), în conformitate cu legea fluxului magnetic, în diferite secțiuni ale circuitului magnetic fluxul magnetic este constant ( $\phi_\delta = \phi_{f1} = \phi_{f2} = \dots = \phi_{fn} = \phi_f$ ). În situația în care nu se poate neglija dispersia în întrefier, se va ține cont de acest lucru printr-un factor subunitar,  $k_d$ , numit coeficient de dispersie, iar fluxul magnetic în întrefier va fi:

$$\phi_\delta = k_d \phi_f, \quad k_d < 1 \quad (8.18)$$

Cunoscând fluxurile magnetice fasciculare se determină inducțiile magnetice în diferite porțiuni ale circuitului magnetic ( $B_\delta = \phi_\delta / S_\delta$ ,  $B_{fk} = \phi_{fk} / S_{fk}$ ). Pentru întrefier intensitatea câmpului magnetic rezultă din relația,  $H_\delta = B_\delta / \mu_0$ ,

iar pentru diferite porțiuni în fier, intensitatea câmpului magnetic rezultă din curba de magnetizare pentru inducțiile corespunzătoare. Cunoscând solenația,  $\theta = iN$  și alegând numărul de spire rezultă curentul necesar și invers.

Pentru calculul circuitului magnetic se poate considera și expresia solenației în funcție de reluctanță,  $\theta = \mathbf{R}_m \phi$ , care pentru circuitul considerat se poate scrie sub forma:

$$\theta = \phi \left[ \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta} + \sum_{k=1}^n \frac{l_{fk}}{\mu_{fk} S_{fk}} \right] = \frac{\phi}{\mu_0 S_\delta} \left[ \delta + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_0 S_\delta l_{fk}}{\mu_{fk} S_{fk}} \right] = \frac{\delta' \phi}{\mu_0 S_\delta} \quad (8.19)$$

unde  $\mu_{fk}$  se determină din curba de magnetizare pentru inducția magnetică corespunzătoare porțiunii  $k$ , iar  $\delta'$  reprezintă întrefierul echivalent al întregului circuit magnetic:

$$\delta' = \delta + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_0 S_\delta l_{fk}}{\mu_{fk} S_{fk}} \quad (8.20)$$

În cazul circuitelor magnetice este important să se releve valoarea relativ ridicată a căderii de tensiune magnetică corespunzătoare unui întrefier.

Pentru circuitul magnetic considerat problema inversă se poate rezolva determinând caracteristica magnetică  $\phi = \phi(\theta)$ . În acest sens se alege o anumită inducție magnetică, respectiv flux magnetic (de exemplu - în întrefier) și se determină prin metoda prezentată anterior solenația necesară. Repetând calculele pentru mai multe valori ale inducției magnetice se obține solenațiile corespunzătoare și astfel se ridică prin puncte caracteristica magnetică a circuitului  $\phi_\delta = \mathbf{f}(\theta)$ , respectiv  $\mathbf{B}_\delta = \mathbf{f}(\theta)$ . Din această caracteristică se poate determina, pentru o anumită solenație dată, fluxul magnetic, respectiv inducția magnetică corespunzătoare.

#### Aplicatie

Un circuit magnetic realizat din tole, are lungimea mijlocie a miezului  $l_f = 13\text{cm}$ , întrefierul  $\delta = 1\text{cm}$  și secțiunile:  $S_f = 1,77\text{cm}^2$ ;  $S_\delta = 2\text{cm}^2$ . Numărul de spire al bobinei de excitație este  $N = 800$ , iar curba de magnetizare a materialului este dată prin valorile din tabelul de mai jos. Se neglijează dispersia. Să se determine curentul  $I$  din bobină, astfel încât inducția magnetică în întrefier să fie  $\mathbf{B}_\delta = 0,8\text{T}$ .

B[T]	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
H[A/m]	80	120	150	188	275	400	750	1700	3200	6000

Pentru  $\mathbf{H}_\delta$  și  $\mathbf{B}_f$  se obțin următoarele valori:

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{0,8}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 63,8 \cdot 10^4 \text{ A/m}; \quad B_f = \frac{S_\delta \cdot B_\delta}{S_f} = \frac{2 \cdot 0,8}{1,77} = 0,9 \text{ T}$$

La această valoare a lui  $\mathbf{B}_f$ , din curba de magnetizare rezultă:

$$H_f = 1,5 \cdot 10^2 \text{ A/m}$$

Aplicând legea circuitului magnetic se obține:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_f \cdot l_f + H_\delta \cdot \delta = N \cdot I \Rightarrow I = \frac{H_f \cdot l_f + H_\delta \cdot \delta}{N} = 8 \text{ A}$$

Se remarcă faptul că cei mai mulți amperi sunt necesari pentru crearea câmpului magnetic în întrefier, **6380 A** față de **19,5 A**, corespunzători miezului.

## 8.2. INDUCTIVITĂȚI (INDUCTANȚE)

### 8.2.1. INDUCTIVITATE PROPRIE ȘI MUTUALĂ

Se consideră o spiră filiformă parcursă de curentul  $i$  și se notează cu  $\phi$  fluxul magnetic produs de acest curent și care străbate suprafața spirei. **Inductivitatea proprie a spirei L** se definește cu relația:

$$L = \frac{\phi}{i} > 0 \quad (8.21)$$

Sensul de referință al fluxului magnetic (sensul normalei la suprafață) este asociat cu sensul curentului din conductor după regula burghiului drept. Definiția inductivității proprii se poate generaliza pentru un circuit oarecare.

În figura 8.6 a se consideră o bobină cu  $N$  spire, care este parcursă de curentul  $i$ . Fie curba închisă  $\Gamma$  care urmărește conturul conductorului și care se închide între capetele bobinei, unde câmpul magnetic este mult mai slab. Prin **inductivitatea proprie a bobinei** se înțelege raportul dintre fluxul magnetic  $\phi_{sr}$  care străbate suprafața mărginită de curba  $\Gamma$  și curentul  $i$  din bobină:

$$L = \frac{\phi_{sr}}{i} > 0 \quad (8.22)$$

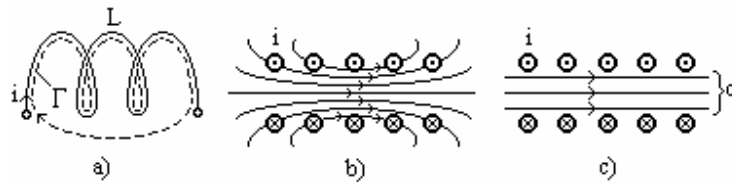


Fig. 8.6. Figură explicativă la definirea inductivității proprii a unei bobine  
a) bobină parcursă de un curent electric; b) situația reală; c) situația ideală

Fluxul magnetic  $\phi_{sr}$  care înlănțuie spirele bobinei se numește flux magnetic total sau înlănțuire magnetică și reprezintă suma fluxurilor magnetice fasciculare prin cele  $N$  spire ale bobinei (rel. 8.23). Este evident că fluxurile magnetice fasciculare prin diferitele spire ale bobinei nu sunt egale (fig. 8.6 b).

Se poate defini un flux magnetic fascicular mijlociu prin bobină  $\phi$  (rel. 8.23), căruia i-ar corespunde situația idealizată din figura 8.6 c (înlănțuire magnetică completă).

$$\phi_{S_r} = \sum_{k=1}^N \phi_k \cong N \phi \quad (8.23)$$

Se consideră o bobină care are solenația  $\theta = iN$  și este dispusă pe un circuit magnetic liniar de reluctanță  $R_m$ . Ținând cont de relația,  $\phi = \theta/R_m$ , inductivitatea proprie a bobinei se calculează cu relația:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \Lambda_m N^2 \quad (8.24)$$

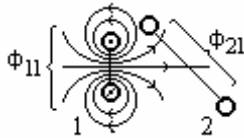
Particularizând relația (8.24) pentru cazul unei bobine uniform dispuse pe un tor omogen de permeabilitate  $\mu$ , de secțiune  $S$  și de lungime  $l$ , se obține relația:

$$L = \mu \frac{SN^2}{l} \quad (8.25)$$

Două circuite sunt **cuplate magnetic** dacă o parte din fluxul magnetic produs de unul dintre circuite străbate și suprafața delimitată de cel de-al doilea circuit. **Inductivitatea mutuală** caracterizează circuitele cuplate magnetic.

Se consideră două spire filiforme 1 și 2 (fig. 8.7) și se presupune că numai spira 1 este parcursă de curent ( $i_1 \neq 0$ ,  $i_2 = 0$ ). Inductivitatea mutuală a spirei 2 față de spira 1,  $L_{21}$ , este egală cu raportul dintre fluxul magnetic  $\phi_{21}$  care străbate suprafața spirei 2 și curentul  $i_1$  care l-a produs:

$$L_{21} = \frac{\phi_{21}}{i_1}; \quad i_2 = 0 \quad (8.26)$$



Fluxul mutual  $\phi_{21}$ , respectiv inductanța mutuală  $L_{21}$  pot fi pozitive sau negative, în funcție de sensurile de referință alese. Analog se definește inductivitatea mutuală  $L_{12}$  a spirei 1 față de spira 2:

$$L_{12} = \frac{\phi_{12}}{i_2}; \quad i_1 = 0 \quad (8.27)$$

Fig. 8.7 Spire filiforme cuplate magnetic

În cazul unui mediu liniar și omogen cele două inductivități mutuale satisfac următoarea condiție de reciprocitate:

$$L_{12} = L_{21} = M \quad (8.28)$$

unde cu  $M$  s-a notat valoarea inductivității mutuale.

Se consideră două bobine cuplate magnetic, având  $N_1$  spire, respectiv  $N_2$  spire (fig. 8.8 a). Se presupune că prima bobină este parcursă de curentul  $i_1 \neq 0$ , iar curentul  $i_2 = 0$ . Considerând înlănțuirea completă echivalentă (fig. 8.8 b) se

introduc următoarele notații:  $\phi_{11}$  – fluxul propriu care străbate spirele bobinei 1;  $\phi_{21}$  – fluxul util, reprezentând partea din fluxul propriu  $\phi_{11}$  care străbate și bobina 2;  $\phi_{d1}$  – fluxul de dispersie al bobinei 1 față de bobina 2 care se închide în jurul propriei înfășurări.

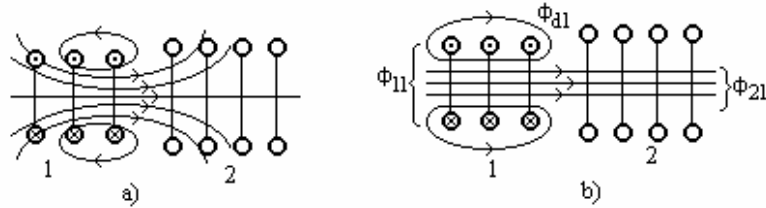


Fig. 8.8 Bobine cuplate magnetic – a); înlănțuirea completă echivalentă – b)

Corespunzător fluxurilor magnetice definite anterior se definesc următoarele inductivități:

- Inductivitatea proprie  $L_{11}$  a bobinei 1:

$$L_{11} = \frac{\phi_{11} N_1}{i_1} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} \quad (8.29)$$

- Inductivitatea mutuală  $L_{21}$  a bobinei 2 față de bobina 1:

$$L_{21} = \frac{\phi_{21} N_2}{i_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \quad (8.30)$$

- Inductivitatea de dispersie  $L_{d1}$  a bobinei 1 față de bobina 2:

$$L_{d1} = \frac{\phi_{d1} N_1}{i_1} = \frac{\Psi_{d1}}{i_1} \quad (8.31)$$

În mod analog, considerând bobina 2 alimentată cu curentul  $i_2 \neq 0$ , iar  $i_1 = 0$ , se definesc fluxurile fasciculare mijlocii  $\phi_{22}$ ,  $\phi_{12}$  și  $\phi_{d2}$  și corespunzător, inductivitățile:

$$L_{22} = \frac{\phi_{22} N_2}{i_2} = \frac{\Psi_{22}}{i_2}; \quad L_{12} = \frac{\phi_{12} N_1}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}; \quad L_{d2} = \frac{\phi_{d2} N_2}{i_2} = \frac{\Psi_{d2}}{i_2} \quad (8.32)$$

Pentru precizarea semnului fluxului magnetic mutual, respectiv al inductivității mutuale, în schemele electrice se folosesc anumite convenții. Se marchează una dintre bornele fiecărei bobine cuplate magnetic (de regulă începutul înfășurării, sensul de bobinare pentru ambele bobine considerându-se același) și dacă, curenții în cele două circuite au același sens față de bornele marcate inductivitatea mutuală  $M$  se consideră pozitivă (fig. 8.9 a), iar în caz contrar – negativă (fig. 8.9 b). Inductivitățile depind de geometria dimensiunile circuitelor respective precum și de natura materialului magnetic. Inductivitatea mutuală depinde și de poziția relativă a circuitelor cuplate magnetic. Unitatea de măsură pentru inductanță este **Henry [H]**.



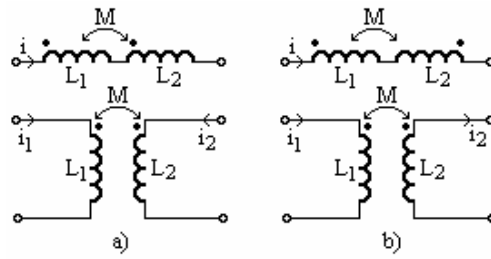


Fig. 8.9 Figură explicativă pentru precizarea semnelor inductivității mutuale

### 8.2.2. INDUCTIVITĂȚI UTILE. COEFICIENȚI DE DISPERSIE ȘI DE CUPLAJ MAGNETIC

Pentru două circuite cuplate magnetic, fluxurile magnetice fasciculare definite la aceste circuite satisfac următoarele ecuații:

$$\phi_{11} = |\phi_{21}| + \phi_{d1}; \quad \phi_{22} = |\phi_{12}| + \phi_{d2} \quad (8.33)$$

Ținând cont de relațiile de definiție ale inductivităților din relațiile (8.33) se obține:

$$L_{11} = \frac{N_1}{N_2} |L_{21}| + L_{d1} = L_{u1} + L_{d1} \quad (8.34)$$

$$L_{22} = \frac{N_2}{N_1} |L_{12}| + L_{d2} = L_{u2} + L_{d2} \quad (8.35)$$

unde  $L_{u1}$  reprezintă **inductanța utilă** (principală) a **circuitului 1 față de circuitul 2**, iar  $L_{u2}$  este **inductanța utilă a circuitului 2 față de circuitul 1**, fiind date de relațiile:

$$L_{u1} = \frac{N_1}{N_2} |L_{21}|; \quad L_{u2} = \frac{N_2}{N_1} |L_{12}| \quad (8.36)$$

Dacă se respectă condiția de reciprocitate ( $L_{12} = L_{21} = M$ ), din relațiile care definesc inductivitățile utile se obțin următoarele relații de legătură:

$$\frac{L_{u1}}{L_{u2}} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2; \quad M = \sqrt{L_{u1} L_{u2}} \quad (8.37)$$

Pentru caracterizarea circuitelor cuplate magnetic din punct de vedere al dispersiei, respectiv al gradului de cuplaj magnetic, se definesc anumiți coeficienți. Dacă nu ar exista fluxuri de dispersie, din relațiile (8.34) și (8.35) rezultă:

$$M^2 = L_{11} L_{22} \quad (8.38)$$

În realitate, datorită dispersiei fluxului magnetic mijlociu comun, rezultă că inductivitatea mutuală este mai mică decât valoarea rezultată din relația (8.38).

În acest sens, mărimea raportată:

$$\sigma = \frac{L_{11} L_{22} - M^2}{L_{11} L_{22}} = 1 - \frac{M^2}{L_{11} L_{22}} = 1 - k^2 \quad (8.39)$$

reprezintă o măsură a dispersiei și se numește **coeficient de dispersie total** (Blondel). Dacă nu există dispersie (circuite cuplate perfect),  $\sigma = 0$ , iar în cazul circuitelor necuplate magnetic,  $\sigma = 1$ . Mărimea, dată de relația:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \quad (8.40)$$

reprezintă o măsură a gradului de cuplaj dintre circuite și se numește **coeficient de cuplaj magnetic**. Dacă circuitele sunt cuplate perfect,  $k = 1$ , iar în absența unui cuplaj magnetic,  $k = 0$ .

### 8.2.3. TENSIUNEA ELECTROMOTOARE DE INDUCȚIE PROPRIE ȘI DE INDUCȚIE MUTUALĂ

Un circuit electric, având inductivitatea proprie  $L$ , dacă este străbătut de un curent variabil  $i$ , va avea fluxul total propriu  $\phi = Li$ , care va fi de asemenea variabil în timp. Conform legii inducției electromagnetice, în circuit se va induce o t.e.m. de valoare instantanee:

$$u_{el} = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (8.41)$$

relație valabilă dacă circuitul este imobil. T.e.m. indusă într-un circuit electric datorită variației în timp a curentului propriu al circuitului, se numește t.e.m. de inducție proprie sau de autoinducție.

Dacă două circuite sunt cuplate magnetic, având inductivitățile mutuale  $L_{12} = L_{21} = M$  și dacă circuitul 2 este străbătut de curentul variabil în timp  $i_2$ , fluxul magnetic  $\phi_{12} = L_{12} i_2$  produs de circuitul 2 în circuitul 1 este de asemenea variabil în timp și va induce în circuitul 1 o t.e.m. de inducție mutuală:

$$u_{e1M} = -\frac{d\phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (8.42)$$

În scrierea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff pentru circuite electrice cuplate magnetic și având curenții variabili în timp, se va ține cont și de t.e.m. de autoinducție și de inducție mutuală.

### 8.2.4. ECUAȚIILE LUI MAXWELL PENTRU INDUCTIVITĂȚI. FORMULA LUI NEUMANN

Se consideră un sistem de  $n$  circuite filiforme cuplate magnetic și situate într-un mediu liniar și izotrop. Fie  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  fluxurile magnetice totale care înlanțuiesc cele  $n$  circuite și  $i_1, i_2, \dots, i_n$  curenții din aceste circuite. Dacă se

notează cu  $\psi_{kj}$  fluxul magnetic prin circuitul  $k$  produs de curentul din circuitul  $j$ , se obține  $\psi_{kj} = L_{kj} i_j$ . Mediul fiind presupus liniar, fluxul magnetic  $\psi_k$  stabilit de curenții din toate circuitele cuplate și care înălțuie circuitul  $k$  se poate obține aplicând teorema superpoziției. Se obține relația:

$$\psi_k = \sum_{j=1}^n \psi_{kj} = \sum_{j=1}^n L_{kj} i_j \tag{8.43}$$

rezultând sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 + \dots + L_{1n} i_n \\ \psi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 + \dots + L_{2n} i_n \\ \dots\dots\dots \\ \psi_n = L_{n1} i_1 + L_{n2} i_2 + \dots + L_{nn} i_n \end{cases} \tag{8.44}$$

denumite și **ecuațiile lui Maxwell pentru inductivități**. Aceste ecuații exprimă faptul că fluxul magnetic total care înălțuie fiecare circuit este o funcție liniară de curenții din circuitele considerate. Coeficienții care intervin în aceste ecuații  $L_{kj}$  sunt inductivități proprii ( $k = j$ ) sau reciproce ( $k \neq j$ ). În condițiile menționate se respectă condiția de reciprocitate.

Se poate observa că raportul dintre fluxul  $\psi_k$  și curentul  $i_k$  depinde în general și de curenții din celelalte circuite. Atunci când acest raport nu depinde și de curenții din celelalte circuite se poate defini o **inductivitate de serviciu**, în mod analog capacității de serviciu.

Se consideră două circuite filiforme  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  cuplate magnetic și situate într-un mediu liniar și izotrop de permeabilitate  $\mu$  (fig. 8.10).

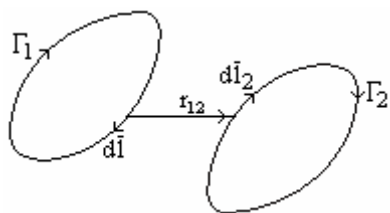


Fig. 8.10 Circuite filiforme cuplate magnetic

Fluxul mutual  $\phi_{21}$  se poate exprima sub forma:

$$\phi_{21} = \iint_{S_{r_2}} \vec{B}_{21} d\vec{S} = \oint_{\Gamma_2} \vec{A}_{21} d\vec{l}_2 \tag{8.45}$$

Potențialul magnetic vector corespunzător unui circuit filiform are expresia:

$$A_{21} = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} \tag{8.46}$$

Din relațiile (8.45) și (8.46), rezultă pentru inductivitatea mutuală a celor două circuite magnetice expresia:

$$L_{21} = \frac{\phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r_{12}} \tag{8.47}$$

relație cunoscută și sub numele de **formula lui Neumann**. Se poate observa că  $L_{21} = L_{12}$ .

### 8.3. ENERGIA MAGNETICĂ

În câmpul magnetic se înmagazinează o formă de energie, numită energie magnetică. S-a arătat că asupra conductoarelor parcurse de curent electric și asupra corpurilor magnetizate situate în câmp magnetic acționează forțe. Forțele exercitate de câmpul magnetic evidențiază posibilitatea transformării energiei magnetice în alte forme de energie prin intermediul lucrului mecanic.

#### 8.3.1. ENERGIA MAGNETICĂ A UNUI CIRCUIT FILIFORM

Calculul energiei magnetice plecând de la densitatea de energie magnetică:

$$w_m = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}} \quad (8.48)$$

presupune calculul câmpului în întreg spațiul.

Se consideră un circuit filiform, situat într-un mediu liniar, izotrop, fără magnetizație permanentă și infinit extins. Se consideră spațiul împărțit în  $n$  tuburi de flux magnetic (fig. 8.11).

Ținând cont de relația (8.48) energia magnetică va fi dată de relația:

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{D_\infty} \overline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}} dV \Rightarrow$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iiint_{V_k} \overline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}} dV_k \quad (8.49)$$

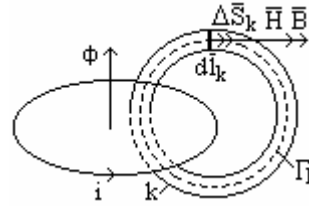


Fig. 8.11 Figură explicativă la calculul energiei magnetice a unui circuit filiform

Dacă secțiunea tubului de câmp este suficient de mică, într-o secțiune câmpul poate fi considerat uniform.

Ținând cont de faptul că vectorii  $\overline{\mathbf{B}}$ ,  $\overline{\mathbf{H}}$ ,  $d\overline{\mathbf{l}}_k$  și  $\Delta\overline{\mathbf{S}}_k$  sunt coliniari, rezultă:

$$\overline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}} dV_k = \overline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}} \Delta\overline{\mathbf{S}}_k d\overline{\mathbf{l}}_k = (\overline{\mathbf{B} \cdot \Delta\overline{\mathbf{S}}_k}) (\overline{\mathbf{H}} d\overline{\mathbf{l}}_k) = \Delta\phi_k (\overline{\mathbf{H}} d\overline{\mathbf{l}}_k) \quad (8.50)$$

unde  $\Delta\phi_k$  este valoarea conservativă a fluxului magnetic de-a lungul tubului  $k$  de flux magnetic.

Din relațiile (8.49) și (8.50) se obține pentru energia magnetică  $W_m$  următoarea expresie:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta\phi_k \oint_{\Gamma_k} \overline{\mathbf{H}} d\overline{\mathbf{l}}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta\phi_k i = \frac{1}{2} i \sum_{k=1}^n \Delta\phi_k = \frac{1}{2} i \phi \quad (8.51)$$

La obținerea relației (8.51) s-a utilizat legea circuitului magnetic. Energia magnetică se poate exprima și în funcție de inductanța proprie  $L$  a circuitului, rezultând:

$$W_m = \frac{1}{2} i \phi = \frac{1}{2} L i^2 \quad (8.52)$$

Relația (8.52) permite o definiție energetică a inductanței proprii a unui conductor:

$$L = 2 \frac{W_m}{i^2} = 2 \frac{W_{m \text{ int}}}{i^2} + 2 \frac{W_{m \text{ ext}}}{i^2} \quad (8.53)$$

unde  $W_{m \text{ int}}$  și  $W_{m \text{ ext}}$  sunt energiile magnetice înmagazinate în interiorul conductorului și respectiv, în exteriorul conductorului. Corespunzător celor doi termeni ai relației (8.53) se definesc inductanța interioară a conductorului și respectiv, inductanța exterioară a conductorului:

$$L_{\text{int}} = \frac{2W_{m \text{ int}}}{i^2}; \quad L_{\text{ext}} = \frac{2W_{m \text{ ext}}}{i^2} \quad (8.54)$$

### 8.3.2. ENERGIA ÎNMAGAZINATĂ ÎN CÂMPUL MAGNETIC AL UNEI BOBINE

Se consideră o bobină cu rezistența  $R$  și inductanța  $L$ , care prin închiderea întrerupătorului  $K$  se alimentează de la sursa de c.c. cu t.e.m.  $U_e$  și rezistența interioară  $R_i$  (fig. 8.12). Curentul prin circuit nu se stabilește instantaneu la valoarea:

$$I = \frac{U_e}{R + R_i} \quad (8.55)$$

ci după o curbă exponențială care tinde asimptotic la această valoare (fig. 8.13).

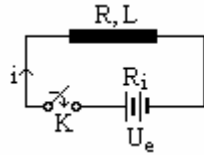


Fig. 8.12 Bobină alimentată de la sursa de t.e.m.  $U_e$

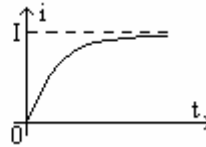


Fig. 8.13 Variația curentului electric prin bobină

Bobina fiind parcursă de un curent variabil  $i$ , conform legii inducției electromagnetice, în bobină apare o t.e.m. indusă,  $u_{eL} = -L di/dt$ . Aplicând teorema a doua a lui Kirchoff circuitului electric din figura 8.12, se obține:

$$U_e + u_{eL} = i(R + R_i) \quad (8.56)$$

Se înmulțesc ambii termeni ai relației (8.56) cu produsul  $idt$  și se obține:

$$U_e i dt = (R + R_i) i^2 dt + L i dt \quad (8.57)$$

unde:  $U_e i dt$  reprezintă energia elementară dată de sursă;  $(R + R_i) i^2 dt$  – puterea dezvoltată prin efect Joule-Lenz în tervalul de timp  $dt$ ;  $L i dt$  – energia elementară  $dW_m$  înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei, care se mai poate scrie și astfel:

$$dW_m = L i di = i d(Li) = i d\psi = \frac{\psi}{L} d\psi = \frac{1}{L} d\left(\frac{\psi^2}{2}\right) \quad (8.58)$$

rezultând energia  $W_m$  înmagazinată în câmpul magnetic al unei bobine:

$$W_m = \frac{1}{L} \int_0^\psi d\left(\frac{\psi^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L} = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} L i^2 \quad (8.59)$$

În general, dacă câmpul magnetic este produs de  $n$  bobine cuplate magnetic și parcurse de curenți variabili, neglijând fluxurile magnetice de dispersie, se obține pentru energia magnetică expresia:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \psi_{jk} i_k \quad (8.60)$$

Ținând cont de relația (8.60) pentru două bobine cuplate magnetic, energia magnetică va avea expresia:

$$W_m = \frac{1}{2} (\psi_{11} i_1 + \psi_{21} i_1 + \psi_{12} i_2 + \psi_{22} i_2) \quad (8.61)$$

Dacă se ține cont și de fluxurile magnetice de dispersie, se obține relația:

$$W_m = \frac{1}{2} (\psi_{11} i_1 + \psi_{d1} i_1 + \psi_{21} i_1 + \psi_{12} i_2 + \psi_{22} i_2 + \psi_{d2} i_2) \Rightarrow \quad (8.62)$$

$$W_m = \frac{1}{2} (\psi_1 i_1 + \psi_2 i_2) \quad (8.63)$$

unde  $\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{d1}$ , iar  $\psi_2 = \psi_{22} + \psi_{d2}$ .

Ținând cont de relațiile de definiție ale inductivităților proprii și mutuale, relația (8.63) se mai poate scrie și astfel:

$$W_m = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + L_{21} i_2 i_1 + L_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2) \quad (8.64)$$

unde se poate introduce notația  $\mathbf{M} = L_{12} = L_{21}$ , termenul  $\mathbf{M} i_1 i_2$  reprezentând energia magnetică de interacțiune între două bobine. Dacă se modifică poziția relativă a celor două bobine, se schimbă valoarea inductanței mutuale, deci se modifică și valoarea energiei magnetice de interacțiune.

### 8.3.3. EXPRESIA ENERGIEI MAGNETICE ÎN FUNCȚIE DE MĂRIMILE DE STARE ALE CÂMPULUI MAGNETIC

Energia magnetică se poate exprima sub formă mai generală, în funcție de mărimile de stare  $\overline{\mathbf{B}}$  și  $\overline{\mathbf{H}}$  ale câmpului magnetic. Pentru aceasta se consideră o bobină toroidală de diametru mare și secțiune neglijabilă, având  $N$  spire și fiind parcursă de curentul electric  $\mathbf{I}$ . Câmpul magnetic din interiorul bobinei poate fi considerat un câmp elementar cu  $\overline{\mathbf{B}}$  și  $\overline{\mathbf{H}}$  constante în punctele secțiunii bobinei.

Energia magnetică înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei este dată de relația:

$$W_m = \frac{1}{2} \psi I = \frac{1}{2} N \phi \frac{Hl}{N} = \frac{1}{2} HBSl \quad (8.65)$$

unde s-a ținut cont că:  $\psi = \phi N = \mathbf{B} S N$  și  $\mathbf{I} = \mathbf{H} l / N$ ,  $l$  fiind lungimea iar  $S$  secțiunea bobinei.

Dacă se consideră că spațiul în care există câmp magnetic are volumul  $V = Sl$ , rezultă că energia magnetică înmagazinată în unitatea de volum va fi:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{H} \mathbf{B}} \quad [\text{J}/\text{m}^3] \quad (8.66)$$

deoarece vectorii  $\overline{\mathbf{B}}$  și  $\overline{\mathbf{H}}$  sunt coliniari. Rezultă forma generală de exprimare a energiei câmpului magnetic produs de curenți liberi:

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \overline{\mathbf{H} \mathbf{B}} dV \quad [\text{J}] \quad (8.67)$$

În cazul câmpului magnetic produs de corpuri magnetizate (curenți amperieni) se ține cont de variația inducției magnetice în funcție de intensitatea câmpului magnetic, reprezentată prin curba de magnetizare,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ . Expresia energiei magnetice din unitatea de volum este următoarea:

$$w_m = \frac{1}{2} \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} = \frac{1}{2} \int_0^B \overline{\mathbf{H} d\mathbf{B}} \quad (8.68)$$

#### 8.4. TEOREMELE FORTELOR GENERALIZATE ÎN CÂMP MAGNETIC

Se consideră un sistem de  $n$  bobine alimentate de la surse exterioare de t.e.m. Bilanțul energetic al sistemului considerat se exprimă prin relația:

$$\sum_{k=1}^n u_{ek} i_k dt = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt + dW_m + dL \quad (8.69)$$

unde:  $\sum_{k=1}^n u_{ek} i_k dt$  reprezintă energia electrică primită de cele  $n$  bobine de la

sursele exterioare de t.e.m. în timpul  $dt$ ;  $\sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt$  - energia disipată prin

efect Joule-Lenz pe rezistențele celor  $n$  bobine în timpul  $dt$ ;  $dW_m$  - variația energiei magnetice a sistemului în intervalul de timp  $dt$ ;  $dL$  - lucrul mecanic elementar determinat de forțele care acționează în sistem;  $R_k$  - rezistența electrică a bobinei  $k$ ;  $i_k$  - curentul care străbate bobina  $k$ ;  $u_{ek}$  - t.e.m. a sursei care alimentează bobina  $k$ . În relația (8.69) s-a considerat că sursele de t.e.m. au rezistențele interioare nule.

Lucrul mecanic elementar  $dL$  se exprimă prin intermediul forței generalizate  $\mathbf{X}$ , cu relația:

$$dL = \mathbf{X} dx \quad (8.70)$$

unde  $x$  reprezintă coordonata generalizată care poate fi o distanță sau un unghi. Dacă  $x$  este o distanță atunci  $\mathbf{X}$  este o forță propriu-zisă, iar dacă  $x$  este un unghi,  $\mathbf{X}$  este un cuplu.

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff circuitului  $k$  din cele  $n$  circuite cuplate magnetic (fig. 8.12), se obține:

$$u_{ek} + u_{eLk} = R_k i \quad (8.71)$$

unde  $u_{eLk}$  este t.e.m. indusă în bobina  $k$  și conform legii inducției electromagnetice este dată de relația:

$$u_{eLk} = -\sum_{j=1}^n L_{jk} \frac{di_j}{dt} = -\sum_{j=1}^n \frac{d\psi_{jk}}{dt} \quad (8.72)$$

Se introduce relația (8.72) în relația (8.71) și se înmulțesc termenii relației obținute cu produsul  $i_k dt$ . Se obține relația:

$$u_{ek} i_k dt - \sum_{j=1}^n i_k d\psi_{jk} = R_k i_k^2 dt \quad (8.73)$$

care prin însumare pentru toate bobinele sistemului devine:

$$\sum_{k=1}^n u_{ek} i_k dt - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i_k d\psi_{jk} = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt \quad (8.74)$$

Din relațiile (8.69), (8.70) și (8.74) rezultă:

$$\mathbf{X} dx = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i_k d\psi_{jk} - dW_m \quad (8.75)$$

Pentru exprimarea forței generalizate  $\mathbf{X}$  se disting două cazuri:

- Sub acțiunea forței generalizate  $\mathbf{X}$ , modificarea stării sistemului are loc astfel încât fluxul magnetic se păstrează constant, rezultând  $d\psi_{jk} = 0$ .

Din relația (8.75) rezultă:

$$\mathbf{X} dx = -dW_m \Rightarrow \mathbf{X} = -\left(\frac{dW_m}{dx}\right)_{\phi=\text{const.}} \quad (8.76)$$

- Sub acțiunea forței generalizate  $\mathbf{X}$ , modificarea stării sistemului are loc astfel încât curentul se păstrează constant, rezultând:

$$\mathbf{X} dx = d\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i_k \psi_{jk} - dW_m = 2dW_m - dW_m = dW_m \Rightarrow \quad (8.77)$$

$$\mathbf{X} = -\left(\frac{dW_m}{dx}\right)_{i=\text{const.}} \quad (8.78)$$

La obținerea relației (8.77) s-a ținut cont de relația (8.60).



Relațiile (8.76) și (8.78) sunt cunoscute sub denumirea de **teoremele forțelor generalizate în câmp magnetic**. Indiferent de ipoteza de calcul adoptată forța generalizată trebuie să rezulte aceeași. Dacă în urma calculelor efectuate, forța generalizată  $\mathbf{X}$  are o valoare pozitivă, rezultă că aceasta va acționa în sensul creșterii coordonatei generalizate  $\mathbf{x}$ . Forța generalizată negativă acționează în sensul micșorării coordonatei generalizate.

#### Aplicatie

O bobină cilindrică de lungime  $l = 9\text{cm}$  și rază  $r = 1\text{cm}$  are  $N = 400$  spire parcurse de curentul continuu  $I = 0,2\text{A}$ . În interiorul bobinei este introdus pe lungimea  $x = 3\text{cm}$  un miez feromagnetic cu permeabilitatea relativă  $\mu_r = 1000$  (fig. 8.14). Să se calculeze energia magnetică a sistemului și forța ce acționează asupra miezului.

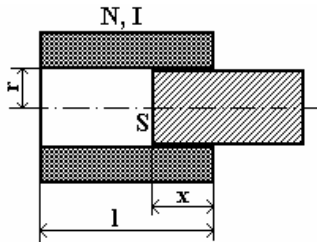


Fig. 8.14 Bobină cu miez feromagnetic

Energia magnetică se calculează cu relația:

$$W_m = \frac{1}{2} \Psi I = \frac{1}{2} N \phi I$$

unde se înlocuiește:

$$\phi = \frac{NI}{R_m} = \frac{NI}{R_{m1} + R_{m2}} = \frac{NI}{\frac{l-x}{\mu_0 S} + \frac{x}{\mu S}}$$

$$S = \pi \cdot r^2$$

Se obține:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi r^2 (NI)^2}{1 + x \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right)}$$

Înlocuind cu valorile numerice, rezultă:  $W_m = 25,2 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ .

Forța ce acționează asupra miezului se calculează cu relația:

$$F = - \left( \frac{dW_m}{dx} \right)_{I=\text{const.}} \Rightarrow F = - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi r^2 (NI)^2 \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right)}{\left[ 1 + x \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right) \right]^2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Rezultă, că  $F > 0$ , adică această forță acționează în sensul majorării coordonatei generalizate  $\mathbf{x}$  (miezul este atras în interiorul bobinei).

## 9. CIRCUITE ELECTRICE MONOFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

**Circuitele electrice de curent alternativ** (c.a.) sunt circuitele electrice alimentate cu tensiuni electromotoare alternative. Aceste circuite prezintă o importanță deosebită în tehnică, atât în producerea, transmiterea și utilizarea energiei electromagnetice, cât și în electrocomunicații, semnalizări și automatizări, datorită numeroaselor lor avantaje.

Cele mai simple mașini electrice generatoare sunt cele de curent alternativ, deoarece nu necesită dispozitive de redresare, simpla rotire a unei spire într-un câmp magnetic constant dând naștere unei t.e.m. alternative. Cele mai simple și mai robuste motoare sunt motoarele asincrone, care sunt alimentate tot la tensiuni alternative.

Pentru transmiterea energiei electrice se utilizează liniile electrice ale căror pierderi, prin efect Joule-Lenz, sunt invers proporționale cu pătratul tensiunii. Pentru curenții alternativi tensiunea se poate modifica relativ simplu, cu un randament ridicat, cu ajutorul transformatoarelor electrice. Semnalele radio și cele din telecomunicații sunt practic suprapuneri de semnale alternative de înaltă frecvență.

Curenții alternativi sunt produși adesea în circuite electrice liniare, în care regimul tranzitoriu se amortizează repede, încât în majoritatea aplicațiilor este suficient studiul regimului permanent.

Dacă unui circuit electric nedeformat i se aplică o tensiune alternativă sinusoidală, curenții din laturile circuitului vor fi tot de formă sinusoidală având frecvența egală cu frecvența tensiunii de alimentare.

### 9.1. DEFINIȚII GENERALE

Se numește **mărime sinusoidală** (mărime armonică) o mărime alternativă a cărei expresie în funcție de timp este de forma (fig. 9.1):

$$y = Y_m \sin(\omega t + \alpha) = Y_m \sin(2\pi f t + \alpha) = Y_m \sin\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + \alpha\right] \quad (9.1)$$

unde:  $Y_m$  reprezintă valoarea maxim pozitivă a mărimii sinusoidale (amplitudinea);  $y$  – valoarea instantanee a mărimii sinusoidale;  $(\omega t + \alpha)$  – faza mărimii, se exprimă în radiani;  $\alpha$  – faza inițială, la momentul  $t = 0$ , cu valori cuprinse între  $-\pi$  și  $\pi$ ;  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  – pulsația [rad/s];  $f$  – frecvența, se exprimă în hertzi [Hz];  $T$  – perioada, se exprimă în secunde [s].

Alături de forma în sinus, în literatură se utilizează și forma în cosinus:

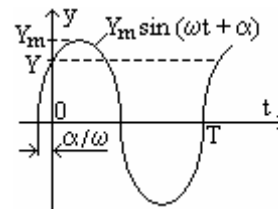


Fig. 9.1 Mărime sinusoidală

$$y = Y_m \cos(\omega t + \beta) \quad (9.2)$$

care se poate aduce la forma în sinus și reciproc, cu  $\beta = \alpha - \pi/2$ .

O mărime sinusoidală este complet determinată când se cunosc frecvența, amplitudinea și faza inițială. Valoarea medie a unei mărimi sinusoidale pe o semiperioadă se calculează cu relația:

$$y_{\text{med}} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\alpha}{\omega}}^{\frac{\alpha+T}{\omega}} Y_m \sin(\omega t + \alpha) dt = \frac{2}{\pi} Y_m \quad (9.3)$$

Valoarea medie pe o perioadă a unei mărimi sinusoidale este nulă:

$$\tilde{y} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} Y_m \sin(\omega t + \alpha) dt = -\frac{Y_m}{\omega T} \cos(\omega t + \alpha) \Big|_t^{t+T} = 0 \quad (9.4)$$

**Valoarea efectivă** a unei mărimi sinusoidale se calculează astfel:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} y^2 dt} = Y_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1 - \cos 2(\omega t + \alpha)}{2} dt} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}} \quad (9.5)$$

În electrotehnică, mărimile sinusoidale se reprezintă de obicei cu ajutorul valorii efective, sub forma:

$$y = \sqrt{2} Y \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.6)$$

numită forma normală în sinus a mărimii  $y$ .

Schimbarea originii timpului nu afectează valoarea instantanee a mărimii și deci nici faza, ci numai faza inițială. Într-o serie de aplicații, pentru una dintre mărimile sinusoidale faza inițială se poate alege arbitrar; odată fixată faza inițială a uneia dintre mărimi, fazele inițiale ale tuturor celorlalte mărimi sunt univoc determinate. Mărimea pentru care se alege o fază inițială nulă se numește origine de fază.

Între două mărimi sinusoidale de aceeași frecvență există anumite relații de fază. Se consideră două mărimi sinusoidale  $y_1$  și  $y_2$  de aceeași frecvență:

$$y_1 = \sqrt{2} Y_1 \sin(\omega t + \alpha_1); \quad y_2 = \sqrt{2} Y_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \quad (9.7)$$

Diferența fazelor celor două mărimi se numește defazajul mărimilor și este egal cu diferența fazelor inițiale:

$$\nabla\varphi = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (9.8)$$

Considerându-se că defazajul  $\nabla\varphi$  este cuprins în intervalul  $[-\pi, \pi]$ , se introduc următoarele exprimări uzuale ale relațiilor de fază:

$$\nabla\varphi > 0 \text{ sau } \alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow y_1 \text{ este defazată înaintea mărimii } y_2;$$

$$\nabla\varphi < 0 \text{ sau } \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow y_1 \text{ este defazată în urma mărimii } y_2;$$

$$\nabla\varphi = 0 \text{ sau } \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow y_1 \text{ este în fază cu } y_2;$$

$$\nabla\varphi = \pm\pi/2 \Rightarrow y_1 \text{ și } y_2 \text{ sunt în cuadratură};$$

$$\nabla\varphi = \pm\pi \Rightarrow y_1 \text{ și } y_2 \text{ sunt în opoziție de fază}.$$

## 9.2. ELEMENTE IDEALE DE CIRCUIT

### Rezistorul ideal

Se consideră un rezistor ideal de rezistență  $R$  (fiind parcurs de un curent electric degajă căldură dar nu produce câmp magnetic, nu acumulează sarcini electrice și nu are câmp electric imprimat), alimentat cu tensiunea sinusoidală (fig. 9.2):

$$u_R = \sqrt{2} U_R \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.9)$$

Valoarea instantanee a intensității curentului prin rezistor se obține aplicând legea conductivității electrice:

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \sqrt{2} \frac{U_R}{R} \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} I_R \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.10)$$

unde  $I_R$  este valoarea efectivă a curentului prin rezistor.

Din relația (9.10) rezultă: valoarea efectivă a intensității curentului nu depinde de frecvență; curentul electric printr-un rezistor ideal este în fază cu tensiunea electrică, aplicată la bornele sale, diagramele fazorială și carteziană fiind prezentate în figura 9.3 (s-a considerat  $\alpha = 0$ ). Căderea de tensiune pe un rezistor se numește cădere de tensiune rezistivă.

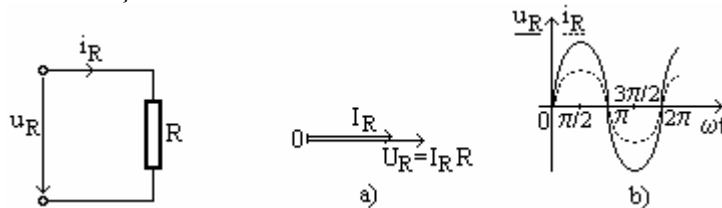


Fig. 9.2 Rezistorul ideal      Fig. 9.3 a) Diagrama fazorială; b) diagrama carteziană

Puterea instantanee  $p_b$  primită de rezistorul ideal pe la borne corespunde căldurii disipate prin efect Joule-Lenz, fiind dată de relația:

$$p_b = u_R \cdot i = R i_R^2 = G u_R^2 \quad (9.11)$$

unde  $G$  reprezintă conductanța rezistorului.

### Bobina ideală

Se consideră o bobină ideală de inductanță  $L$  și cu  $N$  spire (fiind parcursă de un curent electric produce câmp magnetic, dar nu degajă căldură, nu acumulează sarcini electrice și nu are câmp electric imprimat) alimentată cu tensiunea la borne  $u_L$  (fig. 9.4):

$$u_L = \sqrt{2} U_L \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.12)$$

Curentul electric  $i_L$ , care străbate bobina, produce un flux magnetic variabil  $\phi_{sF} = L i_L$  prin suprafețele spirelor bobinei.

Seconsideră conturul închis  $\Gamma$  și se aplică legea inducției electromagnetice:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi_{S_{\Gamma}}}{dt} \Rightarrow u_f - u_L = -L \frac{di_L}{dt} \quad (9.13)$$

Deoarece bobina este ideală (rezistența sa este nulă), se obține:

$$u_f = R_L i_L = 0 \Rightarrow u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (9.14)$$

Din relația (9.14) rezultă expresia curentului  $I_L$ :

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt = \frac{1}{L} \int \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha) dt = -\frac{U\sqrt{2}}{\omega L} \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow$$

$$i_L = \frac{U\sqrt{2}}{\omega L} \sin(\omega t + \alpha - \pi/2) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \alpha - \pi/2) \quad (9.15)$$

Mărimea  $X_L = \omega L$  se numește reactanță inductivă a bobinei și se măsoară ca orice rezistență în ohmi [ $\Omega$ ]. Din relația (9.15) rezultă: valoarea efectivă a intensității curentului este egală cu raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii la borne  $U_L$  și reactanța inductivă  $X_L$ ,  $I_L = U_L / X_L$ ; căderea de tensiune pe bobina ideală (cădere de tensiune inductivă) va fi întotdeauna defazată cu  $\pi/2$  înaintea curentului prin bobină, diagramele fazorială și carteziană fiind prezentate în figura 9.5 (s-a considerat  $\alpha = 0$ ).

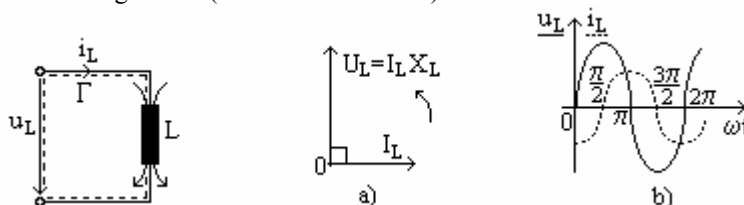


Fig. 9.4 Bobina ideală      Fig. 9.5 a) Diagrama fazorială; b) diagrama carteziană

Energia înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei și respectiv, puterea primită de bobina ideală pe la borne (este egală cu viteza de creștere a energiei), se calculează cu relațiile:

$$W_m = \frac{L i_L^2}{2}; \quad p_b = \frac{dW_m}{dt} \quad (9.16)$$

### Condensatorul ideal

Se consideră un condensator ideal de capacitate  $C$  (fiind parcurs de un curent electric poate acumula sarcini electrice, însă nu degajă căldură, nu produce câmp magnetic și nu are câmp electric imprimat) alimentat cu o tensiune sinusoidală (fig. 9.6):

$$u_c = \sqrt{2} U_c \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.17)$$

Dacă circuitul ar fi alimentat cu o tensiune continuă, intensitatea curentului din circuit ar fi egală cu zero (rezistența dielectricului dintre armături este infinită). Aplicând o tensiune sinusoidală condensatorului, acesta se va încărca și descărca periodic cu o frecvență egală cu frecvența tensiunii aplicate, și deci prin circuit va trece un curent electric alternativ.

Conform legii conservării sarcinii electrice aplicate suprafeței închise  $\Sigma$  (fig. 9.6), se obține:

$$i_c = \frac{dq}{dt}; \quad q = C u_c = \sqrt{2} C U_c \sin(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad (9.18)$$

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = \sqrt{2} \omega C U_c \cos(\omega t + \alpha) = \frac{\sqrt{2} U_c}{X_C} \sin(\omega t + \alpha + \pi/2) \quad (9.19)$$

$$i_c = \sqrt{2} I_c \sin(\omega t + \alpha + \pi/2) \quad (9.20)$$

Mărimea  $X_C = 1/(\omega C)$  se numește reactanță capacitivă a condensatorului și se măsoară ca orice rezistență în ohmi [ $\Omega$ ]. Din relațiile prezentate rezultă: valoarea efectivă a intensității curentului este egală cu raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii la borne  $U_c$  și reactanța capacitivă  $X_C$ ,  $I_c = U_c / X_C$ ; căderea de tensiune pe condensatorul ideal (cădere de tensiune capacitivă) va fi întotdeauna defazată cu  $\pi/2$  în urma curentului prin condensator, diagramele fazorială și carteziană fiind prezentate în figura 9.7 (s-a considerat  $\alpha = 0$ ).

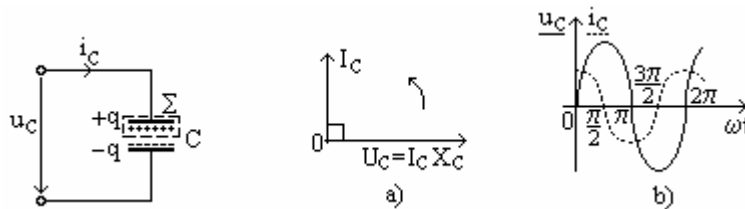


Fig. 9.6 Condensatorul ideal Fig. 9.7 a) Diagrama fazorială; b) diagrama carteziană

Energia câmpului electric al condensatorului și respectiv, puterea primită de condensatorul ideal pe la borne, se calculează cu relațiile:

$$W_e = \frac{C u_c^2}{2}; \quad p_b = \frac{dW_e}{dt} \quad (9.21)$$

### Sursa ideală

Sursa ideală de tensiune (fig. 9.8) este un element ideal de circuit care are tensiunea electromotoare  $u_e$  egală cu tensiunea la borne  $u_b$  și independentă de curentul debitat  $i$ . Rezistența interioară a unei surse ideale de tensiune este egală cu zero. Puterea electromagnetică cedată de sursa ideală de tensiune pe la borne este dată de relația:

$$p_b = u_e i \quad (9.22)$$

Sursa ideală de curent (fig. 9.9) este un element ideal de circuit care debitează un curent de intensitate  $i_s$ , independent de tensiunea la borne  $u_b$ . Rezistența interioară a unei surse ideale de curent este infinită. Puterea electromagnetică cedată de sursa ideală de curent pe la borne este dată de relația:

$$p_b = u_b i_s \quad (9.23)$$

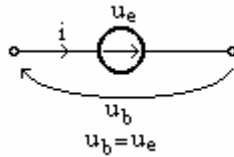


Fig. 9.8 Sursa ideală de tensiune

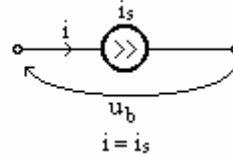


Fig. 9.9 Sursa ideală de curent

### 9.3. MĂRIMI CARACTERISTICE CIRCUITELOR LINIARE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

Un circuit de curent alternativ sinusoidal poate fi caracterizat cu ajutorul a doi parametri, pentru o anumită frecvență a tensiunii de alimentare.

#### Impedanța și defazajul

**Impedanța** unui circuit pasiv este prin definiție raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii la bornele circuitului și valoarea efectivă a intensității curentului ce intră pe la borne:

$$Z = U / I > 0 \quad (9.24)$$

Impedanța este o funcție de parametrii circuitului și de frecvența tensiunii de alimentare,  $Z = Z(\mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{f})$ . Unitatea de măsură este **Ohmul** [ $\Omega$ ].

**Defazajul circuitului** se definește ca diferența dintre faza tensiunii la bornele circuitului și faza intensității curentului ce intră pe la o bornă și iese pe la cealaltă. Deoarece frecvența curentului și a tensiunii este aceeași, defazajul este diferența dintre fazele inițiale ale tensiunii și intensității curentului:

$$\varphi = \alpha - \beta \quad (9.25)$$

Defazajul circuitului depinde de parametrii circuitului și de frecvență  $\varphi = \varphi(\mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{f})$ . Valorile defazajului sunt cuprinse în intervalul  $[-\pi/2, \pi/2]$ , rezultând  $\cos\varphi \geq 0$ .

Dacă se cunosc tensiunea la bornele circuitului  $u$ , impedanța  $Z$  și defazajul  $\varphi$ , curentul este univoc determinat:

$$i = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) \quad (9.26)$$

#### Rezistența și reactanța circuitului

Rezistența circuitului nu trebuie confundată cu rezistența dată în c.c. de relația (5.49). **Rezistența  $R$**  a circuitului este definită cu relația:

$$R = \frac{U \cos \varphi}{I} = Z \cos \varphi \geq 0 \quad (9.27)$$

unde  $U \cos \varphi$  este componenta activă a tensiunii.

**Reactanța X** a circuitului este definită cu relația:

$$X = \frac{U \sin \varphi}{I} = Z \sin \varphi \quad (9.28)$$

unde  $U \sin \varphi$  este componenta reactivă a tensiunii. Reactanța poate avea valori pozitive sau valori negative.

Dacă se dau rezistența și reactanța se pot determina defazajul și impedanța circuitului:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}; \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}; \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (9.29)$$

Relațiile (9.29) pot fi deduse și din triunghiul impedanțelor (fig. 9.10). Unitatea de măsură pentru rezistența și reactanța circuitului este **Ohmul [Ω]**. Cunoscând valorile date de relațiile (9.29), se obține valoarea instantanee a curentului:

$$i = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin \left( \omega t + \alpha - \arctg \frac{X}{R} \right) \quad (9.30)$$

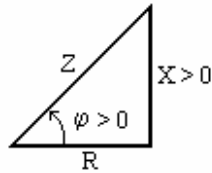


Fig. 9.10 Triunghiul impedanțelor

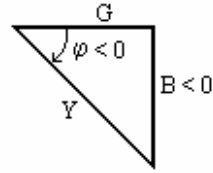


Fig. 9.11 Triunghiul admitanțelor

### Admitanța

**Admitanța Y** a circuitului se definește ca inversa impedanței circuitului:

$$Y = 1/Z = I/U > 0 \quad (9.31)$$

Unitatea de măsură a admitanței este **Siemensul [S]**.

Cunoscând admitanța și defazajul se poate scrie valoarea instantanee a intensității curentului:

$$i = \sqrt{2} Y U \sin (\omega t + \alpha - \varphi) \quad (9.32)$$

### Conductanța și susceptanța

**Rezistența G** a circuitului este definită cu relația:

$$G = \frac{I \cos \varphi}{U} = Y \cos \varphi \geq 0 \quad (9.33)$$

unde  $I \cos \varphi$  este componenta activă a curentului.



**Reactanța B** a circuitului este definită cu relația:

$$B = \frac{I \sin \varphi}{U} = Y \sin \varphi \quad (9.34)$$

unde **I sin φ** este componenta reactivă a curentului. Susceptanța poate avea valori pozitive sau valori negative.

Cunoscându-se conductanța și susceptanța circuitului se pot deduce relațiile:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = B/G; \quad \cos \varphi = G/Y; \quad \sin \varphi = B/Y \quad (9.35)$$

Relațiile (9.35) pot fi deduse și din triunghiul admitanțelor (fig. 9.11).

Unitatea de măsură pentru conductanță și susceptanță este **Siemensul [Ω]**.

Cunoscând valorile date de relațiile (9.35), se obține valoarea instantanee a curentului:

$$i = \sqrt{2} U \sqrt{G^2 + B^2} \sin\left(\omega t + \alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{G}\right) \quad (9.36)$$

## 9.4. METODE DE REPREZENTARE A MĂRIMILOR SINUSOIDALE

### 9.4.1. REPREZENTAREA GEOMETRICĂ

**Reprezentarea geometrică** se bazează pe posibilitatea de a asocia fiecărei mărimi sinusoidale câte un vector liber în plan, vector cu punct de aplicație arbitrar, caracterizat prin modulul său și prin unghiul pe care îl face cu o axă de referință. Vectorii reprezentativi ai unei mărimi sinusoidale se numesc fazori, asocierea fiind biunivocă.

Se consideră mărimea sinusoidală:

$$y = Y_m \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.37)$$

Într-un sistem de coordonate carteziene, fazorul asociat mărimii sinusoidale considerate va avea modulul egal cu amplitudinea  $Y_m$ , iar unghiul pe care îl face cu axa de referință (axa  $Ox$ ) este egal cu faza mărimii sinusoidale. Fazorul din figura 9.12 trebuie presupus rotit în timp, în sens direct, cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . Proiecția fazorului pe axa  $Oy$  reprezintă valoarea instantanee a mărimii sinusoidale la momentul de timp  $t$ . În figura 9.12 cu linie punctată s-a reprezentat axa numită origine de fază, față de care fazorul face un unghi constant egal cu faza inițială  $\alpha$  a mărimii sinusoidale. Rezultă că originea de fază se rotește odată cu fazorul, axa  $Ox$  fiind fixă.

Utilizând această reprezentare, relațiilor analitice le vor corespunde anumite construcții grafice, obținându-se diagrame fazoriale sau vectoriale. Această reprezentare geometrică cu fazor rotitor se numește și reprezentare cinematică.

O reprezentare geometrică simplificată a unei mărimi sinusoidale este reprezentarea cu fazor fix numită și reprezentare polară (fig. 9.13). În cazul acesta modulul fazorului este egal cu valoarea efectivă  $Y$  a mărimii sinusoidale, iar argumentul fazorului este egal cu faza inițială  $\alpha$ , raportată la axa origine de fază.

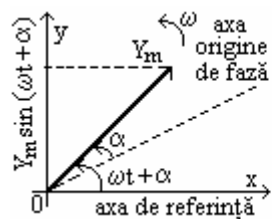


Fig. 9.12 Representarea cinematică

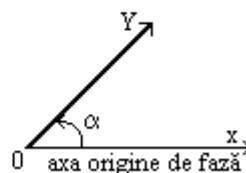


Fig. 9.13 Representarea polară

Când intervin mai multe mărimi sinusoidale, faza inițială a uneia dintre ele poate fi aleasă arbitrar, iar aceasta odată fixată, fazele inițiale ale celorlalte mărimi sunt univoc determinate.

#### 9.4.2. REPREZENTAREA ÎN COMPLEX SIMPLIFICAT

La calculul circuitelor electrice de c.a. sinusoidal, apar sisteme de ecuații integro-diferențiale, care sunt dificil de rezolvat prin metode matematice uzuale. Pentru simplificarea rezolvării acestor sisteme de ecuații s-au elaborat diferite metode de reprezentare simbolică a mărimilor sinusoidale. Fiecărei mărimi sinusoidale  $i$  se asociază biunivoc, după o anumită regulă, un simbol denumit imaginea mărimii respective, sistemele de ecuații integro-diferențiale cu mărimi sinusoidale fiind astfel, transformate în sisteme de ecuații liniare. După calcularea imaginilor mărimilor necunoscute, se determină mărimile sinusoidale din simbolurile lor, folosind metoda de reprezentare în sens invers.

**Reprezentare în complex** a unei mărimi sinusoidale este o reprezentare simbolică, care simplifică calculul circuitelor de c.a.

Un număr complex  $\underline{z}$  poate fi scris astfel:

$$\underline{z} = a + jb; \quad \underline{z} = r(\cos \varphi + j \sin \varphi); \quad \underline{z} = r e^{j\varphi} \quad (9.38)$$

unde prima relație reprezintă forma algebrică, a doua – forma trigonometrică și ultima relație – forma exponențială a numărului complex  $\underline{z}$ . În relațiile (9.38)  $a$  și  $b$  sunt numere reale,  $a$  fiind partea reală iar  $b$  partea imaginară a lui  $\underline{z}$ ;  $r$  reprezintă modulul numărului complex și este un număr real pozitiv, iar  $\varphi$  reprezintă argumentul numărului complex  $\underline{z}$ . Notația unității imaginare se face cu  $j = \sqrt{-1}$  nu cu  $i$ , pentru a nu se confunda cu intensitatea curentului.

Între  $a$ ,  $b$ ,  $r$  și  $\varphi$  există următoarele relații:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos \varphi = a/r; \quad \sin \varphi = b/r \quad (9.39)$$

Se poate asocia fiecărei mărimi sinusoidale un număr complex, asocierea fiind biunivocă. Se consideră mărimea sinusoidală:

$$y = \sqrt{2} Y \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.40)$$

Imaginea în complex a acestei mărimi sinusoidale, numită reprezentanta în complex a lui  $y$  și notată cu  $\underline{Y}$ , este un număr complex care are modulul egal cu valoarea efectivă  $Y$  a mărimii sinusoidale și argumentul egal cu faza inițială a mărimii  $\alpha$  sinusoidale:

$$\underline{Y} = Y e^{j\varphi} \quad (9.41)$$

Valoarea instantanee a mărimii sinusoidale se determină amplificând imaginea cu  $\sqrt{2} e^{j\omega t}$ :

$$\underline{Y} \sqrt{2} e^{j\omega t} = \sqrt{2} Y e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2} Y [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \quad (9.42)$$

Din relația (9.42) se observă că partea imaginară este tocmai valoarea instantanee a mărimii sinusoidale:

$$y = \text{Im} \left\{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{Y} \right\} \quad (9.43)$$

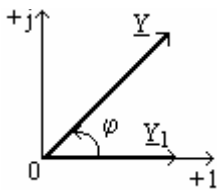


Fig. 9.14 Reprezentarea în complex a unei mărimi sinusoidale

În planul complex (planul lui Gauss), mărimea sinusoidală se reprezintă printr-un vector fix, numit fazor, care are modulul egal cu valoarea efectivă a mărimii sinusoidale și argumentul egal cu faza inițială a mărimii sinusoidale (fig. 9.14).

Mărimile sinusoidale cu faza inițială zero se numesc mărimi sinusoidale origine de fază și au fazorii suprapuși axei reale (fazorul  $\underline{Y}_1$  din figura 9.14).

Operațiilor cu mărimi sinusoidale în timp le corespund următoarele operații cu imaginile lor în complex:

- Sumei a două mărimi sinusoidale îi corespunde suma imaginilor în complex a mărimilor:

$$y_1 + y_2 \Leftrightarrow \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \quad (9.44)$$

- Amplificării cu un scalar  $\lambda$  a unei mărimi sinusoidale îi corespunde amplificarea cu un scalar a imaginii în complex a mărimii:

$$\lambda y \Leftrightarrow \lambda \underline{Y} \quad (9.45)$$

- Derivării în raport cu timpul a unei mărimi sinusoidale îi corespunde înmulțirea imaginii în complex a mărimii cu  $j\omega$ :

$$\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow j\omega \underline{Y} \quad (9.46)$$

Dacă mărimea sinusoidală este dată de relația (9.40), derivata sa este:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \sqrt{2} \omega Y \cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} \omega Y \sin(\omega t + \alpha + \pi/2) \Rightarrow \\ \frac{dy}{dt} &\Leftrightarrow \omega Y e^{j(\alpha+\pi/2)} = \omega Y e^{j\alpha} e^{j\pi/2} = j\omega \underline{Y}\end{aligned}\quad (9.47)$$

Prin derivare se obține un fazor amplificat cu  $\omega$  și rotit în planul complex în sens trigonometric cu  $\pi/2$ .

- **Integrării în raport cu timpul** a unei mărimi sinusoidale îi corespunde împărțirea imaginii ei în complex cu  $j\omega$ :

$$\int y dt \Leftrightarrow \frac{\underline{Y}}{j\omega} \quad (9.48)$$

Integrând mărimea  $y$  se obține:

$$\begin{aligned}\int y dt &= -\sqrt{2} \frac{Y}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} \frac{Y}{\omega} \sin(\omega t + \alpha - \pi/2) \Rightarrow \\ \int y dt &\Leftrightarrow \frac{Y}{\omega} e^{j(\alpha-\pi/2)} = \frac{Y}{\omega} e^{j\alpha} e^{-j\pi/2} = \frac{\underline{Y}}{j\omega}\end{aligned}\quad (9.49)$$

Prin integrare se obține un fazor cu modulul de  $\omega$  ori mai mic și rotit în planul complex în sens invers trigonometric cu  $\pi/2$ .

### 9.4.3. CALCULUL CIRCUITELOR DE C.A. SINUSOIDAL FOLOSIND REPREZENTAREA ÎN COMPLEX

Pentru caracterizarea circuitelor la a căror rezolvare se utilizează metoda reprezentării în complex se utilizează parametrii complecși, impedanța complexă  $\underline{Z}$  și admitanța complexă  $\underline{Y}$ .

**Impedanța complexă  $\underline{Z}$**  se definește ca raportul dintre tensiunea complexă și intensitatea complexă a curentului. Dacă tensiunea și curentul au valorile instantanee:

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha); \quad i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta) \quad (9.50)$$

se obține impedanța complexă  $\underline{Z}$ :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha-\beta)} = Z e^{j\varphi} = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi) = R + jX \quad (9.51)$$

Rezultă că impedanța complexă este un număr complex care are modulul egal cu impedanța circuitului și argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală fiind rezistența circuitului iar partea imaginară reactanța circuitului.

**Admitanța complexă  $\underline{Y}$**  se definește ca raportul dinre curentul complex și tensiunea complexă, fiind deci, egală cu valoarea inversă a impedanței complexe:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} e^{-j(\alpha-\beta)} = Y e^{-j\varphi} = Y (\cos \varphi - j \sin \varphi) = G - jB \quad (9.52)$$

Rezultă că admitanța complexă este un număr complex care are modulul egal cu admitanța circuitului și argumentul egal cu defazajul circuitului cu semn schimbat, partea reală fiind egală cu conductanța circuitului iar partea imaginară, cu susceptanța circuitului cu semn schimbat.

La calculul circuitelor se presupun următoarele ipoteze simplificatoare:

- circuitele sunt filiforme, curentul fiind repartizat uniform în secțiunea conductorului;
- elementele de circuit sunt ideale, rezistoarele au numai rezistență, bobinele numai inductanță, iar condensatoarele numai capacitate;
- circuitele au parametri concentrați, în rezistor este concentrată întreaga rezistență, în bobină întreaga inductanță și în condensator întreaga capacitate a circuitului;
- circuitul este izolat de influența electromagnetică a altor circuite;
- parametrii circuitului (**R**, **L** și **C**) sunt liniari, nu depind de valoarea intensității curentului sau a tensiunii.

Metodologia de rezolvare a circuitelor de c.a., folosind reprezentarea în complex, este următoarea:

- se scriu ecuațiile integro-diferențiale ale circuitelor, în valori instantanee;
- se determină imaginile în complex ale mărimilor sinusoidale date și ale relațiilor integro-diferențiale;
- se rezolvă ecuațiile liniare obținute, în raport cu imaginile funcțiilor necunoscute;
- se reprezintă în planul complex fazorii corespunzători mărimilor cunoscute și mărimilor calculate, obținându-se diagramele fazoriale, care dau o imagine sugestivă a mărimilor și defazajelor dintre mărimi.

### 9.5. TEOREMA LUI JOUBERT

Din relația de definiție a impedanței complexe pentru dipoli liniari și pasivi, rezultă:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad (9.53)$$

relație care reprezintă **forma complexă a legii lui Ohm** pentru circuite liniare și pasive. Se consideră o latură activă a unui circuit electric (fig. 9.15) care conține un circuit **R**, **L**, **C** serie și o sursă ideală, care are t.e.m instantanee  $u_{eg}$  cu sensul același cu al curentului prin latură. Aplicând legea conducției electromagnetice conturului închis  $\Gamma$ , reprezentat în figură, se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} d\bar{l} = - \frac{d\phi_{s\Gamma}}{dt} + u_{eg} = R i + \frac{1}{C} \int i dt - u_b \quad (9.54)$$

Fluxul magnetic  $\phi_{S_\Gamma}$  este fluxul care străbate orice suprafață deschisă  $S_\Gamma$ , care se sprijină pe conturul  $\Gamma$ , fiind compus din fluxul propriu bobinei ( $L \cdot i$ ) și din fluxul exterior  $\phi_{ext}$ :

$$\phi_{S_\Gamma} = L i + \phi_{ext} \quad (9.55)$$

Înlocuind relația (9.55) în relația (9.54) se obține:

$$u_{eg} - \frac{d\phi_{ext}}{dt} + u_b = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (9.56)$$

Trecând relația (9.56) în complex simplificat, rezultă:

$$\underline{U}_{eg} - j\omega\phi_{ext} + \underline{U}_b = \left[ R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \underline{I} = \underline{Z} \underline{I} \quad (9.57)$$

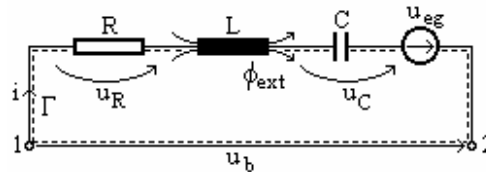


Fig. 9.15 Figură explicativă la demonstrarea teoremei lui Joubert

Relațiile (9.56) și (9.57) reprezintă **teorema lui Joubert** sub formă instantanee și complexă (forma complexă generalizată a legii lui Ohm).

Dacă latura nu este cuplată inductiv cu alte laturi,  $\phi_{ext} = 0$ , rezultând:

$$\underline{U}_{eg} + \underline{U}_b = \underline{Z} \underline{I} \quad (9.58)$$

## 9. 6. FORMA COMPLEXĂ A TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

**Prima teoremă a lui Kirchhoff** se aplică unui nod oarecare de rețea  $N$ . Se consideră a suprafață închisă  $\Sigma$  care înconjoară nodul (fig. 9.16) și se aplică legea conservării sarcinii electrice pentru regimul cvasistaționar, rezultând:

$$\sum_{k \in N} i_k = 0 \Rightarrow \sum_{k \in N} I_k = 0 \quad (9.59)$$

**Suma algebrică a imaginilor în complex ale curenților din laturile unei rețele, care converg într-un nod de rețea, este nulă.**

Relația nu este valabilă pentru modulele sau valorile efective ale curenților. Relația se va aplica la  $N - S$  noduri, unde  $N$  este numărul total de noduri ale rețelei, iar  $S$  este numărul de subrețele (rețele care nu au o continuitate galvanică, dar au între ele o cuplare magnetică).

**Teorema a doua a lui Kirchhoff** se aplică unui ochi de rețea. Se consideră un ochi oarecare de rețea  $O_p$  (fig. 9.17) și se aplică teorema lui Joubert laturii  $j$  a ochiului considerat.

Se obține în complex:

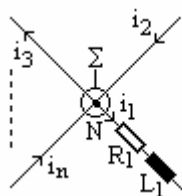


Fig. 9.16 Nod de rețea

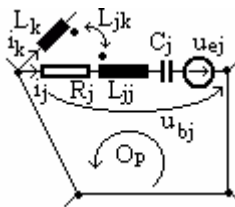


Fig. 9.17 Ochi de rețea

$$\underline{U}_{ej} + \underline{U}_{bj} = R_j \underline{I}_j + j \left( \omega L_{jj} - \frac{1}{\omega C_j} \right) \underline{I}_j + j \omega \phi_{\text{ext}j} \quad (9.60)$$

Fluxul magnetic  $\phi_{\text{ext}j}$  este produs de cuplajele magnetice care există între această latură și celelalte laturi ale rețelei:

$$j \omega \phi_{\text{ext}j} = j \omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^L L_{jk} L_k \quad (9.61)$$

Procedând analog pentru toate laturile ochiului  $O_p$  și însumând membru cu membru se obține:

$$\sum_{j \in O_p} \underline{U}_{ej} + \sum_{j \in O_p} \underline{U}_{bj} = \sum_{j \in O_p} \left[ \underline{Z}_j \underline{I}_j + j \omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^L L_{jk} L_k \right] \quad (9.62)$$

unde  $\underline{Z}_j$  este impedanța complexă a laturii  $j$ :

$$\underline{Z}_j = R_j + j \left( \omega L_{jj} - \frac{1}{\omega C_j} \right) \quad (9.63)$$

Din teorema potențialului electric rezultă că suma tensiunilor de pe o curbă închisă este zero, rezultând astfel din relația (9.62) forma complexă a teoremei a doua a lui Kirchhoff:

$$\sum_{j \in O_p} \underline{U}_{ej} = \sum_{j \in O_p} \left[ \underline{Z}_j \cdot \underline{I}_j + j \omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^L L_{jk} L_k \right] \quad (9.64)$$

**Suma algebrică a imaginilor în complex ale t.e.m. ale generatoarelor din laturile care aparțin unui ochi de rețea, este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune complexe din laturile respective.**

T.e.m. se ia cu semnul plus dacă există concordanță între sensul t.e.m. și sensul de parcurgere a ochiului și cu semnul minus în caz contrar. Căderea de tensiune  $\underline{Z}_j \underline{I}_j$  se ia cu semnul plus dacă sensul de parcurgere a ochiului coincide pin latură cu sensul curenților. Căderea de tensiune pe inductanțele

mutuale se ia cu semnul plus dacă curenții  $\underline{I}_j$  și  $\underline{I}_k$  au același sens față de bornele polarizate și dacă sensul lui  $\underline{I}_j$  prin latură coincide cu sensul de parcurgere a laturii.

### Aplicație

Să se rezolve rețeaua electrică din figura 9.18, fiind date t.e.m., impedanțele laturilor și inductanțele mutuale.

Rețeaua are 3 noduri, 2 subrețele și 4 laturi. Se figurează curenții din laturile rețelei și sensurile de parcurgere a ochiurilor, cu sensuri arbitrare alese. Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului A și cea de a doua teoremă ochiurilor 1, 2 și 3, se obține sistemul de ecuații:

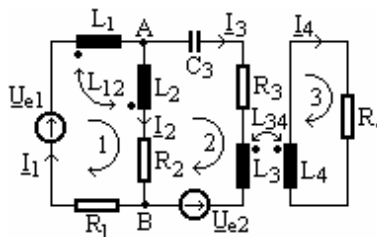


Fig. 9.18 Rețea de c.a.

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0 \\ \underline{U}_{e1} &= (\underline{R}_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + (\underline{R}_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - j\omega L_{12}\underline{I}_2 - j\omega L_{21}\underline{I}_1 \\ -\underline{U}_{e3} &= -(\underline{R}_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 + \left( \underline{R}_3 + j\omega L_3 - j\frac{1}{\omega C_3} \right)\underline{I}_3 + j\omega L_{21}\underline{I}_1 - j\omega L_{34}\underline{I}_4 \\ 0 &= (\underline{R}_4 + j\omega L_4)\underline{I}_4 - j\omega L_{43}\underline{I}_3 \end{aligned}$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații se determină imaginile în complex ale curenților din laturi, iar cu ajutorul regulii de trecere inversă (rel. 9.43) se obțin valorile instantanee ale curenților.

## 9.7. PUTERI ÎN CIRCUITELE DE CURENT ALTERNATIV

### 9.7.1 PUTEREA ACTIVĂ, PUTEREA REACTIVĂ ȘI PUTEREA APARENTĂ

La circuitele de curent alternativ în regim sinusoidal intervin trei forme ale puterii: puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă.

Considerând tensiunea și curentul de forma:

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha); \quad i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta) \quad (9.65)$$

puterea electromagnetică instantanee într-un circuit monofazat are expresia:

$$p = u \cdot i = 2UI \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta) = UI [\cos \varphi - \cos(\omega t + \alpha + \beta)] \quad (9.66)$$

Puterea instantanee este o mărime periodică, având o componentă constantă ( $UI \cos \varphi$ ) și o componentă alternativă cu frecvența dublă față de frecvența tensiunii de alimentare. În decursul unei perioade puterea electromagnetică instantanee are atât valori pozitive, cât și valori negative (fig. 9.19).



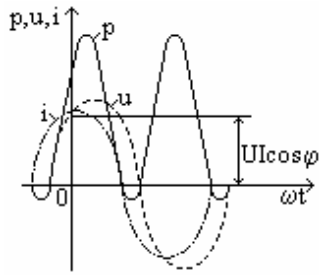


Fig. 9.19 Variațiile tensiunii, curentului și puterii instantanee cu timpul

În figura 9.19 sunt prezentate variațiile tensiunii, intensității curentului și puterii instantanee în raport cu timpul.

Când puterea electromagnetică instantanee este pozitivă, fluxul de energie electromagnetică este dirijat de la sursă spre receptor, iar când puterea este negativă, fluxul de energie este dirijat de la receptor spre sursă.

**Puterea activă P** este valoarea medie a puterii electromagnetice instantanee pe durata unei perioade:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = UI \cos \varphi \quad (9.67)$$

În cazul unui circuit receptor pasiv (nu conține surse), puterea activă va fi:

$$P = UI \cos \varphi = Z I^2 \cos \varphi = R I^2 = G U^2 \geq 0 \quad (9.68)$$

deoarece  $\varphi$  este cuprins în intervalul  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Puterea activă este maximă în circuitele pur rezistive ( $\varphi = 0$ ) și este nulă în circuitele nedisipative ( $\varphi = \pm\pi/2$ ). Unitatea de măsură a puterii active este **Wattul [W]**, iar aparatele utilizate pentru măsurarea puterii active se numesc wattmetre.

Energia activă este integrala în raport cu timpul a puterii active:

$$W_a = \int_0^T P \, dt \quad (9.69)$$

și se măsoară în **Watt-secunde [Ws]**.

**Puterea reactivă Q** se definește ca produsul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului, multiplicat cu sinusul unghiului de defazaj:

$$Q = UI \sin \varphi = Z I^2 \sin \varphi = B U^2 \quad (9.70)$$

Dacă circuitul are caracter inductiv ( $0 < \varphi < \pi/2$ ), atunci  $Q > 0$ , ceea ce înseamnă că în circuit se consumă putere reactivă; dacă circuitul are caracter capacitiv, ( $-\pi/2 < \varphi < 0$ ), atunci  $Q < 0$ , ceea ce înseamnă că în circuit se produce putere reactivă; dacă circuitul este pur rezistiv ( $\varphi = 0$ ), puterea reactivă este nulă. Unitatea de măsură pentru puterea reactivă este **Volt-amperul-reactiv [var]**. Energia reactivă se calculează cu relația:

$$W_r = \int_0^T Q \, dt \quad (9.71)$$

și se măsoară în **volt-ampere-reactiv secundă [vars]**

**Puterea aparentă  $S$**  se definește ca produsul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului:

$$S = UI = ZI^2 = YU^2 \quad (9.72)$$

Unitatea de măsură pentru puterea aparentă este **Volt-ampere [VA]**. Puterea aparentă reprezintă valoarea maximă pe care o poate lua puterea activă, fiind o mărime caracteristică transformatoarelor și generatoarelor.

Între puterile  $P$ ,  $Q$  și  $S$  există următoarele relații de legătură:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (9.73)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}; \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}; \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S} \quad (9.74)$$

relații care pot fi deduse și din triunghiul puterilor (fig. 9.20).

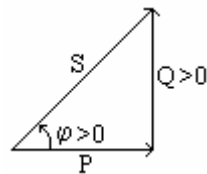


Fig. 9.20 Triunghiul puterilor

### 9.7.2. PUTEREA COMPLEXĂ

**Puterea complexă  $\underline{S}$**  se definește ca produsul dintre tensiunea complexă și curentul complex conjugat:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\alpha} \cdot I e^{-j\beta} = UI e^{j(\alpha-\beta)} = S e^{j\varphi} \Rightarrow$$

$$\underline{S} = S(\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ \quad (9.75)$$

Puterea complexă poate avea în funcție de parametrii circuitului următoarele expresii:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 = \underline{Y} U^2 = (R + jX) I^2 = (G - jB) U^2 \quad (9.76)$$

Puterea complexă este un număr complex al cărui modul este egal cu puterea aparentă iar argumentul este egal cu defazajul circuitului, partea reală fiind puterea activă iar partea imaginară fiind puterea reactivă.

Puterea complexă  $\underline{S}$  poate fi reprezentată în planul complex al puterilor (fig. 4.91). În cazul circuitului pasiv, puterea activă  $P$  este pozitivă, iar

Fazorul  $\underline{S}$  se află în cadranele **I** sau **IV**. Pentru circuitele care conțin surse de t.e.m., fazorul  $\underline{S}$  poate fi în orice cadran.

Conform celor prezentate, puterea ctivă și reactivă se pot exprima prin partea reală, respectiv partea imaginară a puterii complexe:

$$P = \operatorname{Re} \{ \underline{S} \} = \operatorname{Re} \{ \underline{U} \underline{I}^* \}; \quad Q = \operatorname{Im} \{ \underline{S} \} = \operatorname{Im} \{ \underline{U} \underline{I}^* \} \quad (9.77)$$

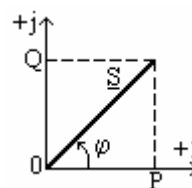


Fig. 9.21 Puterea complexă

### 9.7.3. FACTORUL DE PUTERE

**Factorul de putere  $\delta$**  este egal cu raportul dintre puterea activă  $P$  și puterea activă maximă, corespunzătoare aceluiași pierderi prin efect Joule-Lenz pe linie:

$$\delta = \frac{P}{P_{\max}} = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi \quad (9.78)$$

În regim sinusoidal puterea activă maximă este egală cu puterea aparentă,  $P_{\max} = S$ , iar factorul de putere este egal cu factorul de defazaj,  $\cos \varphi$ .

Cu cât factorul de putere al receptoarelor este mai mare, cu atât generatoarele din centrale și liniile de transport pot fi încărcate cu o putere activă mai mare. Astfel, este necesar a avea un factor de putere cât mai mare (cât mai apropiat de unitate), pentru a reduce pierderile de putere și pentru a folosi eficient generatoarele și liniile de transport.

Îmbunătățirea factorului de putere se realizează utilizând condensatoarele electrice, în figura 9.22 fiind prezentată schema de conectare a condensatorului.

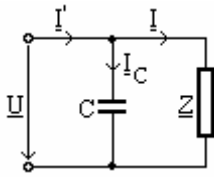


Fig. 9.22 Schema de legare a condensatorului

Se consideră un receptor de impedanță  $Z$  și putere activă  $P = UI \cos \varphi$ . Pentru a îmbunătăți factorul de putere al circuitului de la  $\cos \varphi$  la  $\cos \varphi'$ , în paralel cu receptorul se conectează un condensator de capacitate  $C$ , care va absorbi curentul  $I_c$ , defazat cu  $\pi/2$  înaintea tensiunii  $U$ .

Capacitatea condensatorului este dată de relația:

$$C = \frac{P}{\omega \cdot U^2} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \quad (9.79)$$

unde:  $\varphi$  este defazajul circuitului în lipsa condensatorului;  $\varphi'$  - defazajul circuitului după montarea condensatorului. Puterea reactivă debitată de instalația de compensare este dată de relația:

$$Q = \omega \cdot C \cdot U^2 = P (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \quad (9.80)$$

### 9.7.4. TEOREMA CONSERVĂRII PUTERILOR COMPLEXE, ACTIVE ȘI REACTIVE

**Puterea complexă primită pe la borne de o rețea necuplată magnetic cu exteriorul este egală cu suma puterilor complexe primite de laturile rețelei.**

Forma generală a **teoremei conservării puterii complexe** este următoarea:

$$\underline{S}_b = \sum_{n=1}^N \underline{V}_n I_n^{(\text{ext}) *} = \sum_{k=1}^L \underline{U}_{bk} I_k \quad (9.81)$$

unde:  $N$  este numărul de noduri (borne de acces) ale rețelei,  $L$  – numărul de laturi;  $\underline{U}_{bk}$  – reprezentanta în complex a tensiunii la bornele laturii  $k$ ;  $\underline{I}_k$  – reprezentanta în complex a curentului prin latura  $k$ ;  $\underline{V}_n$  – reprezentanta în complex a potențialului nodului  $n$  față de un punct arbitrar;  $\underline{I}_n^{(ext)}$  – reprezentanta în complex a curentului injectat în nodul  $n$ .

Ținând cont de teorema lui Joubert (rel. 9.57) aplicată relației (9.81) se obține:

$$\underline{S}_b + \underline{S}_g = P_R + jQ_X \quad (9.82)$$

care reprezintă **teorema conservării puterii complexe** a unei rețele: **suma dintre puterea complexă primită de rețea pe la bornele de acces  $\underline{S}_b$  și puterea complexă generată de sursele rețelei  $\underline{S}_g$  are ca parte reală puterea activă  $P_R$  disipată de rezistoarele rețelei și ca parte imaginară puterea reactivă  $Q_X$  primită de bobinele și de condensatoarele rețelei.**

Din teorema conservării puterii complexe rezultă teorema conservării puterii active:

$$P_b + P_g = P_R \quad (9.83)$$

și teorema conservării puterii reactive:

$$Q_b + Q_g = Q_X \quad (9.84)$$

### 9.7.5. TEOREMA TRANSFERULUI MAXIM DE PUTERE ACTIVĂ

Se consideră un generator de tensiune cu t.e.m  $\underline{U}_e$  și impedanța interioară  $\underline{Z}_i = R + jX_i$ . Se cere să se determine condițiile în care acest generator va transmite pe la borne o putere activă maximă unei sarcini pasive,  $\underline{Z} = R + jX$  (fig. 9.23).

Curentul  $\underline{I}$  prin circuit este dat de relația:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z} + \underline{Z}_i} = \frac{\underline{U}_e}{R + R_i + j(X + X_i)} \quad (9.85)$$

iar puterea activă cedată pe la borne va fi:

$$P_g = \frac{R U_e^2}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} \quad (9.86)$$

Se observă ușor că  $P_g$  este maximă în raport cu reactanța sarcinii atunci când:

$$X = -X_i \quad (9.87)$$

Maximul puterii în raport cu rezistența sarcinii se obține la valoarea:

$$R = R_i \quad (9.88)$$

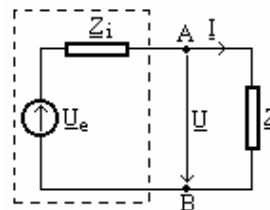


Fig. 9.23 Sarcină conectată la un generator cu impedanță internă

Aceste două condiții se pot concentra în expresia:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_i^* \quad (9.89)$$

numită și **condiția de adaptare a sarcinii**.

**Teorema transferului maxim de putere activă** se enunță astfel: **o sarcină conectată între două borne ale unei surse de t.e.m. absoarbe o putere maximă activă dacă reactanța ei este egală cu reactanța interioară a sursei luată cu semnul schimbat și rezistența ei este egală cu rezistența interioară a sursei.**

Puterea activă maximă transferată pe la bornele sarcinii adaptate  $P_{\max}$ , puterea activă dată de generator  $P_g$  și randamentul electric  $\eta$ , în condițiile transferului maxim de putere activă, sunt date de relațiile:

$$P_{\max} = \frac{U_e^2}{4R_i}; \quad P_g = (R + R_i)I^2 = \frac{U_e^2}{2R_i} = 2P_{\max}; \quad \eta = \frac{P_{\max}}{P_g} = 0,5 \quad (9.90)$$

## 9.8. CIRCUITE SIMPLE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL. IMPEDANȚE ECHIVALENTE

### 9.8.1. CIRCUITUL R, L, C SERIE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

Se consideră circuitul **R, L, C** serie din figura 9.24, alimentat la borne cu tensiunea:  $u_b = U_{bm} \sin \omega t$ . Prin cele trei elemente conectate în serie circulă același curent  $i$ , care provoacă căderile de tensiune:

$$u_R = R i; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt + \frac{q_0}{C} \quad (9.91)$$

unde, în regim permanent sinusoidal, constanta de integrare,  $q_0/C = 0$ .

Tensiunea la borne  $u_b$  acoperă căderile de tensiune din circuit, rezultând:

$$u_b = u_R + u_L + u_C \Rightarrow u_b = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (9.92)$$

relație care reprezintă ecuația integro-diferențială a curentului.

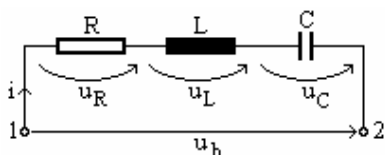


Fig. 9.24 Circuit R, L, C serie

Se caută pentru ecuația integro-diferențială (9.92) o soluție de forma:

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi) \quad (9.93)$$

urmând a fi determinate valoarea efectivă  $I$  și defazajul  $\varphi$ .

Înlocuind relația (9.93) în relația (9.92), se obține:

$$\sqrt{2} U_b \sin \omega t = \sqrt{2} R I \sin(\omega t - \varphi) + \sqrt{2} (X_L - X_C) \cos(\omega t - \varphi) \quad (9.94)$$

Pentru determinarea defazajului  $\varphi$ , în relația (9.93) se pune condiția  $t = 0$ , rezultând:

$$0 = \sqrt{2} R I \sin(-\varphi) + \sqrt{2} (X_L - X_C) I \cos(-\varphi) \quad (9.95)$$

de unde rezultă:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X}{R} \quad (9.96)$$

unde  $X$  reprezintă reactanța totală a circuitului.

Rezultă că intensitatea curentului  $i$  va fi defazată în urma tensiunii la borne  $u_b$  cu unghiul  $\varphi$ , dat de relația (9.96). Dacă un circuit are defazajul:

$\varphi > 0$  ( $X_L > X_C$ ), circuitul are caracter inductiv;

$\varphi < 0$  ( $X_L < X_C$ ), circuitul are caracter capacitiv;

$\varphi = 0$  ( $X_L = X_C$ ), circuitul are caracter pur rezistiv.

Pentru determinarea valorii efective a curentului  $I$ , în relația (9.93) se introduce  $t = \varphi/\omega$ , rezultând:

$$U_b \sin \varphi = X I \quad (9.97)$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad (9.98)$$

Înlocuind relația (9.98) în relația (9.97), se obține:

$$I = \frac{U_b}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_b}{Z} \quad (9.99)$$

rezultând expresia curentului  $i$ :

$$i = \sqrt{2} \frac{U_b}{Z} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{X}{R}\right) \quad (9.100)$$

unde  $Z$  reprezintă impedanța circuitului  $R, L, C$  serie:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (9.101)$$

Impedanța complexă a circuitului este dată de relația:

$$\underline{Z} = \frac{U_b}{I} = \frac{U}{I e^{-j\varphi}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = Z \frac{R}{Z} + j Z \frac{X}{Z} = R + j X = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (9.102)$$

În figura 4.25 sunt reprezentate diagramele fazoriale ale valorilor efective pentru circuitul  $R, L, C$  serie cu: caracter inductiv – a), caracter capacitiv – b) și caracter pur rezistiv (ohmic) – c).

Din diagramele fazoriale prezentate, rezultă:

$$U_b = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad (9.103)$$

unde  $U_R$ ,  $U_L$  și  $U_C$  reprezintă valorile efective ale căderilor de tensiune pe elementele circuitului.

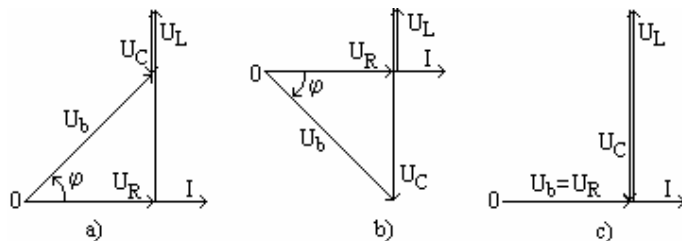


Fig. 9.25 Diagrame fazoriale: a) circuit cu caracter inductiv; b) circuit cu caracter capacitiv; c) circuit cu caracter pur rezistiv

### 9.8.2. CIRCUIT R, L, C PARALEL ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

Se consideră circuitul R, L, C derivație din figura 9.26, la bornele căruia se aplică tensiunea sinusoidală  $u_b = \sqrt{2} U_b \sin \omega t$ . Se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul A și rezultă:

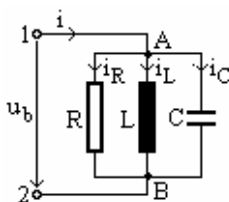


Fig. 9.26 Circuit R, L, C paralel

$$i = i_R + i_L + i_C \quad (9.104)$$

Valorile efective ale celor trei curenți se obțin cu relațiile (tensiunea aplicată elementelor de circuit legate în paralel este aceeași):

$$I_R = \frac{U_b}{R}; \quad I_L = \frac{U_b}{X_L} = \frac{U_b}{\omega L};$$

$$I_C = \frac{U_b}{X_C} = \omega C U_b \quad (9.105)$$

În figura 9.27 sunt prezentate diagramele fazoriale ale valorilor efective pentru circuitul R, L, C derivație cu: caracter inductiv – a), caracter capacitiv – b) și caracter pur rezistiv – c).

Din diagramele fazoriale prezentate, rezultă că suma geometrică a celor trei curenți  $I_R$ ,  $I_L$  și  $I_C$  este egală cu intensitatea curentului total  $I$ , defazat cu unghiul  $\varphi$  față de tensiunea aplicată la borne:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \quad (9.106)$$

Înlocuind relațiile (9.105) în ecuația (9.106) și ținând cont de faptul că  $I = U_b/Z$  se obține:

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \quad (9.107)$$

sau sub formă complexă:

$$\underline{Y} = G - jB = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = Y e^{-j\varphi} \quad (9.108)$$

unde defazajul  $\varphi$  se calculează cu relația:

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G} \quad (9.109)$$

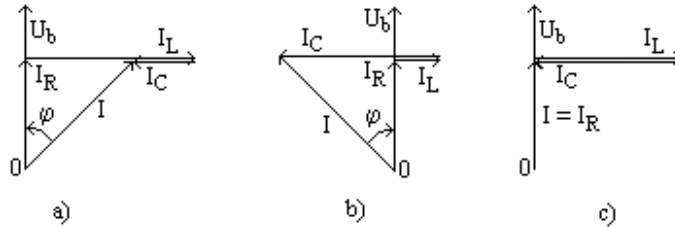


Fig. 9.27 Diagrame fazoriale: a) circuit cu caracter inductiv; b) circuit cu caracter capacitiv; c) circuit cu caracter pur rezistiv

### 9.8.3. CIRCUITE CUPLATE MAGNETIC

Cuplajul magnetic se realizează prin intermediul bobinelor între care există inductanțe mutuale. Bobinele cuplate magnetic pot fi conectate în serie, în paralel sau pot aparține unor circuite distincte, așa cum este cazul circuitului primar și circuitului secundar al unui transformator electric.

Prin intermediul inductanțelor de cuplaj magnetic, apare o t.e.m. indusă în prima bobină de curentul variabil din a doua bobină și respectiv, în a doua bobină apare o t.e.m. indusă de curentul variabil din prima bobină:

$$u_{e21} = -L_{21} \frac{di_2}{dt}; \quad u_{e12} = -L_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (9.110)$$

sau sub formă complexă:

$$\underline{U}_{e21} = -j\omega L_{21} \underline{I}_2; \quad \underline{U}_{e12} = -j\omega L_{12} \underline{I}_1 \quad (9.111)$$

Acestor t.e.m. induse le corespund căderi de tensiune pe cele două bobine, egale și de semn opus cu t.e.m. induse.

În condițiile în care se respectă condiția de reciprocitate:

$$L_{12} = L_{21} = M \quad (9.112)$$

se poate scrie impedanța de cuplaj magnetic:

$$\underline{Z}_M = j\omega M \quad (9.113)$$

de care se ține cont în calculul circuitelor la care intervin cuplaje magnetice.



### 9.8.4. IMPEDANȚE COMPLEXE ECHIVALENTE

Se consideră un circuit dipolar, care are aplicată la borne o tensiune sinusoidală cu imaginea în complex  $\underline{U}$ , curentul absorbit de circuit fiind tot sinusoidal și având imaginea în complex  $\underline{I}$ .

**Impedanța complexă echivalentă** este raportul dintre imaginea în complex a tensiunii la borne și imaginea în complex a curentului absorbit de borne:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z_e e^{j\varphi} = R_e + jX_e \quad (9.114)$$

Partea reală  $R_e$  se numește rezistență echivalentă și este întotdeauna pozitivă, iar partea imaginară  $X_e$ , care poate fi pozitivă sau negativă, se numește reactanță echivalentă.

**Admitanța complexă echivalentă** este inversa impedanței complexe echivalente:

$$\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}_e} = Y_e e^{-j\varphi} = G_e - jB_e \quad (9.115)$$

Partea reală  $G_e$  se numește conductanță echivalentă și este întotdeauna pozitivă, iar partea imaginară cu semn schimbat  $B_e$  se numește susceptanță echivalentă și poate fi pozitivă sau negativă.

Se consideră  $n$  dipoli pasivi, necuplați inductivi, conectați în serie și având impedanțele complexe  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$  (fig. 9.28). Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în complex, se obține:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \dots + \underline{U}_n = \underline{U} \Rightarrow \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} + \dots + \underline{Z}_n \underline{I} = \underline{Z}_{es} \underline{I} \quad (9.116)$$

de unde rezultă:

$$\underline{Z}_{es} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k = R_{ep} + jX_{ep}; \quad R_{ep} = \sum_{k=1}^n R_k; \quad X_{ep} = \sum_{k=1}^n X_k \quad (9.117)$$

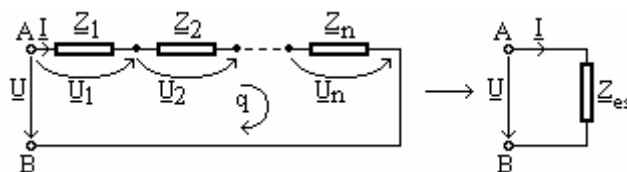


Fig. 9.28 Legarea în serie a  $n$  dipoli necuplați inductiv

Impedanța complexă echivalentă la legarea în serie a  $n$  dipoli pasivi, necuplați inductiv, este egală cu suma impedanțelor complexe ale dipolilor, rezistența echivalentă este egală cu suma rezistențelor, iar reactanța echivalentă este egală cu suma reactanțelor dipolilor.

Se consideră  $n$  dipoli necuplați inductiv, conectați în paralel (fig. 9.29).

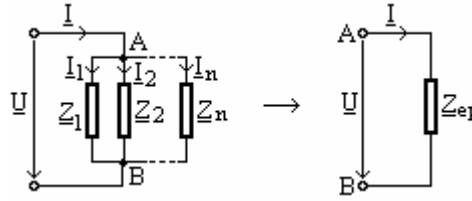


Fig. 9.29 Legarea în paralel a  $n$  dipoli necuplați inductiv

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului **A**, se obține:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n \Rightarrow \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{ep}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_n} \quad (9.118)$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{pe}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}; \quad \underline{Y}_{ep} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k = G_{ep} - jB_{ep};$$

$$G_{ep} = \sum_{k=1}^n G_k; \quad B_{ep} = \sum_{k=1}^n B_k \quad (9.119)$$

## 9.9. REZONANȚA ÎN CIRCUITELE ELECTRICE DE C.A.

Se numesc **circuite rezonante**, circuitele electrice de curent alternativ care conțin elemente reactive și la care reactanța echivalentă respectiv susceptanța echivalentă sunt nule. La aceste circuite, curentul este în fază cu tensiunea aplicată la borne, întregul circuit comportându-se ca o rezistență pură. La rezonanță, puterea reactivă absorbită de circuit este nulă, puterea reactivă absorbită de bobine fiind compensată de cea debitată de condensatoare, iar amplitudinea curentului absorbit de la sursă trece prin valori maxime sau minime.

### 9.9.1. REZONANȚA SIMPLĂ DE TENSIUNE

Se consideră circuitul **R, L, C** conectat în serie din figura 9.24. Pentru acest circuit se pot scrie relația:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}} = R_e + jX_e = R_e + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (9.120)$$

Circuitul este rezonant dacă reactanța echivalentă  $X_e$  este nulă:

$$X_e = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (9.121)$$

Din relația (9.121) rezultă că rezonanța se poate realiza variind frecvența tensiunii de alimentare sau modificând valoarea capacității condensatorului respectiv, modificând valoarea inductanței bobinei.

Frecvența și pulsația la care se produce rezonanța sunt date de formulele lui Thomson:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.122)$$

La rezonanță sunt valabile relațiile:

$$Z_e = R = Z_{e\min}; \quad I = U_b / Z_e = U_b / R = I_{\max}; \quad U_L = U_C; \quad \varphi = 0 \quad (9.123)$$

Diagrama fazorială a circuitului în cazul rezonanței serie este prezentată în figura 9.25 c. Căderea de tensiune inductivă este compensată de căderea de tensiune capacitivă, motiv pentru care rezonanța serie se mai numește și rezonanța tensiunilor.

Rezonanța circuitului este caracterizată printr-o serie de mărimi, după cum urmează:

Impedanța caracteristică,  $Z_C$ :

$$Z_C = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9.124)$$

Factorul de calitate,  $Q$ :

$$Q = \frac{Z_C}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (9.125)$$

Factorul de amortizare,  $d$ :

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{Z_C} \quad (9.126)$$

Raportul dintre curentul din circuit în regim de nerezonanță  $I$  și curentul  $I_0$  la rezonanță:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U_b}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} : \frac{U_b}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}} \quad (9.127)$$

unde  $\varepsilon = \omega / \omega_0 = f / f_0$ , știind că  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Curbele de rezonanță (fig. 9.30) se obțin reprezentând raportul  $I / I_0$  în funcție de  $\varepsilon$ . Analizând forma acestor curbe, se remarcă faptul că la rezonanță, când  $\varepsilon = 1$ , curentul din circuit are valoarea maximă,  $I = I_0$ , ceea ce înseamnă că impedanța circuitului este minimă,  $Z_0 = R$ .

În electronică se construiesc circuite rezonante cu factorul de calitate  $Q = 100 \dots 1000$ , pentru amplificarea tensiunilor slabe, având frecvența egală cu frecvența de rezonanță a circuitelor.

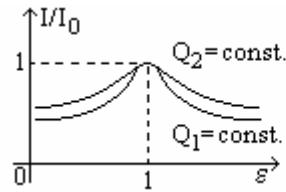


Fig. 9.30 Curbele de rezonanță pentru rezonanța simplă de tensiune

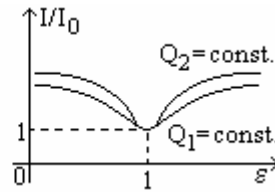


Fig. 9.31 Curbele de rezonanță pentru rezonanța simplă de curent

### 9.9.2. REZONANȚA SIMPLĂ DE CURENT

Rezonanța de curent apare în circuitele de curent alternativ, care conțin bobine și condensatoare conectate în paralel (fig. 9.26). Tensiunea la bornele elementelor legate în paralel fiind aceeași, se pot scrie pentru valorile efective ale curenților următoarele relații:

$$I_R = \frac{U_b}{R}; \quad I_L = \frac{U_b}{\omega L}; \quad I_C = U_b \omega C; \quad I = U_b Y \quad (9.128)$$

Admitanța complexă echivalentă a circuitului este dată de relația:

$$\underline{Y} = \frac{I}{U_b} = G_e - jB_e = G_e + j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \quad (9.129)$$

Circuitul este rezonant dacă susceptanța echivalentă  $B_e$  este nulă:

$$B_e = \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega L} = \omega C \quad (9.130)$$

Frecvența și pulsația la care se produce rezonanța sunt date de formulele lui Thomson:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.131)$$

Dacă condiția de rezonanță este îndeplinită, se obțin relațiile:

$$Y_e = G_e = Y_{e\min}; \quad I = U_b Y_e = U_b / R = I_{\min}; \quad I_L = I_C; \quad \varphi = 0 \quad (9.132)$$

Diagrama fazorială a circuitului în cazul rezonanței serie este prezentată în figura 9.27 c. Factorul de calitate al circuitului,  $Q$ , este dat de relația:

$$Q = \frac{R}{Z_C} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \omega_0 C R \quad (9.133)$$

Raportul dintre curentul din circuit în regim de nerezonanță  $I$  și curentul  $I_0$  la rezonanță:

$$\frac{I}{I_0} = U_b \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} = \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)^2} \quad (9.134)$$

unde  $\varepsilon = \omega / \omega_0 = f / f_0$ .

Curbele de rezonanță (fig. 9.31) se obțin reprezentând raportul  $I / I_0$  în funcție de  $\varepsilon$ . Analizând forma acestor curbe, se remarcă faptul că la rezonanță, când  $\varepsilon = 1$ , curentul din circuit are valoarea minimă,  $I = I_0$ , ceea ce înseamnă că impedanța circuitului este maximă,  $Z_0 = R$ . În cazul particular când  $R = \infty$ , curentul absorbit de la sursă este nul, iar impedanța echivalentă a circuitului este infinită (în circuit nu există pierderi, care să fie acoperite de sursă, iar circuitul se numește oscilant ideal).

Fenomenul de rezonanță are aplicații în telecomunicații și electro-energetică, ca de exemplu:

- realizarea oscilatoarelor de înaltă frecvență utilizate la emițătoarele și receptoarele radio;
- realizarea telefoniei multiple, adică efectuarea concomitentă a mai multor convorbiri utilizând o singură pereche de conductoare, cu ajutorul filtrelor bazate pe circuite rezonante;
- măsurarea frecvenței și a lungimii de undă a oscilațiilor în radiotehnică;
- compensare factorului de putere în instalațiile de alimentare a receptoarelor de energie electrică, prin montarea în paralel a unor condensatoare.

## 9.10. TEOREME ȘI METODE DE REZOLVARE A CIRCUITELOR DE CURENT ALTERNATIV

### 9.10.1. METODA TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

Pentru utilizarea practică a metodei se procedează în felul următor:

- se stabilește numărul de noduri  $N$  și numărul de laturi  $L$ ;
- se atribuie curenților din laturi sensuri de referință arbitrare;
- se aleg ochiurile independente și sensurile de referință pentru ele;
- se calculează expresiile în complex ale impedanțelor laturilor și ale t.e.m. date;
- se scriu cele  $N-1$  ecuații pentru noduri și cele  $L-N+1$  ecuații pentru ochiuri și se rezolvă sistemul astfel obținut;
- se determină valorile instantanee ale mărimilor necunoscute;
- se face o verificare a calculelor. În acest scop:
  - se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru un ochi nou, nefolosit la scrierea ecuațiilor;
  - se verifică bilanțul puterilor, separat pentru puterile active și separat pentru puterile reactive. Puterea reactivă absorbită de inductanțele mutuale este dată de relația:

$$Q = 2\omega L_{kj} I_k I_j \cos(\phi_k - \phi_j) \quad (9.135)$$

luate cu plus, dacă curenții  $I_k$  și  $I_j$  au același sens față de bornele polarizate și cu minus, dacă au sensuri contrare.

### 9.10.2. METODA SUPERPOZIȚIEI

Curentul electric din orice latură a unei rețele electrice complete, în care există mai multe generatoare, este egal cu suma algebrică a curenților produși de fiecare sursă în parte, dacă ar acționa singură în rețea, celelalte surse fiind pasivizate.

Pentru rezolvarea unei rețele cu această metodă se procedează astfel:

- se anulează t.e.m. ale tuturor generatoarelor din rețea, cu excepția unuia (păstrând impedanțele lor interioare) și se calculează curenții din rețeaua mai simplă obținută în acest mod;
- se repetă aceste operații pentru fiecare t.e.m. în parte;
- se calculează curenții reali prin însumarea algebrică a curenților obținuți anterior în fiecare latură:

$$I_j = \sum_{k=1}^L I_{jk} ; \quad (j=1, 2, \dots, L) \quad (9.136)$$

### 9.10.3. METODA TRANSFIGURĂRII

Se numește **transfigurare** operația prin care o porțiune de rețea electrică este înlocuită cu alta, de regulă mai simplă, care îi este echivalentă din punct de vedere al interacțiunii cu restul rețelei. Două circuite, care se pot înlocui reciproc se numesc circuite echivalente, iar reprezentările lor în desene se numesc scheme echivalente.

Stabilirea impedanțelor și admitanțelor echivalente reprezintă un exemplu de transfigurare, utilizat în cazul circuitelor dipolare pasive. Se consideră trei elemente dipolare, pasive conectate în stea și trei elemente dipolare pasive conectate în triunghi. **Conexiunea în stea** se obține conectând câte un capăt al fiecărui element la câte o bornă de acces, iar capetele rămase se conectează împreună într-un nod numit "neutru". **Conexiunea în triunghi** se obține conectând câte un capăt (de început) al fiecărui element la câte o bornă de acces, iar celălalt capăt (de sfârșit) la începutul elementului următor (sau anterior, dar la fel pentru toate cele trei elemente).

Pentru transfigurarea stea-triunghi (fig. 9.32) se utilizează relațiile:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} ; \\ Z_{23} &= Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} ; \\ Z_{31} &= Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 Z_1}{Z_2} \end{aligned} \quad (9.137)$$

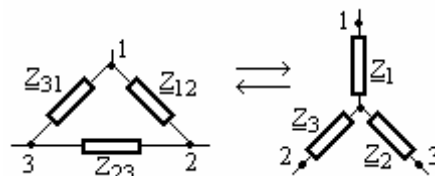


Fig. 9.32 Transfigurarea stea-triunghi

Relațiile pentru transfigurarea triunghi-stea sunt următoarele:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23} \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \quad (9.138)$$

#### 9.10.4. TEOREMELE GENERATOARELOR ECHIVALENTE

Teoremele generatoarelor echivalente stabilesc două scheme echivalente posibile pentru un circuit dipolar activ (fig. 9.33 a): o schemă cu generator de tensiune (fig. 9.33 b) sau o schemă cu generator de curent (fig. 9.33 c).

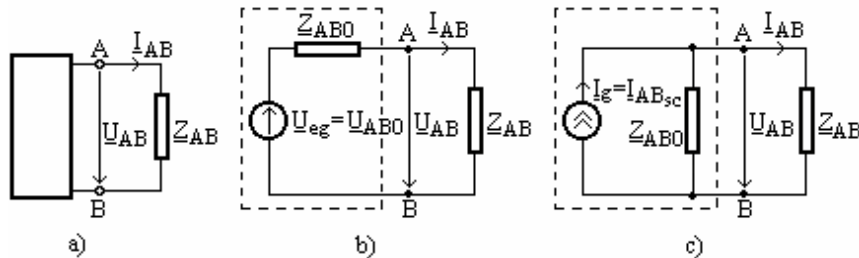


Fig. 9.33 Generatoarele echivalente cu dipolul activ

**Teorema generatorului de tensiune echivalent** afirmă că un dipol activ este echivalent cu un generator de tensiune cu t.e.m.  $\underline{U}_{eg}$  egală cu tensiunea la borne la funcționarea în gol ( $\underline{U}_{AB0}$ ) și cu impedanța interioară egală cu impedanța echivalentă a dipolului pasivizat ( $\underline{Z}_{AB0}$ ).

Această teoremă se utilizează pentru calculul curentului dintr-o latură **AB** a unei rețele electrice liniare fără cuplaje magnetice cu exteriorul. Curentul din latura **AB** este dat de relația:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}} \quad (9.139)$$

unde  $\underline{Z}_{AB}$  este impedanța complexă a laturii **AB**.

În mod practic se procedează în felul următor:

- se elimină latura respectivă din rețea și se calculează, în aceste condiții, tensiunea complexă  $\underline{U}_{AB0}$  și impedanța complexă  $\underline{Z}_{AB0}$ ;
- cu ajutorul relației (9.139) se determină curentul complex necunoscut;
- se calculează valoarea efectivă și instantanee a curentului.

**Teorema generatorului de curent echivalent** afirmă că dipolul activ este echivalent cu o sursă de curent, care are curentul injectat  $\underline{I}_g$  egal cu curentul de scurtcircuit al bornelor dipolului ( $\underline{I}_{ABsc}$ ) și impedanța interioară egală cu impedanța echivalentă a dipolului pasivizat ( $\underline{Z}_{AB0}$ ).

Teoremă se utilizează pentru calculul căderii de tensiune pe o latură **AB** a unei rețele electrice liniare fără cuplaje magnetice cu exteriorul. Căderea de tensiune pe latura **AB** este dat de relația:

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{ABsc}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}_{AB0}} \quad (9.140)$$

unde  $\underline{Y}_{AB} = 1/\underline{Z}_{AB}$  este admitanța complexă a laturii **AB**, iar  $\underline{Y}_{AB0} = 1/\underline{Z}_{AB0}$ .

### 9.10.5. TEOREMA LUI VASCHY

**Teorema lui Vaschy se enunță astfel: dacă în toate laturile care se întâlnesc într-un nod al unei rețele se introduc generatoare ideale de tensiune, având t.e.m. egale și la fel orientate față de nod (fig. 9.34), curenții din rețea nu se schimbă.**

Teorema se demonstrează scriind teorema a doua alui Kirchhoff pe orice ochi care trece prin nodul considerat. Deoarece la parcurgerea ochiului se întâlnesc două surse nou introduse, cu t.e.m. egale și de semn opus, care dau suma nulă, ecuația obținută nu este influențată de prezența acestor surse. Cu ajutorul teoremei lui Vaschy se pot transfera surse între laturi concurente într-un nod, operație care uneori poate conduce la simplificarea calculelor.

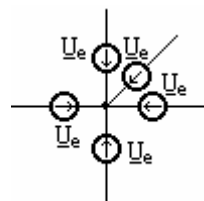


Fig. 9.34 Figură explicativă la teorema lui Vaschy

### 9.10.6. TEOREMA COMPENSAȚIEI

**Orice latură pasivă necuplată inductiv cu altele, având impedanța proprie  $\underline{Z}$  și fiind parcursă de curentul  $\underline{I}$  (fig. 9.35 a) poate fi înlocuită cu o sursă ideală de tensiune cu t.e.m.  $\underline{U}_e = \underline{Z}\underline{I}$ , cu sens opus curentului  $\underline{I}$  (fig. 9.35 b), fără să se schimbe curenții din rețea.**

Demonstrația este următoarea: în ambele situații tensiunea la bornele laturii este aceeași, egală cu  $\underline{Z}\underline{I}$ , cu sens de referință asociat sensului curentului, după regula de la receptoare.

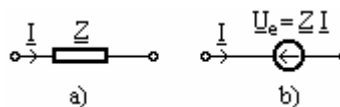


Fig. 4.35 Notății la teorema compensației

### 9.10.7. METODA CURENȚILOR CICLICI

Rețeaua electrică se consideră ca fiind o suprapunere de ochiuri independente, fiecare ochi fiind parcurs de un curent propriu numit curent ciclic sau curent de contur.



Sistemul de  $q = L - N + 1$  ecuații pentru determinarea curenților ciclici este analog cu cel utilizat în curent continuu, rezistențele fiind înlocuite prin impedanțe complexe:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}_{1q} \underline{I}'_q &= \underline{U}'_{e1} \\ \underline{Z}_{21} \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}_{2q} \underline{I}'_q &= \underline{U}'_{e2} \\ \dots &\dots \\ \underline{Z}_{q1} \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{q2} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}_{qq} \underline{I}'_q &= \underline{U}'_{eq} \end{aligned} \right\} \quad (9.141)$$

unde:

$\underline{Z}_{jj}$  este impedanța complexă proprie ochiului  $j$ , fiind egală cu suma impedanțelor complexe proprii ale laturilor care aparțin ochiului  $j$  adunată cu suma algebrică a impedanțelor complexe mutuale dintre laturile ochiului. Deoarece  $\underline{L}_{kj} = \underline{L}_{jk}$ , la scrierea acestei sume fiecare inductanță va intra de două ori. Semnul acestora este determinat de modul cum se asociază sensul de referință al ochiului considerat cu bornele polarizate ale celor două bobine, fiecare neconcordanță însemnând o schimbare de semn.

$\underline{Z}_{jk}$  este impedanța complexă de cuplaj a ochiurilor  $j$  și  $k$ , fiind egală cu suma algebrică a impedanțelor complexe proprii ale laturilor comune ochiurilor  $j$  și  $k$ : cu semnul (+) dacă sensurile de referință ale ochiurilor coincid în laturile respective, și cu semnul (-) în caz contrar, adunată cu suma impedanțelor complexe mutuale dintre o latură aparținând ochiului  $j$  și o latură a ochiului  $k$ . Semnul unei impedanțe complexe mutuale depinde de concordanța între sensurile de referință ale ochiurilor  $j$  și  $k$  cu bornele polarizate ale celor două bobine, fiecare neconcordanță însemnând o schimbare de semn.

$\underline{U}'_{ej}$  este suma algebrică a t.e.m. complexe din laturile ochiului  $j$  și se numește t.e.m. complexă de ochi.

Pentru aplicarea acestei metode se procedează în felul următor:

- se aleg ochiurile independente și sensurile lor de referință;
- se calculează impedanțele complexe proprii  $\underline{Z}_{jj}$  și cele mutuale  $\underline{Z}_{jk}$ , precum și t.e.m. complexe de ochi  $\underline{U}'_{ej}$ ;
- se scriu ecuațiile curenților ciclici (relațiile 9.136) și se rezolvă sistemul de ecuații obținut în raport cu acești curenți;
- se aleg sensurile de referință ale curenților prin laturi și se calculează acești curenți:

$$\underline{I}_1 = \sum \underline{I}'_q ; \quad (l = 1, 2, \dots, L) \quad (9.142)$$

În relația (9.142) curenții ciclici intră cu semnul (+) dacă sensul lor coincide cu sensul curentului din latură și cu semnul minus (-) cei de sens contrar.

- se determină valorile efective și expresiile valorilor instantanee ale curenților din laturi, din expresiile lor în complex.

### 9.10.8. METODA POTENȚIALELOR DE NODURI

Necunoscutele utilizate în metoda potențialelor de noduri sunt tensiunile dintre fiecare nod și ultimul nod (al  $N$ -lea) luat ca referință. Aceste tensiuni se numesc potențiale de noduri și se notează cu  $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$ . Se consideră o altură  $k$ , cuprinsă între nodurile  $p$  și  $q$  (fig. 9.36). Tensiunea  $U_{bk}$  la bornele laturii  $k$ , se exprimă prin diferența a două potențiale de noduri:

$$U_{bk} = V_p - V_q \quad (9.143)$$

Curentul prin latura  $k$  este dat de relația:

$$I_k = Y_k U_{bk} + Y_k U_{ek} = Y_k (V_p - V_q) + Y_k U_{ek} \quad (9.144)$$

Scriind ecuația corespunzătoare primei teoreme a lui Kirchhoff în nodul  $p$ , rezultă relația:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in p} I_k &= \sum_{k \in p} Y_k (V_p - V_q) + \sum_{k \in p} Y_k U_{ek} = 0 \Rightarrow \\ V_p \sum_{k \in p} Y_k - \sum_{k \in p} Y_k V_q + \sum_{k \in p} Y_k U_{ek} &= 0 \end{aligned} \quad (9.145)$$

Se scrie ecuația (9.145) pentru fiecare nod cu excepția nodului de referință și se obține un sistem de  $N - 1$  ecuații, cu necunoscutele potențialele nodurilor.

Metoda potențialelor de noduri se aplică astfel:

- se alege nodul de referință și nodurile independente pentru care se vor scrie ecuațiile de noduri;
- se calculează admitanțele laturilor, curenții de scurtcircuit ai laturilor și curenții injectați în noduri;
- se calculează admitanțele proprii și admitanțele de cuplaj dintre laturi;
- se scriu ecuațiile potențialelor de noduri;
- se rezolvă sistemul obținut în raport cu potențialele nodurilor;
- se aleg sensuri de referință pentru curenții din laturi și se calculează valorile acestora;
- se verifică rezultatele.

### 9.10.9 FORME MATRICIALE

**Metodele matriciale** de rezolvare a rețelelor electrice sunt utilizate în cazul rețelelor complexe cu un număr mare de laturi și de noduri, realizându-se algoritmi de rezolvare, care permit utilizarea calculatorului la rezolvarea acestora.

Se consideră o rețea electrică cu  $L$  laturi,  $N$  noduri și  $O$  ochiuri.

În regim permanent sinusoidal relațiile de legătură între curenții din laturi și curenții ciclici, se pot exprima matricial astfel:

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{I}'] \quad (9.146)$$

unde  $[\mathbf{I}]$  este matricea curenților din laturile rețelei, iar  $[\mathbf{I}']$  este matricea curenților ciclici sau de contur:

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_L \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{I}'] = \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ \dots \\ I'_O \end{bmatrix} \quad (9.147)$$

Matricea de conexiune  $[\mathbf{C}]$  (matricea apartenenței laturilor la ochiuri) are  $L$  linii și  $O$  coloane. Un element al matricii,  $C_{kj}$  ( $k = 1, 2, \dots, L$ ;  $j = 1, 2, \dots, O$ ), numit coeficient de apartenență a laturii  $k$  la ochiul  $j$  poate avea valorile:

$$C_{kj} = \begin{cases} 0; & k \notin j \\ +1; & k \in j; \text{ sensul lui } I_k \text{ coincide cu sensul lui } I'_j \\ -1; & k \in j; \text{ sensul lui } I_k \text{ este invers sensului lui } I'_j \end{cases} \quad (9.148)$$

În regim permanent sinusoidal, relațiile de legătură între tensiunile la bornele laturilor și tensiunile între nodurile rețelei și un nod de referință, se scriu matricial astfel:

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{U}'] \quad (9.149)$$

unde  $[\mathbf{U}]$  este matricea coloană a tensiunilor la bornele laturilor; iar  $[\mathbf{U}']$  – matricea coloană a tensiunilor între nodurile rețelei și nodul de referință;  $[\mathbf{K}]$  – matricea de conexiune, de apartenență a laturilor la noduri (are  $L$  linii și  $N - 1$  coloane).

Un element al matricii,  $K_{kj}$  ( $k = 1, 2, \dots, L$ ;  $j = 1, 2, \dots, N - 1$ ), numit coeficient de apartenență a laturii  $k$  la nodul  $j$  poate avea valorile:

$$K_{kj} = \begin{cases} 0; & k \notin j \\ +1; & k \in j; \quad I_k \text{ este orientat dinspre nodul } j \\ -1; & k \in j; \quad I_k \text{ este orientat spre nodul } j \end{cases} \quad (9.150)$$

### **Forma matricială a teoremelor lui Kirchhoff**

Teorema întâi și teorema a doua a lui Kirchhoff se exprimă matricial astfel:

$$[\mathbf{K}]_t \cdot [\mathbf{I}] = [0] \quad (9.151)$$

$$[\mathbf{C}]_t \cdot [\mathbf{U}] = [0] \quad (9.152)$$

unde  $[\mathbf{K}]_t$  și  $[\mathbf{C}]_t$  sunt transpusele matricilor  $[\mathbf{K}]$  și  $[\mathbf{C}]$ .

Ecuatiile laturilor unei rețele electrice se exprimă matricial cu următoarea relație:

$$[\underline{U}_e] + [\underline{U}] = [\underline{Z}] \cdot [\underline{I}] \quad (9.153)$$

unde:  $[\underline{U}_e]$  este matricea coloană a t.e.m. din laturile rețelei electrice;  $[\underline{Z}]$  – matricea pătrată a impedanțelor proprii și mutuale ale laturilor rețelei:

$$[\underline{U}_e] = \begin{bmatrix} \underline{U}_{e1} \\ \underline{U}_{e2} \\ \dots \\ \underline{U}_{eL} \end{bmatrix}; \quad [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dots & \underline{Z}_{1L} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dots & \underline{Z}_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Z}_{L1} & \underline{Z}_{L2} & \dots & \underline{Z}_{LL} \end{bmatrix} \quad (9.154)$$

Dacă nu există impedanțe mutuale, matricea  $[\underline{Z}]$  este o matrice diagonală..

### **Forma matricială a metodei curenților ciclici**

Forma matricială a metodei curenților ciclici se exprimă cu relația:

$$[\underline{Z}'] \cdot [\underline{I}'] = [\underline{U}_e'] \quad (9.155)$$

unde:  $[\underline{Z}']$  este matricea impedanțelor proprii și de cuplaj ale ochiurilor rețelei electrice;  $[\underline{U}_e']$  – matricea t.e.m. de contur;  $[\underline{I}']$  – matricea curenților ciclici sau de contur.

Matricea curenților din laturi se obține cu relația:

$$[\underline{I}] = [\underline{C}] \cdot [\underline{I}'] = [\underline{C}] \cdot [\underline{Z}']^{-1} \cdot [\underline{U}_e'] \quad (9.156)$$

Pentru determinarea matricii  $[\underline{I}]$  trebuie determinate matricile  $[\underline{Z}']$  și  $[\underline{U}_e']$ . Se presupun cunoscute matricile  $[\underline{C}]$ ,  $[\underline{Z}]$  și  $[\underline{U}_e]$ , care se stabilesc ușor în funcție de configurația și elementele rețelei electrice.

Dacă se înmulțesc ambii termeni ai relației (9.153) cu matricea  $[\underline{C}]_t$  se obține:

$$[\underline{C}]_t \cdot [\underline{U}_e] + [\underline{C}]_t \cdot [\underline{U}] = [\underline{C}]_t \cdot [\underline{Z}] \cdot [\underline{I}] \quad (9.157)$$

Ținând cont de relațiile (9.146) și (9.152) se obține:

$$[\underline{C}]_t \cdot [\underline{U}_e] = [\underline{C}]_t \cdot [\underline{Z}] \cdot [\underline{C}] \cdot [\underline{I}'] \quad (9.158)$$

Comparând relațiile (9.155) și (9.158) rezultă:

$$[\underline{U}_e'] = [\underline{C}]_t \cdot [\underline{U}_e]; \quad [\underline{Z}'] = [\underline{C}]_t \cdot [\underline{Z}] \cdot [\underline{C}] \quad (9.159)$$

Algoritmul de rezolvare a unei rețele electrice utilizând forma matricială a metodei curenților ciclici este următorul:

- se formează matricea de conexiune  $[\underline{C}]$  și transpusa ei  $[\underline{C}]_t$ ;
- se stabilesc matricile  $[\underline{Z}]$  și  $[\underline{U}_e]$ ;
- se determină cu relațiile (9.159) matricile  $[\underline{U}_e']$  și  $[\underline{Z}']$ ;
- se calculează inversa matricii  $[\underline{Z}']$ ;
- se determină matricea  $[\underline{I}']$  și respectiv, matricea  $[\underline{I}]$ .

Puterea complexă corespunzătoare surselor de tensiune din rețea se scrie matricial astfel:

$$\underline{S} = [\underline{U}_e]_t \cdot [\underline{I}]^* = [\underline{U}_e']_t \cdot [\underline{I}']^* \quad (9.160)$$

**Forma matricială a metodei potențialelor la noduri**

Metoda potențialelor la noduri se aplică în mod obișnuit pentru rețelele electrice fără cuplaje magnetice.

Sistemul de ecuații corespunzător formei matriciale a metodei potențialelor la noduri se scrie matricial astfel:

$$[Y'] \cdot [V] = [I_{sc}] \quad \text{sau} \quad [Y'] \cdot [U'] = [I_{sc}] \quad (9.161)$$

unde:  $[Y']$  este matricea admitanțelor la noduri;  $[V]$  – matricea potențialelor la noduri;  $[U']$  – matricea tensiunilor la noduri;  $[I_{sc}]$  – matricea curenților de scurtcircuit injectați la noduri.

Matricea  $[U']$  se calculează cu relația: (9.162)

$$[U'] = [Y']^{-1} \cdot [I_{sc}]$$

În cazul în care nu există cuplaje magnetice, ținând cont de relația (9.153), ecuațiile curenților din laturile unei rețele electrice se pot exprima matricial astfel:

$$[I] = [Y] \cdot [U] + [Y] \cdot [U_e] \quad (9.163)$$

unde  $[Y]$  matricea admitanțelor laturilor rețelei este dată de relația:

$$[Y] = [Z]^{-1} \quad (9.164)$$

Pentru determinarea matricii  $[U']$  trebuie determinate matricile  $[Y']$  și  $[I_{sc}]$ . Se presupun cunoscute matricile  $[K]$ ,  $[Y]$  și  $[U_e]$ , care se stabilesc ușor în funcție de configurația și elementele rețelei electrice.

Dacă se înmulțesc ambii termeni ai relației (9.163) cu matricea  $[K]_t$  și dacă se ține cont de relațiile (9.149) și (9.151) se obține:

$$[0] = [K]_t \cdot [Y] \cdot [K] \cdot [U'] + [K]_t \cdot [Y] \cdot [U_e] \quad (9.165)$$

Comparând relațiile (4.162) și (4.166) rezultă:

$$[I_{sc}] = -[K]_t \cdot [Y] \cdot [U_e]; \quad [Y'] = [K]_t \cdot [Y] \cdot [K] \quad (9.166)$$

Algoritmul de rezolvare a unei rețele electrice utilizând forma matricială a metodei potențialelor la noduri este următorul:

- se formează matrice de conexiune  $[K]$  și transpusa ei  $[K]_t$ ;
- se stabilesc matricile  $[Y]$  și  $[U_e]$ ;
- se determină cu relațiile (9.166) matricile  $[I_{sc}]$  și  $[Y']$ ;
- se calculează inversa matricii  $[Y']$ ;
- se determină cu relația (9.162) matricea  $[U']$ ;
- se determină cu relația (9.149) matricea  $[U]$ ;
- se calculează cu relația (9.163) matricea  $[I]$ .

## 10. CIRCUITE ELECTRICE TRIFAZATE

Transmiterea energiei electromagnetice de la locul de producere a acesteia (centrale electrice) la locuri de utilizare se face prin linii electrice. În cazurile cele mai simple, transmisia se face cu o linie electrică cu două conductoare de alimentare la plecare cu o t.e.m. alternativă. Acest sistem de transmisie reprezintă sistemul monofazat. În cazul în care linia electrică are 3 sau 4 conductoare, alimentate de 3 t.e.m. alternative de aceeași frecvență dar defazate între ele, transmisia se realizează printr-un sistem trifazat.

Circuitele trifazate realizează un transport de energie electrică mai economic și permit utilizarea în acționările electrice a motoarelor asincrone trifazate, mai simple și mai economice decât cele monofazate.

### 10.1. SISTEME TRIFAZATE SIMETRICE

Se numește **sistem trifazat un ansamblu de trei mărimi sinusoidale de același fel, de aceeași frecvență și defazate între ele**. Dacă mărimile au valorile efective egale și defazate între ele astfel încât mărimea a doua să fie în urma primei mărimi cu  $2\pi/3$  radiani și mărimea a treia în urma celei de a doua tot  $2\pi/3$  cu radiani, sistemul se numește **trifazat simetric direct**. Valorile instantanee ale mărimilor unui astfel de sistem vor fi:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}A \sin(\omega t + \beta); \\ a_2 &= \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}\right); \\ a_3 &= \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + \beta - \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + \beta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (10.1)$$

Dacă mărimile au valorile efective egale, dar fiecare mărime este defazată înaintea precedentei cu  $2\pi/3$ , sistemul se numește **sistem trifazat simetric invers**. Valorile instantanee ale mărimilor sunt următoarele:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}A \sin(\omega t + \beta); \\ a_2 &= \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + \beta + \frac{2\pi}{3}\right); \\ a_3 &= \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + \beta + \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (10.2)$$

În figura 10.1 sunt reprezentate mărimile unui sistem trifazat simetric direct, respectiv invers. În continuare se vor trata numai sistemele trifazate simetrice de succesiune directă, tratarea sistemelor trifazate simetrice de succesiune inversă făcându-se într-un mod analog. Un sistem trifazat simetric direct de mărimi sinusoidale se poate scrie în complex sub forma:

$$\begin{aligned}\underline{A}_1 &= A e^{j\beta} = \underline{A}; \\ \underline{A}_2 &= A e^{j(\beta-2\pi/3)} = \underline{A} e^{-j2\pi/3}; \\ \underline{A}_3 &= A e^{j(\beta+2\pi/3)} = \underline{A} e^{j2\pi/3}\end{aligned}\quad (10.3)$$

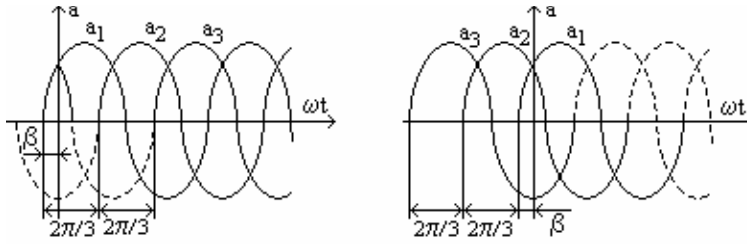


Fig. 10.1 a) Sistem trifazat simetric de succesiune directă; b) sistem trifazat simetric de succesiune inversă

Se notează cu **a** numărul complex:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\quad (10.4)$$

numit **operator de rotație** sau **operatorul lui Steinmetz**. Acest operator are modulul egal cu unitatea și argumentul egal cu  $2\pi/3$ . Înmulțirea cu **a** a unui fazor înseamnă rotirea acestui fazor cu  $2\pi/3$  radiani în sens trigonometric.

Pentru operatorul de rotație se verifică următoarele relații:

$$a^2 = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^3 = 1, \quad 1 + a + a^2 = 0\quad (10.5)$$

Cu operatorul de rotație, mărimile sistemului trifazat simetric direct se scriu în complex astfel:

$$\underline{A}_1 = A, \quad \underline{A}_2 = a^2 \underline{A}, \quad \underline{A}_3 = a \underline{A}\quad (10.6)$$

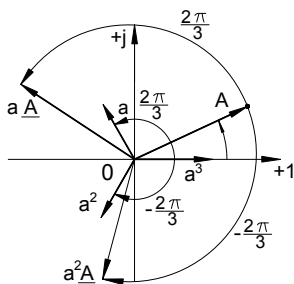


Fig. 10.2 Fazorii unui sistem trifazat simetric direct

Adunând relațiile (10.6), se obține:

$$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 = \underline{A}(1 + a + a^2) = 0\quad (10.7)$$

adică suma mărimilor unui sistem trifazat simetric este nulă atât în complex, cât și în valori instantanee.

În planul complex, cele trei mărimi simetrice directe se reprezintă prin trei fazori egali ca modul, dar roțiți cu  $2\pi/3$  radiani în sens trigonometric (fig. 10.2).

Un sistem trifazat de mărimi electrice este **nesimetric** dacă valorile efective ale celor trei mărimi sinusoidale sunt diferite, sau dacă

defazajele dintre ele sunt diferite de  $2\pi/3$  radiani.

Receptoarele trifazate pot fi:

- echilibrate, când impedanțele complexe pe cele trei faze sunt egale între ele;
- dezechilibrate, când au impedanțe complexe diferite pe cele trei faze.

## 10.2 PRODUCEREA TENSIUNILOR ELECTROMOTOARE TRIFAZATE SIMETRICE

Dacă se fixează pe același ax trei cadre dreptunghiulare, bobinate cu  $N$  spire fiecare, având planurile decalate succesiv cu câte  $2\pi/3$  (fig. 10.3) și dacă se rotesc cu turația  $n$  [rot/s] în jurul unei axe paralele cu una din laturi, într-un câmp magnetic omogen și perpendicular pe axa de rotație, de inducție  $B_0$ , se obține un sistem trifazat simetric de t.e.m.

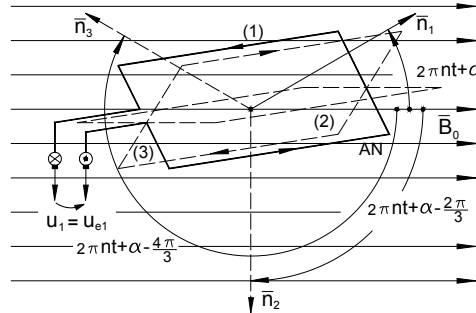


Fig. 10.3 Producerea unui sistem trifazat simetric de tensiuni electromotoare

Pentru simplificare, în figura 10.3 s-a figurat numai o singură spiră și se va studia pentru început t.e.m. indusă în cadrul dreptunghiular **1**. Dacă unghiul făcut de normala  $\vec{n}_1$  la planul spirei **1** este la momentul  $t = 0$ ,  $\alpha_0 = \pi n t + \alpha_1$ , iar  $A_s$  este aria spirei, fluxul magnetic instantaneu prin cele  $N$  spire ale cadrului va fi:

$$\phi_1 = N A_s B_0 \cos(2\pi n t + \alpha_1) \quad (10.8)$$

rezultând pentru t.e.m. indusă în cadru relația:

$$u_{e1} = -\frac{d\phi_1}{dt} = 2\pi n N A_s B_0 \sin(2\pi n t + \alpha_1) = \sqrt{2} U_e \sin(\omega t + \alpha) \quad (10.9)$$

Această t.e.m. are pulsația, faza inițială și valoarea efectivă date de relațiile:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n; \quad \alpha = \alpha_1 = \langle \vec{n}_1, \vec{B}_0 \rangle_{t=0}; \quad U_e = 4,44f N \phi_{f0} \quad (10.10)$$

unde  $\phi_{f0} = A_s B_0$  este valoarea maximă a fluxului fascicular al unei spire. T.e.m.  $u_{e1}$  poate alimenta un circuit exterior prin două perii (**1** și **1'**) în contact



cu inelele colectoare, fixate pe axul de rotație și conectate la capetele înfășurării cadrului.

În cazul celor trei cadre dreptunghiulare, fluxurile magnetice instantanee care vor traversa suprafețele celor trei cadre vor diferi numai prin unghiurile făcute de normalele planurilor cadrelor respective cu direcția liniilor de câmp magnetic în momentul inițial ( $t = 0$ ). Aceste unghiuri vor fi:

$$\alpha_1 = \alpha; \quad \alpha_2 = \alpha - 2\pi/3; \quad \alpha_3 = \alpha - 4\pi/3 = \alpha + 2\pi/3 \quad (10.11)$$

Pentru t.e.m. induse în cele trei cadre se obțin expresiile:

$$u_{e1} = \sqrt{2}U_e \sin(\omega t + \alpha); \quad u_{e2} = \sqrt{2}U_e \sin(\omega t + \alpha - 2\pi/3);$$

$$u_{e3} = \sqrt{2}U_e \sin(\omega t + \alpha - 4\pi/3) = \sqrt{2}U_e \sin(\omega t + \alpha + 2\pi/3) \quad (10.12)$$

unde: valoarea efectivă  $U_e$ , pulsația  $\omega$  și faza inițială  $\alpha$  sunt date de relațiile (10.10). Relațiile (10.12) arată că t.e.m. induse în cele trei cadre formează un sistem trifazat simetric direct.

Generatoarele de curent alternativ trifazat (generatoarele sincrone) se construiesc pe baza acestui principiu, cu următoarele deosebiri mai importante:

- în locul celor trei cadre dreptunghiulare există trei înfășurări mai complexe, decalate între ele spațial și numite faze;
- înfășurările sunt fixe, iar câmpul magnetic inductor este un câmp magnetic învârtitor obținut pe cale mecanică.

### 10.3 CONEXIUNILE SISTEMELOR TRIFAZATE

În cazul sistemelor trifazate există următoarele conexiuni: conexiunea independentă, conexiunea în stea (cu conductor neutru și fără conductor neutru) și în triunghi.

#### Conexiunea independentă

Fiecare fază a unui generator trifazat poate alimenta câte un receptor independent. Rezultă astfel, că generatorul poate alimenta trei receptoare diferite prin intermediul a șase conductoare de legătură (fig. 10.4). se spune că în acest caz, fazele generatorului funcționează independent.

În cazul în care impedanțele complexe ale receptorului trifazat sunt egale (**receptor echilibrat**):

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = Z e^{j\varphi} \quad (10.13)$$

rezultă că și curenții din cele trei circuite vor avea aceleași valori efective și aceleași defazaje față de t.e.m. care i-au produs:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi \quad (10.14)$$

Dacă t.e.m. formează un sistem simetric direct și receptorul este echilibrat, curenții din cele trei faze ale generatorului vor forma de asemenea un sistem simetric direct:

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha - \varphi); \\ i_2 &= \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha - \varphi - 2\pi/3); \\ i_3 &= \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha - \varphi + 2\pi/3) \end{aligned} \quad (10.15)$$

Puterea transmisă de un conductor la un factor de putere egal cu unitatea este dată de relația:

$$P = \frac{U_k I_k}{2}, \text{ pentru } k = 1, 2, 3 \quad (10.16)$$

Fiecare circuit independent se mai numește și circuit monofazat. Acest sistem de trei circuite monofazate independente nu este utilizat în practică, deoarece prin conexiuni speciale se poate micșora numărul conductoarelor necesare transmisiei energiei electrice la trei sau patru, obținându-se astfel un circuit (rețea) trifazat, la care puterea transmisă pe un conductor este mai mare decât cea transmisă în conexiunea independentă (rel. 10.16).

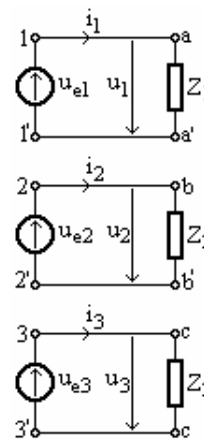


Fig. 10.4 Conexiunea independentă

### Conexiunea în stea

Se leagă împreună bornele  $1'$ ,  $2'$  și  $3'$  ale generatorului formând un punct comun  $O$  – numit neutrul sau nulul generatorului și respectiv, bornele  $a'$ ,  $b'$  și  $c'$  ale receptorului, formând un punct comun  $N$  – numit neutrul sau nulul receptorului. Cele trei linii de întoarcere  $a'1'$ ,  $b'2'$  și  $c'3'$  ale celor trei circuite monofazate se pot înlocui printr-un singur conductor  $NO$ , numit **conductor neutru**. Conductoarele  $a1$ ,  $a2$  și  $a3$  se numesc **conductoare de linie**. Se obține astfel un sistem trifazat cu conexiunea în stea atât la generator cât și la receptor (fig. 10.5).

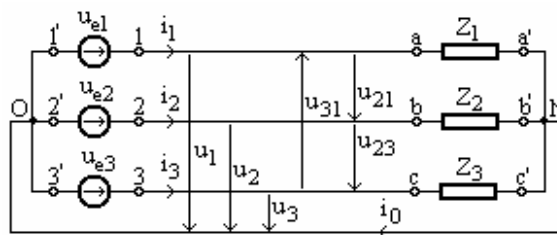


Fig. 10.5 Tensiunile și curenții la conexiunea în stea

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului  $N$ , rezultă conductorul din conductorul neutru:

$$i_o = i_1 + i_2 + i_3 \quad (10.17)$$

Dacă sistemul de t.e.m. este simetric iar receptorul este echilibrat,

sistemul de curenți absorbiți de receptor este un sistem simetric și conform relației (10.7) curentul din conductorul neutru este nul:

$$i_o = 0 \quad (10.18)$$

Pe baza relației (10.18) rezultă că pentru sistemele trifazate în stea, cu receptor trifazat echilibrat și tensiuni la borne simetrice, conductorul neutru poate lipsi. În acest caz, transportul energiei electrice se va face numai cu ajutorul a trei conductoare.

La conexiunea în stea se disting două sisteme de tensiuni:

- **tensiunile de fază**  $u_1$ ,  $u_2$  și  $u_3$  dintre un conductor de linie și conductorul de nul (tensiunile pe cele trei impedanțe ale receptorului);
- **tensiunile de linie**  $u_{12}$ ,  $u_{23}$  și  $u_{31}$  dintre două conductoare de linie. Aceste tensiuni se mai numesc și tensiuni între faze, deoarece conductoarele de linie se mai numesc în terminologia curentă, **faze**.

Din figura 10.5 rezultă că tensiunile de linie sunt egale cu diferențele tensiunilor de fază respective:

$$u_{12} = u_1 - u_2; \quad u_{23} = u_2 - u_3; \quad u_{31} = u_3 - u_1 \quad (10.19)$$

Trecând în complex relațiile (10.19), se obține:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2; \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3; \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 \quad (10.20)$$

Din relațiile (10.19) și (10.20) rezultă că suma tensiunilor de linie în valori instantanee sau în complex este nulă indiferent dacă sistemul este simetric sau nu:

$$u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0; \quad \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0 \quad (10.21)$$

Pe baza relațiilor (10.20) se pot reprezenta în planul complex, fazorii corespunzători acestor tensiuni de fază și de linie (fig. 10.6). Dacă sistemul de tensiuni de fază este simetric direct, triunghiul **1, 2, 3** este echilateral și tensiunea de linie complexă  $\underline{U}_{12}$  va fi:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \underline{U}_1 - a^2 \underline{U}_1 = \sqrt{3} \underline{U}_1 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \underline{U}_1 e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (10.22)$$

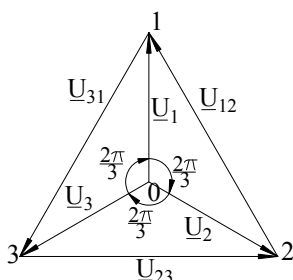


Fig. 10.6 Diagrama de fazori la conexiunea în stea

Din figura 10.6 se observă că și sistemul tensiunilor de linie este un sistem simetric direct. Fazorul tensiunii de linie  $\underline{U}_{12}$  se obține amplificând cu  $\sqrt{3}$  fazorul tensiunii de fază  $\underline{U}_1$  și rotindu-l cu un unghi de  $\pi/6$  radiani în sens trigonometric.

Introducând notațiile:

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_{23} = U_{31} = U_l \\ U_1 &= U_2 = U_3 = U_f \end{aligned} \quad (10.23)$$

din relația (10.22), pentru sisteme simetrice, rezultă:

$$U_1 = \sqrt{3}U_f \quad (10.24)$$

La conexiunea în stea cu receptor echilibrat, alimentată cu un sistem simetric de tensiuni, valoarea efectivă a tensiunilor de linie este de  $\sqrt{3}$  ori mai mare decât valoarea efectivă a tensiunilor de fază.

Conexiunea în stea cu fir neutru permite obținerea a două sisteme de tensiuni diferite, permițând funcționarea receptoarelor construite pentru tensiuni nominale diferite (de exemplu **380/220V**; **220/127V**). Rețeaua care nu are conductor neutru nu dispune decât de sistemul de tensiuni de linie. Tensiunile de linie standardizate în România sunt: **220, 380 și 500V**; **1, 3, 6, 10, 15, 35, 60, 110, 220 și 400kV**.

Curenții care străbat conductoarele de linie se numesc **curenți de linie** ( $I_l$ ), iar curenții din fazele generatorului sau receptorului se numesc **curenți de fază** ( $I_f$ ). În cazul conexiunii în stea, curenții de fază sunt egali cu cei de linie, iar în cazul unui sistem simetric de curenți:

$$I_l = I_f \quad (10.25)$$

adică valoarea efectivă a curenților de linie este egală cu valoarea efectivă a curenților de fază, pentru conexiunea stea echilibrată, alimentată cu tensiuni simetrice.

### **Conexiunea în triunghi**

Dacă se leagă sfârșitul unei faze a generatorului cu începutul fazei următoare (**1'** cu **2**, **2'** cu **3** și **3'** cu **1**), iar borna de sfârșit a fiecărui receptor la borna de început a receptorului de pe faza următoare (**a'** cu **b**, **b'** cu **c** și **c'** cu **a**) se obține și la generator și la receptor conexiunea în triunghi (fig. 10.7). În acest caz tensiunile de linie sunt egale cu tensiunile pe fazele generatorului sau receptorului.

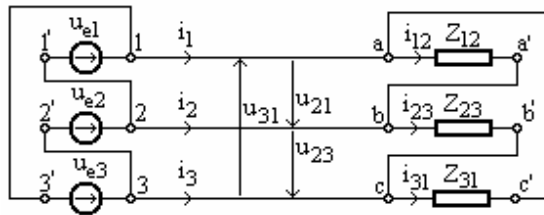


Fig. 10.7 Tensiunile și curenții la conexiunea în triunghi

În cazul sistemelor simetrice și receptor echilibrat, este adevărată relația:

$$U_l = U_f \quad (10.26)$$

Între curenții de linie ( $i_1$ ,  $i_2$  și  $i_3$ ) care străbat conductoarele de linie și curenții de fază ( $i_{12}$ ,  $i_{23}$  și  $i_{31}$ ) care străbat impedanțele consumatorului, există

următoarele relații deduse cu prima teoremă a lui Kirchoff aplicată nodurilor **1(a)**, **2(b)** și **3(c)** de la receptor:

$$i_1 = i_{12} - i_{31}; \quad i_2 = i_{23} - i_{12}; \quad i_3 = i_{31} - i_{23} \quad (10.27)$$

Trecând în complex relațiile (10.27) se obține:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} \quad (10.28)$$

Din relațiile (10.27) și (10.28) rezultă că suma curenților de linie în valori instantanee sau în complex este nulă indiferent dacă sistemul este simetric sau nu:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad (10.29)$$

Pe baza relațiilor (10.28) se pot reprezenta în planul complex fazorii corespunzători acestor curenți (fig. 10.8). Dacă sistemul de curenți de fază este simetric direct, triunghiul **1, 2, 3** este echilateral și curenții de linie vor forma și ei un sistem simetric direct. Curentul  $\underline{I}_1$  va fi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} (1 - a) = \sqrt{3} \underline{I}_{12} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \underline{I}_{12} e^{-j \frac{\pi}{6}} \quad (10.30)$$

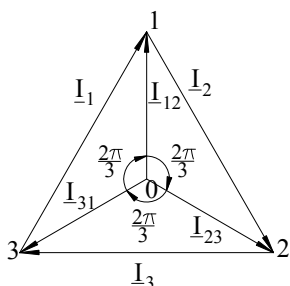


Fig. 10.8 Diagrama de fazori la conexiunea în triunghi

Fazorul curentului de linie  $\underline{I}_1$  este defazat în urma fazorului curentului de fază  $\underline{I}_{12}$  cu  $\pi/6$  radiani, iar modulul său este de  $\sqrt{3}$  ori mai mare. În cazul unui sistem simetric de curenți există următoarele relații între valorile efective ale curenților de linie  $\underline{I}_i$  și de fază  $\underline{I}_f$ :

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_f;$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_l; \quad I_l = \sqrt{3} I_f \quad (10.31)$$

Se pot realiza și conexiuni în triunghi la generator și în stea la receptor sau invers.

#### 10.4. PUTERILE ÎN REȚELE TRIFAZATE

Calculul puterilor în sistemele trifazate se face după aceleași principii ca la circuitele de curent alternativ monofazat. Puterile activă, reactivă și aparentă absorbite de receptorul trifazat vor fi egale cu sumele puterilor active, reactive sau aparente absorbite de fiecare fază în parte.

Dacă se consideră un receptor conectat în stea, cu tensiunile de fază  $u_1$ ,  $u_2$  și  $u_3$ , care formează, în general, un sistem nesimetric și curenții de fază (de linie)  $i_1$ ,  $i_2$  și  $i_3$  nesimetrici, defazați față de tensiunile corespunzătoare cu

unghiurile  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  și  $\varphi_3$ , expresiile puterilor activă, reactivă și respectiv, aparentă absorbite de receptor sunt următoarele:

$$\begin{aligned} P &= U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 \\ Q &= U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 \\ S &= U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3; \quad \underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* \end{aligned} \quad (10.32)$$

unde:  $U_1$ ,  $U_2$  și  $U_3$  sunt valorile efective ale tensiunilor de fază, iar  $I_1$ ,  $I_2$  și  $I_3$  sunt valorile efective ale curenților de fază (linie).

La conexiunea în triunghi, dacă  $u_{12}$ ,  $u_{23}$  și  $u_{31}$  sunt tensiunile pe fazele receptorului (egale cu tensiunile de linie), iar  $i_{12}$ ,  $i_{23}$  și  $i_{31}$  curenții de fază, defazați față de tensiunile corespunzătoare cu unghiurile  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{23}$  și  $\varphi_{31}$ , puterile activă, reactivă și aparentă absorbite de receptorul trifazat vor avea expresiile:

$$\begin{aligned} P &= U_{12} I_{12} \cos \varphi_{12} + U_{23} I_{23} \cos \varphi_{23} + U_{31} I_{31} \cos \varphi_{31} \\ Q &= U_{12} I_{12} \sin \varphi_{12} + U_{23} I_{23} \sin \varphi_{23} + U_{31} I_{31} \sin \varphi_{31} \\ S &= U_{12} I_{12} + U_{23} I_{23} + U_{31} I_{31}; \quad \underline{S} = \underline{U}_{12} \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} \underline{I}_{31}^* \end{aligned} \quad (10.33)$$

unde:  $U_{12}$ ,  $U_{23}$  și  $U_{31}$  sunt valorile efective ale tensiunilor de fază (de linie), iar  $I_{12}$ ,  $I_{23}$  și  $I_{31}$  sunt valorile efective ale curenților de fază.

Dacă sistemele de tensiuni și curenți sunt simetrice, rezultă următoarele relații:

- pentru conexiunea în stea:

$$\begin{aligned} U_1 = U_2 = U_3 = U_f = U_1 / \sqrt{3}; \quad I_1 = I_2 = I_3 = I_f = I_1; \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi \end{aligned} \quad (10.34)$$

- pentru conexiunea în triunghi:

$$\begin{aligned} U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_f = U_1; \quad I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_f = I_1 / \sqrt{3}; \\ \varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{31} = \varphi \end{aligned} \quad (10.35)$$

Ținând seama de relațiile (10.34) și (10.35) se constată că în sistemele simetrice și echilibrate, calculul puterilor se face cu aceleași relații, indiferent de conexiune:

$$\begin{aligned} P = 3U_f I_f \cos \varphi = \sqrt{3} U_1 I_1 \cos \varphi; \quad Q = \sqrt{3} U_1 I_1 \sin \varphi \\ S = \sqrt{3} U_1 I_1; \quad \underline{S} = 3 \underline{U}_1 \underline{I}_1^* \end{aligned} \quad (10.36)$$

În sistemele simetrice, echilibrate se pot utiliza relațiile cunoscute de la circuitele monofazate.

**Îmbunătățirea factorului de putere** vizează micșorarea sau compensarea puterii reactive și se poate realiza utilizând 3 condensatoare conectate ca în figura 10.9.

Pentru condensatoare montate în stea (fig. 10.9 a), valoarea capacității  $C_Y$  se determină cu relația:

$$C_Y = \frac{P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{\omega \cdot U_f^2} \quad (10.37)$$

unde:  $P$  este puterea activă absorbită de circuit;  $U_f$  – valoarea efectivă a tensiunii de fază;  $\omega$  – pulsația;  $\varphi$  – defazajul înainte de montarea condensatorilor;  $\varphi'$  – defazajul după de montarea condensatorilor.

Pentru condensatoare montate în triunghi (fig. 10.9 b), valoarea capacității  $C_\Delta$  se determină cu relația:

$$C_\Delta = \frac{P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{\omega \cdot U_l^2} \quad (10.38)$$

unde  $U_l$  este valoarea efectivă a tensiunii de linie.

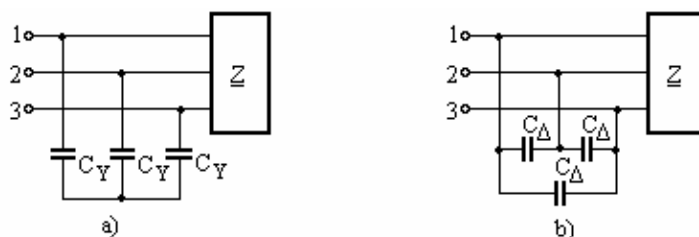


Fig. 10.9 Îmbunătățirea factorului de putere la rețelele electrice trifazate

Sistemele trifazate prezintă numeroase avantaje față de cele monofazate, cele mai importante fiind următoarele:

- transmiterea energiei electrice se face în condiții mai economice;
- au posibilitatea de a dispune utilizarea de două sisteme de tensiuni diferite pentru consumatorii monofazați (conexiunea în stea cu fir neutru);
- permit producerea câmpurilor magnetice învârtitoare care sunt utilizate la funcționarea celor mai simple și mai economice motoare electrice, motoarele asincrone.

### 10.5. TEOREMA POTENȚIALULUI PUNCTULUI NEUTRU

**Teorema potențialului punctului neutru** se utilizează la rezolvarea rețelilor trifazate. Se consideră un multipol pasiv, cu conexiunea în stea, care are  $n$  ramuri prin care intră curenții  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n$  și care are la bornele de acces potențialele  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_n$  față de un punct de referință  $P_0$ , care are potențialul nul (fig. 10.10). Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului  $N$ , în care se întâlnesc cele  $n$  ramuri, se obține:

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\underline{U}_{kN}}{\underline{Z}_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\underline{V}_k - \underline{V}_N}{\underline{Z}_k} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k (\underline{V}_k - \underline{V}_N) = 0 \quad (10.39)$$

unde:  $\underline{Z}_k$ , respectiv  $\underline{Y}_k$ , reprezintă impedanța complexă, respectiv admitanța complexă a laturii  $k$ .

Din relația (10.39) se obține expresia potențialului punctului  $N$  de întâlnire a celor  $n$  ramuri:

$$\sum_{k=1}^n \underline{V}_N \underline{Y}_k = \sum_{k=1}^n \underline{V}_k \underline{Y}_k \Rightarrow$$

$$\underline{V}_N = \frac{\sum_{k=1}^n \underline{V}_k \underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k} \quad (10.40)$$

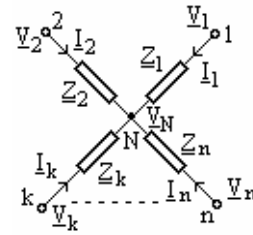


Fig. 10.10 Figură explicativă la teorema potențialului punctului neutru

relație care reprezintă teorema potențialului

punctului neutru: **potențialul  $\underline{V}_N$  al punctului neutru  $N$  de întâlnire a  $n$  ramuri ale unui multipol pasiv este egal cu media aritmetică a potențialelor bornelor de acces, ponderată cu admitanțele ramurilor respective.**

## 10.6. CALCULUL REȚELELOR TRIFAZATE

### 10.6.1. RECEPTOARE TRIFAZATE ECHILIBRATE ALIMENTATE CU TENSIUNI SIMETRICE

În regim simetric și echilibrat calculul se face pentru faza **1**, curenții complecși pentru fazele **2** și **3** obținându-se prin înmulțirea curentului din faza **1** cu  $a^2$  respectiv  $a$ .

a) **Receptor conectat în stea** (fig. 10.11)

Sunt valabile relațiile:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}} = a^2 \underline{I}_1; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}} = a \underline{I}_1; \quad \underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_r = \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_r}{\underline{Z}}; \quad \underline{U}_1 = \sqrt{3} \underline{U}_r \quad (10.41)$$

b) **Receptor conectat în triunghi** (fig. 10.12)

Sunt valabile relațiile:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z};$$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = a^2 \underline{I}_{12}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = a \underline{I}_{12};$$



$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; & \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = a^2 \underline{I}_1; & \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = a \underline{I}_1; \\ \underline{I}_1 &= \sqrt{3} \underline{I}_f; & \underline{U}_1 &= \underline{U}_f \end{aligned} \quad (10.42)$$

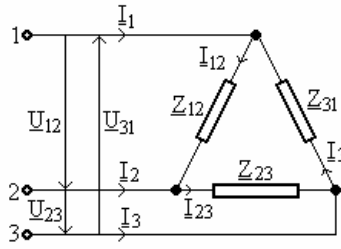
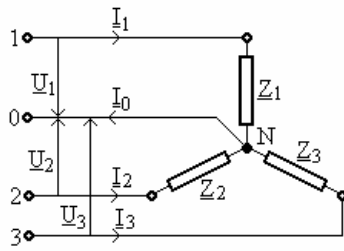


Fig. 10.11 Receptor conectat în stea      Fig. 10.12 Receptor conectat în triunghi

În cazul în care conductoarele de linie au impedanțele egale  $\underline{Z}_1$ , calculul curenților se face astfel:

- pentru conexiunea în stea cu relațiile (10.41) în care se va înlocui  $\underline{Z}$  cu  $\underline{Z}' = \underline{Z} + \underline{Z}_1$ ;
- pentru conexiunea în triunghi se va transfigura receptorul într-o stea echivalentă în care  $\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3}$  și apoi, se rezolvă sistemul cu relațiile (10.41) în care se va înlocui  $\underline{Z}$  cu  $\underline{Z}' = \underline{Z}_Y + \underline{Z}_1$ .

### 10.6.2. RECEPTOARE TRIFAZATE DEZECHILIBRATE

a) **Receptor în stea cu conductor neutru** (fig. 10.13)

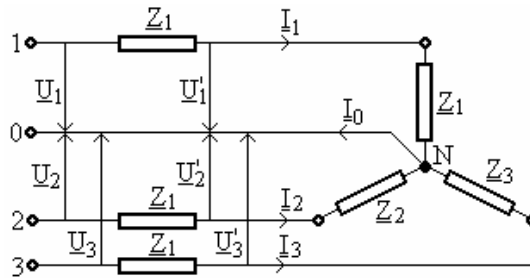


Fig. 10.13 Receptor în stea cu conductor neutru

Se cunosc tensiunile de fază la începutul liniei  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ , impedanțele fazelor receptorului  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ , impedanțele conductoarelor de linie  $\underline{Z}_1$  și

impedanțele conductorului neutru  $\underline{Z}_0$  și se cer curenții din receptor și din linii și tensiunile pe fazele receptorului  $\underline{U}'_1, \underline{U}'_2, \underline{U}'_3$ .

Se determină deplasarea punctului neutru  $\underline{U}_0$ :

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}'_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}'_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}'_3}{\underline{Y}'_1 + \underline{Y}'_2 + \underline{Y}'_3 + \underline{Y}'_0} \quad (10.43)$$

unde:

$$\underline{Y}'_k = \frac{1}{\underline{Z}_k + \underline{Z}_1}, \text{ pentru } k=1, 2, 3; \quad \underline{Y}'_0 = \frac{1}{\underline{Z}_0} \quad (10.44)$$

Curenții din fazele receptorului, egali cu cei din linii și curentul de nul se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (\underline{U}_1 - \underline{U}_0) \underline{Y}'_1; \quad \underline{I}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_0) \underline{Y}'_2; \quad \underline{I}_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_0) \underline{Y}'_3; \\ \underline{I}_0 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \end{aligned} \quad (10.45)$$

Tensiunile de fază la bornele receptorului sunt date de relațiile:

$$\underline{U}'_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1; \quad \underline{U}'_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2; \quad \underline{U}'_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3 \quad (10.46)$$

#### b) **Receptor în stea fără conductor neutru**

Se vor folosi relațiile (10.43...10.46) în care  $\underline{Y}_0 = \mathbf{0}$  și  $\underline{I}_0 = \mathbf{0}$ .

#### c) **Receptor în triunghi** (fig. 10.14 a)

Se cunosc tensiunile de linie la începutul liniei de alimentare  $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ , impedanțele fazelor receptorului  $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{23}, \underline{Z}_{31}$  și impedanța conductoarelor de linie  $\underline{Z}_1$ . Receptorul se transfigurează într-o stea echivalentă (fig. 10.14 b) cu impedanțele  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$  determinate cu relațiile (9.138).

Curenții de linie  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$  se calculează cu relațiile (10.43...10.45).

Tensiunile de fază ale receptorului, determinate din figura 10.14 b, sunt date de relațiile:

$$\underline{U}'_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2; \quad \underline{U}'_{23} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3; \quad \underline{U}'_{31} = \underline{Z}_3 \underline{I}_3 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \quad (10.47)$$

Curenții din fazele receptorului se obțin cu relațiile:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}'_{12}}{\underline{Z}_{12}}; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}'_{23}}{\underline{Z}_{23}}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}'_{31}}{\underline{Z}_{31}} \quad (10.48)$$

În cazul particular în care impedanțele conductoarelor de linie sunt neglijabile ( $\underline{Z}_1 = \mathbf{0}$ ), tensiunile de linie se aplică direct fazelor receptorului și curenții de fază se calculează cu relațiile:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} \quad (10.49)$$

Curenții de linie sunt dați de relațiile:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \quad \underline{I}_{33} = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} \quad (10.50)$$

Puterea complexă absorbită este dată de relația:

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* - \underline{U}_{23} \underline{I}_3^* \quad (10.51)$$

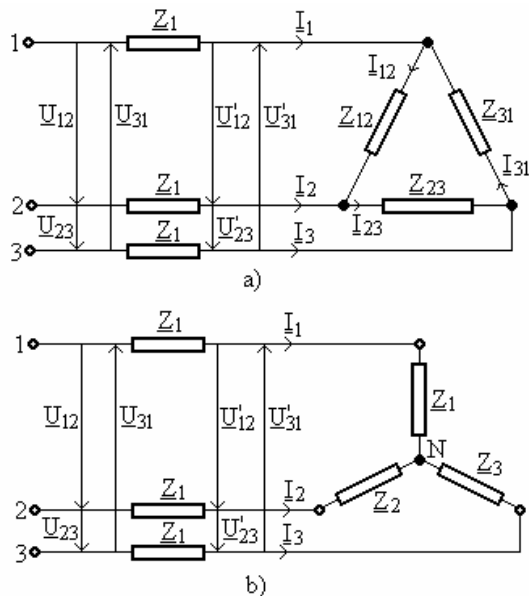


Fig. 10.14 a) Receptor în triunghi; b) Receptor transfigurat într-o stea echivalentă

În cazul rezolvării circuitelor trifazate alimentate cu un sistem nesimetric de tensiuni, date prin valorile efective ale tensiunilor de linie  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$ , se consideră ca origine de fază tensiunea  $\underline{U}_{12}$ . Se calculează unghiul de defazaj dintre  $\underline{U}_{12}$  și  $\underline{U}_{23}$  cu relația următoare:

$$\alpha = \arccos \frac{U_{12}^2 + U_{23}^2 - U_{31}^2}{2 U_{12} U_{23}} \quad (10.52)$$

Rezultă în continuare:

$$\underline{U}_{23} = U_{23} e^{j\alpha}; \quad \underline{U}_{31} = -\underline{U}_{12} - \underline{U}_{23} \quad (10.53)$$

## 11. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU

### 11.1. DEFINIREA REGIMULUI TRANZITORIU

În cazul circuitelor electrice de c.c. regimul permanent se caracterizează prin valori constante ale curenților și tensiunilor, iar în cazul circuitelor de c.a., prin valori constante ale amplitudinilor tensiunilor și curenților și a defazajelor.

Pentru a defini **regimul tranzitoriu** de funcționare a circuitelor electrice, se consideră un circuit **R, L** serie, care se conectează la momentul  $t = 0$  la bornele unei surse de c.c. cu t.e.m.  $U_e$  constantă și rezistența interioară  $R_i$ . Curentul din circuit este nul atât înainte cât și imediat după conectare. După un timp lung, scurs de la conectare, curentul din circuit va avea valoarea:

$$i(t) \Big|_{t=0+\varepsilon} = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = I = \frac{U_e}{R + R_i} \quad (11.1)$$

unde s-a notatcu  $t = 0 + \varepsilon$ , momentul de timp imediat următor conectării.

Creșterea curentului de la valoarea zero la valoarea **I** nu are loc instantaneu, deoarece o asemenea variație ar da o derivată în raport cu timpul a fluxului magnetic creat de curent în bobină de valoare infinită și conform legii inducției electromagnetice ar apare o t.e.m. indusă infinit de mare, ceea ce este imposibil, deoarece tensiunea de alimentare a circuitului este finită. Curentul prin circuit crește treptat de la valoarea zero la valoarea constantă **I**, într-un interval de timp foarte scurt, care depinde de constanta de timp a circuitului. Acest interval de timp se numește **durată tranzitorie**, iar regimul de funcționare a circuitului în acest interval se numește **regim tranzitoriu**.

Fenomenul este analog dacă sursa de alimentare a circuitului este de c.a. În cazul acesta, amplitudinea curentului din circuit crește în timp de la valoarea zero la valoarea  $I_m = U_{em}/Z$ , unde **Z** este impedanța circuitului.

Dacă în circuit se leagă o rezistență **R** în serie cu un condensator **C**, descărcat în stare inițială, în circuit apare un curent electric corespunzător deplasării sarcinilor electrice de încărcare a condensatorului. După ce condensatorul s-a încărcat, deplasarea sarcinilor electrice încetează și curentul devine nul. Încărcarea condensatorului nu are loc instantaneu deoarece tensiunea  $u_c$  de la bornele sale nu admite variații bruște (dacă  $u_c$  s-ar modifica brusc, curentul din circuit ar deveni infinit). Rezultă că la momentul de timp  $t = 0 + \varepsilon$  al conectării la sursă, curentul din circuit va avea valoarea:

$$i(t) \Big|_{t=0+\varepsilon} = I = \frac{U_e}{R + R_i}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \quad (11.2)$$

Dacă sursa de alimentare este de c.a., condensatorul se încarcă și se descarcă alternativ. În concluzie, regimul tranzitoriu se desfășoară în timp și are loc la trecerea de la un regim permanent la altul.

## 11.2. CONDIȚII INIȚIALE

În cazul regimului tranzitoriu condițiile inițiale sunt date, în general, în funcție de tipul circuitului.

Dacă circuitul conține o bobină, aceasta va fi parcursă de un flux magnetic  $\phi$ , care este variabil în timp. Ca urmare, în bobină se va induce o t.e.m. dată de legea inducției electromagnetice ( $\mathbf{u}_e = -d\phi/dt$ ). Dacă se consideră momentul inițial  $t = 0$ , rezultă că momentul premergător regimului tranzitoriu este  $t_1 = 0 - \varepsilon$ , iar momentul imediat următor după apariția regimului tranzitoriu este  $t_2 = 0 + \varepsilon$ , unde  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Se obține  $dt = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ , ceea ce ar determina ca  $\mathbf{u}_e$  să tindă la infinit, fapt care nu este acceptabil fizic. Rezultă că  $d\phi \rightarrow 0$ , adică  $\phi(0 - \varepsilon) = \phi(0 + \varepsilon)$ . În concluzie, în perioada inițială a regimului tranzitoriu, fluxul magnetic se conservă prin bobină.

Ținând cont de definiția fluxului magnetic, se obține:

$$\phi = Li \Rightarrow Li(0 - \varepsilon) = Li(0 + \varepsilon) \Rightarrow i(0 - \varepsilon) = i(0 + \varepsilon) \quad (11.3)$$

rezultând că **în cazul unei bobine curentul în momentul inițial se conservă.**

Se consideră cazul circuitului care conține condensatoare. Fie o suprafață închisă  $\Sigma$ , care înconjoară numai o armătură a condensatorului  $C$  (fig. 11.1). Conform legii conservării sarcinii electrice, rezultă:

$$i_{\Sigma} + i_{v_{\Sigma}} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \quad (11.4)$$

unde:  $i_{\Sigma} = -i$  și reprezintă intensitatea curentului de conducție care iese din suprafața  $\Sigma$ ;  $i_{v_{\Sigma}}$  - intensitatea curentului de convecție care iese din suprafața  $\Sigma$ .

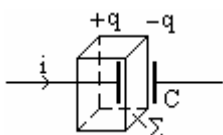


Fig. 11.1 Figură explicativă la legea conservării sarcinii electrice

În cazul considerat,  $i_{v_{\Sigma}} = 0$ , rezultând:

$$-i = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \Rightarrow i = \frac{dq_{\Sigma}}{dt} \quad (11.5)$$

Pentru că  $dt = \rightarrow 0$ , iar curentul  $i$  nu poate să ia o valoare infinită, rezultă  $dq = \rightarrow 0$ , adică  $q(0 - \varepsilon) = q(0 + \varepsilon)$ . În concluzie, în perioada inițială a regimului tranzitoriu, sarcina electrică cu care se încarcă un condensator se conservă.

Ținând cont de definiția capacității electrice ( $C = q/u_c$ ) se obține:

$$Cu_c(0 - \varepsilon) = Cu_c(0 + \varepsilon) \Rightarrow u_c(0 - \varepsilon) = u_c(0 + \varepsilon) \quad (11.6)$$

## 11.3. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU PRIN METODA DIRECTĂ (ANALITICĂ)

Studiul regimurilor tranzitorii se referă la găsirea modului de variație în timp a curenților și tensiunilor din circuit pe durata cât au loc aceste regimuri. În capitolele precedente au fost studiate circuite electrice în regim permanent,

adcă în regimul care se stabilește după un timp suficient de mare față de constantele de timp ale circuitelor electrice (presupuse disipative), pentru ca regimul tranzitoriu să fie practic complet amortizat. În acest caz, condițiile inițiale nu se mai resimt în modul de variație în timp a mărimilor electrice, care sunt univoc determinate de forma funcțiilor de timp reprezentate t.e.m. ale surselor.

În rețelele electrice de transport și distribuție, toate comutațiile și respectiv, avariile determină regimuri tranzitorii, care deși durează puțin, datorită constantelor de timp mici, pot periclita securitatea instalațiilor (prin supra-curenți sau supratensiuni) sau stabilitatea funcționării lor. De asemenea prelucrarea semnalelor utilizează procese tranzitorii care nu pot fi ignorate.

Regimul tranzitoriu al circuitelor electrice liniare poate fi studiat cu **metoda directă** de rezolvare a sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, liniare, cu coeficienți constanți, prin separarea soluțiilor de regim liber și a soluțiilor de regim forțat. Această metodă constă în următoarele:

- Se scriu ecuațiile integro-diferențiale ale circuitului utilizând teoremele lui Kirchhoff.
- Se transformă ecuațiile integro-diferențiale în ecuații diferențiale, fie prin derivarea lor, fie printr-o înlocuire de variabilă.
- Se rezolvă rezolvă ecuațiile diferențiale obținute, care în general sunt ecuații diferențiale cu coeficienți constanți neomogeni. Soluția generală este sub forma unei suprapunerii de două soluții, de forma:

$$y(t) = y_1(t) + y_f(t) \quad (11.7)$$

unde  $y_1(t)$  este soluția generală a ecuației caracteristice, omogene, asociată ecuației date (se mai numește soluția regimului liber deoarece nu conține decât parametrii circuitului), iar  $y_f(t)$  reprezintă soluția regimului așa numit forțat (soluție particulară), care este impusă de condițiile exterioare.

- Se determină soluția de regim liber  $y_1(t)$  (nu depinde de condițiile exterioare), care apare ca o sumă de exponențiale de forma:

$$y_1(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \dots + C_n e^{r_n t} \quad (11.8)$$

unde  $r_1, r_2, \dots, r_n$  sunt soluțiile ecuației caracteristice, care se obține din ecuația diferențială omogenă înlocuind formal derivatele de ordinul "k" cu  $r^k$ . Gradul ecuației caracteristice este egal cu ordinul ecuației diferențiale, numărul termenilor care se adună în expresia soluției libere fiind egal cu ordinul ecuației diferențiale. În circuitele normale care conțin rezistoare, soluția liberă tinde la zero când timpul tinde la infinit;

- Se determină soluția de regim forțat  $y_f(t)$ , ca soluție particulară a sistemului neomogen, având forma complet determinată de termenul liber. Constanta acestei mărimi se determină din condiția ca soluția să satisfacă ecuația diferențială neomogenă. În cazul t.e.m. constante sau sinusoidale, soluțiile forțate au aceeași formă ca t.e.m. și se pot determina cu metodele utilizate

la studiul regimului permanent.

- Cu ajutorul condițiilor inițiale se determină constantele de integrare din expresiile complete (de regim tranzitoriu) ale soluțiilor.

#### 11.4. CIRCUITE SIMPLE ÎN REGIM TRANZITORIU

##### 11.4.1. BOBINA REALĂ LA CONECTAREA ȘI RESPECTIV DECONECTAREA, LA/DE LA O TENSIUNE CONSTANTĂ

Se consideră o bobină de rezistență  $R$  și inductivitate  $L$ , care la momentul  $t = 0$  se conectează la o sursă de tensiune constantă  $U$  (fig. 11.2). Înainte de conectare curentul prin bobină era nul, condiția inițială fiind următoarea:

$$i(0 - \varepsilon) = i(0 + \varepsilon) = i(0) = 0 \quad (11.9)$$

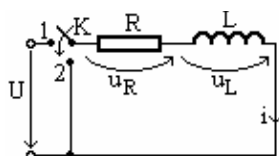


Fig. 11.2 Circuit serie  $R, L$

Ecuția diferențială a circuitului, după închiderea întreruptorului ( $t > 0$ ), este dată de relația:

$$L \frac{di}{dt} + R i = U \quad (11.10)$$

Din ecuația omogenă:

$$L \frac{di}{dt} + R i = 0 \quad (11.11)$$

rezultă ecuația caracteristică, care va avea rădăcina  $r$ :

$$Lr + R = 0 \Rightarrow r = -R/L \quad (11.12)$$

Mărimea  $\tau = L/R$  are dimensiunea fizică de timp și se numește constanta de timp a circuitului.

Soluția de regim liber  $i_1(t)$  a circuitului este de forma:

$$i_1(t) = C_1 e^{rt} = C_1 e^{-\frac{R}{L}t}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = 0 \quad (11.13)$$

Soluția de regim forțat  $i_f(t)$  se ia de forma termenului liber ( $U = ct.$ ) și se determină din condiția să satisfacă ecuația diferențială a circuitului:

$$i_f(t) = K_1 \Rightarrow R K_1 = U \Rightarrow i_f(t) = U/R \quad (11.14)$$

Rezultă soluția generală a ecuației:

$$i(t) = i_1(t) + i_f(t) \Rightarrow i(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}, \quad t > 0 \quad (11.15)$$

Constanta  $C_1$  se obține din condiția inițială (11.9):

$$i(0) = 0 \Rightarrow i(0) = C_1 + U/R = 0 \Rightarrow C_1 = -U/R \quad (11.16)$$

rezultând soluția de regim tranzitoriu:

$$i(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (11.17)$$

În figura 11.3 este reprezentată variația în timp a curentului bobinei  $i(t)$ , precum și a componentelor sale  $i_1(t)$  și  $i_r(t)$ .

Teoretic, regimul tranzitoriu durează infinit de mult, deoarece numai pentru  $t \rightarrow \infty$  rezultă  $i_1(t) = 0$ . Se constată însă că pentru  $t \geq 4\tau$ , mărimea variabilă diferă cu mai puțin de un procent din valoarea finală și practic, se poate spune că regimul tranzitoriu se încheie după un timp relativ scurt, estimat la câteva (3...5) constante de timp ale circuitului.

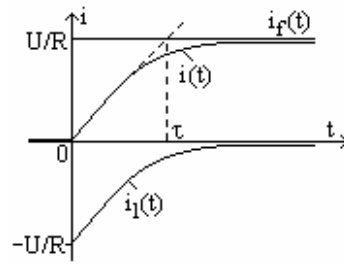


Fig. 11.3 Variația curentului prin bobină la cuplare la o tensiune constantă

În cazul circuitului  $R, L$  la decuplare de la o tensiune constantă  $U$  (comutatorul  $K$  se trece pe poziția 2), condiția inițială este următoarea:

$$i(0 - \varepsilon) = i(0 + \varepsilon) = i(0) = U/R \quad (11.18)$$

La momentul  $t > 0$ , ecuația diferențială a circuitului va fi:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (11.19)$$

Procedând într-un mod analog se obțin soluțiile de regim liber și de regim forțat date de relațiile următoare:

$$i_1(t) = C_1 e^{-t/\tau} = C_1 e^{-\frac{R}{L}t}; \quad i_r(t) = 0 \quad (11.20)$$

Constanta  $C_1$  se obține din condiția inițială (11.18):

$$i(0) = U/R \Rightarrow C_1 = U/R \quad (11.21)$$

rezultând soluția de regim tranzitoriu:

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (11.22)$$

În figura 11.4 este reprezentată variația în timp a curentului  $i(t)$  prin bobină, la decuplarea acesteia de la o tensiune constantă  $U$ .

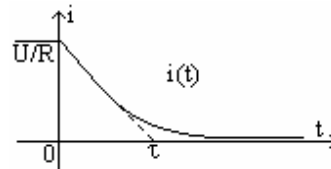


Fig. 11.4 Variația curentului prin bobină la decuplare de la o tensiune constantă

#### 11.4.2. ÎNCĂRCAREA ȘI DESCĂRCAREA UNUI CONDENSATOR

Se consideră un circuit  $R, C$  serie, care la momentul  $t = 0$  se conectează la o sursă de tensiune constantă  $U$  (fig. 11.5). Se consideră că înaintea închiderii întreruptorului  $K$  condensatorul era descărcat, rezultând condiția inițială:

$$u_c(0 - \varepsilon) = u_c(0 + \varepsilon) = u_c(0) = 0 \quad (11.23)$$

Ecuția integro-diferențială a circuitului, după închiderea întreruptorului  $K$



( $t > 0$ ), este dată de relația:

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = U \quad (11.24)$$

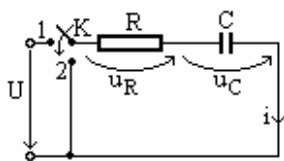


Fig. 11.5 Circuit serie R, C

Prin schimbarea de variabilă:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} \quad (11.25)$$

se obține:

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U \quad (11.26)$$

Din ecuația omogenă:

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad (11.27)$$

rezultă ecuația caracteristică, care va avea rădăcina  $r$ :

$$RCr + 1 = 0 \Rightarrow r = -1/RC \quad (11.28)$$

Mărimea  $\tau = RC$  are dimensiunea fizică de timp și se numește constanta de timp a circuitului.

Soluția de regim liber  $u_{cl}(t)$  a circuitului este de forma:

$$u_{cl}(t) = C_1 e^{rt} = C_1 e^{-\frac{t}{RC}} = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (11.29)$$

Soluția de regim forțat  $u_{cf}(t)$  se ia de forma termenului liber ( $U = ct.$ ) și înlocuind în relația (11.26) se obține:

$$u_{cf}(t) = K_1 \Rightarrow K_1 = U \Rightarrow u_{cf}(t) = U \quad (11.30)$$

Rezultă soluția generală a ecuației diferențiale:

$$u(t) = u_{cl}(t) + u_{cf}(t) \Rightarrow u(t) = C_1 e^{-\frac{t}{RC}} + U, \quad t > 0 \quad (11.31)$$

Constanta  $C_1$  se obține din condiția inițială (11.9):

$$u_c(0) = 0 \Rightarrow u(0) = C_1 + U = 0 \Rightarrow C_1 = -U \quad (11.32)$$

rezultând soluția de regim tranzitoriu:

$$u_c(t) = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (11.33)$$

Curentul  $i$  prin circuit, la încărcarea condensatorului, are expresia:

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (11.34)$$

În figura 11.6 este reprezentată variația în timp a mărimilor  $u_c(t)$  și  $i(t)$ , precum și a componentelor sale  $i_i(t)$  și  $i_f(t)$ . Tensiunea  $u_R$  (căderea de tensiune pe resistor) este proporțională cu  $i$  și este diferența dintre tensiunile  $U$  și  $u_c(t)$ .

În cazul descărcării condensatorului (comutatorul  $K$  se trece pe poziția 2),

condiția inițială este următoarea:

$$u_c(0 - \varepsilon) = u_c(0 + \varepsilon) = u_c(0) = U \quad (11.35)$$

La momentul  $t > 0$ , ecuația diferențială a circuitului va fi:

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad (11.36)$$

Procedând ca și în cazul precedent se obțin soluțiile de regim liber și de regim forțat, date de relațiile următoare:

$$\begin{aligned} u_{cl}(t) &= C_1 e^{rt} = C_1 e^{-\frac{t}{RC}}; \\ u_{cf}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (11.37)$$

Constanta  $C_1$  se obține din condiția inițială (11.35):

$$u_c(0) = U \Rightarrow C_1 = U \quad (11.38)$$

rezultând soluția de regim tranzitoriu:

$$u_c(t) = U e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (11.39)$$

Curentul  $i$  prin circuit, la descărcarea condensatorului, are expresia:

$$i(t) = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (11.40)$$

În figura 11.7 este reprezentată variația în timp a curentului  $i(t)$  prin bobină, la decuplarea acesteia de la o tensiune constantă  $U$ .

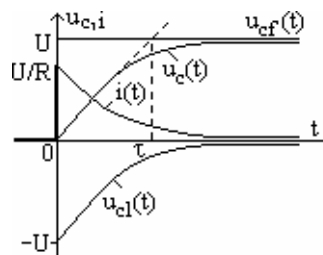


Fig. 11.6 Variațiile curentului și tensiunii la încărcarea unui condensator cu o tensiune constantă

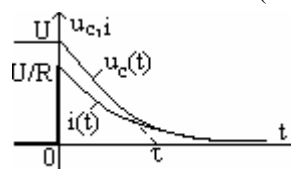


Fig. 11.7 Variațiile curentului și tensiunii la descărcarea unui condensator

### 11.4.3. REGIMUL TRANZITORIU AL UNUI CIRCUIT SERIE R, L, C ALIMENTAT CU TENSIUNE CONSTANTĂ

Se consideră circuitul serie  $R, L, C$  din figura 11.8, alimentat cu tensiunea constantă  $U$  (la momentul  $t = 0$  se închide întreruptorul  $K$ ). Se consideră că înaintea închiderii întreruptorului  $K$  curentul prin circuit era nul și tensiunea la bornele condensatorului era nulă, rezultând condițiile inițiale:

$$\begin{aligned} i(0 - \varepsilon) &= i(0 + \varepsilon) = 0; \\ u_c(0 - \varepsilon) &= u_c(0 + \varepsilon) = u_c(0) = 0 \end{aligned} \quad (11.41)$$

pentru  $\varepsilon$  arbitrar de mic.

După închiderea întreruptorului  $K$ , ecuația integro-diferențială a circuitului se exprimă sub forma:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U \quad (11.42)$$

Făcând schimbarea de variabilă dată de relația (11.25) se obține ecuația diferențială:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U; \quad t > 0 \quad (11.43)$$

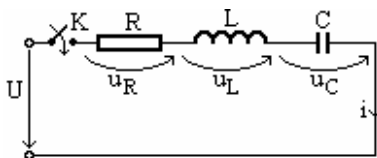


Fig. 11.8 Circuit serie R, L, C

unde s-a ales ca necunoscută tensiunea la bornele condensatorului.

Curentul prin circuit va rezulta din relația:

$$i = C du_c / dt \quad (11.44)$$

Ecuția caracteristică este următoarea:

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0 \quad (11.45)$$

și va avea rădăcinile:

$$r_{1,2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC} \quad (11.46)$$

Dacă se fac notațiile:

$$\alpha = -\frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.47)$$

unde  $\omega_0$  este pulsația de rezonanță a circuitului **R, L, C** serie, rădăcinile ecuației caracteristice vor avea forma:

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (11.48)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale are forma:

$$u_c(t) = u_{cl}(t) + u_{cf}(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + U \quad (11.49)$$

Constantele  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condițiile inițiale date de relațiile (11.41). După valorile parametrilor circuitului, soluția liberă poate avea diferite forme, distingându-se trei regimuri distincte de funcționare:

a) Regimul liber oscilatoriu amortizat, care are loc atunci când:

$$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0 \quad (11.50)$$

Dacă se notează:

$$\omega_p = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (11.51)$$

rădăcinile ecuației vor fi complex conjugate:

$$r_1 = -\alpha + j\omega_p; \quad r_2 = -\alpha - j\omega_p \quad (11.52)$$

unde  $\alpha$  se numește constanta de atenuare a oscilațiilor libere amortizate;  $\omega_0$  – pulsația oscilațiilor libere neamortizate;  $\omega_p$  – pulsația oscilațiilor libere amortizate ale circuitului.

După punerea condițiilor inițiale, soluția de regim tranzitoriu va avea forma:

$$u_c(t) = U \left[ 1 - \frac{1}{\sin k} \exp(-\alpha t) \sin(\omega_p t + k) \right] \quad (11.53)$$

unde s-a notat:

$$\sin k = \frac{\omega_p}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}; \quad \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (11.54)$$

Curentul prin circuit se calculează cu relația:

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{L \omega_p} \exp(-\alpha t) \sin(\omega_p t) \quad (11.55)$$

În figura 11.9 sunt prezentate variațiile mărimilor  $u_c$  și  $i$ . În cazul acesta curentul nu mai are salt în momentul inițial, datorită inductivității circuitului. În momentul inițial toată tensiunea se aplică bobinei ideale, iar inductivitatea acesteia determină panta inițială a curentului:

$$\left( \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = U/L \quad (11.56)$$

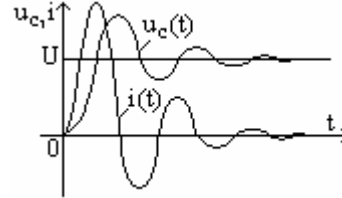


Fig. 11.9 Variațiile mărimilor  $u_c$  și  $i$  în cazul regimului oscilatoriu amortizat

b) Regimul liber aperiodic critic, are loc atunci când:

$$\alpha^2 - \omega_0^2 = 0 \quad (11.57)$$

În acest caz ecuația caracteristică are o rădăcină dublă, egală cu  $-\alpha$ , iar soluțiile de regim tranzitoriu, pentru tensiune și curent, vor avea forma:

$$u_c(t) = U \left[ 1 - (1 + \alpha t) \exp(-\alpha t) \right];$$

$$i(t) = \frac{U}{L} t \exp(-\alpha t) \quad (11.58)$$

Variațiile mărimilor  $u_c$  și  $i$ , ca funcții de timp, sunt reprezentate în figura 11.10 a.

c) Regimul liber aperiodic (supraamortizat), are loc atunci când:

$$\alpha^2 - \omega_0^2 > 0 \quad (11.59)$$

În cazul acesta ecuația caracteristică are două rădăcini reale, negative:

$$r_1 = -\alpha + \beta; \quad r_2 = -\alpha - \beta; \quad \text{cu } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (11.60)$$

Utilizând relațiile dintre funcțiile trigonometrice de argument imaginar și funcțiile hiperbolice, se stabilesc următoarele expresii pentru soluțiile de regim tranzitoriu:

$$u_c(t) = U \left[ 1 - \frac{1}{\sinh k'} \exp(-\alpha t) \sin(\beta t + k') \right]$$

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{L\beta} \exp(-\alpha t) \sinh(\beta t) \quad (11.61)$$

unde s-au făcut notațiile:

$$\sinh k' = \frac{\beta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{R^2 C}{4L} - 1}; \quad \cosh k' = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (11.62)$$

Variațiile mărimilor  $u_c$  și  $i$ , ca funcții de timp, sunt reprezentate în figura 11.10 b.

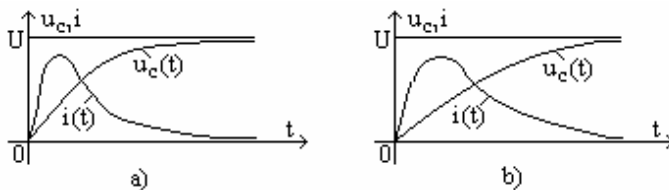


Fig. 11.10 Variațiile mărimilor  $u_c$  și  $i$  în cazul: a) regimului aperiodic critic; b) aperiodic (supraamortizat)

#### 11.4.4. REGIMUL TRANZITORIU AL UNUI CIRCUIT SERIE R, L ALIMENTAT CU TENSIUNE SINUSOIDALĂ

Se consideră o bobină de rezistență  $R$  și inductivitate  $L$ , care la momentul  $t = 0$  se conectează la o sursă de tensiune sinusoidală  $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$  (fig. 11.11).

Înainte de conectare, curentul prin bobină era nul, condiția inițială este dată de relația (11.9)

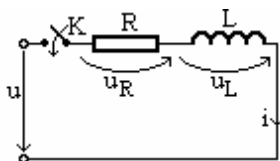


Fig. 11.11 Circuit serie R, L alimentat cu tensiune sinusoidală

Ecuția diferențială a circuitului, după închiderea întreruptorului ( $t > 0$ ), este dată de relația:

$$L \frac{di}{dt} + R i = U\sqrt{2} \sin \omega t \quad (11.64)$$

Din ecuația omogenă rezultă ecuația caracteristică, care are rădăcina dată de relația (11.12).

Soluția de regim liber  $i_h(t)$  a circuitului este dată de relația (11.13).

Criteriul de regim permanent este criteriul corespunzător unui circuit  $R, L$ , alimentat la o tensiune sinusoidală, soluția de regim forțat  $i_f(t)$  fiind dată de soluția de regim permanent.  $i_f(t) = i_p(t)$ :

$$i_p(t) = \frac{U\sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t - \varphi); \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \quad (11.65)$$

Rezultă soluția generală a ecuației diferențiale:

$$i(t) = i_1(t) + i_f(t) \Rightarrow i(t) = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U\sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t - \varphi), \quad t > 0 \quad (11.66)$$

Constanta  $C_1$  se obține din condiția inițială (11.9):

$$i(0) = 0 \Rightarrow C_1 + \frac{U\sqrt{2}}{Z} \sin(-\varphi) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{U\sqrt{2}}{Z} \sin \varphi \quad (11.66)$$

rezultând soluția de regim tranzitoriu:

$$i(t) = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left[ e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \varphi + \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (11.67)$$

În figura 11.12 este reprezentată variația în timp a curentului prin circuit  $i(t)$ , precum și a componentelor sale  $i_1(t)$  și  $i_f(t)$ .

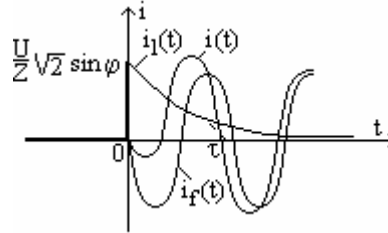


Fig. 11.12 Variația curentului prin circuit la cuplare la o tensiune sinusoidală

#### 11.4. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU CU AJUTORUL TRANSFORMATEI LAPLACE

Metoda operațională care utilizează transformata Laplace permite transformarea ecuațiilor integro-diferențiale în ecuații liniare, sistemele de ecuații obținute fiind astfel mai ușor de rezolvat.

##### 11.4.1. TRANSFORMATA LAPLACE ȘI PROPRIETĂȚILE SALE

Fiind dată o funcție  $f(t)$ , se numește imagine Laplace sau **transformată Laplace** a acesteia, o funcție  $F(s)$ , de variabilă complexă  $s$ , univoc asociată funcției  $f(t)$  prin relația:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (11.68)$$

Utilizând relația (11.68) se vor calcula transformatele Laplace ale unor funcții frecvent întâlnite în studiul regimurilor tranzitorii.

- Transformata Laplace a unei constante  $C$ , se calculează astfel:

$$L[C] = \int_0^{\infty} C e^{-st} dt = -\frac{C}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{C}{s} \quad (11.69)$$

- Imaginea funcției treaptă unitate  $\mathbf{1(t)}$ . Deoarece pentru  $t > 0$  funcția treaptă unitate este o valoare de constantă unitate, rezultă:

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (11.70)$$

- Imaginea unei exponențiale:

$$L[\exp(\alpha t)] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha} \quad (11.71)$$

- Imaginile funcțiilor **sin** $\omega t$  și **cos** $\omega t$  se obțin simplu, exprimând aceste funcții cu ajutorul unor funcții exponențiale. De exemplu pentru funcția **sin** $\omega t$  se procedează astfel:

$$L[\sin(\omega t)] = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (11.72)$$

Procedând analog rezultă imaginea funcției **cos** $\omega t$ :

$$L[\cos(\omega t)] = \int_0^{\infty} \cos(\omega t) e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (11.73)$$

**Operațiile fundamentale cu funcții de timp** care intervin în ecuațiile circuitelor liniare sunt: înmulțirea cu un scalar, adunarea, derivarea și integrarea. Se vor prezenta operațiile corespunzătoare cu imagini, pe care le implică corespondența stabilită de transformata Laplace.

- Transformata Laplace a **produsului cu o constantă k** a funcției de timp **f(t)** este egală cu produsul dintre constantă și transformata funcției **F(s)**:

$$\int_0^{\infty} k f(t) e^{-st} dt = k \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = k F(s) \quad (11.74)$$

- Transformata Laplace a **sumei** a două funcții de timp este egală cu suma transformatelor fiecărei funcții în parte:

$$\int_0^{\infty} [f_1(t) + f_2(t)] e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt = F_1(s) + F_2(s) \quad (11.75)$$

Aceste două proprietăți se exprimă compact sub forma care exprimă **liniaritatea transformatei Laplace**: transformata Laplace a unei combinații liniare de funcții de timp este egală cu combinația liniară a transformatelor Laplace ale acestor funcții:

$$L\left\{ \sum_k \lambda_k f_k(t) \right\} = \sum_k \lambda_k L\{f_k(t)\} \quad (11.76)$$

- Transformata Laplace a **derivatei** unei funcții de timp este egală cu produsul imaginii funcției prin  $s$  minus valoarea inițială a funcției (teorema derivării):

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad (11.77)$$

- Transformata Laplace a **integralei** în intervalul  $(0, t)$  a unei funcții de timp este egală cu produsul imaginii funcției prin  $1/s$  (teorema integrării). Dacă,

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (11.78)$$

rezultă  $dg/dt = f(t)$  și  $g(0) = 0$ . Aplicând relația (11.77), se obține:

$$L\{f(t)\} = L\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = sL\{g(t)\} \quad (11.79)$$

de unde rezultă:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s) \quad (11.80)$$

#### 11.4.2. TEOREMELE DEZVOLTĂRII ALE LUI HEAVISIDE

Determinarea funcției originale corespunzătoare unei transformate Laplace date se numește **inversiunea transformatei Laplace**. Există mai multe metode de inversiune, una dintre ele utilizând teoremele dezvoltării ale lui Heaviside.

##### Prima teoremă a lui Heaviside

Se consideră cazul în care funcția imagine este raportul a două polinoame, prime între ele, gradul polinomului de la numărător fiind mai mic decât gradul polinomului de la numitor:

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} \quad (11.81)$$

Raportul a două polinoame oarecare se poate aduce la această formă prin împărțire, după separarea unui eventual termen aditiv – polinomul cât.

Fie  $n$  gradul polinomului  $P_2(s)$  de la numitor și se consideră cazul în care toate rădăcinile  $s_k$  ale acestui polinom sunt distincte. În acest caz funcția imagine se poate descompune într-o sumă de fracții simple:

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} + \dots + \frac{C_n}{s-s_n} \quad (11.82)$$

Pentru a calcula coeficientul  $C_k$  al acestei descompuneri se formează produsul  $(s - s_k)F(s)$  și se calculează limita acestui produs când  $s$  tinde către  $s_k$ , aplicând regula lui l'Hôpital. Se obține:



$$C_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \left| (s - s_k) \frac{P_1(s)}{P_2(s)} \right| = P_1(s_k) \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{s - s_k}{P_2(s)} = \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \quad (11.83)$$

Cu aceste valori ale coeficienților, descompunerea în fracții simple devine:

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \frac{1}{s - s_k} = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} L\{\exp(s_k t)\} \quad (11.84)$$

Ținând cont de teorema liniarității se obține:

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} L\{\exp(s_k t)\} = L\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \exp(s_k t) \right\} \quad (11.85)$$

de unde rezultă funcția original:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \exp(s_k t) \quad (11.86)$$

Relația (11.86) reprezintă prima formă a teoremei dezvoltării (prima teoremă a lui Heaviside).

#### **A doua teoremă a lui Heaviside**

Se consideră cazul particular în care polinomul  $P_2(s)$  are o rădăcină nulă, deci se poate pune sub forma:

$$P_2(s) = s P_3(s) \quad (11.87)$$

iar polinomul  $P_3(s)$  are rădăcinile  $s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , distincte.

Pentru găsirea funcției original se aplică prima formă a teoremei dezvoltării, observând că:

$$P_2'(s) = s P_3'(s) + P_3(s) \Rightarrow P_2'(0) = P_3(0); P_2'(s_k) = s_k P_3'(s_k) \quad (11.88)$$

Cu aceste valori, în final se obține relația:

$$f(t) = L^{-1}\left\{ \frac{P_1(s)}{s P_3(s)} \right\} = \frac{P_1(0)}{P_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_1(s_k)}{P_3'(s_k)} \exp(s_k t) \quad (11.89)$$

Relația (11.89) reprezintă a doua formă a teoremei dezvoltării (a doua teoremă a lui Heaviside).

### **11.4.3. STUDIUL UNOR REGIMURI TRANZITORII**

Pentru rezolvarea regimului tranzitoriu se scriu ecuațiile integro-diferențiale ale circuitului și se aplică transformata Laplace acestor ecuații. Se obține un sistem de ecuații liniare cu necunoscutele transformatele Laplace ale funcțiilor necunoscute. După aflarea imaginilor funcțiilor necunoscute, cu ajutorul teoremelor lui Heaviside se determină funcțiile de timp corespunzătoare acestor imagini. Aceste funcții de timp reprezintă soluțiile căutate, care satisfac atât ecuațiile integro-diferențiale cât și condițiile inițiale date.

Exemplul 1

Se dă circuitul inductiv din figura 11.13 a, care pentru  $t < 0$  se află în regim permanent (de curent continuu), având curentul  $I = U/(2R)$ . Se cere să se rezolve regimul tranzitoriu care apare dacă la momentul  $t = 0$  se închide întreruptorul  $K$ , care scurtcircuitează elementele  $R, L$ .

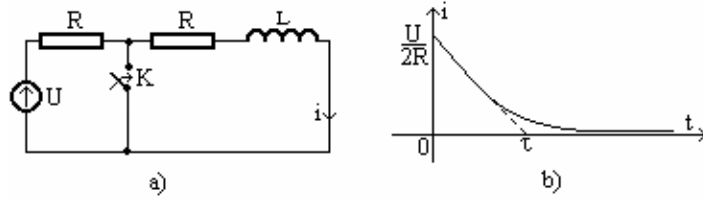


Fig. 11.13 Regimul tranzitoriu al circuitului  $R, L$  cu condiții inițiale nenule

Pentru  $t > 0$  ecuația circuitului este:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (11.90)$$

Se aplică acestei ecuații transformata Laplace, utilizând teorema liniarității și derivării și se obține:

$$L \left\{ Ri + L \frac{di}{dt} \right\} = RL\{i\} + L[sL\{i\} - i(0)] = 0 \quad (11.91)$$

Deoarece  $i(0) = U/(2R)$ , rezultă ecuația operațională a circuitului:

$$(R + sL)L\{i\} = Li(0) = \frac{L}{2R}U \quad (11.92)$$

Din relația (11.92) se obține transformata Laplace a curentului:

$$L\{i\} = \frac{U}{2R} \frac{1}{s + R/L} \quad (11.93)$$

Aplicând prima teoremă a lui Heaviside se obține expresia curentului:

$$i(t) = \frac{U}{2R} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (11.94)$$

În figura 11.13 b este reprezentată variația în timp a curentului.

Exemplul 2

Se consideră circuitul capacitiv din figura 11.14. La  $t < 0$  condensatorul este încărcat cu sarcina  $q_0$ . La  $t = 0$  se închide întreruptorul  $K$ , circuitului aplicându-se tensiunea  $u = U_0 \exp(-t/\tau_0)$ , cu  $U_0 > q_0/C$ . Să se analizeze regimul tranzitoriu care apare.

Pentru  $t > 0$  ecuația circuitului este:

$$u = Ri + \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (11.95)$$

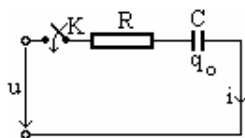


Fig. 11.14 Circuit capacitiv alimentat cu o tensiune variabilă

Aplicând acestei ecuații transformata Laplace și utilizând teorema liniarității și teorema integrării se obține ecuația operațională:

$$L\{u\} - L\left\{\frac{q_0}{C}\right\} = \left(R + \frac{1}{sC}\right)L\{i\} \quad (11.96)$$

În continuare, se calculează imaginile termenilor din membrul stâng:

$$L\{u\} = L\{U_0 \exp(-t/\tau_0)\} = \frac{U_0}{s + 1/\tau_0}; \quad L\left\{\frac{q_0}{C}\right\} = \frac{q_0}{sC} \quad (11.97)$$

Imaginea curentului din circuit va avea expresia:

$$L\{i\} = \frac{U_0}{R} \frac{s}{(s + 1/\tau_0)(s + 1/\tau)} - \frac{q_0}{\tau} \frac{1}{s + 1/\tau}; \quad \tau = RC \Rightarrow \quad (11.98)$$

$$L\{i\} = \frac{U_0}{R} \frac{1/\tau}{1/\tau - 1/\tau_0} \frac{1}{s + 1/\tau} + \frac{U_0}{R} \frac{1/\tau_0}{1/\tau_0 - 1/\tau} \frac{1}{s + 1/\tau_0} - \frac{q_0}{\tau} \frac{1}{s + 1/\tau} \quad (11.99)$$

Cu ajutorul tabelii de transformări se deduce expresia valorii instantanee a curentului:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \frac{\tau}{\tau - \tau_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) - \left(\frac{U_0}{R} \frac{\tau_0}{\tau - \tau_0} + \frac{q_0}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (11.100)$$

#### 11.4.4. FORMA OPERAȚIONALĂ A TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

În aplicații, calculul se sistematizează scriind direct ecuațiile operaționale, care exprimă relațiile între imaginile curentilor și tensiunilor. În acest scop, în studiul regimului tranzitoriu se utilizează formele operaționale ale teoremelor lui Kirchhoff.

Prima teoremă a lui Kirchhoff, scrisă pentru un nod al rețelei, este dată de ecuația:

$$\sum_{\text{nod}} \pm i_k(t) = 0 \quad (11.101)$$

cu regula de semne cunoscută. Aplicând acestei ecuații transformata Laplace și notând cu  $I_k(s)$  imaginea curentului  $i_k(t)$ ,

$$I_k(s) = L\{i_k(t)\} \quad (11.102)$$

se obține relația operațională (11.103) cunoscută ca **forma operațională a primei teoreme a lui Kirchhoff**.

$$\sum_{\text{nod}} \pm I_k(s) = 0 \quad (11.102)$$

Se enunță astfel: suma imaginilor Laplace ale curenților laturilor concurente într-un nod al cicuitului este nulă, toți curenții fiind definiți cu sensuri de referință la fel orientate față de nod; sensul de referință opus determină schimbarea semnului curențului respectiv în sumă. Regula de semne pentru imaginile curenților rămâne aceeași ca și pentru valorile instantanee.

A doua teoremă a lui Kirchhoff, scrisă pentru un ochi, are următoarea formă:

$$\sum_{\text{ochi}} \pm u_{bk}(t) = 0 \quad (11.103)$$

cu regula de semne cunoscută. Aplicând acestei relații transformata Laplace și notând cu  $U_{bk}(s)$  imaginea tensiunii la borne  $u_{bk}(t)$ ,

$$U_{bk}(s) = L\{u_{bk}(t)\} \quad (11.104)$$

se obține următoarea relație operațională:

$$\sum_{\text{ochi}} \pm U_{bk}(s) = 0 \quad (11.105)$$

cunoscută ca **forma operațională a celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff**. Aceasta se enunță astfel: suma imaginilor Laplace ale tensiunilor la bornele laturilor unui ochi este nulă, toate tensiunile fiind definite cu sensuri de referință la fel orientate față de sensul de parcurgere a ochiului; fiecare schimbare de sens de referință atrage schimbarea semnului tensiunii respective în sumă. Regula de semne pentru imaginile tensiunilor la borne rămâne aceeași ca pentru valorile instantanee.

De cele mai multe ori a doua teoremă a lui Kirchhoff se utilizează într-o formă dezvoltată, în care se pun în evidență separat sursele de tensiune și căderile de tensiune (tensiunile la bornele elementelor pasive):

$$\sum_{\text{ochi}} \pm u_{Rk}(t) = \sum_{\text{ochi}} \pm u_{ek}(t) \quad (11.106)$$

cu regulile de semne cunoscute. Aplicând acestei relații transformata Laplace și notând cu  $U_{Rk}(s)$ , respectiv  $U_{ek}(s)$  imaginile căderii de tensiune  $u_{Rk}(t)$ , respectiv a t.e.m.  $u_{ek}(t)$ ,

$$U_{Rk}(s) = L\{u_{Rk}(t)\}; \quad U_{ek}(s) = L\{u_{ek}(t)\} \quad (11.107)$$

se obține ecuația operațională:

$$\sum_{\text{ochi}} \pm U_{Rk}(s) = \sum_{\text{ochi}} \pm U_{ek}(s) \quad (11.108)$$

cunoscută ca **forma operațională dezvoltată a celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff**. Teorema se enunță astfel: suma imaginilor Laplace ale căderilor tensiune la bornele elementelor pasiveale unui ochi este egală cu suma imaginilor Laplace ale tensiunilor electromotoare ale surselor ochiului, toate tensiunile fiind definite cu sensuri de referință la fel orientate față de sensul de parcurgere a ochiului.

În tabelul 11.1 sunt dați parametrii operaționali corespunzători celor trei elemente de circuit ideale pasive.

Tabelul 11.1 Parametrii operaționali pentru elementele de circuit ideale pasive

Parametru	Rezistor	Bobină	Condensator
Impedanța operațională	$R$	$sL$	$1/(sC)$
Admitanța operațională	$G$	$1/(sL)$	$sC$
T.e.m. echivalentă condițiilor inițiale	$0$	$\phi(0)$	$-u_c(0)/s$
Curentul impus de condițiile inițiale	$0$	$i(0)/s$	$-Cu_c(0)$

În figura 11.15 sunt reprezentate circuitele echivalente operaționale ale elementelor ideale pasive.

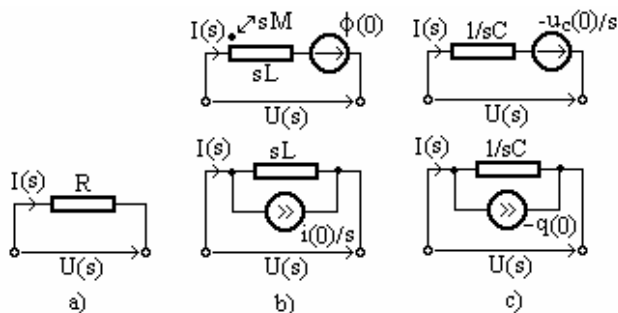


Fig. 11.15 Circuitele echivalente operaționale ale elementelor de circuit pasive: a) pentru rezistorul ideal; b) pentru bobina ideală; c) pentru condensatorul ideal

Pentru fiecare element ideal se pot stabili două circuite echivalente: serie, cu impedanță și sursă de tensiune și respectiv, paralel, cu admitanță și cu sursă de curent. La elementele de circuit pasive, sensurile de referință ale tensiunii la borne și curentului sunt asociate după regula de la receptoare.

Se remarcă faptul că bobina ideală admite o schemă echivalentă paralel (cu sursă de curent) numai în absența cuplajelor magnetice.

## 12. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

În practică t.e.m. și curenții au o variație în timp care se abate mai mult sau mai puțin de la forma sinusoidală. Regimul nesinusoidal se datează atât generatoarelor – care nu asigură o variație în timp sinusoidală a fluxului magnetic prin bobinele indusului, respectiv a t.e.m. induse – cât și receptoarelor deformatate, care pot fi clasificate în două categorii:

- Elemente neliniare de circuit (bobine cu miez de fier, redresoare, linii cu descărcări prin efect corona etc.), care chiar dacă sunt alimentate cu mărimi sinusoidale determină mărimi asociate nesinusoidale;
- Elemente liniare reactive – bobine și condensatoare liniare – care nu deformează curenții sinusoidali, însă în regim nesinusoidal produc căderi de tensiune de altă formă decât cea a curenților periodici nesinusoidali.

Există mai multe metode de studiu a circuitelor electrice liniare, cea mai des utilizată fiind metoda bazată pe **descompunerea spectrală** (în serii Fourier trigonometrice) a curenților și tensiunilor circuitului.

### 12.1. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ A FUNCȚIILOR PERIODICE DE TIMP

Studiul comportării circuitelor electrice liniare alimentate cu tensiuni la borne nesinusoidale se poate face aplicând principiul superpoziției. O tensiune sinusoidală se descompune în componente cu variație sinusoidală, numite **armonici**. Pentru fiecare componentă sinusoidală a tensiunii se determină câte un curent sinusoidal și însumând acești curenți se determină curentul total din circuit. Această descompunere în componente sinusoidale a mărimilor periodice nesinusoidale se numește analiză spectrală sau analiză armonică (dezvoltare în serie Fourier)

Se consideră o tensiune **u(t)** care acționează la bornele unui circuit cu variație periodică nesinusoidală:

$$u(t) = u(t + kT) \quad (12.1)$$

unde:  $T = 2\pi/\omega$  și reprezintă perioada, ar  $k = 1, 2, 3, \dots$ ; O funcție nesinusoidală se poate descompune în serie Fourier sub forma:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t) \quad (12.2)$$

unde  $U_0$  este componenta continuă a tensiunii, iar  $A_n$  și  $B_n$  sunt coeficienții termenilor de ordin  $n$  ai dezvoltării în serie Fourier.

Dezvoltarea în serie Fourier (rel. 12.2) mai poate fi scrisă și sub forma:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (12.3)$$

unde amplitudinea  $U_{nm}$  și faza inițială a arminicii de ordinul  $n$ ,  $\varphi_n$ , sunt date de relațiile:

$$U_{nm} = \sqrt{2} U_n; \quad U_{nm} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}; \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n} \quad (12.4)$$

Componenta armonică corespunzătoare la  $n = 1$  se numește **fundamentală** (armonica de bază) și are frecvența  $f = \omega/2\pi$ . Componentele corespunzătoare pentru  $n = 2, 3, \dots$  se numesc **armonici superioare**.

În aplicațiile practice, numărul armonicilor superioare semnificative este limitat. Astfel, dezvoltarea în serie Fourier a mărimilor periodice nesinusoidale conține un număr finit de termeni. Problema care se pune este determinarea coeficienților  $U_o$ ,  $A_n$  și  $B_n$ , respectiv a amplitudinii  $U_{nm}$  și a fazei inițiale  $\varphi_n$ .

Ținând cont de următoarele relații evidente:

$$\int_0^T \sin n\omega t \, dt = 0; \quad \int_0^T \cos n\omega t \, dt = 0;$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin k\omega t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T [\cos(n-k)\omega t - \cos(n+k)\omega t] dt = \begin{cases} 0; & n \neq k \\ T/2; & n = k \end{cases};$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos k\omega t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T [\cos(n-k)\omega t + \cos(n+k)\omega t] dt = \begin{cases} 0; & n \neq k \\ T/2; & n = k \end{cases};$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \cos k\omega t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T [\sin(n-k)\omega t + \sin(n+k)\omega t] dt = 0 \quad (12.5)$$

și aplicând-le relației (12.2) rezultă valorile coeficienților  $U_o$ ,  $A_n$  și  $B_n$ :

$$U_o = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt; \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin n\omega t \, dt;$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos n\omega t \, dt \quad (12.6)$$

Există următoarele **cazuri particulare**:

- Dacă funcția  $u(t)$  este impară,  $u(-t) = -u(t)$ , din relațiile (12.6) rezultă:  $U_o = 0$  și  $B_n = 0$ , iar dezvoltarea în serie Fourier va avea forma:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin n\omega t, \quad \text{unde:} \quad (12.7)$$

$$U_{nm} = A_n; \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} B_n / A_n = 0 \quad (12.8)$$

- Dacă funcția  $u(t)$  este pară,  $u(-t) = u(t)$ , rezultă  $A_n = 0$ , iar dezvoltarea în serie Fourier va avea forma:

$$u(t) = U_o + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \cos n\omega t, \quad \text{unde:} \quad (12.9)$$

$$U_{nm} = B_n; \quad \varphi_n = \arctg B_n / A_n = \arctg(\infty) = \pi/2; \\ \sin(n\omega t + \pi/2) = \cos n\omega t \quad (12.10)$$

- Dacă funcția  $u(t)$  este simetrică,  $u(t) = u(t \pm T/2)$ , rezultă  $U_0 = 0$ , iar amplitudinile de ordin par  $A_2, A_4, A_6, \dots, B_2, B_4, B_6, \dots$  sunt nule. În acest caz  $u(t)$  conține numai armonici impare (prin descompunerea sa în armonici, rezultă numai armonicile de ordin impar în sinus):

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin n\omega t; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (12.11)$$

### Exemplu

Să se descompună în armonici tensiunea periodică nesinusoidală  $u(t)$  cu variație în timp sub formă de impulsuri dreptunghiulare (fig. 12.1), având perioada  $T = 2\pi/\omega = a + b$ .

Tensiunea  $u(t)$  se dezvoltă în serie Fourier conform relației (12.2):

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t)$$

Ținând cont de relațiile (12.6) componenta continuă  $U_0$  și respectiv, coeficienții  $A_n$  și  $B_n$  se calculează astfel:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{a+b} U dt \Rightarrow$$

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^a U dt = \frac{a}{T} U = \frac{a}{a+b} U; \quad u(t) \text{ pe intervalul } b \text{ este nulă}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{a+b} \int_0^{a+b} U \sin n\omega t dt = \frac{2U}{a+b} \int_0^a \sin n\omega t dt \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2U}{a+b} \frac{1}{n\omega} (1 - \cos n\omega a) = \frac{U}{n\pi} \left( 1 - \cos n \frac{2\pi a}{a+b} \right); \quad \text{unde } (a+b)\omega = 2\pi$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{a+b} \int_0^{a+b} U \cos n\omega t dt = \frac{2U}{a+b} \int_0^a \cos n\omega t dt \Rightarrow$$

$$B_n = \frac{2U}{a+b} \frac{1}{n\omega} \sin n\omega a = \frac{U}{n\pi} \sin n \frac{2\pi a}{a+b}$$

de unde se determină coeficienții  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ , dând lui  $n$  valori corespunzătoare.

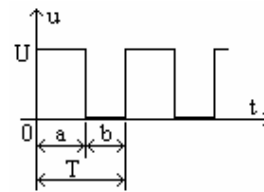


Fig. 12.1 Semnal sub formă de impulsuri dreptunghiulare



## 12.2 VALORILE EFECTIVE ALE CURENTULUI ȘI TENSIUNII ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Valoarea efectivă  $I$  a unui curent periodic nesinusoidal  $i(t)$  se definește la fel ca și valoarea efectivă a curentului sinusoidal:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (12.12)$$

Prin dezvoltarea în serie Fourier a curentului periodic nesinusoidal, se obține:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} (n\omega t - \varphi_n) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) \quad (12.13)$$

unde  $I_0$  este componenta continuă (constantă), iar:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1); & i_2(t) &= I_{2m} \sin(2\omega t - \varphi_2); \\ i_3(t) &= I_{3m} \sin(3\omega t - \varphi_3); \dots \end{aligned} \quad (12.14)$$

Pătratul valorii instantanee a curentului a curentului nesinusoidal va fi dat de relația:

$$\begin{aligned} i^2(t) &= [I_0 + i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots]^2 \Rightarrow \\ i^2(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} i_n^2(t) + 2 \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} i_n(t) \cdot i_k(t) \end{aligned} \quad (12.15)$$

unde se ține cont că  $I_0 = i_0(t)$ .

Rezultă pentru pătratul valorii efective expresia:

$$I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_n^2(t) dt + 2 \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{1}{T} \int_0^T i_n(t) \cdot i_k(t) dt \quad (12.16)$$

Al doilea termen al relației (12.16) este nul, astfel valoarea efectivă a armonicilor de ordinul  $n$  a curentului va fi dată de relația:

$$I_n^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i_n^2(t) dt \quad (12.17)$$

de unde rezultă:

$$I^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots, \quad \text{unde } I_{nm} = \sqrt{2} I_n \quad (12.18)$$

sau:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (12.19)$$

Valoarea efectivă a unui curent periodic nesinusoidal este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor efective ale armonicilor lor, adunată cu pătratul componentei continue.

Printr-un raționament asemănător, valoarea efectivă a unei tensiuni nesinusoidale  $u(t)$  va fi dată de relația:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \quad (12.20)$$

Abaterăa unei mărimi periodice nesinusoidale de la forma sinusoidală este caracterizată prin **coeficientul de distorsiune**  $K_d$ , definit ca fiind raportul dintre valoarea efectivă a tuturor armonicilor superioare (deci fără cea fundamentală) și valoarea efectivă a mărimii nesinusoidale, mai puțin componenta continuă, care nu afectează forma.

Rezultă relația:

$$K_{di} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2 / \sum_{n=2}^{\infty} I_n^2}}{\sqrt{I^2 - I_0^2}} = \frac{I_d}{\sqrt{I^2 - I_0^2}} \quad (12.21)$$

$$K_{du} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2 / \sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{\sqrt{U^2 - U_0^2}} = \frac{U_d}{\sqrt{U^2 - U_0^2}} \quad (12.22)$$

unde:  $I_d$  reprezintă reziduu deformat referitor la curenți, iar  $U_d$  – reziduu deformat referitor la tensiuni. Se observă că  $0 < K_d < 1$  (coeficientul de distorsiune este subunitar).

În electrotehnică, o mărime se consideră sinusoidală dacă coeficientul de distorsiune este mai mic decât 5%.

### 12.3. PUTERILE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

**Puterea activă** se definește ca fiind valoarea medie în raport cu o perioadă a puterii electromagnetice instantanee:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \, i \, dt \quad (12.23)$$

unde:

$$\begin{aligned} u &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin n\omega t ; \\ i &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t - \varphi_n) ; \\ u_n &= U_{nm} \sin n\omega t = \sqrt{2} U_n \sin n\omega t ; \\ i_n &= I_{nm} \sin(n\omega t - \varphi_n) = \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t - \varphi_n) \end{aligned} \quad (12.24)$$

În relațiile prezentate,  $U_n$  și  $I_n$  reprezintă valoarea efectivă a tensiunii, respectiv a curentului, corespunzătoare armonicii  $n$ , iar  $\varphi_n$  reprezintă defazajul dintre tensiune și curent corespunzător armonicii  $n$ . Pentru simplificarea calculelor se presupun fazele inițiale ale celor două mărimi nule.

Înlocuind relațiile (12.24) în relația (12.23), se obține pentru puterea activă următoarea expresie:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \int_0^T u i \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin n\omega t \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left[ I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t - \varphi_n) \right] dt \Rightarrow \\
P &= U_0 I_0 + \frac{U_0}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t - \varphi_n) dt + \frac{I_0}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \sqrt{2} U_n \sin n\omega t \, dt + \\
&\quad + \frac{1}{T} \sum_{k,n=1}^{\infty} \int_0^T (\sqrt{2} U_n \sin n\omega t) \cdot [\sqrt{2} I_k \sin(k\omega t - \varphi_k)] \, dt \quad (12.25)
\end{aligned}$$

Ținând cont că:  $\frac{1}{T} \int_0^T u_n i_k \, dt = 0$ , pentru  $n \neq k$  și cu notația  $\sum_{k,n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty}$  se

obține pentru puterea activă relația:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \quad (12.26)$$

Puterea activă în regim nesinusoidal este suma dintre produsul termenilor constanți (puterea de curent continuu) și suma puterilor active corespunzătoare fiecărei armonici în parte.

**Puterea reactivă**, definită în mod analog ca sumă a puterilor reactive ale armonicilor de același ordin, se exprimă cu relația:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \quad (12.27)$$

**Puterea aparentă** se definește prin produsul valorilor efective ale tensiunii și curentului:

$$S = UI = \sqrt{(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots)} \sqrt{(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots)} \quad (12.28)$$

În regim sinusoidal, relația dintre cele trei puteri era:  $S^2 = P^2 + Q^2$ . În regim nesinusoidal, relația dintre puteri devine:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (12.29)$$

unde **D** este **puterea deformată**, unitatea de măsură a acesteia fiind denumită volt-mpere-deformat [**VAD**].

Expresia puterii aparente se determină astfel:

$$\begin{aligned}
D^2 &= S^2 - (P^2 + Q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_n^2 - \\
&\quad - \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k \right)^2 \right] \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$D^2 = \sum_{\substack{n,k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} [U_n^2 I_k^2 - 2U_n U_k I_n I_k \cos(\varphi_n - \varphi_k)] \quad (12.30)$$

Utilizând notația  $\sum_{\substack{k,n=0 \\ k \neq n}}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty}$  se obține:

$$D = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [U_n^2 I_k^2 - 2U_n U_k I_n I_k \cos(\varphi_n - \varphi_k)]} \quad (12.31)$$

#### 12.4. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

În cazul circuitelor electrice liniare este valabilă teorema superpoziției și se poate utiliza metoda suprapunerii efectelor. Astfel, dacă circuitul este alimentat cu surse, care au t.e.m. nesinusoidale, regimul permanent al circuitului se poate determina suprapunând în fiecare latură curenții pe care i-ar produce fiecare dintre armonicile de același ordin ale tuturor tensiunilor. În acest fel, studiul în regim nesinusoidal al unei rețele liniare se reduce la studiul funcționării aceleiași rețele în mai multe regimuri sinusoidale, cu pulsații diferite ( $n\omega$ ), în care  $\omega$  este pulsația fundamentală. Numărul  $n$  al problemelor elementare care trebuie rezolvate este egal cu numărul de armonici al seriei care reprezintă t.e.m. ale surselor.

Pentru studiul regimurilor armonice elementare se poate utiliza oricare dintre metodele regimului permanent sinusoidal, inclusiv reprezentarea în complex. Se ține cont că pentru armonica de ordin  $n$ , reactanța bobinelor ideale este de  $n$  ori mai mare decât pentru armonica fundamentală, iar reactanța condensatoarelor ideale – de  $n$  ori mai mică.

La mărimile periodice nesinusoidale rezultante nu se poate utiliza reprezentarea în complex simplificată, ci numai cea în complex nesimplificată sau reprezentarea, prin valori instantanee, sub forma seriilor Fourier.

Dacă tensiunea unei laturi (sau a unei porțiuni de rețea) este de forma:

$$u(t) = U_o + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n) \quad (12.32)$$

curentul prin latură va fi, în general, de forma:

$$i(t) = I_o + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \quad (12.33)$$

Dacă latura conține condensatoare conectate în serie, curentul prin latură nu va avea componentă continuă (în regim permanent). De asemenea, dacă latura are o bobină ideală în derivație, în regim permanent latura nu poate avea o componentă continuă a tensiunii. Regimul componentelor continue ale

tensiunilor și curenților se determină pe o rețea în care se consideră scurtcircuitate bobinele ideale și întrerupte condensatoarele ideale. Topologia aceste rețele (de curent continuu) poate fi mult diferită de cea a rețelelor de curent alternativ pe care se studiază regimurile sinusoidale. În continuare se consideră nule componentele continue ale tensiunilor și curenților,  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$  și  $\mathbf{I}_0 = \mathbf{0}$ .

Pentru exemplificare, se consideră o latură pasivă, necuplată magnetic (având rezistență, inductivitate proprie și capacitate în serie), căreia i se aplică tensiunea sinusoidală:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n) \quad (12.34)$$

În regim permanent, curentul prin latură va fi de forma:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \quad (12.35)$$

unde valoarea efectivă  $I_n$  a armonicii  $n$  a curentului se calculează cu impedența  $Z_n$  corespunzătoare pulsației  $n\omega$ :

$$Z_n = \sqrt{R^2 + \left( n\omega L - \frac{1}{n\omega C} \right)^2} \quad (12.36)$$

rezultând:

$$I_n = U_n / Z_n \quad (12.37)$$

iar defazajul  $\varphi_n$  este dat de relația:

$$\varphi_n = \arctg \frac{n\omega L - 1/(n\omega C)}{R} \quad (12.38)$$

Se observă că impedența  $Z_n$  și defazajul  $\varphi_n$  de pînd de ordinul  $n$  al armonicii, ceea ce face ca forma curbei curentului să fie diferită de cea a tensiunii.

Dacă latura conține numai un rezistor ideal ( $L = 0$  și  $C \rightarrow \infty$ ), pentru  $Z_n = R$  și  $\varphi_n = 0$ , curentul rămîne proporțional cu tensiunea în fiecare moment de timp:

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} U_n}{R} \sin(n\omega t + \beta_n) \quad (12.39)$$

Puterea activă este egală cu puterea aparentă, iar puterile reactivă și deformată sunt nule. Dacă latura se reduce la o bobină ideală ( $R = 0$  și  $C \rightarrow \infty$ ), impedența circuitului variază proporțional cu ordinul armonicii  $Z_n = n\omega L$ , iar defazajul este constant și egal cu  $\pi/2$  ( $\varphi_n = \pi/2$ ). Curentul prin bobină se calculează cu relația:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} U_n}{n\omega L} \sin(n\omega t + \beta_n - \pi/2) \quad (12.40)$$

Se observă că ponderea armonicilor superioare în curba curentului este mai mică decât în curba tensiunii, deci deformarea curentului prin bobina ideală este mai mică decât cea a tensiunii la borne.

Dacă latura se reduce la un condensator ideal ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ ), se obține pentru curent următoarea expresie:

$$i_c(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} n\omega C U_n \sin(n\omega t + \beta_n + \pi/2) \quad (12.41)$$

Impedanța scade pe măsura creșterii ordinului armonicii  $\mathbf{Z}_n = 1/(n\omega C)$ , iar defazajul este constant și egal cu  $-\pi/2$  ( $\varphi_n = -\pi/2$ ). În curba curentului ponderea armonicilor superioare este mai mare decât în curba tensiunii, deci curentul prin condensator este mai deformat decât tensiunea la bornele sale.

În cazul unei laturi care conține toți parametrii  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$ , dacă pentru o armonică de ordin  $k$  este îndeplinită condiția de rezonanță serie:

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C} \quad \text{sau} \quad k^2 \omega^2 LC = 1 \quad (12.42)$$

impedanța circuitului pe această armonică ia valoarea minimă,  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{R}$ .

### 12.5. REGIMUL DEFORMANT AL CIRCUITELOR TRIFAZATE ECHILIBRATE ÎN REGIM SIMETRIC

În circuitele trifazate echilibrate, care funcționează în regim simetric, mărimile corespunzătoare celor trei faze au practic aceeași formă de variație în timp, însă sunt decalate unele față de altele cu câte o treime de perioadă. Astfel, dacă tensiunea corespunzătoare fazei  $\mathbf{A}$  este de forma:

$$u_A(t) = f(t) = f(t + T) \quad (12.43)$$

atunci tensiunile corespunzătoare fazelor  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{C}$  vor fi:

$$u_B(t) = f(t - T/3); \quad u_C(t) = f(t - 2T/3) \quad (12.44)$$

unde  $T$  este perioada funcției  $f(t)$ .

Dacă mărimile de fază sunt nesinusoidale, ele se pot dezvolta în serie Fourier. Se consideră tensiunea faze  $\mathbf{A}$  de forma următoare:

$$u_A(t) = f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n) \quad (12.45)$$

Armonica de ordin  $n$  a funcției  $f(t)$  pentru cele trei faze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , va fi dată de relațiile:

$$\begin{aligned} u_{An}(t) &= \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n); \\ u_{Bn}(t) &= \sqrt{2} U_n \sin[n\omega(t - T/3) + \beta_n] = \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n - 2n\pi/3); \\ u_{Cn}(t) &= \sqrt{2} U_n \sin[n\omega(t - 2T/3) + \beta_n] = \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \beta_n - 4n\pi/3) \end{aligned} \quad (12.46)$$

Din expresiile obținute rezultă anumite proprietăți la diferite valori ale ordinului  $n$  al armonicii:

- pentru  $n = 3k$ , unde  $k$  este un număr natural, mărimile corespunzătoare celor trei faze formează un sistem homopolar (sunt în fază);
- pentru  $n = 3k+1$ , mărimile corespunzătoare celor trei faze formează un sistem trifazat de succesiune directă;
- pentru  $n = 3k-1$ , mărimile corespunzătoare celor trei faze formează un sistem trifazat de succesiune inversă.

Astfel, armonicile de ordin 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... formează sisteme trifazate directe, armonicile de ordin 2, 5, 8, 11, 14, ... formează sisteme trifazate inverse, iar armonicile de ordin 3, 6, 9, 12, 15, ... formează sisteme trifazate homopolare.

În majoritatea cazurilor mărimile nesinusoidale sunt alternate simetric, deci seriile Fourier nu conțin decât armonici de ordin impar. În continuare se consideră numai cazul în care: armonicile de ordin 1, 7, 13, ... formează sisteme directe; armonicile de ordin 5, 11, 17, ... formează sisteme inverse; armonicile de ordin 3, 9, 15, ... formează sisteme homopolare.

Dacă tensiunile de fază ale unui generator sunt nesinusoidale și fazele sunt conectate în stea, în tensiunile de linie nu apar armonicile de ordin multiplu de 3 (deoarece formează sisteme homopolare), iar celelalte armonici apar înmulțite cu  $3^{1/2}$ . În cazul acesta valorile efective ale tensiunii de fază și de linie sunt date de relațiile:

$$U_r = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}; \quad U_l = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots} \quad (12.47)$$

Rezultă că dacă tensiunile sunt nesinusoidale, atunci:

$$U_l \leq \sqrt{3} U_r \quad (12.48)$$

La funcționarea în regim nesinusoidal curentul conductorului neutru al circuitelor trifazate poate fi diferit de zero și în cazul sarcinilor echilibrate. Armonicile de ordin multiplu de 3 ale curenților formează sisteme homopolare și prin conductorul neutru se va închide triplul sumei curenților armonicilor de ordin multiplu de trei. Curentul prin conductorul de nul va avea valoarea efectivă:

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}; \quad (12.49)$$

La conectarea în triunghi a fazelor generatorului trifazat cu t.e.m. nesinusoidale, suma acestor tensiuni nu mai este nulă ca în cazul undelor sinusoidale, ci este egală cu triplul sumei armonicilor de ordin multiplu de trei.

Triunghiul deschis al celor trei faze cu t.e.m. nesinusoidale se comportă ca o sursă monofazată de frecvență triplă. Dacă se închide triunghiul fazelor, în circuitul închis format se stabilește un curent de circulație, care conține numai armonici de ordin multiplu de trei. Curentul de circulație există și atunci când circuitul exterior (de sarcină) al generatorului este deschis (funcționează în gol).

Căderile de tensiune produse de curenții de circulație fac ca în tensiunile de linie să nu apară armonicile de ordin multiplu de trei.

La conexiunea în triunghi a fazelor, curenții de linie nu conțin armonici de ordin multiplu de trei, deoarece fiecare curent de linie reprezintă diferența a câte doi curenți de fază. De exemplu pentru conexiunea în triunghi a unei surse trifazate în care sfârșitul unei faze se conectează la începutul fazei următoare, se obțin relațiile:

$$i_R = i_A - i_C; \quad i_S = i_B - i_A; \quad i_T = i_C - i_B \quad (12.50)$$

Dacă curentul de fază are valoarea efectivă:

$$I_f = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 \dots}; \quad (12.51)$$

în regim simetric curentul de linie al sursei trifazate conectate în triunghi va avea valoarea efectivă:

$$I_l = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2 \dots}; \quad (12.52)$$

și deci:

$$I_l \leq \sqrt{3} I_f \quad (12.53)$$

## 12.6. CIRCUITE PENTRU FILTRAREA ARMONICILOR DE TENSIUNE SAU DE CURENT

Pentru a scoate în evidență sau a reduce unele armonici din curba tensiunii sau a curentului unui receptor se utilizează circuite auxiliare rezonante, formate din bobine și condensatoare, conectate în serie sau în paralel, având frecvența de rezonanță egală cu frecvența armonicilor respective. Asemenea circuite se numesc circuite de filtrare sau filtre electrice.

De exemplu, pentru a reduce în curentul unui receptor arminica de curent de ordinul  $k$ , în serie cu receptorul se conectează un circuit  $L_1, C_1$  paralel (fig. 12.2 a), acordat pe arminica de ordin  $k$ ,  $k\omega L_1 = 1/(k\omega C_1)$ . Acest circuit prezintă o impedanță  $Z_k$  foarte mare pentru arminica de curent de ordin  $k$  și astfel, la conectarea sa în serie cu receptorul, arminica  $k$  a curentului va fi mult redusă.

Cu un circuit  $L_2, C_2$  serie (fig. (12.2 b), acordat pe o armină de ordin  $n$ , conectat în paralel cu receptorul, se poate reduce arminica de ordin  $n$  a tensiunii, circuitul serie  $L_2, C_2$  constituind practic un scurtcircuit pentru aceasta.

Dacă din curba curentului trebuie eliminate mai multe armonici, se pot utiliza mai multe filtre de tipul circuit  $L, C$  paralel, conectate în serie, fiecare fiind acordat pe câte o arminică. De asemenea, dacă din curba tensiunii se dorește eliminarea mai multor armonici, se utilizează mai multe circuite de tipul  $L, C$  serie, conectate în paralel cu receptorul.

Atunci când receptorul este deformant de prima speță (fiind alimentat cu tensiune sinusoidală primește un curent nesinusoidal), acesta se comportă ca un



generator de curenți pe armonicile superioare. Conectarea în paralel cu receptorul deformat a unor circuite rezonante  $L, C$  serie crează o cale de mică impedanță pentru închiderea acestor curenți, ceea ce limitează aria de răspândire a regimului deformat.

O metodă mai puțin eficientă este utilizarea circuitului rezonant paralel conectat în paralel cu receptorul, sau a circuitului rezonant serie conectat în serie cu receptorul, datorită “dezacordării” și reducerii factorului de calitate al circuitului rezonant. Acordarea la rezonanța serie a receptorului se poate utiliza uneori în scopul scoaterii în evidență a unei anumite armonici (în cazul circuitelor multiplicatoare de frecvență).

Uneori sunt utilizate și filtre combinate, care atenuează o armonică de curent de ordin  $p$  și scot în evidență o altă armonică, de ordin  $q > p$  (fig. 12.2 c).

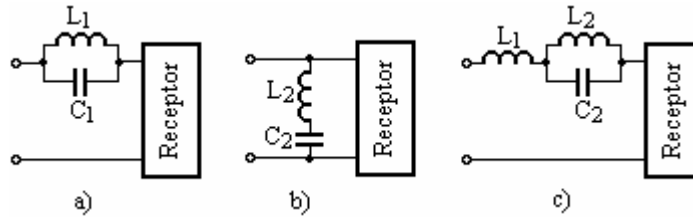


Fig. 12.2 Circuite de filtrare utilizate în instalațiile de “curenți tari”

În cazul unui receptor pur rezistiv, parametrii circuitului din figura 12.2 c trebuie să satisfacă următoarele relații:

- armonica de ordin  $p$  este atenuată prin rezonanța paralel a circuitului  $L_2, C_2$ ;

$$B_p = 0 \Rightarrow 1/(p\omega L_2) = p\omega C_2 \quad (12.54)$$

- armonica de ordin  $q$  este scoasă în evidență prin rezonanța serie a circuitului combinat  $L_1, L_2, C_2$ ;

$$X_q = 0 \Rightarrow q\omega L_1 + \frac{q\omega L_2 [-1/(q\omega C_2)]}{q\omega L_2 - 1/(q\omega C_2)} = 0 \quad (12.55)$$

Rezultă condițiile:

$$p^2 \omega^2 L_2 C_2 = 1; \quad L_1 = \frac{L_2}{q^2 \omega^2 L_2 C_2 - 1} = \frac{L_2}{q^2 / p^2 - 1} \quad (12.56)$$

Ultima condiție poate fi satisfăcută numai dacă  $q > p$ . Pentru triplorul de frecvență  $q/p = 3$  și rezultă  $L_2 = 8L_1$ .

### 13. CIRCUITE ELECTRICE NELINIARE ÎN REGIM PERIODIC PERMANENT

#### 13.1. ELEMENTE DE CIRCUIT NELINIARE

Circuitele electrice neliniare sunt acele circuite care conțin elemente neliniare (a căror funcționare nu poate fi descrisă prin relații analitice). Caracteristicile elementelor neliniare de circuit sunt neliniare. La un rezistor este vorba de caracteristica curent-tensiune, la o bobină de caracteristica flux magnetic-curent, iar la un condensator de caracteristica sarcină electrică-tensiune.

Un circuit electric se spune că este neliniar atunci când conține cel puțin un element neliniar. O particularitate importantă a funcționării elementelor de circuit neliniare în regim periodic este aceea că tensiunea și curentul lor nu pot fi ambele, simultan, funcții sinusoidale de timp. Din această cauză, aceste elemente sunt surse de regim nesinusoidal (regim deformant) de prima categorie (produc regim nesinusoidal chiar la alimentarea cu o tensiune sau cu un curent sinusoidal).

În figura 13.1 sunt reprezentate simbolurile grafice utilizate în schemele electrice pentru rezistorul neliniar (a), pentru bobina neliniară (b, c – ultimul simbol fiind uzual pentru bobinele cu miez feromagnetic) și pentru condensatorul neliniar (d).

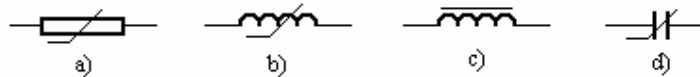


Fig. 13.1 Simbolurile grafice ale elementelor neliniare de circuit

Din punct de vedere al caracteristicii există elemente neliniare cu caracteristici simetrice, care pot fi cu simetrie pară sau cu simetrie impară și elemente neliniare cu caracteristici nesimetrice (de exemplu caracteristica care corespunde unei diode). O caracteristică este univocă dacă la o anumită valoare a uneia dintre mărimi corespunde o singură valoare pentru cealaltă mărime; în caz contrar caracteristica este neunivocă (multiformă). De exemplu, caracteristicile care prezintă histerezis sunt neunivoce. Caracteristicile mai pot fi monoton crescătoare, monoton descrescătoare și caracteristici care nu sunt cu variație monotonă în întregul domeniu de variație al mărimilor.

Un element neliniar este neinerțial dacă atât caracteristica în valori momentane cât și caracteristica în valori efective sunt neliniare, aceste caracteristici având în general forme diferite. Dacă numai caracteristica în valori efective este neliniară, elementul este inerțial. Un exemplu tipic de element inerțial este rezistorul la care neliniaritatea apare ca urmare a încălzirii rezultate prin trecerea curentului electric (de ex. un bec cu incandescență).

Dispozitivele electronice neliniare sunt în majoritatea cazurilor elemente neinerțiale. Alte elemente neinerțiale sunt bobina cu miez feromagnetic și condensatorul cu pierderi.

Pentru caracterizarea elementelor neliniare de circuit se introduc **parametrii statici și dinamici**. În cazul unei **bobine**, interesează atât ciclul de histerezis (static sau dinamic) cât și caracteristica magnetică  $\psi(i)$ . Caracteristica  $\psi(i)$  care corespunde locului geometric al vârfurilor ciclurilor de histerezis simetrice se numește și caracteristică magnetică fundamentală. Forma ciclurilor dinamice depinde de pierderile în fier, respectiv de frecvență, iar aria acestora este cu atât mai mare cât pierderile sunt mai mari.

Inductivitățile statică  $L_{st}(i)$  și respectiv, dinamică (diferențială)  $L_d(i)$ , corespunzătoare punctului de funcționare considerat de pe caracteristica flux magnetic-curent, se definesc cu relațiile:

$$L_{st}(i) = L(i) = \psi(i)/i; \quad L_d(i) = d\psi(i)/di \quad (13.1)$$

Se observă că între inductivitatea statică și cea dinamică există următoarea relație:

$$L_d(i) = \frac{d}{di}(Li) = L(i) + i \frac{dL(i)}{di} \quad (13.2)$$

iar expresia tensiunii momentane la bornele bobinei neliniare (ideale) se poate scrie și sub forma:

$$u_L(t) = \frac{d\psi}{dt} = L_d(i) \frac{di(t)}{dt} \quad (13.3)$$

În mod analog, la un condensator neliniar se definește capacitatea statică  $C(u)$  și respectiv, capacitatea dinamică  $C_d(u)$ , corespunzătoare punctului de funcționare considerat de pe caracteristica sarcină-tensiune:

$$C(u) = q(u)/u; \quad C_d(u) = dq(u)/du \quad (13.4)$$

Relația de legătură între cele două capacități este următoarea:

$$C_d(u) = C(u) + u \frac{dC(u)}{du} \quad (13.5)$$

Valoarea momentană a curentului condensatorului neliniar se poate exprima prin intermediul capacității dinamice sub forma:

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt} = C_d(u) \frac{du(t)}{dt} \quad (13.6)$$

### 13.2. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE NELINIARE

Calculul circuitelor electrice neliniare resupune cunoașterea caracteristicilor elementelor neliniare componente. Aceste sunt date în mod obișnuit sub forma unor reprezentări grafice obținute pe cale experimentală. Pentru aplicarea unora din metodele analizei neliniare, aceste caracteristici trebuie să fie aproximare prin expresii matematice. Funcțiile de aproximare trebuie să redea

cât mai exact caracteristicile elementelor neliniare și de asemenea, trebuie să aibă expresii relativ simple.

Aproximarea caracteristicilor neliniare se poate realiza prin segmente de dreaptă, prin diferite polinoame și funcții transcendente. În acest sens pot fi menționate polinoamele de puteri, polinoamele de exponențiale și polinoamele trigonometrice (respectiv aproximarea printr-o dezvoltare Fourier limitată).

Un polinom de puteri se exprimă sub forma:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (13.7)$$

iar un polinom de exponențiale sub forma:

$$y = a_1 \exp(b_1x) + a_2 \exp(b_2x) + \dots + a_n \exp(b_nx) \quad (13.8)$$

Se poate observa că prin dezvoltarea în serie de puteri a termenilor funcției dată de relația (13.8) rezultă, în final, un polinom de puteri.

Pentru determinarea coeficienților care intervin în diferitele funcții de aproximare există metode consacrate (metoda punctelor de coincidență, metoda celor mai mici pătrate, metoda rectificării). De exemplu, la aproximarea printr-un polinom de puteri (rel. 13.7) metoda punctelor de coincidență constă în alegerea pe caracteristica neliniară, stabilită pe cale experimentală, a unui număr de puncte egal cu cel al coeficienților necunoscuți, ( $n + 1$ ). Introducând în funcția de aproximare cele ( $n + 1$ ) perechi de valori ale mărimilor ( $x$ ,  $y$ ) corespunzătoare, se obține un sistem de ( $n + 1$ ) ecuații cu ( $n + 1$ ) necunoscute, acărui rezolvare conduce la determinarea coeficienților.

În continuare se prezintă unele exemple de aproximare. Caracteristica magnetică a unei bobine  $\psi(i)$ , care are alături unei curbe cu simetrie impară, se aproximează satisfăcător în multe probleme printr-un polinom incomplet de gradul trei, care are următoarea expresie:

$$x = a_1y + a_3y^3, \text{ respectiv } y = b_1x - b_3x^3 \quad (13.9)$$

O altă aproximare a acestei caracteristici este prin funcția transcendentă, dată de relația:

$$x = \alpha \operatorname{sh}(\beta y) \quad (13.10)$$

unde coeficienții  $\alpha$  și  $\beta$  se determină alegând două puncte situate pe caracteristică. Notând cu  $x_1$ ,  $y_1$  și  $x_2$ ,  $y_2$  coordonatele celor două puncte se obțin ecuațiile:

$$x_1 = \alpha \operatorname{sh}(\beta y_1); \quad x_2 = \alpha \operatorname{sh}(\beta y_2) \quad (13.11)$$

și făcând raportul lor se elimină coeficientul  $\alpha$ , iar din ecuația rezultată:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\operatorname{sh}(\beta y_2)}{\operatorname{sh}(\beta y_1)} \quad (13.12)$$

se determină coeficientul  $\beta$ .

Coeficientul  $\alpha$  se poate determina cu relația:

$$\alpha = x_2 / \operatorname{sh}(\beta y_2) \quad (13.13)$$

Caracteristica unei diode semiconductoare se aproximează frecvent prin funcția:

$$i = a [\exp(bu) - 1] \quad (13.14)$$

unde coeficienții  $a$  și  $b$  se determină simplu prin metoda punctelor de coincidență.

O problemă importantă care se pune în legătură cu analiza circuitelor electrice neliniare este stabilirea ecuațiilor diferențiale ale acestora, care conțin și termeni neliniari. Teoremele lui Kirchhoff se aplică corespunzător și în cazul circuitelor neliniare. Astfel, pentru fiecare nod ( $\lambda$ ) și respectiv, pentru fiecare ochi ( $\nu$ ) al circuitului se pot scrie relațiile:

$$\sum_{(\lambda)} i_k = 0; \quad \sum_{(\nu)} (u_b)_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{(\nu)} (u_e)_k = \sum_{(\nu)} u_k \quad (13.15)$$

Termenii neliniari apar la exprimarea tensiunilor la borne, respectiv a căderilor de tensiune pe laturile ochiului, ținând seama de caracteristicile elementelor neliniare care intervin.

Ecuațiile diferențiale ale circuitelor electrice neliniare se pot scrie sub forma generală:

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, t\right) = 0 \quad \text{sau} \quad F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots\right) = f(t) \quad (13.16)$$

în care intervine ca variabilă independentă timpul  $t$ , iar  $x$  este o variabilă dependentă din circuit (curent, flux magnetic etc.)

Aflarea soluțiilor ecuațiilor diferențiale neliniare este o problemă extrem de dificilă și nu există metode generale de rezolvare. În acest sens pot fi menționate unele dificultăți și totodată particularități specifice circuitelor electrice neliniare. Astfel, datorită caracterului neliniar nu se aplică teorema superpoziției, iar soluția generală  $x = x(t)$  a ecuației diferențiale (13.16), care descrie regimul tranzitoriu al circuitului, nu se poate descompune într-o componentă de regim liber și o componentă de regim forțat. În cazul unor circuite electrice neliniare în curent alternativ, care conțin bobine sau condensatoare neliniare, regimul permanent care se stabilește depinde și de starea circuitului dinaintea stabilirii acestui regim. În cazul circuitelor electrice neliniare există și regimuri libere care pot conduce la oscilații întreținute (autooscilații).

Pentru analiza circuitelor electrice neliniare au fost elaborate unele metode care permit obținerea soluțiilor aproximative ale unor tipuri de ecuații diferențiale neliniare. Aceste metode sunt analitice, grafo-analitice, numerice și analogice și în general, ele se limitează la ecuații diferențiale neliniare de ordinul întâi și doi.

Analiza circuitelor neliniare este în multe cazuri simplificată prin normarea ecuațiilor diferențiale corespunzătoare. Prin operația de normare termenii ecuației diferențiale devin adimensionali, iar studiul pe această bază este relativ

simplu și în același timp câștigă în generalitate, prin faptul că aceeași ecuație diferențială normată poate să corespundă la o clasă mai largă de circuite.

Principalele metode de studiu ale circuitelor electrice neliniare în regim periodic permanent sunt: metodele analitice și metodele grafice, respectiv grafo-analitice. În raport cu metodele grafice, metodele analitice permit, în cazurile în care acestea pot fi aplicate, efectuarea analizei într-o formă mai generală, rezultatele nefiind valabile numai pentru anumite valori particulare ale parametrilor care intervin. Metodele grafice sunt mai simple, însă pe baza acestora nu se pot decât analiza cu o aproximație destul de mare anumite aspecte caracteristice ale unor circuite neliniare.

O metodă analitică clasică în acest domeniu este metoda balantei armonice, aplicarea căreia presupune mai multe etape de calcul. Se stabilesc mai întâi ecuațiile diferențiale ale circuitului, se exprimă funcțiile de aproximare ale caracteristicilor elementelor neliniare și apoi se substituie aceste expresii analitice în ecuații diferențiale. Soluția căutată se scrie sub forma unei sume care cuprinde fundamentală și una sau mai multe armonici, reținute ca fiind mai semnificative pentru cazul considerat

Dacă se consideră numai fundamentală și armonică de ordinul  $k$ , soluția căutată va fi de forma:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_k \sin(\omega t + \varphi_k) \quad (13.17)$$

sau sub forme echivalentă:

$$x(t) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t \quad (13.18)$$

În forma (13.17) necunoscutele sunt amplitudinile  $A_1$ ,  $A_k$  și fazele  $\varphi_1$  și  $\varphi_k$ , iar în forma echivalentă (13.18) sunt amplitudinile funcțiilor în sinus și cosinus ( $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_k$  și  $b_k$ ).

După substituirea soluției (de ex. 13.18) în ecuația diferențială a circuitului și apoi dezvoltarea și ordonarea termenilor după armonicile în sinus și cosinus, se obține o relație de forma:

$$M(a_1, b_1, a_k, b_k) \sin \omega t + N(a_1, b_1, a_k, b_k) \cos \omega t + \\ + P(a_1, b_1, a_k, b_k) \sin k\omega t + Q(a_1, b_1, a_k, b_k) \cos k\omega t = 0 \quad (13.19)$$

în care, din motive de simplificare s-au reținut numai termenii care corespund fundamentale și armonicii de ordinul  $k$ , neglijându-se celelalte armonici. Din relația (13.19) se obține următorul sistem de ecuații algebrice care permite determinarea necunoscutelor ( $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_k$  și  $b_k$ ):

$$M(a_1, b_1, a_k, b_k) = 0; \quad N(a_1, b_1, a_k, b_k) = 0; \\ P(a_1, b_1, a_k, b_k) = 0; \quad Q(a_1, b_1, a_k, b_k) = 0 \quad (13.20)$$

Se poate observa că numărul ecuațiilor sistemului este dublu față de numărul armonicilor luate în considerare. Cu toate că metoda balanței armonice este în general destul de laborioasă, aceasta permite rezolvarea unor probleme destul de complexe, cum este de exemplu rezonanța circuitelor neliniare pe

armonici superioare sau subarmonici. O formă particulară a metodei balanței armonice rezultă dacă se consideră de la început numai fundamentalele mărimilor care intervin (metoda primei armonici).

O altă metodă analitică se bazează pe liniaritatea pe porțiuni a caracteristicii elementului neliniar. Ecuația diferențială neliniară se înlocuiește prin tot atâtea ecuații diferențiale liniare câte porțiuni liniarizate s-au considerat.

Un caz particular îl constituie circuitele neliniare la care intervin componente alternative ale tensiunii și curentului foarte mici în raport cu componentele continue care fixează punctele de funcționare pe caracteristici. În cazul acesta, pentru componentele alternative foarte mici circuitul poate fi considerat liniar, în schema electrică a acestuia considerându-se însă parametrii dinamici, care corespund tangentelor la caracteristicile elementelor neliniare în punctele de funcționare respective.

În anumite condiții de studiu simplificatoare, analiza circuitelor electrice neliniare în regim periodic permanent se poate face considerând elementele neliniare neinerțiale ca fiind inerțiale. În acest caz, în locul mărimilor reale nesinusoidale din circuit se introduc mărimi sinusoidale echivalente, iar caracterul neliniar intervine numai în raport cu valorile efective. Pe această cale se poate studia comportarea bobinei cu miez feromagnetic și ferorezonanța.

### 13.3. TRANSFORMĂRI ALE SPECTRULUI DE FRECVENȚĂ LA ELEMENTELE NELINIARE

În cazul elementelor neliniare, dacă excitație aplicată este o mărime sinusoidală cu pulsația  $\omega$ , răspunsul va fi periodic însă nesinusoidal, conținând un număr oarecare de armonici de pulsații  $k\omega$ , unde  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Spectrul acestor armonici depinde, în general, de caracterul neliniarității, de amplitudinea excitației și de punctul de funcționare pe caracteristică.

Dacă se consideră că excitația  $x$  are două componente sinusoidale de pulsații diferite  $\omega_1$  și  $\omega_2$ , respectiv acționează două semnale de excitație  $x_1$  și  $x_2$  care au aceste frecvențe,

$$x = x_1 + x_2 = X_{1m} \cos \omega_1 t + X_{2m} \cos \omega_2 t \quad (13.21)$$

și dacă pentru funcția de aproximare se consideră unpolinom de gradul doi, atunci pentru semnalul răspuns se obține expresia:

$$\begin{aligned} y = & a_0 + \frac{1}{2} a_2 (X_{1m}^2 + X_{2m}^2) + a_1 X_{1m} \cos \omega_1 t + a_1 X_{2m} \cos \omega_2 t + \\ & + \frac{1}{2} a_2 X_{1m}^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 X_{2m}^2 \cos 2\omega_2 t + a_2 X_{1m} X_{2m} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t] + \\ & + a_2 X_{1m} X_{2m} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \end{aligned} \quad (13.22)$$

din care rezultă că pe lângă termenul constat, fundamentalele și armonicile de ordinul doi ( $2\omega_1$  și  $2\omega_2$ ) corespunzătoare celor două pulsații ( $\omega_1$  și  $\omega_2$ ), apar și

armonici care au pulsațiile  $(\omega_1 + \omega_2)$  și  $(\omega_1 - \omega_2)$  numite armonici de combinație.

În cazul în care se consideră un polinom de gradul trei pentru aproximarea caracteristicii neliniare, pulsațiile de combinație care intervin sunt următoarele:  $\omega_1 + 2\omega_2$ ;  $|\omega_1 - 2\omega_2|$ ;  $2\omega_1 + \omega_2$ ;  $|2\omega_1 - \omega_2|$ . Într-un caz mai general, când se consideră pentru funcția de aproximare un polinom de gradul  $n$ , în afara termenul constant, armonicele  $k\omega_1$  și  $k\omega_2$  (unde  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ), în spectrul semnalului de răspuns intervin armonicele de combinație care au pulsațiile  $|k\omega_1 \pm p\omega_2|$ , unde  $k, p = 1, 2, 3, \dots, n$ , iar  $k + p \leq n$ . În anumite condiții pot interveni și subarmonici  $(\omega/k)$  ale semnalului de excitație. Astfel de subarmonici intervin, de exemplu, în cazul circuitelor rezonante descrise de ecuații de tip Duffing.

Transformarea spectrului semnalului răspuns în raport cu al semnalului excitație stă la baza realizării unor dispozitive tehnice impotante, putându-se menționa în acest sens: multiplicatoarele de frecvență, divizoarele de frecvență și schimbătoarele de frecvență. În cazul redresoarelor se urmărește prezența componentei continue în spectrul semnalului răspuns.

În cazul circuitelor cu elemente neliniare reactive se pot stabili unele relații energetice referitoare la armonicele care intervin. Astfel, se consideră un circuit care conține un element reactiv neliniar (bobină sau condensator), având o caracteristică fără histerezis, circuitul fiind alimentat de la două surse cu t.e.m. sinusoidale de pulsații  $\omega_1$  și  $\omega_2$ . Ca urmare a caracteristicii neliniare a elementului reactiv, în spectrul semnalului răspuns se găsesc armonici care au pulsațiile  $\omega_{k,p} = k\omega_1 + p\omega_2$ , (unde  $k$  și  $p$  sunt numere întregi, pozitive, negative sau nule). În aceste condiții se poate demonstra valabilitatea următoarelor relații [41]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{kP_{k,p}}{k\omega_1 + p\omega_2} = 0; \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{pP_{k,p}}{k\omega_1 + p\omega_2} = 0 \quad (13.23)$$

unde  $P_{k,p}$  este puterea activă corespunzătoare armonicii de pulsație  $\omega_{k,p}$ . Expresiile (13.23) sunt cunoscute în literatură sub denumirea de relațiile lui Manley-Rowe și ele relevă proprietatea circuitelor neliniare reactive de a permite transferul de putere de la o armonică la alta și corespund unei forme specifice de exprimare a conservării puterilor pentru cazul analizat.

Particularizarea relațiilor Manley-Rowe, în cazul unui multiplicator de frecvență reactiv, excitat cu un semnal sinusoidal de pulsație  $\omega$ , iar din semnalul de răspuns este extrasă armonică  $(k\omega)$  a excitației, este următoarea:

$$\frac{P_{1,0}}{\omega} + \frac{kP_{k,0}}{k\omega} = 0 \Rightarrow P_{1,0} = -P_{k,0} \quad (13.24)$$

ceea ce relevă faptul că multiplicatorul reactiv realizează transferul integral al puterii primite de la sursa de pulsație  $\omega$  în putere de pulsație  $(k\omega)$  la ieșirea



acestui. Pe baza relațiilor Manley-Rowe se poate analiza problema transferului de putere și la alte dispozitive cu elemente reactive neliniare (modulatoare și oscilatoare reactive).

### 13.4. BOBINA CU MIEZ FEROMAGNETIC

Miezul feromagnetic, cu permeabilitate magnetică mare față de cea a corpurilor neferomagnetice, se utilizează pentru realizarea circuitului magnetic al mașinilor, transformatoarelor și aparatelor electrice. Magnetizarea în c.a. a miezului feromagnetic este însoțită de următoarele fenomene:

- se stabilește un câmp magnetic variabil în timp, iar caracteristica magnetică flux-curent  $\phi(i)$  a bobinei cu miez feromagnetic este neliniară;
- datorită ireversibilității parțiale a fenomenului de magnetizare, variația inducției magnetice în timp determină o degajare de căldură în miezul feromagnetic, care reprezintă pierderile prin histerezis;
- materialul miezului feromagnetic având și proprietăți conductive, variația în timp a câmpului magnetic determină inducerea unor curenți electrici de conducție, numiți curenți turbionari sau curenți Foucault; pierderile prin efect Joule-Lenz determinate de acești curenți produc transformări ireversibile ale energiei electromagnetice prin degajare de căldură, cunoscute sub denumirea de pierderi prin curenți turbionari.

Se consideră o **bobină cu miez feromagnetic** (fig. 13.2 a), care are o înfășurare cu  $N$  spire, de rezistență  $R$ . Un curent  $i$ , care străbate bobina, produce un flux magnetic fascicular  $\phi_f$ , care are două componente:

$$\phi_f = \phi_{fu} + \phi_{fd} \quad (13.25)$$

unde  $\phi_{fu}$  reprezintă fluxul magnetic fascicular util, iar  $\phi_{fd}$  – fluxul magnetic fascicular de dispersie.

Fluxul magnetic total  $\phi$  al bobinei este dat de relația:

$$\phi = N(\phi_{fu} + \phi_{fd}) = N\phi_{fu} + L_d i = \phi_u + L_d i \quad (13.26)$$

unde  $\phi_u$  este fluxul magnetic util al bobinei, iar  $L_d$  – inductivitatea de dispersie a bobinei. Prin caracteristica magnetică a bobinei se înțelege dependența  $\phi_u(i)$  sau  $\phi(i)$ , numită și relație constitutivă a bobinei sau caracteristică flux-curent.

Ținând cont de relația (13.26) ecuația circuitului bobinei cu miez feromagnetic devine:

$$u = R i + \frac{d\phi}{dt} = R i + L_d \frac{di}{dt} + \frac{d\phi_u}{dt} \quad (13.27)$$

rezultând schema echivalentă din figura 13.2 b, în care o bobină cu miez feromagnetic, fără dispersie și fără rezistență, este conectată în serie cu un rezistor de rezistență  $R$  și cu o bobină ideală de inductivitate  $L_d$ .

Pentru a determina curentul de regim permanent al bobinei la o tensiune de alimentare sinusoidală dată, trebuie integrată ecuația diferențială (13.37), ținând

seama de dependența  $\phi_u(\mathbf{i})$  a bobinei. Rezolvarea exactă este posibilă numai cu metode numerice.

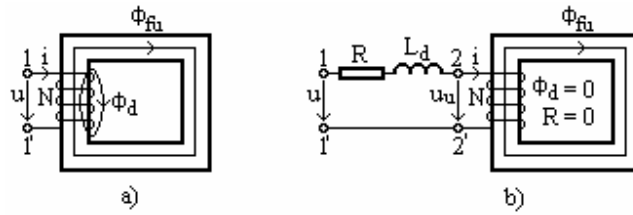


Fig. 13.2 Bobină cu miez feromagnetic

În numeroase cazuri practice este suficientă aproximația care se obține cu metoda grafico-analitică, care va fi prezentată în continuare. Considerând neglijabilă căderea de tensiune în rezistența și în inductivitatea de dispersie a bobinei, rezultă că la alimentarea cu tensiune sinusoidală va rămâne sinusoidală și tensiunea utilă  $u_u$ , aplicată bobinei cu miez feromagnetic:

$$u_u = u - R i - L_d \frac{di}{dt} = \frac{d\phi_u}{dt} \approx \sqrt{2} U_u \sin \omega t \quad (13.28)$$

Integrând această relație se obține fluxul util sinusoidal:

$$\phi_u = \phi_{\max} \sin(\omega t - \pi/2) \quad (13.29)$$

care are amplitudinea:

$$\phi_{\max} = \frac{\sqrt{2} U_u}{2\pi f} \approx \frac{U_u}{4,44f} \quad (13.30)$$

Rezultă că în miezul feromagnetic omogen inducția magnetică variază sinusoidal, cu amplitudinea:

$$B_m = \frac{\phi_{f \max}}{A_{Fe}} \approx \frac{U_u}{4,44f N A_{Fe}} \quad (13.31)$$

unde  $A_{Fe}$  este aria secțiunii transversale a miezului feromagnetic.

Cunoscând variația în timp a fluxului magnetic util  $\phi_u(\mathbf{t})$ , cu ajutorul caracteristicii magnetice dinamice  $\phi_u(\mathbf{i})$  în regim periodic se poate construi, punct cu punct, curba curentului (fig. 13.3). Pentru un moment de timp oarecare  $\mathbf{t}$ , din curba fluxului  $\phi_u(\mathbf{t})$  se deduce valoarea fluxului util  $\phi_u$  și corespunzător acestui flux, pe ciclul de magnetizare se determină curentul  $\mathbf{i}$  și se reprezintă valoarea lui la aceeași abscisă  $\mathbf{t}$ . În figura 13.3 se indică prin săgeți și linii întrerupte construcția unui punct al curbei curentului  $\mathbf{i}(\mathbf{t})$ .

Se observă, că datorită fenomenului de saturație magnetică, curba curentului este puternic deformată, având o formă ascuțită în vecinătatea maximumului, iar datorită ciclului de magnetizare dinamică, curentul trece prin zero, în același sens, înaintea fluxului util pe care îl produce. Curba curentului

este alternată simetric,  $i(t) = -i(t + T/2)$ , datorită simetriei ciclului de magnetizare. Armonica fundamentală a curentului rezultă defazată înaintea fluxului magnetic, efect datorat pierderilor în fier.

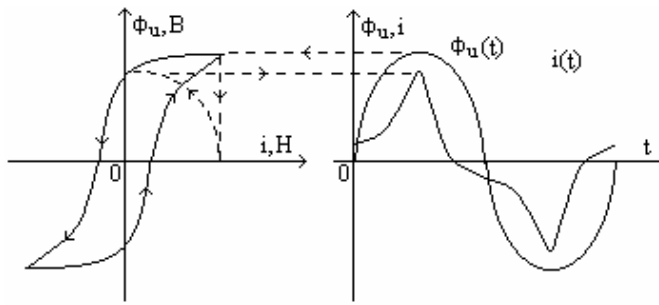


Fig. 13.3 Construcția grafică a curbei  $i(t)$

Multiplicând relația (13.270 cu  $i$  se obține relația de bilanț a puterilor instantanee:

$$u i = R i + \frac{d\phi}{dt} = R i + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_d i^2 \right) + i \frac{d\phi_u}{dt} \quad (13.32)$$

Media pe o perioadă a relației (13.32) reprezintă bilanțul puterilor active:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = R I^2 + f \oint i d\phi_u \quad (13.33)$$

unde:  $I$  este valoarea efectivă a curentului prin bobină, iar  $f$  este frecvența.

Integrala din membrul al doilea, care se efectuează în planul  $\{\phi_u, i\}$ , reprezintă energia iedută în miez într-un ciclu de magnetizare. Dacă se notează cu  $P_J = R I^2$  pierderile prin efect Joule-Lenz în bobină, rezultă că pierderile în fier  $P_{Fe}$  (puterea pierdută în procesul ciclic de magnetizare a miezului feromagnetic) este dată de relația:

$$P_{Fe} = P - P_J = f \oint i d\phi_u = P_h + P_t \quad (13.34)$$

unde:  $P_h$  reprezintă pierderile prin histerezis, iar  $P_t$  – pierderile prin curenți turbionari.

În aplicațiile tehnice, considerarea curentului nesinusoidal complică prea mult calculele. De aceea, în locul curentului nesinusoidal se consideră un curent sinusoidal echivalent. În ipoteza că tensiunea utilă este sinusoidală și este origine de fază, curentul echivalent are expresia:

$$i_e = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t - \varphi_e) = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t - \pi/2 + \delta_{Fe}) \quad (13.35)$$

Curentul sinusoidal echivalent este defazat în urma tensiunii utile cu unghiul  $\varphi_e$  și înaintea fluxului util cu unghiul  $\delta_{Fe} = \pi/2 - \varphi_e$ , numit unghi de pierderi în fier.

Cei doi parametri  $I_e$  și  $\varphi_e$  ai curentului sinusoidal echivalent se determină din următoarele două condiții:

1. pierderile în fier să fie egale cu cele reale:

$$P_{Fe} = U_u I_e \cos \varphi_e = U_u I_e \sin \delta_{Fe} \quad (13.36)$$

A doua condiție poate fi formulată în mai multe moduri:

- valoarea efectivă a curentului echivalent să fie egală cu valoarea efectivă a curentului nesinusoidal:

$$I_e^2 T = \int_0^T i^2 dt \quad (13.37)$$

- valoarea maximă a curentului echivalent să fie egală cu valoarea maximă a curentului nesinusoidal:

$$\sqrt{2} I_e = I_{\max} \quad (13.38)$$

- curentul echivalent să reprezinte fundamentală curentului nesinusoidal:

$$I_e T = 2 \int_0^T i \sin(\omega t - \varphi_e) dt \quad (13.39)$$

Se observă că a considera un curent sinusoidal echivalent revine la a înlocui ciclul de magnetizare dinamic cu un ciclu eliptic echivalent, de aceeași arie cu ciclul dinamic. Considerând un curent sinusoidal echivalent, bobina cu miez feromagnetic poate fi echivalată cu un receptor liniar (disipativ și inductiv). Bobina fără dispersie și fără rezistență (cu bornele fictive 2-2' din fig. 13.2 b) are impedanța echivalentă (schema echivalentă serie):

$$\underline{Z}_{Fe} = R_{Fe} + jX_{Fe} = \frac{U_u}{I_e} = \frac{U_u}{I_e} \exp(j\varphi_e) \quad (13.40)$$

sau admitanța echivalentă (schema echivalentă paralel):

$$\underline{Y}_{Fe} = G_{Fe} + jB_{Fe} = \frac{I_e}{U_u} = \frac{I_e}{U_u} \exp(-j\varphi_e) \quad (13.41)$$

Schemele echivalente ale bobinei cu miez feromagnetic sunt prezentate în figura 13.4. Parametrii schemelor echivalente serie și paralel se determină cu relațiile:

$$\begin{aligned} R_{Fe} &= \frac{P_{Fe}}{I_e^2}; & X_{Fe} &= \sqrt{(U_u / I_e)^2 - R_{Fe}^2}; \\ G_{Fe} &= \frac{P_{Fe}}{U_u^2}; & B_{Fe} &= \sqrt{(I_e / U_u)^2 - G_{Fe}^2} \end{aligned} \quad (13.42)$$

În schema echivalentă paralel curentul  $I_e$  se numește curentul de mers în gol, iar cele două componente ale acestuia  $I_{Fe}$  și respectiv,  $I_{\mu}$ , se numesc curent de pierderi și curent de magnetizare.

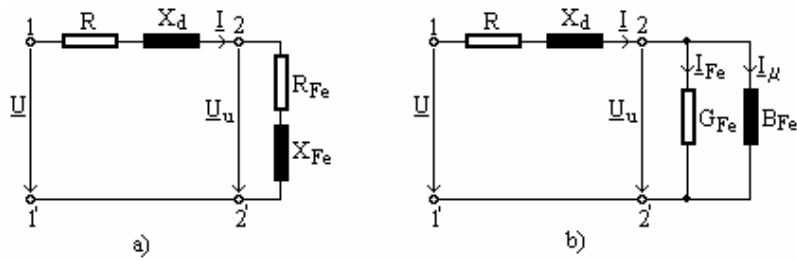


Fig. 13.4 Scheme echivalente ale bobinei cu miez feromagnetic  
 a) schema serie; b) schema mixtă (paralel)

Fenomenul de ferorezonanță intervine la circuitele constituite din bobine cu miez feromagnetic și condensatoare liniare conectate în serie sau în paralel. Circuitele cu ferorezonanță au o comportare diferită de a circuitelor liniare la rezonanță. O analiză calitativă, în scop de orientare, se poate face în condiții de studiu simplificatoare. Astfel, se neglijează pierderile în fier și se consideră mărimi sinusoidale echivalente (fundamentale), ținându-se seama de neliniaritatea bobinei numai prin caracteristica neliniară în valori efective a acesteia (element inerțial). Ferorezonanța de tensiune (în punctul de funcționare în care se obține ferorezonanța fundamentală curentului este aproximativ în fază cu tensiunea aplicată) apare în cazul unui circuit serie (bobină neliniară cu miez feromagnetic conectată în serie cu un condensator). Regimul de funcționare în care curentul principal din circuit se anulează se numește ferorezonanță de curent și este caracteristic circuitelor paralele cu ferorezonanță.

Un domeniu de aplicație al circuitelor cu ferorezonanță îl constituie realizarea unor stabilizatoare de tensiune, în curent alternativ. Acestea sunt dispozitive la care tensiunea de ieșire (care alimentează un receptor), este menținută practic constantă la variații relativ mari ale tensiunii de intrare (de la rețea).

### 13.5. ASPECTE CALITATIVE PRIVIND SOLUȚIILE CIRCUITELOR NELINIARE

Într-un circuit neliniar, un ansamblu de surse de tip exponențial impune, în general, o soluție de regim forțat care conține componente suplimentare, diferite de cele ale surselor.

Această afirmație poate fi ilustrată printr-o multitudine de aplicații de mare interes mai ales în electronică:

**Multiplicarea frecvenței** înseamnă obținerea unei soluții care conține multipli întregi ai frecvenței unei excitații armonice aplicate circuitului.

Principiul de funcționare a unui multiplicator de frecvență este bazat pe relațiile trigonometrice, simple, de tipul:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x, \dots,$$

$$\sin^n x = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (13.43)$$

Aplicând un semnal armonic unui rezistor cu caracteristică neliniară polinomială de forma:

$$i = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots + c_n u^n \quad (13.44)$$

curentul rezultat va avea forma:

$$i = A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \quad (13.45)$$

Cu ajutorul unui filtru trece-bandă (circuit care permite trecerea unor semnale cu frecvența cuprinsă într-un anumit interval) se poate selecta frecvența dorită.

În anumite situații, de exemplu utilizând elemente cu o anumită caracteristică neliniară, multiplicarea frecvenței poate fi obținută și fără a folosi vreun filtru. Astfel, se consideră un rezistor cu caracteristică statică (controlată în tensiune)  $i = 3u - 4u^3$ ,  $u \in [-1, 1]$ , alimentat de la un generator de tensiune armonică  $u = \sin \omega t$ . Deoarece  $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ , rezultă că  $i$  se calculează cu relația:  $i = 3\sin \omega t - 4\sin^3 \omega t = 3\sin \omega t$ . Semnalul de curent rezultat conține numai armonica a treia a frecvenței fundamentale aplicate. În acest sens, o problemă utilă este sinteza unor caracteristici cu neliniarități convenabile unor aplicații specifice.

**Combinarea frecvențelor** înseamnă obținerea unor semnale care au frecvența egală cu o combinație liniară cu coeficienți întregi a frecvențelor excitațiilor aplicate.

Principiul de funcționare este asemănător celui aplicat în multiplicatoarele de frecvență și anume utilizarea unor elemente de circuit cu caracteristică polinomială neliniară. În cazul acesta se ține cont de faptul că produsul de funcții armonice se poate reprezenta ca o combinație liniară de funcții armonice de argumente rezultate prin combinarea aditivă a argumentelor funcțiilor înmulțite.

**Divizarea frecvenței** înseamnă obținerea unui semnal care are frecvența egală cu o fracțiune din frecvența semnalului aplicat circuitului neliniar.

Ca exemplu, se consideră un condensator neliniar cu capacitatea diferențială (dinamică) dată de relația:

$$C_d(u) = \frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - u^2}}{2(1 - u^2)}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - u^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \right)}; \quad u \in [-1, 1] \quad (13.46)$$

Alimentând acest condensator de la un generator ideal de tensiune armonică:  $u = \sin \omega t$ , semnalul de curent rezultat prin condensator va fi:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du} \cdot \frac{du}{dt} = C_d(u) \omega \cos \omega t = \omega \cos \omega t \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}}{2(1 - \sin^2 \omega t)}} \Rightarrow$$

$$i = \omega \cos \omega t \sqrt{\frac{1 - \cos \omega t}{2 \cos^2 \omega t}} = \omega \sqrt{\frac{1 - \cos \omega t}{2}} = \omega \sin \frac{\omega t}{2} \quad (13.47)$$

Se observă că s-a obținut un curent care are frecvența egală cu jumătate din frecvența semnalului de tensiune aplicat.

**Modificarea formei semnalelor**, echivalentă cu introducerea unei infinități numărabile de armonici, este realizată prin operații de redresare, limitare etc., în circuitele care utilizează elemente de circuit cu caracteristici neliniare.

**Amplificarea semnalelor**, adică mărirea puterii semnalului, este efectuată prin transferarea puterii (energiei) primite de la sursele de alimentare către semnalele de prelucrat de alte recvențe, astfel încât un semnal de putere mică aplicat la bornele de intrare ale circuitului se regăsește (mai mult sau mai puțin distorsionat) ca semnal de putere mărită la bornele de ieșire ale circuitului amplificator.

**Generarea unor semnale periodice**, fie armonice, fie de forme impuse (impulsuri dreptunghiulare sau triunghiulare, cu un conținut mare de armonici) poate fi efectuată prin transferarea puterii (energiei) de la sursele de alimentare date către semnalul periodic permanent furnizat la bornele de ieșire ale circuitului, în absența vreunui semnal de intrare.

**Generarea unor semnale haotice**, în care nu poate fi regăsită nici o periodicitate, se poate obține prin transferul puterii (energiei) de la sursele de alimentare date către semnalul haotic prezent la bornele de ieșire ale circuitului, care include elemente cu neliniarități de anumite tipuri.

## 14. CUADRIPOLI

### 14.1 CUADRIPOL DIPORT ȘI CUADRIPOL GENERAL

În sensul cel mai larg, **cuadripolul electric** este un circuit electric, care are patru borne de acces în legătură cu exteriorul (fig. 14.1). Structura interioară a cuadripolului poate fi oarecare. Circuitelor electrice cuadripolare le corespund scheme electrice cuadripolare.

În teoria cuadripolului, comportarea circuitelor electrice se urmărește față de bornele de legătură cu exteriorul, această teorie conducând, în general, la o simplificare esențială a operației de stabilire a ecuațiilor schemelor cuadripolare, datorită faptului că nu este necesar determinarea tensiunilor și curenților din interiorul circuitului.

Mărimile care se utilizează pentru studiul circuitelor electrice, în cadrul teoriei cuadripolilor sunt tensiunile la borne și respectiv, curenții prin borne sau în circuitele exterioare conectate la borne. O altă grupă de mărimi care sedefinesc, respectiv se măsoară la borne, este reprezentată de parametrii cuadripolului.

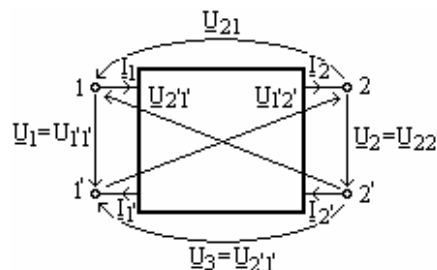


Fig. 14.1 Schema generală a cuadripolului

Dacă pentru fiecare din perechile de borne  $11'$  și  $22'$  ale cuadripolului curenții prin borne sunt egali și de sens contrar față de acesta, cuadripolul se numește cuadripol direct. În cazul cuadripolului general curenții la borne sunt diferiți. Rezultă, că în cazul unui cuadripol diport se pot scrie relațiile:

$$I_1 - I_{1'} = 0; \quad I_2 - I_{2'} = 0 \quad (14.1)$$

Prin “poartă” se înțelege o pereche de borne la care este îndeplinită condiția ca suma algebrică a curenților din conductoarele circuitului exterior, conectate la bornele respective, să fie nulă. Bornele cărora li se aplică o tensiune din exterior sunt borne receptoare și se numesc borne de intrare sau primare, iar bornele la care sunt conectate circuite receptoare sunt borne generatoare și se numesc borne de ieșire sau secundare.

Deoarece cuadripolul general poate fi privit ca având trei porți, acesta se mai numește și cuadripol triport. Deși în cazul cuadripolului general curenții prin borne sunt diferiți, în circuitele exterioare ale fiecăruia dintre cele trei perechi de borne curenții sunt egali.

Cuadripolii pot fi clasificați pe baza aceluiași criterii care se utilizează și în teoria circuitelor electrice. Cuadripolii pot fi activi sau pasivi, după cum conțin sau nu surse de energie. Pe baza teoremei reciprocității pot fi cuadripoli



reciproci sau nereciproți. După comportamentul față de cele două perechi de borne pot fi cuadripoli simetrici și respectiv, nesimetrici. După caracterul parametrilor elementelor componente de circuit cuadripolii pot fi: liniari, neliniari, cu parametri concentrați și cu parametri repartizați. Cuadripolii mai pot fi clasificați în cuadripoli de curent continuu și respectiv, de curent alternativ.

## 14.2 ECUAȚIILE CUADRIPOILOR

Relațiile stabilite între curenții și tensiunile la borne reprezintă ecuațiile cuadripolului, acestea caracterizând complet comportarea cuadripolului față de bornele de legătură cu exteriorul. În ecuațiile cuadripolului se disting variabile independente și variabile dependente. De structura cuadripolului se ține cont prin coeficienții care intervin în ecuațiile acestuia, coeficienții care se numesc constantele sau parametrii cuadripolului.

În cazul cuadripolului diport se sta se stabilește un sistem de două ecuații care leagă între ele cele patru variabile ale cuadripolului ( $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_1, \underline{I}_2$ ). Se constată că numărul de ecuații este egal cu numărul de porți ale cuadripolului.

În cazul unui cuadripol general activ autonom (sursele de energie sunt independente de cuadripoli), ecuațiile sunt neomogene fiind de forma următoare:

$$y_k = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} x_i + \beta_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (14.2)$$

unde:  $y_k$  reprezintă variabilele dependente ale cuadripolului;  $x_k$  – variabilele independente;  $\alpha_{ki}$  – parametrii cuadripolului;  $\beta_k$  – termenii liberi ai cuadripolului care țin cont de contribuțiile surselor interioare independente;  $k = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, 3$ . În cazul unui cuadripol pasiv ecuațiile sunt omogene, ceea ce înseamnă că termenii  $\beta_k$  dispar din relația (14.2).

Ținând seama de expresia generală a ecuațiilor cuadripolului, rezultă că pentru un cuadripol diport pasiv ecuațiile pot fi scrise în următoarele șase forme, în funcție de modul de alegere a variabilelor independente:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \quad (14.3)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{B}_{11} \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \underline{I}_1; \quad \underline{I}_2 = \underline{B}_{21} \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \underline{I}_1 \quad (14.4)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2; \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 \quad (14.5)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2; \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \quad (14.6)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11} \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \underline{U}_2; \quad \underline{I}_2 = \underline{H}_{21} \underline{U}_1 + \underline{H}_{22} \underline{U}_2 \quad (14.7)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{F}_{11} \underline{U}_1 + \underline{F}_{12} \underline{I}_2; \quad \underline{U}_2 = \underline{F}_{21} \underline{U}_1 + \underline{F}_{22} \underline{I}_2 \quad (14.8)$$

Folosirea diferitelor sisteme de ecuații este în strânsă legătură cu rezolvarea mai simplă a circuitelor cuadripolare complexe, formate din

cuadripoli componenți în diferite conectări. Parametrii care intervin în aceste sisteme de ecuații se numesc mai simplu parametri  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{F}$  ai cuadripolului. Parametrii  $\mathbf{A}$  se mai numesc și parametri fundamentali, iar parametrii  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{F}$  se mai numesc și parametri hibridi. Din ecuațiile prezentate se observă că parametrii  $\mathbf{Y}$  au dimensiunea unei admitanțe, iar parametrii  $\mathbf{Z}$  au dimensiunea unei impedanțe.

Regula de asociație a sensurilor de referință pentru curenți și tensiuni, utilizată mai des în teoria cuadripolilor este prezentată în figura 14.2 a (la bornele de intrare  $11'$  se aplică regula de la receptoare, iar la bornele de ieșire  $22'$  regula de la generatoare). Alți autori adoptă regula de asociație a sensurilor de referință arătată în figura 14.2 b, situație în care pentru ambele perechi de borne se aplică regula de asociație de la receptoare (relația pentru circuitul receptor se va scrie cu semnul minus, adică  $\underline{U}_2 = \underline{Z}\underline{I}_2$ ).

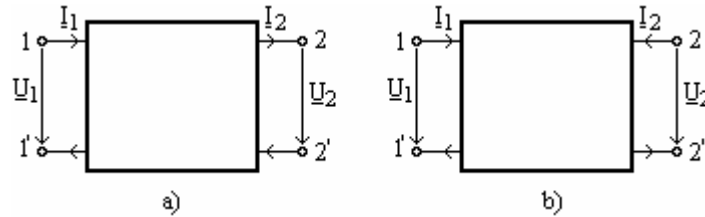


Fig. 14.2 Asociația sensurilor de referință pentru curenți și tensiuni la cuadripolul diport

Ecuațiile cuadripolului pot fi scrise și sub formă matricială, rezultând următoarele expresii:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}; \quad \|\mathbf{A}\| = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \quad (14.9)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}; \quad \|\mathbf{Y}\| = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \quad (14.10)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}; \quad \|\mathbf{Z}\| = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} \quad (14.11)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}; \quad \|\mathbf{H}\| = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} \quad (14.12)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}; \quad \|\mathbf{F}\| = \begin{pmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{pmatrix} \quad (14.13)$$

Matricile parametrilor cuadripolilor se numesc:  $\|\mathbf{A}\|$  - matricea lanț;  $\|\mathbf{Y}\|$  - matricea admitanță;  $\|\mathbf{Z}\|$  - matricea impedanță;  $\|\mathbf{H}\|$  - matricea serie - paralel;

$\|\mathbf{F}\|$  - matricea paralel-serie.

În unele situații este necesar să se scrie ecuațiile cuadripolului inversat. Un cuadripol se spune că este inversat, în raport cu schema de alimentare pe la bornele  $\mathbf{11}'$ , dacă acesta este alimentat pe la bornele  $\mathbf{22}'$ , iar receptorul este conectat la bornele  $\mathbf{22}'$ . Ecuațiile cuadripolului inversat se pot obține din ecuațiile cuadripolului alimentat pe la bornele  $\mathbf{11}'$ , schimbând în ecuațiile prezentate semnele curenților  $\mathbf{I}_1$  și  $\mathbf{I}_2$ .

Între matricile parametrilor cuadripolului există următoarele relații de legătură:

$$\|\mathbf{Z}\| = \|\mathbf{Y}\|^{-1}; \quad \|\mathbf{Y}\| = \|\mathbf{Z}\|^{-1}; \quad \|\mathbf{H}\| = \|\mathbf{F}\|^{-1}; \quad \|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{H}\|^{-1} \quad (14.14)$$

### 14.3. SEMNIFICAȚIA FIZICĂ A PARAMETRIILOR CUADRIPOLILOR

Parametrii cuadripolului pot fi definiți pe baza regimurilor de funcționare în gol și în scurtcircuit a acestuia [1]. La funcționarea în gol a cuadripolului se introduc următorii parametri:

- Impedanța în gol, cu alimentare pe la bornele  $\mathbf{11}'$  -  $\underline{\mathbf{Z}}_{10}$

$$\underline{\mathbf{Z}}_{10} = \underline{\mathbf{Z}}_{11} = \frac{1}{\underline{\mathbf{F}}_{11}} \quad (14.15)$$

- Impedanța în gol, cu alimentare pe la bornele  $\mathbf{22}'$  -  $\underline{\mathbf{Z}}_{20}$

$$\underline{\mathbf{Z}}_{20} = -\underline{\mathbf{Z}}_{22} = -\frac{1}{\underline{\mathbf{H}}_{22}} \quad (14.16)$$

- Impedanța de transfer în gol, cu alimentare pe la bornele  $\mathbf{22}'$  -  $(\underline{\mathbf{Z}}_{10})_2$

$$(\underline{\mathbf{Z}}_{10})_2 = -\underline{\mathbf{Z}}_{12} \quad (14.17)$$

- Impedanța de transfer în gol, cu alimentare pe la bornele  $\mathbf{11}'$  -  $(\underline{\mathbf{Z}}_{10})_1$

$$(\underline{\mathbf{Z}}_{10})_1 = \underline{\mathbf{Z}}_{21} = \frac{1}{\underline{\mathbf{A}}_{21}} \quad (14.18)$$

- Raportul tensiunilor în gol, cu alimentare pe la bornele  $\mathbf{11}'$  -  $(\underline{\mathbf{k}}_{u0})_1$

$$(\underline{\mathbf{k}}_{u0})_1 = \underline{\mathbf{A}}_{11} = \frac{1}{\underline{\mathbf{F}}_{21}} \quad (14.19)$$

- Raportul tensiunilor în gol, cu alimentare pe la bornele  $\mathbf{22}'$  -  $(\underline{\mathbf{k}}_{u0})_2$

$$(\underline{\mathbf{k}}_{u0})_2 = \frac{1}{\underline{\mathbf{H}}_{12}} \quad (14.19)$$

Parametrii introduși pe baza regimului de funcționare în scurtcircuit a cuadripolului sunt următorii:

- Admitanța în scurtcircuit, cu alimentare pe la bornele  $11'$  -  $\underline{Y}_{1k}$

$$\underline{Y}_{1k} = \underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{H}_{11}} \quad (14.20)$$

- Admitanța în scurtcircuit, cu alimentare pe la bornele  $22'$  -  $\underline{Y}_{2k}$

$$\underline{Y}_{2k} = -\underline{Y}_{22} = -\frac{1}{\underline{F}_{22}} \quad (14.21)$$

- Admitanța de transfer în scurtcircuit, cu alimentare pe la bornele  $22'$  -  $(\underline{Y}_{tk})_2$

$$(\underline{Y}_{tk})_2 = -\underline{Y}_{12} \quad (14.22)$$

- Admitanța de transfer în scurtcircuit, cu alimentare pe la bornele  $11'$  -  $(\underline{Y}_{tk})_1$

$$(\underline{Y}_{tk})_1 = \underline{Y}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{12}} \quad (14.23)$$

- Raportul curenților în scurtcircuit, cu alimentare pe la bornele  $11'$  -  $(\underline{k}_{ik})_1$

$$(\underline{k}_{ik})_1 = \underline{A}_{22} = \frac{1}{\underline{H}_{21}} \quad (14.24)$$

- Raportul curenților în scurtcircuit, cu alimentare pe la bornele  $22'$  -  $(\underline{k}_{ik})_2$

$$(\underline{k}_{ik})_2 = \frac{1}{\underline{F}_{12}} \quad (14.25)$$

#### 14.4. INTERCONECTAREA CUADRIPOLILOR

##### Conectarea în cascadă a cuadripolilor

Conectarea în lanț sau în cascadă a doi cuadripoli este prezentată în figura 14.3.

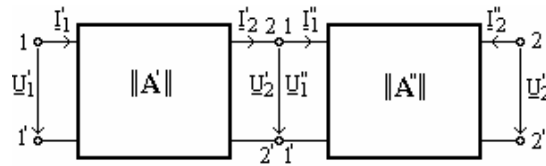


Fig. 14.3 Conectarea în cascadă a doi cuadripoli

Cu notațiile din figura 14.3 ecuațiile cuadripolilor componenți în formă matricială sunt:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}''_{11} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} \quad (14.26)$$

Mărimile de ieșire ale primului cuadripol sunt egale cu mărimile de intrare ale celui de-al doilea cuadripol și ținând cont de relațiile (14.26), se obține matricea de lanț a cuadripolului echivalent, care este egală cu produsul matricilor de lanț ale cuadripolilor componenți:

$$\|A\| = \|A'\| \cdot \|A''\| \quad (14.27)$$

Generalizând acest rezultat, la conectarea în cascadă a  $n$  cuadripoli, matricea de lanț a cuadripolului echivalent va avea expresia:

$$\|A\| = \prod_{i=1}^n \|A_i\| \quad (14.28)$$

unde  $\|A_i\|$  este matricea de lanț a cuadripolului  $i$ .

### Conectarea în paralel a cuadripolilor

Conectarea în paralel a doi cuadripoli este prezentată în figura 14.4. Tensiunile la bornele de intrare ale cuadripolilor conectați în paralel sunt egale și de asemenea și tensiunile de ieșire. La conectarea în paralel sunt avantajoase ecuațiile (14.10).

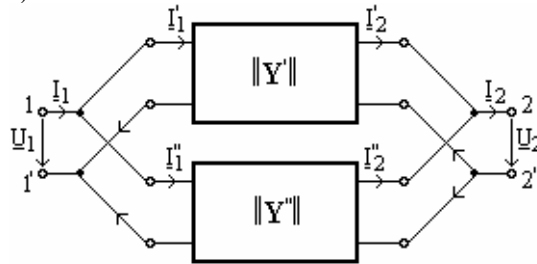


Fig. 14.4 Conectarea în paralel a doi cuadripoli

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (14.29)$$

la fiecare dintre cele două perechi de borne curenții cuadripolilor componenți se însumează, rezultând:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix} \quad (14.30)$$

Introducând ecuațiile (14.29) în ecuația (14.30) se obține matricea admitanță a cuadripolului echivalent, rezultând:

$$\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\| \quad (14.31)$$

Procedând în mod analog pentru  $n$  cuadripoli conectați în paralel, se obține matricea admitanță a cuadripolului echivalent:

$$\|Y\| = \sum_{i=1}^n \|Y_i\| \quad (14.32)$$

unde  $\|Y_i\|$  este matricea admitanță a cuadripolului  $i$ .

### Conectarea în serie a cuadripolilor

În cazul conectării în serie a doi cuadripoli (fig. 14.5), cuadripolii componenți au același curent de intrare, iar tensiunile la borne se însumează, rezultând:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{pmatrix} \quad (14.33)$$

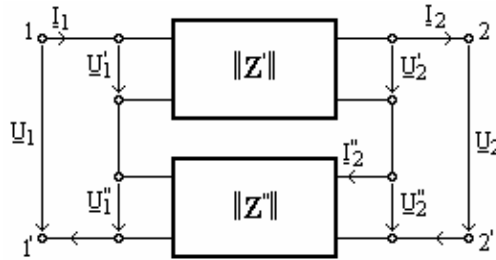


Fig. 14.5 Conectarea în serie a doi cuadripoli

Ecuțiile cuadripolilor componenți, corespunzătoare matricilor impedanță, sunt următoarele:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}'_{11} & \underline{Z}'_{12} \\ \underline{Z}'_{21} & \underline{Z}'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}''_{11} & \underline{Z}''_{12} \\ \underline{Z}''_{21} & \underline{Z}''_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (14.34)$$

Introducând ecuațiile (14.34) în ecuația (14.33), se obține matricea impedanță a cuadripolului echivalent:

$$\|Z\| = \|Z'\| + \|Z''\| \quad (14.35)$$

Pentru  $n$  cuadripoli conectați în serie, matricea impedanță a cuadripolului echivalent se calculează cu relația:

$$\|Z\| = \sum_{i=1}^n \|Z_i\| \quad (14.36)$$

unde  $\|Z_i\|$  este matricea impedanță a cuadripolului  $i$ .

### Conectarea în serie-paralel

În cazul conectării în serie-paralel (fig. 14.6) cuadripolii componenți au același curent de intrare și aceeași tensiune de ieșire (bornele primare sunt legate în serie iar bornele secundare sunt legate în paralel).

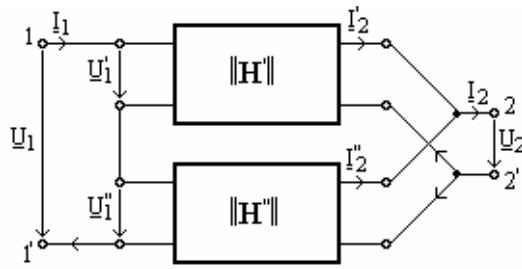


Fig. 14.6 Conectarea în serie-parallel a doi cuadripoli

În cazul acesta se pot scrie relațiile:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{pmatrix} \quad (14.37)$$

Ecuțiile cuadripolilor în care intervin matricile serie-parallel sunt următoarele:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}'_{11} & \underline{H}'_{12} \\ \underline{H}'_{21} & \underline{H}'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}''_{11} & \underline{H}''_{12} \\ \underline{H}''_{21} & \underline{H}''_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (14.38)$$

Introducând ecuațiile (14.38) în ecuația (14.37), se obține matricea serie-parallel a cuadripolului echivalent:

$$\| \underline{H} \| = \| \underline{H}' \| + \| \underline{H}'' \| \quad (14.39)$$

Pentru  $n$  cuadripoli conectați în serie-parallel, matricea serie-parallel a cuadripolului echivalent se calculează cu relația:

$$\| \underline{H} \| = \sum_{i=1}^n \| \underline{H}_i \| \quad (14.40)$$

unde  $\| \underline{H}_i \|$  este matricea serie-parallel a cuadripolului  $i$ .

#### 14.5 EXPRESII PENTRU CURENȚI ȘI TENSIUNI LA BORNE IMPEDANȚA DE INTRARE

În figura 14.7 se consideră un cuadripol alimentat pe la bornele  $11'$  și care are conectat la bornele  $22'$  un receptor de impedanță  $\underline{Z}$ .

Ținând cont de ecuațiile (14.3) ale cuadripolului alimentat pe la bornele  $11'$  și de relația pentru receptor,  $\underline{U}_2 = \underline{Z} \cdot \underline{I}_2$ , se obține următoarele expresii pentru tensiunea la bornele de ieșire  $\underline{U}_2$ , curenții  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$  în funcție de tensiunea de alimentare  $\underline{U}_1$ , de parametrii  $\underline{A}$  ai cuadripolului și de impedanța de sarcină  $\underline{Z}$ :

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}}{\underline{A}_{11}\underline{Z} + \underline{A}_{12}}; \quad \underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{A}_{21}\underline{Z} + \underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}\underline{Z} + \underline{A}_{12}}; \quad \underline{I}_2 = \underline{U}_1 \frac{1}{\underline{A}_{11}\underline{Z} + \underline{A}_{12}} \quad (14.41)$$

Impedanța echivalentă de intrare a cuadripolului se definește prin raportul dintre expresiile în complex ale tensiunii și curentului la bornele de alimentare:

Ținând cont de relațiile (14.41) și de relațiile de legătură [ ] dintre elementele matricilor de lanț, admitanță și impedanță pentru impedanța și respectiv, admitanța de intrare se obțin următoarele relații:

$$\underline{Z}_{1\text{intr}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z} + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_{11} + \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z} - \underline{Z}_{22}} \quad (14.41)$$

$$\underline{Y}_{1\text{intr}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{A}_{21}\underline{Z} + \underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}\underline{Z} + \underline{A}_{12}} = \underline{Y}_{11} + \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y} - \underline{Y}_{22}} \quad (14.42)$$

Dacă se consideră  $\underline{Z} = \infty$  și respectiv,  $\underline{Z} = \mathbf{0}$ , se obțin impedanțele în gol  $\underline{Z}_{10}$  și în scurtcircuit  $\underline{Z}_{1k}$  ale cuadripolului:

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{Y}_{22}}{|\underline{Y}|} = \underline{Z}_{11}; \quad \underline{Z}_{1k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}} = \frac{|\underline{Z}|}{\underline{Z}_{22}} \quad (14.43)$$

#### 14.6. SCHEME ECHIVALENTE

**Condiția de reciprocitate** a unui cuadripol poate fi exprimată în funcție de elementele matricilor  $\|\underline{A}\|$ ,  $\|\underline{Y}\|$ ,  $\|\underline{Z}\|$ ,  $\|\underline{H}\|$  și  $\|\underline{F}\|$  în următoarele moduri:

$$|\underline{A}| = 1; \quad -\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \quad -\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \quad \underline{H}_{12} = \underline{H}_{21}; \quad \underline{F}_{12} = \underline{F}_{21} \quad (14.44)$$

Se observă că la un cuadripol reciproc există o singură admitanță de transfer în scurtcircuit și o singură impedanță de transfer în gol.

**Schema echivalentă în T** a cuadripolului nereziciv este prezentată în figura 14.8 a, iar în figurile 14.8 b și respectiv, 14.8 c sunt prezentate schemele echivalente în T pentru cuadripolul reciproc nesimetric și respectiv, simetric.

În cazul cuadripolului nereziciv, expresiile impedanțelor schemei echivalente în funcție de elementele matricii impedanță sunt următoarele [ ]:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}; \quad \underline{Z}_2 = -\underline{Z}_{12}; \quad \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{22}; \quad \underline{Z}_4 = \underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{12} \quad (14.45)$$

Schema echivalentă în T pentru cuadripolul reciproc se obține din schema echivalentă pentru cuadripolul nereziciv ținând cont de condiția de reciprocitate, din care rezultă:  $\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_4 = \mathbf{0}$ . Se observă că în cazul unui cuadripol reciproc lipsește sursa de tensiune.

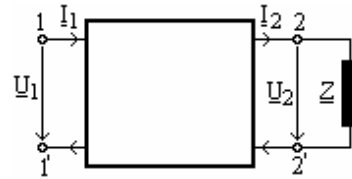


Fig. 14.7 Cuadripol alimentat pe la bornele 11'



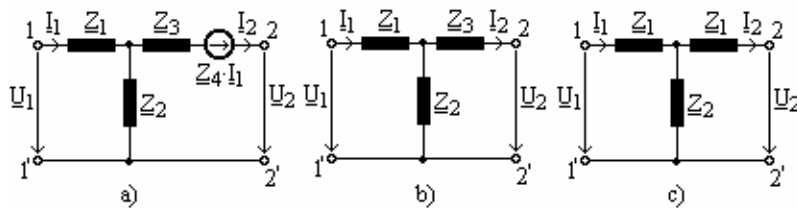


Fig. 14.8 Schema echivalentă în  $T$  a cuadripolului

Pentru cuadripolul reciproc, nesimetric, expresiile celor trei impedanțe din schema echivalentă sunt:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}; \underline{Z}_2 = -\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{22} \quad (14.46)$$

Dacă cuadripolul reciproc este simetric, ținând cont de condiția de simetrie,  $\underline{Z}_{11} = -\underline{Z}_{22}$ , se obține schema echivalentă în  $T$  din figura 14.8 c, impedanțele din schemă având expresiile:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}; \underline{Z}_2 = -\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} \quad (14.47)$$

**Schema echivalentă în  $\Pi$**  a cuadripolului nereziciv este prezentată în figura 14.9 a, iar în figurile 14.9 b și respectiv, 14.9 c sunt prezentate schemele echivalente în  $\Pi$  pentru cuadripolul reciproc nesimetric și respectiv, simetric.

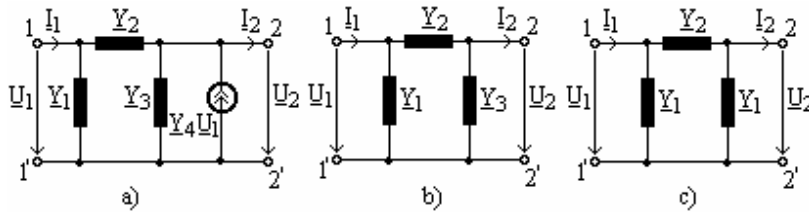


Fig. 14.9 Schema echivalentă în  $\Pi$  a cuadripolului

În cazul cuadripolului nereziciv, expresiile admitanțelor schemei echivalente în funcție de elementele matricii admitanță sunt următoarele []:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12}; \underline{Y}_2 = -\underline{Y}_{12}; \underline{Y}_3 = \underline{Y}_{12} - \underline{Y}_{22}; \underline{Y}_4 = \underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{12} \quad (14.48)$$

Ținând cont de condiția de reciprocitate,  $\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21} = \underline{Y}_4 = \mathbf{0}$ , se obține schema echivalentă în  $\Pi$  pentru cuadripolul reciproc. În cazul unui cuadripol reciproc nesimetric expresiile admitanțelor din schema echivalentă sunt:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12}; \underline{Y}_2 = -\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \underline{Y}_3 = \underline{Y}_{12} - \underline{Y}_{22} \quad (14.49)$$

Dacă cuadripolul reciproc este simetric, ținând cont de condiția de simetrie,  $\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}$ , se obține schema echivalentă în  $\Pi$  din figura 14.9 c, impedanțele din schemă având expresiile:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12}; \underline{Y}_2 = -\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} \quad (14.50)$$

## 14.7. FILTRE ELECTRICE

**Filtrul electric** se poate prezenta ca un cuadripol sau lanț de cuadripoli, acărui constantă de atenuare este mică în anumite intervale de frecvență, numite benzi de trecere, iar în celelalte intervale, numite benzi de oprire, constanta de atenuare este foarte mare. După poziția ocupată de benzile de trecere sau de oprire în spectrul de frecvențe există: filtru trece-jos, filtru trece-sus, filtru trece-bandă, filtru oprește-bandă și filtru pieptene. Frecvențele care delimitează benzile de trecere și benzile de oprire se numesc **frecvențe de tăiere**. Din punct de vedere al elementelor componente, există: filtre cu elemente reactive, filtre **RC**, filtre cu rezonatoare piezoelectrice etc.

În figura 14.10 sunt prezentate structurile cuadripolare în  $\Gamma$ , în  $T$  simetric și în  $\Pi$  simetric, utilizate la realizarea filtrelor.

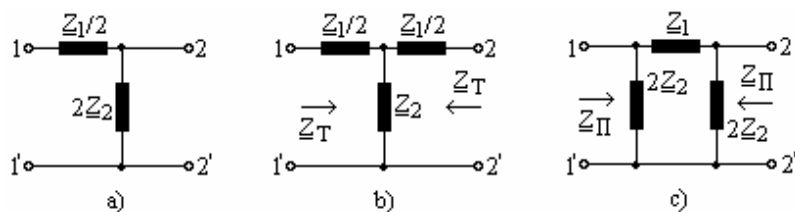


Fig. 14.10 Structuri cuadripolare în  $\Gamma$  (a), în  $T$  (b) și în  $\Pi$  (c) utilizate la realizarea filtrelor electrice

Constanta de transfer a filtrului în  $\Gamma$ , notată cu  $\underline{g}_C / 2$ , se determină din expresia:

$$\operatorname{sh} \frac{\underline{g}_C}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} \quad (14.51)$$

Cuadripolii simetrici în  $T$  și  $\Pi$  pot fi considerați ca fiind formați prin conectarea corespunzătoare în lanț a doi cuadripoli în  $\Gamma$ . Constanta de transfer a acestor cuadripoli simetrici este de două ori mai mare decât a structurii în  $\Gamma$ , fiind egală cu  $\underline{g}_C$  și rezultând din relația:

$$\operatorname{ch} \underline{g}_C = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \quad (14.52)$$

Impedanțele caracteristice ale cuadripolilor simetrici în  $T$  și  $\Pi$ , notate cu  $\underline{Z}_T$  și  $\underline{Z}_\Pi$ , sunt date de relațiile:

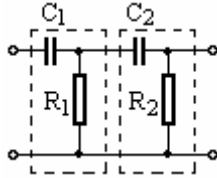
$$\underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right)}; \quad \underline{Z}_\Pi = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}} \quad (14.53)$$

Dacă impedanțele  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$ , care intervin în structurile din figura 14.10 sunt mărimi inverse, iar puterea de inversiune este o constantă reală, independentă de frecvență, adică:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = K^2 \quad (14.54)$$

filtrele respective se numesc filtre de tip **K**. În cazul acestor filtre și produsul impedanțelor caracteristice  $\underline{Z}_T$  și  $\underline{Z}_\Pi$  este de asemenea egal cu  $K^2$ .

**Aplicație**



Să se determine funcția de transfer a circuitului derivator din figura 14.11, la funcționarea în gol a acestuia.

Schema corespunde conectării în lanț a doi cuadripoli. Presupunând un regim sinusoidal, matricile de lanț ale cuadripolilor componenți sunt:

Fig. 14.11

$$\|A_1\| = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_1} & \frac{1}{j\omega C_1} \\ \frac{1}{R_1} & 1 \end{pmatrix}; \quad \|A_2\| = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{j\omega C_2 R_2} & \frac{1}{j\omega C_2} \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ținând cont că matricea de lanț a cuadripolului echivalent este dată de relația:  $\|A\| = \|A_1\| \cdot \|A_2\|$ , se calculează constanta  $\underline{A}_{11}$ , rezultând:

$$\underline{A}_{11} = \left(1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_1}\right) \left(1 + \frac{1}{j\omega C_2 R_2}\right) + \frac{1}{j\omega C_1 R_2}$$

Funcția de transfer a circuitului derivator prezentat în figura 14.11 va avea expresia:

$$\frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{(j\omega)^2 C_1 C_2 R_1 R_2}{(1 + j\omega C_1 R_1)(1 + j\omega C_2 R_2) + j\omega C_2 R_1}$$

Trecând la exprimarea operațională pe baza transformării Laplace, prin înlocuirea  $j\omega \rightarrow s$ , pentru funcția de transfer se obține expresia:

$$\frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) \tau_2 s + 1}$$

unde:  $\tau_1 = R_1 C_1$  și  $\tau_2 = R_2 C_2$ .

## 15. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Câmpul magnetic variabil în timp determină apariția unui câmp electric indus, iar câmpul electric variabil în timp determină apariția unui câmp magnetic solenoidal, produs de curentul de deplasare. Această dublă legătură determină existența câmpului electromagnetic desprins de corpuri sub formă de **unde electromagnetice**, care se propagă în spațiu cu o viteză finită.

Câmpul magnetic variabil în timp induce în conductoare masive curenți numiți turbionari sau Foucault, care pot avea efecte utile (încălzirea prin conducție) sau nedorite (pierderi suplimentare de putere).

### 15.1 ECUAȚIILE LUI MAXWELL

**Ecuatiile lui Maxwell** sunt reprezentate de formele locale ale legilor: circuitului magnetic, inducției electromagnetice, fluxului electric și fluxului magnetic, în cazul mediilor imobile ( $\vec{v} = \mathbf{0}$ ) și în domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice locale:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (15.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (15.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_v \quad (15.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (15.4)$$

În medii liniare, omogene, izotrope, fără polarizație permanentă și fără magnetizație permanentă, mărimile vectoriale care caracterizează câmpul electromagnetic satisfac relațiile următoare, numite și relații constitutive:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (15.5)$$

Vectorul densitatea curentului electric de conducție  $\vec{J}$  este legat de densitatea de sarcină electrică  $\rho_v$  prin legea conservării sarcinii electrice:

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (15.6)$$

Ținând cont de ecuațiile (15.5), câmpul electromagnetic este complet caracterizat de două mărimi vectoriale, de exemplu  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$ . În funcție de vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  ecuațiile lui Maxwell se scriu sub forma următoare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}; \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (15.7)$$

În coordonate carteziene, sistemul de ecuații (15.7) la care se adaugă și

ecuația (15.6), se scrie sub forma unui sistem de nouă ecuații cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= J_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}; & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}; \\
 \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}; & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\
 \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}; \\
 \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{1}{\varepsilon} \rho_v; & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0; \\
 \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{15.8}$$

sistem care are nouă necunoscute (componentele vectorilor  $\bar{\mathbf{E}}$ ,  $\bar{\mathbf{H}}$  și  $\bar{\mathbf{J}}$ ).

Soluțiile sistemului sunt determinate în mod unic dacă se cunosc: mărimile  $\varepsilon$ ,  $\mu$  și  $\rho_v$ ; condițiile de frontieră pe frontiera domeniului în care se determină câmpul; condițiile inițiale.

În medii izolante ( $\rho_v = 0$ ,  $\bar{\mathbf{J}} = 0$ ), ecuațiile (15.7) se exprimă sub forma:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{H}} = \varepsilon \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t}; \quad \text{rot } \bar{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t}; \quad \text{div } \bar{\mathbf{E}} = 0; \quad \text{div } \bar{\mathbf{H}} = 0 \tag{15.9}$$

relații care arată că cele două câmpuri  $\bar{\mathbf{E}}$  și  $\bar{\mathbf{H}}$  sunt solenoidale.

Aplicând rotorul primelor două ecuații ale sistemului (15.9) și ținând cont de ultimele două ecuații și de identitatea vectorială:

$$\text{rot rot } \bar{\mathbf{H}} = \text{grad div } \bar{\mathbf{H}} - \Delta \bar{\mathbf{H}} \tag{15.10}$$

se obține ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul doi, satisfăcute de mărimile  $\bar{\mathbf{E}}$  și  $\bar{\mathbf{H}}$ :

$$\Delta \bar{\mathbf{H}} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \bar{\mathbf{E}} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \tag{15.11}$$

Se constată că cele două ecuații obținute (15.11) sunt de același tip și ele se numesc **ecuațiile undelor**.

În medii neîncărcate electric ( $\rho_v = 0$ ), în care  $\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$ , ecuațiile lui Maxwell se exprimă sub forma:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{H}} = \sigma \bar{\mathbf{E}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t}; \quad \text{rot } \bar{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t}; \quad \text{div } \bar{\mathbf{E}} = 0; \quad \text{div } \bar{\mathbf{H}} = 0 \tag{15.12}$$

Aplicând rotorul primelor două ecuații ale sistemului (15.12) și ținând cont

de ultimele două ecuații și de identitatea vectorială (15.10) se obțin următoarele ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi:

$$\Delta \bar{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0; \quad \Delta \bar{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \quad (15.13)$$

## 15.2. ENERGIA ELECTROMAGNETICĂ

### 15.2.1. TEOREMA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE. VECTORUL LUI POYNTING

Concepția despre câmpul electromagnetic considerat ca sistem fizic capabil să schimbe, să acumuleze și să transmită energie, permite să se interpreteze energetic o anumită consecință a ecuațiilor lui Maxwell, numită **teorema energiei electromagnetice**.

Pentru a stabili această teoremă, se consideră în câmpul electromagnetic un domeniu  $D_{\Sigma}$ , mărginit de suprafața închisă  $\Sigma$  (fig. 15.1). În interiorul domeniului considerat există numai corpuri imobile ( $\bar{v} = \mathbf{0}$ ) cu proprietăți de material liniare (fără histerezis, iar  $\varepsilon$  și  $\mu$  sunt independente de  $\bar{E}$  și  $\bar{H}$ ).

În domeniul  $D_{\Sigma}$  este localizată o energie electromagnetică  $W_{em}$ , care are densitatea de volum  $w$  egală cu suma densităților de volum corespunzătoare câmpurilor electric și magnetic:

$$w = \frac{1}{2} \bar{E} \bar{D} + \frac{1}{2} \bar{B} \bar{H} = \varepsilon \frac{E^2}{2} + \mu \frac{H^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon} + \frac{B^2}{2\mu} \quad (15.14)$$

și cu ajutorul căreia se poate calcula energia electromagnetică:

$$W_{em} = \iiint_{D_{\Sigma}} w dV = \iiint_{D_{\Sigma}} \frac{1}{2} (\bar{E} \bar{D} + \bar{B} \bar{H}) dV \quad (15.15)$$

Din principiul conservării energiei rezultă că la variația stării sistemului fizic pe care îl constituie câmpul electromagnetic din interiorul suprafeței  $\Sigma$ , viteza de scădere a energiei acestui sistem trebuie să fie egală cu suma puterilor cedate de sistem altor sisteme fizice.

Câmpul electromagnetic din domeniul  $D_{\Sigma}$  este în interacțiune directă numai cu corpurile din interiorul domeniului și cu câmpul magnetic din exterior, pe suprafața  $\Sigma$ .

Corpurile din interiorul suprafeței  $\Sigma$  fiind imobile și fără histerezis, primesc energie numai sub forma precizată de legea transformării energiei în conductoare (dar nu și sub formă de lucru mecanic).

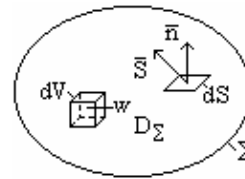


Fig. 15.1 Domeniu de câmp în interacțiune cu corpurile și cu mediul înconjurător

Rezultă că principiul conservării energiei aplicat cazului studiat va fi exprimat de relația:

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = P_J + P_\Sigma \quad (15.16)$$

unde  $P_J$  este puterea transmisă de câmp corpurilor din domeniul  $D_\Sigma$  în procesul de conducție a curentului:

$$P_J = \iiint_{D_\Sigma} \bar{E} \bar{J} dV \quad (15.17)$$

iar  $P_\Sigma$  este puterea transmisă de câmp prin suprafața închisă  $\Sigma$ , în sensul normalei exterioare  $\bar{n}$  la suprafață. Puterea  $P_\Sigma$  poate fi interpretată ca fluxul unui câmp de vectori  $\bar{S}$ , numit densitatea fluxului de energie:

$$P_\Sigma = \iint_{\Sigma} \bar{S} \bar{n} dS \quad (15.18)$$

unde  $dS$  este elementul de suprafață.

Ținând cont de relațiile (15.16)...(15.18), se obține expresia:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{D_\Sigma} \frac{1}{2} (\bar{E} \bar{D} + \bar{B} \bar{H}) dV = \iiint_{D_\Sigma} \bar{E} \bar{J} dV + P_\Sigma \quad (15.19)$$

care reprezintă **teorema energiei electromagnetice**.

Deoarece corpurile sunt imobile, în membrul stâng se poate deriva sub semnul de integrală și ținând cont de liniaritatea mediilor și de ecuațiile lui Maxwell, se deduc relațiile succesive:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\bar{E} \bar{D} + \bar{B} \bar{H}}{2} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\bar{D}^2}{2\epsilon} + \frac{\bar{B}^2}{2\mu} \right) = -\frac{\bar{D}}{\epsilon} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \frac{\bar{B}}{\mu} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \\ &= -\bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\bar{E} (\text{rot } \bar{H} - \bar{J}) - \bar{H} (-\text{rot } \bar{E}) = \\ &= \bar{E} \bar{J} + (\bar{H} \text{rot } \bar{E} - \bar{E} \text{rot } \bar{H}) = \bar{E} \bar{J} + \text{div} (\bar{E} \times \bar{H}) \end{aligned} \quad (15.20)$$

Comparând dezvoltarea obținută cu relația (15.19) și aplicând teorema lui Gauss-Ostrogradski, se deduce succesiv:

$$P_\Sigma = \iiint_{D_\Sigma} \text{div} (\bar{E} \times \bar{H}) dV = \iint_{\Sigma} (\bar{E} \times \bar{H}) \bar{n} dS \quad (15.21)$$

Comparând relațiile (15.18) și (15.21), rezultă că în cazul câmpului electromagnetic, densitatea fluxului de energie va avea expresia:

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \quad (15.22)$$

mărime care se mai numește și **vectorul lui Poynting**, sensul său fiind întotdeauna în sensul propagării undelor electromagnetice.

Observație. Teorema energiei electromagnetice este satisfăcută de orice

câmp de vectori care diferă de cel definit prin relația (15.22) printr-o expresie cu divergența nulă. Expresia (15.22) este în acord cu principiul localizării acțiunilor fizice și este universal acceptată.

### 15.2.2. PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE ÎN CONDUCTOARE

Se consideră un conductor filiform parcurs de un curent electric cu intensitatea  $\underline{i}$ , cilindric de rază  $\underline{a}$ , cu lungimea  $\underline{l}$  și de rezistivitate  $\underline{\rho}$  (fig. 15.2). În interiorul conductorului liniile câmpurilor  $\underline{J}$  și  $\underline{E} = \underline{\sigma J}$  sunt paralele cu axa conductorului, iar liniile câmpului  $\underline{H}$  sunt cercuri concentrice cu axa conductorului. În exteriorul conductorului liniile câmpului  $\underline{H}$  sunt cercuri concentrice, iar câmpul  $\underline{E}$  are două componente, o componentă tangențială:

$$\underline{E}_t = \underline{E} = \underline{\sigma J} \quad (15.23)$$

și o componentă radială determinată de sarcina electrică de pe suprafața conductorului.

Ținând cont de notațiile făcute, pe suprafața exterioară a conductorului, vectorii  $\underline{E}$  și  $\underline{H}$  vor avea valorile:

$$E = \rho J = \rho \frac{i}{\pi a^2}; \quad H = \frac{i}{2\pi a} \quad (15.24)$$

Vectorul lui Poynting  $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$  este orientat spre interiorul conductorului și va avea valoarea:

$$S = EH = \rho \frac{i^2}{2\pi^2 a^3} \quad (15.25)$$

Pentru o porțiune de lungime  $\underline{l}$  a conductorului, cu aria suprafeței laterale (pe care  $\underline{S}$  are o valoare constantă)  $\underline{A} = 2\pi a \underline{l}$ , rezultă puterea primită de conductor (cu versorul noemaii  $\underline{n}$  orientat spre interior):

$$P_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \underline{S} \cdot \underline{n} \, dS = SA = \rho \frac{l}{\pi a^2} i^2 \quad (15.26)$$

Din rezultatele obținute rezultă câteva concluzii importante:

- fluxul de energie poate fi calculat cu aceeași expresie atât în regim variabil în timp (în condițiile în care a fost dedusă expresia sa) cât și în regim staționar;
- în conductoarea intensitatea câmpului electric are orientare predominant

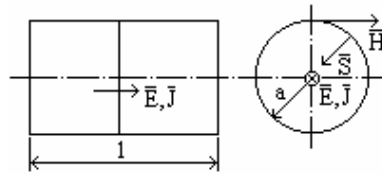


Fig. 15.2 Calculul puterii electromagnetice primite de un conductor cilindric



axială (sau pur axială), iar vectorul  $\vec{S}$  este perpendicular pe  $\vec{E}$ , ceea ce arată că energia este transmisă nu prin conductoare, ci prin câmpul electromagnetic care le înconjoară. Conductoarele au rolul de căi (ghidaje) pentru curentul de conducție; ele nu transmit energia electromagnetică, însă pot consuma o parte din ea prin efect Joule-Lenz.

### 15.3. UNDA ELECTROMAGNETICĂ PLANĂ

Dacă mărimile de stare locală ale câmpului electromagnetic variabil în timp au aceeași valoare în toate punctele unui plan perpendicular pe o direcție privilegiată, se obține o undă electromagnetică plană. Unda plană este cu o suficientă aproximație unda radiată de o antenă, la o distanță suficient de mare de aceasta.

Direcția privilegiată se numește direcție de propagare. În cazul în care axa  $Ox$  este direcția de propagare, mărimile de stare ale câmpului electromagnetic depind numai de  $x$  și de  $t$ :

$$\vec{E} = \vec{E}(x, t); \quad \vec{H} = \vec{H}(x, t) \quad (15.27)$$

Dacă se presupune mediul omogen și izotrop, liniar, imobil, cu permitivitatea  $\epsilon$ , permeabilitatea  $\mu$ , fără sarcini electrice ( $\rho_v = 0$ ) și fără curenți ( $\vec{J} = 0$ ), relațiile (15.8) devin:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}; & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}; & \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0; & -\frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}; & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0; & \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial H_x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (15.28)$$

Analizând relațiile (15.28) se constată următoarele:

- în direcția de propagare componentele  $E_x$  și  $H_x$  ale câmpului electromagnetic nuvariază nici în timp și nici în spațiu;
- vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  au componente diferite de zero numai după axele  $Oy$  și  $Oz$ , rezultând că vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt conținuți în plane transversale față de direcția de propagare. Unda electromagnetică plană este o undă transversală (fig. 15.3).
- componentele  $E_y$  și  $H_z$  sunt legate între ele prin relațiile:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (15.29)$$

Prima ecuație se derivează în raport cu timpul, a doua ecuație se derivează în raport cu  $x$  și se adună relațiile obținute. Dacă se elimină  $E_y$  se obține:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \quad (15.30)$$

relație care reprezintă ecuația undelor.

Similar, din relațiile (15.29) se obține o ecuație în care intervine componenta  $\mathbf{E}_y$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial t^2} = 0 \quad (15.31)$$

- componentele  $\mathbf{E}_z$  și  $\mathbf{H}_y$  sunt legate între ele prin relațiile:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t}; \quad \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} \quad (15.32)$$

Procedând ca în cazul anterior se obțin relațiile:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_z}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}_z}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}_y}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}_y}{\partial t^2} = 0 \quad (15.33)$$

- se constată că cele două câmpuri electric și magnetic satisfac aceeași ecuație a undelor.

Componentele  $\mathbf{E}_y$ ,  $\mathbf{H}_z$  și respectiv,  $\mathbf{E}_z$ ,  $\mathbf{H}_y$  formează două unde independente între ele, care prin suprapunere formează **unda plană**.

Dacă se face notația,  $\mathbf{v} = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$ , unde  $\mathbf{v}$  este viteza de propagare a undei, soluția generală a ecuației undelor:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad (15.34)$$

este de forma:

$$F(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (15.35)$$

Se observă că soluția ecuației undelor este o sumă de doi termeni:  $\mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{vt})$  și  $\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{vt})$ , unde  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$  sunt două funcții arbitrare. Valoarea funcției  $\mathbf{f}$  la momentul  $t_1$  în punctul  $\mathbf{x}_1$  se regăsește la momentul  $t_2$  în punctul  $\mathbf{x}_2$  cu condiția:

$$x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2 \Rightarrow x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) \quad (15.36)$$

În figura 15.4 este prezentată propagarea unei unde plane. Unda  $\mathbf{f}$  se propagă în sensul pozitiv al axei  $\mathbf{0x}$  cu viteza  $\mathbf{v}$ , iar unda  $\mathbf{g}$  se propagă în sensul negativ al axei  $\mathbf{0x}$  cu aceeași viteză  $\mathbf{v}$ . Prin urmare unda plană reprezintă suma dintre o undă directă (progresivă) și o undă inversă.

Unda plană se compune din patru unde elementare care diferă fie prin sensul de propagare (unde directe și unde inverse), fie prin tipul undelor  $\mathbf{E}_y$ ,  $\mathbf{H}_z$  sau  $\mathbf{E}_z$ ,  $\mathbf{H}_y$ . În unda plană vectorii  $\bar{\mathbf{E}}$  și  $\bar{\mathbf{H}}$  sunt perpendiculari între ei, iar produsul vectorial  $\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}$  are direcția de propagare a undei.

Între viteza de propagare a undei electromagnetice  $\mathbf{v}$  și viteza luminii  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c} = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (15.37)$$

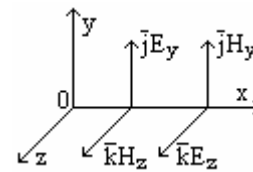


Fig. 15.3 Unde electromagnetice

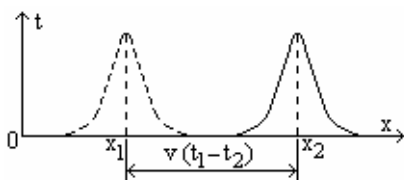


Fig. 15.4 Propagarea undei plane

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (15.38)$$

raport care se numește **indice de refracție al mediului**.

În vid (practic în aer) viteza de propagare a undelor electromagnetice este egală cu viteza luminii.

### 15.4. CÂMPUL ELECTROMAGNETIC ÎN MEDII CONDUCTOARE MASIVE

Principalele probleme de câmp electromagnetic în medii conductoare masive se referă la curenții turbionari și la efectul pelicular. Curenții turbionari reprezintă curenții stabiliți într-un mediu conductor masiv datorită t.e.m. induse de un câmp magnetic variabil în timp. Puterea corespunzătoare acestor curenți, care apare sub formă de căldură, reprezintă pierderile prin curenți turbionari.

Efectul pelicular se referă la repartiția neuniformă a densității de curent în secțiunea conductoarelor parcurse de curenți variabili (alternativi), densitatea de curent fiind mai mare spre suprafața laterală a acestora. Acest efect se poate interpreta intuitiv ca fiind rezultatul acțiunii t.e.m. induse de fluxul magnetic variabil al curenților din conductoarele respective.

În cazul unui conductor parcurs de c.a., efectul pelicular are ca rezultat creșterea rezistenței electrice echivalente a acestuia față de rezistența aceluiași conductor în regim electrocinetic staționar. Raportul  $k_a$  dintre rezistența electrică  $R$  în c.a. și rezistența  $R_c$  în c.c. a conductorului se numește factor de creștere a rezistenței în curent alternativ:

$$k_a = \frac{R}{R_c} \geq 1 \quad (15.39)$$

Dacă repartiția neuniformă a densității curentului în secțiunea unui conductor se datorează câmpului magnetic produs de curenții variabili din conductoarele vecine se vorbește de efect de proximitate.

În cazul mediilor conductoare (metale) putându-se neglija curentul de deplasare față de curentul de conducție, sunt valabile ecuațiile:

$$\Delta \bar{H} - \sigma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0; \quad \Delta \bar{E} - \sigma \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \quad (15.40)$$

care presupun medii izotrope, omogene și liniare.

Considerând un regim sinusoidal, mărimile de stare se pot reprezenta în complex. Într-un punct oarecare din câmp, rezultă că se poate scrie:

$$\bar{E} = \bar{u}_E \underline{E}; \quad \bar{H} = \bar{u}_H \underline{H} \quad (15.41)$$

unde  $\underline{E}$  și  $\underline{H}$  sunt date de relațiile:

$$\underline{E} = \underline{E}(0)e^{j\omega t}; \quad \underline{H} = \underline{H}(0)e^{j\omega t} \quad (15.42)$$

în care  $\underline{E}(0)$  și  $\underline{H}(0)$  corespund la momentul  $t = 0$ .

Rezultă că ecuațiile câmpului se scriu sub forma:

$$\Delta \underline{E} - j\omega\sigma\mu \underline{E} = 0; \quad \Delta \underline{H} - j\omega\sigma\mu \underline{H} = 0 \quad (15.43)$$

sau

$$\Delta \underline{E} - \underline{\gamma}^2 \underline{E} = 0; \quad \Delta \underline{H} - \underline{\gamma}^2 \underline{H} = 0 \quad (15.44)$$

unde  $\underline{\gamma}$  reprezintă constanta de propagare:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu} \quad (15.45)$$

Constanta de propagare  $\underline{\gamma}$  mai poate fi scrisă și sub forma:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\omega\sigma\beta} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\beta}{2}} (1 + j) = \alpha(1 + j) \quad (15.46)$$

în care partea reală  $\alpha$  se numește constantă de atenuare, iar partea imaginară  $\beta$  - constantă de fază. În cazul considerat, se observă că cele două mărimi sunt egale:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} = \sqrt{\pi f \sigma\mu} \quad (15.47)$$

Mărimile de stare ale câmpului electromagnetic reprezintă soluțiile unei ecuații de tip Helmholtz, soluții care nu sunt independente, deoarece ele intervin împreună în ecuațiile lui Maxwell. Neglijând curentul de deplasare, ecuațiile lui Maxwell se scriu în complex astfel:

$$\text{rot } \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H}; \quad \text{rot } \underline{H} = \sigma \underline{E} \quad (15.48)$$

Dacă în domeniul considerat există și suprafețe de discontinuitate (presupuse însă fără sarcini electrice și curenți superficiali) la rezolvarea problemei se va ține cont și de condițiile la limită pe aceste suprafețe, exprimate de conservarea componentelor tangențiale ale intensității câmpului electric și intensității câmpului magnetic și de conservarea componentelor normale ale inducției electrice și inducției magnetice:

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad H_{1t} = H_{2t}; \quad D_{1n} = D_{2n}; \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (15.49)$$

### **Pătrunderea câmpului magnetic în conductoare**

Se consideră un bloc dintr-un material conductor, cu permitivitatea  $\mu$ , conductivitatea  $\sigma$ , limitat la stânga de o suprafață plană, infinit extinsă și ocupând semispațiul drept (fig. 15.5). Se consideră că în exteriorul conductorului există un câmp magnetic omogen, sinusoidal în timp, tangent la suprafața conductorului, cu sensul în sensul axei  $Oz$ . Valoarea instantanee a intensității câmpului magnetic, vectorul intensitatea câmpului magnetic și imaginea sa în complex, sunt date de relațiile:

$$H_{ex}(t) = H_{ex\max} \sin \omega t; \quad \bar{H}_{ex} = \bar{k} H_{ex}; \quad \underline{H}_{ex} = \bar{k} \frac{H_{ex\max}}{\sqrt{2}} \quad (15.50)$$

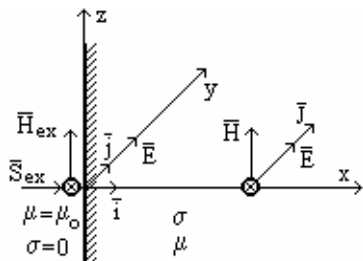


Fig. 15.5 Pătrunderea câmpului electromagnetic în conductor

La suprafața blocului conductor, componenta tangențială a intensității câmpului magnetic  $\bar{H}$  se conservă. Pentru  $x = 0$ , se obține:

$$\underline{H}_0 = \bar{k} \frac{H_{ex\max}}{\sqrt{2}} \quad (15.51)$$

În interiorul blocului intensitatea câmpului magnetic satisface ecuația difuziei, a doua ecuație din relațiile (15.44), care în coordonate carteziene se scrie astfel:

$$\frac{d^2 \underline{H}_z}{dx^2} = \gamma^2 \underline{H}_z \quad (15.52)$$

Soluția generală a ecuației (15.52) este de forma:

$$\underline{H}_z = \underline{A} e^{-\gamma x} + \underline{B} e^{\gamma x} = \underline{A} e^{-(1+j)\alpha x} + \underline{B} e^{(1+j)\alpha x} \quad (15.53)$$

unde  $\underline{A}$  și  $\underline{B}$  sunt constante complexe de integrare.

Deoarece câmpul magnetic la suprafața conductorului este finit, iar atunci când  $\alpha \rightarrow \infty$  se observă că  $\underline{B} e^{(1+j)\alpha x} \rightarrow \infty$ , rezultă că  $\underline{B} = 0$ . Constanta  $\underline{A}$  se calculează din conservarea componentei tangențiale a intensității câmpului magnetic:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{H}_z = \underline{A} = \underline{H}_0 = \frac{H_{ex\max}}{\sqrt{2}} \quad (15.54)$$

Intensitatea câmpului magnetic din interiorul conductorului se exprimă prin vectorul complex:

$$\underline{H} = \bar{k} \underline{H}_z = \bar{k} \frac{H_{ex\max}}{\sqrt{2}} e^{-(1+j)\alpha x} \quad (15.55)$$

Rezultă valoarea instantanee a intensității câmpului magnetic din interiorul conductorului:

$$H(x, t) = \text{Im} \left\{ \sqrt{2} \underline{H}_z e^{j\omega t} \right\} = H_{ex\max} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x) \quad (15.56)$$

Din relația (15.56) se constată următoarele:

- amplitudinea câmpului magnetic scade exponențial cu distanța  $x$ ;
- câmpul magnetic pătrunde în conductor cu viteza:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{\alpha} = \omega \sqrt{\frac{2}{\mu \omega \sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}} \quad (15.57)$$

și are lungimea de undă:

$$\lambda = vT = v \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\alpha} \quad (15.58)$$

Densitatea de curent se obține din ecuația lui Maxwell,  $\text{rot } \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{J}}$ ; calculând rotorul vectorului complex  $\underline{\underline{H}}$  rezultă că singura componentă nenulă a densității de curent este dirijată după axa  $0\mathbf{y}$ , având imaginea în complex:

$$\underline{\underline{J}}_y(x) = -\frac{\partial \underline{\underline{H}}_z}{\partial x} = \frac{H_{\text{ex max}}}{\sqrt{2}}(1+j)\alpha e^{-(1+j)\alpha x} = \alpha H_{\text{ex max}} e^{-\alpha x} e^{j\left(\frac{\pi}{4}-\alpha x\right)} \quad (15.59)$$

Valoarea instantanee a densității de curent este dată de relația:

$$J_y(x, t) = \alpha H_{\text{ex max}} \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x + \pi/4) \quad (15.60)$$

Se observă că densitatea de curent este defazată cu  $\pi/4$  înaintea intensității câmpului magnetic.

Intensitatea câmpului electric în interiorul conductorului rezultă din relația:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{\sigma} \underline{\underline{J}} = j \frac{1}{\sigma} \underline{\underline{J}}_y(x) = j \frac{\alpha}{\sigma} H_{\text{ex max}} e^{-\alpha x} e^{j\left(\frac{\pi}{4}-\alpha x\right)} \quad (15.61)$$

Se observă că intensitatea câmpului electric are componentă nenulă numai după axa  $0\mathbf{y}$ . Valoarea instantanee a intensității câmpului electric este dată de relația:

$$E_y(x, t) = \frac{\alpha}{\sigma} H_{\text{ex max}} \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x + \pi/4) \quad (15.62)$$

și este defazată cu  $\pi/4$  înaintea intensității câmpului magnetic.

Puterea complexă transmisă de câmpul magnetic exterior prin unitatea de suprafață a blocului conductor este dată de vectorul complex al lui Poynting:

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{H}}^* = j \frac{\alpha}{\sigma} H_{\text{ex max}} e^{-(1+j)\alpha x} e^{j\frac{\pi}{4}} \times \bar{\mathbf{k}} \frac{H_{\text{ex max}}}{\sqrt{2}} e^{(1+j)\alpha x} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{S}} = \frac{j}{2} \frac{\alpha}{\sigma} H_{\text{ex max}}^2 (1+j) \quad (15.63)$$

Vectorul lui Poynting este orientat perpendicular pe suprafața conductorului, dinspre dielectric spre conductor. Părțile reală și respectiv imaginară, reprezintă puterea activă, respectiv reactivă ale puterii absorbite pe unitatea de suprafață:

$$P = \text{Re}\{\underline{\underline{S}}\} = \frac{\alpha}{2\sigma} H_{\text{ex max}}^2 ; \quad Q = \text{Im}\{\underline{\underline{S}}\} = \frac{\alpha}{2\sigma} H_{\text{ex max}}^2 \quad (15.64)$$

Câmpurile electric, magnetic și densitatea de curent au valori importante numai în vecinătatea suprafeței conductorului, valorile lor efective scăzând exponențial cu depărtarea de la suprafața conductorului. Astfel, densitatea de curent va avea valoarea efectivă:

$$J_{\text{yef}}(xt) = \alpha H_{\text{ex max}} e^{-\alpha x} \quad (15.64)$$

Logaritmând relația (15.64) se obține expresia:

$$x = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\alpha H_{\text{ex max}}}{J_{\text{yef}}(x)} \quad (15.65)$$

Adâncimea de pătrundere a câmpului electromagnetic în semispațiul conductor se definește ca fiind distanța pentru care amplitudinea densității de curent este atenuată cu 1 neper, rezultând expresia:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (15.66)$$

Adâncimea de pătrundere reprezintă distanța  $\delta$  de la suprafața semispațiului conductor pe care ar trebui repartizat uniform curentul total, pentru ca pierderile de putere activă să fie egale cu cele din cazul repartiției reale neuniforme a curentului.

Din relația (15.66) se constată că adâncimea de pătrundere este o constantă de material (depinde de conductivitatea și de permeabilitatea materialului) și că aceasta este invers proporțională cu rădăcina pătrată a frecvenței.

### Curenții turbionari. Încălzirea prin inducție electromagnetică

Curenții induși într-un conductor masiv de un câmp magnetic variabil în timp sunt numiți curenți turbionari sau curenți Foucault. În miezurile magnetice ale mașinilor, transformatoarelor și aparatelor de curent alternativ, se induc curenți turbionari care determină pierderi suplimentare de putere activă prin efect Joule-Lenz. Puterea dezvoltată de curenții turbionari se poate utiliza pentru a încălzi sau topi anumite piese conductoare. Pe existența forțelor pe care câmpul electromagnetic le exercită asupra conductoarelor parcurse de curenți turbionari, se bazează funcționarea frânelor și ambrajelor electromagnetice.

În cazul unui miez feromagnetic realizat din tole, pierderile specifice (pe unitatea de volum) de putere activă prin curenți turbionari sunt date de relația următoare [ ]:

$$p = \frac{\pi^2}{6} f^2 \sigma B_{\text{max}}^2 g^2 \quad [\text{W} / \text{m}^3] \quad (15.67)$$

unde  $g$  reprezintă grosimea unei tole. Se observă că pierderile de putere activă sunt proporționale cu pătratul frecvenței fluxului magnetic variabil, cu pătratul inducției magnetice maxime în tole, cu pătratul grosimii tolei și invers proporționale cu rezistivitatea tolei ( $\rho = 1/\sigma$ ).

### Efectul pelicular

În cazul în care un conductor cilindric rectiliniu este parcurs de un curent variabil, acesta nu se repartizează uniform în secțiunea conductorului ca în

cazul regimului staționar (curent continuu). În regim variabil are loc o “refulare” a curentului spre periferia conductorului, astfel încât, densitatea de curent va avea valori mai mari spre periferia conductorului. Acest fenomen se numește efect pelicular sau efect skin.

În curent continuu adâncimea de pătrundere a câmpului electromagnetic este infinită (curentul se repartizează uniform în secțiunea conductorului) fiind dată de relația (15.66).

La frecvențe joase, pătrunderea câmpului electromagnetic în conductor este incompletă, densitatea de curent fiind mai mare spre periferia conductorului. Acest fenomen reprezintă efectul pelicular slab, în care se neglijează câmpul magnetic suplimentar al curenților induși. La frecvențe înalte, adâncimea de pătrundere este mică față de raza conductorului, câmpul electromagnetic pătrunzând numai într-un strat superficial. Acesta este efectul pelicular net. Curenții induși de câmpul magnetic, variabil în interiorul conductorului, se opun variației câmpului magnetic, având drept efect reducerea densității de curent din axa conductorului și majorarea densității de curent spre periferia conductorului.

Deoarece intensitatea câmpului magnetic este mai mare spre periferie, fenomenul este mai accentuat la periferia conductorului.

### **Efectul de buclă**

Într-o spiră groasă curentul sinusoidal în timp se repartizează cu densitate mai mare pe suprafața interioară și cu densitate mai redusă pe suprafața exterioară (fig. 15.8).

Efectul de buclă se aplică la instalațiile de încălzire interioară prin inducție, în care conductorul care urmează a fi încălzit este situat în interiorul bobinei inductoare. Deoarece densitatea de curent este mai mare pe fața încălzită a bobinei se obține o îmbunătățire a condițiilor de transfer a energiei.

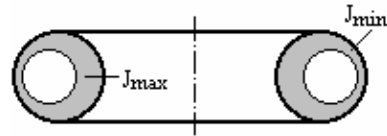


Fig. 15.8 Efectul de buclă

### **Efectul Field**

Densitatea curentului electric dintr-un conductor situat într-o creștătură a unei mașini electrice este mai mare spre periferia miezului și mai redusă spre capătul creștăturii. La o refulare netă, curentului din conductor se repartizează pe o fâșie de înălțime egală cu adâncimea de pătrundere, situată spre periferia miezului.

Efectul de refulare a curentului spre periferia miezului se utilizează în dimensionarea mașinilor asincrone cu pornire automată. La pornire, când frecvența curentului este mare, secțiunea barei transversale de curent este



redusă, rezistența barei este mare, iar pornirea este optimă (curent redus și cuplu de pornire mare). Pe măsură ce rotorul se accelerează, frecvența curentului din bară scade, efectul de refulare a curentului fiind slab.

#### **Efectul de levitație electromagnetică**

Un corp magnetic aflat într-un câmp magnetostatic este supus unor acțiuni ponderomotoare și nu poate fi menținut într-o poziție de echilibru stabil. În schimb, în câmp magnetic variabil în timp există o regiune din câmp în care rezultanta forțelor de interacțiune dintre curenții turbionari și câmpul conductor este egală cu forța de gravitație. În acest fel, conductorul în stare de echilibru “plutește” în câmpul magnetic exterior. Acest fenomen se numește levitație electromagnetică și este utilizat la încălzirea și topirea materialelor electroconductoare, evitând contactul cu alte corpuri.

#### **Efectul de proximitate**

Dacă în vecinătatea unui conductor 1, parcurs de un curent variabil în timp, există un alt conductor 2 parcurs de un curent, câmpul magnetic al conductorului 2 modifică repartiția densității de curent din conductorul 1. Acest fenomen se numește efect de proximitate.